REDES DE PETRI CASE #2-2018 PROPERTIES OF PETRI NETS

Curso

FCEFyN

UNC

Bibliografia

Discrete, continuous, and hybrid Petri nets	**Understanding Petri Nets, Modeling Techniques, Analysis Methods, Case Studies**
Bases of Petri Nets Properties of Petri Nets Non-Autonomous Petri Nets Autonomous Continuous and Hybrid Petri Nets Timed Continuous Petri Nets Timed Hybrid Petri Nets	Modeling Techniques Analysis Methods Case Studies Closing Remarks

Propiedades de las redes de Petri

- PRESENTACIÓN DE LAS PRINCIPALES PROPIEDADES
  - Anotaciones y definiciones
  - Vida y estancamiento
  - Conflictos
  - Conflicto efectivo
  - Concurrencia y despido múltiple
  - Persistencia
  - Grado de habilitación y conflicto general
- invariantes
  - Componente conservador
  - Componente repetitivo
- BUSCANDO LAS PROPIEDADES DE LAS REDES PETRI
  - Gráfico de marcas y árbol raíz de cobertura
  - Gráfico de marcas
  - Árbol raíz de cobertura

- Álgebra lineal
  - Anotaciones y definiciones
  - Ecuación fundamental
  - Componentes conservadores e invariantes de marcado
  - Componentes repetitivos e invariantes de disparo
  - Buscando P-invariantes y T-invariantes
- Métodos de reducción que preservan algunas propiedades
- Otros resultados
  - Gráficos de eventos fuertemente conectados
  - Sifones y trampas
  - Vida relacionada con otras propiedades
  - Observaciones finales
  - Estructuración
  - Software de análisis

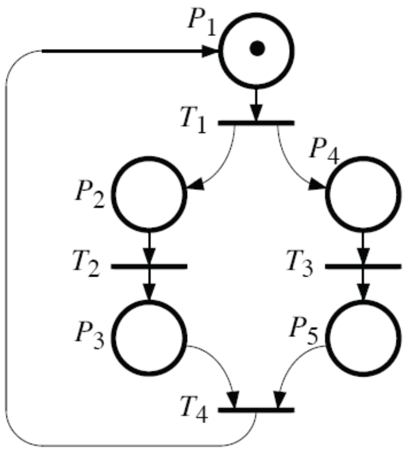
Propiedades de las RdP

- Aquí presentamos las principales propiedades de las RdP ordinarias.
  - Estas propiedades están vinculadas a los conceptos de delimitación, vivacidad y puntos muertos, componentes conservadores y componentes repetitivos.
- Desarrollo del capitulo
  - En primer lugar introducimos las notaciones y las definiciones.
  - Seguidamente los conceptos de acotación, liveness y deadlock, conflictos e invariantes.
- Los dos principales métodos utilizados son el grafo de marcado y el álgebra lineal.

Notación y definiciones

- El marcado de una RdP, en un momento dado, es una vector columna cuyo ith componente es la marca de la plaza Pi en este momento. Por simplicidad, escribiremos las marcas en el forma transpuesta.
- Para la marcar m0, hay una transición habilitada que es T1.

$$\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- El disparo de T1 para la marca m0
- resulta en la marca m1 = (0, 1, 0, 1, 0).

$$\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_1$$

$$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_2} \mathbf{m}_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0), \qquad \mathbf{m}_2 \xrightarrow{T_3} \mathbf{m}_4 = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1).$$

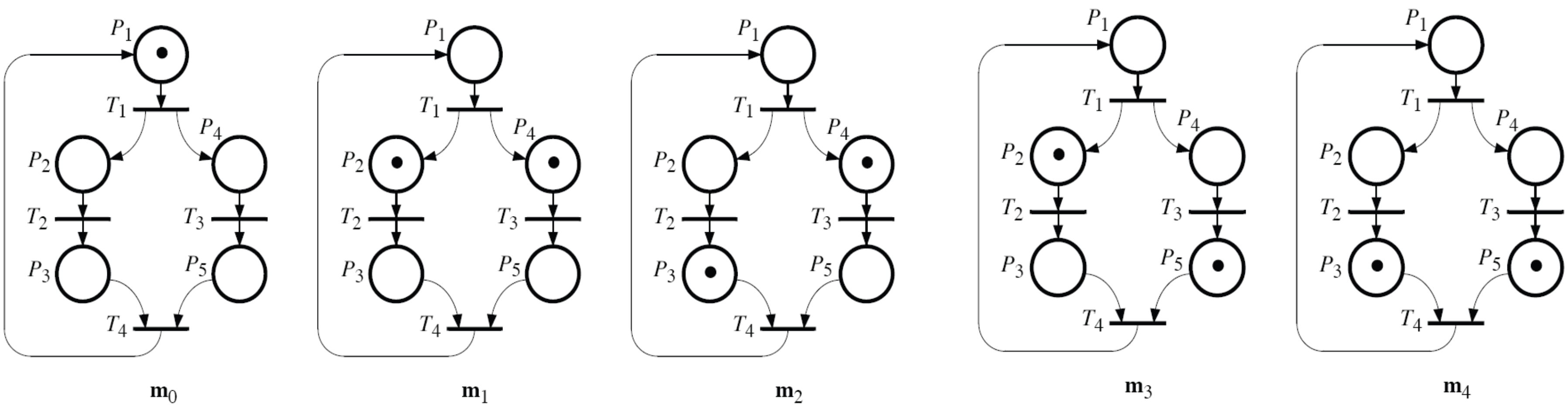
$$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_3} \mathbf{m}_3 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Una RdP con marca inicial m0, denota el conjunto de marcas alcanzables mediante una secuencia finita de disparo. Para nuestro ejemplo,

Marca

- Una RdP con marca inicial m0, denota el conjunto de marcas alcanzables mediante una secuencia finita de disparo a partir de m0. Para nuestro ejemplo

$$\mathcal{M}(\mathbf{m}_0) = \{\mathbf{m}_0, \ \mathbf{m}_1, \ \mathbf{m}_2, \ \mathbf{m}_3, \ \mathbf{m}_4\}.$$



La cadena T1T2 se conoce como secuencia de disparo. Lo siguiente puede escribirse:

$$S = T_1 T_2$$

$$\mathbf{m}_0 \xrightarrow{S} \mathbf{m}_2.$$

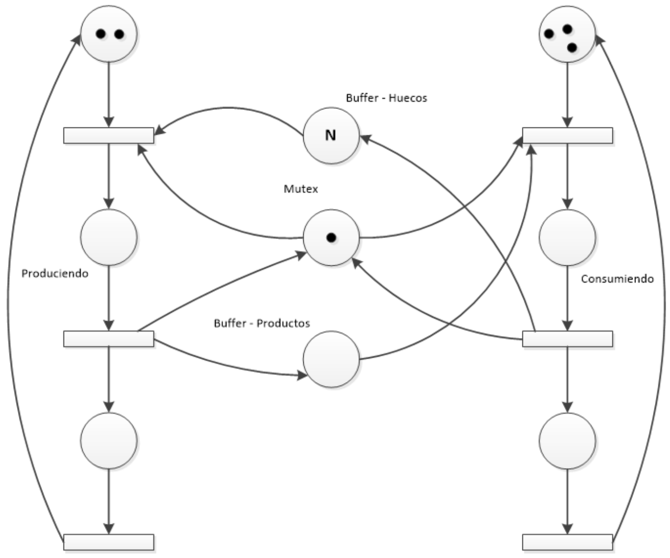
Por ejemplo, la secuencia T1T4 no es una secuencia de disparo de la marca m0. De hecho, cuando T1 se ha disparado, la transición T4 no está habilitada y, por lo tanto, no puede ser la primera transición disparada después de T1.

Notación

- La siguiente notación será útil para los siguientes apartados.
- Notación 2.1
  - Sean z 1 y z2 dos vectores del mismo tamaño (por ejemplo, dos marcas de la misma RdP, y zj (i) denota la i-ésima componente de zj.
  - a) El vector z1 es mayor o igual a $\mathbf{z}_1 > \mathbf{z}_2$:ado por $\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{z}_2$ y definido como $\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{z}_2 \Leftrightarrow z_1(i) \geq z_2(i)$ para cada componente i.
  - b) El vector z1 es mayor que z2: indicado por z1 z2 y definido como $\mathbf{z}_1 \gneqq \mathbf{z}_2$ $\mathbf{z}_1 \gneqq \mathbf{z}_2 \Leftrightarrow \mathbf{z}_1 \geq \mathbf{z}_2 \text{ and } z_1(i) > z_2(i)$ para al menos una componente i.
  - c) El vector z1 es estrictamente mayor que z2: denotado por $\mathbf{z}_1 > \mathbf{z}_2$ y definido como $\mathbf{z}_1 > \mathbf{z}_2 \Leftrightarrow z_1(i) > z_2(i)$ para cada componente i.

Propiedades

- Definición de propiedad
  - El interés de un modelo reside en la posibilidad de definir formalmente las propiedades del modelado del sistema, para controlar estas propiedades por medio de algoritmos o heurísticos.
  - En el caso de las RdP, las propiedades las relacionamos con la actividad de un sistema paralelo y/o concurrente.
  - Estas propiedades pueden ser específicas para el paralelismo o simplemente relacionados con su dinámica.
    - La Figura ilustra un buffer acotado con exclusión-mutua. Esta red modela dos tipos de procesos, inicialmente en el estado de inactividad.
    - Cualquier proceso puede puede tratar de entrar en la zona de exclusión mutia:
      - Solo puede entrar uno a la vez:
        - Si es un productor debe haber huecos
        - Si es un consumidor debe haber productos
    - Cuales son las propiedades de esta red?
    - Como se relacionan estas propiedades con el software resultante?



Secuencia de disparos infinita

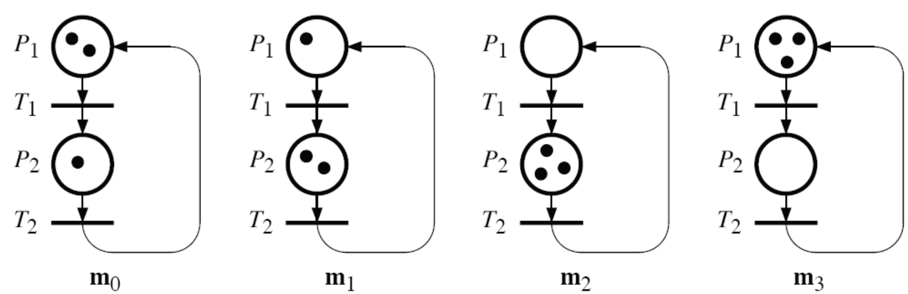
- Un problema es determinar si el comportamiento de un sistema termina o es finito. Por lo cual, buscando si la secuencia de disparos es o no finita.
- **Definición 4: Secuencia de disparos infinita**
  - Existe una secuencia de disparos infinita si: para un $\sigma \in T^{\infty}$, cualquier prefijo σ´ de σ es una secuencia finita de disparos
  - En la red de la figura la secuencia $(\text{Poniendo, Consumienso})^{\infty}$ es una secuencia infinita de disparos.
  - Cuando una red no tiene una secuencia infinita de disparos se dice que cumple con las propiedades de terminación.
  - Es importante determinar si el sistema nunca se detiene.
    - Por ejemplo, un sistema operativo no se detiene, sea cual sea el comportamiento de sus usuarios, es decir, desde cualquier marca al menos una transición debe poder dispararse.
    - Estado inevitable, cuando en una RdP existe un marcado que no se puede evitar, esto implica que la red debe necesariamente re-inicializarse.

RdP limitada

- Definición 2.1
  - Una plaza Pi está delimitado por una marca inicial m0 si hay un entero natural k tal que, para todas las marcas alcanzables desde m0, el número de token en Pi no es mayor que k (se dice que Pi es k -encerrado).
  - Una RdP está limitada para una marca inicial m0 si todos los lugares están limitados para m0 (la RdP está limitada por k si todos los lugares están limitados por k).

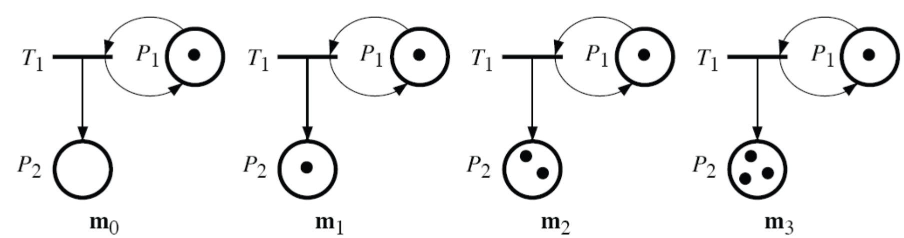
- La figura a muestra una EdP limitada. Tenemos $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1 T_2} \mathbf{m}_0$ etc.
- El conjunto de marcas alcanzables es $\mathcal{M}(\mathbf{m}_0) = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3\}$, y observamos que las marcas de P1 y P2 están limitadas. (3).

(a)



- La figura b muestra una red ilimitada de m0.
- De hecho . $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_1$
  $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_2 \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_3$
- Cada vez que se dispara la transición T1, se agrega un token en P2.
- El número de marcas alcanzables no está limitado: $\mathcal{M}(\mathbf{m}_0) = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \ldots\}$
- el lugar P2 no está limitado

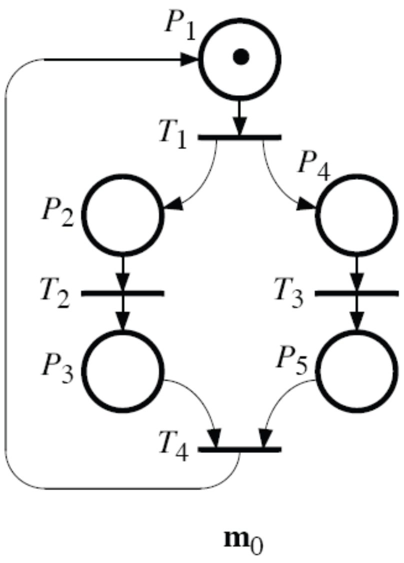
(b)



RdP Segura

- Definición
  - Se dice que una RdP es segura para una marca inicial si para cada marca alcanzables, cada lugar contiene cero o un token.
  - Un RdP seguro es, por lo tanto, un caso particular de EdP acotada para la cual todos los lugares tienen un límite de 1.
  - El RdP de la figura a de la filmina anterior es limitado pero no segura.

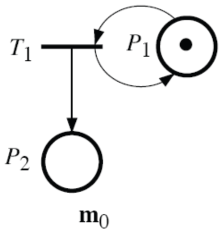
RdP segura.



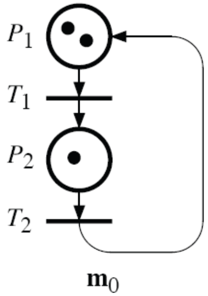
Propiedades de las RdP acotadas y seguras

- Las propiedades de PN seguras y limitadas dependen de la marca inicial m0.
  - Es suficiente que m0 sea tal que uno de los lugares contenga 2 tokens para que el RdP no sea seguro.
  - Una RdP limitadas, se puede ver en la Figura b que si la marca inicial de P1 es cero, la transición T1 no se activará ni se habilitará nunca.
    - El marcado de P2 nunca cambiará. Si m0 = {0, N} entonces M (m0) = {m0} cualquiera que sea N>=0.
    - Esta RdP estaría limitada por esta marca inicial.
  - La figura a muestra que la RdP está limitada independientemente de m0 (independientemente de la evolución, el número de token permanece constante).
  - Se dice que una PN no marcada está estructuralmente limitada si para todas las marcas finitas iniciales, la RdP marcada está limitada.
- Propiedad
  - Si una RdP no tiene límites para una marca m0, no tiene límites para una marca m1>= m0.

(b)

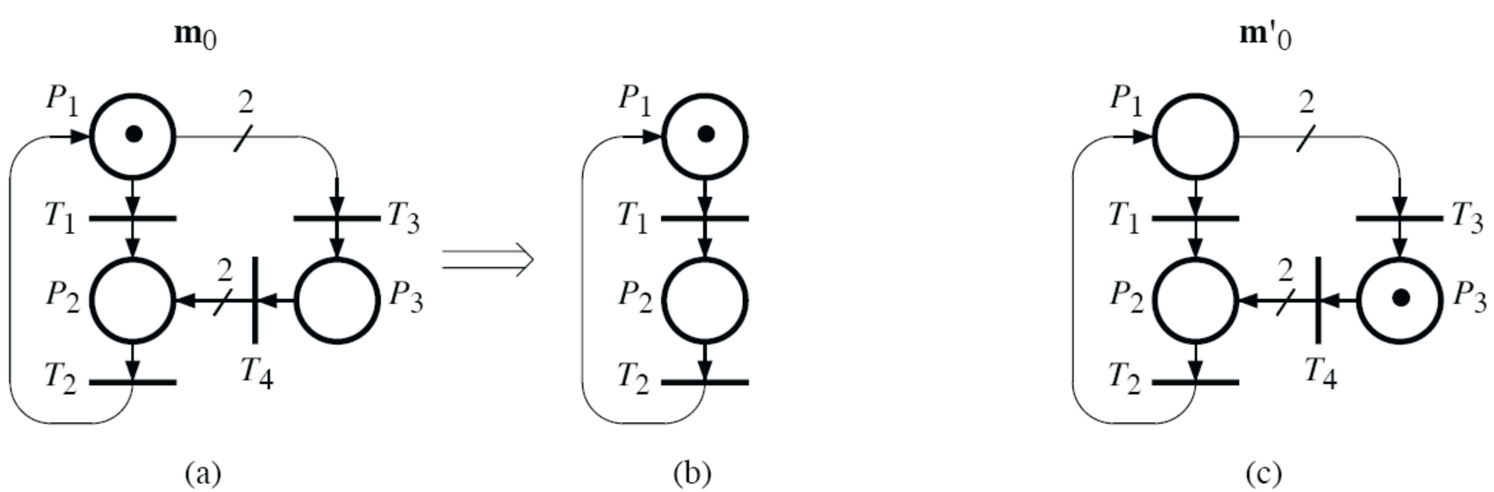


(a)



Propiedades de las RdP acotadas y seguras

- Observación
  - El concepto de una RdP acotado se aplica a todas las RdP ordinarias y las extensiones.
  - El concepto de RdP segura podría aplicarse a todas las RdP ordinarias y extensiones (pero con ligeras diferencias), con la excepción de las RdP continuas, ya que las marcas de lugar no son números enteros.
  - Una RdP generalizada que es segura degeneraría en una RdP ordinaria.
    - Esto se ilustra en la Figura.
    - Para la marca inicial m0 de la Figura a, la RdP es segura, dado que la transición T3 nunca se habilitará ya que se necesitan dos stoken en P1, y el funcionamiento es equivalente al de la RdP ordinaria en la Figura b.
    - Para la marca inicial m0 de la Figura c, la RdP no es segura ya que disparar T4 agregaría 2 token a P2.

