

TEMA 5: INTERPOLACIÓN

5.1.- INTRODUCCIÓN

Supongamos que conocemos $N+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$, de la curva $y = f(x)$, donde las abscisas x_k se distribuyen en un intervalo $[a, b]$ de manera que

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b \quad \text{e} \quad y_k = f(x_k)$$

Construiremos un polinomio $P(x)$ de grado N que pase por estos $N+1$ puntos. El polinomio $P(x)$ puede luego usarse como una aproximación a $f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$; no obstante, si queremos conocer la función error $E(x) = f(x) - P(x)$, entonces sí necesitaremos conocer $f^{(N+1)}(x)$ o bien una cota de su tamaño como

$$M = \max_{a \leq x \leq b} \left\{ \left| f^{(N+1)}(x) \right| \right\}$$

Existen funciones especiales $y = f(x)$, que aparecen en análisis estadísticos o científicos, para las que sólo se dispone de una tabla de valores; es decir, sólo conocemos $N+1$ puntos (x_k, y_k) y es necesario un método para aproximar $f(x)$ en abscisas que no están tabuladas. Si el error de los valores tabulados es significativo, entonces es mejor usar los métodos de aproximación. Si, por el contrario, los puntos (x_k, y_k) tienen un grado alto de precisión, entonces podemos considerar el polinomio $y = P(x)$ que pasa por todos ellos como una buena aproximación de $f(x)$.

Cuando $x_0 < x < x_N$, la aproximación $P(x)$ se conoce como **valor interpolado**; si se tiene $x < x_0$ o bien $x > x_N$, entonces $P(x)$ se conoce como **valor extrapolado**. Los polinomios se utilizan para diseñar algoritmos de aproximación de funciones, para derivar e integrar numéricamente y para dibujar, utilizando un ordenador, curvas que deben pasar por puntos especificados de antemano.

Dados $N+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_N pertenecientes al intervalo $[a, b]$, el polinomio de interpolación de grado menor o igual que N que pasa por esos puntos es único.

Recordemos brevemente que la forma eficiente de evaluar un polinomio $P(x)$:

$$P(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es el método de Horner:

$$P(x) = (\dots(a_N x + a_{N-1})x + \dots + a_1)x + a_0$$

5.2.- POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Interpolación significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado. En la interpolación lineal se utiliza un segmento rectilíneo que pasa por dos puntos que se conocen. La pendiente de la recta que pasa por dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) viene dada por $m = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$, y la ecuación de la misma es:

$$y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

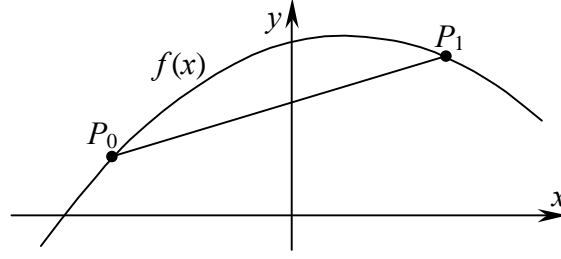


Figura 1.

El matemático francés Joseph Louis Lagrange llegó a este mismo polinomio usando un método ligeramente distinto. Si escribimos

$$y = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

entonces cada uno de los sumandos del miembro derecho de esta relación es un término lineal, por lo que su suma será un polinomio de grado menor o igual que uno. Denotemos los cocientes

$$L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{y} \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Un sencillo cálculo muestra que $L_{1,0}(x_0) = 1$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$ y $L_{1,1}(x_1) = 1$; es decir, el polinomio $P_1(x)$ también pasa por los dos puntos dados:

$$P_1(x_0) = y_0 + y_1 \cdot 0 = y_0 \quad \text{y} \quad P_1(x_1) = y_0 \cdot 0 + y_1 = y_1$$

Los términos $L_{1,0}(x)$ y $L_{1,1}(x)$ definidos anteriormente se llaman **polinomios coeficientes de Lagrange** para los nodos x_0 y x_1 . Usando esta notación, podemos escribir $P_1(x)$ como una suma

$$P_1(x) = \sum_{k=0}^1 y_k L_{1,k}(x)$$

Cuando las ordenadas y_k vienen dadas por $y_k = f(x_k)$, el proceso de utilizar $P_1(x)$ para aproximar $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ se conoce con el nombre **de interpolación lineal**.

