



Tesis de Grado en Geofísica

Herramientas de aprendizaje automático para magnetotelúrica

Simón Montenegro

Director: Prof. Dr. Fabio Iván Zyserman **Codirector:** Geofísico Matías Walter Elías

La Plata, Argentina - 28 de mayo de 2024 -

Índice General

1.	Introduccion							
	1.1.	Método magnetotelúrico	5					
	1.2.	Aprendizaje automático (ML)	6					
	1.3.	Objetivos del trabajo	6					
	1.4.	Estructura de la Tesis	7					
2.	Fun	damentos del Método magnetotelúrico	8					
	2.1.	Ecuaciones Fundamentales del Método magnetotelúrico	10					
	2.2.	Comportamiento eléctrico de las rocas	12					
	2.3. Funciones de Transferencia							
	2.4.	Tensor de impedancias	14					
	2.5.	Dimensionalidad Geoléctrica	15					
		2.5.1. Medios unidimensionales (1D)	16					
		2.5.2. Medios bidimensionales (2D)	16					
		2.5.3. Medios tridimensionales (3D)	18					
	2.6.	Efectos de Distorsión	19					
	2.7.	Modelado de los datos MT	21					
3.	Esti	udio de casos 2D	24					

	3.1.	Capas Horizontales	24
		3.1.1. Una Capa con sustrato resistivo	24
		3.1.2. Capas Horizontales: Semiespacio conductivo	26
		3.1.3. Una Capa y semiespacio conductor "perfecto"	27
		3.1.4. Una Capa y semiespacio aislante "perfecto"	28
	3.2.	Capas verticales	29
		3.2.1. Modo TE: análisis respecto de las estaciones	30
		3.2.2. Modo TM: análisis respecto de las estaciones	32
		3.2.3. Modo TE: análisis respecto de los periodos	34
		3.2.4. Modo TM: análisis respecto de los periodos	35
	3.3.	Dique resistivo	36
		3.3.1. Modo TE	37
		3.3.2. Modo TM	38
	3.4.	Modelos inhomogéneos	39
4.	Apr	rendizaje no Supervisado, KMeans y SOM	43
	4.1.	K-Means (K medias)	44
		4.1.1. Fundamentos Matemáticos del KMeans	46
	4.2.	Mapa Autoorganizado (SOM)	48
		4.2.1. Fundamentos de la SOM	49
	4.3.	Métricas de comparación: Silhouette score	53
	4.4.	Implementación de las técnicas de aprendizaje automático a datos MT	55
		4.4.1. Predicción	61
		4.4.2. Variaciones de resistivdad	62
	4.5.	Modelo de dos bloques	64

5.	Conclusiones								
	4.7.	Modelo	Complejo	78					
		4.6.3.	Variaciones de resistividad	75					
		4.6.2.	Variaciones de espesor	74					
		4.6.1.	Variaciones laterales	73					
	4.6.	Modelo	o de 3 Resistividades	72					
		4.5.3.	Variaciones de conductividad	69					
		4.5.2.	Variaciones de espesor	68					
		4.5.1.	Variaciones laterales	66					

Capítulo 1

Introducción

1.1. Método magnetotelúrico

La magnetotelúrica (MT) es una técnica electromagnética pasiva que se usa para obtener información sobre las propiedades eléctricas del subsuelo, como lo son la resistividad/conductividad mediante el análisis de las variaciones temporales del campo electromagnético (EM) natural de la Tierra. Para una adquisición MT, se colocan estaciones en la superficie terrestre que registran estas fluctuaciones de los campos eléctrico E y magnético H naturales. Una vez obtenido los datos, su procesamiento permite construir un modelo de resistividades del subsuelo, teniendo en cuenta que la resistividad eléctrica además es un parámetro sensible a factores como la porosidad, saturación de fluidos, contenido de arcilla y temperatura, el resultado obtenido puede ser causa de múltiples razones y de no tan sencilla interpretación.

Esta técnica posee ventajas como la exploración a profundidades variables, ya que el rango de períodos de las señales capturadas permite investigar subsuelos desde pocos metros hasta cientos de kilómetros, siendo el periodo proporcional a la profundidad de interés; la energía es generada por fenómenos atmosféricos y cósmicos, eliminando la necesidad de fuentes artificiales y minimizando la interferencia humana. Además se pueden realizar caracterizaciones geológicas y geotérmicas, gracias a que este método geofísico proporciona información valiosa sobre la geometría y propiedades físicas de estructuras geológicas, resultando útil en estudios exploratorios de hidrocarburos, minerales, geotermia e hidrogeología.

Anteriormente, la magnetotelúrica se utilizaba en etapas exploratorias iniciales, especialmente en zonas con coladas basálticas o en ambientes geológicos de faja plegada y corrida, donde la relación señal/ruido de los registros sísmicos era baja, complicando considerablemente un buen registro de información. Actualmente, sigue siendo una herramienta eficaz también en la caracterización de la litósfera, la corteza superior, el basamento, zonas fracturadas y áreas afectadas por presencia e intercambio de fluidos.

1.2. Aprendizaje automático (ML)

El ML, o aprendizaje automático, es una rama de la inteligencia artificial (IA) que se centra en el desarrollo de algoritmos y modelos capaces de aprender patrones y, sin una programación explícita, poder resolver tareas específicas a través de la experiencia (datos) y la adaptación de los mismos; los modelos de ML pueden mejorar el rendimiento en diversas áreas, desde reconocimiento de patrones (clustering), toma de decisiones (clasificación), hasta predicciones para problemas regresivos (regresiones). No solamente existen modelos guiados por los datos sino que existen modelos híbridos que son informados de leyes físicas particulares a cada problema, llamados Physics-Informed-Neural-Networks (PINNs).

Actualmente, el ML se ha adaptado a múltiples sectores, transformando la forma en que abordamos problemas y tomamos decisiones. Desde la recomendación de productos en comercios hasta la detección de fallas geológicas en imágenes sísmicas en el contexto geofísico, el ML se ha convertido en una herramienta relevante para empresas, y también en la academia, para aprovechar al máximo la información disponible.

En el ámbito geofísico, el ML ha demostrado ser útil en la interpretación de datos sísmicos y la predicción de distintos fenómenos geofísicos. Se han utilizado algoritmos de ML para mejorar la calidad de las imágenes sísmicas, identificar patrones en datos geofísicos complejos y prever posibles riesgos geológicos. Las posibilidades en proyectos de geofísica con ML son vastas, como por ejemplo puede ser el modelado de procesos geofísicos con redes neuronales que tradicionalmente utilizan resoluciones numéricas para problemas de derivadas parciales, o hasta la predicción de movimientos tectónicos. La combinación de la capacidad de aprendizaje automático junto con la riqueza de datos geofísicos, ofrece un terreno con gran posibilidad para innovar y la resolución de desafíos en el estudio de la Tierra y sus procesos.

1.3. Objetivos del trabajo

- 1. Entrenamiento en la utilización del código computacional para medios isótropos con ModEM.
- 2. Análisis de la respuesta magnetotelúrica de medios isótropos.
- 3. Selección de casos de estudio, realización de simulaciones numéricas y análisis de los resultados.
- 4. Selección de la herramienta de aprendizaje automático y entrenamiento en su utilización.
- 5. Aplicación de la misma para la caracterización de la estructura conductiva de medios bidimensionales heterogéneos.

En particular, nos interesa:

- Ensayar posibles aplicaciones al método MT con distintos métodos de aprendizaje no supervisado
- Analizar las métricas especificas para ambos métodos y su relación con el contexto geofísico
- Comparar la eficiencia de ambas técnicas de aprendizaje
- Concluir sobre la factibilidad del uso de estas técnicas

1.4. Estructura de la Tesis

- 1. Introducción: Ilustra brevemente la actualidad y relación de los 2 ejes principales de la Tesis, explica las motivaciones y objetivos de la misma
- 2. Fundamentos del método magnetotelúrico: Da una visión general del método magnetotelúrico, su teoría, la dimensionalidad y una descripción del software utilizado junto a la estructura de datos requerida para su uso.
- 3. Estudio de casos de modelado 2D: Este capítulo presenta distintos modelos de resistividad bidimensionales (2D) isotrópicos tanto homogéneos como heterogéneos, con su respuesta en las direcciones TE, TM tanto en módulo como en fase y su respectivo análisis.
- 4. Aprendizaje no supervisado, K-Means y Self Organizing Maps (SOM): En este capitulo se explican los fundamentos matemáticos de ambas técnicas de agrupación. Se aplican las técnicas al estudio de la respuesta electromagnética y se analiza su desempeño y alcance.
- 5. Conclusiones: En este último capítulo los detalles y mayores contribuciones son discutidos y resumidos.

Capítulo 2

Fundamentos del Método magnetotelúrico

El método magnetotelúrico es un método geofísico de origen natural basado en el fenómeno de inducción electromagnética, útil para caracterizar la distribución de resistividad en el suelo subterráneo. Como se mencionó en el capítulo anterior, esta tecnología utiliza como fuente las fluctuaciones del campo electromagnético terrestre (cambios muy débiles, con una componente magnética menor a 10^{-9} T y unos 10^{-6} V/m en la eléctrica), que se origina en la ionosfera, principalmente debido a la actividad solar. Cuando el denominado campo primario llega a la superficie terrestre, éste actúa como medio conductor, lo que provoca la redistribución de cargas y circulación de corrientes, creando así un campo secundario. La MT se basa en mediciones superficiales simultáneas de las variaciones temporales de los campos eléctricos y magnéticos E(t) y H(t) resultantes de la superposición de campos primarios y secundarios. Considerando el comportamiento de los vectores del campo eléctrico y magnético, es posible medir tres componentes del campo magnético H_x , H_z , H_y y dos componentes horizontales del campo eléctrico E_x , E_y .

Para frecuencias bajas (<10 Hz), la señal se origina en la actividad solar (viento solar), mientras que para frecuencias altas (>10 Hz), la señal se origina en tormentas eléctricas. En la transición entre estas dos posibles fuentes de energía, existe una región de amplitud de señal muy baja, la llamada "zona muerta", con una frecuencia de alrededor de 1 Hz, como se puede ver en la Fig. (2.1).

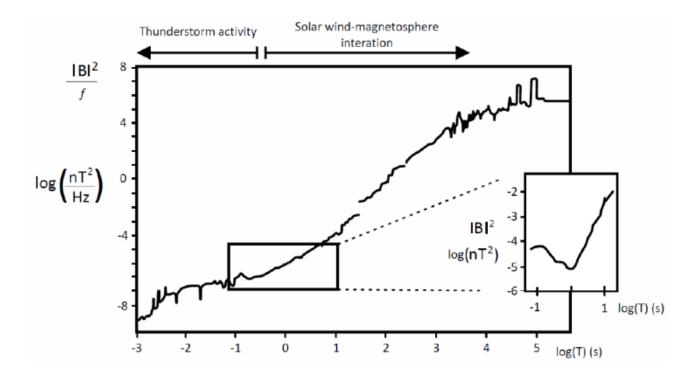


Figura 2.1: Espectro de potencia de las variaciones del campo magnético natural con un recuadro que corresponda al mínimo de señal de la banda muerta (dead-band; Junge 1996)

Los cambios de tiempo registrados en la superficie se transforman al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier. Las componentes resultantes dependientes de la frecuencia de los campos eléctrico y magnético se utilizan para calcular el tensor de impedancia (Subsección 2.4) asociado con ambos campos. A partir de esta relación se puede determinar la distribución de la resistividad del subsuelo con la profundidad.

Según el comportamiento de las ondas electromagnéticas cuando se propagan en un medio conductor, la capacidad de transmisión (penetración) de las ondas electromagnéticas depende de la frecuencia de sus oscilaciones. Por tanto, cada frecuencia de las ondas investigadas proporciona información hasta una determinada profundidad, que a su vez depende de la conductividad del medio.

Los orígenes del método magnetotelúrico se remontan a la década de 1950 y se atribuyen a Tikhonov (1950) y Cagniard (1953), quienes consideraron la relación escalar entre los campos eléctricos y magnéticos y sentaron las bases teóricas del método. Pero no fue hasta finales de la misma década que Neves (1957) determinó la naturaleza tensorial de la relación entre dos campos y definió un algoritmo en diferencias finitas para resolver problemas directos en dos dimensiones.

Desde estas primeras aplicaciones se han logrado enormes avances teóricos e instrumentales y se han desarrollado muchos algoritmos para resolver problemas de inversión. Durante las últimas dos décadas, el trabajo se ha basado principalmente en la inversión e interpretación bidimensional, pero en los últimos años se han desarrollado algoritmos de inversión tridimensional.

Por tanto, el formidable desarrollo experimentado en las últimas décadas ha convertido a la MT en un método geofísico competitivo capaz de caracterizar diversas estructuras geológicas.

2.1. Ecuaciones Fundamentales del Método magnetotelúrico

El campo electromagnético natural creado se propaga verticalmente en forma de ondas planas incidente sobre la superficie de la Tierra conductora. Esta suposición es válida sólo si las mediciones no están contaminadas por ruido artificial o natural y las mediciones se realizan lejos del ecuador y de los chorros aurorales (electrojets).

En la superficie se miden los campos electromagnéticos coexistentes con la Tierra: el campo eléctrico horizontal (E_x, E_y) y los campos magnéticos horizontal y vertical (H_x, H_y, H_z) . Por tanto, las propiedades eléctricas de la Tierra se pueden determinar midiendo las funciones de transferencia de las señales de entrada y salida en función de la frecuencia. Estas funciones de transferencia toman la forma de un tensor complejo 2x2, Ecs (2.1) y (2.2).

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

$$H_z = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

donde Z_{ij} son los elementos del tensor de impedancia y T_i los elementos de la función de transferencia geomagnética (VTF en sus siglas en inglés). La distribución de los campos depende de su frecuencia y de la conductividad eléctrica del medio conductor atravesado, los campos electromagnéticos se atenúan más en un medio conductor que en uno resistivo y las señales de baja frecuencia penetran más profundamente que las señales de alta frecuencia. Por ende, los campos electromagnéticos a distintas frecuencias contienen información sobre la variación de la conductividad eléctrica con la profundidad. La onda electromagnética incidente penetra la Tierra, perdiendo amplitud con la profundidad. La relación entre la frecuencia de la onda y profundidad de penetración (skin depth) en función de la resistividad del medio es:

$$\delta \cong 503\sqrt{\rho T},\tag{2.3}$$

donde δ es la profundidad de penetración en metros, ρ es la resistencia en Ω m y T es el período en segundos. La profundidad de penetración es la profundidad a la que la amplitud se atenúa

1/e en comparación con el valor de la superficie si el suelo es un medio resistivo homogéneo ρ .

Resulta que el registro simultáneo de la componente horizontal del campo eléctrico y de las tres componentes del campo magnético permite determinar la distribución de la conductividad eléctrica con la profundidad en el subsuelo. El método MT se basa en la propagación de campos electromagnéticos a través de un medio conductor (Tierra) según las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\tag{2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right),\tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = d,\tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0},\tag{2.7}$$

donde **E** es la intensidad del campo eléctrico en [V/m], **B** el vector de inducción magnética en [T], **D** el vector de desplazamiento eléctrico en $[C/m^2]$, **H** la intensidad de campo magnético en [A/m], la densidad de corriente eléctrica **J** en $[A/m^2]$ y d la densidad de carga eléctrica en $[C/m^3]$. **E**, **B**, **D** y **H** representan el campo electromagnético. Estas 5 magnitudes vectoriales no son independientes y se relacionan mediante las relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},\tag{2.8}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},\tag{2.9}$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E},\tag{2.10}$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica en [F/m], μ la permeabilidad magnética en [H/m] y σ la conductividad eléctrica en [S/m]. Para la mayoría de las rocas y materiales estudiados en MT las variaciones de las permitividades eléctricas y las permeabilidades magnéticas son despreciables y, por lo tanto estos parámetros se consideran iguales a sus valores en el vacío ($\epsilon = \epsilon_0 = 8.85x10^{-12}$ [F/m] y $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ [H/m]).

