UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

ALGORITMOS NUMÉRICOS: LABORATORIO 2

NICOLÁS OLIVARES

Profesor:
Oscar Rojas
Ayudante:
Richard Torti

Santiago - Chile
November 19, 2016

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

El uso actual de software computacional ha llevado a las personas a depender de los calculos realizados por estas herramientas, estos elementos constituyen una ayuda para los usuarios comunes. Los que usted no sabe, es que detrás de estos softwares existen conceptos matemáticos estudiados en tiempos pasados, los cuales se aplican mediante el uso de algoritmos que permiten obtener resultados interpretables.

1.2 OBJETIVO GENERAL

Elevar el conocimiento sobre la manera en que los métodos numéricos de interpolación, de integración numérica y sus errores se comportan.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Entender los conceptos de interpolación e integración numérica y sus algoritmos de construcción.
2. Construir un programa que interpole funciones e integre sus aproximaciones.
3. Analizar los resultados obtenidos del programa.

1.4 DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

En esta experiencia de laboratorio se solicita aplicar 4 métodos de interpolación diferentes a dos funciones dadas, y analizar su error. Utilizar las aproximaciones obtenidas e integrarlas mediante un método de integración numérica, analizar el error.

1.5 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Este documento consta de 3 partes principales:

- Introducción, al tema en cuestión para motivar al lector y entender los objetivos.
- Desarrollo, consta de dos partes.
  - PARTE I: Enfocado a la aplicación de la interpolación y su análisis.
  - PARTE II: Enfocado a la aplicación de la integración numérica en base a las aproximaciones anteriores y su análisis.

- Conclusión, un repaso a través de los conceptos revisados y la evaluación de los objetivos cumplidos.
- Bibliografía, una recopilación de las fuentes bibliográficas que se utilizan para la elaboración de este informe.
- Anexo, en esta sección encontrará el marco teórico en el que se basan las implementaciones de este informe.

1.6 HERRAMIENTAS UTILIZADAS

Las herramientas utilizadas fueron:

- MATLAB R2015a

CAPÍTULO 2. DESARROLLO

En la descripción de la experiencia en la primera parte de este informe, se explica que se utilizarán dos funciones sobre las cuales se aplicaran las aproximaciones y el trabajo de integración numérica, estas funciones estan expresadas en las ecuaciones 2.1 y 2.2

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x + x \tag{2.1}$$

$$f_2(x) = x^3 + 4x^2 - 10x + 2 \tag{2.2}$$

Las aplicaciones de los métodos se realizaran dentro del intervalo presentado en 2.3, con distintas medidas de distancia entre los puntos en el interior del intervalo, distancias de 0.5, 1, 2, 5 y 0.05

$$[-20, 20] \tag{2.3}$$

Para efectos de posteriores cálculos se realiza un análisis previo de las funciones que se utilizaran Las funciones aquí presentes son funciones continuas en su dominio y recorrido, sus derivadas primera y segunda con respecto a x se presentan en las ecuaciones 2.4 y 2.5.

$$f_1^{'}(x) = \mathrm{e}^x + 1 \quad f_1^{"}(x) = \mathrm{e}^x \tag{2.4}$$

$$f_2^{'}(x) = 3x^2 + 8x - 10 \quad f_2^{"}(x) = 6x + 8 \tag{2.5}$$

Mientras que en las ecuaciones 2.6 y 2.7 se presentan las integrales *reales* con los límites del intervalo.

$$I_1 = \int_{-20}^{20} \mathrm{e}^x + x \, \mathrm{d}x \tag{2.6}$$

$$I_2 = \int_{-20}^{20} x^3 + 4x^2 - 10x + 2 \, \mathrm{d}x \tag{2.7}$$

2.1 PARTE II. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

Los intervalos para las aproximaciónes, con su respectivo número de segmentos n y numero de puntos $n+1$, se presentan en las ecuaciónes desde 2.8 a 2.12.

$$[-20, -19.5, -19.0, -18.5, ..., 18.5, 19.0, 19.5, 20] \quad con \quad n = 80 \tag{2.8}$$

$$[-20, -19, -18, -17, ..., 17, 18, 19, 20] \quad con \quad n = 40 \tag{2.9}$$

$$[-20, -18, -16, -14, ..., 14, 16, 18, 20] \quad con \quad n = 20 \tag{2.10}$$

$$[-20, -15, -10, -5, ..., 5, 10, 15, 20] \quad con \quad n = 8 \tag{2.11}$$

$$[-20, -19.95, -19.90, -19.85, ..., 19.85, 19.90, 19.95, 20] \quad con \quad n = 800 \tag{2.12}$$

Ahora bien, al aplicar las aproximaciones se obtuvieron un polinomio para cada función, por cada método, para cada intervalo. Por lo tanto, los resultados del los polinomios resultantes quedarán en el anexo de este documento.

