EJEMPLOS

- Toda función meromorfa definida en un abierto de $\mathbb{C}$ es meromorfa en el plano considerado como superficie de Riemann.
- La suma, diferencia y producto de funciones meromorfas en un punto, de forma análoga al caso holomorfo, es merofomorfa. De igual forma el cociente, siempre que la funciñon se encuentre bien definida en el punto.
- En la esfera de Riemann, una función f es meromorfa en $\mathbb{C}_\infty$ si y solo si $f(1/z)$ es meromorfa en 0. En particular, por lo visto en el capítulo AGREGAR LA REFERENCIA DEL CAPÍTULO, toda función racional es meromorfa en la esfera de Riemann.
- En una superficie de Riemann el cociente de dos funciones holomorfas en p es una función meromorfa siempre que el denominador no sea idénticamente cero en una vecindad de p. Esto lo podemos verificar con la caracterización de las singularidades en términos del comportamiento de la función al hacerla tender al punto singular.

Y, de forma similar al caso holomorfo, definimos al conjunto

$$M_X(W) = M(W) = \{f : W \to \mathbb{C} \mid f \text{ meromorfa en } W\}$$

donde W es un subconjunto abierto de la superficie.

1 Series de Laurent en SdR

Cuando estudiamos singularidades aisladas en el contexto del plano complejo, utilizamos a las series de Laurent como herramienta para caracterizarlas y estudiarlas desde otro punto de vista. La ventaja de estas residía en que mucha información acerca de la función se encuentra guardada en los coeficientes de la serie. Habiendo definido funciones meromorfas en las superficies de Riemann estamos interesados en recuperar esta representación de las funciones, y esto lo conseguiremos, de nuevo, recurriendo a las cartas coordenadas definidas en nuestro espacio. Concretamente, si f es una función holomorfa en una vecindad de un punto p en la superficie y tenemos a una carta ϕ tal que $z_0 = \phi(p) \in \mathbb{C}$, entonces la serie de Laurent de la función en p es la serie de Laurent de la composición $f \circ \phi^{-1}$, es decir:

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

Esto, por supuesto, en una vecindad agujerada de $\phi(p)$. Una vez más regresa el motivo que ya habíamos anunciado: las propiedades de las funciones definidas en las superficies las obtendremos a partir de las propiedades de las composiciones que, localmente, las hacen ver como funciones de los complejos en los complejos. En ese sentido es necesario notar que en la serie estamos trabajando *con complejos, y no con elementos de la superficie.* Por otro lado, véase que al trabajar con funciones meromorfas en la expresión de su serie de Laurent no aparecen sino una cantidad finita de términos negativos, tal como lo probamos en AGREGAR LA REFERENCIA, y por ello podemos definir al orden de la función en p como:

$$\operatorname{ord}_p(f) = \min\{n | c_n \neq 0\}$$

Esto lo hicimos considerando a una carta fija ϕ, por lo que cabe preguntarnos si este número depende de la carta. La respuesta es que no y lo dejamos patente en la siguiente

PROPOSICIÍON El orden de una función meromorfa en un punto p no depende de la carta elegida para desarrollarla en su serie de Laurent.

Proof. Supongamos que f es meromorfa en p y que tenemos dos cartas ϕ, ψ definidas en una vecindad de p. Consideramos la función de transición $z = T(w) = \phi \circ \psi^{-1}(w)$. Al ser función de transición notamos que $T'(w_0) \neq 0$, y así podemos poner, llamando $z_0 = \phi(p)$ y $w_0 = \psi(p)$, que $z = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(w - w_0)^n$, de donde

$$z - z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n \tag{2}$$

Pensemos que el orden de la función en la carta ϕ es n_0. Entonces su desarrollo en esta es

$$c_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + (\text{términos de orden superior}) \tag{3}$$

Sustituyendo 2 en 3 se tiene que

$$c_{n_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w - w_0)^n\right)^{n_0} + (\text{términos de orden superior}) =$$
$$= c_{n_0} a_1 (w - w_0)^{n_0} + (\text{términos de orden superior})$$

por lo que en el desarrollo en serie de Laurent de la función usando la carta ψ se tiene que el mínimo de los coeficientes también es el correspondiente al del exponente n_0, que es lo que buscábamos demostrar. $\square$

Utilizando a este número, tenemos que una función f meromorfa en p cumple que

- Es holomorfa en p si $\operatorname{ord}_p(f) \geq 0$. Además, tiene un cero en p si la desigualdad es estricta.
- Tiene un polo en p si $\operatorname{ord}_p(f) < 0$.
- No tiene ni un cero ni un polo en el punto si el orden es cero.