Considerando la inducción electromagnética en la Tierra se utilizan los siguientes supuestos:

- Aproximación de campo lejano: las fuentes EM naturales se generan lejos de la superficie terrestre, lo que implica que pueden tratarse como ondas EM uniformes y de polarización plana que llegan a la superficie terrestre con incidencia casi vertical.
- Aproximación cuasiestática: para el intervalo de periodos utilizado en MT (10⁻⁴ 10⁴ s) y la conductividad eléctrica de los materiales terrestres, las corrientes de desplazamiento variables en el tiempo son despreciables en comparación con las corrientes de conducción variables en el tiempo.

Teniendo en cuenta estos supuestos las soluciones para E y B de las ecuaciones de Maxwell son:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, e^{i\omega t - kz},\tag{2.11}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \, e^{i\omega t - kz},\tag{2.12}$$

donde E_0 y B_0 son las amplitudes en la superficie terrestre, k el número de onda y ω la frecuencia angular. Estas relaciones muestran la variación temporal sinusoidal y el decaimiento exponencial en la dirección vertical de los campos EM

2.2. Comportamiento eléctrico de las rocas

El propósito de la magnetotelúrica es caracterizar la distribución de resistividad del subsuelo. Este parámetro físico es muy sensible a pequeños cambios en la composición de una determinada cantidad de roca, por lo que se verá fuertemente afectado por los procesos que actúan sobre ella. De esta manera, la resistividad de las rocas de la corteza terrestre, además de su composición, también depende de factores como la porosidad, la proporción de poros saturados con ciertos líquidos a poros secos y sus relaciones mutuas, propiedades de los líquidos y otros factores como presión o temperatura.

La mayoría de las rocas de la corteza terrestre tienen una alta resistividad, pero permiten la circulación las cargas eléctricas en mayor o menor medida. La transferencia de estas cargas se produce por el movimiento de los electrones de valencia en la red cristalina (conducción electrónica) o por el movimiento de iones (conducción iónica). La corteza terrestre contiene pocos componentes raros en concentraciones suficientes para que la conductividad electrónica

controle la conductividad general de las rocas; esto se aplica a algunos minerales metálicos o algunas de sus sales (sulfuros metálicos, magnetita...).

Por otro lado, cualquiera de estos materiales tiene poros que pueden estar saturados o no con agua u otro líquido, entonces, es una muy buena aproximación suponer que la conducción de la corriente eléctrica se produce casi exclusivamente por conducción iónica, es decir, asociado con la presencia de líquido en los poros o fracturas. En este caso, los poros deben estar conectados entre sí (porosidad efectiva) para que el fluido del medio conduzca eficazmente la corriente eléctrica. El resultado final es que la roca en su conjunto actúa como un conductor de iones con una resistencia muy variable según las condiciones, ergo, la resistividad de una roca puede variar en un amplio rango dependiendo de su contenido de agua, salinidad, patrón de distribución de poros y temperatura. La Fig. (2.2) muestra algunas de las zonas más comunes de variación de rocas y minerales.

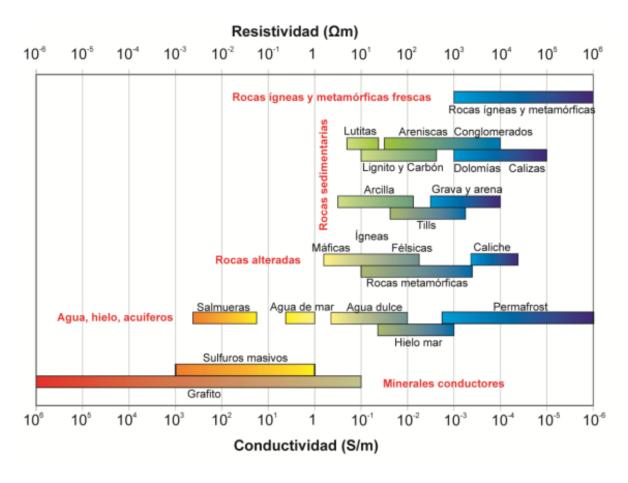


Figura 2.2: Rango de conductividades eléctricas de los elementos más comunes de la Tierra (Miensopust 2010).

2.3. Funciones de Transferencia

Las funciones de transferencia magnetotelúricas se definen como aquellas funciones que establecen una relación entre las distintas componentes de los campos electromagnéticos registrados en la superficie, específicamente para una frecuencia determinada; estas funciones son completamente dependientes de las propiedades eléctricas de las rocas a través de las cuales se propagan las ondas electromagnéticas. En otras palabras, su comportamiento está vinculado exclusivamente a las características eléctricas de los materiales geológicos que atraviesan, por ende, estas funciones ofrecen una representación de la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo y brindan información detallada sobre las estructuras geológicas a diversas profundidades, según la frecuencia que se esté registrando.

Las funciones de transferencia más comunes son el tensor de impedancia, la función de transferencia geomagnética, los invariantes rotacionales y el tensor de fase. En este trabajo haremos nuestro análisis en base a la primera de las funciones de transferencia mencionadas.

2.4. Tensor de impedancias

El campo electromagnético se mide en cada estación MT en el dominio del tiempo como una serie temporal de fluctuaciones del campo eléctrico y magnético en direcciones ortogonales. Se deben procesar series temporales para obtener una función de transferencia que relacione el campo electromagnético registrado en la superficie con la distribución de conductividad en el subsuelo. Las componentes horizontales de los campos electromagnéticos E y H se relacionan utilizando el tensor de impedancias complejo, que es un tensor complejo 2×2 definido por la Ec. (2.1) y que se desarrolla como:

$$E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y,$$

$$E_y = Z_{yx}H_y + Z_{yy}H_y.$$

Al resolver estas ecuaciones se obtienen las componentes tensoriales Z_{ij} . Es un conjunto de 4 ecuaciones (2 reales y 2 imaginarias) y 8 incógnitas (4 reales y 4 imaginarias). Esta diferencia puede explicarse por el hecho de que \mathbf{Z} varía muy lentamente con la frecuencia , por lo que \mathbf{Z} se promedia en una banda de frecuencia (Vozoff, 1972).

La conjugación de campos magnéticos se utiliza porque el ruido suele encontrarse principalmente en campos eléctricos (Vozoff, 1972). Las soluciones de estas ecuaciones son:

$$Z_{xx} = \frac{\langle E_x H_x^* \rangle \langle H_y H_y^* \rangle - \langle E_x H_y^* \rangle \langle H_y H_x^* \rangle}{\langle H_x H_x^* \rangle \langle H_y H_x^* \rangle - \langle H_x H_y^* \rangle \langle H_y H_x^* \rangle},$$

$$Z_{xy} = \frac{\langle E_x H_x^* \rangle \langle H_x H_y^* \rangle - \langle E_x H_y^* \rangle \langle H_x H_x^* \rangle}{\langle H_y H_x^* \rangle \langle H_x H_y^* \rangle - \langle H_y H_y^* \rangle \langle H_x H_x^* \rangle},$$

$$Z_{yx} = \frac{\langle E_y H_x^* \rangle \langle H_y H_y^* \rangle - \langle E_y H_y^* \rangle \langle H_x H_x^* \rangle}{\langle H_x H_x^* \rangle \langle H_y H_y^* \rangle - \langle H_x H_y^* \rangle \langle H_y H_x^* \rangle},$$

$$Z_{yy} = \frac{\langle E_y H_x^* \rangle \langle H_x H_y^* \rangle - \langle E_y H_y^* \rangle \langle H_x H_x^* \rangle}{\langle H_y H_x^* \rangle \langle H_x H_y^* \rangle - \langle H_y H_y^* \rangle \langle H_x H_x^* \rangle}.$$

El tensor de impedancia se representa generalmente como resistividad aparente (ρ_{ij}) y fases (ϕ_{ij}) que dependen de la frecuencia, que se calculan mediante las siguientes relaciones:

$$\rho_{aij}(\omega) = \frac{1}{\mu_0 \omega} |Z_{ij}(\omega)|^2, \qquad (2.13)$$

$$\phi_{ij} = tan^{-1} \left(\frac{Im Z_{ij}(\omega)}{Re Z_{ij}(\omega)} \right). \tag{2.14}$$

Cabe destacar que la resitividad aparente está fundamentalmente ligada a la relación entre los distintos componentes del campo EM. En este sentido, la amplitud de la onda electromagnética incidente no afecta directamente a los resultados, en otras palabras, la magnitud de la onda electromagnética incidente no tiene ningún efecto directo sobre la resistividad aparente; sin embargo, es importante señalar que si la energía de la onda incidente es menor, la relación señal-ruido se reducirá, este aspecto puede conducir a una propagación de errores más significativa en la determinación del tensor de impedancia.

2.5. Dimensionalidad Geoléctrica

La complejidad del tensor de impedancias depende de la distribución espacial de las estructuras geoeléctricas subterráneas, esta distribución espacial, o dimensión geoeléctrica, puede ser 1D, 2D o 3D, como se puede observar en la Fig. (2.3). Vale la pena señalar que esta dimensión depende de la escala y, a medida que aumenta la complejidad estructural, las simplificaciones aceptadas en los casos unidimensionales y bidimensionales dejan de ser válidas; por lo tanto, pequeñas faltas de homogeneidad (objetos locales 3D) ubicadas cerca de la superficie pueden causar perturbaciones en la respuesta del magnetotelúricas.

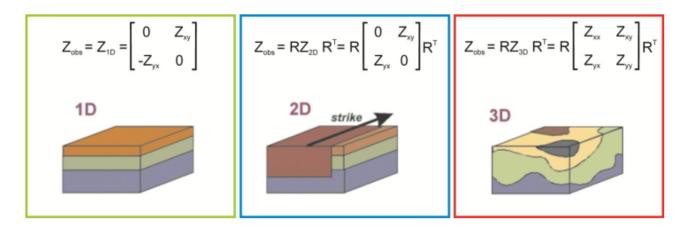


Figura 2.3: Tensor de impedancias en función de la dimensionalidad de las estructuras. R es la matriz de rotación y R^T su transpuesta

2.5.1. Medios unidimensionales (1D)

Para el caso unidimensional (1D) con resistividad que varía solo con la profundidad, los componentes diagonales del tensor de resistividad (Z_{xx} y Z_{yy}) son iguales a 0, mientras que los componentes antidiagonales (Z_{xy} y Z_{yx}) tienen la misma amplitud pero signos opuestos porque no hay cambio lateral en la resistencia. Por tanto, el tensor de resistividad para un caso unidimensional es:

$$Z_{1D} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ -Z_{xy} & 0 \end{bmatrix}.$$
 (2.15)

En el caso especial de un medio uniforme, las partes real e imaginaria de los elementos del tensor de impedancia tienen la misma amplitud, por lo que la fase será igual a 45°. Una fase mayor a 45° indica una disminución de la resistividad con la profundidad, mientras que una fase menor a 45° indica un aumento de la resistividad con la profundidad.

2.5.2. Medios bidimensionales (2D)

En el caso bidimensional ideal, la conductividad es constante en una dirección horizontal dada y cambia sólo en la dirección vertical y en otras direcciones horizontales. La dirección en la que la conductividad permanece constante se llama strike/rumbo o strike/rumbo geoeléctrico.

En el caso de la Fig. (2.4), los campos eléctrico y magnético son ortogonales entre sí, y el campo eléctrico paralelo al strike (E_x) , inducirá un campo magnético sólo en un plano vertical perpendicular al strike (H_y, H_z) ; y un campo magnético (H_x) paralelo al strike solo inducirá un

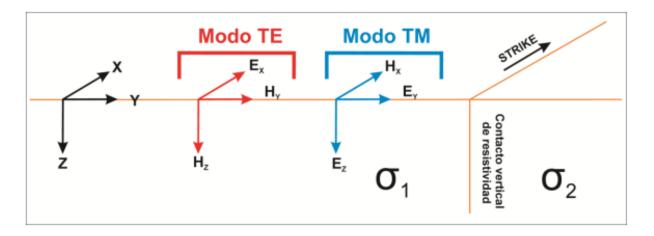


Figura 2.4: Modelado 2-D simplificado compuesto por dos cuerpos con diferentes conductividades ρ_1 y ρ_2 .

campo eléctrico (E_y, E_z) en el plano vertical perpendicular al strike. De esta forma, el tensor de impedancia se puede dividir en dos modos independientes:

- 1. **Modo TE** (Modo Transversal Eléctrico): Describe las corrientes que circulan paralelas a la dirección al strike.
- 2. **Modo TM** (Modo Transversal Magnético): Describe las corrientes que circulan en la dirección perpendicular al strike

. En este caso 2-D ideal, las componentes eléctricas del tensor de impedancias están relacionadas solo con sus ortogonales magnéticas (y viceversa), de manera que el tensor de impedancias en la dirección del strike queda simplificado, siendo los elementos de la diagonal iguales a cero. Debido a las variaciones laterales de conductividad, las componentes de la anti-diagonal (Z_{xy} y Z_{yx}) son diferentes entre sí y representan a los modos TE y TM.

$$Z_{2D} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{TE} \\ Z_{TM} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Esta simplificación sólo es válida si los ejes de medición del campo eléctrico y magnético están orientados respectivamente paralelo y perpendicular a la dirección del strike. De lo contrario, los elementos diagonales del tensor de impedancia no serán nulos, por lo que los modos TE y TM son indistinguibles en el tensor. Sin embargo, el eje de medición se puede girar determinando el ángulo θ (ángulo de incidencia) donde la componente diagonal del tensor de impedancias es igual a cero, esto se hace con la siguiente operación:

$$Z_{2D} = R_{\theta} Z_{obs} R_{\theta}^T, \tag{2.17}$$

donde, R_{θ} es la matriz de rotación y R_{θ}^{T} su transpuesta

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \qquad R_{\theta}^{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, al rotar el tensor de impedancia, los modos TE y TM se pueden definir de la misma manera.

Para los casos 2D y 3D, a diferencia del entorno 1D, la resistividad varía tanto en profundidad como lateralmente. Enfatizamos anteriormente que la dimensión depende de la escala, por lo que la diferencia entre un entorno bidimensional y un entorno tridimensional dependerá de la longitud (L) de la anomalía (si la misma tiene una longitud similar en cada dirección, es 3D, pero si una de las direcciones presenta una longitud significativamente mayor que las otras dos, entonces es un problema 2D, porque los cambios de resistividad se tendrán que estudiar en distintas escalas) y la profundidad de penetración correspondiente a los períodos deseados δ . Si la relación L/δ es mayor que 1, la aproximación bidimensional será cierta para una estructura de longitud L (Ledo, 2006). Por el contrario, si la relación es menor que 1, ya sea porque la unidad de medida es pequeña o porque el período de interés es muy grande, la aproximación bidimensional será incorrecta y se requerirá una interpretación tridimensional.

La Fig. (2.5) muestra un pequeño cuerpo superficial de resistividad ρ_2 en un medio de resistividad ρ_1 . Dependiendo de la longitud de penetración, y por lo tanto del periodo, las respuestas magnetotelúricas serán 1D, 2D o 3D, pudiendo aparecer a periodos altos el efecto de distorsión galvánica.

2.5.3. Medios tridimensionales (3D)

En el caso tridimensional, 3D, la conductividad eléctrica varía en todas las direcciones, y el tensor de impedancia toma la forma

$$Z_{3D} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix}.$$

En este caso, las cuatro componentes del tensor de impedancia son no nulas. Se consideran entonces cuatro resistividades aparentes y cuatro fases.