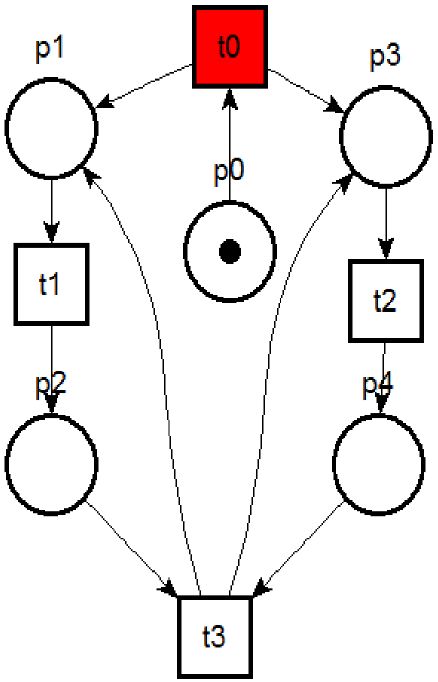


RdP Seudo Viva

- **Definición: RdP Seudo Viva**
- Seudo Vivacidad, una RdP es Seudo viva si:

$$\forall\, m \in M(R, m_0)\ \exists\, t \in T\ s.t\ m \xrightarrow{t}$$

- Es una RdP seudo-viva existen algunas transiciones vivas por lo que no se bloquea totalmente.
  - En el ejemplo de la Figura, la RdP tien su transición t_0 sensible, esta se dispara solo una vez y luego no es sensibilizada nuevamente, pero las transiciones $t_1, t_2\ y\ t_3$ vuelven a sensibilizarse, por lo cual la red es seudo-viva



RdP Quasi Viva

- Se dice que una transición es Quasi-viva si se puede disparar al menos una vez
  - "expresa un diseño sintácticamente correcta en el sentido de que cualquier actividad o evento debe ocurrir al menos una vez en el comportamiento de la red.
- **Definición:** Quasi Vivacidad, una RDP es Quasi viva si:

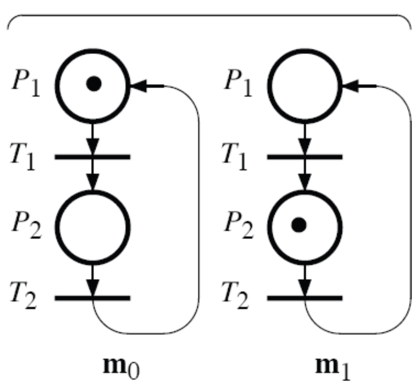
$$\forall\, t \in T\ \exists\, m \in M(R, m_0)\ \ s.t\ m\overset{t}{\rightarrow}$$

  - Las propiedades de Quasi-viva y Seudo-viva asegura una cierta corrección del sistema, pero no pueden garantizar que de una determinada marcas se pueda llegar a cualquier marca del sistema y mantener todas sus funcionalidades.
  - En otras palabras, no sabemos si todas las transiciones pueden ser disparadas en un futuro para alcanzar un **estado determinado**.

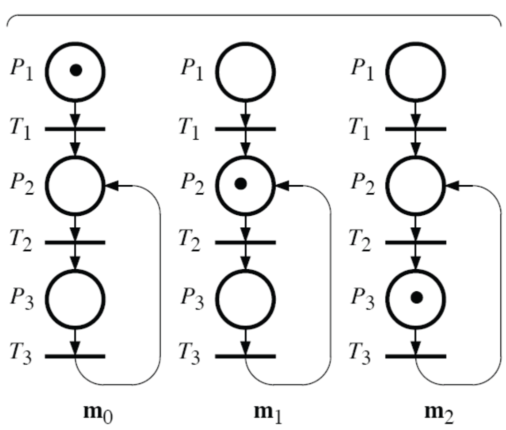
RdP Liveness

- El marcado de una RdP evoluciona mediante el disparo de transiciones.
  - Cuando algunas transiciones ya no son habilitadas y cuando todo o parte de la RdP ya no "funciona", es probable que haya un problema en el diseño del sistema descrito.
  - Definición
    - Una transición Tj está viva para una marca inicial m0 si para cada marca alcanzable $\mathbf{m}_i \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0)$ existe una secuencia de disparo S de mi, que contiene la transición Tj.
    - En otras palabras, sea cual sea la evolución, siempre queda la posibilidad de disparar a Tj.
  - Este concepto se ilustra en la Figura .
    - La Figura a presenta una RdP que tiene 2 marcas alcanzables. Para cada una de estas marcas, existe una secuencia de disparo que contiene T1. La transición T1 y T2 están vivas.
  - El PN de la figura b tiene 3 marcas alcanzables de m0:
    - M (m0) = {m0, m1, m2}.
    - Podemos observar que no hay secuencia de disparo que contenga T1 desde m1 (o desde m2). Es decir que si se alcanza el marcado m1, la transición T1 nunca volverá a habilitarse. Esta transición no es en vivo.

(a)

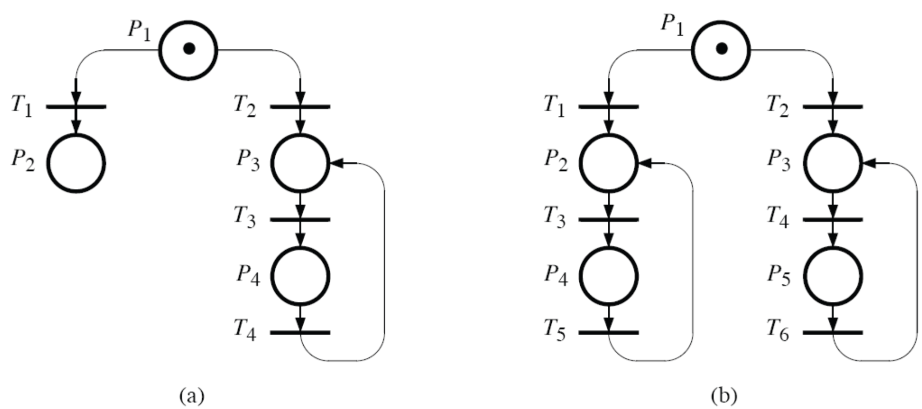


(b)



Deadlock

- Definición Un **Deadlock** (o estado sumidero) es una marca tal que no se puede disparar ninguna transición.
  - En la figura a, el disparo de la transición T1 da como resultado la marca m1 = (0, 1, 0, 0). Este es un punto muerto. De ahora en adelante, el marcado ya no puede evolucionar.
- Definición Se dice que una RdP está libre de interbloqueo para una marca inicial m0 si ninguna marca alcanzable $\mathbf{m}_i \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0)$ es un **Deadlock**.



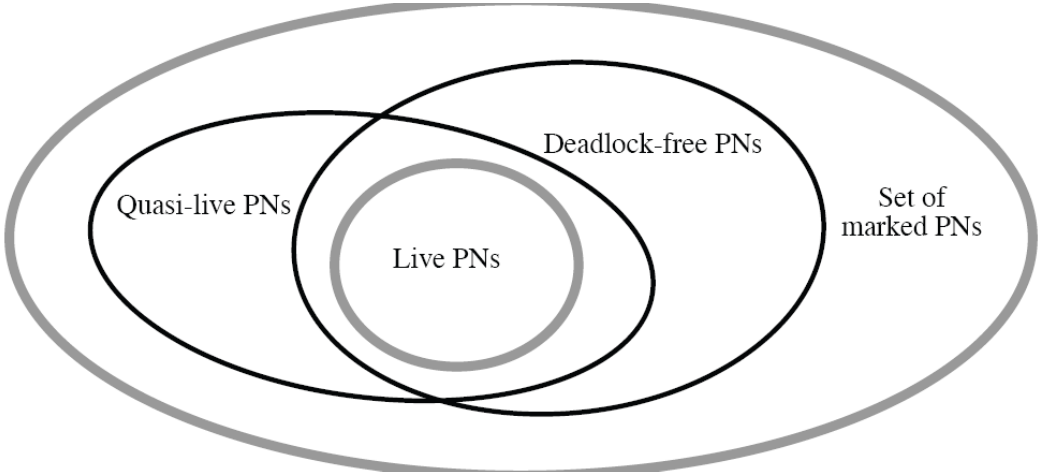
With Deadlock.

Deadlock-free.

Quasi-live

Relaciones relativas a la vivacidad y el deadlock

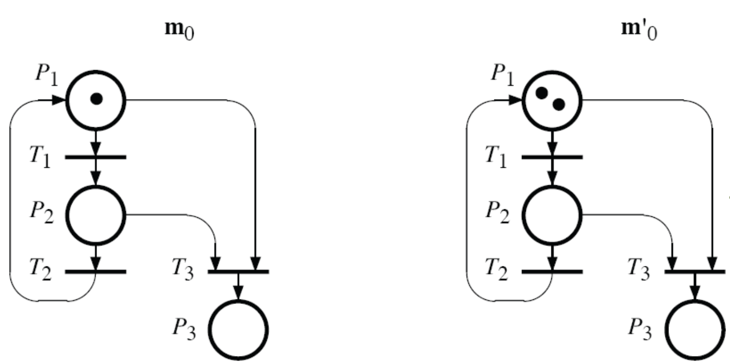
- Observación.
  - A)Las propiedades de quasi-liveness y deadlock-freeness son independientes.
    - Las RdP de la figura anterior son cuasi-vivo; la primera tiene un punto muerto y el segunda está libre de bloqueo.
  - B) Las propiedades de liveness y deadlock-freeness no son independientes
    - Una RdP viva está libre de interbloqueo.
    - De hecho, una RdP con deadlock no contiene una transición que se pueda disparar si se alcanza un punto muerto.
  - C) Las propiedades de liveness y deadlock dependen claramente de la marca inicial.



Propiedades de la vivacidad y el deadlock

- a) Si una transición Tj es cuasi-viva para una marca inicial m0, es cuasi-viva para $\mathbf{m}'_0 \geq \mathbf{m}_0$.
- b) Si Tj es en viva para m0, no es necesariamente en vivo para
$$\mathbf{m}'_0 \geq \mathbf{m}_0.$$
- c) Si un RdP está libre de interbloqueo (deadlock) para m0, no es necesariamente así para $\mathbf{m}'_0 \geq \mathbf{m}_0$. .
- La figura ilustra el hecho de que las propiedades de vitalidad y libre de interbloqueo no se mantienen aumentando el marcado.

La transicions T1 y T2 esta vivas, y T3 no es quasi-live.



(a) (b)

La transicions T1 y T2 no esta vivas, y T3 es quasi-live.

Relaciones relativas a la vivacidad y el deadlock

- Observación
  - Los conceptos de liveness, cuasi-liveness y deadlock se aplican a todas las RdP vista y pueden generalizarse a todas las extensiones PN.
  - Para las RdP continuas, se darán nuevos conceptos en el capitulo 4.

Home state

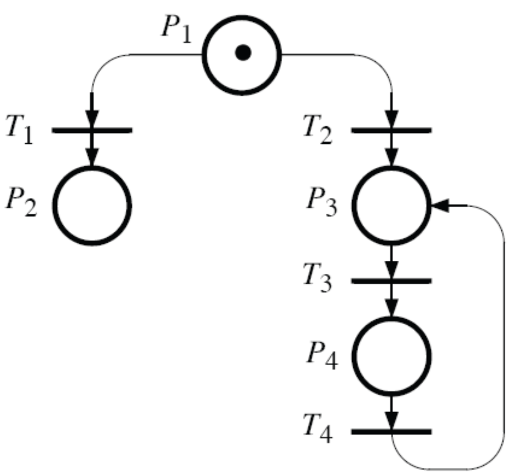
- Definición
  - a) Una RdP tiene un **Home state** $\mathbf{m}_h$ para una marca inicial $\mathbf{m}_0$ si para cada marca alcanzable $\mathbf{m}_i \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0)$, existe una secuencia de disparo tal que .

$$\mathbf{m}_i \xrightarrow{S_i} \mathbf{m}_h$$

  - b) Una RdP es reversible para una marca inicial m0 si m0 es un **Home state** (el la palabra reinicializable también se usa).

  - Está claro que la existencia de un **Home state** depende de la marca inicial.
    - Por ejemplo, el RdP de la figura no tiene un **Home state** para m0 = (1, 0, 0, 0).
    - Por otro lado, tiene dos estados de origen para m0 = (0, 0, 1, 0).

El conjunto de Home state es el home space.



Esta noción de estado de origen puede aplicarse a todas los tipos y extensiones RdP....

Conflictos

- En esta sección, consideramos explícitamente las RdP generalizadas.
- Ahora especificaremos los conceptos de:
  - **conflicto efectivo**
  - **conflicto general**
  - **persistencia y**
  - **concurrencia.**

  - El concepto de conflicto estructural ya se presentó
    - Recuerde que un conflicto estructural corresponde a un conjunto de al menos 2 transiciones T1 y T2 que tienen un lugar de entrada en común.
    - Esto se escribe como: $K = \langle P_i, \{T_1, T_2, \ldots\} \rangle$

Conflicto efectivo

- En una RdP ordinaria, un conflicto efectivo es la existencia de un conflicto estructural K, y de una marca m, tal que el número de token en Pi es menor que el número de transiciones de salida de Pi que son habilitadas por m.

Conflicto no efectivo.

m1 only enables transition *T*1

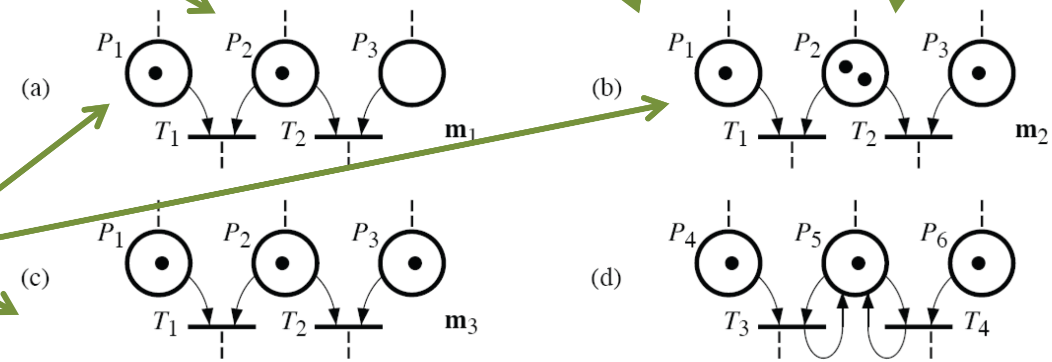
both transitions can be fired

- Un conflicto efectivo está representado por un triple

$$K^E = \langle P_i, \{T_1, T_2, \ldots\}, \mathbf{m} \rangle$$

  - Existe conflicto estructural en

$$K_1 = \langle P_2, \{T_1, T_2\} \rangle$$



Efectivo conflicto para la marca m3.

$$K^E = \langle P_2, \{T_1, T_2\}, \mathbf{m}_3 \rangle$$

Conflicto efectivo y persistente
El marcado permite solo disparar una transición a la vez (se pueden disparar ambas transiciones), el orden es importante?

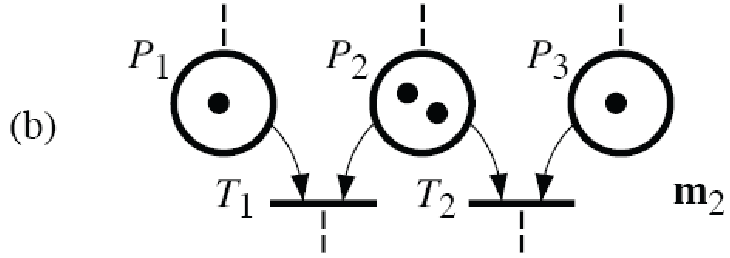
Conflicto efectivo

- Definición
  - Un conflicto efectivo, denotado por $K^E = \langle P_i,\ \{T_1,\ T_2,\ \ldots\}\ \mathbf{m}\rangle$
  - es la existencia de un conflicto estructural $K = \langle P_i, \{T_1, T_2, \ldots\}\rangle$, y
  - de una marca ***m***, tal que las transiciones en el conjunto $\{T_1,\ T_2,\ \ldots\}$ están habilitadas por ***m*** y el número de token en Pi es menor que la suma de los pesos de los arcos

$$P_i \rightarrow T_1,\ P_i \rightarrow T_2,\ \ldots$$

Múltiples disparos

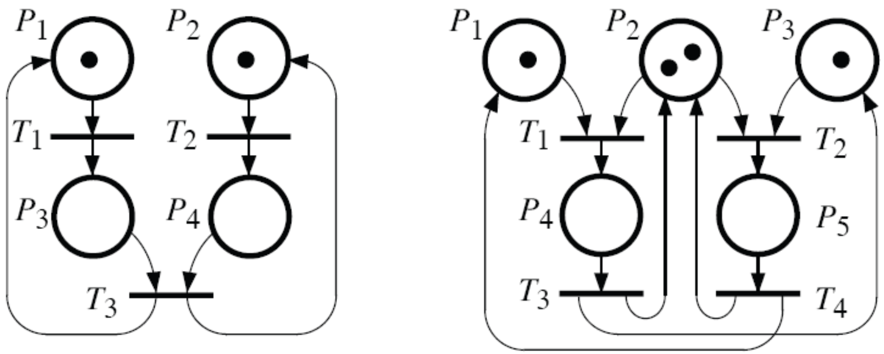
- En la RdP de la figura con un marcado m2 , es posible disparar T1 y T2 puesto que son independientes y hay suficientes tokens.
- Es posible el disparo concurrentes.
  - Si denotemos [T1T2] el disparo múltiple de T1 y T2.
  - Esto significa que las transiciones T1 y T2 se disparan en simultáneo.
  - El doble disparo [T1T2] conduce de m2 a otra marca, digamos m4, por lo tanto, se puede escribir:.



  - Denotamos $\{T_1T_2\}$ al disparo concurrente, el disparo puede ser realizado en cualquier orden o simultáneamente y se denota $\mathbf{m}_2 \xrightarrow{\{T_1T_2\}} \mathbf{m}_4.$

Transiciones concurrente

- Se dice que dos (o más) transiciones son simultáneas si están habilitadas y son causalmente independientes, es decir, una transición puede dispararse antes o después o simultáneamente con la otra.
  - En la mayoría de los casos, estas dos transiciones no tienen lugar de entrada común; esto se ilustra en la Figura a. donde T1 y T2 son concurrentes.
  - Las transiciones pueden tener un lugar de entrada común, pero, en este caso, hay suficientes tokens en este lugar para activar ambas transiciones, como en la figura b.
  - Si, por cada marca alcanzable $\mathbf{m}_i \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0)$, no hay conflicto efectivo, entonces en cualquier momento las transiciones habilitadas son concurrentes.