El nombre que hemos utilizado para este número es bastante sugerente, como lo remarca la siguiente

Definition 1. *Defimos que una función meromorfa f en p tiene un (cero, polo) de orden n en p si y solo si ($ord_p(f) = n \geq 1$, $ord_p(f) = -n < 0$).*

De esta forma podemos hablar de ambos tipos de singularidades utilizando un lenguaje común basado en el signo del mínimo exponente que aparece en las series de Laurent. Esta cantidad se comporta de la siguiente forma con las operaciones entre funciones definidas en superficies de Riemann:

Theorem 1. *Si f, g son funciones meromorfas en p, entonces:*

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
- $ord_p(1/f) = - ord_p(f)$
- $ord_p(f \pm g) \geq \min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$

Las pruebas de estas proposiciones son análogas a las que se hacen al estudiar el comportamiento del grado de un polinomio en el anillo de polinomios definido por un campo. Por completez, haremos una de ellas

Proof. Veamos que $\mathrm{ord}_p(fg) = \mathrm{ord}_p(f) + \mathrm{ord}_p(g)$. Para ello notamos que en alguna carta común el desarrollo de las funciones está dado por $c_{n_0}(z-z_0)^{n_0}+\dots$ y $d_{m_0}(z-z_0)^{m_9}+\dots$, donde los puntos suspensivos representan los términos de orden superior. Haciendo el producto de las funciones tenemos que

$$c_{n_0} d_{m_0} (z - z_0)^{n_0+m_0} + \dots$$

y así, este es el término más pequeño que aparece en el desarrollo de fg en la misma carta. De ello se sigue el resultado. □

Para ilustrar la potencia del orden de una función, veamos la siguiente proposición

Theorem 2. *En la esfera de Riemann, la suma de los órdenes de toda función meromorfa en* 0

Proof. Sabemos que toda función meromorfa puede ser expresada como el cociente de dos polinomios. Luego:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = c \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

donde la última igualdad se sigue de poner a cada polinomio en sus factores lineales y el exponente e_i corresponde a la multiplicidad de λ_i. Por lo visto en la sección AGREGAR LA SECCIÓN DE FUNCIONES MERO EN EL PLANO, tenemos que $\mathrm{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i$, $\mathrm{ord}_\infty(f) = \deg(q) - \deg(p) = -\sum_i e_i$ y que $\mathrm{ord}_x(f) = 0$ para todo $x \in \{\lambda_i, \infty\}$. De esta forma:

$$\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) = 0$$

que es lo que queríamos demostrar. □

En palabras, este resultado nos dice es que un función meromorfa definida en la esfera de Riemann tiene la misma cantidad de ceros que de polos, ambos contados con multiplicidad. Veremos más adelante que este resultado se puede generalizar a toda superficie de Riemann compacta.

2 Teoremas heredados de $\mathbb{C}$

A continuación enunciaremos tres teoremas importantes heredados de las funciones definidas en el plano complejo. Nos serán sumamente útiles al trabajar con funciones definidas en superficies de Riemann y, más adelante, mapeos entre superficies.

Theorem 3 (Discretitud de ceros y polos)**.** *El conjunto de ceros y polos de una función meromorfa definida en un abierto conexo de una superficie de Riemann es discreto*

Theorem 4. *de la identidad (SdR) Sean f, g meromorfas en un subconjunto W abierto y conexo de una superficie de Riemann. Si $f = g$ en $S \subseteq W$ tal que S tiene un punto límite en W, entonces $f = g$ en W.*

Theorem 5. *Módulo máximo Si f es holomorfa en un dominio $W \subseteq X$ y es tal que para algún $p \in W$ ocurre que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$, entonces f es constante en W*

3 Mapeos entre SdR

En la sección anterior definimos funciones cuyos dominios eran subconjuntos de superficies de Riemann y codominios el plano complejo. Para hablar de sus propiedades, como holomorfía o meromorfía, lo que hicimos fue pensar en términos de las cartas coordenadas y analizar las propiedades de las composiciones de las funciones con estas. Ahora estamos en posición de definir funciones cuyo codominio sea *otra* superficie de Riemann. Para distinguir los conceptos diremos que las funciones *entre* SdR son *mapeos* y que las funciones definidas *en* SdR son, valga la redundancia, funciones. Vale la pena decir que como el plano complejo también es una SdR, toda función puede ser pensada como un mapeo. El contexto será quien nos dirá conforme avancemos a qué nos estamos refiriendo.