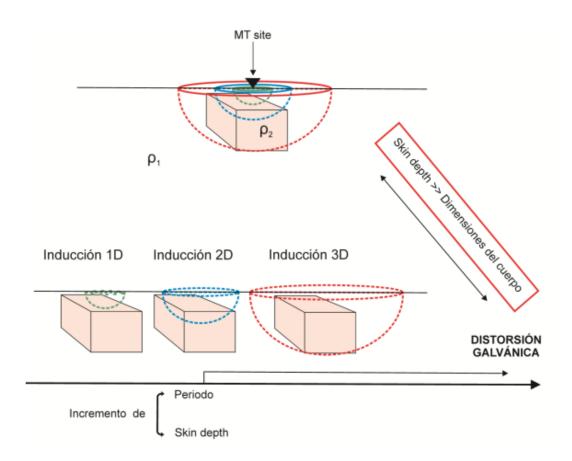


Figura 2.5: Dependencia de la dimensionalidad con la escala

2.6. Efectos de Distorsión

Los problemas de distorsión de la MT a menudo son causados por la presencia de pequeñas estructuras locales de menor tamaño que la estructura de interés y la profundidad de penetración que afectan el campo eléctrico regional. Estos objetos inducen cargas que perturban la respuesta electromagnética de la Tierra, ocultando parte de la estructura regional e impidiendo así que se resuelva adecuadamente durante la inversión.

Berdichevski et al. (1973) definieron la distorsión en dos clases de efectos: efectos galvánicos y efectos inductivos; los últimos pueden ignorarse en el caso de la MT. Asumamos el supuesto inicial de la aproximación cuasiestática ($\sigma = \epsilon/T$) (Berdichevskii y Dmitriev. 1976a). El efecto galvánico (distorsión galvánica) se produce por la acumulación de carga en zonas de fuerte contraste de resistencia, por ejemplo, al encontrar la roca huésped con pequeños objetos superficiales. Estas cargas crean campos electromagnéticos inusuales que afectan los campos eléctricos y magnéticos, el campo magnético anómalo es muy pequeño, entonces, puede considerarse despreciable, mientras que el campo eléctrico es de la misma magnitud que el campo del área registrada o principal (Bahr. 1988; Jiracek. 1990). por lo que entonces, se supone que la distorsión de la

corriente se debe a su presencia.

Bajo la influencia de la impedancia actual, el tensor de resistencia bidimensional será:

$$Z_{obs}(\theta) = R(\theta) \cdot C \cdot Z_0 \cdot R^T(\theta), \tag{2.18}$$

donde, θ es el ángulo entre el sistema de coordenadas de medición y la dirección de la estructura bidimensional regional, Z_{obs} es el tensor de impedancia observado afectado por la distorsión actual, C es el tensor de distorsión (real e independiente de la frecuencia), Z_0 es el tensor de impedancia de la región libre de distorsión y R es la matriz de rotación. El efecto de la distorsión eléctrica depende de las dimensiones de la estructura del dominio. Para estructuras de dominio unidimensionales y bidimensionales, esta distorsión se denomina desplazamiento estático (static shift) y produce un desplazamiento constante en la curva de resistivdad aparente en todas las frecuencias sin afectar la fase, veasé Fig. (2.6), panel superior; sin embargo, para estructuras tridimensionales y bidimensionales donde el tensor de impedancia gira un ángulo con respecto al strike, la distorsión tendrá diferentes efectos sobre la impedancia y la fase dependiendo de la frecuencia.

El término "static shift" generalmente se refiere a deformaciones a pequeña escala, es decir, corresponde a una subclase de deformaciones galvánicas locales que surgen debido a la presencia de pequeñas heterogeneidades superficiales tridimensionales, como se ve en la Fig. (2.6). Como ejemplo de distorsiones de corriente a gran escala (efectos regionales que distorsionan campos locales), utilizamos los llamados canales de corriente (current channeling), en este caso la distorsión es causada por la presencia de conductores eléctricos, que afectan el campo eléctrico en el área (ver Jones.1983b para más detalles).

Por otro lado Jiracek (1990) demostró que además de anomalías resistivas o conductivas, la presencia de una topografía significativa puede causar perturbaciones en la corriente, esta es la llamada distorsión galvánica topográfica. Esto ocurre cuando el campo eléctrico principal es normal a la superficie terrestre, cuyos resultados se muestran en la Fig. (2.6). En medios 2-D, tales distorsiones afectan los estados de la MT (Miensopust 2010).

Existen varios métodos para corregir el efecto de la distorsión actual en estructuras unidimensionales y bidimensionales (Zhang et al., 1987; Bahr 1988; Groom y Bailey, 1989; Jiracek. 1990). No obstante, no existe una solución numérica para el caso específico del desplazamiento estático, por lo que es necesario utilizar información adicional para corregirlo. Algunos métodos sugeridos para minimizar estas distorsiones se pueden encontrar en (Jones 1988; Ledo et al. 2002).

En la imagen Fig. (2.6), en la columna de la izquierda estan representadas las estructuras que generan la distorsión, a derecha, los efectos que aparecen en la curvas de resistividad aparante y fase asociados todos a medios 2-D

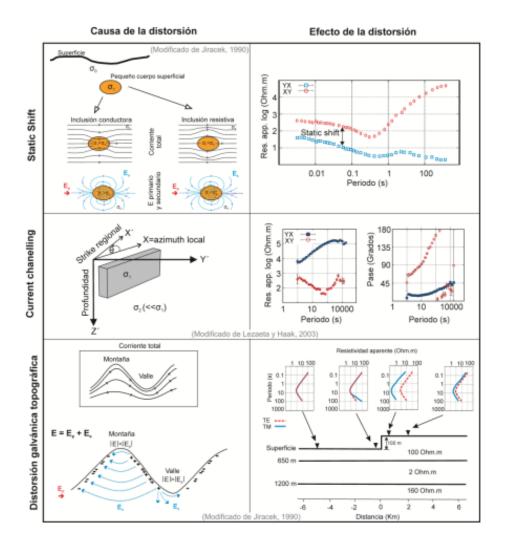


Figura 2.6: Resumen de los tipos de distorsión galvánica más comunes

2.7. Modelado de los datos MT

El Modular System for Electromagnetic inversion, conocido como ModEM, es una herramienta crucial en la geofísica aplicada, específicamente en la inversión electromagnética para el estudio de las propiedades subsuperficiales de la Tierra, ergo, proporciona a los investigadores la capacidad de visualizar y caracterizar las estructuras subsuperficiales mediante la interpretación de datos electromagnéticos (Kelbert et al., 2014). ModEM se destaca por su capacidad para realizar modelado directo y se basa en el método de Diferencias Finitas para abordar problemas electromagnéticos complejos. El método de diferencias finitas en ModEM se implementa de la siguiente manera:

Discretización del Espacio: se divide la región de estudio en una malla tridimensional (bidimensionales solamente en este trabajo) discreta, permitiendo la aproximación de derivadas parciales mediante diferencias finitas. Esta discretización facilita la representación numérica

de las propiedades electromagnéticas del subsuelo.

- Aproximación de Derivadas: las variaciones en las propiedades electromagnéticas se calculan en cada punto de la malla en función de las diferencias entre los valores en los nodos adyacentes. Este enfoque numérico permite simular la variación continua de las propiedades en la región estudiada
- Ecuaciones del Método de Diferencias Finitas: se generan ecuaciones algebraicas que describen la relación entre los campos electromagnéticos en puntos discretos de la malla. Estas ecuaciones representan una aproximación numérica de las ecuaciones diferenciales originales.
- Resolución Numérica: se aplican métodos numéricos para resolver las ecuaciones algebraicas resultantes del sistema discretizado. Esto implica el cálculo de los campos electromagnéticos en cada nodo de la malla, proporcionando la respuesta completa del modelo.

Para la entrada de datos, se requieren dos archivos de texto, 1) con los datos cuyos encabezados estan dados para el Cuadro (2.1), donde Period es el periodo a utilizar, Code es el número de estación, Long y Lat es por si se desea trabajar con Latitud y Longitud (opcional), X,Y,Z las posiciones de la estación TE/TM es el tipo de componente MT calculada y Real e Img las componentes Real e Imaginaria para las mismas. En nuestro trabajo todos los valores X y Z son 0.0, la unica que se varió fue Y, ya que el problema es 2D y todos las estaciones se colocaron en superficie. 2) otro con las dimensiones de la malla, el tamaño de cada elemento de la grilla y por último el valor de resistividad para cada celda. Se adjunta ejemplos de ambos archivos de texto, del primero en el Cuadro (2.1) y del segundo en las Figs. (2.7) y (2.8).

Period	Code	Long	Lat	X(m)	Y(m)	Z(m)	TE/TM	Real	Img	
--------	------	------	-----	------	------	------	-------	------	-----	--

Cuadro 2.1: Encabezados del archivo de datos

```
# Period(s) Code GG_Lat GG_Lon X(m) Y(m) Z(m) Component Real Imag Error -----> Encabezados

        exp(+i)cmega t)
        Componentión de signo asumida para el procesamiento de datos (En este caso +)

        [V/m]/[T]
        Unidades (esta es la que usa ModEM)

    1.0000e-04 001
                             0.000
                                              0.000 2.000000e+04
1.6681e-04 001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000 2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE 0 0 2.000000E+15
2.7826e-04 001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
4.6416e-04 001
                             0 000
                                    0 000
                                              0 000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0 000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
7.7426e-04 001
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                               0 0 2.000000E+15
                             0.000
                                                                           TE
1.2915e-03 001
2.1544e-03 001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
3.5938e-03
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                               0 0 2.000000E+15
5.9948e-03 001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
1.0000e-02
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
1.6681e-02
         001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
2.7826e-02
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
4.6416e-02
7.7426e-02
         001
001
                            0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                                   0.000
                                                                           TE
TE
                                                   2.000000e+04
                                                                               0 0 2.000000E+15
                                                                               0 0 2.000000E+15
                                                   2.000000e+04
1.2915e-01
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                            TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TF 0 0 2.000000F+15
2.1544e-01 001
                             0.000
3.5938e-01
                                    0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
5.9948e-01 001
                             0.000
                                    0.000
                                              0.000
                                                   2.000000e+04
                                                                   0.000
                                                                           TE
                                                                               0 0 2.000000E+15
```

Figura 2.7: Estructura de los datos de estaciones y periodos

Figura 2.8: Estructura de los datos del modelo

Capítulo 3

Estudio de casos 2D

En este capítulo, se tratarán modelos 2D isotrópicos, homogéneos y heterogéneos, con variaciones de resistividad en los mismos para testear la sensibilidad del ModEM, observar el efecto que generan en la acumulación de cargas tanto para la TE como para la TM y sus distintos comportamientos

A medida que avancemos en este capítulo, se revelarán las conexiones y aplicaciones prácticas con modelos más complejos, tratando de simular escenarios reales.

3.1. Capas Horizontales

3.1.1. Una Capa con sustrato resistivo

Primero estudiaremos un modelo de una capa y un semiespacio horizontal homogéneo, ilustrado en la Fig. (3.1), con distintos contraste de conductividad. El modelo tiene una primera capa de resistividad 10 Ω m y el semiespacio 100 Ω m.

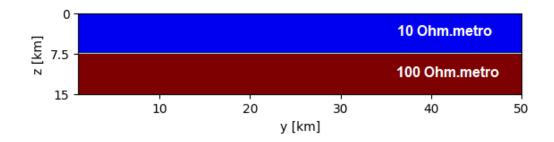


Figura 3.1: Modelo de capas horizontales

En esta sección se va a trabajar con este modelo variando el espesor de la capa para poder

ver el efecto de la longitud de penetración; las variantes serán llamadas A, B y C. La variante A tiene un espesor fijo de 7500 m; en la B se duplica este espesor y en el C se divide a la mitad.

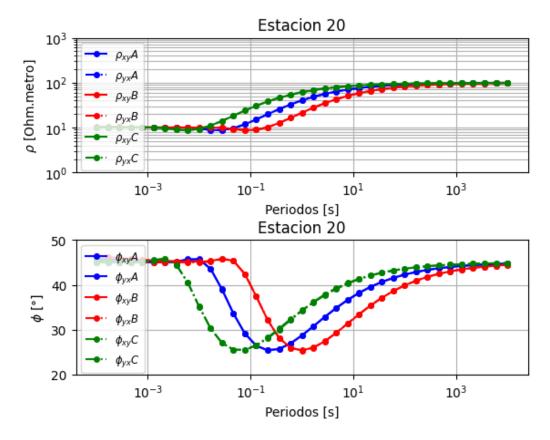


Figura 3.2: Resistividad aparente y fase para el caso de una capa con resistividad 10 Ωm y semiespacio 100 Ωm

Para las tres variantes el comportamiento es similar, particularmente para los periodos más bajos y los más altos. En el caso de los periodos más bajos, tiene como valor asintótico a ρ_1 debido a que la longitud de penetración es baja. Por ello las corrientes están concentradas cerca de la superficie, obteniéndose solo información de la primera capa.

A medida que se avanza a las frecuencias medias, comienza a sumarse información del semiespacio, primero para el modelo C, luego el A y por último el B, lo cual es lógico, ya que está ordenado de menor a mayor espesor y cuanto menor espesor tenga la primera capa, el segundo medio -en este caso un semiespacio- contribuirá en mayor medida a la respuesta observada.

Finalmente, para periodos altos, la capa superior se vuelve transparente y la impedancia se torna igual a la del semiespacio resistivo ρ_2 .

Para la fase, los cambios de comportamientos son análogos al del módulo de la resistividad aparente; analicemos los valores que toma. Primero comienza en 45° (TE y TM iguales) ya que no hay ningún cambio de resistividad presente al no tener suficiente longitud de penetración para llegar al semiespacio, luego como pasa a un medio de mayor resistividad, la fase cae para luego volver a 45° pero esta vez esta asociado a los valores del semiespacio.

3.1.2. Capas Horizontales: Semiespacio conductivo

Ahora veremos el caso contrario, en el que la capa es mas resistiva que el semiespacio, como se puede ver en la Fig. (3.3).

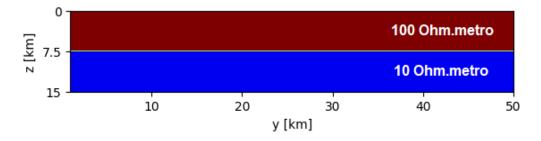


Figura 3.3: Modelo de una capa y semiespacio conductivo

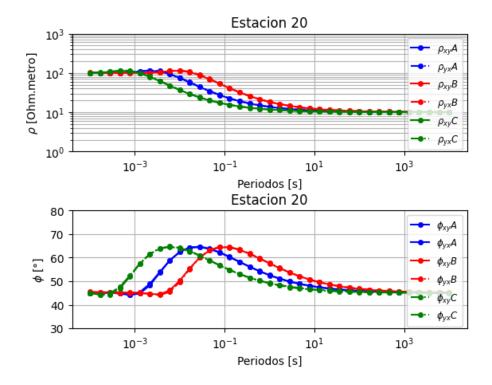


Figura 3.4: Resistividad aparente y fase para el caso de una capa con resistividad 100 Ωm y semiespacio 10 Ωm

Para este caso el comportamiento es similar al caso anterior, pero la resistividad aparente va a disminuir a medida que el periodo es más alto y luego se volverá a estabilizar en el valor de ρ_2 . Y para la fase en vez de disminuir, aumenta.

3.1.3. Una Capa y semiespacio conductor "perfecto"

Veamos ahora los casos mas extremos, comenzando por el semiespacio conductivo con una resistividad de $10^{-6}~\Omega m$ y la capa $100~\Omega m$

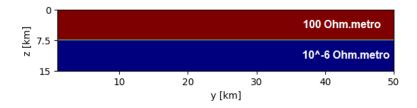


Figura 3.5: Modelo de una capa y semiespacio conductor perfecto

Observando la resistividad aparente Fig. en la (3.6) se ve claramente, que aunque se varíe el espesor, el comportamiento es similar pero ahora la diferencia con respecto a los modelos anteriores es que el contraste de resistividades es tan alto que la impedancia y por ende la resistividad aparente del segundo medio, se puede aproximar al comportamiento de una recta con pendiente negativa que es proporcional al espesor (H_1) de la capa al cuadrado, lo cual coincide con que para un mismo periodo, el valor de la resistividad se ordena como el de los distintos espesores.

Para la fase, lo que termina sucediendo es justamente que la parte imaginaria termina siendo mucho más grande que la real, tendiendo entonces a 90° la fase de la resistividad aparente a medida de que se va a periodos más grandes (Vale aclarar que para periodos mas grandes, ya que el semiespacio no tiene conductividad infinita, la fase debería tender a 45° nuevamente como se ha visto anteriormente).

