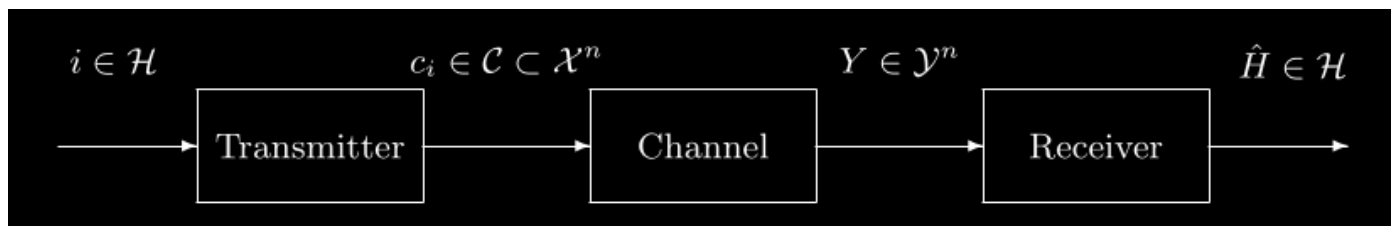


Comunicaciones digitales

Diseño de receptor para observaciones en tiempo discreto

Introduccion

Queremos estudiar de manera general la estructura de un sistema de comunicación punto a punto a que envía mensajes a través de un canal, si bien este sistema es una generalización, nos va a servir posteriormente para aplicarlo a sistemas de comunicación digital, de hecho vamos a ir y volver continuamente en el estudio de casos particulares de este sistema.



Un sistema de comunicación de manera general está compuesto por 4 partes; Fuente, transmisor, canal y receptor. Cada uno con una función bien diferenciada que se detalla a continuación:

- Fuente: Es la parte del sistema que genera el mensaje a ser transmitido, si se tiene un conjunto de mensajes posibles $\mathcal{H} = \{0, 1, \dots, m - 1\}$ donde $0, 1, \dots, m - 1$ hace referencia al índice del mensaje en el conjunto de los mensajes para no perder generalidad. Para modelar la aleatoriedad en la generación de mensajes, se representa la fuente como una variable aleatoria H llamada hipótesis real con una distribución de probabilidad $P_H(i)$ que representa la probabilidad de enviar el mensaje (referenciado por su índice) i
- Transmisor: La función del transmisor es adaptar el mensaje de forma tal que sea posible ser enviado por el canal, a la señal resultante se la denota como c_i perteneciente a un conjunto (o constelación) de señales discretas \mathcal{C} o en el caso de ser una señal continua w_i perteneciente al conjunto de señales \mathcal{W} que a su vez es un subconjunto de del espacio de todas las señales posibles X^n . Como se puede ver el transmisor está compuesto por dos componentes:
 1. Codificador: Mapea el mensaje i a una representación física.
 2. Conformador de onda: Transforma esa representación en una señal transmitible.
- Canal: Es el medio por el cual viaja la señal enviada. El canal siempre introduce modificaciones a la señal transmitida. Matemáticamente toma una señal c_i y la transforma en una señal recibida y_i perteneciente a un conjunto de señales recibidas Y^n .
- Receptor: Intenta estimar cuál fue el mensaje enviado, a partir de la señal y_i en su entrada y algunos criterios tomados sabiendo el comportamiento del canal, a esta estimación se la denota $\hat{H} \in \mathcal{H}$ hipótesis estimada o \hat{i} si se desea enfatizar la decisión del receptor en un valor concreto. Como se puede ver el receptor está compuesto por dos componentes:

1. Formador de n-tuplas: Procesa la señal recibida y_i para extraer información relevante.
2. Decodificador: Estima el mensaje original a partir de y_i , utilizando criterios basados en el conocimiento del canal

Diseño del receptor para observaciones en tiempo discreto

En este apartado se estudia la recepción de señales discretas

Prueba de hipótesis

Dada una observación y a la entrada del receptor, diseñar dicho receptor para que su estimación del mensaje \hat{i} enviado sea la que maximice la probabilidad de acierto $P_c = P(\hat{H} = H)$ o dicho en otras palabras la que minimice la probabilidad de error $P_e = P(\hat{H} \neq H)$ por lo tanto $P_c = 1 - P_e$.

Para esto suponiendo que el diseñador del sistema de comunicación conoce la probabilidad de envío de los distintos mensajes $P_H(i)$ y la función de densidad de probabilidad de que a la entrada del receptor se presente la señal y dado que se envió el mensaje i a esto se lo denota como $f_{Y|H}(\cdot|i)$.

Ahora vamos a deducir criterios para decidir a qué mensaje de los posibles corresponde una señal recibida mediante $P_{H|Y}(i|y)$ (la probabilidad de que el mensaje enviado sea $H = i$ dado que se observó $Y = y$ en la entrada del receptor) de forma tal que se minimice la probabilidad de error.

A partir del teorema de Bayes se tiene:

$$P_{H|Y}(i|y) = \frac{P_H(i) \cdot f_{Y|H}(y|i)}{f_Y(y)}$$

Entonces queremos maximizar el valor de $P_{H|Y}(i|y)$ lo que implica a su vez maximizar su numerador:

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y) \Rightarrow \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) \cdot f_{Y|H}(y|i)$$

Esto significa que el receptor estimará el mensaje enviado $\hat{H} = i$ que maximiza dicha probabilidad.

A este criterio (1) se lo conoce como regla de decisión MAP (Maximum a posteriori).

Existe un caso especial cuando la distribución de probabilidad de envío de todos los mensajes es uniformemente distribuido ($P_H(i)$ es el mismo valor para todo $i \in \mathcal{H}$). A esto se lo conoce como regla de decisión de máxima verosimilitud o ML (Maximum likelihood) en el cual no se tiene en cuenta el valor de $P_H(i)$ por ser igual para todos:

$$\hat{H}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

Prueba de hipótesis binaria

Se tiene un sistema donde solo hay 2 posibles mensajes $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ para este caso aplicando el criterio MAP se tiene:

$$\frac{P_H(1) \cdot f_{Y|H}(y|1)}{f_Y(y)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{>}} \frac{P_H(0) \cdot f_{Y|H}(y|0)}{f_Y(y)}$$

Simplificando los denominadores llegamos a la regla de decision MAP para el caso de hipotesis binaria:

$$P_H(1) \cdot f_{Y|H}(y|1) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} P_H(0) \cdot f_{Y|H}(y|0)$$

$$\frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)}$$

Definiendo el umbral de decision η :

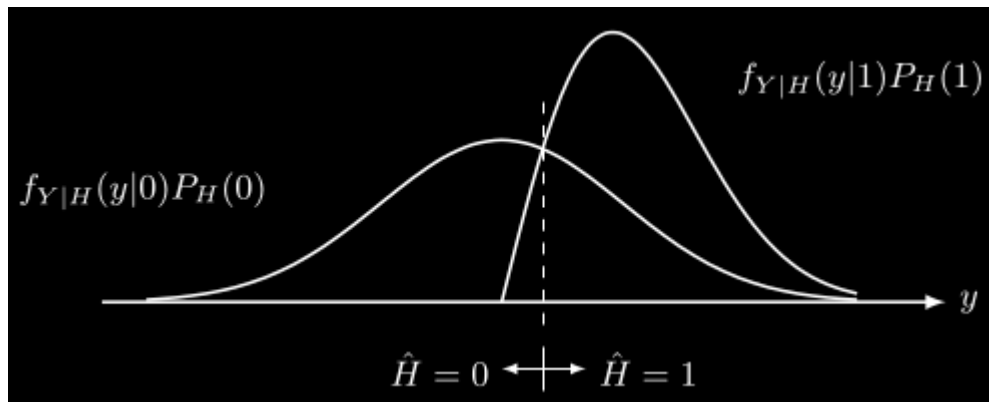
$$\eta = \frac{P_H(0)}{P_H(1)}$$

Y la relacion de verosimilitud $\Lambda(y)$:

$$\Lambda(y) = \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)}$$

se llega a:

$$\Lambda(y) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} \eta$$



Si $P_H(i)$ es uniformemente distribuida entonces $P_H(1) = P_H(0)$ ($\eta = 1$) y se pueden simplificar, llegando a la regla de decision ML:

$$f_{Y|H}(y|1) \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\gtrless}} f_{Y|H}(y|0)$$

Prueba de hipotesis m-aria

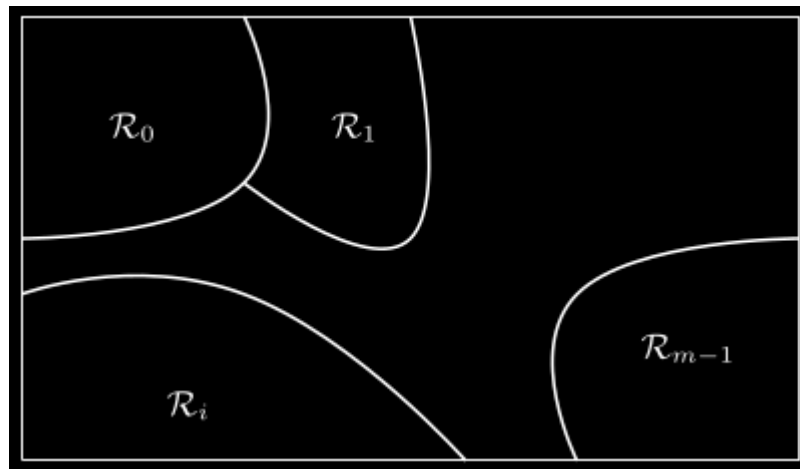
Se tiene un sistema donde la cantidad de mensajes ahora es m entonces $\mathcal{H} = \{0, 1, 2, 3, \dots, m - 1\}$ la regla de decision MAP será:

$$\hat{H}_{\text{MAP}}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) \cdot f_{Y|H}(y|i)$$