Las ecuaciones desde la 5.14 hasta la 5.17 corresponden a la aproximación de mínimos cuadrados de la función de 2.1.

Las ecuaciones desde la 5.18 hasta la 5.21 corresponden a la aproximación de mínimos cuadrados de la función de 2.2.

Para el Método de Mínimos Cuadrados se aplica una aproximación cúbica para ambas funciones, porque en conocimiento de la estructura de las funciones dadas, intuitivamente este grado de polinomio ajustaría mejor la aproximación de la función. El resto resultados, cómo se explica en el anexo se encuentra en el archivo que el programa crea.

Tabla 2.1: Errores de aproximación para la función f_1 parte 1

Método/Generado con intervalo	0.5	1
Mét. Mínimos Cuadrados	3.766503442046582e+07	4.015786049226846e+07
Mét. Diferencias Divididas	1.693043551782026e+17	0.001736742554180
Mét. Diferencias Finitas	Inf	Inf

Tabla 2.2: Errores de aproximación para la función f_1 parte 2

Método/Generado con intervalo	2	5
Mét. Mínimos Cuadrados	4.884408202220718e+07	7.542627525257458e+07
Mét. Diferencias Divididas	8.317148392863780e+04	2.154531673374765e+07
Mét. Diferencias Finitas	Inf	Inf

Tabla 2.3: Errores de aproximación para la función f_2 parte 1

Método/Generado con intervalo	0.5	1
Mét. Mínimos Cuadrados	5.496842434053571e-13	1.375707172017598e-12
Mét. Diferencias Divididas	3.693293706362401e-13	3.693293706362401e-13
Mét. Diferencias Finitas	5.708739751087501e+07	9.384546540788147e+08

Cada uno de los errores de las tablas desde la Tabla 2-1 hasta la Tabla 2-4, corresponde al cálculo del RMSE 5.9.

Tabla 2.4: Errores de aproximación para la función f_2 parte 2

Método/Generado con intervalo	2	5
Mét. Mínimos Cuadrados	1.281428266929992e-12	4.378315783645385e-13
Mét. Diferencias Divididas	3.693293706362401e-13	3.693293706362401e-13
Mét. Diferencias Finitas	8.996224404298437e+09	1.445927164357076e+11

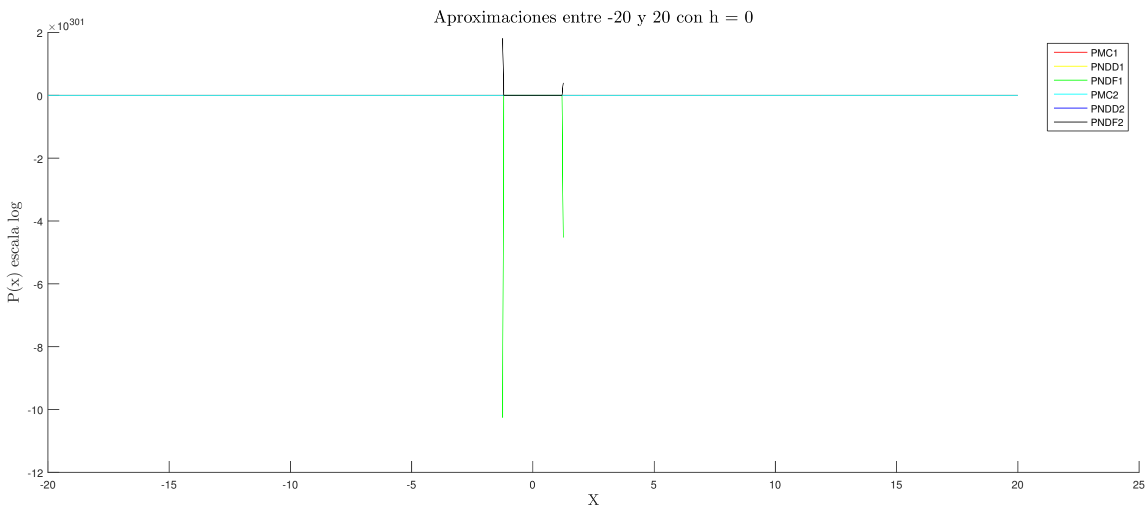

Figura 2-1: Gráfico de aproximaciones funciones con soporte $[-20, 20]$ *con* $h = 0.05$