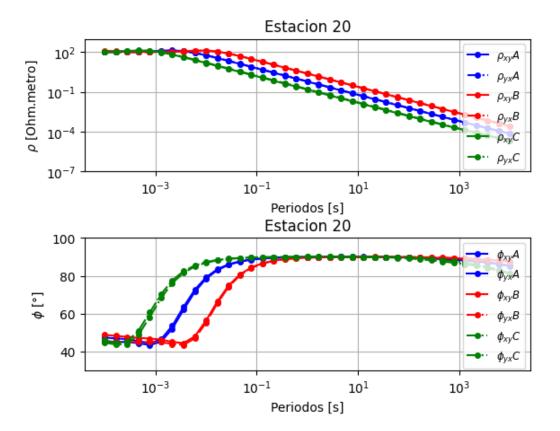


Figura 3.6: Resistividad aparente y fase para modelo de una capa y semiespacio conductivo perfecto

3.1.4. Una Capa y semiespacio aislante "perfecto"

Por último el otro caso extremo, con el semiespacio resistivo con una resistividad de $10^8~\Omega m$ y la capa $100~\Omega m$.

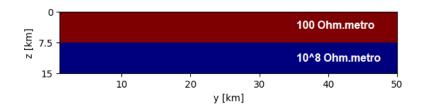


Figura 3.7: Modelo de capa y semiespacio aislante perfecto

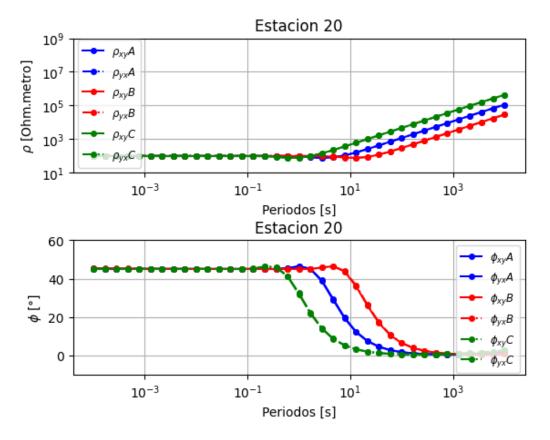


Figura 3.8: Resistividad aparente y fase para modelo de una capa y semiespacio aislante perfecto

Este caso es el reciproco del anterior pero ahora la resistividad aparente se puede aproximar al comportamiento de una recta con pendiente positiva que es inversamente proporcional al cuadrado de la conductancia de la capa $S_1 = \sigma_1 H_1$ y por consiguiente al espesor, Por lo tanto para un mismo periodo la resistividad aparente se ordena al revés al revés del caso anterior.

Para la fase se tiene que la parte real es mucho más grande que la imaginaria y por eso no hay una diferencia de fase considerable entre el campo eléctrico y el magnético, como se observa en el gráfico que tiende a cero a periodos altos.

3.2. Capas verticales

En esta sección se analizará un modelo con contraste horizontal de resistividad y un contacto vertical; no tendremos en cuenta el espesor, ya que trabajaremos con dos cuartos de espacio, pero si tendremos tres variantes para este modelo con la misma nomenclatura que la sección pasada pero en este caso con respecto al contraste de conductividades. Se analizó estos casos de contraste porque en la zona del contacto se espera un cambio de resistividad que depende únicamente del contraste entre las resistividades de los cuerpos. La variante $\bf A$ tiene 10^2 de contraste de resistividad, B 10^3 y C 10. Además como existe un contraste lateral, las componentes TE y TM no serán iguales como el caso pasado, así que se estudiarán individualmente para tres periodos

distintos 0.01 s, 1 s, 100 s.

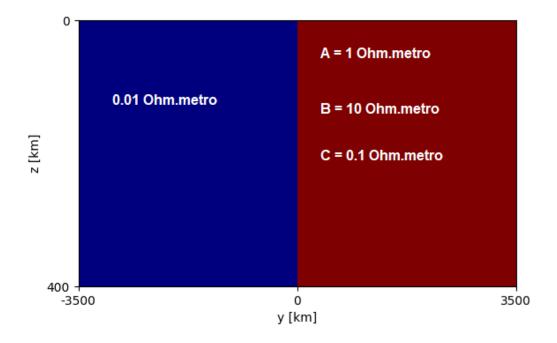


Figura 3.9: Modelo de cuartos de espacios y variantes

3.2.1. Modo TE: análisis respecto de las estaciones

Para este modo el campo eléctrico esta dirigido paralelamente al contacto y como no intersecta la interfase, es continuo y no hay acumulación de cargas, entonces no hay aporte galvánico a este proceso. Las corrientes de conducción no son continuas en la interfase, entonces generan un campo magnético con componentes H_y y H_z , que contribuirán al campo eléctrico total E_x (hacia adentro de la pantalla en este caso) a medida de que este más cerca del contacto. Vale aclarar que estos campos secundarios son de origen inductivo.

Para periodos muy cortos, se puede ver en la Fig. (3.10), el efecto del campo de inducción secundario no afecta considerablemente hasta que se llega a las puntos adyacentes al contacto, ubicado en el origen del eje de las abscisas, en donde se ve la transición claramente. Para T=1 s en la Fig. (3.11), el efecto de la longitud de penetración se puede observar en la zona de transición que se ensancha respecto del periodo anterior y llega a su asíntota derecha con menor rapidez. Finalmente para T=100 s en la Fig. (3.12) se observa una zona de transición mucho más grande y lenta para el mismo arreglo de receptores y la asíntota derecha se encuentra para estaciones más lejanas que en los periodos previos. En síntesis, los cambios en los contraste de resistividad y el efecto de la variación de la densidad de corriente hacen que la transición se ensanche mucho más, teniendo que extender más el dominio de las estaciones si se busca observar la asíntota derecha para el caso de mayor diferencia de conductividades.

Para las fases se observa una caída al acercarnos al contacto asociada al aumento de la

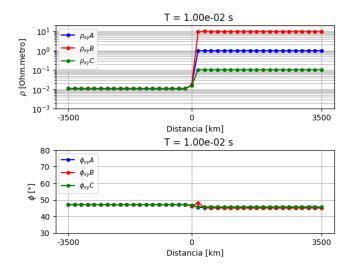


Figura 3.10: Resistividad aparente y fase para el modo TE, para $T=0.01~\mathrm{s}$

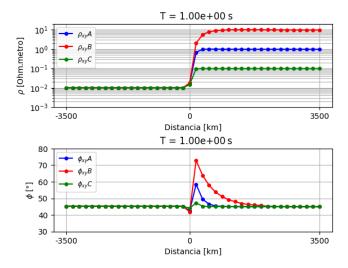


Figura 3.11: Resistividad aparente y fase para el modo TE, para T=1 s

densidad de carga por izquierda, en cambio por derecha ocurre un incremento debido al aumento de esta densidad de carga. Además se puede notar que para los tres modelos, la magnitud del salto es proporcional al contraste, siendo el modelo B el que presenta la variación mas grande.

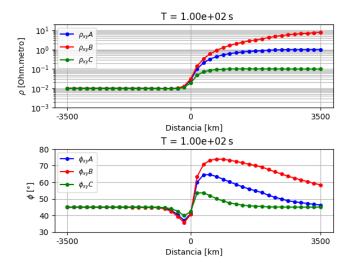


Figura 3.12: Resistividad aparente y fase para el modo TE, para T = 100 s

3.2.2. Modo TM: análisis respecto de las estaciones

Para este caso el campo magnético esta dirigido a lo largo del contacto, por lo que se analizan E_y y H_x .

Lo más relevante es que se genera una acumulación de cargas en el contacto y por ende hay un campo eléctrico secundario que se opone al primario generado por la variación temporal de H_x . Esta acumulación de cargas permite que la corriente sea continua y el que se vea alterado sea el campo eléctrico.

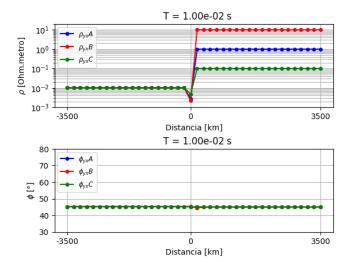


Figura 3.13: Resistividad aparente y fase para el modo TM, para T = 0.01 s

En principio se ve claramente la discontinuidad o salto en esta componente debido a que el campo eléctrico en este modo es discontinuo y la densidad de corriente es continua, pero algo que destaca en el gráfico es la disminución de la resistividad debido al campo secundario generado por la acumulación de cargas en la discontinuidad. Luego para periodos más altos Figs. (3.14)

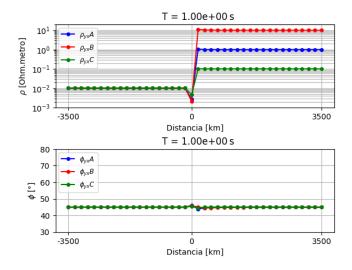


Figura 3.14: Resistividad aparente y fase para el modo TM, para T=1 s

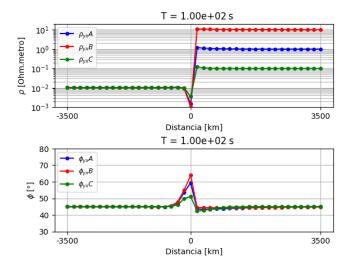


Figura 3.15: Resistividad aparente y fase para el modo TM, para T = 100 s

y 3.15), la forma de la respuesta es idéntica pero con un detalle, cuanto mayor sea el periodo, mayor será la caída en la resistividad como se puede ver en la curva roja, asociada a la variante **B**, respecto de las otras dos.

Para la fase de los dos primeros periodos no existe una variación apreciable. Para el mayor periodo, se observa un aumento debido a la acumulación de cargas, que responde a la disminución de la resistividad al lado izquierdo del contacto, que como bien se dijo antes para la curva roja es mayor.

3.2.3. Modo TE: análisis respecto de los periodos

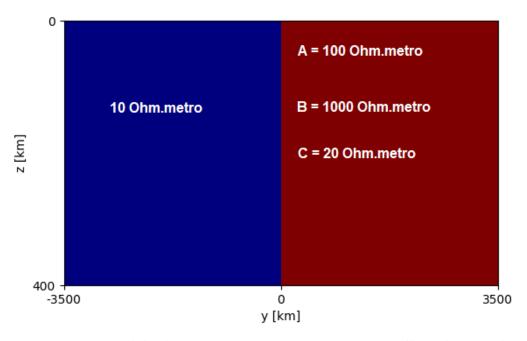


Figura 3.16: Modelo de semiespacios y variantes para análisis de periodos

Es importante ver ambos modos por estación para poder ver el efecto de los campos secundarios y de la longitud de penetración. Comenzando por la TE, trabajaremos con 4 estaciones en el modelo de la Fig. (3.16) y cabe destacar que los valores de resistividad de los cuartos de espacio, son distintos respecto del de la Fig. (3.9). Las estaciones a utilizar son:

- Estación 1: a $x < -2\delta_{max}$ del contacto, siendo δ_{max} la longitud de penetración de la variante de mayor magnitud
- Estación 19: a -10m del contacto
- Estación 20: a +10m del contacto
- Estación 40: a $x > 2\delta$ del contacto

Viendo el conjunto de figuras Fig. (3.17) claramente para la primera estación no hay ningún cambio en la resistividad aparente ya que la distancia a la discontinuidad es mayor a dos veces la longitud de penetración, lo mismo para la estación #40 pero ahora cada caso con su resistividad aparente asociada.

Para la estación a izquierda del contacto #19 se puede ver como a medida de que aumenta el periodo, la resistividad aumenta como efecto del campo eléctrico secundario, ya que a mayor longitud de penetración más penetra en todas las direcciones asociadas, si quisiéramos ver el efecto a menores periodos, se tiene que posicionar la estación más cerca todavía del contacto.

Para la estación a la derecha del contacto #20, vemos lo mismo pero con magnitudes inversas, es decir, a periodos cortos ya alcanzó el valor de resistividad del medio pero para periodos más grandes la resistividad disminuye en modulo ya que el semiespacio de la izquierda es de menor magnitud.

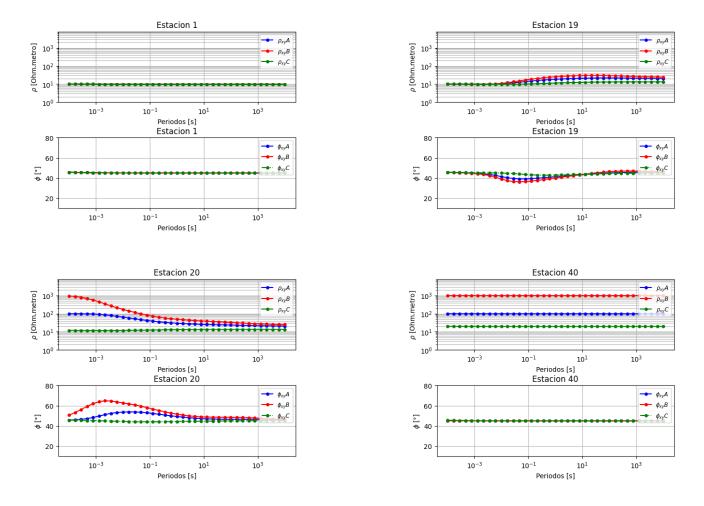


Figura 3.17: Resistividad aparente y fase para el modo TE en distintas estaciones

3.2.4. Modo TM: análisis respecto de los periodos

Para las estaciones lejanas #1 y #40, el comportamiento de la resistividad aparente se mantiene igual al modo TE, lo cual es lógico porque sigue estando a más de dos longitudes de penetración. Para la estación de la izquierda #19 vemos un efecto similar pero ahora en vez de aumentar la resistividad, disminuye de manera proporcional a la concentración de cargas, cuanto mayor sea el contraste de resistivad entre los cuartos de espacio, más grande sera su caída.

Para la estación de la derecha #20 el efecto de la concentración de cargas ya no es de gran importancia y se ve en gran parte homogeneizado para todos los casos.

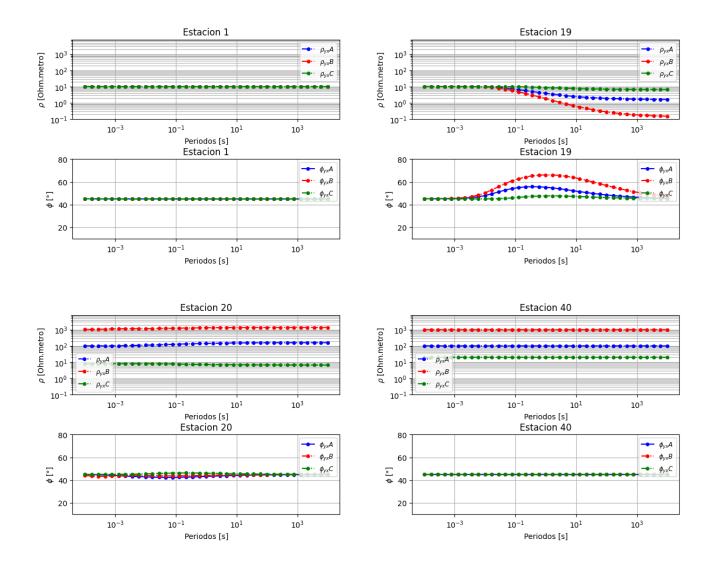


Figura 3.18: Resistividad aparente y fase para el modo TM en distintas estaciones

3.3. Dique resistivo

Un caso particular a analizar es el comportamiento de las respuestas a la acción de una onda plana generada por un dique. Se usará las mismas variantes previamente utilizadas.

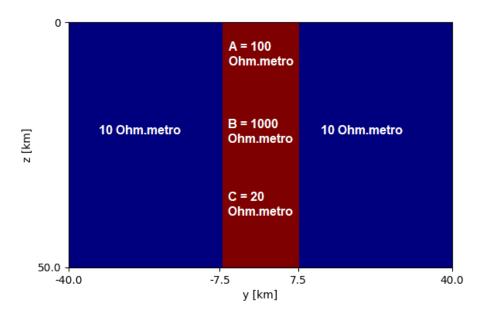


Figura 3.19: Modelo de dique

3.3.1. Modo TE

Para el modo TE el campo electromagnético está definido por la interacción de corrientes, la transición de la resistividad es continua y el detalle más importante es la relación $\frac{T}{l}$, siendo l la longitud horizontal del dique -en este caso de 15km-, y T el periodo de la onda que examinaremos a continuación.