(Siempre se simplifica $f_Y(y)$ por ser el mismo valor para todos los i)
Y si $P_H(i)$ tiene distribucion uniforme se llega a la regla de decision ML:

$$\hat{H}_{\text{MAP}}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i)$$

Notemos que la regla de decision ML deriva de la regla de decision MAP al tratarse de un caso particular, ambos van a tener la misma probabilidad de error, pero la regla de decision ML tiene la ventaja de ser mas simple y por lo tanto mas economica a la hora de sintetizarse en Hardware. Finalmente en el caso de tener un sistema que envia mensajes mediante señales $c_i \in \mathcal{C}$ si $\mathcal{C} \in X^n$ con $n > 1$ entonces tendremos Y^n con $n > 1$ y por lo tanto, ya no se trata de intervalos de y sino, de un espacio de dimension n . Por ejemplo para $n = 2$ se tendra una region de decisiones como la siguiente:



Prueba de hipotesis aplicado a un canal con AWGN

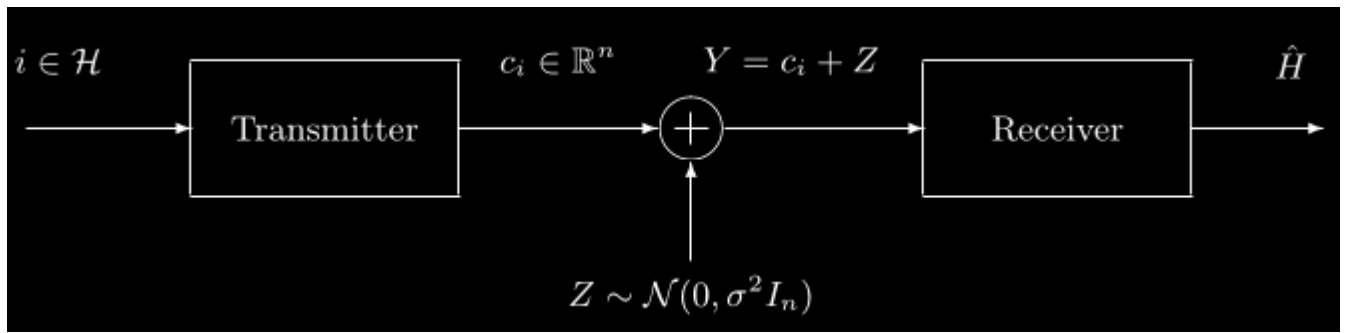
AWGN (Ruido Blanco Gaussiano Aditivo): El AWGN es el ruido de fondo más común y fundamental en telecomunicaciones, y entenderlo es clave para el estudio de sistemas de comunicacion, muchos tipos de ruido en comunicaciones (como el ruido térmico en cables y antenas) se comportan como AWGN.

AWGN

AWGN es:

- Aditivo porque el ruido se suma a la señal de entrada.
- Blanco porque tiene una densidad espectral de potencia constante con valor $\frac{N_0}{2}$.
- Gaussiano porque en cada instante del tiempo el valor del ruido es una variable aleatoria gaussiana.

Introduciendo el vector Z con distribucion normal multivariada de media cero y matriz de covarianza $\sigma^2 \cdot I_n$ (por lo tanto, las componentes de Z son independientes entre si)



Prueba de hipotesis binaria con canal AWGN

Se tiene un sistema donde solo hay 2 posibles mensajes $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ los cuales se codifican de la siguiente manera $H = 0 : c_0$ y $H = 1 : c_1$ que se envian a traves de un canal con ruido de tipo AWGN por lo tanto:

$$H = 0 : Y \sim \mathcal{N}(c_0, \sigma^2)$$

$$H = 1 : Y \sim \mathcal{N}(c_1, \sigma^2)$$

Entonces:

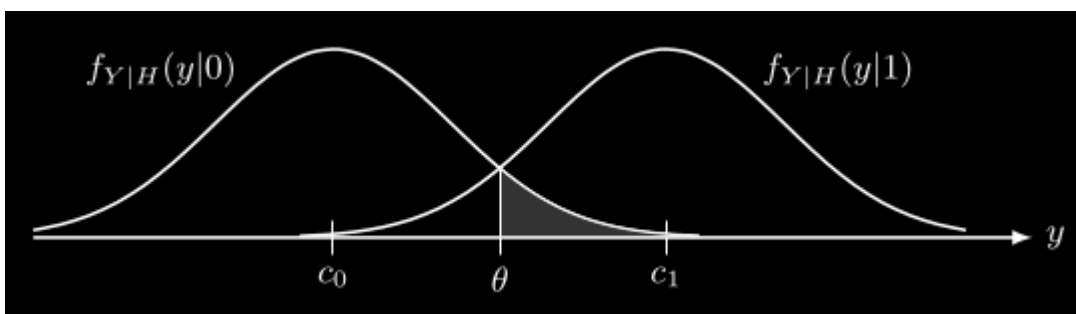
$$f_{Y|H}(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-c_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{Y|H}(y|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-c_1)^2}{2\sigma^2}}$$

A partir del umbral de decision η y la relacion de verosimilitud $\Lambda(y)$ se llega a la regla MAP:

$$y \cdot \frac{c_1 - c_0}{\sigma^2} + \frac{c_1^2 - c_0^2}{2\sigma^2} \underset{\hat{H}=0}{\overset{\hat{H}=1}{\geq}} \ln(\eta)$$

Si $P_H(1) = P_H(0)$ el criterio se ve representado por el siguiente grafico



Donde la probabilidad de error P_e queda determinada por el area debajo de la funcion $f_{Y|H}(y|0)$ entre θ y c_1 . Para calcular este valor se introduce la funcion Q que en terminos simples es el complemento de la función de distribución acumulativa de una variable normal estándar $\mathcal{N} \sim (0, 1)$ y se define como:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

$$P(Z \geq x) = Q(x)$$

Como se puede observar la definicion es la misma que la de la funcion de distribucion acumulada de una variable normal solamente que cambian los limites de integracion

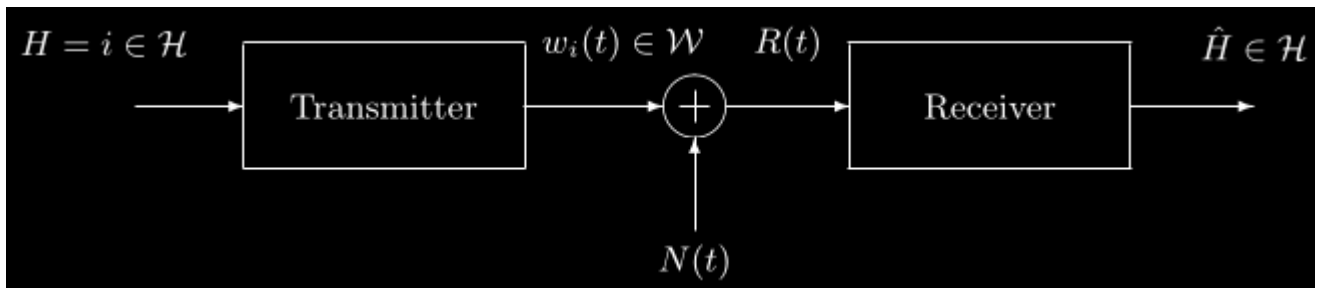
Formula general para calcular P_e con $Q(x)$

Si se tiene una constelacion de M simbolos equiespaciada con distancia d y equiprobable, la probabilidad de error P_e se calcula como:

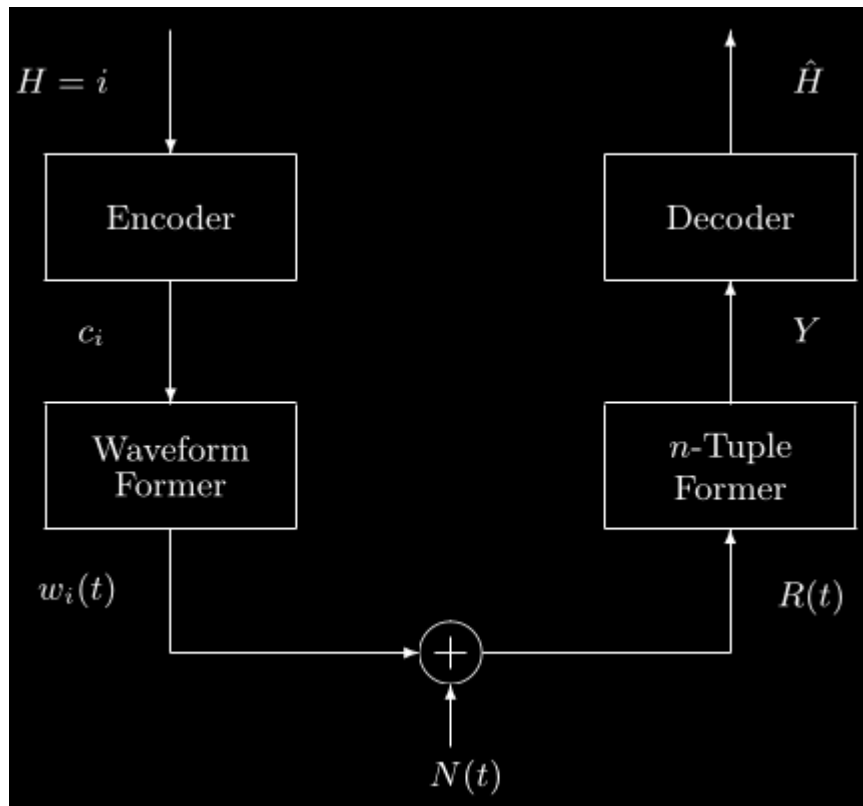
$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$$

Diseño de receptor para observaciones en tiempo continuo

Anteriormente nos enfocamos en el diseño de un receptor para observaciones en tiempo discreto esto significa que tanto las señales enviadas por el transmisor como las recibidas por el receptor eran discretas. Ahora vamos a hacer una extension de los conocimientos obtuvidos alli para aplicarlos en observaciones en tiempo continuo, fundamentales para el diseño de comunicaciones inalambricas.