(a) (b)

Persistencia

- Una RdP es persistente si por cada marca alcanzable $\mathbf{m}_i \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0)$ existe la siguiente propiedad:

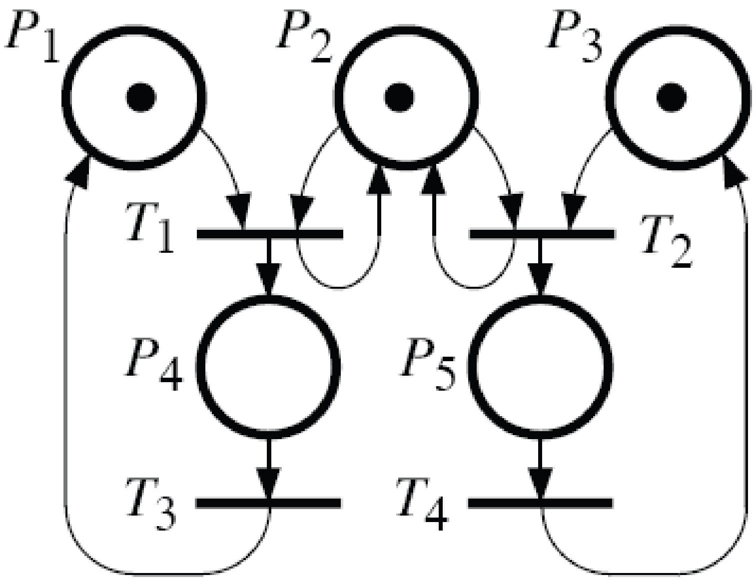
  - por cada par de transiciones Tj y Tk habilitadas marcando mi, la secuencia TjTk es una secuencia de disparo de mi (así como TkTj por simetría).

Una transición habilitada solo se puede desactivar mediante su propia disparo.

Persistencia

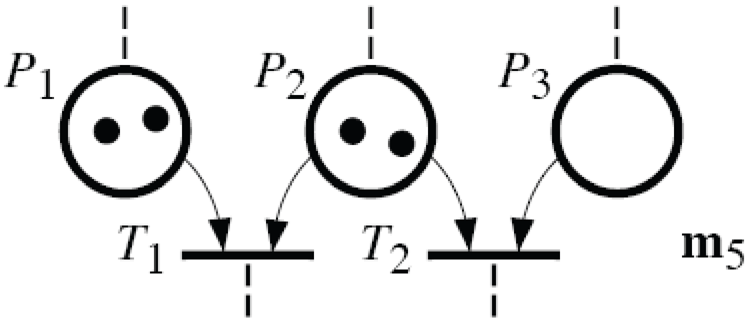
- Tenga en cuenta que una RdP sin conflicto estructural es persistente para cualquier m0; se dice que una RdP persistente para cualquier m0 es estructuralmente persistente.
  - Se puede observar un parecido entre las dos propiedades. Si una PN no tiene un conflicto efectivo, es decir, las transiciones habilitadas son siempre concurrentes, entonces la PN es persistente.

- Por otro lado, si hay un conflicto efectivo entre dos transiciones, la persistencia es posible si existe un autointerrupción entre el lugar considerado y cada transición (como en la Figura), pero estas transiciones no son concurrentes.
- En el caso donde hay persistencia pero no concurrencia entre Tj y Tk, ambas secuencias de disparo TjTk y TkTj son posibles, pero no simultáneas [TjTk].



Grado de Habilitando

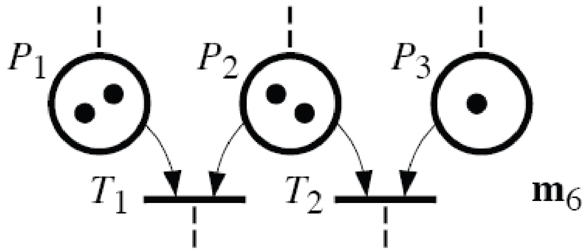
- Por lo general, la habilitación de una transición se considera como una propiedad "booleana":
  - la transición está habilitada o no está habilitada.
  - Podemos tener en cuenta el grado de habilitación de una transición, que corresponde al número de disparos que pueden ocurrir para esta transición
  - En la Figura 2.11a, la transición T1 se puede disparar dos veces; decimos que su grado de habilitación es 2
  - Tenga en cuenta que los dos disparos de T1 son concurrentes, es decir, la secuencia de disparo puede ser $\{T_1T_1\} = T_1T_1 + [T_1T_1]$



(a)

Conflicto General

- En la Figura, las transiciones T1 y T2 están habilitadas con habilitación de grados 2 y 1 respectivamente.
- Sin embargo, **no podemos tener dos disparos de T1 y un disparo de T2**, ya que solo hay 2 tokens en P2.
- De acuerdo con la definición de conflicto efectivo, esta situación **no es un conflicto efectivo** ya que tanto T1 como T2 se pueden disparar simultáneamente.
- Sin embargo, existe un tipo de conflicto ya que **ambas transiciones no se pueden disparar simultáneamente de acuerdo con los grados de habilitación**: el disparo de T2 disminuye el grado de habilitación de T1, y el doble disparo de T1 desactiva T2; los disparos simultáneos {T1T1} y {T1T2} son posibles, pero no {T1T1T2}. **Esto se llamará conflicto general**

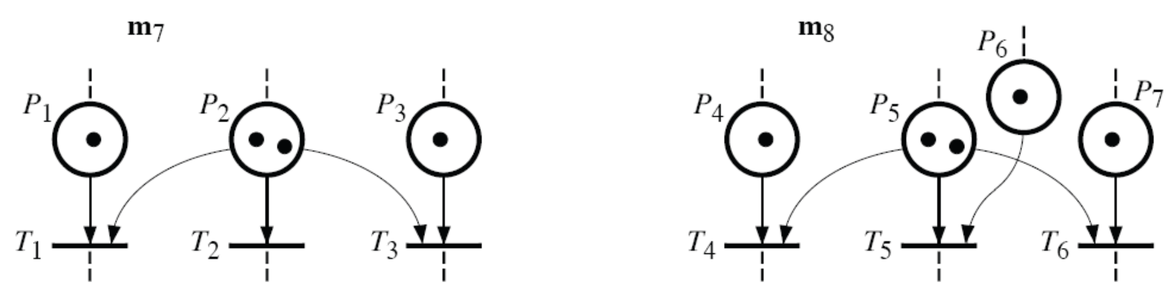


(b)

Conflicto General

- Definición
  - Un conflicto general, denotado por $K^G = \langle P_i,\ \{T_1,\ T_2,\ \ldots\}\ \mathbf{m}\rangle$ la existencia de un conflicto estructural $K = \langle P_i,\ \{T_1,\ T_2,\ \ldots\}\rangle$,na marca m, tal que el número de tokens en Pi no es suficiente para disparar todas las transiciones de salida de Pi según sus grados habilitantes

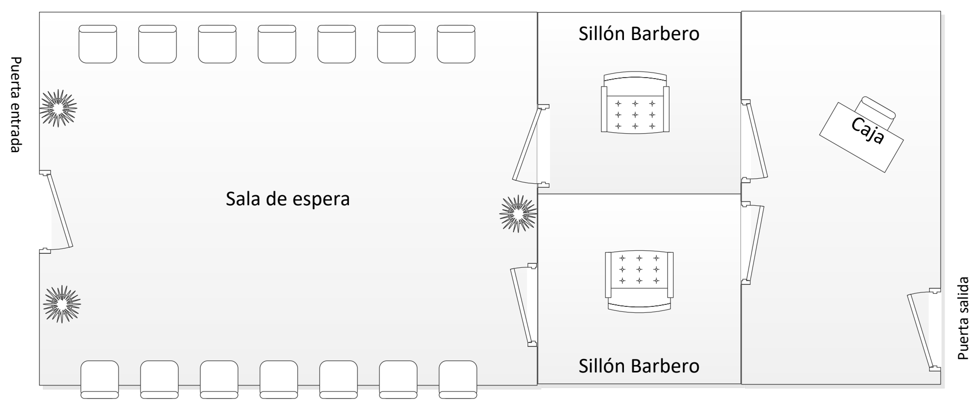
- De acuerdo con la definición, en la figura a, $\langle P_2,\ \{T_1,\ T_3\},\ \mathbf{m}_7\rangle$ no es un conflicto general, aunque $\langle P_2,\ \{T_1,\ T_2,\ T_3\},\ \mathbf{m}_7\rangle$ es un conflicto general. En este caso, también son conflictos generales $\langle P_2,\ \{T_1,\ T_2\},\ \mathbf{m}_7\rangle$, and $\langle P_2,\ \{T_2,\ T_3\},\ \mathbf{m}_7\rangle$
- En la figura b. $\langle P_5,\ \{T_4,\ T_5\},\ \mathbf{m}_8\rangle$ nor $\langle P_5,\ \{T_4,\ T_6\},\ \mathbf{m}_8\rangle$ nor $\langle P_5,\ \{T_5,\ T_6\},\ \mathbf{m}_8\rangle$ son un conflicto general, pero $\langle P_5,\ \{T_4,\ T_5,\ T_6\},\ \mathbf{m}_8\rangle$ es un conflicto general.
- Por lo tanto, **un conflicto general que involucre tres transiciones, o más, no siempre es inducido por conflictos entre dos transiciones**



(a) (b)

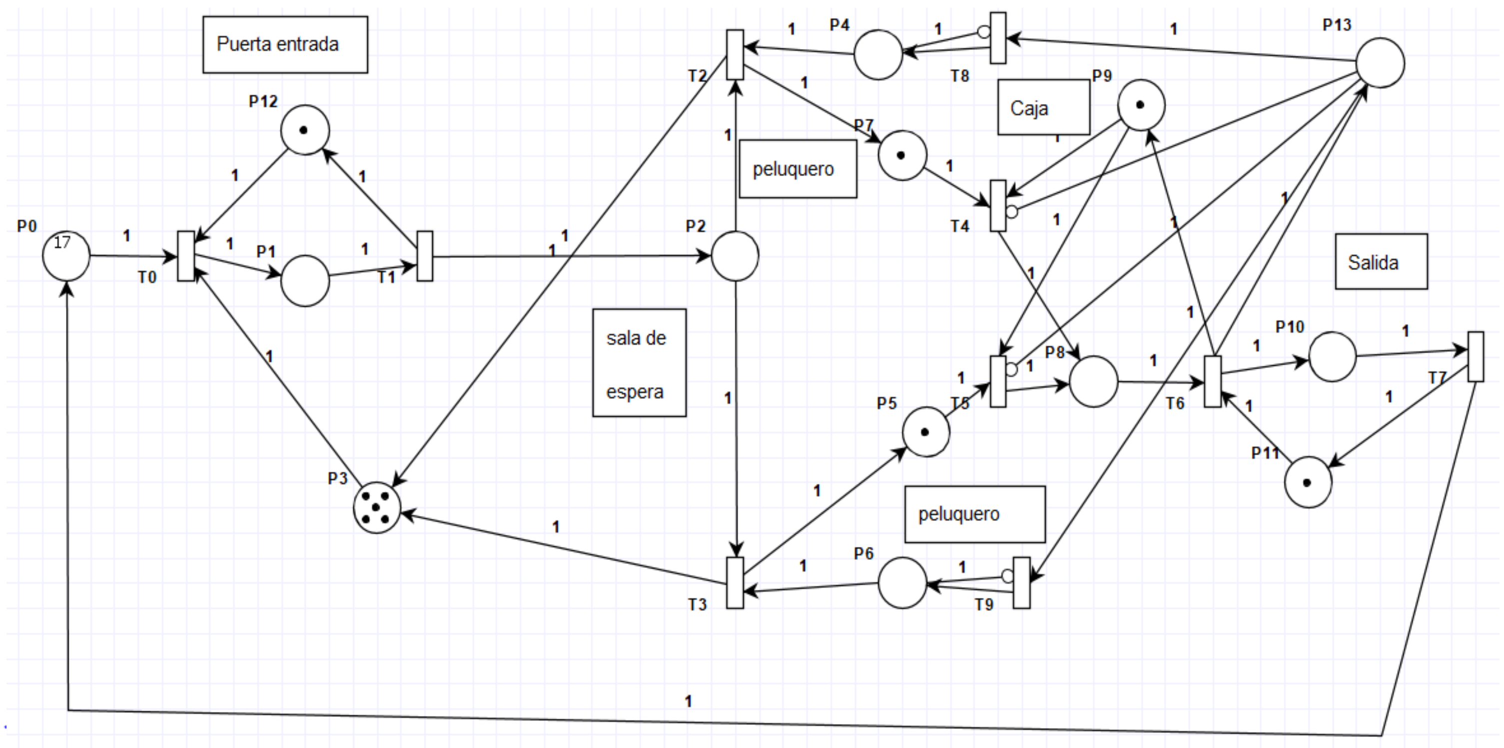
Problema de la Barbería

- **Enunciado**
- Implementar el problema de la Barbería, con el objeto de ver cómo funciona un problema típico de concurrencia.
- **Problema de la Barbería**
- En una barbería hay “n” barberos, cada uno con su sillón de barbero. Además, tenemos una sala de espera con “m” bancos en las que se sientan los clientes para esperar su turno. El funcionamiento de la barbería se rige por las siguientes normas:
- Si no hay clientes que atender, el barbero espera.
- Los cliente entra de a uno a la barbería.
- Si hay clientes en espera y algún barbero atiende a un cliente.
- Si llega un cliente mientras los barberos están ocupados, se sienta en un banco de espera.
- Si llega un cliente, y todos los barberos y todos bancos de espera están ocupadas, se va sin ser atendido.
  - Nótese que los clientes se atienden sobre demanda: no se respeta necesariamente el orden de entrada.
- Para el cobro, solo hay una caja y debe ser atendida por un barbero, este barbero no podrá cortar el pelo mientras atiende la caja
- Plano de la barbería con dos barberos y una caja.



Problema de la Barbería

- Modelo realizado con PIPE PIPE



Petri net classification results

State Machine	false
Marked Graph	false
Free Choice Net	false
Extended Free Choice Net	false
Simple Net	true
Extended Simple Net	true

Petri net state space analysis results

Bounded	true
Safe	false
Deadlock	false

Invariantes

- A partir de una marca inicial, el marcado de una RdP puede evolucionar mediante el disparo de transiciones y, **si no hay punto muerto, el número de disparos es ilimitado.**

- Sin embargo, **no se puede alcanzar cualquier marca**, todas las marcas alcanzables tienen algunas propiedades en común; se dice que una propiedad que no varía cuando se activan las transiciones es invariante.

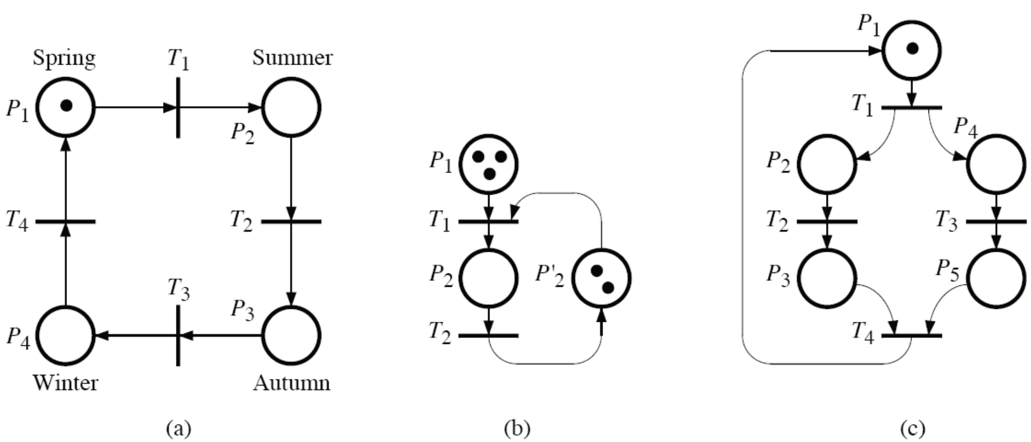
- De manera similar, **no solo se puede disparar cualquier secuencia de transición**; algunas propiedades invariantes son comunes a las posibles secuencias de disparo.

Los invariantes permiten caracterizar ciertas propiedades de las marcas alcanzables y de las transiciones inalterables, independientemente de la evolución.

Componentes conservativos

- En la Figura a, podemos ver que, independientemente de la evolución, siempre habrá una y solo un token para los 4 lugares.
- Por lo tanto, en todo momento se cumple, m1 + m2 + m3 + m4 = 1.
- Es decir, que en todo momento estamos en una y solo una estación.

- En la Figura b. Observamos que m2 + m’2 = 2 para todas las marcas alcanzables
  - Este invariante es bastante natural ya que el lugar P’2 es complementario de P2, para garantizar que nunca haya más de 2 token en P2



- En la Figura c. vemos que se cumple para las plazas {P1, P2, P3}, que
  m1 + m2 + m3 = 1.
- Del mismo modo
  m1 + m4 + m5 = 1.
- La suma de las dos ecuaciones,
  2 m1 + m2 + m3 + m4 + m5 = 2
- también es un invariante.

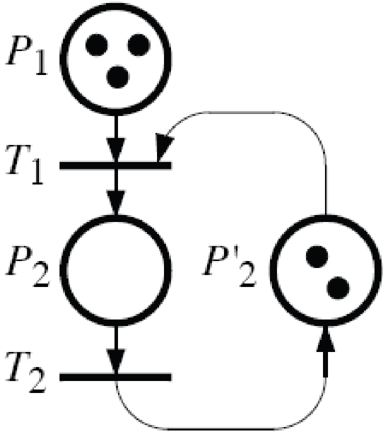
Invariante de plaza

- Un invariante de marcado (también llamado invariante de plaza lineal o simplemente invariante) se obtiene:
  - si hay un subconjunto de lugares $P' = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ $\in P$ y un vector de ponderación $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ para el cual todos los pesos qi son enteros positivos tales que:

$$q_1 \cdot m(P_1) + q_2 \cdot m(P_2) \ldots + q_r \cdot m(P_r) = \text{constant, for every } \mathbf{m} \in \mathcal{M}(\mathbf{m}_0).$$

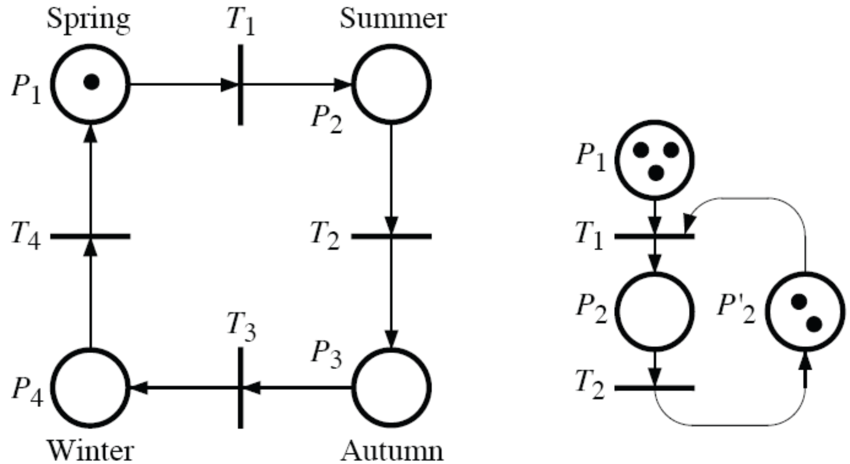
  - **El conjunto de lugares P 'es un componente conservador**
  - **La propiedad de ser un componente conservador es independiente de la marca inicial (es una propiedad estructural).**
  - **Por otro lado, la constante del marcador invariante depende de la marca inicial.**

Por ejemplo, en la figura, m(P2) + m(P’2) = 2.
Pero si la marca inicial fuera tal que
m0(P2) + m0(P’2) = N,
tendríamos m(P2) + m(P’2) = N
por cada marca alcanzable m.