Generalizando el polinomio $P_N(x)$ de grado menor o igual que N que pasa por $N+1$ puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_N, y_N) viene dado por:

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^N y_k L_{N,k}(x)$$

donde $L_{N,k}$ es el polinomio coeficiente de Lagrange para los nodos x_0, x_1, \dots, x_N definido por

$$L_{N,k}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_N)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_N)}$$

que multiplica a y_k en el sumatorio y se ha de anular en todos los nodos excepto en x_k donde toma el valor 1:

$$L_{N,k}(x_j) = 1 \text{ si } j = k \quad \text{y} \quad L_{N,k}(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k$$

Resulta cómodo introducir la notación compacta para el producto y escribir:

$$L_{N,k}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N (x - x_j) \bigg/ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N (x_k - x_j)$$

5.3.- TÉRMINOS Y COTAS DEL ERROR

Es importante entender la naturaleza del término del error que se comete cuando se utiliza un polinomio de interpolación para aproximar una función $f(x)$.

Teorema. Supongamos que $f \in C^{N+1}[a,b]$ y que $x_0, x_1, \dots, x_N \in [a,b]$ son $N+1$ nodos de interpolación. Si $x \in [a,b]$, entonces

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x)$$

donde $P_N(x)$ es el polinomio que interpola a $f(x)$ en los $N+1$ nodos y que podemos usar para aproximar $f(x)$:

$$f(x) \approx P_N(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k) L_{N,k}(x)$$

y $E_N(x)$ el término del error que se puede escribir como

$$E_N(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_N) f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$$

para algún valor $\xi = \xi(x)$ del intervalo $[a,b]$.

5.4.- POLINOMIO DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON

Hay ocasiones en las que resulta útil construir varios polinomios aproximantes $P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x)$ y, después, elegir el más adecuado a nuestras necesidades. Si usamos los polinomios de interpolación de Lagrange, uno de los inconvenientes es que no se pueden utilizar los cálculos realizados en la construcción de $P_{N-1}(x)$ para la de $P_N(x)$; cada polinomio debe construirse individualmente y para calcular polinomios de grado elevado es necesario hacer muchas operaciones. Vamos a seguir ahora un camino de construcción distinto, en el cual los polinomios de interpolación, que se llamarán de Newton, se calculan mediante un esquema recursivo:

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

...

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \cdots + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{N-1})$$

El polinomio $P_N(x)$ se obtiene a partir de $P_{N-1}(x)$ usando la recurrencia:

$$P_N = P_{N-1}(x) + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{N-1})$$

El polinomio $P_N(x)$ calculado así es el polinomio de interpolación de Newton.

5.4.1.- Multiplicación encajada

Para evaluar el polinomio $P_N(x)$, lo más eficiente (menos operaciones) es usar el esquema de multiplicaciones encajadas. Para $P_3(x)$, por ejemplo:

$$P_3(x) = ((a_3(x - x_2) + a_2)(x - x_1) + a_1)(x - x_0) + a_0$$

de manera que, si deseamos evaluar $P_3(x)$ para un valor dado de x , entonces operamos desde dentro hacia afuera formando sucesivamente las cantidades:

$$\begin{aligned} S_3 &= a_3 \\ S_2 &= S_3(x - x_2) + a_2 \\ S_1 &= S_2(x - x_1) + a_1 \\ S_0 &= S_1(x - x_0) + a_0 \end{aligned}$$

Esta última cantidad S_0 es $P_3(x)$.

5.4.2.- Cálculo del Polinomio de Interpolación de Newton

Supongamos que queremos encontrar los coeficientes a_k de todos los polinomios $P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x)$ que nos sirven para interpolar una función dada $f(x)$. Entonces cada $P_k(x)$ es el polinomio de Newton que tiene como nodos x_0, x_1, \dots, x_k . Para el polinomio $P_1(x)$, los coeficientes a_0 y a_1 tienen un significado familiar:

$$f(x_0) = P_1(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) = a_0$$

Por tanto: $a_0 = f(x_0)$

$$f(x_1) = P_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$$

y despejando a_1 :

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Es decir, a_1 es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$.

Los coeficientes a_0 y a_1 son los mismos para $P_1(x)$ y $P_2(x)$. Para continuar, ahora evaluamos la expresión en el nodo x_2 y obtenemos:

$$f(x_2) = P_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

de donde se obtiene $a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

que también se puede escribir como

$$a_2 = \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) / (x_2 - x_0)$$

El cálculo de los coeficientes se puede realizar de forma más rápida y sencilla utilizando la notación de las diferencias divididas.

Definición: Diferencias divididas.

Las **diferencias divididas** de una función $f(x)$ se definen como:

la diferencia dividida de orden cero: $f[x_k] = f(x_k)$

la diferencia dividida de primer orden: $f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_k] - f[x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$

la diferencia dividida de segundo orden: $f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-2}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-2}}$

Las diferencias divididas de orden superior se forman de acuerdo con la siguiente fórmula de recursión:

$$f[x_{k-j}, x_{k-j+1}, \dots, x_k] = \frac{f[x_{k-j+1}, \dots, x_k] - f[x_{k-j}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-j}}$$

que se utiliza para calcular la Tabla de Diferencias Divididas:

$$\begin{array}{lcl} x_0 & f(x_0) & \\ & > f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \\ x_1 & f(x_1) & > f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ & > f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} & \\ x_2 & f(x_2) & > f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} \\ & > f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} & \\ x_3 & f(x_3) & \end{array}$$

TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Con esta notación el coeficiente a_2 del polinomio $P_2(x)$ se puede expresar como:

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

Teorema. (Polinomio de interpolación de Newton).