Análisis de error de interpolación

Cada uno de los métodos entrega aproximaciones polinomiales de distintos grados. Por ejemplo el de Diferencias Finitas y Diferencias Divididas dependen del número de puntos del soporte, entregando un polinomio de grado n siendo n el número de segmentos. En el caso de Mínimos Cuadrados el grado del polinomio resultante no depende del soporte si no más bien uno determina el grado que se le desea otorgar al polinomio de aproximación. En estos casos es necesario conocer previamente, la gráfica de la función, para así, intuitivamente, definir un grado que ajuste pertinentemente la función.

Para la función 2.2 el polinomio resultante entrega un RMSE con 12 cifras significativas por lo tanto se puede decir que el método aproxima de buena manera a la función. Esto se debe a lo mencionado anteriormente ya que en el programa se elijió el grado 3 para aproximar a la función 2 que en sí ya corresponde a un polinomio de grado 3. Por lo tanto el error que se vislumbra corresponde al mínimo error producido por las aproximaciones de la máquina.

El error que entrega *Inf* en el método de Diferencias Finitas se produce porque el método no se encuentra al 100% implementado debido al uso de la fórmula de las diferencias finitas progresivas que se múltiplcan por la combinatoria que depende de t, en el cambio de variable se produce una discordancia para multiplicar estos factores por la sucesión de multiplicaciones de $(x - x_1)...(x - x_k)$.

En cuanto al gráfico de la Figura 2-1 es posible observar que dado que algunos de los métodos de interpolación terminan con resultados similares, como es el caso de los mínimos cuadrados y diferencias divididas para la función 2.2, estas gráficas son idénticas.

2.2 PARTE III. INTEGRRACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES

Para los valores reales de las integrales de las funciones se evaluan 2.6 y 2.7 en MATLAB, mediante el método *integral(fun,a,b)*

$$I_1 = 4.851651954097902\,\mathrm{e}^{08} \tag{2.13}$$

$$I_2 = 2.141333333333333\,\mathrm{e}^{04} \tag{2.14}$$

Según las tablas obtenidas en la parte II , donde los errores se presentan en las tablas desde Tabla 2-1 a la Tabla 2-4, se seleccionan los métodos y polinomios que presentan el menor error para cada una de las funciones. Estos polinomios serían:

- Para la función 2.1:
  - El polinomio interpolado con mínimos cuadrados para el soporte 2.8 cuyo error está en la tabla Tabla 2-1, lo llamaremos $PMC1_{05}$
  - El polinomio interpolado con diferencias divididas para el soporte 2.9, cuyo error está en la tabla Tabla 2-1, lo llamaremos $PNDD1_1$
  - Dado los errores infinito que se generaron para el método de diferencias finitas, no se utiliza para realizar la integración.

- Para la función 2.2:
  - El polinomio interpolado con mínimos cuadrados para el soporte 2.11 cuyo error está en la tabla Tabla 2-4, lo llamaremos $PMC2_5$
  - El polinomio interpolado con diferencias divididas para el soporte 2.11, cuyo error está en la tabla Tabla 2-4, lo llamaremos $PNDD2_5$
  - El polinomio interpolado con diferencias finitas para el soporte 2.8 cuyo error está en la tabla Tabla 2-3, lo llamaremos $PNDF2_{05}$

La Tabla 2-5 y la Tabla 2-6 muestran los valores resultantes de la integración numérica de los polinomios descritos anteriormente.