Invariantes de plaza

- En términos generales, un componente conservador tiene un significado físico.
  - Por ejemplo, un sistema está en uno y solo un estado a la vez (Figura a), o se mantiene un número de entidades (Figura b).

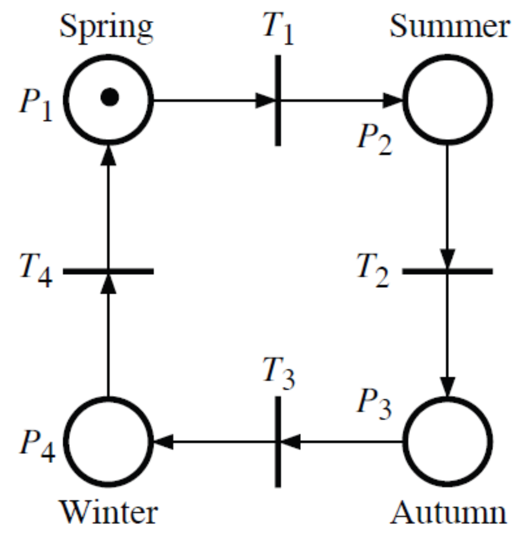


(a) (b)

Componente repetitivo

- Las secuencias de disparo para la RdP de la Figura a partir de la marca inicial m0 son las siguientes: T1, T1T2, T1T2T3, T1T2T3T4, T1T2T3T4T1, etc.
  - La secuencia de disparo T1T2T3T4, causa un retorno al estado inicial.
  - La secuencia puede ser así repetida. $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1 T_2 T_3 T_4} \mathbf{m}_0$
  - Una secuencia repetitiva que contiene todas las transiciones (cada una al menos una vez) es una secuencia repetitiva completa.
  - Está claro que si una secuencia de transición es una secuencia de activación de m0, todos sus prefijos también son secuencias de activación de m0.

- Para la Figura a, T1T2T3T4 es la única secuencia repetitiva mínima, es decir, ninguno de sus prefijos propios son secuencias repetitivas



Componente repetitivo

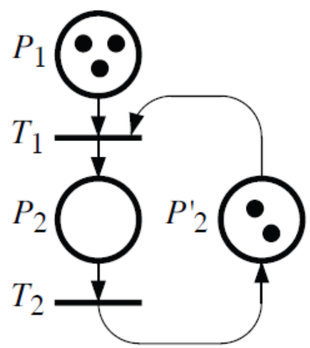
- el conjunto de secuencias de disparo se define por el conjunto de prefijos $\overline{L1}$ o $L1 \ = \ (T1T2T3T4)^*$, es decir,
- $\overline{L1} = (T1T2T3T4)^*$ (ε + $T1$ + $T1T2$ + $T1T2T3$) donde la iteración corresponde al disparo de la secuencia repetitiva, cualquier número de veces y el la segunda parte corresponde a los prefijos de la secuencia.

En la figura c, hay dos secuencias repetitivas mínimas que son $S1$= $T1T2T3T4$ y $S2$ = $T1T3T2T4$
El lenguaje generado es L 2 tal que

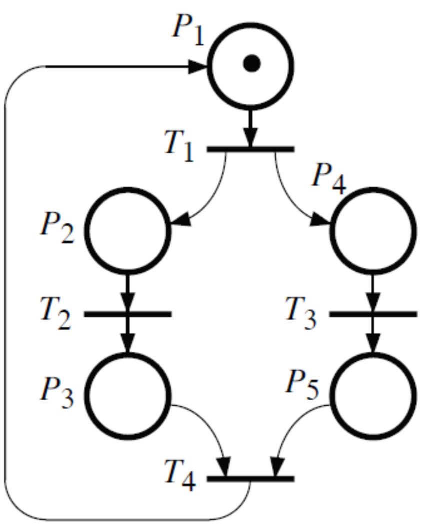
$$L2 = (S\,1 \ + \ S2)^* = \ (T1T2T3T4 \ + \ T1T3T2T4)^*$$

En la figura b, la secuencia S3 = T1 puede repetirse infinitamente, aunque no conduce a la marca inicial m0, sino a una marca $m'0 \gneqq m0$. Nunca es una secuencia repetitiva.

Nunca es una secuencia repetitiva. Para ser más precisos, una secuencia Sk tal que $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{S_k} \mathbf{m}_0' \gneqq \mathbf{m}_0$
como estacionario creciente repetitivo.
Cuando no se proporciona precisión, la expresión secuencia repetitiva significará repetitivo estacionario. $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{S_k} \mathbf{m}_0$;



(b)



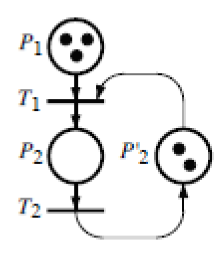
(c)

Componente repetitivo

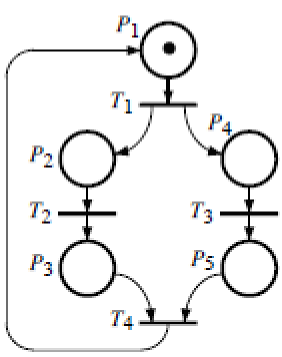
- **repetitividad**
  - cada (alguna) transición ocurre infinitamente a menudo para alguna secuencia inicial de marcado y disparo
  - Sea R una red de Petri y T el conjunto de sus transiciones. Sea Sk una secuencia repetitiva de disparos tal que las transiciones que aparecen en Sk estén definidas por el subconjunto T' = {T1, T 2, ..., Tr} incluido en T. El conjunto de transiciones T' es una **repetitivecomponent**.
- **consistencia**
  - cada (alguna) transición ocurre al menos una vez en alguna secuencia de disparo que impulsa una marca inicial a sí misma
  - informalmente el concepto de RdP consistente sin marcar, es: si hay una secuencia de disparos, Sk es estacionaria repetitiva y completa, es decir,

consistente $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{S_k} \mathbf{m}_0$ and $T' = T$, luego la RdP es consistente

En el caso de la PN o la figura c, $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1T_2T_3T_4} \mathbf{m}_0$; dado que T1T2T3T4 es una secuencia de disparo completa, la PN es consistente. En el caso del PN de la figura b, {T1} es un componente cada vez más repetitivo, y el PN es cada vez más repetitivo, es decir, no es consistente.



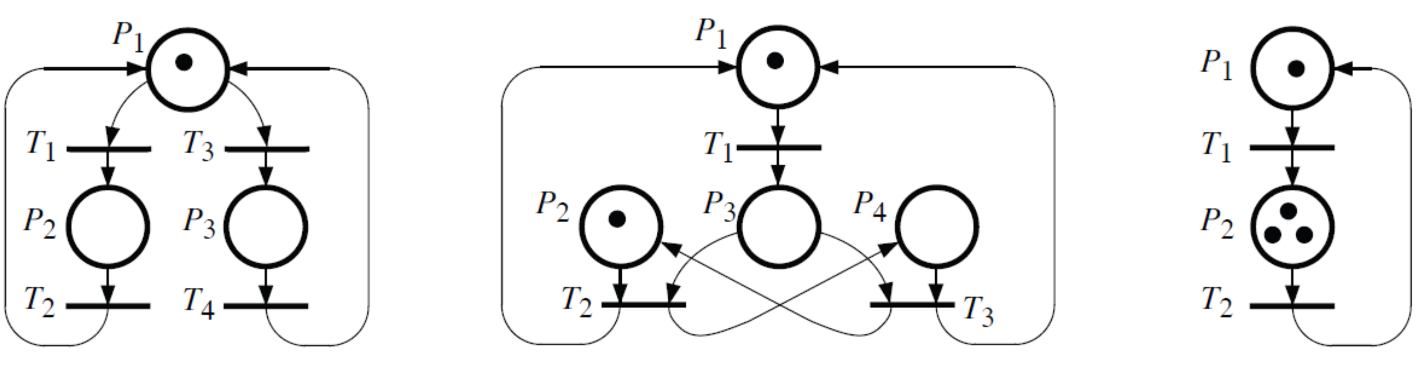
(b)



(c)

Componente repetitivo

- En el caso de la RdP de la figura a
  - pueden verse inmediatamente dos secuencias repetitivas, concretamente $S1 = T1T2\ y\ S2 = T3T4$, ya que cada una de estas secuencias provoca un retorno a la marca inicial.
  - Hay dos componentes repetitivos que son $\{T1, T2\}\ y\ \{T3, T4\}$. Ninguno de estos componentes contiene todas las transiciones de la PN.
  - Sin embargo, otros componentes repetitivos se pueden construir utilizando estos componentes como base.
  - El conjunto de todas las secuencias repetitivas se puede escribir como $L3 = (T1T2 + T3T4)^{+}$ (es decir, todas las secuencias en $(T1T2 + T3T4)^{*}$). La secuencia $S3 = T1T2T3T4$ es un elemento o L3. Esta es una secuencia repetitiva completa, por lo tanto, la RdP es consistente.
- El ejemplo dado en la figura b
  - muestra que una secuencia repetitiva puede contener varios disparos de la misma transición (aunque sigue siendo mínima).
  - La marca inicial $m0 = (1, 1, 0, 0)$ es tal que $m0 \xrightarrow{T1T2T1T3} m0$. La secuencia S4 = T 1T2T1T3 es así repetitiva.
  - Esta secuencia contiene la transición T1 dos veces (y ninguno de sus prefijos limpios es repetitivo). Como S4 es completo y estacionario repetitivo, el RdP es consistente.



(a) (b) (c)

Componente repetitivo

- Propiedad
  - Sea L (m0) el conjunto de secuencias de disparo de la marca inicial m0.
  - Si $\mathbf{m}_0' \geq \mathbf{m}_0$ then $\mathcal{L}(\mathbf{m}_0') \supseteq \mathcal{L}(\mathbf{m}_0)$
  - En particular: si S es una secuencia repetitiva para m0, también es una secuencia repetitiva para m’0.
    - Aquí hay una prueba intuitiva. Sea m’0 = m0 + m1, donde
      - m1 es un vector (m1 (P1), ..., m1 (Pn)) correspondiente a los tokens agregados a la RdP para obtener m’0 de m0.
      - Suponiendo un comportamiento restringido de la RdP con la marca m’0 tal que los token m1 (Pi) están "congeladas" en cada lugar Pi, es decir, estos token no se mueven.
      - Este comportamiento restringido genera el lenguaje L (m0). Por lo tanto, si el comportamiento no está restringido, es decir, si los tokens correspondientes a m1 no están congelados, se pueden obtener secuencias de disparo adicionales. Por lo tanto,

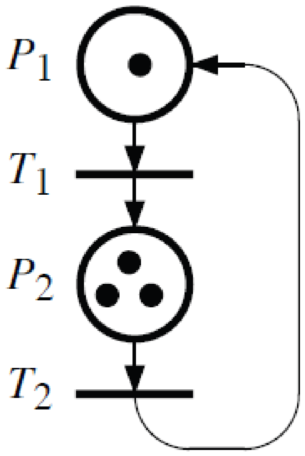
$$\mathcal{L}(\mathbf{m}_0') \supseteq \mathcal{L}(\mathbf{m}_0)$$

Componente repetitivo

- Las secuencias repetitivas dan una idea del comportamiento "cíclico" de una RdP.
  - Sin embargo, la información adicional viene dada por el avance sincrónico máximo o una transición por otra.
  - Considere por ejemplo el RdP en la figura c.
  - Se puede observar que T1 se puede disparar como máximo una vez antes de disparar o T2, ya que solo hay un token en P1; de forma similar, T2 se puede disparar como máximo tres veces antes de disparar o T2, ya que hay tres tokens en P2.
  - De manera más general, Sk es una secuencia de disparo de esta PN.
  - Si Nk (Tj) es el número de disparos o Tj en la secuencia Sk, entonces

$$-3 \leq N_k(T_1) - N_k(T_2) \leq 1$$

  - Esto significa que para cualquier secuencia de disparo de la RdP en la Figura c, el avance sincrónico o T1 en T2 es como máximo 1 y el avance sincrónico de T2 en T1 es como máximo 3.



(c)

Structural properties

- **STRUCTURAL BOUNDEDNESS**
  - Una red de Petri N está limitada estructuralmente si está limitada desde cualquier M0.
  - **Criterion :** N es estructuralmente limitado $\Leftrightarrow \exists$ $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{X}^T\mathbf{C} \leq 0$.
  - **Teorema:** (N, M0) está limitado si está estructuralmente limitado.
- **CONSERVADORA**
  - Una red de Petri N es conservadora si existe un vector $\mathbf{X} > 0$ asociado con lugares tales que
    $$\mathbf{X}^T\mathbf{M} = \mathbf{X}^T\mathbf{M0},\ \forall M0,\ \forall M \in R(M0).$$
  - **Criterion :** N is conservative $\Leftrightarrow \exists$ $\mathbf{X} > 0$, $\mathbf{X}^T\mathbf{C} = 0$
  - **Teorema**
    - (N, M0) está limitado si es conservador.
    - Una red de Petri es conservadora si todos los lugares están cubiertos por alguna p-invariante.
- **REPETITIVENESS**
  - Una red de Petri N es repetitiva si existe M0 y una secuencia de disparo factible de modo que cada transición aparece infinitamente a menudo.
  - **Criterio:** N es repetitivo $\Leftrightarrow \exists$ $\mathbf{Y} > 0$, $\mathbf{CY} \geq 0$
  - **Teorema**: una red de Petri en vivo (N, M0) es repetitiva.
- **CONSISTENCIA**
  - Una red de Petri N es consistente si hay una marca inicial M0 y una secuencia de disparo σ tal como > 0 and M0 [σ >M0.
  - **Criterio:** N es consistente $\Leftrightarrow \exists$ $\mathbf{Y} > 0$, $\mathbf{CY} = 0$
  - **Teorema**
    - Una red de Petri en vivo (N, M0) con un estado de origen es consistente.
    - Una red de Petri activa y limitada (N, M0) es consistente.
    - También es conservador si es vivo y estructuralmente limitado.

BUSCANDO LAS PROPIEDADES DE PETRI NETS

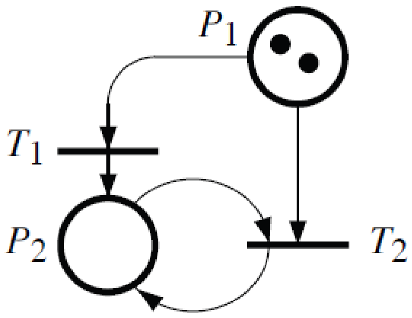
- Primero nos concentramos en dibujar el gráfico de las marcas o el árbol raíz de la capacidad de cobertura; este es el método básico.
- Seguidamente presentamos la aplicación de métodos basados en álgebra lineal; estos resultados son poderosos y elegantes.
- Por ultimo se presenta una descripción intuitiva de los métodos de reducción, como así también algunos otros resultados.

Analysis methods

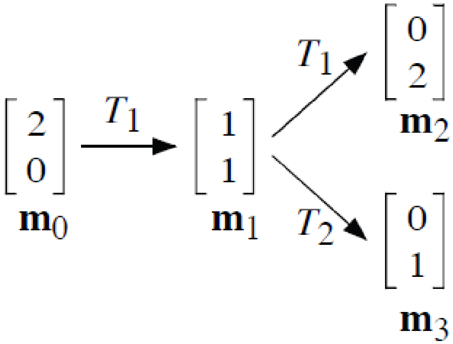
- **Graph of Markings**
- **Coverability Root Tree**

Graph of Markings

- El gráfico de marcas (o gráfico de alcanzabilidad) está formado por vértices que corresponden a marcas alcanzables y de arcos correspondientes a disparos o transiciones.
  - La figura a presenta una RdP con su marca inicial m0 = (2, 0).
  - La figura b es el gráfico de las marcas.
    - A partir de m0, solo se puede disparar la transición T1.
    - Luego se obtiene el marcado m1 = (1, 1). En el caso de marcar m1, ambas transiciones están habilitadas.
    - Si se dispara T1, se alcanza m2 = (0, 2) y si se dispara T2, se alcanza m3 = (0, 1).
    - Cada una de estas dos marcas es un punto muerto.
    - La figura b presenta así todas las marcas alcanzables y todos los disparos de transición únicos que existen entre estas marcas.
    - Este gráfico de marcas se puede usar para encontrar las propiedades de la PN.



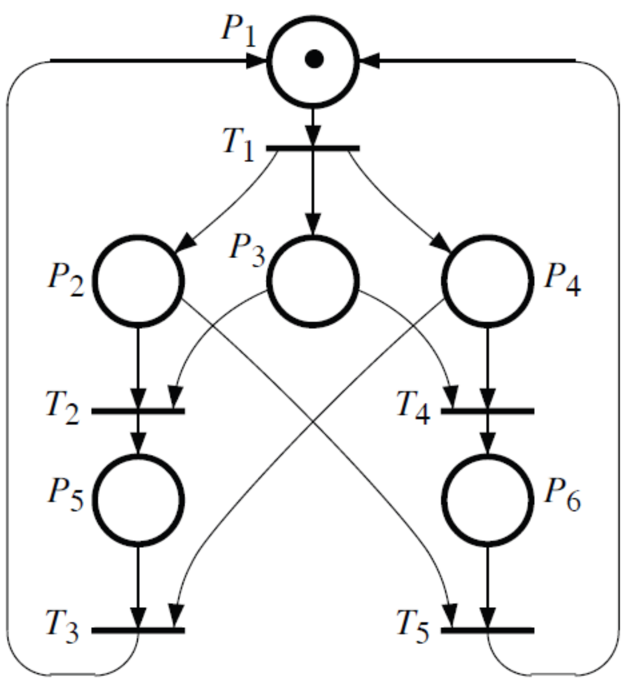
(a)



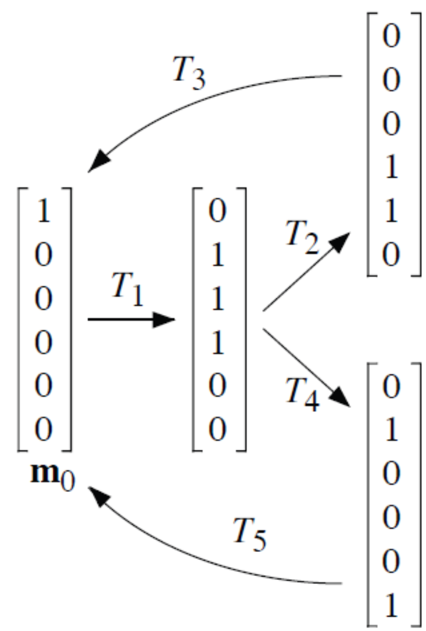
(b)

Graph of Markings

- El grafo de la figura se puede usar para encontrar todas las propiedades de esta RdP.
  - Observamos notablemente que es segura, viva, reversible y que T1T2T3 y T1T4T5 son secuencias repetitivas.
  - La secuencia de disparo S = T1T2T3T1T4T5 está completa y tal que $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{S} \mathbf{m}_0$; por lo tanto, el RdP es consistente.