Supongamos que x_0, x_1, \dots, x_N son $N+1$ números distintos en $[a, b]$. Entonces existe un único polinomio $P_N(x)$ de grado menor o igual que N tal que

$$f(x_j) = P_N(x_j) \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N$$

La forma de Newton de este polinomio interpolador:

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_N(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{N-1})$$

siendo $a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N$

Así: $P_0(x) = f(x_0)$

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

...

$$P_N(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_N](x - x_0) \cdots (x - x_{N-1})$$

En este polinomio los nodos se han colocado en el orden x_0, x_1, \dots, x_N .

Si se hubieran colocado los nodos en otro orden, por ejemplo $x_N, x_{N-1}, \dots, x_1, x_0$, el polinomio obtenido habría sido:

$$P_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + \dots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_n) \cdots (x - x_1)$$

pero este polinomio tiene que coincidir con el anterior, luego:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

es decir, la diferencia dividida es independiente del orden en que se tomen los nodos.

En resumen las diferencias divididas tienen las siguientes propiedades:

1ª.- La diferencia dividida de orden K es el coeficiente de x^k en $P_k(x)$.

2ª.- La diferencia dividida de cualquier orden es independiente del orden en que se tomen los nodos.

3ª.- La diferencia dividida de orden K se calcula recursivamente a partir de dos diferencias divididas de orden $K-1$.

5.4.3.- Relación entre la diferencia dividida de orden n y la derivada enésima de f . Término de error.

Teorema.

Sean $f \in C^n[a, b]$ y x_0, x_1, \dots, x_n $n+1$ puntos distintos en $[a, b]$. Entonces $\exists \xi \in (a, b)$ tal que $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi) / n!$

Demostración. Sea $g(x) = f(x) - P_n(x)$, siendo $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de Newton de $f(x)$, en los $n+1$ puntos, es decir,

$$g(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - (f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}))$$

$g(x)$ se anula en x_0, x_1, \dots, x_n , y aplicando el teorema de Rolle generalizado existirá un $\xi \in (a, b)$ tal que $g^{(n)}(\xi) = 0$, es decir,

$$f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, x_1, \dots, x_n] \Rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Utilizando esta relación, el término de error:

$$E_N(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, z] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

siendo $z \in (a, b)$.

Esta expresión permite estimar el error del polinomio de interpolación de grado N cuando no se conoce la función, siempre que sea posible añadir un nodo más y obtener la diferencia dividida de orden $N+1$.

5.5.- INTERPOLACIÓN CON NODOS EQUIDISTANTES

El cálculo del polinomio de interpolación se simplifica cuando los nodos están igualmente espaciados, esto es, $x_{i+1} - x_i = h$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$). En este caso el polinomio se calcula utilizando el concepto de diferencia finita.

Definición: Diferencia finita progresiva.

Se define como **diferencia finita progresiva** de una función $f(x)$ en un punto x_0 , y se representa por $\Delta f(x_0)$ a la diferencia:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

Esta diferencia finita es la de primer orden. Del mismo modo se puede definir la de segundo orden:

$$\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$$

En general: $\Delta^k f(x_0) = \Delta^{k-1} f(x_1) - \Delta^{k-1} f(x_0)$

La relación entre las diferencias finitas progresivas y las diferencias divididas se obtiene:

$$f[x_0x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h} \Rightarrow \Delta f(x_0) = h \cdot f[x_0x_1]$$

$$f[x_0x_1x_2] = \frac{f[x_1x_2] - f[x_0x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{2h^2} \Rightarrow \Delta^2 f(x_0) = 2h^2 \cdot f[x_0x_1x_2]$$

En general: $\Delta^n f(x_0) = n! h^n f[x_0x_1 \dots x_n]$

Definición: Diferencia finita regresiva.