Tabla 2.5: Resultados de integración numérica de función 2.1

Polinomio/Método	Trapecio	Simpson
$PMC1_{05}$	5.682075584625963e+08	5.296091486925169e+08
$PNDD1_1$	1.940661122570935e+09	1.456960870900388e+09

Tabla 2.6: Resultados de integración numérica de función 2.2

Polinomio/Método	Trapecio	Simpson
$PMC2_5$	5632	21204
$PNDD2_5$	5632	21204
$PNDF2_{05}$	-382380	-404196

Ahora bien, se puede determinar el error porcentual en base al valor real y la aproximación.
Los valores reales de la integral son los descritos en la primera parte de la sección de desarrollo , las ecuaciones 2.6 y 2.7.
Se presentan los errores porcentuales obtenidos en la Tabla 2-7 y Tabla 2-7

Tabla 2.7: Errores porcentuales entre integración real y la numérica de la función 2.1

Polinomio/Método	Trapecio	Simpson
$PMC1_{05}$	$e\% \approx 17.12\%$	$e\% \approx 9.16\%$
$PNDD1_1$	$e\% \approx 300.00\%$	$e\% \approx 200.30\%$

Tabla 2.8: Errores porcentuales entre integración real y la numérica de la función 2.2

Polinomio/Método	Trapecio	Simpson
$PMC2_5$	$e\% \approx 73.70\%$	$e\% \approx 0.98\%$
$PNDD2_5$	$e\% \approx 73.70$	$e\% \approx 0.98\%$
$PNDF2_{05}$	$e\% \approx 1885.71\%$	$e\% \approx 1987.59\%$

Análisis de error de integración

Como es posible ver en la tabla Tabla 2-6, el método de diferencias finitas no se encuentra funcionando de manera correcta, porque entrega un valor de integral negativo, lo cuál por definición no es posible, considerando que la integral representa el valor de un área bajo la curva descrita por el polinomio. Por lo tanto se descarta del análisis del error porcentual al polinomio $PNDF2_{05}$ al resultado de este método, porque se arrastra el error previo.

El uso de Simpson en la integración se realizó en su totalidad con la regla de Simspon $\frac{1}{3}$ ya que el número de segmentos correspondia a números impares para cada intervalo. Si evaluamos cada uno de los errores porcentuales de la integración numérica, tenemos lo siguiente,

- Función 2.1
  - $PMC1_{05}$: El error obtenido de 17.12% responde a un margen consitente con las características de la función aproximada, considerando que se aplicó una aproximación cúbica sobre una función exponencial.
    El error obtenido por Simpson al menor error de los polinomios evaluados en la integración numérica de la función 2.1, esto se debe a que la aproximación del polinomio realizada, ajusta a la curva de manera mas exacta. El error obtenido refleja que el uso de la fórmula de Simpson con la división de los segmentos, es más precisa, en este caso, que la regla del Trapecio.
  - $PNDD1_1$: Independientemente, cada método presenta un error porcentual contundente con respecto al valor real, por lo tanto se puede decir que la aproximación realizada no es lo suficientemente ajustada, y esto es comprobable del error de aproximación visible en la Tabla 2-1. Existe una diferencia de 100 puntos porcentuales entre la utilización de los dos métodos de integración numérica, pero ambos estan de igual manera distanciados de ser un error aceptable.
- Función 2.2
  - $PMC2_5$ y $PNDD2_5$: Dado que los valores obtenido son los mismos tanto para el método de simpson y para el trapecio, es pertinente analizarlos de manera conjunta. Los resultados iguales, reflejan que ambos métodos de interpolación aplicados, el de Diferencias Divididas y el de Mínimos Cuadrados resultaron entregar el mismo polinomio, o sea,$PMC2_5 = PNDD2_5$. Dado que la función a aproximar es de por sí un polinomio, entonces la aproximación, como es

comprobable, es el mismo polinomio de grado 3.
Ahora bien, si el polinomio y la función son las mismas, ¿Por qué los errores de los métodos no son 0%?. Esto se debe a que los métodos de Simpson y trapecio, pese a entregar un valor cercano, no representan el cálculo infinitesimal que se realiza y en lo que se basa el concepto integral.

CAPÍTULO 3. CONCLUSIÓN

3.1 REVISIÓN GENERAL

En un ámbito general, se destacan los suiguientes puntos, como parte del cierre.

- Dada la participación en esta experiencia fue posible abordar los conceptos vistos en la teoría, de una manera práctica y consistente con la formación que nuestra carrera nos brinda.
- La utilización de distintos métodos de interpolación e integración, y el análisis del error, establecen un precedente para que en el futuro en el cuál se trabaje con elementos como fenómenos naturales u otro elemento de estudio.