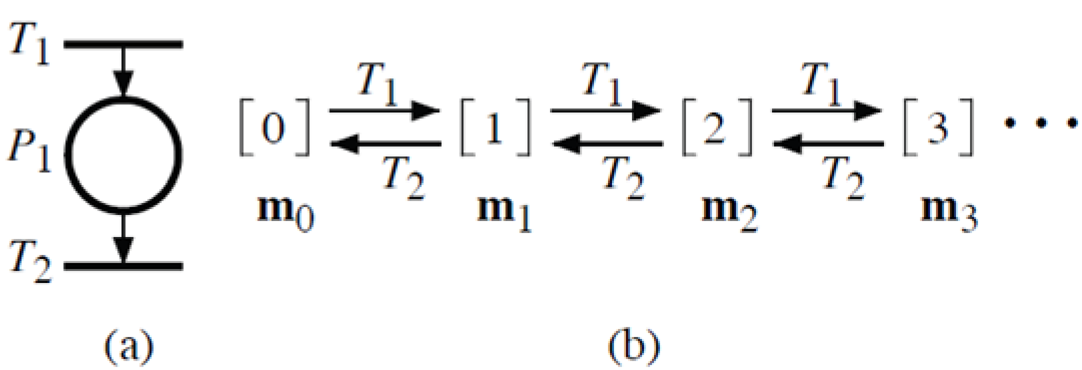
(a)



(b)

Coverability Root Tree

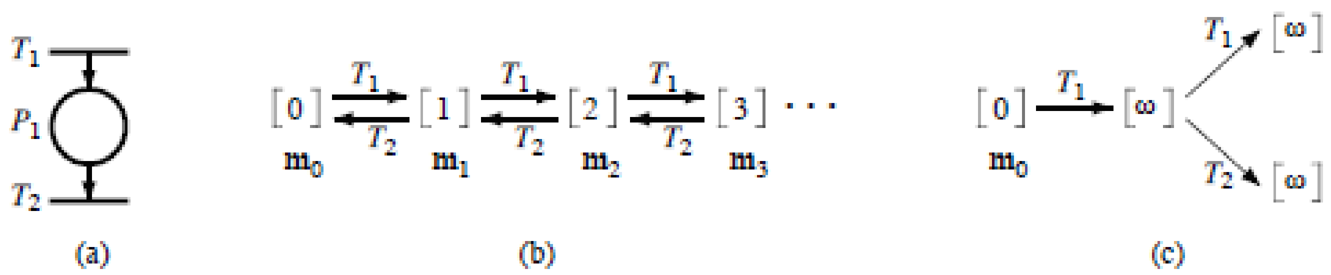
- En la Figura a, la transición T1 está habilitada.
  - Si se dispara, hay un token en P1.
  - Hay dos transiciones habilitadas, T1 y T2.
  - Si se dispara T1, hay dos tokens en P1, y así sucesivamente.
  - La Figura b representa el inicio de la construcción del gráfico de marcas. Sin embargo, este gráfico no se ha construido ya que el RdP no está delimitado, es decir, el número de marcas alcanzables no está limitado.
  - Construiremos un árbol de raíz llamado árbol de raíz de cobertura que posee un número finito de vértices, por construcción.



Coverability Root Tree

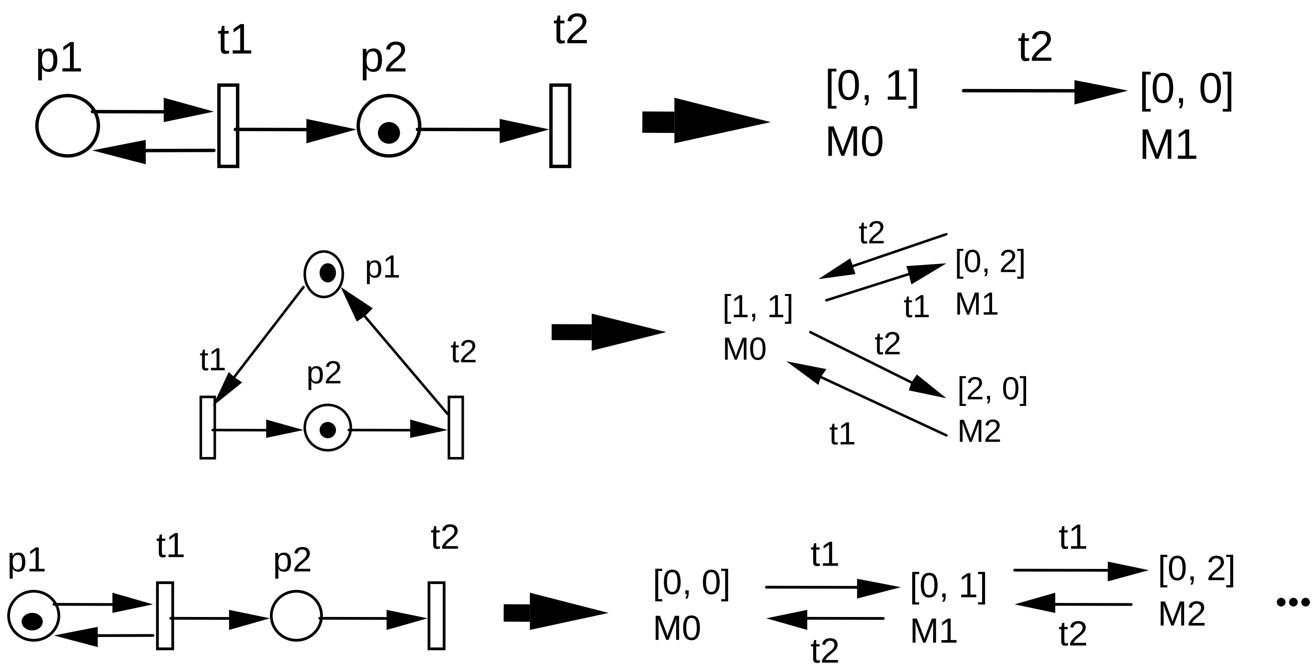
- El árbol de raíz de cobertura (***Coverability Root Tree)*** para el ejemplo en cuestión (Figura c).
- Comenzando por la marca inicial m0 = (0) (la raíz), tenemos $m0 \xrightarrow{T1} m1 = (1)$.
- Desde m1 ⪈ m0, el disparo de T1 puede repetirse tantas veces como sea necesario.
- La marca simbólica se asocia con P1, lo que significa que el número de tokens en P1 puede alcanzar el nivel requerido.
- w es un símbolo tal que:
- $si\ n\ es\ un\ número\ entero, entonces\ n < w\ y\ n + w = w.$
  - Llamaremos (w) **macro marcado** ya que representa un conjunto de posibles marcas (conjunto infinito).
  - A partir de la macro marcado (w), se habilitan dos transiciones, T1 y T2.

El grafo b No tiene sentido, ya que ya hemos mostrado en este gráfico los posibles disparos de w



Reachability tree

- **Definición**: El árbol de alcansabilidad, también llamado gráfico de marcado, de una red de Petri (N, M0), es un gráfico en el que los nodos corresponden a marcas alcanzables con a arcos de correlacionados con transiciones factibles de disparase.



Observación: el árbol de alcance de RdP sin límites es ilimitado.

Construction of the coverability root tree

- Cada vértice corresponde a una marca o macro marca.
  - Paso 1. A partir de la marca inicial m0, se indican todas las transiciones habilitadas y las marcas sucesivas correspondientes. Si cualquiera de estas marcas es mayor que m0, w se coloca para cada uno de los componentes mayor que los componentes correspondientes de m0.
  - Paso 2. Para cada nuevo vértice mi del árbol, se realiza el Paso 2.1 o el 2.2
    - Paso 2.1. Si hay un vértice mj = mi en el camino de m0 a mi (este último no incluido), entonces mi no tiene sucesor
    - Paso 2.2. Si no hay vértice mj = mi en el camino de m0 a mi, el árbol de la raíz se amplía sumando todos los sucesores de mi. Para cada sucesor mk o mi:
      - 1) Un componente w o mi sigue siendo un componente w para mi;
      - 2) Si hay un vértice en el camino de m0 a mk tal que $\mathbf{m}_k \gneqq \mathbf{m}_j$ entonces w se coloca para cada uno de los componentes mayores que los componentes o mj.

Construction of the coverability root tree

Example (Figures a y b):

Step 1. $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_1$; $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_2}$ (1, 0, por lo tanto escribimos $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_2} (1,\ 0,\ \omega)$

$= \mathbf{m}_0^+$ desde $(1,\ 0,\ 2) \gneqq (1,\ 0,\ 0) = \mathbf{m}_0$; $\mathbf{m}_0 \xrightarrow{T_3} \mathbf{m}_2$.

Step 2.

Step 2.2 para el vértice b: $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_4} (0,\ 1,\ 3)$, hence we write $\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_4} (0,\ 1,\ \omega)$
$= \mathbf{m}_1^+$ desde $(0,\ 1,\ 3) \gneqq (0,\ 1,\ 0) = \mathbf{m}_1$.

Step 2.2 para el vértice c: $\mathbf{m}_0^+ \xrightarrow{T_1} \mathbf{m}_1^+$; $\mathbf{m}_0^+ \xrightarrow{T_2} \mathbf{m}_0^+$; $\mathbf{m}_0^+ \xrightarrow{T_3} \mathbf{m}_2^+$.

Step 2.2 para el vértice d: sin transición habilitada, es un punto muerto

Step 2.2 para el vértice e: $\mathbf{m}_1^+ \xrightarrow{T_4} \mathbf{m}_1^+$.

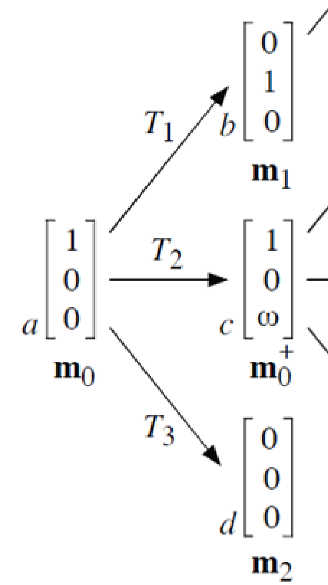
Step 2.2 para el vértice f: $\mathbf{m}_1^+ \xrightarrow{T_4} \mathbf{m}_1^+$.

Step 2.1 para el vértice g sin sucesor desde $(1,\ 0,\ \omega) = \mathbf{m}_0^+$ ya se encontró en el camino del vértice a al vértice g (vertex c).

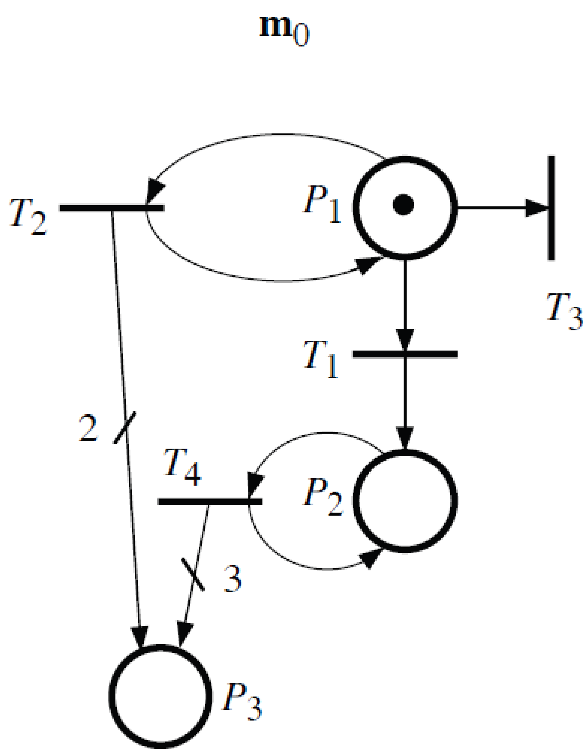
Step 2.2 para el vértice h: sin transición habilitada, es un punto muerto

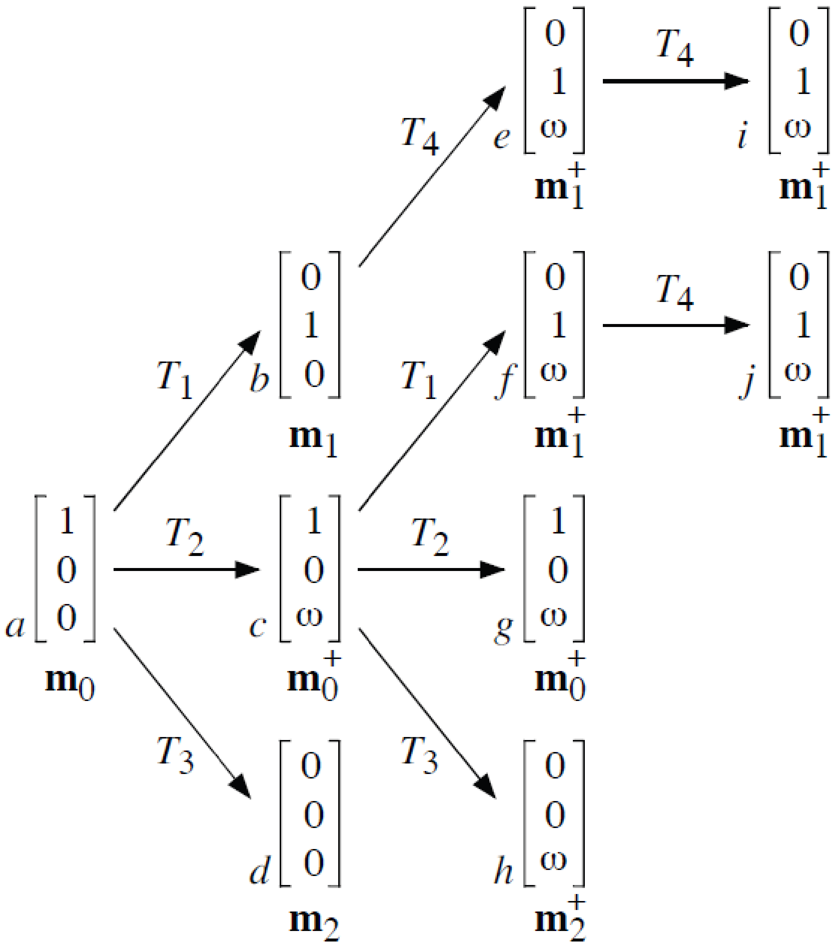
Step 2.1 para el vértice i: sin sucesor

Step 2.1 para el vértice j: sin sucesor



Ejemplo de coverability root tree





- Los lugares P1 y P2 están delimitados, pero no P3;
- hay una infinidad de interbloqueos que corresponden a m2 y m2 +;
- La RdP es quasi-live.

Coverability root tree

- El árbol de raíz de cobertura siempre tiene un número finito de vértices.
  - Sin embargo, para una PN sin límites, el problema de accesibilidad (es decir, dado cualquier marca, ¿es alcanzable?)
  - No puede resolverse debido a la capacidad de cobertura del árbol raíz, porque se pierde cierta información mediante el uso del símbolo w.
    - El símbolo w representa un número que no está limitado pero no puede ser ningún número: por ejemplo, para el nodo e, m (P3) = 3 N donde N es un número entero, y para el nodo f, m (P3) es un número par número.
    - Consideremos ejemplos. En la figura a (filmina anterior), la secuencia (T2) T1 7(T4) puede dispararse desde m0, lo que da como resultado la marca (0, 1, 23); esta marca está "cubierta" por el macro marcado (0, 1, w) en el nodo j.
    - Esto es cierto para cualquier marca alcanzable: está cubierto por una marca en el árbol de raíz de cobertura.
    - Por otro lado, ¿la marca (1, 0, 23) es alcanzable desde m0? La respuesta es no: si m1 = 1, ni T1 ni T4 han sido disparados, entonces el número de tokens en P3 es par.
    - Pero esta información no se puede obtener del árbol de raíz de cobertura.
    - De manera similar, el problema del liveness no puede ser resuelto solo por el árbol de raíz de coverability.
    - Para una PN limitada, el árbol de raíz de cobertura contiene todas las marcas alcanzables posibles.
    - Se llama árbol de raíz de alcanzabilidad.
    - El gráfico de alcanzabilidad (es decir, gráfico de marcas) se obtiene fusionando todos los vértices de la accesibilidad.
    - Se puede encontrar que la cubertura se puede rootear, incluso para PN pequeñas.

Álgebra lineal

- Aquí se introduce un formalismo para la definición de RdP, y algunas de sus propiedades.
- Este formalismo también se aplica a las RdP generalizadas y a las RdP ordinarias.

- Articulo, sobre la ecuación de estado generalizada:
  - https://www.researchgate.net/publication/328253053_Ecuacion_de_estado_generalizada_para_redes_de_Petri_no_autonomas_y_con_distintos_tipos_de_arcos

Álgebra lineal

- **Definición**
  - Una RdP ordinaria no marcada es cuádruple $Q = \langle P, T, Pre, Post \rangle$de tal manera que:

$P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ es un conjunto finito, no vacío, de lugares;

$T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ es un conjunto de transiciones finito, no vacío;

$P \cap T = \varnothing$, i.e. los conjuntos P y T son inconexos;

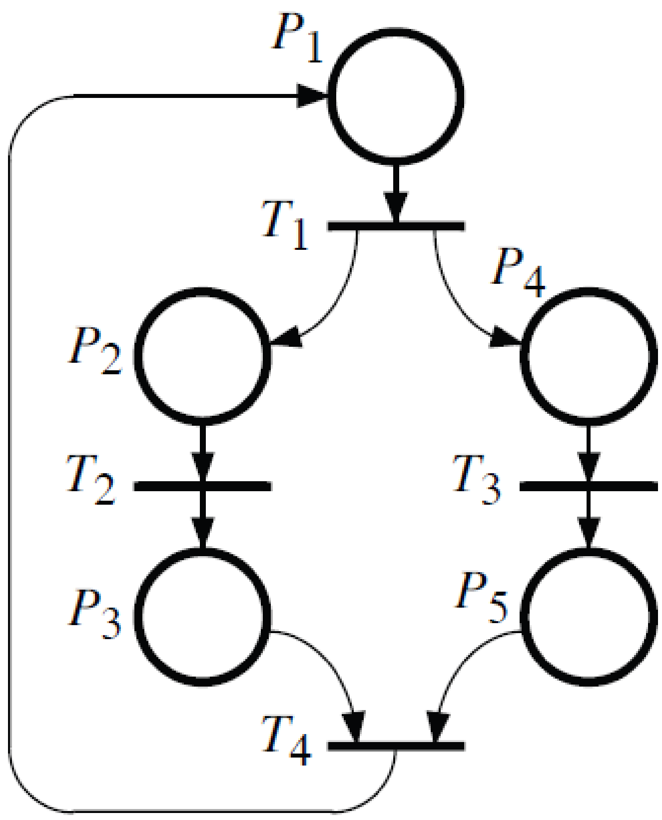
Pre: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ es la aplicación de incidencia de entrada;

Post: $P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ es la aplicación de incidencia de salida

Pre (Pi, Tj) es el peso del arco. $Pi \rightarrow Tj$
Post (Pi, Tj) es el peso del arco $Tj \rightarrow Pi$.