Se define como **diferencia finita regresiva** de $f(x)$ en x_n , y se representa por $\nabla f(x_n)$, a la diferencia:

$$\nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

Esta es la diferencia finita regresiva de primer orden. La de segundo orden será:

$$\nabla^2 f(x_n) = \nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n-1}) = f(x_n) - 2f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})$$

y la de orden k :

$$\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x_{n-1})$$

Ambas diferencias finitas están relacionadas entre sí:

$$\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = \nabla f(x_1)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) = \nabla^2 f(x_2)$$

En general:

$$\Delta^k f(x_0) = \nabla^k f(x_{0+k}) = k! h^k f[x_k x_{k-1} \dots x_0]$$

5.6.- FÓRMULAS DE NEWTON PROGRESIVA Y REGRESIVA

A partir de la fórmula de Newton con diferencias divididas y de la relación entre estas últimas y las diferencias finitas progresivas se tiene:

$$P_N(x) = f(x_0) + f[x_0x_1](x - x_0) + f[x_0x_1x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0x_1 \dots x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Haciendo el cambio de variable $x = x_0 + t \cdot h$ con $t \in (0, n)$:

$$x - x_1 = (t - 1)h; \quad x - x_2 = (t - 2)h; \quad \dots; \quad x - x_{n-1} = (t - n + 1)h$$

$$\begin{aligned}
 P_N(x_0 + th) &= q_N(t) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h} th + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} th(t-1)h + \\
 &\quad + \dots + \frac{\Delta^n(x_0)}{n!h^n} th(t-1)h \dots (t-n+1)h = \\
 &= \Delta^0 f(x_0) + \Delta f(x_0)t + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!} t(t-1) \dots (t-n+1) = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!} t(t-1) \dots (t-k+1) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(x_0) \binom{t}{k}
 \end{aligned}$$

Las diferencias finitas progresivas en x_0 se obtienen formando la siguiente tabla y tomando los elementos de la diagonal descendente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(x_0) & & & & & & \\
 & > & \Delta f(x_0) & & & & \\
 f(x_1) & & & > & \Delta^2 f(x_0) & & \\
 & > & \Delta f(x_1) & & & > & \Delta^3 f(x_0) \\
 f(x_2) & & & > & \Delta^2 f(x_1) & & \\
 & > & \Delta f(x_2) & & & & \\
 f(x_3) & & & & & &
 \end{array}$$

TABLA DE DIFERENCIAS FINITAS PROGRESIVAS

Si se hubiese tomado el polinomio de Newton con diferencias divididas tomando los nodos en el orden x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 , entonces el polinomio resultante sería:

$$P_N(x) = f(x_n) + f[x_n x_{n-1}](x - x_n) + \dots + f[x_n x_{n-1} \dots x_0](x - x_n)(x - x_1)$$

Haciendo el cambio de variable: $x = x_n + t \cdot h$ con $t \in (-n, 0)$:

$$x - x_n = th; \quad x - x_{n-1} = (t+1)h, \quad x - x_{n-2} = (t+2)h \dots$$

y teniendo en cuenta que

$$f[x_n x_{n-1}] = \frac{\nabla f(x_n)}{h}; \quad f[x_n x_{n-1} x_{n-2}] = \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!h^2}; \quad \dots$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P_N(x) &= P_N(x_n + th) = q_n(t) = f(x_n) + \frac{\nabla f(x_n)}{h} t \cdot h + \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!h^2} t \cdot h \cdot (t+1) \cdot h + \dots + \\
 &+ \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!} t \cdot h \cdot (t+1) \cdot h \dots (t+n-1) \cdot h = \nabla f(x_n) + \frac{\nabla f(x_n)}{1!} t + \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!} t(t+1) + \dots + \\
 &+ \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!} t(t+1) \dots (t+n-1) = \sum_{k=0}^n \nabla^k f(x_n) \binom{t+k-1}{k}
 \end{aligned}$$

Las diferencias finitas regresivas en x_n se obtienen formando la tabla correspondiente, y tomando los elementos de la diagonal ascendente.

Las tablas de diferencias finitas progresivas y regresivas son la misma. Solo cambia la notación. En la tabla de diferencias finitas progresivas todo está referenciado a x_0 mientras que en la tabla de diferencias finitas regresivas todo está referenciado a x_n .

Si el punto en el que se quiere interpolar está próximo a x_0 es conveniente usar diferencias finitas progresivas y si está próximo a x_n diferencias finitas regresivas.

Si se consideran todos los nodos el polinomio de interpolación calculado con diferencias finitas progresivas es el mismo que el calculado con diferencias finitas regresivas.

$$\begin{array}{rcl}
 f(x_0) & & \\
 & > \nabla f(x_1) & \\
 f(x_1) & > \nabla^2 f(x_2) & \\
 & > \nabla f(x_2) & > \nabla^3 f(x_3) \\
 f(x_2) & > \nabla^2 f(x_3) & > \nabla^4 f(x_4) \\
 & > \nabla f(x_3) & > \nabla^3 f(x_4) \\
 f(x_3) & > \nabla^2 f(x_4) & \\
 & > \nabla f(x_4) & \\
 f(x_4) & &
 \end{array}$$

TABLA DE DIFERENCIAS FINITAS REGRESIVAS

5.7.- INTERPOLACIÓN POLINOMIAL A TROZOS

Se podría suponer que el error cometido al aproximar una función mediante el polinomio de interpolación disminuye a medida que aumenta el grado de dicho polinomio; sin embargo esto no es así. Un polinomio de grado N puede tener $N-1$ extremos relativos y por lo tanto su gráfica puede presentar oscilaciones importantes. Este fenómeno se conoce como *efecto Runge*. En la gráfica de la figura se representa la función $f(x) = 1/(1+x^2)$ y el polinomio de grado 10 que interpola a f en los puntos $-5, -4, \dots, 0, \dots, 4, 5$.