Para el periodo mas pequeño en la Fig. (3.20), las tres variantes representan el resultado esperado de la adquisición, de manera que la resistividad aparente aumenta hasta los valores del dique de manera continua y luego vuelve a caer al salir del mismo. Luego para el periodo intermedio 1 s, ya la variante \mathbf{B} muestra qué sucede si la relación $\frac{T}{l}$ se hace más grande, esto es que la resistividad aparente disminuye y no muestra el valor verdadero del dique y pasa de igual manera si vamos al periodo más alto 100 s, que muestra como la variante \mathbf{A} y \mathbf{B} no llegan a sus valores reales y disminuyen considerablemente casi hasta el valor de la variante \mathbf{C} .

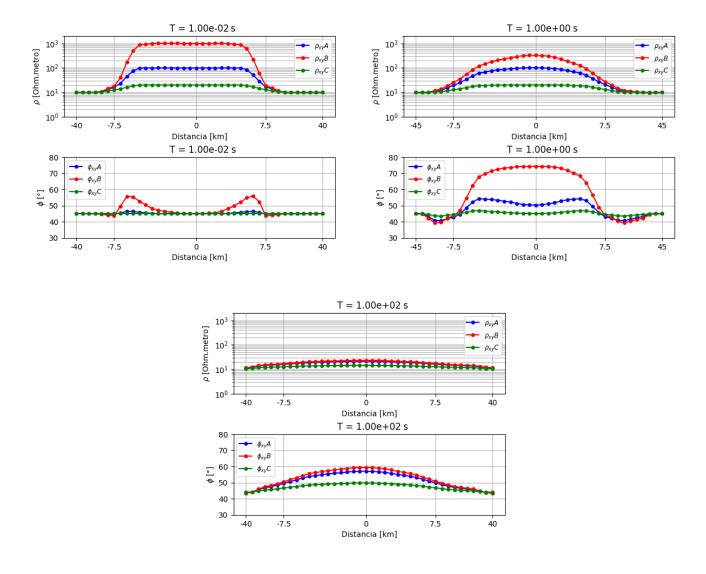


Figura 3.20: Resistividad aparente y fase para el modo TE en el dique

3.3.2. Modo TM

Para este modo, prevalece el aporte del campo generado por la acumulación de cargas. Se observa un cambio abrupto en la resistividad a ambos lados del dique que a medida que aumenta el período o la relación $\frac{T}{l}$, este efecto se hace más evidente. Por ejemplo, para un período más largo T=100 s, la variación $\bf B$ alcanza valores de 2000 Ω m a la derecha del dique, y valores de 0,5 Ω m a la izquierda. Los otros períodos muestran cambios menos abruptos pero comportamientos similares. En resumen, para períodos altos, la anomalía es formidable e independiente de la frecuencia utilizada. No obstante la velocidad a la que la respuesta decae, está dominada esencialmente por la longitud de penetración.

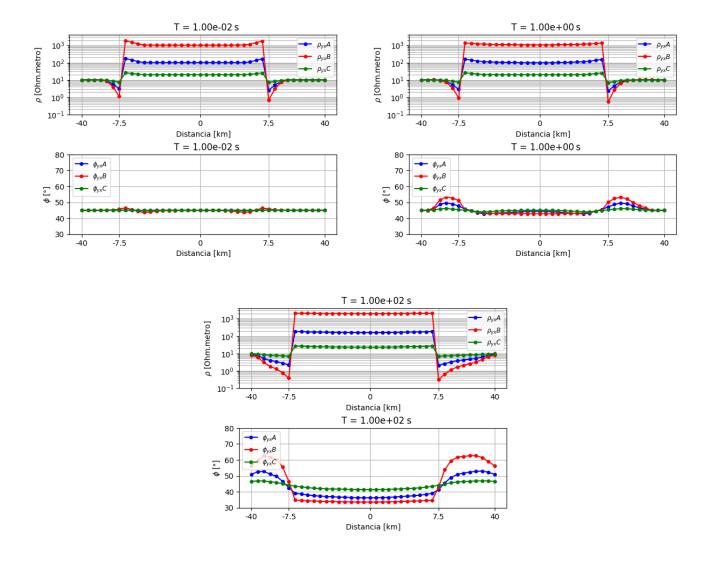


Figura 3.21: Resistividad aparente y fase para el modo TM en el dique

3.4. Modelos inhomogéneos

Se trabajó con la componente TE de dos modelos con inhomogeneidades, a continuación el primer modelo. se presenta en la Fig. (3.22).

Considerando un periodo de 10 s, analizamos la respuesta del modelo observándo la Fig. (3.23b) de izquierda a derecha. Se observa al inicio información únicamente de la capa y no del semiespacio, debido a que es un periodo relativamente pequeño y la longitud de penetración también lo será. Al acercarnos a los -22 km, aparece el efecto de la inhomogeneidad, pero sin alcanzar el valor real de la misma. Luego de los 0 km, el comportamiento es similar, aunque se observa la diferente contribución de la inhomogeneidad derecha respecto de la izquierda, debida a su menor longitud, tal como se discutió en el caso del dique.

Con 1000 s, el patrón es el mismo para las inhomogeneidades con la diferencia de que la onda

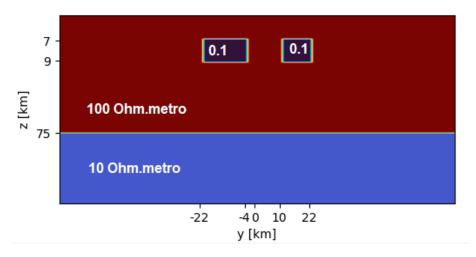


Figura 3.22: Modelo inhomogeneo #1

penetra más y la resistividad disminuye casi hasta el valor verdadero de la inhomogeneidad, pero en los extremos si aparece la contribución del semiespacio porque la longitud de penetración es mayor y permite obtener información del mismo, disminuyendo el valor total de la resistividad aparente.

Para las fases el comportamiento es análogo al de la resistividad aparente, pero para T=1000 s la concavidad se invierte respecto de T=10 s. Para T=1000 s, analizando de izquierda a derecha, comienza en un valor que ronda los 65° , lo que sugiere que se esta recolectando información del semiespacio, causando que la fase no inicie en 45° a diferencia del otro caso; a medida que nos desplazamos desde -80 km a -20 km, hay un decaimiento que puede ser debido a que al acercarnos a las inhomogeneidades hay una superposición de información de la onda al pasar por la capa y la inhomogeneidad, entonces al alcanzar el semiespacio la diferencia de resistividad es menor que cuando penetra por los extremos del modelo. En el rango [-20, -10] km alcanza su mínimo y de 10 km hasta 0 km aumenta al salir de la inhomogeneidad izquierda. De 0 km a 80 km se repite el mismo comportamiento que en el intervalo [-80, 0] km salvo la diferencia mencionada en el análisis de la resistividad aparente causada por la diferencia de longitud entre los bloques.

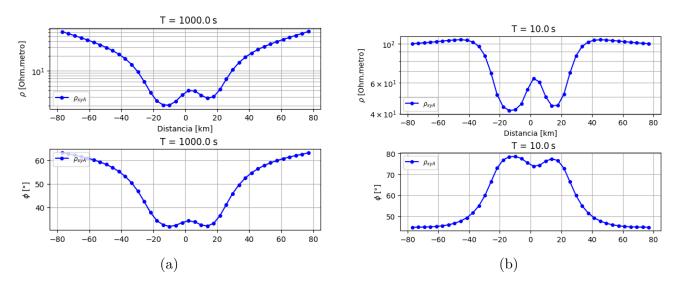


Figura 3.23: Resistividades TE para el primer caso inhomogeneo

En el siguiente escenario Fig. (3.24) se presenta el otro modelo inhomogéneo junto con una variante para estudiar con el mismo periodo 100 s en su modo TE.

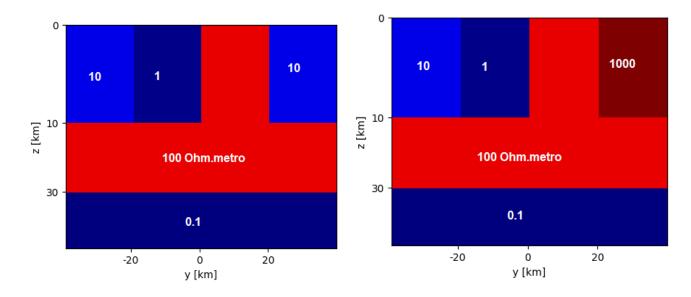
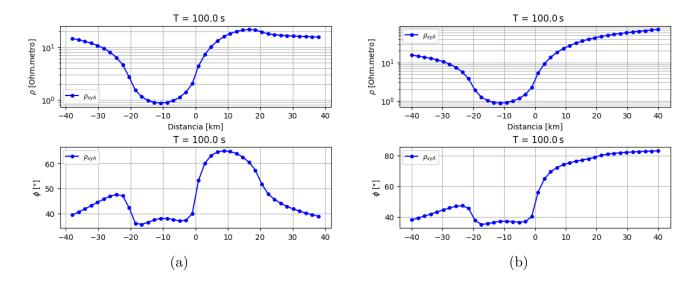


Figura 3.24: Modelo inhomogéneo #2



Para ambas respuestas el comportamiento desde el extremo izquierdo hasta los -10 km aproximadamente es idéntico. Analizando el caso para T=100 s, es evidente que la onda no penetra lo suficiente como para registrar mucha información de la capa de 100 Ω m y la de 0.1 Ω m en los primeros 50 km, es decir, en el intervalo [-40, 10] km. Luego de 10 km hasta el extremo derecho, se aprecia la diferencia de resistividad aparente entre ambos casos, para la Fig. (3.25a) comienza a disminuir hasta horizontalizarse en el valor de ese estrato en 10 Ω m y para la Fig. (3.25b) la respuesta tiene una tendencia positiva hacia valores más altos que 20 Ω m pero sin alcanzar todavía el valor de ese estrato de 1000 Ω m.

Respecto de la fase, ocurre una situación análoga a la de la resistividad aparente. En el intervalo [-40, 10] km son similares, con un aumento debido a la disminución de la resistividad, seguido de una caída al cambiar de resistividad en -20 km, que se mantiene asintoticamente en los 40° hasta los 0 km; a partir de esta posición hasta los 10 km, hay un aumento para ambos. Una vez pasada esta posición, en el escenario de la Fig. (3.25a) hay una disminución que busca volver a 45° y para la Fig. (3.25b) el cambio de resistividad aparente es tan abrupto que tiende a los 90°, simulando el caso de una capa conductora perfecta.

Capítulo 4

Aprendizaje no Supervisado, KMeans y SOM

El aprendizaje automático no supervisado es el proceso de inferir patrones ocultos subyacentes a partir de datos históricos (Naeem et al., 2023). El término «no supervisado» engloba todas las técnicas de clasificación que se basan únicamente en los datos de entrada y no están sesgadas por el resultado deseado (Coléou, 2003). Dentro de este enfoque, un modelo de aprendizaje automático intenta encontrar por sí mismo cualquier similitud, diferencia, patrón y estructura en los datos. No es necesaria la intervención humana previa. El aprendizaje no supervisado es un enfoque de aprendizaje automático sin datos etiquetados y se aplica en diversas tareas comunes a la sociedad actual, como: exploración de datos, segmentación de clientes, sistemas de recomendación, preparación y visualización de datos.

En el caso particular de la geofísica, existen trabajos en eliminación de ruidos y reconstrucción los datos sísmicos 3D simultáneamente utilizando un marco de aprendizaje profundo (DL) no supervisado (Saad et al., 2023); reconstrucción multidimensional del campo de ondas de trazas irregularmente pobladas definidas en una malla regular para sísmica marina (Greiner et al., 2022) y también para caracterizar la distribución de las facies sedimentarias con el uso conjunto de varios tipos de atributos sísmicos, en lugar de utilizar un único tipo de atributos sísmicos, para delinear mejor las estructuras de los yacimientos mediante el uso no supervisado (Zhao et al., 2024), entre otros casos.

El siguiente Cuadro (4.1) resume los conceptos claves de las técnicas de aprendizaje no supervisado.

Definición	El aprendizaje sin supervisión es el
	tipo de aprendizaje automático que
	ocurre sin supervisión humana. Una
	máquina trata de encontrar cualquier
	patrón en los datos por sí misma.
Datos de entrada	Sin etiqueta.
Uso de los datos	Sólo se dan variables de entrada a un
	modelo (X) y no hay datos de salida
	correspondientes.
Cuándo usar	Se desconoce las características del da-
	to.
Aplicable en	Problemas de agrupación y asociación.
Exactitud de los resultados	Puede proporcionar resultados menos
	precisos.
Algoritmos	K-Means.
	Modelos de mezcla gaussiana.
	Crecimiento de patrón frecuente (FP).
	Análisis de los componentes principa-
	les.
	Sistemas de recomendación.
	Detección de anomalías.
Casos de uso	Segmentación de los clientes
	Preparación de datos para los supervi-
	sados aprendizaje.

Cuadro 4.1: Tabla de aprendizaje sin supervisión

4.1. K-Means (K medias)

La técnica de agrupación KMeans se describió muy pronto en la literatura estadística (MacQueen, 1967). Su sencillez de implementación hace que a menudo sea seleccionada para el análisis estadístico multivariante. El objetivo del agrupamiento de K-means es identificar subnubes dentro de un crossplot (un gráfico utilizado para determinar la relación entre dos medidas diferentes) de N dimensiones. Su próposito no es reducir los datos, sino dividirlos en subconjuntos disjuntos; cada conglomerado es un subconjunto de los datos, separados del resto en base a la cercanía entre elementos del mismo. Para esto usalmente se utiliza la distancia euclídia normalizada, los pesos procedentes de la normalización de las muestras, o una métrica más generalizado como la de Minkowski (Coléou, 2003). La "K" de K-Means, representa el número de grupos que se cree que debería haber.

Para dar una breve idea del funcionamiento de la técnica, imaginemos el siguiente escenario: imagine que está en un congreso de exposición de coronas y muestras de roca con una variedad de las mismas que tiene que ordenar según su resistividad. Quiere organizarlas de forma que todas las rocas conductoras, semiconductoras y resistivas estén junto a las de su tipo. Piense

en K-Means como si colocara los primeros puestos de exposición de coronas (centroides) en el congreso, eligiendo al azar unos cuantos lugares de exposición para colocar estos puestos. El número de puestos que decida colocar es la "K"de K-Means, y este número depende de cuántos tipos de productos -en este caso rocas con distinta resistividad- diferentes (grupos) se consideran.

Una vez que todos los productos han encontrado un puesto, K-Means comprueba si los puestos están en los mejores lugares. Para ello, busca un nuevo lugar para cada puesto basándose en la posición media de todos los productos agrupados a su alrededor. Es similar a mover los puestos al centro exacto de cada grupo de productos para asegurarse de que están realmente en el centro de la acción.

Este proceso de clasificación de productos y ajuste de los puestos es iterativo, las rocas pueden cambiar de puesto si encuentran uno más cercano, y los puestos pueden cambiar de posición para representar mejor a sus grupos. Este ciclo continúa hasta que los puestos y sus grupos de productos tiene una variación despreciable. Es entonces cuando se interpreta que el K-Means puede determinar la presentación de rocas de forma adecuadamente organizada y que cada producto es de su clase. El resultado final son puestos (conglomerados) bien organizados de rocas con distintos rangos de resistividad agrupadas a su alrededor. Cada puesto representa un tipo de producto, lo que demuestra que sus muestras (datos) pueden dividirse en distintas secciones (categorías) basadas en similitudes. Una síntesis del diagrama de flujo que sigue el algoritmo esta ilustrada en la Fig (4.1).