Álgebra lineal

- Por ejemplo, en la Figura, Pre, son:
  - (P1, T1) = 1
  - (P1, T2) = 0
  - (P1, T3) = 0
  - (P1, T4) = 0
  - (P4, T 1) = 0
  - (P4, T 3) = 1
  - (P4, T 4) = 0
  - ………….
- Por ejemplo, en la Figura, Prost, son:
  - (T1,P1)=0
  - (T1,P2)=1
  - (T1,P3)=0
  - (T1,P4)=0
  - (T2,P1)=0
  - (T1,P2)=0
  - (T1,P3)=1
  - (T1,P4)=0
  - …………………..



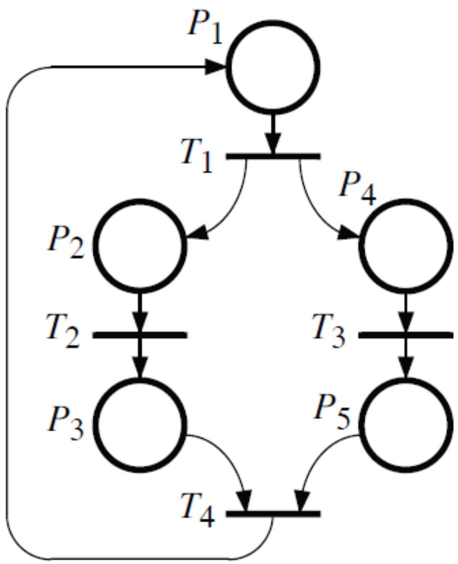
Nota: este ultimo, par ordenado, Post, también se encuentra (P, T)

Álgebra lineal

- Definición
  - Una RdP generalizada no marcada se define como una RdP normal sin marcar, excepto que:
  - Pre: $P\ x\ T\ \rightarrow\ \boldsymbol{N}$
  - Post: $P\ x\ T\ \rightarrow\ \boldsymbol{N}$
  - **Se usarán las siguientes anotaciones:**
    - $°Tj\ =\ \{Pi\ \ \in P\ |\ Pre(Pi,Tj)\ >\ 0\}$ = **conjunto de lugares de entrada o Tj;**
    - $Tj°\ =\ \{Pi\ \in\ P\ |\ Post(Pi,Tj)\ >\ 0\}\ =$ **conjunto de lugares de salida o Tj;**
- Usando esta notación, las condiciones de validación ahora se pueden expresar
  - **Definición.**
  - **un RdP marcada:**
    - Un RdP marcado es un par $R\ =\ \langle Q,\boldsymbol{m}0\rangle$in which Q is an unmarked RdP and **m0**.an initial marking.
  - **Definición**
    - **La Transición Tj está habilitado para un marcado mk si**
    - $mk(Pi)\ \geq\ Pre(Pi,Tj)\ psrs\ cuslquier\ Pi\ °Tj.$
  - **La siguiente matriz se conoce como matriz de incidencia de entrada:**
    - $\mathbf{W}^{-}\ =\ [\boldsymbol{wi\,j^{-}}]\,,\boldsymbol{donde}[\boldsymbol{wi\,j^{-}}]\ =\ \boldsymbol{Pre}(\boldsymbol{Pi},\boldsymbol{Tj});$
  - **y la siguiente matriz se conoce como la matriz de incidencia de salida**
    - $\mathbf{W}^{+}\ =\ [\boldsymbol{wi\,j^{+}}]\,,\boldsymbol{donde}[\boldsymbol{wi\,j^{+}}]\ =\ \boldsymbol{Post}(\boldsymbol{Pi},\boldsymbol{Tj});$

Álgebra lineal

$$\mathbf{W}^{-} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array} \quad \text{y} \quad \mathbf{W}^{+} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array}$$



La siguiente matriz se conoce como matriz de incidencia (o matriz de flujo):

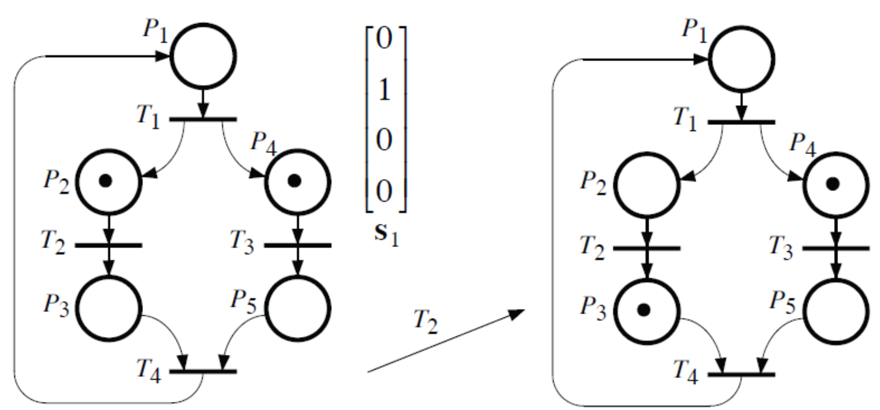
$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{+} - \mathbf{W}^{-} = [w_{ij}] \quad ; \qquad \mathbf{W} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{array}.$$

Observación: Si una RdP es pura, su matriz de incidencia permite que se construya la RdP no marcada.

Ecuación fundamental

- Sea S un secuencia de disparo que lleva a la red desde en estado mi al mk, esto lo indicamos $\boldsymbol{mi} \xrightarrow{S} \boldsymbol{m}\,k$
- El vector característico de la secuencia **S**, escrito como **s**, es el vector de componente **m** cuyo número de componente corresponde al número de disparos de la transición Tj en la secuencia **S**. Por ejemplo: $s1 = (0, 1, 0, 0)$....
- La ecuación fundamental $\boldsymbol{mk} = \boldsymbol{mi} + \boldsymbol{W}\,\boldsymbol{s}$

$$\underset{\mathbf{m}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{\mathbf{W}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{s}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{m}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

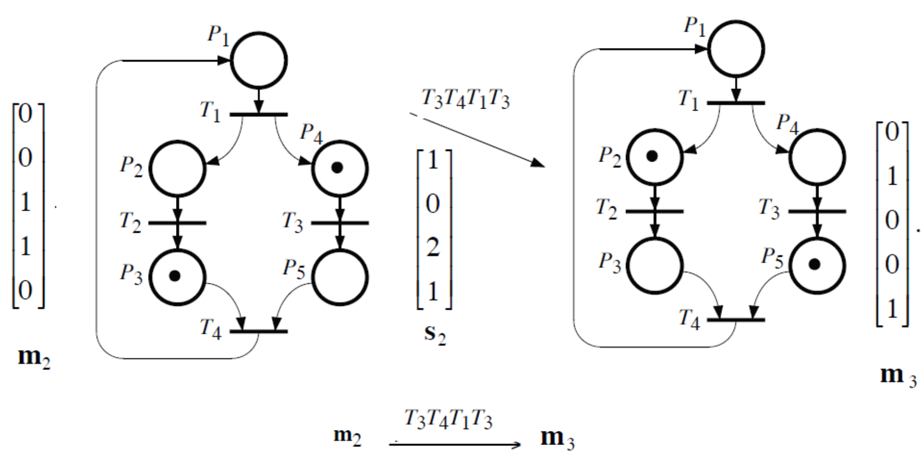


$\mathbf{m}_1 = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)$ $\mathbf{m}_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)$

Ecuación fundamental

- Si consideramos la realización de la secuencia S1S2 a partir de la marca m1, tenemos
- $S1S2 = T2T3T4T1T3$ y $s1 + s2 = (1,1,2,1)$
- y la ecuación fundamental $\mathbf{m}_1 + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \mathbf{m}_3$

$$\underset{\mathbf{m}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + \underset{\mathbf{W}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{s}_2}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{m}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$



Ecuación fundamental

- Observación
  - Se dice que el vector s es un **vector característico "posible"** si al menos existe una secuencia de disparos posibles.
    - No todos los vectores cuyos componentes son enteros positivos o cero son posibles.
    - Por ejemplo, s = (0, 1, 0, 1) no es posible a partir de la marca m1 o la figura
    - De hecho, ni la secuencia T2T4 ni la secuencia T4T2 son posibles desde m1.
- Observación
  - Varias secuencias de disparo pueden corresponder a un posible vector característico s.
    - Por ejemplo, dos posibles secuencias S corresponden a S = (0, 1, 1, 0) desde la marca m1 o la figura . Estas secuencias de disparo son T2T3 y T3T2.
    - De acuerdo con la ecuación fundamental, dos secuencias de disparo con el mismo vector característico dan como resultado la misma marca (el orden de las transiciones en la secuencia de disparo no tiene importancia la marca alcanzada será la misma).
    - Lo contrario no es cierto, es decir, dos secuencias que dan como resultado la misma marca no necesariamente tienen el mismo vector característico.

Marking Invariants

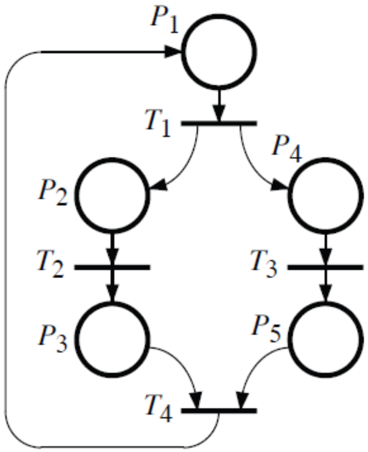
- Consideremos un vector de ponderación para los lugares x = (q1, q2, ..., qn) tal que cada qi es un entero positivo o cero.
  - El valor qi es el peso asociado con el lugar Pi.
  - Sea P (x) el conjunto de lugares cuyo peso no es cero; P (x) es entonces un subconjunto de P.
  - Consideremos, la RdP de la Figura.
  - El vector x1 = (1, 1, 1, 0, 0) corresponde a una ponderación de valor para P1, P2 y P3 y P4 y P5.
  - Por lo tanto, tenemos P (x1) = {P1, P2, P3}.
- Propiedad
  - El conjunto B de lugares es un componente conservador si y solo si existe un vector de ponderación x tal que $P(\mathbf{x}) = B \text{ and } \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{m}_0 + \mathbf{W} \cdot \mathbf{s}.$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_k = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_0 + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{s}$$

$$\text{if } \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_k = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_0$$



El vector x es un invariante P (un invariante P es un vector no negativo)

Marking Invariants

- El conjunto de lugares con $Xi > 0$ se llama soporte de p-invariante y se denota $\|X\|$.
- Se dice que una X invariante p es mínima si no hay otra

$$X' \; tal \; que \; X' \neq X \; y \; X' \leq X.$$

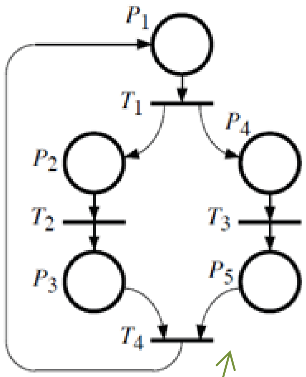
- Definición
  - Sea x1 un P-invariante. Es un P invariante mínimo si no hay P-invariante x2 tal que $\mathbf{x}_1 \gneqq \mathbf{x}_2$.
  - Podemos ver que existen componentes conservadores mínimos a partir de los cuales los otros se pueden construir por composición.
  - En otras palabras, el conjunto de variantes mínimas de P-invariantes con soporte mínimo es una base a partir de la cual se pueden obtener las otras P-invariantes .
- **Propiedad** Sea P (x) = {P1, P2, ..., Pr} un componente conservador y (q1, q2, ..., qr) sea el vector de ponderación correspondiente. Todos los lugares Pi o P (x) están acotados y se verifica

$$m(P_i) \leq \frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_0}{q_i}$$

- Observación
  - La **propiedad conservativa es estructural**: un RdP Q no marcado es conservador si y solo si hay un invariante $P \; x > 0$ tal que $x^T W = 0$. Si hay $x > 0$ tal que $x^T W \leq 0$, entonces Q es estructuralmente limitado.

Marking Invariants

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



$P(\mathbf{x}_1) = \{P_1, P_2, P_3\}$ Este conjunto es un componente conservativo

Donde el invariante de plaza es: $m_1 + m_2 + m_3 = 1$

$\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$

Si el marcado inicial de $P(\mathbf{x}_1)$ =(1, 0, 0), la suma siempres sera 1

El valor del invariante, es la suma de los valores en las plazas para la marca inicial

Tambien es un invariate de plaza el conjunto $P(\mathbf{x}_2)$= $\{P_1, P_4, P_5\}$

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{m}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

T-invariantes tienen propiedades similares

Conservative Components & Marking Invariants

- Propiedad 2.5 Sea x1 y x2 dos invariantes P.
  - a) Si $\alpha\ y\ \beta$ son enteros positivos o cero, entonces $\alpha x1 + \beta x2$ es un invariante P. Si $\alpha\ y\ \beta$ son ambos positivos, entonces $P\ (\alpha x1 + \beta x2) = P\ (x1) \cup P\ (x2)$.
  - b) Si todos los componentes del vector $x1 - x2$ son enteros positivos o nulos, entonces $x1 - x2$ es un invariante P.

  - Teorema: Cualquier combinación lineal de los p-invariantes es un p-invariante.
  - Teorema: Todo p-invariante es una combinación lineal no negativa o p-invariantes mínimas.

  - Observación: En los modelos de sistemas reales con RdP, un p-invariante mínimo tiene una significación física clara (recursos, estrategias de control de producción, ...) y se puede obtener mediante la inspección de recursos y procesos.

Conservative Components

- T-invariantes tienen propiedades similares
- **Definición**
  - Un vector entero Y≥0 o dimensión m = | T | es un t-invariante si CY = 0.
  - El conjunto de transiciones con Yi> 0 se denomina soporte de t-invariante y se denota || Y ||.
  - Se dice que una Y invariante t es mínima si no hay otra Y 'invariante tal que $Y' \neq Y \, e \, Y' \leq Y$.

  - **Teorema:** dada una secuencia de transiciones en $M0 \; en \; M \; e \; Y$ su vector de conteo. Entonces $M = M0 \; iff \; Y$ es un t-invariante.
  - **Teorema:** Cualquier combinación lineal o invariantes t es un invariante t.
  - **Teorema:** Todo t-invariante es una combinación lineal no negativa o invariantes t mínimos.

  - **Observación**: En general, una mínima invariante t corresponde a un proceso que puede repetirse para siempre. Se pueden identificar descuidando los recursos.

Repetitive Components & Firing Invariants

- Un vector y que es una solución de $W\ y\ =\ 0$ se conoce como un invariante T.
  - El vector de ponderación que consideramos debe ser un vector característico asociado con una secuencia de disparos S.
  - Si s = y es un invariante T, el conjunto de transiciones que aparecen en S, que corresponde a los elementos distintos de cero de s, es el soporte del T-invariante. Se denota por $T\ (s)$.
- Propiedad
  - Sea D un conjunto de transiciones. El conjunto D es un componente repetitivo (estacionario) si y solo si existe una secuencia de disparo S (cuyo vector característico es s) tal que:

$$T\ (s)\ =\ D\ y\ W\ s\ =\ 0.$$

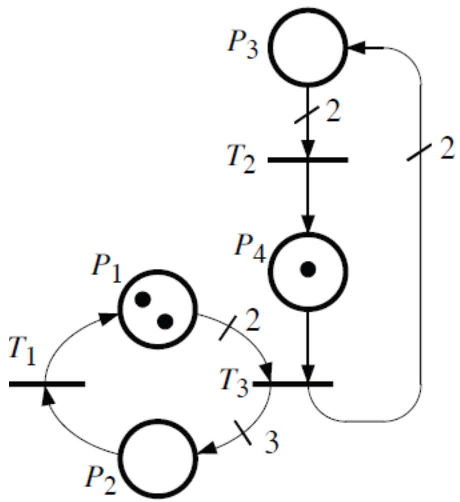
  - El vector s es un T-invariante. Si $W\ s >\ 0$, D es un componente repetitivo

Repetitive Components & Firing Invariants

- Observación
  - a) Si $W\ s\ =\ 0$, entonces s es un invariante T.
    - Sin embargo, no todas las invariantes T necesitan un componente repetitivo, porque al menos una secuencia de disparo debe corresponder a ella.
    - Es interesante observar que un cálculo algebraico nos permite encontrar las T-invariantes (independientemente de la marca).
    - Si hay un T-invariante tal que S es una secuencia de disparo de marcar m, entonces $m \xrightarrow{S} m$.
    - En particular, la existencia de tal T-invariante es una condición necesaria para el RdP ser reversible
  - b) Si S es una secuencia repetitiva de la marca $m1 \in M\ (m0)$, y si S es una secuencia de disparo de $m2 \in M\ (m0)$, entonces S también es una secuencia repetitiva de la marca m2.
    - Esta propiedad se deriva de la ecuación fundamental.
  - Observación
    - La propiedad de consistencia es estructural: un RdP Q no marcado se define como consistente si hay un T invariante y> 0 tal que W y = 0.
    - Si hay y> 0 tal que $W\ \ y\ \geq\ 0$, entonces Q es estructuralmente repetitivo.

Seeking P-invariants and T-invariants

- Hay un algoritmo para encontrar tanto los P-invariantes mínimas, como los T-invariantes.



A				B			
P_1	P_2	P_3	P_4	T_1	T_2	T_3	
1	0	0	0	+1	0	-2	P_1
0	1	0	0	-1	0	+3	P_2
0	0	1	0	0	-2	+2	P_3
0	0	0	1	0	+1	-1	P_4
1	1	0	0	0	0	+1	$P_1 + P_2$
0	0	1	2	0	0	0	$P_3 + 2\,P_4$

- Algoritmo para obtener los P-invariantes

Métodos de reducción que preservan Algunas propiedades

- Aunque el gráfico de marcas es ciertamente un método eficiente para encontrar las propiedades de un RdP de tamaño modesto, es muy largo y tedioso con muchas marcas alcanzables.

- El uso del álgebra lineal también se vuelve difícil cuando aumenta el tamaño del estudio.