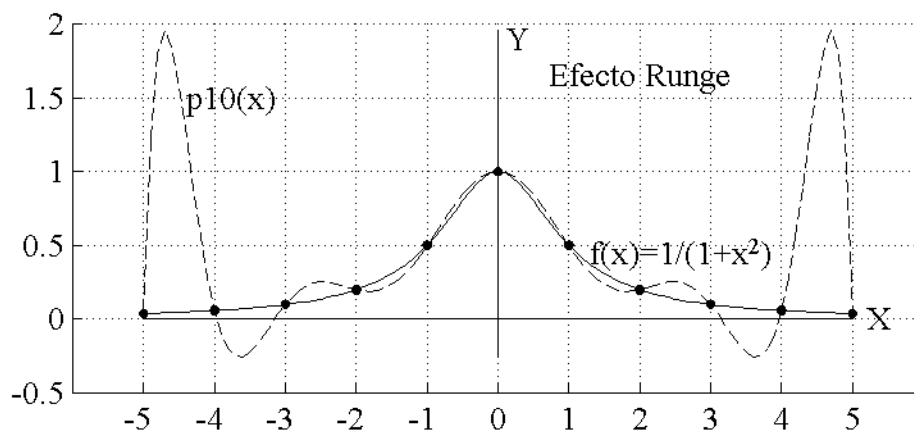


Figura 2

Para resolver este problema se emplea la *interpolación polinomial a trozos*, que consiste en ir definiendo polinomios de grado bajo que interpolan a la función en dos nodos consecutivos. Así, $S_k(x)$ es el polinomio que interpola a f en dos nodos consecutivos (x_k, y_k) y (x_{k+1}, y_{k+1}) . El conjunto de funciones $\{S_k(x)\}$ forma la *curva*

polinomial a trozos o spline. El ajuste de una curva polinomial a trozos a un conjunto de puntos dados tiene aplicaciones en los campos del diseño asistido por ordenador, fabricación asistida por ordenador y sistemas de generación de gráficas mediante ordenador.

Lo más sencillo sería unir los nodos mediante segmentos rectilíneos, pero la gráfica de esta función no es suave, es decir, la derivada primera no es continua en los nodos. También se podrían utilizar polinomios de segundo grado, pero con éstos no se puede asegurar la continuidad de la derivada segunda. Los polinomios más utilizados son los **cúbicos**. Con estos polinomios se consigue que la función $S(x)$ (conjunto de polinomios de grado 3, uno diferente entre cada dos nodos consecutivos) interpole al conjunto de datos y tenga derivadas primera y segunda continuas en el intervalo completo $[x_0, x_N]$. La continuidad de $S''(x)$ significa que el radio de curvatura está definido en todos los puntos del intervalo.

Definición: Spline cúbica interpoladora.

Supongamos que se tienen como datos $N+1$ puntos (x_k, y_k) (con $k=0, \dots, n$) cuyas abscisas están ordenadas de forma creciente. Se dice que una función $S(x)$ es una *spline cúbica interpoladora* para dichos datos si existen N polinomios de tercer grado $S_k(x)$ que se pueden escribir en términos de unos coeficientes a_k, b_k, c_k y d_k tales que:

$$\begin{aligned} 1^\circ.- \quad S(x) = & \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3 & (x_0 \leq x \leq x_1) \\ \dots & \\ S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 & (x_k \leq x \leq x_{k+1}) \\ \dots & \\ S_{N-1}(x) = a_{N-1} + b_{N-1}(x - x_{N-1}) + c_{N-1}(x - x_{N-1})^2 + d_{N-1}(x - x_{N-1})^3 & (x_{N-1} \leq x \leq x_N) \end{cases} \end{aligned}$$

Esto indica que $S(x)$ es un polinomio de tercer grado definido a trozos.

$$2^\circ.- \quad S_k(x_k) = y_k \quad (k=0, 1, \dots, N). \text{ Esto indica que } S(x) \text{ interpola los datos.}$$

$$3^\circ.- \quad S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \quad (k=0, 1, \dots, N-2).$$

$$4^\circ.- \quad S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \quad (k=0, 1, \dots, N-2).$$

$$5^\circ.- \quad S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \quad (k=0, 1, \dots, N-2).$$

Estas tres últimas relaciones significan que $S(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_0, x_N]$, con derivadas primera y segunda continuas en el mismo intervalo. (Con esto se evitan las esquinas que se producen con la interpolación lineal).