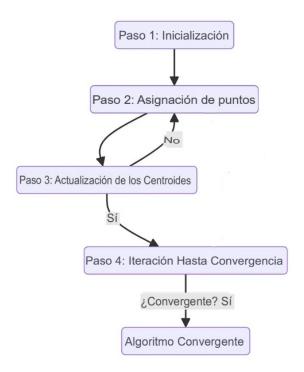


Figura 4.1: Diagrama de flujo de la técnica

4.1.1. Fundamentos Matemáticos del KMeans

Se procederá a explicar los distintos pasos del diagrama ilustrado previamente, donde la premisa principal es: encontrar la posición óptima de los centroides que minimiza la distancia entre las posición de un conglomerado y su posición central.

Primer paso: Inicialización

En el primer paso de K-Means, la técnica debe determinar dónde comenzar, seleccionando k centroides iniciales $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k)$ del conjunto de datos \mathbf{X} . Este conjunto de datos \mathbf{X} consiste en m observaciones, donde cada observación \mathbf{x}_i se representa como un vector de características de n dimensiones. Cada observación \mathbf{x}_i se denota como $\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, ..., \mathbf{x}_{in}]$, donde i = 1, 2, ..., m, y cada \mathbf{x}_{ij} representa el valor de la característica j para la observación i. La selección de los centroides iniciales puede realizarse de manera aleatoria o con métodos más estratégicos, como K-Means++ (Arthur & Vassilvitskii, 2007). Es importante destacar que la elección de los centroides iniciales puede tener un impacto significativo en los resultados del algoritmo.

Segundo paso: asignación de puntos

A cada muestra \boldsymbol{x} se asigna al centroide más cercano, formando un número de k agrupamientos, donde el centroide "más cercano" viene determinado por la distancia mínima entre la muestra y todos los centroides. En este caso optamos por la distancia euclídea para describir la formulación. La distancia d puede calcularse mediante:

$$d(x,\mu_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_{ij})^2},$$
(4.1)

donde x_j corresponde a la j-ésima componente de la muestra \boldsymbol{x} y u_{ij} corresponde a la j-ésima componente del i-ésimo centroide. Aunque la distancia euclídea es la opción más popular para K-Means, se puede explorar su aplicación con normas diferentes.

La asignación de una muestra x a un conglomerado C_i está dada por:

$$[C_i = \{x : d(x, \mu_i) \le d(x, \mu_j) \forall j, 1 \le j \le k\}], \tag{4.2}$$

donde:

 C_i: Representa el conglomerado i-ésimo, un conjunto de posiciones agrupadas en función de su similitud.

- x: Es una muestra del conjunto de datos que el algoritmo K-Means intenta asignar a uno de los k conglomerados.
- $d(x,\mu_i)$: Calcula la distancia entre la muestra \boldsymbol{x} y el centroide $\boldsymbol{\mu_i}$ del conglomerado C_i . El centroide es esencialmente la posición media de todos los puntos actualmente en el clúster C_i .
- $d(x,\mu_j)$: Calcula la distancia entre x y el centroide μ_j de cualquier otro conglomerado C_j .
- k: Es el número total de conglomerados en los que el algoritmo separa los datos

La condición $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu_i}) \leq \boldsymbol{\mu_j} \ \forall j, 1 \leq j \leq k$ especifica que a \boldsymbol{x} se asigna al conglomerado C_i si y sólo si la distancia de \boldsymbol{x} al centroide $\boldsymbol{\mu_i}$ es menor o igual que su distancia de \boldsymbol{x} a los centroides $\boldsymbol{\mu_j}$ de todos los demás conglomerados C_j , para cada j de 1 a k.

Este paso garantiza que cada posición se asigne al conglomerado con el centroide más cercano, minimizando las distancias dentro del conjunto y haciendo que los conjuntos sean lo más ajustados y homogéneos posible, esto se puede ver mejor en la Ec. (4.3).

• Tercer paso: actualizar los centroides

Una vez asignados todos los puntos a los conglomerados, se recalculan las posiciones de los centroides para que se sitúen en el centro de sus respectivos conglomerados.

La nueva posición μ'_i del centroide μ_i se calcula como la media de todos los puntos asignados al clúster C_i :

$$\mu_i' = \frac{1}{|C_i|} \sum_{x \in C_i} x,\tag{4.3}$$

donde $|C_i|$ es el número de muestras asignadas al conglomerado C_i , y la suma agrega las posiciones de todos los puntos del conjunto.

Cuarto paso: iteración hasta la convergencia

Los pasos de asignación y actualización (pasos 2 y 3) se repiten hasta que los centroides dejan de cambiar significativamente, lo que indica que el algoritmo ha convergido. En este caso, la convergencia suele evaluarse midiendo el cambio en las posiciones de los centroides entre iteraciones; si el cambio cae por debajo de un umbral predeterminado, el algoritmo se detiene. Otro criterio para evaluar la convergencia podría ser el caso en que las muestras ya no cambian de conglomerado o se alcanza un número máximo de iteraciones.

En el contexto del algoritmo K-Means, no existe una fórmula única y universalmente definida para la convergencia que se aplique en todos los casos. Sin embargo, una forma común de evaluarla es observando el cambio en las posiciones de los centroides entre iteraciones. En este caso, establecemos un umbral para los cambios en las posiciones de los centroides, si el cambio cae por debajo de este umbral de una iteración a la siguiente, se puede considerar que el algoritmo ha convergido. En el caso de observar el cambio de los centroides, esto puede expresarse como:

$$\max_{i=1}^{k} || \boldsymbol{\mu}_{i}^{(t)} - \boldsymbol{\mu}_{i}^{(t-1)} || < \epsilon,$$
 (4.4)

donde $\mu_i^{(t)}$ es la posición del centroide i en la iteración t, $\mu_i^{(t-1)}$ es la posición del centroide i en la iteración t-1, ϵ es un valor positivo pequeño elegido como umbral de convergencia.

4.2. Mapa Autoorganizado (SOM)

El mapa auto-organizado es uno de los modelos de redes neuronales más populares. Pertenece a la categoría de las redes de aprendizaje competitivo. La SOM es principalmente utilizada para producir modelos de clasificación. Esta se basa en el aprendizaje no supervisado, esto es, la construcción del modelo involucra solo los datos disponibles sin necesidad de intervenir en el proceso adaptativo para producir un resultado deseado en particular o valor de referencia. También puede utilizarse para detectar características inherentes al problema, por lo que también se ha denominado mapa autoorganizado de características (SOFM).

La SOM fue desarrollada por (Kohonen, 1982) quien propuso un algoritmo adaptativo capaz de mapear características desde el espacio multidimensional de los datos. Su objetivo es proporcionar una técnica de visualización de datos que ayude a comprender datos de alta dimensionalidad reduciendo la dimensión de los datos al mapa. Una vez que la red ha aprendido, puede agrupar los ejemplos de entrada en conglomerados similares utilizando neuronas de salida que replican los patrones de entrenamiento en un espacio de parámetros multidimensional. Los mapas autoorganizados de Kohonen convierten este espacio en clusters (Spichak et al., 2000).

El esquema de la denominada red de Kohonen consiste en un arreglo bidimensional $U \times V$ de nodos (también llamados neuronas o unidades básicas de procesamiento en analogía con las neuronas en la biología) y un conjunto de N datos de entrada. Cada uno de estos nodos está conectado por medio de pesos (o coeficientes) a cada componente de un vector de entrada (dato). La red se crea a partir de un entramado 2D de "nodos", cada uno de los cuales está totalmente conectado a la capa de entrada.

De acuerdo con las notaciones utilizadas en la teoría de sistemas matemáticos, este conjunto de señales de entrada se expresa como un vector columna $\boldsymbol{x} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$ donde T

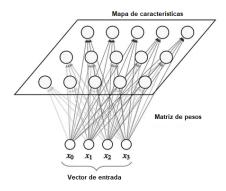


Figura 4.2: Dibujo ilustrativo de la red neuronal de la SOM

denota la transposición. La unidad i tendrá pesos o parámetros de entrada $\mu_{i1}, \mu_{i2}, ..., \mu_{in}$, que son expresables como otro vector columna $\mathbf{m_i} = \left[\mu_{i1}, \mu_{i2}, \ldots, \mu_{in}\right]^T \in \mathbb{R}^n$. La unidad o neurana formará la función discriminante que muestra la relación entre los pesos y la capa de entrada, cuya expresión es la siguiente:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j = m_i^T x,$$
(4.5)

y representa el valor resultante asociado a cada neurona para cada vector de entrada.

4.2.1. Fundamentos de la SOM

Primer paso: Inicialización de los pesos

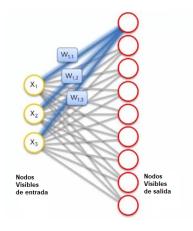


Figura 4.3: Ilustración de los pesos para una entrada

Usando de referencia la red unidimensional de la Fig. (4.3), como se puede ver, hay un peso asignado a la conexión entre una componente del vector de entrada y un nodo o unidad de

procesamiento. En este ejemplo tenemos un vector de entrada x de tres componentes y un vector de pesos m_i de tres componentes vinculados al nodo para dar un valor de salida η_i (Ec. 4.5). La salida completa será un vector de 9 componentes (una por cada nodo), cada uno de los nodos de entrada representa una coordenada x.

■ Paso 2: Cálculo de la unidad que mejor ajusta (Best Matching Unit o BMU)

En la capa de Kohonen, cada neurona i está asociada a un vector modelo o vector de pesos $\mathbf{m}_i(t)$ de la misma dimensión que el vector de entrada. En la primera iteración de la fase de aprendizaje, es decir, cuando el primer vector de datos de entrada es ingresado a la red, la denominada neurona ganadora BMU se determina encontrando el vector de pesos $m_w(t)$ con la menor distancia euclidiana al vector de datos $\mathbf{x}(t)$:

$$\forall i, \| \overline{\boldsymbol{x}}(t) - \overline{\boldsymbol{m}}_w(t) \| \ge \| \overline{\boldsymbol{x}} - \overline{\boldsymbol{m}}_i(t) \|. \tag{4.6}$$

Cabe destacar que la menor distancia euclídea, se corresponde con la neurona con el máximo valor de salida, dado en la Ec. (4.5) para cada vector de entrada. Para nuestro ejemplo, en la Fig. (4.4), se encierra en rojo la BMU o neurona ganadora para la primera entrada del vector. A partir de la unidad ganadora se establece una regla de actulización de pesos que es la que favorece el proceso adaptativo, la cual se describe más adelante.

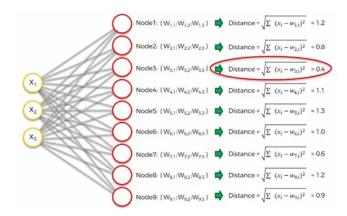


Figura 4.4: Distancia euclídea respecto de cada nodo

 Tercer paso: Establecer el parámetro de tamaño de vecindad (tasa de influencia) alrededor del BMU y el ancho de la misma.

Por analogía al ordenamiento topológico en la corteza cerebral de organismos biológicos se postuló en su modelo una función de vecindad que hace referencia a la interacción lateral entre neuronas (Kohonen, 1982). Es decir, el modelo tiene en cuenta no solo el nodo de máxima exitación sino también una vecindad del mismo en el proceso adaptativo.

El parámetro de tamaño de vecindad permite suavisar la influencia de la actualización de pesos de la BMU en los conglomerados y cuando este se reduce a cero deja de tener propiedades de orden topológico (Coléou 2003). En otras palabras, significa que para una neurona que se encuentre a una determinada distancia de la BMU, tal que el parámetro de vecindad es cero, no tendrá ningún cambio en sus pesos. Esta ordenación topológica tiene algunas consecuencias interesantes para el uso cuantitativo de los resultados de la clasificación.

Este parámetro o función de vecindad viene dado por una función de distribución Gaussiana centrada en la BMU (Bauer, 2012):

$$n_{w,i}(t) = \exp\left(-r_{w,i}^2/2\sigma^2(t)\right),\tag{4.7}$$

esta función $n_{w,i}(t)$ decae con la distancia $r_{w,i}$ entre la neurona ganadora w y la neurona i a la que se aplica la actualización. El ancho de la función de vecindad (parámetro $\sigma(t)$) disminuye al aumentar el número de iteraciones de la siguiente forma:

$$\sigma(t) = \sigma_{\rm o} \exp(-\frac{t}{\lambda}),\tag{4.8}$$

donde σ_0 es el espesor inicial de la red, t el paso/iteración actual, es decir t = 0, 1, ... n y λ una constante de tiempo definida como la mitad del número de iteraciones.

Como ejemplo, en la Fig. (4.5) puede observarse que el vecindario mostrado está centrado alrededor de la BMU (punto rojo), y abarca la mayoría de los nodos a su alrededor. El tamaño del vecindario alrededor de la BMU disminuye según la Ec. (4.8) y se reduce en cada iteración hasta llegar sólo a la BMU. La tasa de influencia vista en la Ec. (4.7), afectará a todas las neuronas que estén en el círculo rojo, con su valor máximo en la neurona ganadora y disminuyendo hacia la periferia del mismo.

En síntesis, se itera por todos los nodos de la red para determinar si se encuentran dentro del radio de vecindad o no, y si es así el vector de pesos es actualizado, ajustándose de la forma descripta en el paso siguiente.

Paso 4: Actualización de los vectores de peso

La importancia de tener una norma de actualización de pesos radica en su papel fundamental para generar el autoordenamiento en la SOM. El proceso de corrección de pesos ajusta los pesos de las neuronas de manera que aumenta la similitud (paralelismo) entre los vectores de pesos de

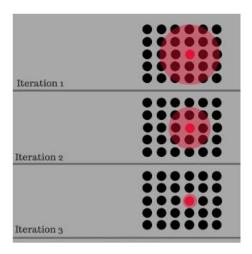


Figura 4.5: Decrecimiento del radio de vecindad

la BMU y las vecinas y el vector de entrada. Este ajuste gradual y coherente es crucial porque incrementa el orden diferencial en la matriz de neuronas.

El orden diferencial se refiere a la variación ordenada en los pesos a lo largo de la matriz de neuronas. A medida que los pesos de las neuronas vecinas se vuelven más similares, el orden general en toda la matriz de neuronas también aumenta en promedio. Este proceso no ocurre de manera aislada; los cambios en los pesos de una neurona están interrelacionados con los cambios en los pesos de sus neuronas vecinas, lo que significa que el ajuste en una neurona influye en los ajustes de las neuronas cercanas. Como resultado, todos los cambios individuales se coordinan de manera que contribuyen a un patrón global coherente en el entramado de neuronas.

Los efectos de frontera de la matriz delimitan el formato del mapa de manera similar a cómo las condiciones de frontera determinan la solución de una ecuación diferencial. Estas condiciones de borde ayudan a definir la forma final y el formato del mapa autoorganizado, asegurando que los cambios en los pesos se distribuyan de manera ordenada y coherente en todo el mapa (Kohonen, 1982).

No hay una única forma de definir una expresión para la actualización de los peso, en nuestro caso particular usamos la siguiente:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{m}}_{i}(t+1) = \overrightarrow{\boldsymbol{m}}_{i}(t) + L(t) n_{w,i}(t) \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}(t) - \overrightarrow{\boldsymbol{m}}_{i}(t)\right), \tag{4.9}$$

que lo que quiere decir es que, el nuevo peso ajustado $m_i(t+1)$ para el nodo i es igual al peso antiguo $m_i(t)$, más una fracción $(L n_{w,i})$ de la diferencia entre el peso antiguo y el vector de entrada \mathbf{x} . En otras palabras significa que todos los vectores de peso se cambian en la dirección del vector de datos y que la magnitud del cambio también viene afectada por la Ec. (4.7). Por útlimo, es menester mencionar que L es una variable llamada velocidad de aprendizaje y que tiene el mismo comportamiento que la Ec. (4.8):

$$L(t) = L_0 \exp(-\frac{t}{\lambda}). \tag{4.10}$$

La regla de aprendizaje vista en la Ec. (4.9), se aplica a todas las neuronas con la intención principal de que el vector de pesos de la neurona ganadora y, en menor medida para los conglomerados vecinos, cambien para parecerse más al vector de datos de entrada (Bauer, 2012). Los vectores de pesos con una distancia mayor a la neurona ganadora no deberían verse afectados por esta operación, como fue mencionado en el paso anterior.