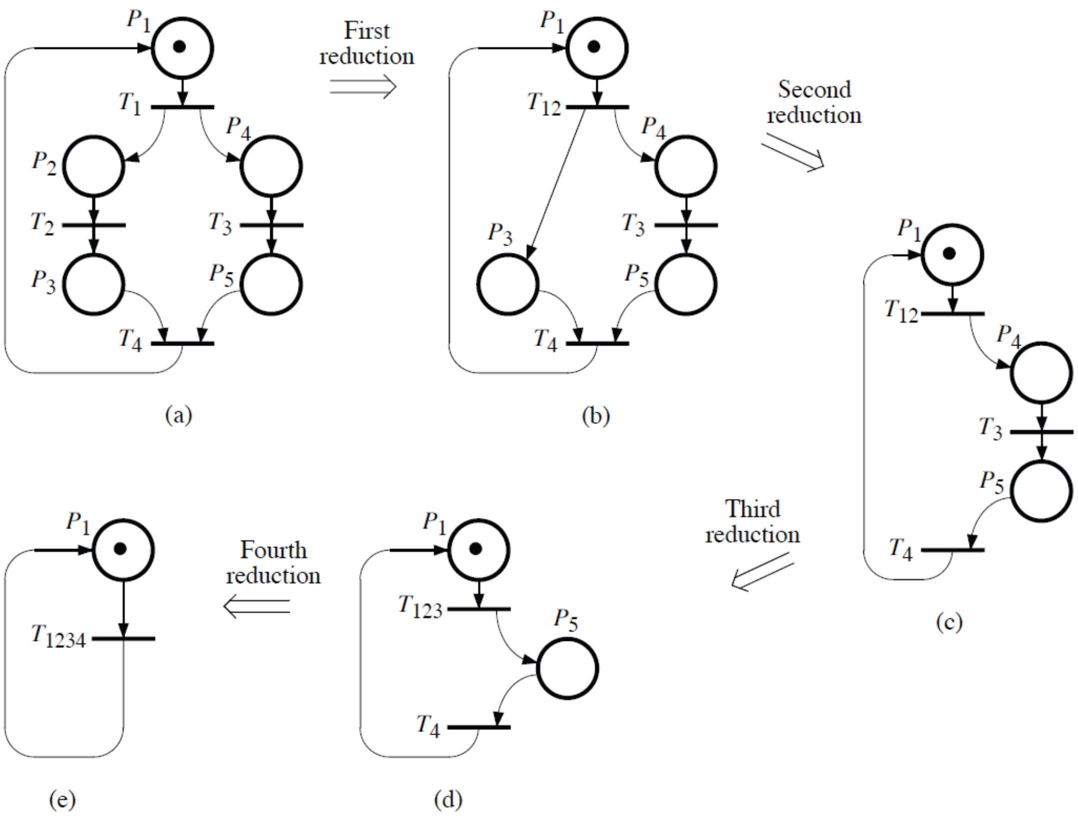
- Los métodos de reducción se pueden usar para transformar RdP en una RdP más simple, conservando al mismo tiempo algunas propiedades de la RdP inicial.

- Pero una palabra de advertencia, las redes simplificadas no son redes "equivalentes": no busquen ninguna semántica en ellas.

Métodos de reducción que preservan Algunas propiedades

La reducción de la Figura a, llamada sustitución del lugar P2, es posible porque se cumplen algunas condiciones. La condición principal es que la transición de salida de P2 no tenga otro lugar de entrada: si se deposita un token en P2, tarde o temprano se producirá un disparo o T2 y se depositará un token en P3.

La reducción de la figura b a la figura c del lugar implícito P3. El marcado de P3 nunca constituye un obstáculo para el disparo de su transición de salida T3 ya que m5 = 1 implica m3 = 1.
Además, el marcado de P3 puede deducirse de las marcas de los otros lugares: m3 = m4 + m5. Entonces, P3 está "implícito" y puede ser cancelado. La sustitución de los lugares P4 y P5 conduce de la Figura c a la Figura e.



Estas reducciones se realizan de tal manera que algunas propiedades se conservan. En nuestro ejemplo: la RdP en la Figura a es activa si y cuando la RdP en la Figura e es en vivo; la RdP en la Figura a está limitada cuando la RdP en la Figura e está acotada; el RdP en la figura tiene un estado inicial y el RdP en la figura tiene un estado inicial. Está claro que el RdP en la Figura e es en vivo, limitado y tiene un estado de origen.

Otros resultados

- Los resultados sobre las propiedades RdP son muy numerosas. Vamos algunos que pueden ser los más útiles.
  - Gráficos de eventos fuertemente conectados (Each place has exactly one input and one output transition)
  - Conceptos de sifón y trampa
  - vitalidad.

Strongly Connected Event Graphs

- Para un gráfico de eventos, subclase de PN ordinaria, y fuertemente conectado, se tiene las siguientes propiedades
- Propiedad
  - Sea R un gráfico de eventos fuertemente conectado, cuyo conjunto de transiciones es $T = \{T1, T2, \dots, Tm\}$, y cuyo conjunto de circuitos elementales es $C = \{C1, C2, \dots, Ck, \dots\}$.
  - a) A cada circuito elemental corresponde a un invariante P mínimo tal que, si $P(Ck) = \{P1, P2, \dots, \mathrm{Pr}\}$ es el conjunto de lugares en el circuito Ck, luego $m(P1) + m(P2) + \dots + m(\mathrm{Pr}) = m0(P1) + m0(P2) + \dots + m0(\mathrm{Pr}) = m(Ck)$.
  - b) El único invariante T mínimo es el vector de m-componente $y = (1, 1, \dots, 1)$.
  - Se sigue que si existen varias secuencias repetitivas mínimas, cada una de ellas contiene el mismo número de veces.
  - c) La red R está activa si y solo si cada circuito elemental contiene al menos un token, es decir, si $m(Ck) \geq 1$ por cada Ck.
- Tenga en cuenta que los circuitos elementales se pueden encontrar en un gráfico de eventos que no está fuertemente conectado. La propiedad a también se aplica a estos circuitos elementales.

Strongly Connected Event Graphs

- La propiedad muestra una RdP que es un gráfico de eventos fuertemente conectado.
  - Hay dos circuitos elementales, a saber, P1T1P2T2P3T4P1 y P1T1P4T3P5T4P1, que corresponden a invariantes

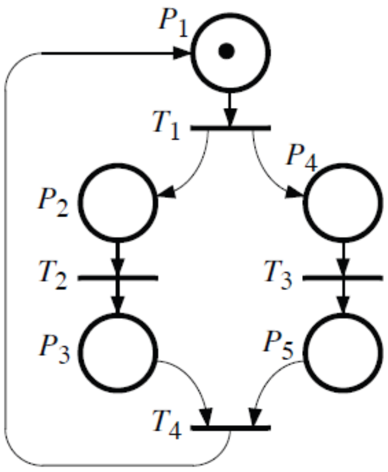
$$m(P1) + m(P2) + m(P3) = 1 \; and \; m(P1) + m(P4) + m(P5) = 1,$$

  - hay dos secuencias repetitivas mínimas, a saber

$$S1 = T1T2T3T4 \;\; y \;\; S2 = T1T3T2T4,$$

  - correspondiente a la misma T-invariante mínima s1 = s2 = (1, 1, 1, 1)

- La propiedad c es fácil de observar en este ejemplo.
  - Si no hay un token en el circuito P1T1P2T2P3T4P1, por ejemplo, las transiciones T1, T2 y T4 nunca se habilitarán.



(c)

Strongly Connected Event Graphs

- Los gráficos de eventos fuertemente conectados corresponden a clases o RdP sin conflictos, lo cual es importante desde un punto de vista práctico.
- Tenga en cuenta que los gráficos de estado fuertemente conectados tienen propiedades dobles:
  - hay un T-invariante mínimo asociado con cada circuito elemental;
  - solo un mínimo P-invariante para toda la red;
  - la red está activa si hay al menos un token .

Siphons and Traps

- limitado al caso de las RdP ordinarias.
  - Sea $P\,' = \{P1, P2, \dots, \mathrm{Pr}\}$ un conjunto de plazas de una RdP
  - El conjunto de transiciones de entrada de los lugares de P 'y el conjunto de transiciones de salida de los lugares de P', se denotan por $\circ\, P' y P'\circ$

    $$\circ P' = \circ P1 \cup \circ P2 \dots \cup \circ\, \mathrm{Pr} \quad y \quad P'\circ = P1\circ \cup P2\circ \dots \cup \mathrm{Pr}\circ$$
  - **Definición** "sifón"
    - Un sifón es un conjunto de lugares P' tal que el conjunto de transiciones de entrada o $\circ P'$ se incluye en el conjunto de transiciones de salida o $P'\circ$, es decir

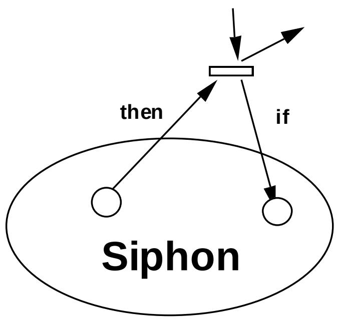
      $$\circ P' \subseteq P'\circ.$$
  - **Definición "**trampa"
    - En una RdP ordinaria, una trampa es un conjunto de lugares P ' tal que el conjunto de transiciones de salida o $\circ P'$ se incluye en el conjunto de transiciones de entrada o $P'\circ$:

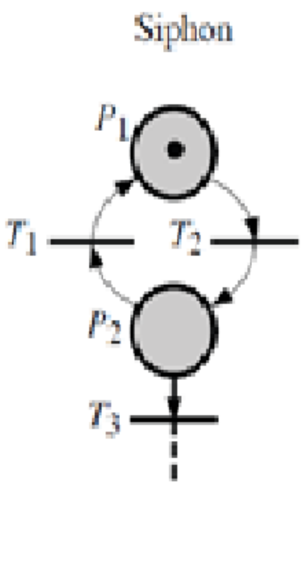
      $$\circ P' \supseteq P'\circ.$$

Siphons and Traps

- De acuerdo con estas definiciones, vemos que la unión de dos sifones es un sifón, y que la unión de dos trampas es una trampa.
- Se pueden definir sifones mínimos y trampas mínimas para una RdP.
  - El conjunto de lugares P '= {P1, P2} de la Figura a es un sifón desde
    $$°P' = \{T1, T2\}\ y\ P'° = \{T1, T2, T3\}.$$
  - Para el RdP en esta figura, la transición T2 está habilitada y, si se dispara, la transición T1 puede dispararse alguna vez, y así sucesivamente. 111

- Hay un token que circula entre P1 y P2 y cuando este token está en P2, se puede disparar la transición T3.
- Si se dispara T3, no hay tokens en P‘ y se deduce que ninguna de las transiciones de salida o P' podrá ser disparada alguna vez.
- A partir de este momento, se dice que **el conjunto P 'es deficiente para el marcado, lo que significa que el marcado de P' es tal que ninguna de las transiciones de entrada o salida de P‘ son activa**





(a)

En una manera informal, podemos decir que un sifón P 'sólo puede 'perder' tokens por el disparo de las transiciones en P'° que no están en °P'

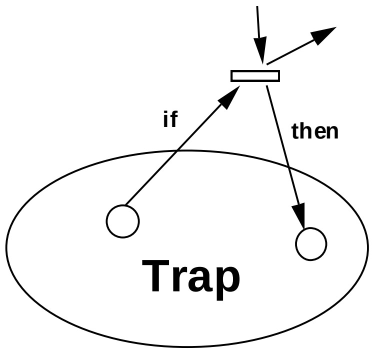
Siphons and Traps

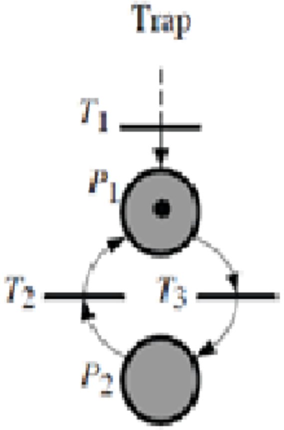
- Considerando que una trampa P' sólo puede “ganar” tokens por el disparo de las transiciones en °P‘ que no están en P'°.
- Por lo tanto, un sifón P‘ tiene la siguiente propiedad: si ninguna de las transiciones de salida o P‘ son disparables debido al marcado de los lugares de P' (es decir, P‘ es deficiente para marcar m), entonces ninguna de estas transiciones se sensibiliza para ninguna marca **m**.
- El conjunto de lugares P '= {P1, P2} o la Figura b es una trampa

$$°\,P' \;=\; \{T1, T2, T3\}\; y\; P\,'° \;=\; \{T2, T3\}.$$

- Una trampa tiene una propiedad dual como un sifón. Se puede decir que una trampa tiene la siguiente propiedad:

- cuando se dispara una transición de ° P ', la tramap P' permanece marcada cualquiera que sea la evolución futura.
- La trampa P '= {P1, P2} de la Figura b no esta vacía ya que hay una token en P1. Si no hubiera token en P1 y P2, entonces P ‘ estará vacía, pero tan pronto como se dispare T1, nunca volverá a estar vacía.



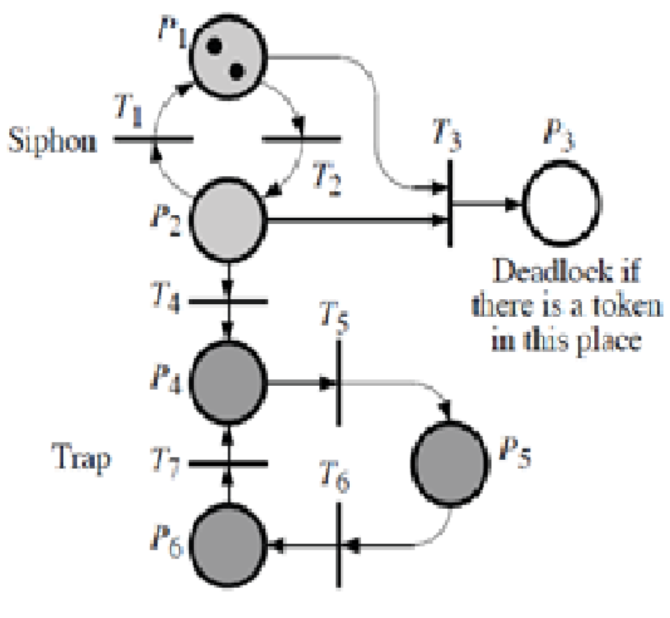


(b)

Siphons and Traps

- Para el PN en la Figura c, {P1, P2} es un sifón, {P4, P5, P6} es una trampa, y la marca m = (0, 0, 1, 0, 0, 0) es un punto muerto.
- Tenga en cuenta que las propiedades del sifón y la trampa son estructurales, mientras que el punto muerto depende de m0.

- Tenga en cuenta la noción de lugar deficiente o vacío, Para una PN ordinaria, un lugar no es deficiente si y solo si está marcado.
- Generalizando para una RdP, un lugar no es deficiente sii está marcado y / o: bien
  1) no tiene transiciones de salida, o
  2) tiene suficientes tokens para habilitar al menos una de sus transiciones de salida.
- Un conjunto de lugares P' no es deficiente si al menos uno de sus lugares no es deficiente.
- Para una RdP, la definición de un sifón permanece sin cambios, pero la definición de trampa es más complicada en orden de garantizar la propiedad de la no deficiencia.
- En términos generales, la búsqueda de sifones y trampas no es un problema simple. Como en el caso de la búsqueda de invariantes, donde es posible usar álgebra lineal.



(c)

G. Chiola, "On the structural and behavioural characterization of P/T nets," in *Petri Nets and Performance Models, 1993. Proceedings., 5th International Workshop on*, 1993, pp. 66-75.

Liveness relacionado con otras propiedades

- Vamos a presentar ahora alguna relaciones útiles.
- Primero definamos una propiedad importante, conocida como el teorema de Commoner.
  - **Propiedad** Una RdP de libre elección extendida ordinaria es viva si cada sifón contiene una trampa no deficiente para la marca inicial m0.
    - Por ejemplo, la PN o la Figura c posee un sifón que es P '= {P1, P2}. Como P‘ también es una trampa y contiene al menos un token, el PN es viva.
  - **Propiedad** Una RdP persistente es viva si y solo si hay un punto alcanzable marcando $m \in M\ (m0)$ y una secuencia completa repetitiva (ya sea aumentando o no) aplicable desde m.
  - **Propiedad** Sea $R\ = < Q, m0 >$ ligado al conflicto de frontera PN. $< Q, m0 >$ es viva, entonces $< Q, m' >$ es viva para cualquier $m' \geq m0$

    Las RdP libres de conflictos y las RdP libre de conflicto extendidas son casos particulares de las RdP con conflicto, la Propiedad se aplica a ellos.
- Como se indicó anteriormente, la vivacidad es una propiedad básica, a menudo se requiere una red acotada para la implementación del modelo.
- Se dice que un PN marcado $< Q, m_0 >$ se comporta bien si es tanto viva como acotado.
- Se dice que una PN, Q no marcada está bien formada si existe una marca inicial m0 tal que $< Q, m_0 >$ se comporta bien.

Observaciones finales

- El modelado y análisis de sistemas físicos reales es un problema complejo, especialmente en el caso de sistemas complejos.
- En este último caso, la red global puede dividirse en varias subredes.
- Si estos últimos están interconectados de forma anárquica, se puede obtener una PN grande cuyo tamaño la hace inutilizable.
- De ahí la necesidad de estructurar al especificar un sistema.
- Luego es posible analizar durante las diversas etapas de estructuración, mientras se garantiza la validez de los resultados para el modelo general.
- Algunas ideas se presentan en la Sección siguiente.
- Se ha desarrollado una gran cantidad de programas de software de análisis PN; se describen brevemente a continuación.

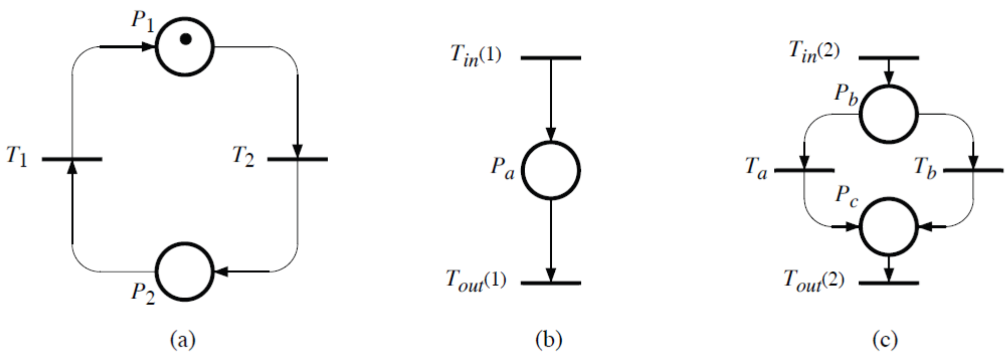
Estructuración

- Especificación de una aplicación.
  - Enfoque descendente
    - es decir, mediante refinamientos sucesivos
    - Cuando este enfoque no es posible,
  - Especificar utilizando descripciones parciales
    - la red global es obtenida por la composición de las diversas subredes.
- Refinamientos sucesivos
  - consiste en describir aproximadamente el comportamiento del sistema mediante un PN relativamente simple y analizarlo
  - En esta etapa, las transiciones representan operaciones complejas
  - La descripción se refina reemplazando las transiciones por partes de PN conocidas como "bloques bien formados" preservando la delimitación, la vivacidad, etc.
  - De este modo, pueden seguir una serie de niveles de descripción
  - El modelo final exhibirá las propiedades conservadas por los bloques bien formados

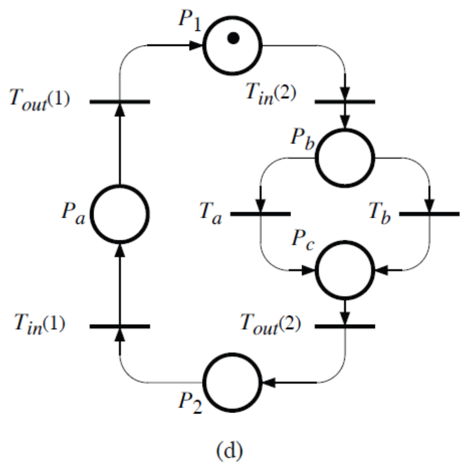
Refinamiento sucesivo

- Cuando los bloques bien formados de las Figuras b y c toman los lugares de las transiciones T1 y T2 en la Figura a, obtenemos la Figura d, que también es activa y segura.