Basicamente lo que hacemos es agregar una capa en la salida del transmisor para transformar las señales discretas c_i en señales continuas, y en la entrada del receptor una capa que transforme las señales recibidas en discretas y .



Como se puede observar ahora vamos a tener a la salida del receptor $w_i(t) \in \mathcal{W}$ señal continua y \mathcal{W} conjunto de señales continuas, por lo tanto a la entrada del receptor tendremos la señal observada $R(t)$ y por ultimo el ruido que se agrega a la señal enviada tambien sera continua $N(t)$

AWGN en tiempo continuo

En tiempo continuo, a diferencia del tiempo discreto, el ruido blanco gaussiano (AWGN) no es medible directamente debido a su potencia infinita (ancho de banda infinito \rightarrow varianza infinita). Para manejarlo, se requiere teoría de la medida, que permite trabajar con integrales o filtrados. En tiempo discreto, tras filtrar y muestrear el ruido, este se convierte en una secuencia de variables aleatorias finitas ($Z[n]$), que sí son medibles.

Matemáticamente, el filtrado se modela como la convolución de $N(t)$ con la respuesta al impulso del filtro $h(t)$, generando una señal continua $Z(t)$. Al muestrear $Z(t)$, se obtiene el ruido discreto $Z[n]$. El AWGN en tiempo continuo se define operacionalmente: para cualquier función $g(t)$ de energía finita como:

$$Z(t) = \int N(\alpha)h(t - \alpha)d\alpha$$

Entonces para t_i

$$Z_i = Z(t_i) = \int N(\alpha)h(t_i - \alpha)d\alpha$$

Como $h(t_i - \alpha)$ depende de α , haciendo $g_i(\alpha) = h(t_i - \alpha)$ se llega a la definicion de ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $\frac{N_0}{2}$. Si para cualquier coleccion de funciones reales $g_1(\alpha), \dots, g_k(\alpha)$,

$$Z_i = \int N(\alpha) g_i^*(\alpha) d\alpha \quad i = 1, 2, \dots, k$$

es una coleccion con distribucion multivariada de media cero y covarianza:

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = \frac{N_o}{2} \int g_i(t) g_j^*(t) dt = \frac{N_o}{2} \langle g_i, g_j \rangle$$

Si se eligen los filtros tales que tengan respuesta al impulso que generen las funciones $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ ortonormales entonces la covarianza es 0 para todos los g_i (el ruido entre canales son independiente entre si) y la varianza de cada componente sera $\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$.

$g_j^*(t)$ Significa el complejo conjugado de la funcion

Suficiencia estadistica

Aplicando lo estudiado anteriormente mirando nuevamente el esquema del sistema de comunicacion podemos notar que la salida del canal $R(t)$ no es observable dado que esta compuesta por $N(t)$. Por lo que a la salida del canal en realidad lo que podemos observar es:

$$V_i = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) g_i^*(\alpha) d\alpha \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Teorema: Dado el espacio vectorial \mathcal{V} con producto interno definido, generado por un conjunto de señales \mathcal{W} y $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ base ortonormal de \mathcal{V} Tenemos que la n-tupla $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ donde cada componente se obtiene proyectando $R(t)$ con la señal de la base correspondiente ψ :

$$Y_i = \int R(\alpha) \psi_i^*(\alpha) d\alpha$$

Por lo tanto los vectores de la base $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ y la salida del canal $R(t)$ se dice que son estadistica suficiente para obtener la hipotesis real H

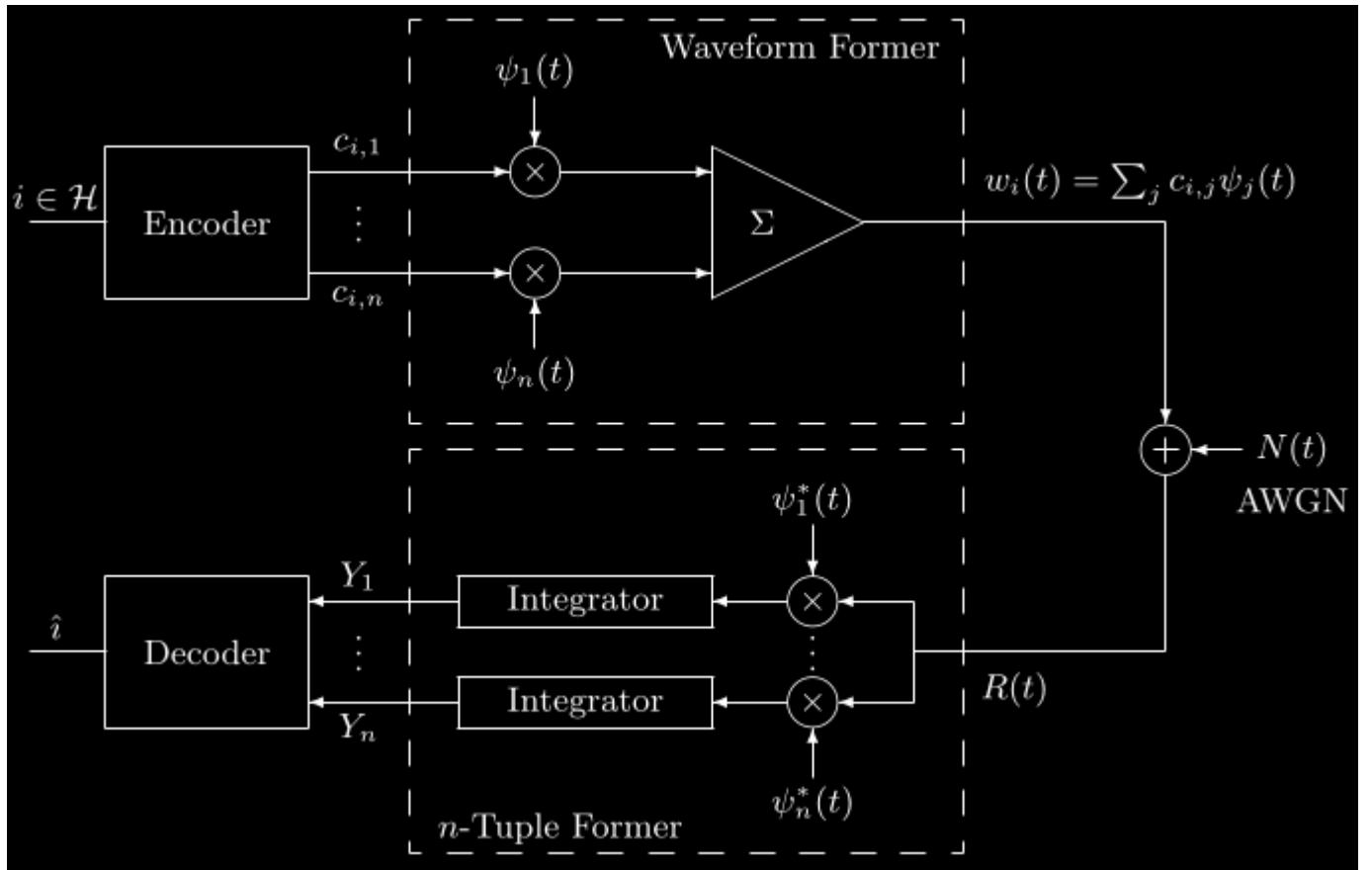
(Demostracion en el libro pag 100)

Notar que al ser $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ una base ortonormal los componentes son independientes entre si.