• Último paso: Repetir el procedimiento a partir del segundo paso para las N muestras.

4.3. Métricas de comparación: Silhouette score

Existen muchos algoritmos para dividir un conjunto de objetos en k conglomerados, como el método k-means y el enfoque k-median. El resultado de estas técnicas es una lista de conglomerados con sus objetos (una muestra del conjunto de datos), que no es tan sencilla de interpretar como los dendrogramas de los métodos jerárquicos por ejemplo.

Estos métodos de agrupamiento siempre generan k conglomerados, sin importar los datos. Esto plantea varias preguntas: ¿Son los grupos de alta calidad (es decir, las disimilitudes dentro de los grupos son pequeñas en comparación con las disimilitudes entre grupos)? ¿Qué objetos están bien clasificados, cuáles están mal clasificados y cuáles están entre los conglomerados? ¿Cuál es la estructura general de los datos? ¿Podemos estimar el número de conglomerados "naturales" que realmente existen? Estas preguntas son complejas y, con la introducción de las siluetas, se busca proporcionar al usuario una orientación adicional. Cada conglomerado se representa mediante una silueta, que se basa en comparar su cohesión interna y su separación respecto a otros conglomerados. Esta silueta indica qué objetos están bien integrados dentro de su propio conglomerado y cuáles se encuentran en posiciones intermedias entre diferentes conglomerados.

Las siluetas ejemplificadas en la Fig. (4.6) son beneficiosas cuando las distancias están en una escala de relación (como en el caso de las distancias euclidianas) y cuando se busca que las agrupaciones sean compactas y bien separadas. De hecho, la definición emplea distancias promedio, como en el caso del enlace promedio de grupos, que se sabe que es más efectivo en situaciones donde los conglomerados son aproximadamente esféricos (Rousseeuw 1987).

La silueta permite asignar una puntuación a los conglomerados que oscila entre -1 y 1, donde un valor alto indica que el objeto está bien emparejado con un determinado conglomerado (bien clasificado) y mal emparejado con los los otros conglomerado (mal diferenciado).

La fórmula para calcular la calificación de silueta para la i-ésima muestra de un conjunto de

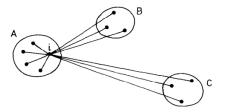


Figura 4.6: Ilustración de los elementos que intervienen en el cálculo de s(i), cuando el objeto i pertenece al clúster A.

N datos es:

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\{a(i), b(i)\}},\tag{4.11}$$

- s(i) es la calificación de silueta para la i-ésima muestra del conjunto de datos.
- a(i) es la distancia media de la i-ésima muestra a los demás puntos del mismo conglomerado, que mide lo bien que encaja la i-ésima muestra en un determinado clúster.
- b(i) es la distancia media más pequeña de la i-ésima muestra a los puntos de un conglomerado diferente. Representa la distancia al conglomerado más cercano del que la i-ésima muestra no forma parte, indicando lo mal que encaja la misma en los clústeres vecinos.

Si asumimos un conjunto de N datos, -como es el usado en este trabajo-, tomamos la puntuación de silueta media del conjunto de N datos, que se calcula promediando las N puntuaciones de silueta de todos los datos. Esto es:

$$ASS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s(i). \tag{4.12}$$

Las técnicas que hemos descripto serán utilizadas a continuación en el contexto de la magnetotelúrica. A partir de trabajar con las distintas componentes $Z_{xy}(\text{TE})$, $Z_{xy}(\text{TM})$, ρ_{xy} , ρ_{yx} , ϕ_{xy} , y ϕ_{yx} considerándolas para distintos periodos y estaciones, se analizará si los resultados de las mismas posibilitan parcialmente una caracterización de la geometría del subsuelo.

4.4. Implementación de las técnicas de aprendizaje automático a datos MT

En esta parte del capítulo se presentan los hiperparámetros (valores de configuración que se establecen antes del entrenamiento y afectan el proceso de aprendizaje) y características (o componentes) más relevantes de ambos algoritmos de aprendizaje automático (k-means y SOM). A partir de aplicar estos métodos a un modelo 2D isótropo e inhomogéneo, se busca seleccionar un subconjunto de características relevantes del conjunto de datos (esta metodología es conocida como ingeniería de características o feature engineering). En nuestro caso, definir cual de las variables magnetotelúricas (Z_{xy} , Z_{yx} , ρ_{xy} , ρ_{yx} , ϕ_{xy} , ϕ_{yx}), o sus combinaciones, son las que obtienen una mejor calidad de agrupamiento (en base a la puntuación de silueta) y al mismo tiempo información física relacionada al problema.

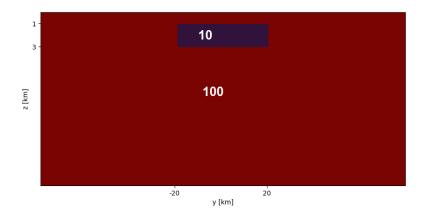


Figura 4.7: Modelo de testeo para extracción de características

- Se obtuvieron las impedancias Z_{xy} y Z_{yx} ingresando los datos mostrado en las Figs. (2.7 y 2.8) al ModEM.
- Se calcularon las otras cuatro variables electromagnéticas ρ_{xy} , ρ_{yx} , ϕ_{xy} y ϕ_{yx} con la salida del ModEM.
- Se organizó todas las las matrices y vectores con la información de las seis variables EM en un DataFrame (estructura de datos que contiene filas y columnas de ejes etiquetados) con el mismo orden que en la Fig. (2.7), siendo las primeras treinta y siete filas, todos los periodos asociados a una sola estación y así sucesivamente para las siguientes estaciones.
- Luego, fueron escaladas ambas resistividades con log_{10} (Dependiendo del caso, en algunos fue mejor que los valores fueran lineales.)
- Y finalemente, se normalizó todo el DataFrame mediante los valores mínimos y máximos para cada variable (columna).

Tanto para el modelo en la Fig. (4.7) como para los modelos de las secciones siguientes, el modelado presenta datos en común: una extensión horizontal del dominio de 160 km, una extensión vertical de 380 km, 40 estaciones equiespaciadas cada 3.85 km en el rango [-77, 77] km, 37 periodos distintos, entre ellos cuatro valores en el rango [5, 9] s y para el resto se tiene 11 valores por decada logaritmica en el rango [10, 10000] s. Todos los valores dentro de los cuerpos en las figuras desde este punto en adelante son valores de resistividad en Ω m.

Para implementar la técnica k-means se utilizó la librería scikit-learn, de aprendizaje automático de Python que proporciona herramientas para construir modelos de aprendizaje automático y analizar su desempeño. Y para la SOM se usó MiniSom, una biblioteca de Python desarrollada para implementar mapas autoorganizativos, de manera eficiente.

KMeans	SOM
n_clusters(int): el número de con-	<pre>grid_size[0] y grid_size[1]: re-</pre>
glomerados a formar así como el núme-	presentan las dimensiones de la malla
ro de centroides a generar	SOM, especificando el número de nodos o neuronas en cada dimensión.
init: el método de inicialización de	
los centroides. Puede ser kmeans++ ó	
aleatorio	
	'
max_iter(int): número máximo de	sigma: determina la dispersión de la
iteraciones del algoritmo k-means pa-	función de vecindad durante el entre-
ra una sola ejecución.	namiento.
tol(float): tolerancia relativa con	learning_rate: controla la magnitud
respecto a la norma de Frobenius de	de las actualizaciones de los pesos du-
la diferencia en los centros de conglo-	rante el entrenamiento.
merados de dos iteraciones consecuti-	
vas para declarar la convergencia.	
random_state: determina la genera-	train(n_iterations): especifica el
ción de números aleatorios para la ini-	número de iteraciones (épocas) para el
cialización del centroide.	entrenamiento del SOM.

Cuadro 4.2: Tabla con hiperparámetros relevantes para el entrenamiento de ambas técnicas

Para el modelo de la Fig. (4.7) y todos los casos de entrenamiento que veremos en el trabajo, se realizó el siguiente procedimiento:

Con los datos escalados, se construyeron modelos para el K-means (M^{KM}) y para la SOM (M^{SOM}) , que fueron construidos a partir del entrenamiento de los mismos con los datos de cada modelo. Estos modelos dependen de los hiperparámetros listados en la Tabla (4.2). El análisis y ajuste de los mismos, es esencial para optimizar el rendimiento del modelo, un modelo bien ajustado proporciona conglomerados que son internamente coherentes y externamente bien

separados, lo que facilita una mejor interpretación y uso práctico de los datos.

Veamos los hiperparámetros para el modelo M^{KM} a la izquierda de la Tabla (4.2) y la importancia de su análisis. El número de clústeres determina cuántos conglomerados se formarán en los datos, un número incorrecto puede llevar a una agrupación ineficiente, y por otro lado, demasiados conglomerados pueden resultar en una sobresegmentación y muy pocos pueden causar una subsegmentación. El método de inicialización afecta la convergencia del algoritmo y la calidad de los clústeres finales. La inicialización aleatoria de los centros puede llevar a resultados subóptimos debido a la sensibilidad del algoritmo a los puntos de partida iniciales. Respecto al máximo número de iteraciones un número demasiado bajo puede impedir la convergencia adecuada, mientras que un número excesivo puede llevar a un tiempo de cómputo innecesariamente largo. La tolerancia establece el criterio de convergencia, determinando cuánto deben cambiar los centros de los clústeres entre iteraciones para considerar que el modelo ha convergido. Finalmente el random state proporciona consistencia y control sobre la aleatoriedad en el proceso de inicialización de centroides, lo que es fundamental para la reproducibilidad. Esto significa que, dado el mismo conjunto de datos y el mismo valor de random state, el algoritmo producirá siempre los mismos resultados, lo que es crucial para la reproducibilidad en la investigación y el desarrollo de modelos.

Del otro lado de la tabla, tenemos los hiperparámetros para el modelo M^{SOM} . Respecto del tamaño de la grilla, se tiene que una grilla mayor o un mayor número de neuronas permite capturar una representación más detallada de los datos, pero también aumenta la complejidad computacional y el riesgo de sobreajuste. Es importante elegir un tamaño de grilla que sea lo suficientemente grande como para capturar la estructura subvacente de los datos, pero no tan grande como para sobreajustar el modelo. El valor del ancho inicial sigma, significa que para mayores valores del mismo, durante las primeras etapas del entrenamiento, las actualizaciones se propagarán a neuronas más distantes en la grilla, lo que permite una exploración más amplia del espacio de características. Un valor más pequeño de sigma favorece la precisión en la etapa final del entrenamiento. Luego, una tasa de aprendizaje alta puede acelerar el proceso de convergencia, pero también puede llevar a oscilaciones excesivas o a que la SOM se atasque en mínimos locales. Si esta tasa es baja, puede ayudar a suavizar el proceso de convergencia, pero puede llevar más tiempo alcanzar una solución óptima. Es crucial encontrar un equilibrio adecuado entre convergencia rápida y estabilidad. Y finalmente si el número de épocas es insuficiente (un valor bajo) puede resultar en una SOM subentrenada que no captura completamente la estructura de los datos, mientras que un número excesivo de épocas puede llevar al sobreajuste.

En la Tabla (4.3) se encuentran los valores y/o métodos para obtener un mejor modelo para cada técnica. Para la cantidad de conglomerados en ambas técnicas, se optó por utilizar el mismo número que resistividades distintas contenía cada modelo de subsuelo epecífico, en particular se trabajó con cuerpos desde dos hasta cuatro resistividades diferentes. Respecto del modelo M^{KM} , el método de inicialización K-Means++ fue levemente más eficiente que inicializar los centros de manera aleatoria; por otro lado se fijó el máximo número de iteraciones al valor más pequeño

para el cual no hay cambios apreciables en la puntuación de la silueta con la tolerancia fija. La tolerancia fue fijada a partir de probar con un valor alto para el máximo de iteraciones y recuperar el valor al que converge la diferencia entre las posiciones de los centros. Por último se fijo el valor de random state en treinta, aunque pudiera ser cualquier número entero.

Para el modelo M^{SOM} , el procedimiento fue encontrar el par (sigma, $learning\ rate$) que arroje el mejor resultado en términos de agrupamiento para cada escenario fijando una variable y ensayando con la otra. Por último obtener el mínimo número de épocas para el cual la puntuación obtenida con la silueta el par (sigma, $learning\ rate$) no cambia significativamente y así evitar un tiempo de cómputo excesivo.

KMeans	SOM
n_clusters(int): n. Siendo n el	<pre>grid_size[0] y grid_size[1]:</pre>
número de cuerpos con resistividas dis-	(n,1) o n Nodos. Siendo n el número
tintas en el modelo	de cuerpos con resistividades distintas
	en el modelo
init(Método de inicialización): K-	
Means++	
	·
max_iter(int): 10.	sigma: Varía dependiendo de la varia-
	ble utilizada.
tol(float): 10^{-4} .	learning_rate: Misma situación que
	para sigma
random_state: 30 (Se puede fijar cual-	train(n_i terations): 100.
quier número entero)	

Cuadro 4.3: Hiperparametros fijados/encontrados para optimizar el agrupamiento y/o reducir el costo computacional

Durante las distintas pruebas de entrenamiento, se probaron las distintas variables físicas $(Z_{xy}, Z_{yx}, \rho_{xy}, \rho_{yx}, \phi_{xy}, \phi_{yx})$ y sus combinaciones. De lo cual resultó que a mayor número de variables utilizadas, peor fue la calificación del agrupamiento. Por ejemplo para la Fig. (4.10a) el puntaje fue de 0.87, pero si se utiliza esa misma variable ρ_{xy} con ϕ_{xy} ó ϕ_{yx} , el puntaje disminuye a 0.85 y 0.82 respectivamente, ergo, optamos por las componentes individuales como datos de entrenamiento. No obstante, no descartamos encontrar alguna combinación que pueda ser favorable en análisis posteriores.

Teniendo en cuenta lo anterior construimos modelos M^{KM} y M^{SOM} que incluyen los parámetros descriptos en la Tabla (4.3) y con solo una variable de entrada, a la cual se hace referencia oportunamente. Luego para estudiar su interpretación física o relación con el modelo real, se graficaron las seis variables como se ven a continuación en las Figs. (4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13).

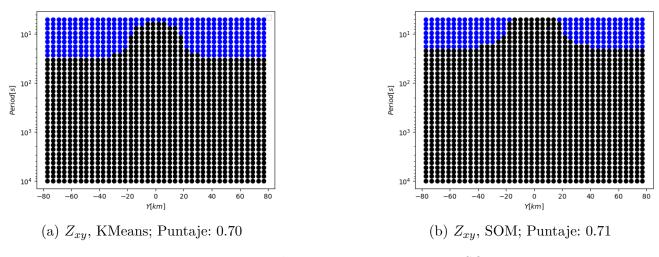


Figura 4.8: Impedancia TE para KMeans y SOM

Observando la componente TE (Z_{xy}) en la Fig. (4.8), los puntajes de agrupación son buenos pero, la interpretación física no es acorde al modelo. Cabe destacar que los modelos de ML en este caso diferencian entre dos conglomerados, coloreados de azul y negro en las figuras. Se debería de tener un grupo de periodos que diferencien la inhomogeneidad con la roca de caja; según las dimensiones del modelo la roca inhomogénea está en el mismo grupo que la roca de caja (el grupo está asociado al color), que es el de color negro. También se pueden apreciar diferencias entre las técnicas, en los primeros periodos, en el rango [-20, 20] km.