(a) Basic PN.



(b) and (c) Well-formed blocks "sequence" and "if then otherwise".

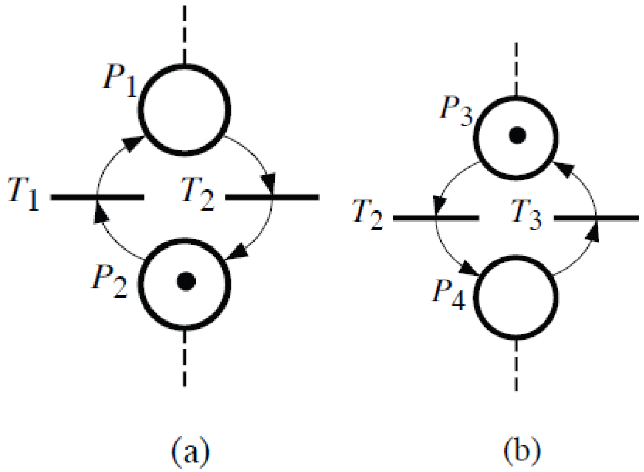


(d) Resulting PN.

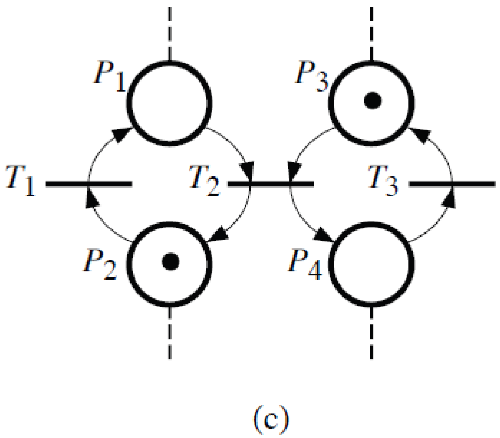
Composición

se dan especificaciones parciales del sistema estudiado

Composition by *rendez-vous*



(a) Sub-net 1 (b) Sub-net 2



(c)Overall net

La sincronización general se obtiene por la composición de las diversas subredes que describen estas especificaciones parciales.

Composición

- Una descomposición inicial consiste en construir subsistemas con lugares compartidos.
  - Los lugares compartidos aparecerán en cada uno de los subsistemas.
  - El modelo general se obtiene compartiendo estos lugares compartidos.
  - Este enfoque mantiene la propiedad liveness.
- La segunda descomposición utiliza el mecanismo de encuentro.
- En este caso, los subsistemas tienen una o más transiciones comunes que logran la sincronización entre los diferentes subsistemas.
  - Este enfoque mantiene la propiedad de vivacidad y acotada.
  - Por ejemplo, las subredes a y b de la figura anterior tienen la transición común T2. El modelo general de la figura c se obtiene fusionando la transición común T2.

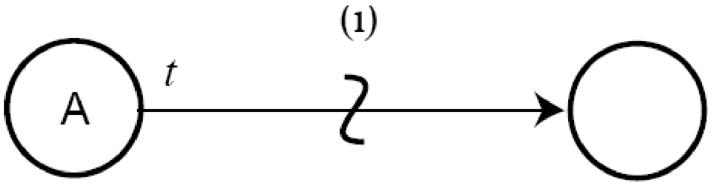
Software de análisis

- El análisis de una PN, conocido como validación, permite comprobar las propiedades principales de un modelo, como si está limitado, es vivo, reversible, etc. T
- También permite comprobar propiedades específicas, como la exclusión mutua o las limitaciones de los recursos.
- El software de análisis generalmente se compone de dos partes, a saber: la edición del modelo y el análisis real.
    - El modelo puede editarse en forma textual o gráfica. Este último es más atractivo, pero solo es posible si el modelo no es grande.
    - El análisis usa los métodos que se han presentado: gráfico de marcas alcanzables (o árbol de raíz de cobertura), álgebra lineal y métodos de reducción.
    - Para ayudar al modelado, un software de análisis también puede tener una biblioteca de modelos básicos PN ya diseñados.
    - Estos modelos pueden formar funciones de aplicación especiales estándar y se usarán para construir el modelo general.
    - Se puede encontrar información importante sobre las herramientas de red de Petri en la siguiente dirección de Internet: www.daimi.au.dk/PetriNets/tools.

Gráficos de eventos

- Los gráficos de eventos son una forma de representar la Lista de eventos futuros para un modelo de evento discreto.
  - Un gráfico de eventos consta de nodos y arcos dirigidos.
  - Cada nodo corresponde a un evento, o transición de estado, y cada parte de la programación de otros eventos.
  - Cada arco puede tener una condición booleana asociada y / o un retraso de tiempo.
- La construcción básica para Gráficos de eventos se interpreta de la siguiente manera:
  - la ocurrencia del Evento A hace que el Evento se programe después de un retraso de t, la condición (i) es verdadera (después de que las transiciones de estado para el Evento A hayan sido realizado).
  - Por convención, el tiempo de demora se indica sobre la base de la programación y la condición de arco se muestra justo encima de la línea ondulada a través del centro del arco.
  - Si no hay retraso de tiempo, entonces se omite.
  - Del mismo modo, si el evento B siempre está programado después de la ocurrencia del evento B, a continuación, se omite la condición de borde, y el borde se llama un edge.
  - Thus incondicional, el paradigma básico gráfico de eventos contiene sólo dos elementos: el nodo de evento y el arco programación con dos opciones en los arcos (retardo de tiempo y condición de arco).

Figure

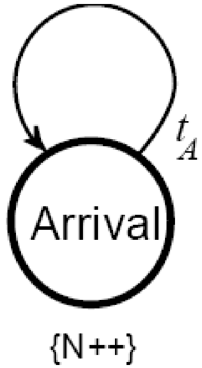


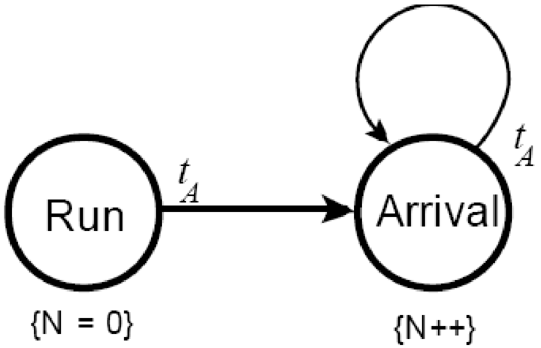
Gráficos de eventos

- La simplicidad del paradigma Event Graph resulta evidente por el hecho de que podemos representar cualquier modelo de evento discreto usando estos constructos (Schruben 1992, 1995; Schruben y Yücesan 1993).
  - Una ventaja del enfoque minimalista de Event Graphs es que el modelador puede dedicar más tiempo a la formulación del modelo y menos a aprender las construcciones del paradigma.
  - Sin embargo, hay un precio para la simplicidad de los gráficos de eventos. Como los gráficos de eventos representan la relación de programación de eventos, en lugar del movimiento físico de, por ejemplo, clientes a través de un sistema de cola, los gráficos de eventos requieren un mayor grado de abstracción por parte del modelador de simulación que la vista del mundo de proceso / recurso más comúnmente utilizada.
  - La experiencia del autor al utilizar Gráficos de eventos en un curso introductorio de simulación es que la mayor abstracción de los Gráficos de eventos es fácil de dominar y proporciona simulaciones discretas de eventos.
  - De hecho, el uso de Gráficos de eventos tiende a acelerar la comprensión del paradigma del Evento Discreto.

Gráficos de eventos

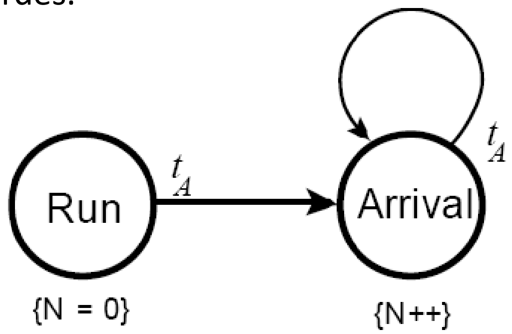
- Ejemplo
  - El gráfico de eventos no trivial más simple es el proceso de llegada, un modelo con un solo evento (llegada) y una variable de estado único, el número acumulado de llegadas (N).
  - El tiempo entre llegadas se modela como una secuencia de tiempos interarrivales que son constantes, una secuencia de variables aleatorias o cualquier proceso arbitrario de números distintos de cero.
  - La transición de estado para el evento es que el número acumulado de llegadas (N) se incrementa en 1.
  - El gráfico de eventos para el proceso de llegada se muestra en la Figura .
  - Como la Lista de eventos está vacía, la condición de terminación para la ejecución de la simulación, debe haber al menos un evento programado inicialmente.
  - El evento Run se coloca en la lista de eventos. El evento Run se coloca en la lista de eventos. Por lo tanto, para hacer que el modelo de Proceso de Llegada de la Figura 2 sea un modelo completo, se agrega un evento Ejecutar que simplemente inicializa el número acumulado de llegadas a 0 y programa el primer arribo, como se muestra en la Figura .





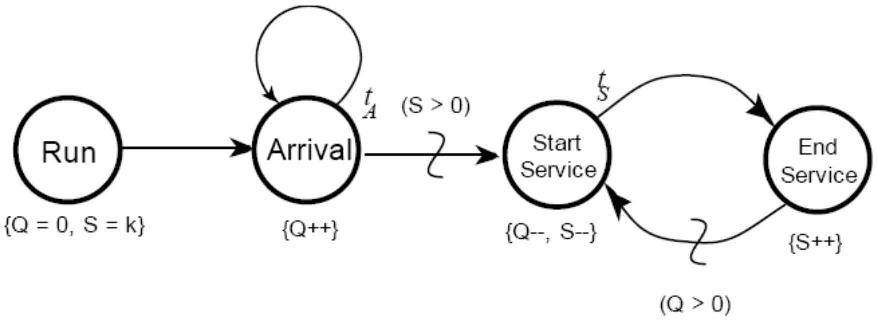
Eventos Simultáneos

- Hay una dificultad en la aplicación directa de la metodología de Event Graph presentada hasta ahora para modelos complejos, a saber, la de resolver el orden de ejecución o eventos simultáneos.
  - Los eventos simultáneos ocurren cuando más de un evento está programado para ocurrir al mismo tiempo.
  - En algunos casos, el orden de ejecución de los eventos es irrelevante, pero en otros casos las permeabilidades del orden de aparición son dramáticas, lo que lleva a trayectorias de estado no válidas y valores inadmisibles de variables de estado.
  - Dado que las computadoras tienen una precisión finita, esta posibilidad no puede descartarse incluso cuando es "continua".
  - Se están utilizando variables aleatorias. Para el modelo simple de la Figura no hay problema con los eventos simultáneos, pero igualmente en los modelos algo más involucrados (como un modelo para la siguiente sección) surge el problema de resolver eventos simultáneos.
  - Si se usan distribuciones discretas de probabilidad para retrasar los tiempos, entonces el potencial de eventos simultáneos aumenta drásticamente.
  - Metodología del gráfico de eventos Proporciona la capacidad de priorizar bordes de programación, de modo que las ocurrencias simultáneas del evento programado siempre ocurran antes que otros eventos programados.
  - Si bien estas son las prioridades clave, todas las implementaciones de software o la metodología Event Graph admiten la priorización de bordes.



Multiple Server Queue

- Descripción.
  - Los clientes llegan a una estación de servicio de acuerdo con un proceso de llegada y son atendidos por uno de los k servidores.
  - Los clientes que llegan para encontrar todos los servidores ocupados esperan en una sola cola y se sirven por orden de llegada.
- Parámetros
  - {tA} = tiempos interarrivales;
  - {tS} = tiempos de servicio; k = número total o servidores.
- Variables de estado
  - Q = # o clientes en cola; S = # o servidores disponibles
- Gráfico de evento

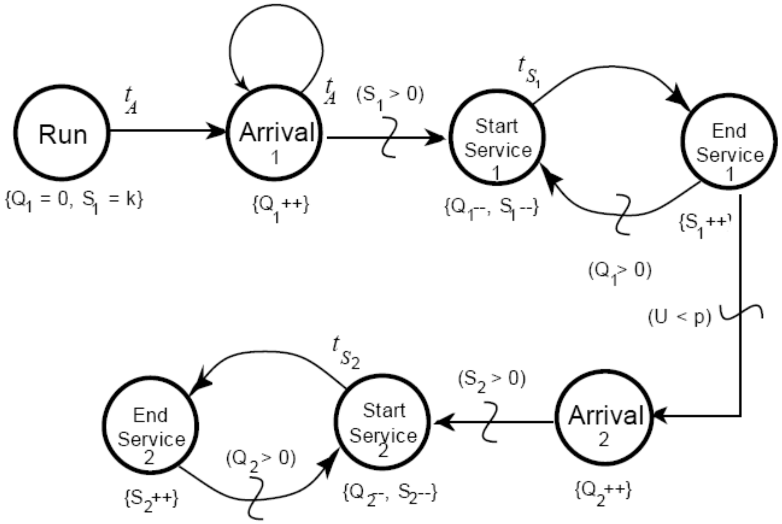


Multiple Server Queue

- Comentarios
  - En este modelo, los datos orientados a la entidad (como el tiempo en cola o el tiempo en el sistema) no están explícitamente disponibles.
  - Este modelo tiene un parecido superficial a un modelo orientado al proceso, ya que los eventos se han implementado a medida que el cliente avanza a través del sistema.
  - Sin embargo, una inspección minuciosa muestra que el borde de programación que va "hacia atrás" desde el evento EndService al evento StartService no tiene una correspondencia directa en un modelo de proceso.
  - El gráfico de eventos captura las dependencias de programación de los eventos en el modelo, no el flujo de clientes a través del sistema.
  - Es decir, el gráfico de eventos no representa un flujo síncrono o la ejecución de eventos, sino la relación de programación entre los diversos eventos que se ejecutan de forma asíncrona cuando se ejecuta la simulación.
  - Para modelos más flexibles, es muy deseable separar los componentes de distintos.
  - Los dos componentes se pueden acoplar libremente para trabajar juntos (ver Buss, 2000).
  - Sin embargo, no queremos modelos simples sin un enfoque de componentes.

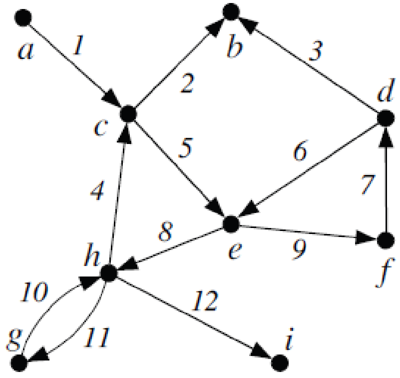
Cola en tándem

- Descripción
  - Los clientes que llegan son procesados por una estación de trabajo que consiste en una cola de múltiples servidores.
  - Una vez finalizado el servicio en la primera estación de trabajo, un cliente procede con probabilidad a uno la segunda estación de trabajo o abandona el sistema con una probabilidad de 1-p.
- Parámetros
  - {tA} = tiempos interarrivales; {tSi} = tiempos de servicio en la estación de trabajo i (i = 1, 2); ki = número total de servidores en la estación de trabajo yo; p = probabilidad de que el cliente proceda a la segunda estación de trabajo; {U} una secuencia de iid Un (0,1) aleatorio
- variables.
- Variables de estado
  - Qi = # o clientes en cola para la estación de trabajo i; Si = # o servidores disponibles en la estación de trabajo i.
- Gráfico de evento:



Elements of Graph Theory

- Un punto se llama **vértice** X (o nodo) y una flecha se llama **arco** U
- El **graph** $\boldsymbol{G}$ is denoted by the pair $G = (X, U)$
- Los conjuntos de **sucesores de un vértice** de x se denota por $\Gamma^{+}{}_{g}(x)$
- Los conjuntos de **predecesores de un vértice** se denota por $\Gamma^{-}{}_{g}(x)$
- Dos **vértices** $x\ e\ y$ son **adyacentes** si son los extremos de un arco
- Dos **arcos** (o bordes) son **adyacentes** si tienen un extremo común.
- Una **cadena** de longitud L> 0 es una secuencia de L arcos tal que cada arco en la secuencia tiene un extremo común con el arco precedente y el otro extremo común con el siguiente arco. *2,3,7* es una cadena de largo 3.
- Un **camino** de longitud L> 0 es una cadena particular tal que el extremo terminal del arco en la secuencia es la extremidad inicial del arco (i + 1) th en la secuencia (donde i <L). *10459 es un camino*
- Un **ciclo** es una cadena tal que la extremidad inicial es también la extremidad terminal; *cbdec* es un ciclo
- Un **circuito** es una ruta tal como la extremidad terminal: el ciclo cbdec no es un circuito, *hceh* es un circuito (por lo tanto, también es un ciclo).
- hceh y defd **son circuitos elementales**, mientras que el circuito hcefdeh **no es elemental**.

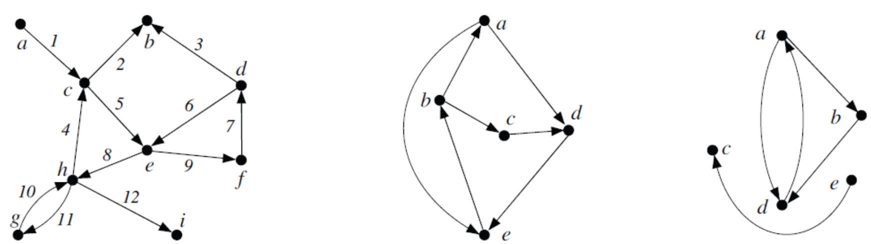


(a)

Vertices: X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i}
Arcs: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Elements of Graph Theory

- Un grafo **está conectado** si, para cualquier par o vértices (x, y), hay una cadena entre x e y;
  - Los grafo en las Figuras a yb están conectados, mientras que el gráfico en la Figura c no está conectado.
- Un gráfico **está fuertemente conectado** si, para cualquier par de vértices (x, y), hay un camino de x a y; el gráfico de la Figura b está fuertemente conectado, mientras que el gráfico de la Figura a no es (no hay camino de b a h, por ejemplo).
  - En un gráfico fuertemente conectado, dado que hay un camino de x a y y un camino de y a x, hay al menos un circuito que pasa por x e y.
  - De hecho, **un gráfico está fuertemente conectado** si y solo si **hay un circuito apropiado para todos los vértices**: adebaebcdeba en la Figura b.
  - La cantidad de circuitos elementales es igual a (número de arcos-número o vértices + 1)
  - estos circuitos forman una base a partir de la cual pueden obtenerse los otros circuitos (es decir, no elementales).
  - En la figura b, hay (7 -5 + 1) = 3 circuitos primarios, a saber, adeba, bcdeb y aeba.



(a) (b) (c)