Dos filtros no solapados en frecuencia g_1 y g_2 son un ejemplo de filtros ortogonales, ya que, $\langle g_1, g_2 \rangle = 0$

Estructura del sistema

Finalmente llegamos al siguiente diseño del sistema de comunicacion



Prueba de hipotesis

Similar al caso de tiempo discreto, la fuente produce mensajes $i = H$ con probabilidad de envio $P_H(i)$, en un canal gaussiano, por lo tanto la salida del canal es $y_j = c_j + z_j$ entonces la funcion de densidad de probabilidad:

$$f_{Y|H}(y|i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|y - c_i\|^2}{2\sigma^2}}$$

Funcion de densidad de probabilidad normal multivariada de dimension n centrada en c_i con $\sigma^2 = \frac{N_o}{2}$. Aplicando el criterio de decision MAP en este caso se desarrolla la expresion como se ve a continuacion:

Simplificacion de la expresion $P_H(i) \cdot f_{Y|H}(y|i)$:

Tomando logaritmo y despreciando el termino $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}$ por ser el mismo para todas las hipotesis:

$$\|y - c_j\|^2 - N_o \ln(P_H(j))$$

Desarrollando la norma $\|y - c_j\|^2 = \|y\|^2 - 2\langle y, c_j \rangle + \|c_j\|^2$, despreciando $\|y\|^2$ por ser comun a todas las hipotesis, multiplicando por $-\frac{1}{2}$:

$$\langle y, c_j \rangle - \frac{\|c_j\|^2}{2} + \frac{N_o}{2} \ln(P_H(j))$$

Generalizando para señales en tiempo continuo como las señales $w_j \in \mathcal{W}$ son generadas por una base ortonormal $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$ entonces $\|w_j\|^2 = \|c_j\|^2$, ademas

$$\langle y, c_j \rangle = \sum_{j=1}^n y_j c_{ij} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \int R(t) \psi_i(t) dt = \int R(t) \sum_{j=1}^n c_{ij} \psi_i(t) = \int R(t) w_j^*(t) dt$$

Entonces se llega a:

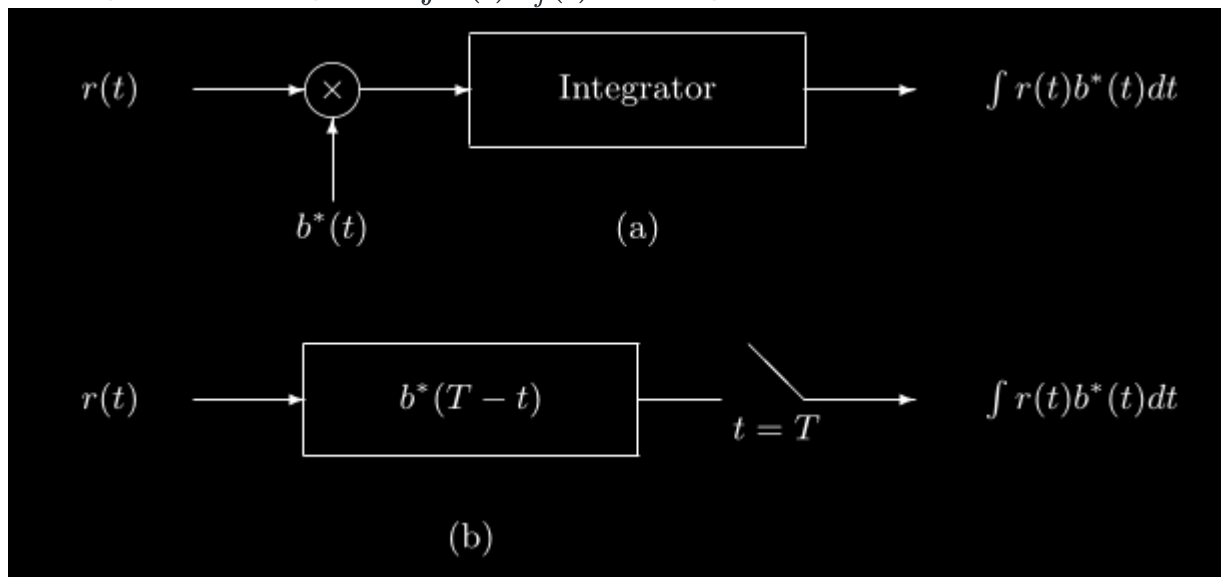
$$\int r(t) w_j^*(t) dt - \frac{\|w_j\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(j)$$

Por lo tanto el criterio MAP aplicado en este contexto implica:

1. Elegir $j = \hat{H}$ tal que se minimice la expresion $\|y - c_j\|^2 - N_0 \ln(P_H(j))$
2. Elegir $j = \hat{H}$ tal que se maximice la expresion $\langle y, c_j \rangle - \frac{\|c_j\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln(P_H(j))$ (se requiere maximizar dado que en el paso en el que se obtiene esta expresion se multiplica por un numero negativo) que a su vez esta expresion en tiempo continuo se expresa como $\int r(t) w_j^*(t) dt - \frac{\|w_j\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(j)$.

Correlador

Formas de implementar la expresion $\int r(t) w_j^*(t) dt$ en la practica



- a. Es la manera intuitiva multiplicando las expresion e integrandolas mediante un circuito integrador que se construye con OPAMPs.
- b. Esto es mediante un filtro apareado y muestrador con frecuencia de muestreo $\frac{1}{T}$, este corresponde a el equivalente de la integral que es la expresion $\langle y, c_j \rangle$

Diseño del conformador de onda

En el capitulo anterior de diseño de receptor nosotros estudiamos su funcionamiento transmitiendo un solo mensaje lo que se conoce como *one-shoot*, ademas se supuso que el canal tiene ancho de banda infinito y en la realidad esto no es asi.

Que un canal tenga ancho de banda finito implica que el canal tiene memoria, ya que, un canal con ancho de banda finito tiene una respuesta en frecuencia $H(f)$ (respuesta al impulso en frecuencia) acotado, entonces $h(t) \neq \delta(t)$ (porque $\delta(t)$ tiende a infinito) como su respuesta al impulso no es $\delta(t)$

entonces se puede afirmar que el canal tiene memoria. Entonces en una transmision continua de simbolos tendríamos la siguiente salida del conformador de onda:

$$w(t) = \sum_{j=1}^n s_j \psi_j(t - jT)$$

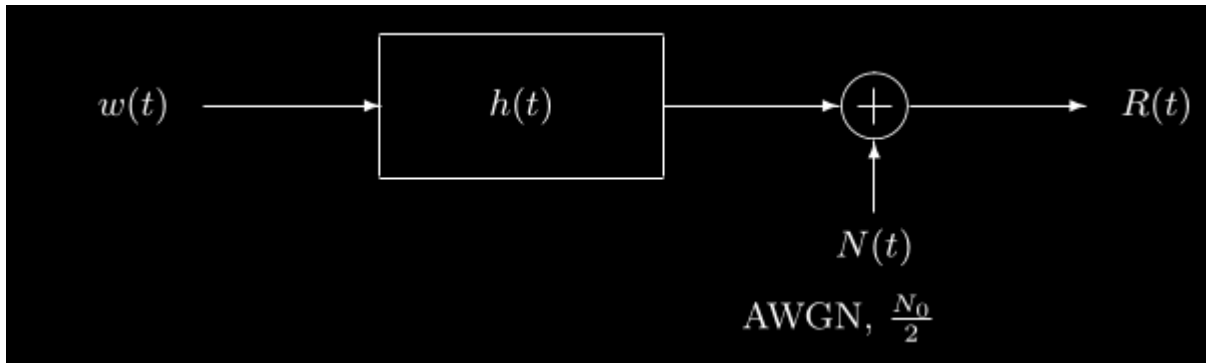
Donde $\psi_j(t - jT)$ seria la modulante del simbolo en el tiempo jT , usamos s_j simbolo a transmitir (la salida del codificador), en vez de c_{ij} porque ahora nos concentramos en estudiar las funciones $\psi(t)$ y obviamente las conclusiones son aplicables a todos los c_i .

Comencemos el analisis proponiendo que el conjunto de señales modulantes ψ sean las que corresponde con una PAM (Modulacion por amplitud de pulsos) dado que si son desplazados jT con $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$ son ortogonales entre si y por lo tanto seran señales independientes entre si (como se vio anteriormente en diseño de receptores en tiempo continuo)

El caso del canal pasabajos ideal

Supongamos que tenemos un canal compuesto de un filtro cuya respuesta al impulso se comporta como un filtro pasabajos ideal esto es:

$$h_{\mathcal{F}}(f) = \begin{cases} 1, & f \leq B \\ 0, & f > B \end{cases}$$



Teorema del muestreo de Nyquist-Shanon

Sea $w(t)$ una señal continua y de tipo \mathcal{L}^2 (integrable al cuadrado \rightarrow de energia finita) y su transformada de Fourier $w_{\mathcal{F}}(f) = 0$ para $f \notin [-B, B]$, entonces $w(t)$ puede ser reconstruido a partir de una secuencia de muestras espaciadas una distancia T entre si obteniendose la muestra $w(nT)$ donde $n \in \mathbb{Z}$ y $T \leq \frac{1}{2B}$. Esto es:

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT) \text{sinc}(t - nT)$$

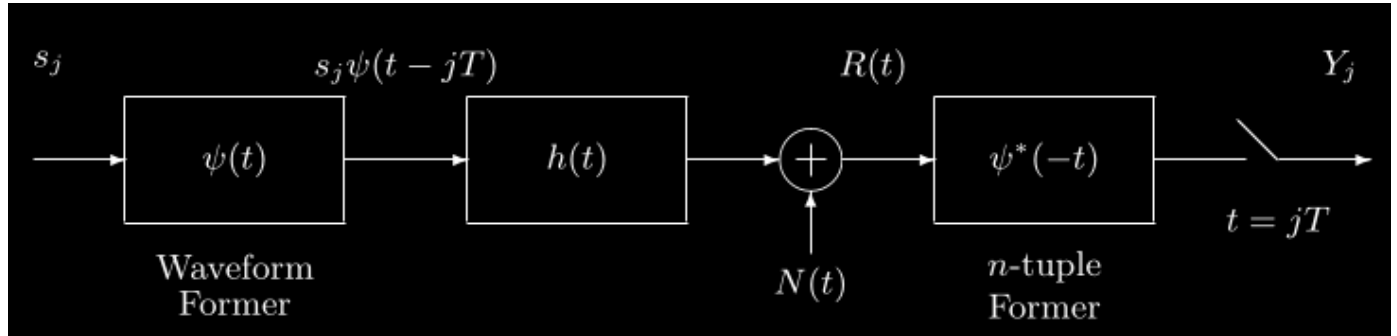
Las funciones $\text{sinc}(t)$, $\text{sinc}(t - T)$, $\text{sinc}(t - 2T)$, ..., $\text{sinc}(t - nT)$ forman una base ortogonal. Si las normalizamos tendremos una base ortonormal, la funcion normalizada:

$$\psi(t) = \frac{\text{sinc}(t/T)}{\sqrt{T}}$$

Finalmente la salida del conformador de onda:

$$w(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j \psi(t - jT)$$

El proceso general donde un simbolo es modulado, viaja por un canal que filtra la señal y le agrega ruido luego es recuperada y muestreada:



Criterio de Nyquist para una base ortonormal

Este criterio es muy importante porque establece las condiciones necesarias para transmitir una señal base de manera que no ocurra interferencia intersímbolo (ISI) al muestrearla en el receptor.