Definition 2 (Mapeo entre superficies de Riemann)**.** *Sean X, Y superficies de Riemann. Decimos que $F : X \to Y$ es un mapeo holomorfo en $p \in X$ si existen cartas coordenadas $\phi_i : U_i \to V_i$ con $i = 1, 2$ tales que $p \in U_1 \subseteq X$, $F(p) \in U_2 \subseteq Y$ y además $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Si F está definida en $W \subseteq X$, decimos que es holomorfo en W si es holomorfa en cada punto de W y que es un mapeo holomorfo si es holomorfo en toda la superficie X.*

Con esta definición podemos probar un par de propiedades similares a las que tenemos para funciones en superficies de Riemann. A saber:

Theorem 6.

- *F es holomorfa en p si y solo si para todo par de cartas $\phi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, con $p \in U_1$, $F(p) \in U_2$ ocurre que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$.*
- *Otra propiedad sobre uniones (Redactar después. No la usamos con frecuencia)*

Notemos que si definimos una función holomorfa con dominio una superficie de Riemann y codominio el plano complejo, al ser este mismo una superficie de Riemann, tenemos un *mapeo* entre dos superficies. A continuación enunciamos algunas propiedades de los mapeos holomorfos.

Theorem 7.

1. *Todo mapeo holomorfo es continuo y C^∞.*
2. *La composición de mapeos holomorfos es un mapeo holomorfo.*
3. *La composición de un mapeo holomorfo con una función holomorfa es una función holomorfa.*
4. *La composición de un mapeo meromorfo con una función meromorfa es una función meromorfa (Ojo. aquí hay un detalle con los ceros en la composición)*

Proof. La primera afirmación se sigue de que una función holomorfa es continua; al tomar preimágenes de abiertos utilizando las cartas, se preserva la apertura de los conjuntos; la condición de ser C^∞ se hereda de las propiedades de las funciones holomorfas en el plano. El resto de propiedades se verifican realizando la composición de las funciones con las cartas. (Detallar esto?) □

Utilizando el concepto de mapeo entre superficies de Riemann podemos establecer una noción de isomorfismo entre superficies de Riemann.

Definition 3. *Decimos que dos superficies de Riemann son isomorfas si existe un mapeo holomorfo entre ellas que es invertible y que, además, tiene inversa holomorfa. A este tipo de mapeos se les llama biholomorfismos.*

Por ejemplo, la línea proyectiva compleja y la esfera de Riemann son isomorfas. Para ello basta proponer a la función

$$[z : w] \mapsto \frac{(2\Re(z\bar{w}), 2\Im(z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2)}{|z|^2 + |w|^2}$$

Cerramos esta sección con un comentario categórico: es posible verificar que la identidad de una superficie de Riemann en sí misma también es un mapeo holomorfo. Por otro lado, el segundo punto de la proposición NO OLVIDAR LA REFERENCIA A ESTA PROP nos dice que podemos *ir* de una superficie de Riemann a una tercera si podemos ir de una primera a una segunda, y de una segunda a la tercera. De esta forma podemos pensar en la *categoría de las superficies de Riemann* considerando a los objetos como las superficies mismas y a los morfismos (o flechas) como los mapeos holomorfos. Este es un enfoque que no seguiremos en este trabajo, pero dejamos constancia de él por tratarse de una forma actual de trabajar con los objetos matemáticos de interés.

4 Teoremas sobre mapeos holomorfos

los teoremas que presentaremos en esta sección son, muchos, viejos conocidos tanto de la teoría clásica de variable compleja como de la sección relativa a funciones en superficies de Riemann. Las pruebas de muchos de ellos ya las hemos discutido, por ejemplo, en el INSERTAR CAPÍTULO Y SECCIÓN, donde utilizamos herramientas *sencillas* (que no por eso fáciles). No obstante, ahora los enunciaremos una vez más en el contexto de los mapeos holomorfos, y la razón para esto no es aburrir a nuestra lectora, sino prepararnos para utilizarlos en proposiciones y teoremas de gran interés para nosotros. El primero es la versión del teorema de la función abierta que enunciamos en AGREGAR LA SECCIÓN

Theorem 8 (Mapeo abierto)**.** *Si $F : X \to Y$ es un mapeo no constante entre dos superficies de Riemann, este es abierto.*

Proof. Sea $U \subseteq X$ abierto. Consideramos una carta ϕ tal que U esté contenido en su dominio. De esta forma $W = \phi_1[U] \subseteq \mathbb{C}$ es abierto. Tenemos que $G := \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfo por hipótesis. De ello se sigue que $G[W]$ es abierto, es decir $\phi_2 \circ F \circ \phi_1 \circ \phi_1^{-1}[U] = \phi_2 \circ F[U]$ es abierto. Como ϕ_2 también es un homeomorfismo, componiendo por la izquierda tenemos que $\phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ F[U] = F[U]$ es abierto. ☐

El siguiente teorema, además de la lectura que se puede dar en su enunciado, puede ser interpretado como sigue: *una superficie de Riemann y su imagen bajo un mapeo holomorfo son isomorfas*

Theorem 9 (Inversa del mapeo holomorfo)**.** *La inversa de un mapeo holmorfo también es un mapeo holomorfo*

El teorema de la identidad para mapeos holomorfos también es válido.