Para determinar $S(x)$ hay que calcular los coeficientes a_k, b_k, c_k y d_k , que son en total $4N$. Para ello se plantea un sistema de ecuaciones lineales a partir de las relaciones 2ª, 3ª, 4ª y 5ª, obteniéndose $(N+1) + (N-1) + (N-1) + (N-1) = 4N-2$ ecuaciones. Esto nos deja dos grados de libertad para calcular los coeficientes. Estos dos grados de libertad se llaman *restricciones en los extremos*, porque normalmente son los valores de $S'(x)$ o de $S''(x)$ en los extremos. Entre las splines más utilizadas se tienen:

- Spline natural: $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$; y

- Spline con condiciones de contorno: $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_N) = f'(x_N)$.

5.8.- TEMA 5. EJERCICIOS.

1.— Estudiar el problema siguiente: Hallar un polinomio de grado ≤ 2 tal que:

$$p(x_0) = z_0; \quad p(x_1) = z_1; \quad p'(x_2) = z_2$$

2.— ¿Queda determinado un polinomio $p(x)$ de grado ≤ 3 por los siguiente datos?:

$$a) \quad p(0), \quad p(1), \quad p'(-1), \quad p''(0) \qquad b) \quad p(0), \quad p'(-1), \quad p'''(0), \quad p''(-1/2)$$

3.— Se desea interpolar una función $f(x)$ utilizando un polinomio de la forma $p(x) = a + bx^2$ conociendo $f(x)$ en dos puntos dados x_1, x_2 . Estudiar el problema de interpolación correspondiente.

4.— Determinar el polinomio de interpolación de Lagrange de grado no mayor que dos, que tome los valores 1, 2, -1 en los puntos 0, 1, -2, respectivamente.

$$\text{Sol: } p_2(x) = x + 1$$

5.— Supóngase que se tiene calculada una tabla de diferencias divididas para una función $f(x)$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n por la cual se conoce el polinomio de interpolación $p_n(x)$. Si se desea añadir un punto más x_{n+1} y hallar el nuevo polinomio de interpolación $p_{n+1}(x)$, ¿qué cálculos hay que realizar?

6.— a) Constrúyase la tabla de diferencias divididas para la función $f(x) = x^3$ en los puntos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$. A partir de ella escríbase la expresión del polinomio de interpolación de $f(x)$ en la forma de Newton.

b) Escríbase también en la forma de Lagrange y coméntese el resultado.

$$\text{Sol.: } p_3(x) = x^3$$

7.— En el ejercicio anterior, escríbase el polinomio de interpolación de $f(x)$ en $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$, en las formas de Newton y Lagrange. Comprobar las ventajas de la primera al añadir un punto más, el $x_3 = 4$, y llegar a los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{Sol.: } p_2(x) = 4x^2 - 3x; \quad p_3(x) = x^3$$

8.— Determinar el polinomio de interpolación de grado $n = 3$ que pasa por los puntos dato de la tabla, siguiendo el orden indicado:

i	3	1	0	2
x_i	0	1	3	4
y_i	-5	1	25	55

$$\text{Sol.: } p(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

9.— Escríbase la expresión del polinomio de interpolación si se conocen únicamente los datos $f[x_n], f[x_n, x_{n-1}], \dots, f[x_n, \dots, x_0]$, además de los valores de x_0, \dots, x_n .

$$\text{Sol.: } p_n(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

10.— Si en la fórmula de Newton se prescinde de los dos últimos sumandos, ¿qué representa el polinomio obtenido?

11.— En la siguiente tabla se presentan valores de la función $\cos(\theta)$ y las correspondientes diferencias divididas. Evaluar el polinomio de interpolación de segundo

grado que pasa a través de los valores de la función en $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ para el argumento $\theta = 0.25$. Estudiar el error cometido.

i		θ_i					
0	0.0	1.					
			-0.099667				
1	0.2	0.980066		-0.492112			
			-0.247300		0.037106		
2	0.3	0.955336		-0.477270		0.039670	
			-0.342754		0.060908		0.0022966
3	0.4	0.921060		-0.452906		0.037593	
			-0.478626		0.0779705		
4	0.6	0.825335		-0.421024			
			-0.604934				
5	0.7	0.764842					

Sol.: $f(0.25) \approx p(0.25) = 0.968894$; $E_2(x) \leq 2.4 \cdot 10^{-5}$

12.— Con los siguientes datos:

x_i	0	1	3	4	6	7
f_i	-5	1	25	55	181	289

construir la tabla de diferencias divididas y el correspondiente polinomio de interpolación de mayor grado posible.