Lo que queremos encontrar es una función $\psi(t)$ de forma tal que:

$$\langle \psi(t), \psi(t - nT) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t) \cdot \psi(t - nT) dt = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Partiendo de la relacion de Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(t) \cdot \psi(t - nT) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mathcal{F}}^*(f) \cdot \psi_{\mathcal{F}}(f) e^{-j2\pi nTf} df = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 e^{-j2\pi nTf} df \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{\mathcal{F}}(f - \frac{k}{T}) e^{-j2\pi nTf} df &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(f) e^{-j2\pi nTf} df = 1 \{n = 0\} \end{aligned}$$

Si $n = 0$ se llega a la condicion:

$$g(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_{\mathcal{F}}(f - \frac{k}{T})|^2 = T$$

El criterio de Nyquist es análogo al teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, pero aplicado a señales base en banda base (no a señales pasabanda). Mientras el teorema de muestreo garantiza la reconstrucción de una señal muestreada, el criterio de Nyquist para ISI garantiza la integridad de los símbolos transmitidos.

Familia de cosenos realzados

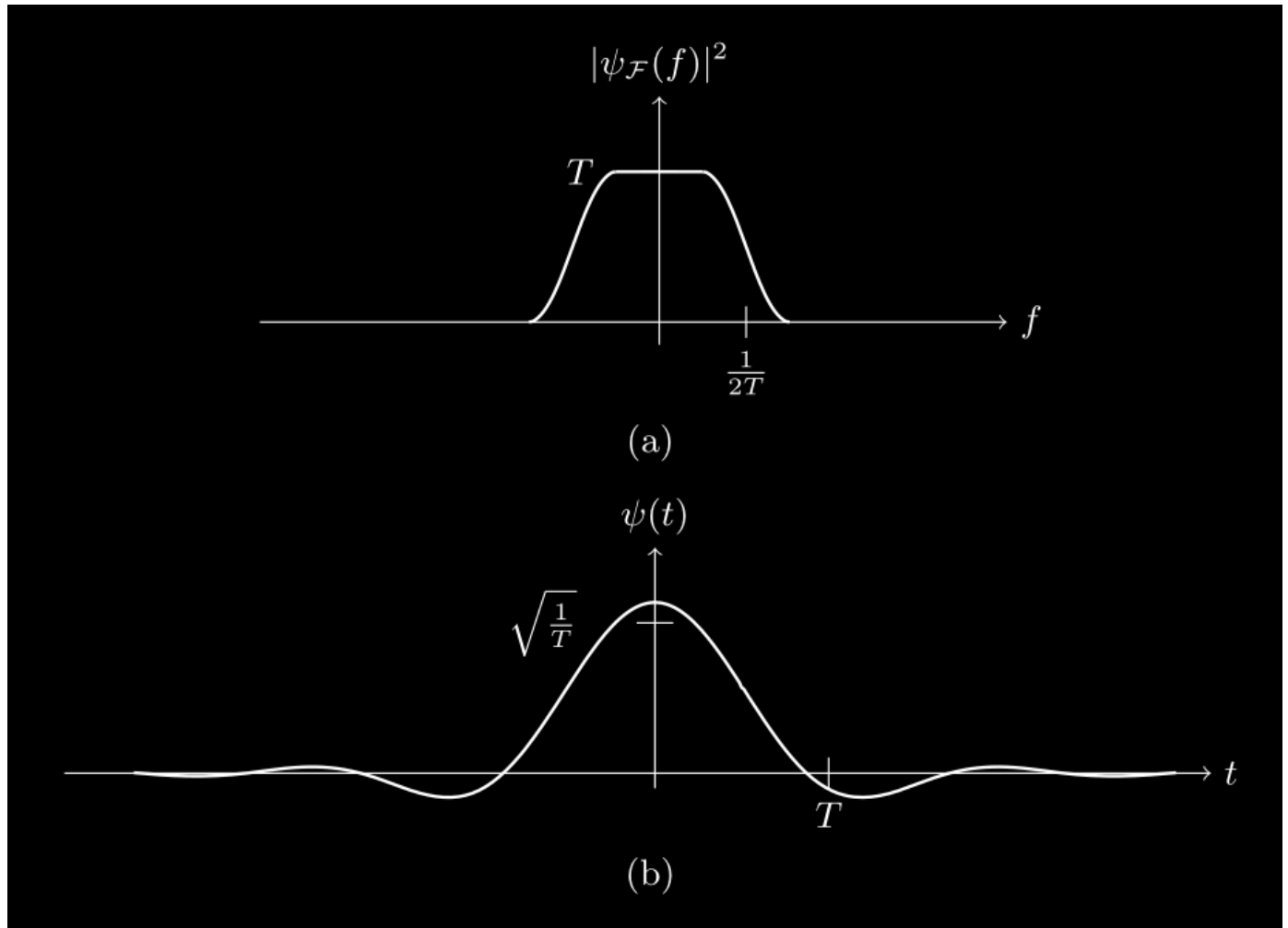
La familia de cosenos realzados es una familia de funciones que cumplen el criterio de Nyquist antes mencionado, su transformada de Fourier es:

$$|\psi_{\mathcal{F}}(f)| = \begin{cases} \sqrt{T}, & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \sqrt{T} \cos\left[\frac{\pi T}{2\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right], & \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

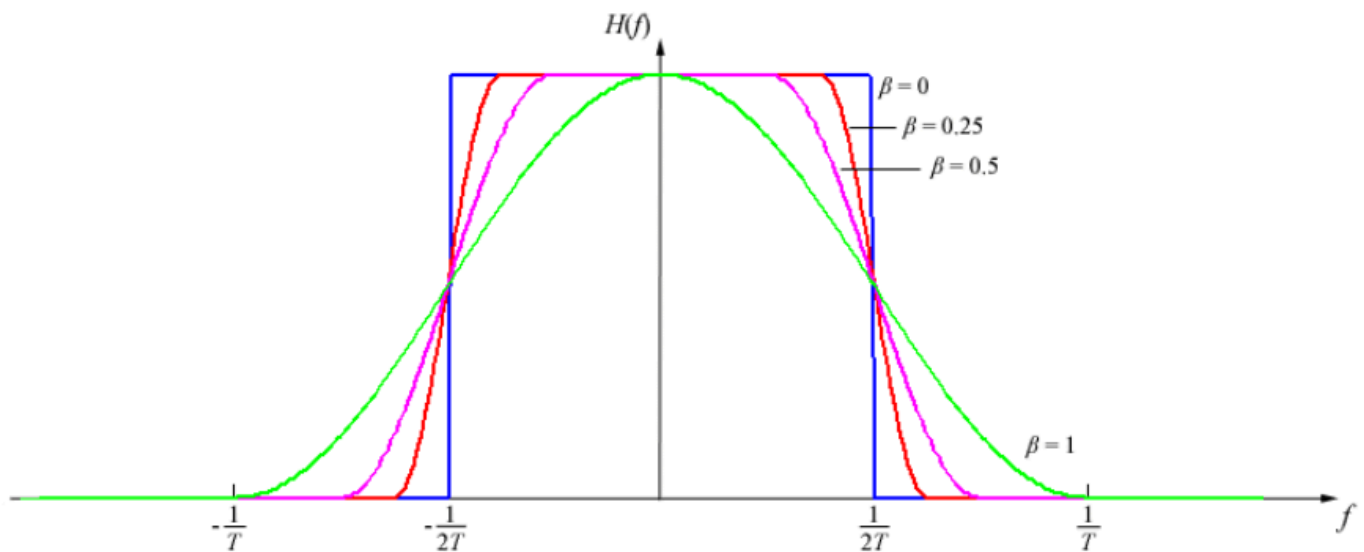
Elevado al cuadrado:

$$|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left(1 + \cos\left[\frac{\pi T}{\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right]\right), & \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Donde $\beta \in (0, 1)$ es el coeficiente de roll-off. Sus graficos en frecuencia (a) y en tiempo (b):



Se puede observar como varia la forma del coseno realzado en frecuencia a medida que varia el valor de β :

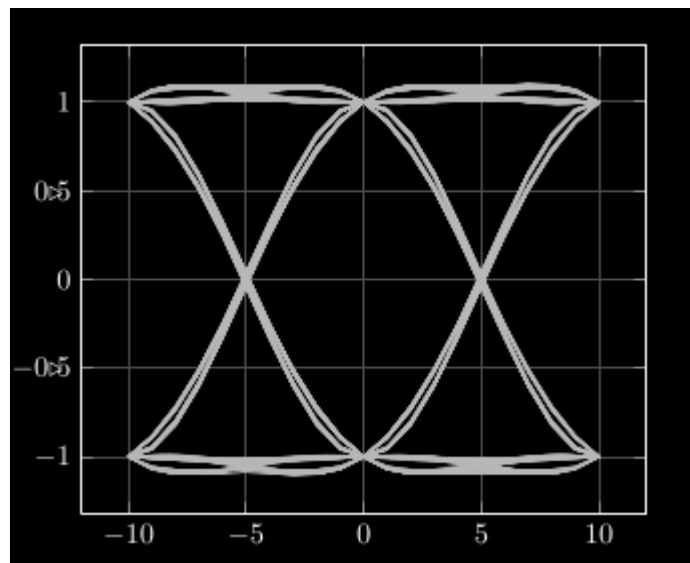


Esta función presenta un comportamiento menos ideal en frecuencia que la función sinc, lo cual lo hace más realizable en la práctica.