Theorem 10 (Identidad para holomorfos)**.** *Sean $F, G : X \to Y$ holomorfas tales que $F = G$ en un subconjunto $S \subseteq X$ que tiene un punto límite en X. Entonces $F \equiv G$*

Proof. Componiendo con una carta conveniente en el codominio tenemos que $\phi_2 \circ F \equiv \phi_2 \circ G$ pues son funciones holomorfas y de esta manera aplicamos esta versión del teorema de la identidad. Componiendo con la inversa de la carta en cada punto tenemos la igualdad buscada. ☐

Bajo la hipótesis de compacidad uno puede decir todavía más acerca de las superficies de Riemann y las funciones definidas en ellas. Muestra de ello es la proposición PROPOSICION SOBRE LOS CEROS Y POLOS que nos dice que una función meromorfa definida en la esfera tiene la misma cantidad de ceros que de polos (contando con multiplicidad). Los siguientes dos teoremas, poderosos, utilizan esta hipótesis.

Theorem 11. *Sea $F : X \to Y$ un mapeo holomorfo no constante definido entre dos superficies de Riemann. Si X es compacta, entonces F es sobre y Y es compacta.*

Proof. Como F es abierto y no constante, $F[X]$ es abierto. Además, Y es hausdorff por ser superficie de Riemann y por tanto, al ser $F[X]$ compacta por ser F continuo, $F[X]$ es cerrado. Pero Y es conexo, y como $F[X]$ es cerrado y abierto, resulta que $F[X] = Y$ y de ello tenemos que F es sobre. □

La siguiente ¿ES COMO UNA VERSIÓN DE POINCARÉ-VOLTERRA?

Theorem 12 (Discretitud de las preimágenes)**.** *Sea $F : X \to Y$ un mapeo holomorfo no constante entre dos superficies de Riemann. Entonces para todo $y \in Y$, $F^{-1}[\{y\}] =: F^{-1}[y] \subseteq X$ es un conjunto discreto*[1]*. Si además X es compacta, las fibras son finitas y no vacías.*

Proof. Para probar la discretitud de las fibras tenemos que encontrar una vecindad para cada punto de la preimagen tal que solo tenga un elemento de la fibra. Así, tomamos $y \in Y$ y supongemos que $x \in F^{-1}[y]$. Elegimos una coordenada w centrada en x y una coordenada z centrada en y. De esta forma podemos poner al mapeo como $z = g(w)$ para alguna función g. Nótese que $g(w) = 0$ pues la coordenada está centrada en y. Entonces, como la función es holomorfa no constante, existe una vecindad agujerada de x tal que g no es cero en ella; esto por el teorema de los ceros aislados. De esta forma hemos trobado que $F^{-1}(y)$ es un conjunto discreto. Bajo la hipótesis de compacidad de X tenemos que la fibra es no vacía pues el mapeo es sobreyectivo y además, finita. □

5 Riemann-Hurwitz

¿Cómo afecta la forma del espacio a las funciones que podemos definir en él? Y, al revés, ¿las funciones que podemos definir en un espacio condicionan la geometría del mismo? La respuesta en el contexto de las superficies de Riemann compactas y los mapeos holomorfos está dada por la siguiente fórmula

$$2 - 2g(X) = askdlaks \tag{4}$$

que es conocida como *fórmula de Riemann-Hurwitz*. Este será otro de los *puntos de control* principales que deseamos presentar en este trabajo y ya casi estamos en condiciones de hacerlo. La prueba será relativamente sencilla con un par de conceptos nuevos que definiremos y que en otro momento retomaremos con otros propósitos. El valor de la fórmula está, sin embargo, no solo en su brevedad, sino en lo que encapsula. Paso a paso la iremos desmenuzando de tal forma que al final, tal vez incluso de manera abrupta, lleguemos a ella.

5.1 Vistazo a las ecuaciones diferenciales

[1] A este conjunto se le suele llamar *la fibra de y*