Sol.: $x^3 - 2x^2 + 7x - 5$

13.— En la tabla siguiente se dan valores de la función $y(x) = x^{1/2}$ redondeados hasta cinco cifras decimales:

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)$	1	1.02470	1.04881	1.07238	1.09545	1.11803	1.14017

Calcular las diferencias hasta Δ^3 .

Utilizar la tabla para obtener $1.01^{1/2}$, $1.28^{1/2}$, $1.12^{1/2}$.

$$\sqrt{1.01} \approx 1.00499$$

$$\text{Sol.: } \sqrt{1.28} \approx 1.13137$$

$$\sqrt{1.12} \approx 1.05831$$

14.— Calcular los valores y_k que faltan a partir de las primeras diferencias:

y_k	0
Δy_k	1	2	4	7	11	16

15.— Calcular las diferencias finitas hasta las de orden 4 para los siguiente valores y_k . Suponiendo que $x_k = k$, obtener el polinomio de interpolación.

k	0	1	2	3	4	5	6
y_k	0	1	16	81	256	625	1296

Sol.: x^4

16.— Completar la siguiente tabla

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7
y_k	1	2	4	8	15	26	.	.

suponiendo que los datos provienen de una función polinómica.

Sol.: $f(6) = 42; f(7) = 64$

17.— Hállese $2^{1/2}$ con la exactitud de hasta 0.0001 construyendo para la función $f(x) = x^{1/2}$ un polinomio de interpolación en el segmento $[1.69, 2.25]$.

Sol.: $2^{1/2} \approx p(2) = 1.414249$

18.— a) Aplicar la fórmula de Newton progresiva a los puntos de la siguiente tabla para obtener un valor aproximado de $f(1.5)$ mediante un polinomio de interpolación de 2º grado.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	-5	1	9	25	55

b) Aplicar la fórmula Newton regresiva para obtener el valor aproximado de $f(3.5)$ mediante polinomio de tercer grado.

Sol.: a) $f(1.5) \approx p(1.5) = 4$; b) $f(3.5) \approx p(3.5) = 37.875$

19.— a) Formar la tabla de diferencias divididas para los siguientes datos:

x	0.30	0.37	0.41	0.52
$f(x)$	0.97741	0.96557	0.95766	0.93157

b) Obtener el polinomio de interpolación que verifica los datos de la tabla.

c) Una vez definido el polinomio de interpolación, calcular $p_3(0.47)$ y comparar el resultado obtenido con $f(0.47) = 0.94423$.

d) Añadir a la tabla un punto dato $f(0.47) = 0.94423$ y determinar $p_4(x)$. ¿Es sencillo realizar los cálculos insertando un punto adicional en la tabla? Justificar la respuesta.

Sol.: b) $p_3(x) = 0.97741 - 0.16914(x-0.3) - 0.26009(x-0.3)(x-0.37) - 0.01268(x-0.3)(x-0.37)(x-0.41)$

c) $p_3(0.47) = 0.94422$; $E_3(0.47) = 10^{-5}$

d) $p_4(x) = p_3(x) - 0.16776(x-0.3)(x-0.37)(x-0.41)(x-0.52)$

20.— Dada la tabla siguiente correspondiente a $y = \sin(x)$, se pide:

a) Formar la tabla de diferencias finitas hasta las de tercer orden, justificando por qué es suficiente con llegar a las de este orden.

b) A partir de esta tabla, obtener la mejor aproximación de $\sin(0.2443)$, $\sin(0.9774)$ y $\sin(0.7505)$, justificando las elecciones de puntos y fórmulas utilizadas. Obtener la aproximación de los errores cometidos al calcular $\sin(0.2443)$ y $\sin(0.9774)$.

x	0.26178	0.34905	0.43632	0.52359	0.61086	0.69813	0.78540	0.87267	0.95994
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

Sol.: $\sin(0.2443) \approx 0.2419$; $\sin(0.9774) \approx 0.8291$; $\sin(0.7505) \approx 0.6820$
 $e(0.2443) \leq 2.04 \cdot 10^{-6}$; $e(0.7505) \leq 1.59 \cdot 10^{-6}$

21.— Completar la siguiente tabla de diferencias:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0				
5	...	0.0888	0.0013	...		
10	0.0002	
15	-0.0002
20	0.0017		
25	0.4663	...				

22.— a) Completar la tabla de diferencias para los siguientes datos:

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
y	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

b) Mediante un polinomio cúbico de interpolación obtener $y(0.58)$.

Sol.: $y(0.58) \approx 0.185616$

23.— Utilizando diferencias progresivas, encontrar un valor aproximado de $y(23)$ usando los datos de la siguiente tabla:

x_i	10	20	30	40	50	60
y_i	0.17365	0.34202	0.50000	0.64279	0.76604	0.86603

a) A partir de un polinomio de primer grado.

b) A partir de un polinomio de segundo grado.

c) A partir de un polinomio de tercer grado.