Diagrama de ojo

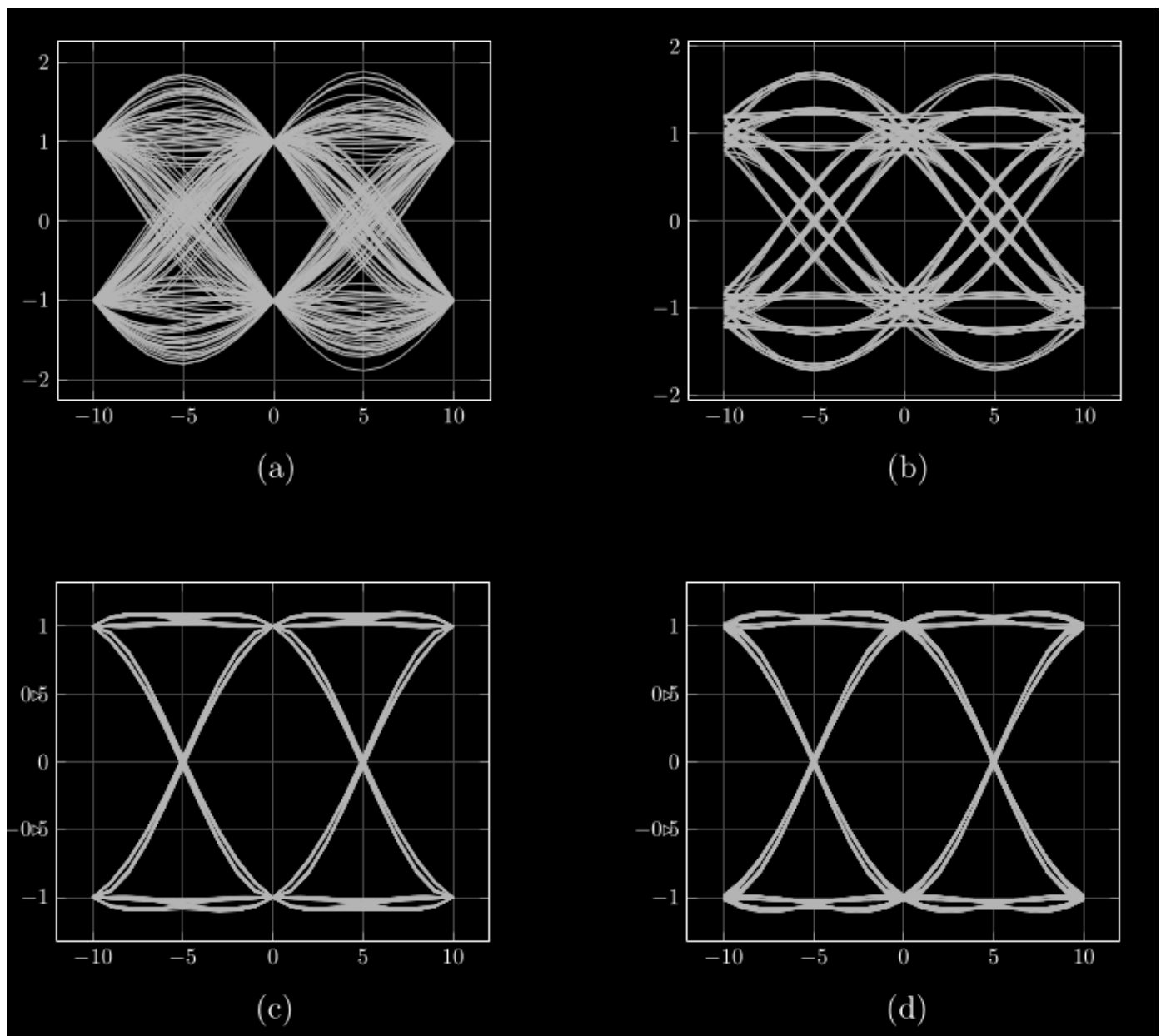
El diagrama de ojo es una herramienta gráfica utilizada en telecomunicaciones para evaluar la calidad de una señal digital transmitida, especialmente en sistemas afectados por ruido interferencia intersímbolo (ISI) y distorsión.

Se generan tomando múltiples tramas de la señal recibida y superponiéndolas obteniendo un gráfico como el siguiente



Donde el eje de las abscisas mide tiempo y el eje de las ordenadas mide voltaje, en este dibujo la señal del conformador de onda es un coseno realzado con periodo de símbolo $T = 10$

Diferentes casos de diagrama de ojo



En los graficos de arriba el coeficiente de roll-off del coseno realzado es $\beta = 0.25$, mientras que para los de abajo $\beta = 0.9$.

En los de la izquierda el coseno realzado es truncado a 20 periodos por simbolo, mientras que los de la derecha estan truncados a 4 periodos por simbolo.

En el de arriba a la derecha se tiene el caso tipico de ISI como se puede observar en todos los tiempos $t = nT$ no se tiene un valor puntual sino un intervalo de posibles valores.

En el de arriba a la derecha se tiene el caso tipico de un canal ruidoso, a pesar del ruido en el tiempo $t = nT$ el valor es puntual, es decir, esta bien definido.

Densidad espectral de potencia

Conceptos previos:

- Señal estocástica: Una señal estocástica (o proceso aleatorio) es una colección de variables aleatorias indexadas por el tiempo. Es decir, para cada valor de t , $x(t)$ es una variable aleatoria.
- Proceso estocástico estacionario: Es un proceso en el que todas las propiedades estadísticas del proceso son invariantes frente a traslaciones en el tiempo.

- Proceso estocástico en sentido amplio: Es tal que para cualquier valor de t , $x(t)$ tiene la misma media μ y la varianza depende únicamente del desfase temporal τ .
El proceso estocástico estacionario tiene una definición más rigida y que es muy difícil de corroborar en la vida real a diferencia del proceso estocástico en sentido amplio.
- Correlación de una señal: Mide qué tan similares son dos señales en función de un desplazamiento temporal. Permite identificar la relación entre sus formas y patrones en diferentes instantes de tiempo.
- Autocorrelación: Es un caso particular de correlación donde se compara una señal consigo misma desplazada en el tiempo. Mide qué tan parecida es la señal respecto de sí misma a distintos desfases temporales. En el caso de señales aleatorias, la autocorrelación se define como una esperanza matemática que captura la estructura estadística temporal del proceso.

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)]$$

Definición de densidad espectral de potencia (PSD)

La densidad espectral de potencia $S_x(f)$ de una señal $x(t)$ estocástica estacionaria se define como:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|X_T(f)|^2] \quad \left[\frac{W}{Hz} \right]$$

Para el estudio de este apartado se supone que la señal $x(t)$ es estocástica y estacionaria. Como $x(t)$ es una señal estocástica, no tiene sentido aplicar la transformada de Fourier directamente. En su lugar, se obtiene la densidad espectral de potencia (PSD) como la transformada de Fourier de su función de autocorrelación gracias al Teorema de Wiener-Khintchine.

Teorema de Wiener-Khintchine

Se puede calcular la densidad espectral de potencia (PSD) $S_x(f)$ de una señal $x(t)$ a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la señal:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} [|X_T(f)|^2] = \mathcal{F} R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Demostración:

Si $x(t)$ es una función realmente valuada entonces $X_T^*(f) = \int_{-T}^T x(t') e^{j2\pi f t'} dt'$. Entonces $X_T(f) X_T^*(f) = |X_T(f)|^2$.