3.2 REVISIÓN DE OBJETIVOS

- El proceso de entendimiento se realizó mediante las clases teóricas y además con el material disponible en la web del curso y la red en general.
- Se logró construir un programa que cumpliera con dichas características. Pese a esto, se estima que se completó un 90% del laboratorio ya que falta la aplicación del método de splines cúbicos. El concepto de splines cúbicos se entendió, pero hubo una falencia en la habilidad de generar un aglorimto que permitiera obtener una aproximación de todos los n polinomios que se deberían generar en el método.
- Existe un análisis claro y detallado de los resultados obtenidos, principalmente basado en la teoría del error, que permite distinguir la calidad de los métodos utilizados en base a un concepto numérico y objetivo.

CAPÍTULO 4. BIBLIOGRAFÍA

[1] P. U. Javeriana, *Método de diferencias divididas (polinomio interpolante de newton)*, 2016. [Online]. Available: http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA10/capitulo3/3.3.htm.

[2] A. L. Benito, *Interpolación: Fórmulas en diferencias finitas*, 2007. [Online]. Available: http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/programacion-y-metodos-numericos/contenidos/TEMA_3/Presentaciones/I4_Interpolacion_Dif_Fin_ocw.pdf.

[3] J. G. Quezada, *Tutorial de análisis numérico interpolación: Splines cúbicos*. [Online]. Available: http://numat.net/tutor/splines.pdf.

CAPÍTULO 5. ANEXO

5.1 MARCO TEÓRICO

5.1.1 Interpolación

Con el concepto de interpolación se busca entender cómo tener una aproximación de una función $f(x)$ mediante la obtención de un polinomio $P(x)$ dentro de un intervalo finito $[a, b]$ denominado soporte. Como es posible ver en la ecuación 5.1, se expresa la equivalencia.

$$f(x) \approx P(x) \tag{5.1}$$

El grado del polinomio resultante de la interpolación dependerá del método utilizado. En este informe se especifica el uso de 4 métodos de interpolación, *Diferencias Dividas,Diferencias Finitas, Mínimos Cuadrados y Splines Cúbicos*

Método de Newton

Este método, creado por Isaac Newton, corresponde a un método de integracion polinómica que se basa en la utilización de un proceso recursivo para encontrar los coeficientes, donde cada uno de los coeficientes depende de los valores de los coeficientes ya obtenidos además de los valores de la función evaluados en los puntos del soporte.

$$P(x) = f[x_0]+f[x_0, x_1](x-x_0)+f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)+...+f[x_0, ..., x_n](x-x_0)...(x-x_n) \tag{5.2}$$

- Método de Diferencias Divididas: Este método obtiene los valores de los coeficientes mediante la ley de formación expresada en la ecuación 5.3.[1]
- Método de Diferencias Finitas Este método obtiene los valores de los coeficientes mediante la ley de formación expresada en la ecuación 5.5.[2]

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1, ..., x_k] - f[x_0, ..., x_k - 1]}{x_k - x_0} \quad k = 0, 1, ..., n \tag{5.3}$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i); \tag{5.4}$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{\Delta^k f_0}{h^k k!} \quad h = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1 \quad k = 1, 2, ..., n \tag{5.5}$$

Método de Mínimos Cuadrados

Este método de interpolación se basa en la utilización de una nube de puntos, y una familia de funciones que generan un sistema de ecuaciones normales. En el caso particular para un polinomio de cierto grado, se genera la ecuación 5.6 con m coeficientes, en base a esto el método establece que la manera de obtener dichos coeficientes utilizando el sistema de ecuaciones de la ecuación 5.7

$$P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_0 x^1 + \alpha_0 x^2 + ... + \alpha_{m-1} x^{m-1} \tag{5.6}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^{m-1} \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & ... & \sum x_i^m \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & ... & ... & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^3 & ... & ... & ... & \sum x_i^{m+2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \sum x_i^{m-1} & ... & ... & ... & \sum x_i^{2m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ ... \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \\ ... \\ \sum y_i x_i^{m-1} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Método de Splines Cúbicos