Sol.: a) $y(23) \approx 0.389414$; b) $y(23) \approx 0.391009$; c) $y(23) \approx 0.390750$

24.— Si se denota por $P_2(x)$ el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en los nodos -1 , -0.75 y -0.5 , y por $R_2(x)$ el error debido a la aproximación de $y = e^x$ mediante su polinomio de interpolación, obtener una cota máxima del error cometido sabiendo que

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Sol.: $0.6080 \cdot 10^{-3}$

25.— Dada la siguiente tabla de puntos pertenecientes al gráfico de la función $f(x)$:

x_k	3	4	5	6
$f(x_k)$	6	24	60	120

a) Construir la tabla de diferencias divididas.

b) Calcular un polinomio de interpolación de segundo grado mediante la fórmula de Newton que sirva para obtener un valor aproximado de la función para $x = 4.5$. Hacer una estimación del error cometido con dicha aproximación.

c) Construir la tabla de diferencias finitas progresivas.

d) Calcular el valor aproximado de $f(4.5)$ utilizando la fórmula de Newton progresiva

mediante un polinomio de primer grado.

e) Mediante un polinomio de segundo grado.

f) Mediante un polinomio de tercer grado.

g) Hacer en los dos primeros casos una estimación del error cometido.

Sol.: b) $f(4.5) \approx 39$, $e_2(4.5) \approx 0.375$; d) $f(4.5) \approx 42$; e) $f(4.5) \approx 39$

f) $f(4.5) \approx 39.375$; g) $e_1(4.5) \approx -3$, $e_2(4.5) \approx 0.375$

26.— Utilizar los siguientes valores para construir un polinomio de Lagrange de cuarto orden, mediante el cual aproximar $f(1.25)$, siendo $f(x) = e^{x^2-1}$ la función a considerar.

Hallar también un límite para error cometido en la aproximación $f(x)$.

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.00000	1.23368	1.55271	1.99372	2.64470

Sol.: $f(1.25) \approx 1.754961$, $|e_4(1.25)| \leq 0.000238$

27.— Consideremos la función $f(x) = 3xe^x - 2e^x$. Aproximar $f(1.03)$ utilizando el polinomio de interpolación de grado ≤ 2 , usando $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$. Comparar el error cometido con el límite de error de la interpolación.

Sol.: $f(1.03) \approx 3.053048$, $|e_4(1.03)| \leq 0.000119$

28.— Dada la tabla de valores de la función $y = \sin(x)$ desde $x = 15^\circ$ hasta $x = 55^\circ$ con amplitud de paso $h = 5^\circ$:

x	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0.2588	0.3420	0.4226	0.5000	0.5736	0.6428	0.7071	0.7660	0.8192

a) Formar la tabla de diferencias, hasta las de tercer orden, justificando por qué es suficiente con llegar a las de este orden.

b) A partir de esta tabla obténganse las mejores aproximaciones posibles para los valores $\sin(14^\circ)$ y $\sin(43^\circ)$, justificando las elecciones de puntos y las fórmulas utilizadas.

c) Obtener aproximaciones de los errores cometidos al calcular los valores anteriores.

Sol.: b) $\sin(14^\circ) \approx 0.2419$, $\sin(43^\circ) \approx 0.6820$; c) $e_3(43^\circ) \approx 0$

29.— a) Deducir los polinomios de interpolación de Newton de cocientes incrementales de grados sucesivos (1° , 2° , 3° , 4°) y los términos de error correspondientes para la función $f(x)$ definida por los puntos $(x_i, f(x_i))$ con $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

b) Utilizando los datos de la tabla, correspondientes a la función $f(x) = \cos(x)$, obtener los polinomios deducidos en el apartado a), así como los términos de error correspondientes.

x_k	$f[x_k]$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$	$f[, , , ,]$
0.0	<u>1.0000000</u>				
1.0	0.5403023	<u>-0.4596977</u>			
2.0	-0.4161468	-0.9564491	<u>-0.2483757</u>		
3.0	-0.9899925	-0.5738457	0.1913017	<u>0.1465591</u>	
4.0	-0.6536436	0.3363489	0.4550973	0.0879319	<u>-0.0146568</u>

30.— Dada la siguiente tabla correspondiente a la función $f(x) = e^{-x}$, se desea obtener una estimación de $f(0.55)$:

x	0.0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$f(x)$	1.0000	0.8825	0.7788	0.6873	0.6065	0.5353	0.4724	0.4169	0.3679

Obtener el grado N del polinomio para que, con una elección adecuada de los puntos base, la cota del error de truncamiento de $p_n(x)$ sea menor que 10^{-4} . Construir el correspondiente polinomio de interpolación y obtener la estimación pedida.

Sol.: $f(0.55) \approx p_2(0.55) = 0.576868$