Por lo tanto partiendo de la definición de la energía esperada:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_T(f)|^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) \left(\int_{-T}^T x(t') e^{j2\pi f t'} dt' \right) \right] \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \mathbb{E} [x(t) x(t')] e^{-j2\pi f (t-t')} dt dt' \end{aligned}$$

$$= \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_x(t - t') e^{-j2\pi f(t-t')} dt dt'$$

Si $T \rightarrow \infty$ la expresion termina siendo la transformada de Fourier de la autocorrelacion de la señal

$$\mathcal{F}R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Teorema

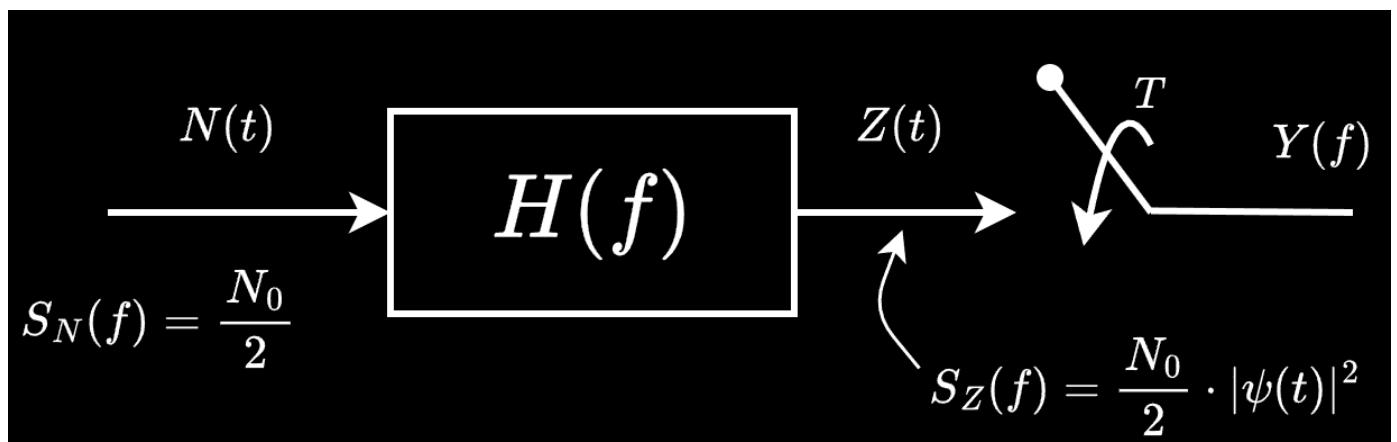
Cuando un proceso estocástico estacionario en sentido amplio $X(t)$ es la entrada de un filtro lineal invariante en el tiempo con función de transferencia $H(f)$ la densidad espectral de potencia de la salida $Y(t)$ es:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

Este teorema nos sirve mucho para a continuacion tener en cuenta el efecto del ruido.

Teniendo en cuenta el ruido

Recordando que cuando modelamos el canal como AWGN con densidad espectral de potencia constante $\frac{N_0}{2}$, dijimos que este produce dos efectos sobre la señal a su entrada; filtra la señal y le agrega ruido, eso implica que a la salida ya no vamos a tener ruido blanco sino que tiene una forma espectral determinada por el sistema (coloreado).



Utilizando el teorema visto anteriormente a la salida del muestreador se tiene:

$$S_Z(f) = |H(f)|^2 \cdot \frac{N_0}{2}$$

Donde $H(f)$ es la respuesta al impulso del filtro del canal AWGN.

La señal luego de ser muestreada $Y(f)$ es continua y periodica (recordar que la transformada de Fourier de un señal discreta en tiempo es continua y periodica).

Diseño del codificador

En este capitulo estudiaremos los fundamentos para el diseño del codificador de nuestro sistema de comunicación. El objetivo principal del encoder en nuestro enfoque es transformar la informacion de la

fuente en un formato adecuado para su transmision eficiente y proteger la informacion del ruido. El encoder toma una secuencia de simbolos, por ejemplo de fuente binaria, (b_1, b_2, \dots, b_k) en su entrada, y las transforma en una secuencia de simbolos codificados, (x_1, x_2, \dots, x_n)

Codigo convolucional

Los códigos convolucionales son un tipo de código de corrección de errores utilizado para proteger la información contra errores durante la transmisión. A diferencia de los códigos de bloque, que procesan los datos en bloques independientes, los códigos convolucionales tienen memoria, lo que significa que la salida depende no solo de los bits de entrada actuales, sino también de los bits anteriores.

Supongamos el siguiente codigo convolucional:

$$x_{2j-1} = b_j b_{j-2}$$

$$x_{2j} = b_j b_{j-1} b_{j-2}$$

Como se puede observar x_1 y x_2 necesita de b_{-1} y b_0 los cuales se asumen en un valor por defecto.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos un encoder al cual le entran una secuencia de 5 simbolos ($k = 5$) de fuente binaria ($n_s = 2$), por lo tanto b_j puede tomar valores $\{1, -1\}$, finalmente tendremos una secuencia de $n = 10$ simbolos a la salida del encoder, ya que: $n = n_s \cdot k = 2 \cdot 5 = 10$.

Para este caso b_{-1} y b_0 se asumen iguales a 1 por defecto.

b_j	1	-1	-1	1	1
x_{2j-1}, x_{2j}	1, 1	-1, -1	-1, 1	-1, 1	-1, -1
j	1	2	3	4	5

Aclaracion: En un canal fisico real los x_n no toman valores de $\{1, -1\}$ sinó de $\{\sqrt{\varepsilon_s}, -\sqrt{\varepsilon_s}\}$ donde ε_s Es la energia por simbolo. Pero a fines de simplificar la explicacion se dice que toman valores como $\{1, -1\}$

Sintesis del encoder

Para sintetizar este encoder con memoria se puede pensar en el siguiente diagrama de bloques, donde los bloques b_{j-1} y b_{j-2} pueden ser implementados mediante flip-flops tipo D u otro tipo de memoria.

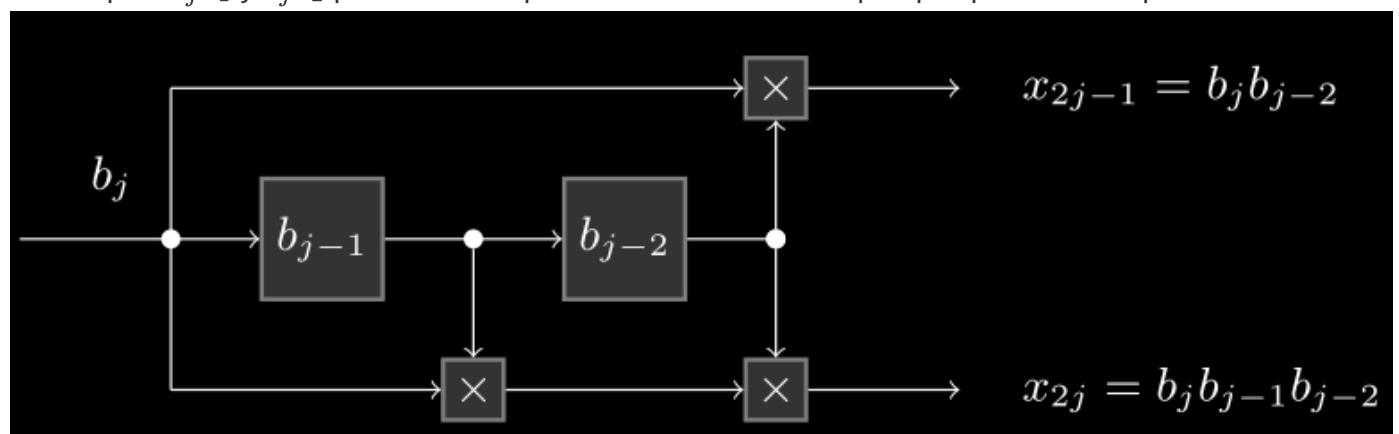


Diagrama de estados del encoder convolucional

Las posibles salidas del encoder pueden ser representadas mediante un automata de Moore