Este método se basa en el concepto de interpolación por segmentos, es decir, se interpolan n segmentos entre x_0 y x_n donde cada segmento $[x_{i-1}, x_i]$ tiene su respectivo polinomio de grado 3 que aproxima a la función entre esos valores.[3] Ahora bien, se tienen que cumplir las condiciones de continuidad necesarias para que el método funcione. Esto es, la sgunda derivada $f^{"}(x)$ debe ser continua en en todo el recorrido de la función, ya que esto permite lo expresado en la ecuación 5.8

$$[x_{i-1}, x_i] = y_i = [x_i, x_{i+1}] \tag{5.8}$$

5.1.2 RMSE

Root Mean Square Error es una medida error, que evalua las diferencias entre la aproximación $P(x)$ con x en todo el intervalo porporcionado con la función evaluada en los mismos puntos. Las diferencias se elevan al cuadrado para que el signo de estas no influya en la medición. Se aplica la raiz cuadrada para que el error se exprese en función de las mismas unidades de la variable.
La ecuación 5.9 expresa el RMSE.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{0}^{n} (P(x_i) - f(x_i))^2}{n}} \tag{5.9}$$

5.1.3 Integración numérica

El concepto de integración numérica surge de la problemática sobre el cálculo de integrales infinitesimales que no cuentan con integrales primitivas. Para estos métodos se utiliza la aproximación $p(x)$ de una función$f(x)$

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cong \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.10}$$

Fórmula de Simpson

Las formulas de Simpson utilizadas en este informe analítico son dos, en las ecuaciones 5.11 y 5.12 se pueden ver cuales son las fórmulas aplicadas para la implementación, Simspon $\frac{1}{3}$ y Simpson $\frac{3}{8}$, respectivamente.Siendo n el número de segmentos a utilizar.

Estas aplicaciones son múltiples es decir, sirven para un número alto de segmentos y se utilizan diferenciadamente según sea el número de intervalos que se desean utilizar para el calculo, si n es par se utiliza la ecuación 5.11 y en caso de que n sea impar se utiliza la ecuación 5.12

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,..}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,5,..}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n}\right] \tag{5.11}$$

$$I \approx 3(b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{8n}\right] \tag{5.12}$$

Fórmula del trapecio

Esta regla presenta una fórmula basada en las ecuaciones de Newton-Cotes, donde se utiliza la regla del trapecio. La ecuación 5.13 se utiliza en la implementación.

$$I \approx \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2}\right] \tag{5.13}$$

5.2 POLINOMIOS RESULTANTES

Los polinomios fueron extraídos mediante el uso de la función latex y del complemento de Symbolic Matlab Toolbox. Solo se muestran algunos de los polinomios obtenidos, ya que debido a la densidad de los arreglos, en casos como las aproximaciones de Newton, no es posible expresarlos en este documento sin extenderlo demaciado. Para conocer los valores de los resultados de los restantes polinomios se puede revisar la carpeta test dentro del directorio del laboratorio, el archivo *data.mat* contiene todas las variables resultantes de este laboratorio.

5.2.1 Mínimos Cuadrados

$$\frac{6479641541209931\,x^3}{274877906944} + \frac{8197579605087863\,x^2}{34359738368} - \frac{1962723132715721\,x}{536870912} - \frac{4666292509019685}{268435456} \tag{5.14}$$

$$\frac{7597406346639581\,x^3}{274877906944} + \frac{4889865245204589\,x^2}{17179869184} - \frac{4684824850936341\,x}{1073741824} - \frac{708933529746561}{33554432} \tag{5.15}$$

$$\frac{2407507973747527\,x^3}{68719476736} + \frac{6489613986176329\,x^2}{17179869184} - \frac{3024954146909259\,x}{536870912} - \frac{3849832686279637}{134217728} \tag{5.16}$$

$$\frac{6264941302153093\,x^3}{137438953472} + \frac{2530001586191545\,x^2}{4294967296} - \frac{3728788166288205\,x}{536870912} - \frac{1473175489961799}{33554432} \tag{5.17}$$

$$x^3 + 4\,x^2 - 10\,x + 2 \tag{5.18}$$

$$x^3 + 4\,x^2 - 10\,x + 2 \tag{5.19}$$

$$x^3 + 4\,x^2 - 10\,x + \frac{1125899906842595}{562949953421312} \tag{5.20}$$

$$x^3 + 4\,x^2 - 10\,x + 2 \tag{5.21}$$

5.2.2 Diferencias Divididas

Revisar polinomio en el archivo *data.mat*.

5.2.3 Diferencias Finitas

Revisar polinomio en el archivo *data.mat*.