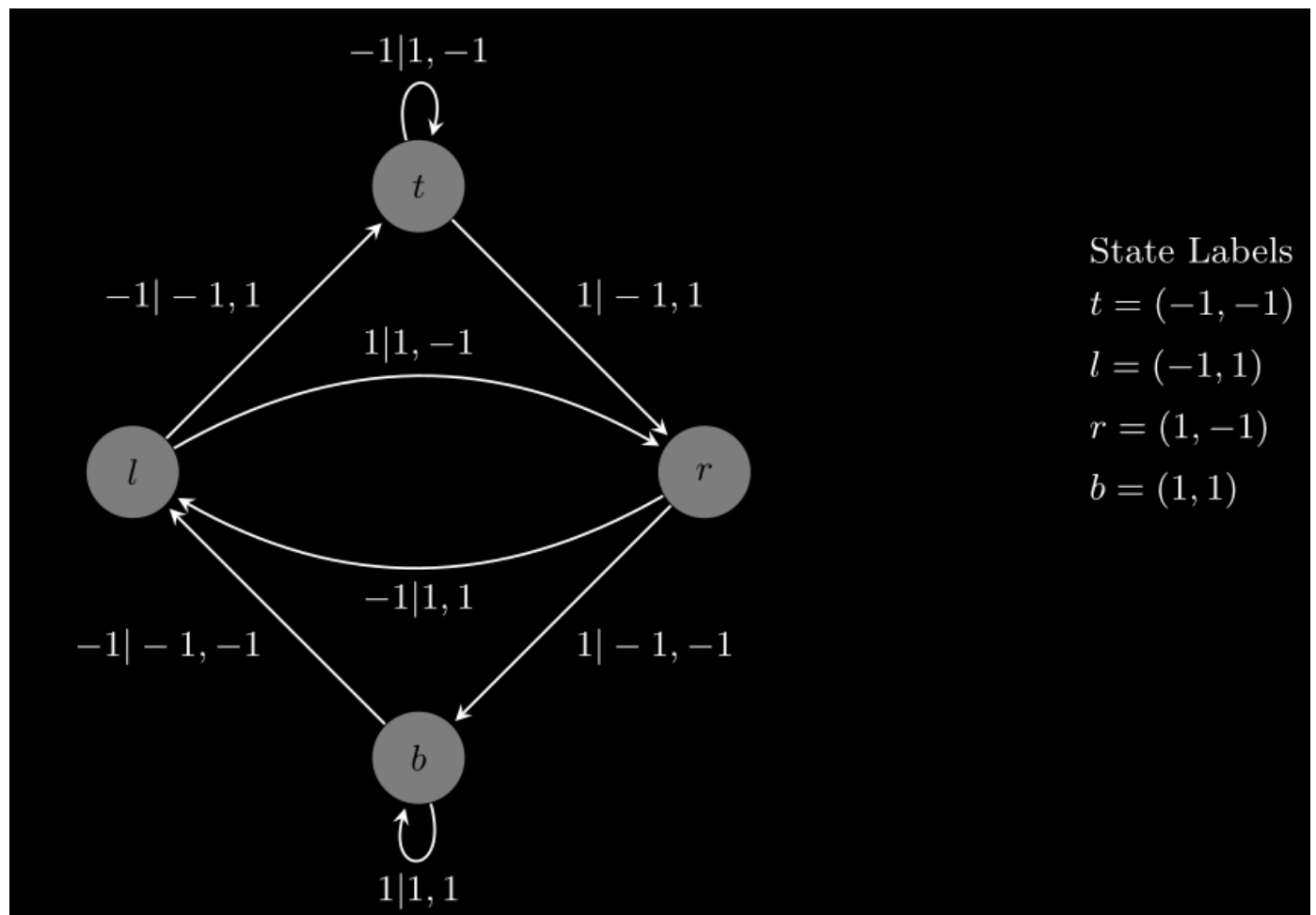
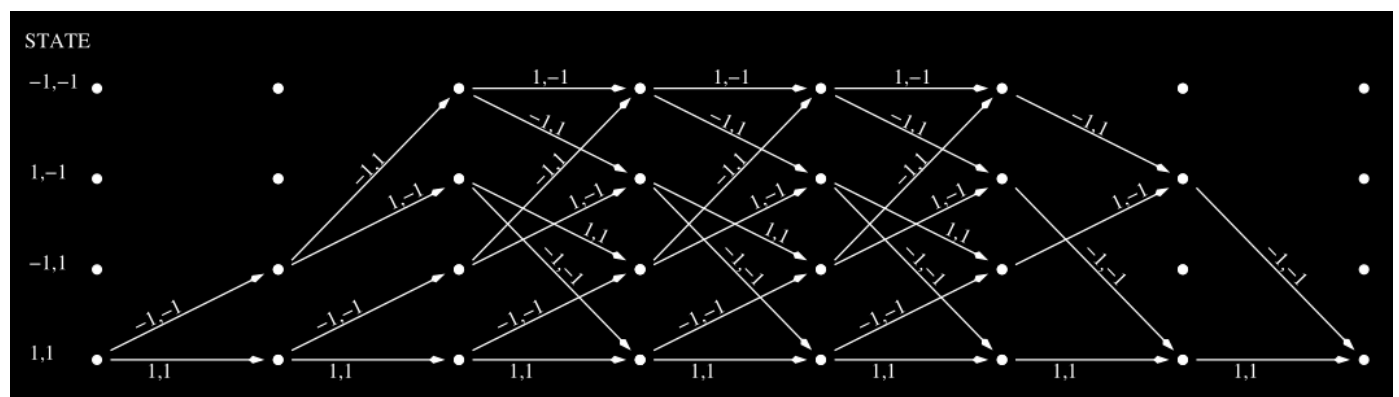


Diagrama de Trellis

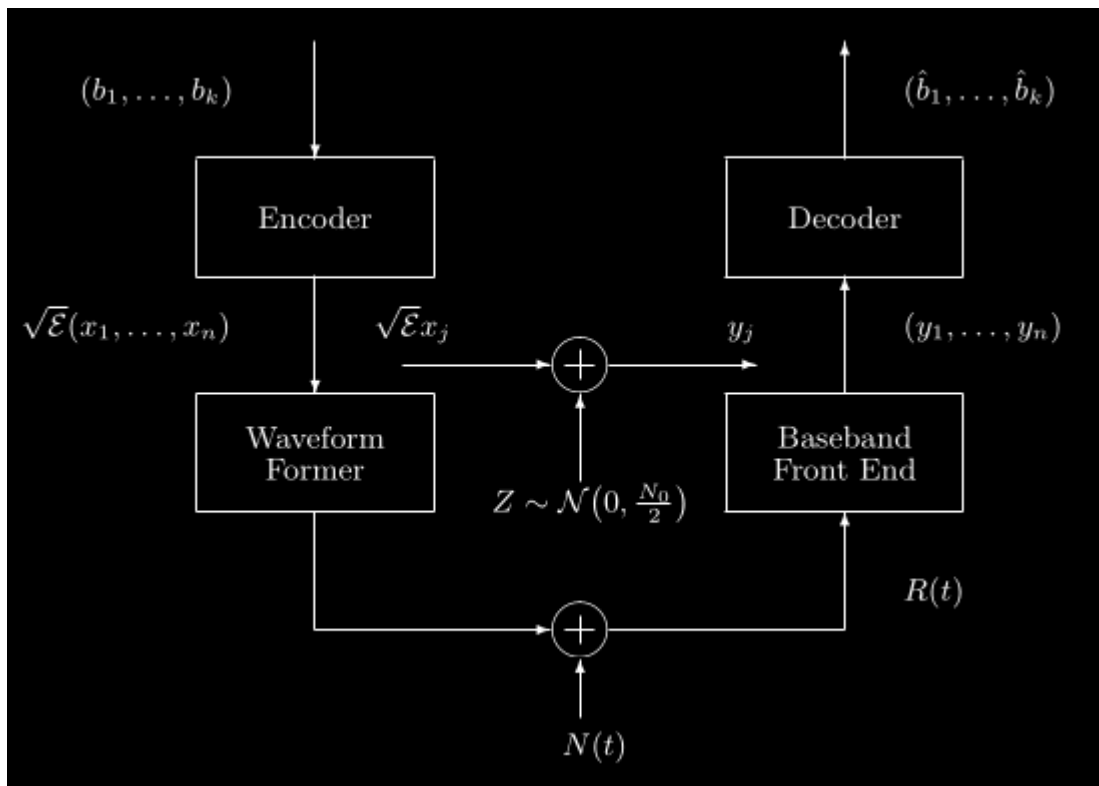
Un diagrama de Trellis es una representación gráfica que se utiliza para mostrar cómo evoluciona un sistema codificado en el tiempo, lo cual es una ventaja sobre el diagrama de estados, ya que resulta útil para describir códigos convolucionales y para implementar algoritmos de decodificación eficientes, como el algoritmo de Viterbi.

Se interpreta de la siguiente forma, estando en el estado $(1, 1)$ si llega un 1 se va al estado $(1, 1)$ y si llega un -1 se va al estado $(-1, 1)$



Decodificador

A la entrada del decodificador vamos a tener las observaciones y_j las cuales van a ser diferentes de los códigos enviados x_j , dado que luego de pasar por formador de n-tuplas el código aún tiene añadido el ruido del canal (AWGN).



Para la decodificación de los símbolos codificados recibidos, se aplica la regla de máxima verosimilitud en tiempo discreto con el fin de decidir cuál fue la secuencia enviada

$$\hat{c} = \arg \max_{c \in C} \left(\langle c, y \rangle - \frac{\|c\|^2}{2} \right)$$

Pero como ya se puede observar hacer este cálculo para cada camino posible en el diagrama de Trellis sería sumamente engorroso. Esto es justamente lo que soluciona el algoritmo de Viterbi

Observación: En el ejemplo anterior teníamos símbolos codificados $\|c\|^2 = n$ (constante) para cualquier par de valores c entonces se puede simplificar la expresión $\frac{\|c\|^2}{2}$, al aplicar la regla de máxima verosimilitud. Recordando que:

$$\|c\|^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$$

pero como $1^2 = (-1)^2$ Entonces $c_i^2 = 1$ siempre. Entonces:

$$\|c\|^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

Algoritmo de Viterbi

1. Calcula el costo incremental (métrica local) de cada transición posible, basado en la señal recibida y el símbolo esperado.

La métrica local se calcula como:

$$metrica = \frac{||c||^2}{2} - \langle y, c \rangle$$

Si $||c||^2 = \text{constante}$ entonces se puede despreciar dicho termino

2. Elije la transicion con menor valor de metrica
3. Repetir el procedimiento guardando el camino que se esta llevando. Dicho camino es el de menor costo, por lo tanto es el mas probable

Los pesos en los arcos de este diagrama de Trellis representan el valor de la métrica de cada transición. Las cuales para este caso del ejemplo simplemente consiste en realizar $metrica = -\langle y, c \rangle$

Por ejemplo: Siguiendo con el mismo ejemplo:

- estando en el estado $(1, 1)$ si se envió -1 va al estado $(-1, 1)$ llegó $(1, 3)$ entonces la métrica local de esa transición es: $-(1 * 1 + 1 * 3) = -4$
- estando en el estado $(1, 1)$ si se envió 1 va al estado $(1, 1)$ llegó $(1, 3)$ entonces la métrica local de esa transición es: $-(1 * 1 + 1 * 3) = -4$