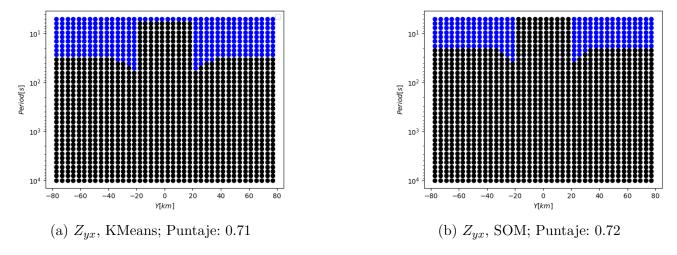


Figura 4.9: Impedancia TM para KMeans y SOM

Para la componente TM (Z_{yx}) , en la Fig. (4.9) se puede apreciar una agrupación análoga a la componente TE pero con los rasgos característicos de la componente transversal magnética en los bordes de la inhomogeneidad [-20, 20] km que son la disminución de la resistividad aparente debido a la acumulación de cargas en los mismos. Respecto de las impedancias TE y TM, el agrupamiento es bueno pero pudiera decirse que como las impedancia no son desafectadas por los periodos, no son capaces de asemejarse apreciablemente al modelo.

Analicemos ahora las resistividades en las Figs (4.10 y 4.11), comenzando por la que va pa-

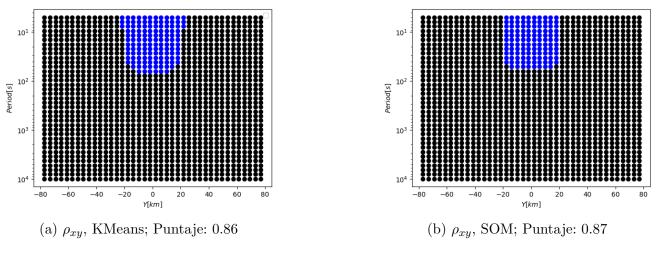


Figura 4.10: Resistivdades TE para KMeans y SOM

ralela al strike geoléctrico (dirección TE). Para esta componente en la Fig (4.10), se evidencia una clara similitud con el modelo real, donde para periodos bajos hacia intermedios y en aproximadamente en el dominio donde esta presente la inhomogeneidad, está categorizada distinta a la roca de caja. También entre técnicas, la SOM delimita los bordes de una manera más estricta y acertada que el KMeans.

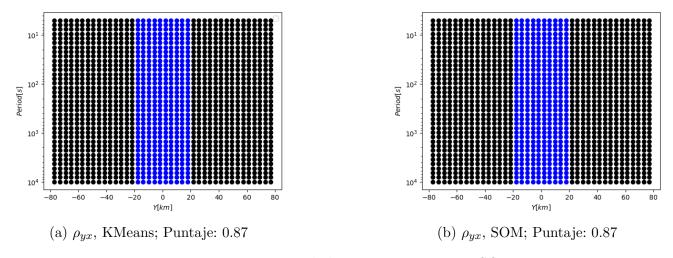


Figura 4.11: Resistividad TM para KMeans y SOM

Para la componente TM en la Fig. (4.11) no hay una distinción de períodos, ni tampoco una diferencia apreciable entre técnicas; sin embargo se debe destacar la capacidad de restringir los bordes laterales de la inhomogeneidad.

Por último veamos las fases de ambas resistividades. Para la fase TE en la Fig. (4.12) el comportamiento es muy similar al de la resistividad pero sugiere una mayor extensión del grupo de la inhomogeneidad (azul en ambos casos). Comparativamente ambas técnicas arrojan resultados similares, aunque la SOM discrimina de manera mas localizada el grupo. Finalmente, en cuanto a la fase TM en la Fig (4.13), se observa que el modelo no arroja resultados en sintonía con el modelo.

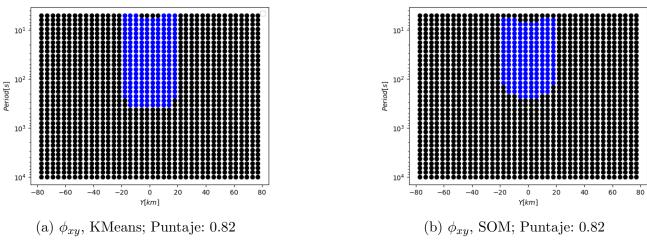


Figura 4.12: Fase TE para KMeans y SOM

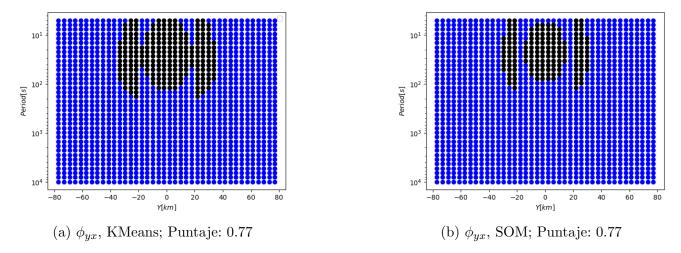


Figura 4.13: Fase TM para KMeans y SOM

Una vez realizado este análisis, se decidió entrenar el M^{KM} y el el M^{SOM} con los datos del modelo de conductividades de la Fig. (4.7) utilizando como variables de entrada las componentes de resistividad en dirección TE y TM, respectivamente Además, tuvimos en consideración que la componente TE, delimita apreciablemente la transición tanto vertical como horizontal de los conglomerados y la TM remarca de manera rigurosa la transición horizontal de los mismos. Una vez entrenado el modelo de conductividades presentado al principio de la sección 4.4, será guardado y reutilizado para testear variaciones en la resistividad, sin modificaciones a la geometría mostrada en la Fig. (4.7).

4.4.1. Predicción

Una vez entrenados todos los modelos se utilizó el método *predict* del algoritmo KMeans en la librería scikit-learn, que posibilita predecir a qué conglomerado pertenecen nuevas muestras de datos después de haber entrenado el modelo. Este método toma como entrada un conjunto de

datos y devuelve un arreglo que contiene las etiquetas de los conglomerado a los que pertenecen esas muestras.

En términos más específicos, el método predict asigna cada punto de datos a la etiqueta del conglomerado más cercano según los centroides que fueron aprendidos durante el proceso de entrenamiento. Estos centroides representan los centros de los conglomerados calculados durante el entrenamiento. Por lo tanto, predict calcula las distancias entre cada punto de datos y los centroides, y asigna cada punto al conglomerado cuyo centroide esté más cercano.

El modelo SOM, después de entrenado, contiene los pesos de los nodos, que son los centros en el espacio de características (ρ_{xy}) y (ρ_{yx}) . El método winner calcula la neurona cuyos pesos son más cercanos al vector de entrada, lo que indica que esa neurona es la más representativa o la mejor representante de la entrada.

4.4.2. Variaciones de resistivdad

En esta subsección, se probaran cuatro cambios, de los cuales tres son simples alteraciones al valor de la inhomogeneidad para los valores [0.1, 1000, 100000] Ω m y el otro es convertir a la roca de caja en un medio más conductivo 0.1 Ω m y el bloque por el contrario, más resistivo 1000 Ω m.

Observemos el conjunto mostrado en la Fig (4.14), para la primera columna está el aumento de resistividad de la inhomogeneidad Figs. $(4.14a\ y\ 4.14e)$ a $1000\ \Omega m$, claramente para ambas técnicas el modelo entrenado es capaz de predecir esta variación, reduciendo el periodo a la cual detectan el cambio de resistividad. Esto pudiera relacionarse con el hecho de que el decaimiento de la energía de la onda en la inhomogeneidad es menor que en el caso original, y al cambiar de medio el algoritmo puede delimitar mejor la transición en los valores de resistividad. El KMeans sugiere una menor penetración que la SOM.

Si se aumenta el valor a 100000 Ω m, se puede observar en las Figs. (4.14b y 4.14f), que no hay una diferencia apreciable respecto del caso anterior, lo que podría pensarse como que a partir de un umbral de resistividad, al menos para estos periodos, el agrupamiento será el mismo.

Continuando, ahora con el caso del bloque conductivo de resistividad $0.1~\Omega m$ en las Figs. (4.14c y 4.14g), hay una diferencia considerable y es que ambas técnicas son incapaces de delimitar en el eje vertical la inhomogeneidad, a raíz de que la señal pierde tanta energía en el medio conductivo que la transición de conductividades a nivel vertical se diferencia con la lateral, de manera que agrupa a todo el dominio horizontal donde está el bloque.

Por último, tenemos la roca de caja conductiva (4.14d y 4.14h) que arroja resultados interesantes. Comenzando por el hecho de que los periodos iniciales (bajos) no son capaces de registrar suficiente información de la inhomogeneidad por la gran pérdida de energía inicial y que para

periodos más altos, si es capaz de delimitar la transición entre los agrupamientos.

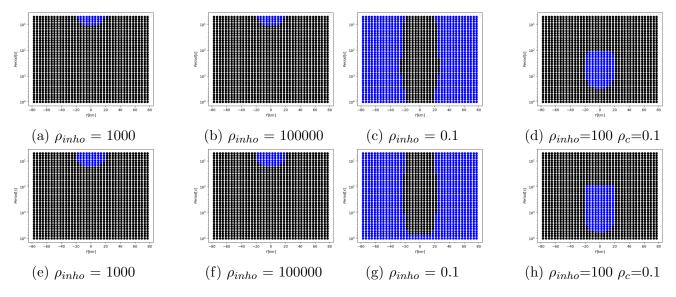


Figura 4.14: Resistividades TE, la 1° fila es para KMeans y la 2° para SOM

Consecuentemente, procedamos a analizar la componente TM en el conjunto mostrado en la Fig. (4.15). Con una primera mirada, se puede notar en las Figs. (4.15a, 4.15e, 4.15f, 4.15c y 4.15g) la delimitación horizontal es idéntica, sugiriendo que la onda penetró suficiente para todos los periodos como para registrar suficiente información de la inhomogeneidad y así percibir la discontinuidad del campo eléctrico. Esta situación se diferencia de la correspondiente al caso de roca de caja conductiva mostrado en las Figs. (4.15d y 4.15h) donde es interpretable que se necesitan periodos intermedios a grandes para apreciar la presencia del bloque. Por último, en la Fig. (4.15b) delimita el borde lateral de igual manera pero para los demás puntos, agrupa erróneamente.

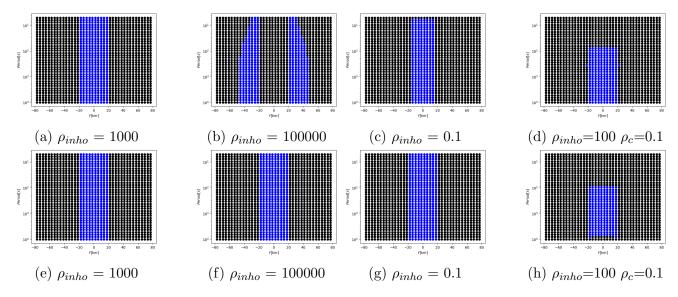


Figura 4.15: Resistividades TM, la 1° fila es para KMeans y la 2° para SOM

Una idea general de estos resultados a priori es que, ambos algoritmos agrupan mejor a

la realidad física del modelo, para casos en donde el bloque es resistivo respecto de la roca constituyente del sustrato.

4.5. Modelo de dos bloques

En esta sección, a partir de la selección de características realizadas en la sección anterior, se propuso un modelo con dos cuerpos de igual resistividad y diferente a la resistividad de la roca de caja como se ilustra en la Fig. (4.16), que se entrenó para las componentes ρ_{xy} y ρ_{yx} . Una vez entrenado, se utilizó para predecir el comportamiento del mismo ante variaciones laterales de la posición de los bloques, variaciones de espesor para uno de los bloques respecto del otro y por último variaciones de los valores de resistividad para los bloques y la roca circundante.

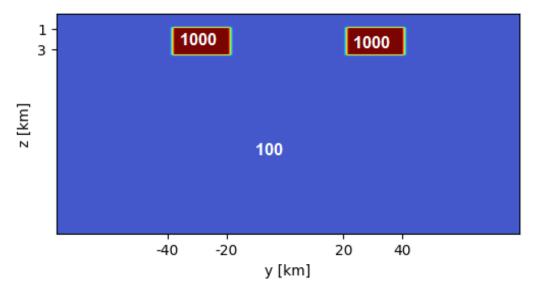


Figura 4.16: Modelo de 2 bloques

Ambas técnicas (K-Means y SOM) se utilizaron para su entrenamiento, comenzando por la componente en dirección TE como muestra se muestra en la Fig. (4.17).

Se puede observar un resultado similar para ambas técnicas, con un efecto leve pero mayor a nivel lateral para periodos bajos y que a medida que penetra más la señal, se concentra en el medio de los bloques (-30 km y 30 km). También es destacable que persiste lo que se podía ver en la sección anterior que es la robustez de los bordes de los grupos delimitada por la SOM a comparación del KMeans.

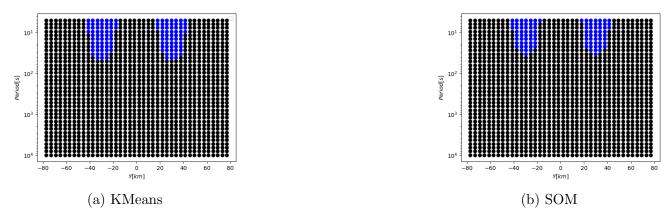


Figura 4.17: Resistividades TE para 2 bloques

De su par ρ_{yx} en la Fig. (4.18) no existe mucho que resaltar al respecto, solamente que para ambas técnicas, el borde lateral está bien delimitado.

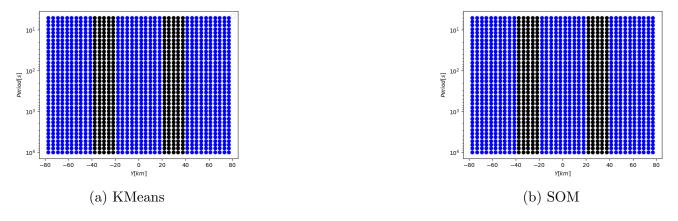


Figura 4.18: Resistividades TM para 2 bloques

4.5.1. Variaciones laterales

Veamos si el modelo es capaz de predecir correctamente los clústeres, si se extiende o disminuye la distancia entre los bloques. Considerando el primer caso, para la componente TE se observa claramente que es capaz de predecir el mismo resultado pero con la diferencia en la posición respecto del modelo al que fue entrenado y la SOM sigue manteniendo los bordes más regulares que el KMeans. La TM sin muchos cambios al respecto en su forma de agrupamiento, también es capaz de predecir el cambio lateral.

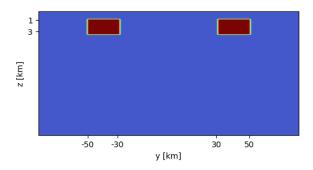


Figura 4.19: Modelo de 2 bloques alejados

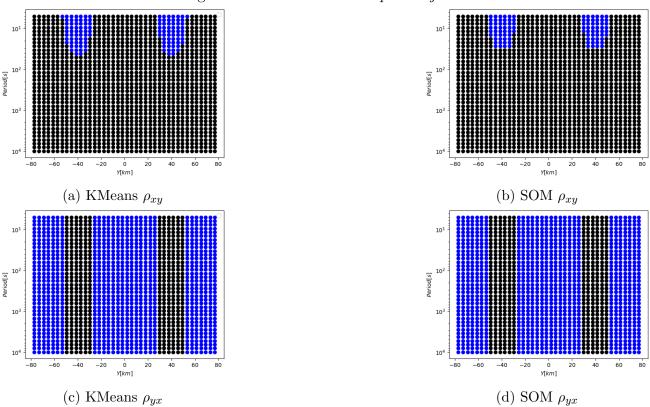


Figura 4.20: Resistividades TE/TM para 2 bloques alejados

Cambiemos el escenario ahora por uno donde se acerquen más los bloques Fig. (4.21). Para ambas componentes y ambas técnicas los resultados son análogos al del caso anterior con la simple diferencia de que el cambio es una disminución de la distancia entre bloques y no un alejamiento.

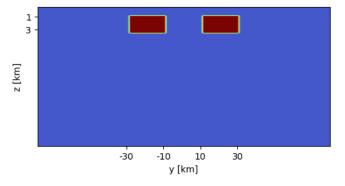


Figura 4.21: Modelo de 2 bloques acercados

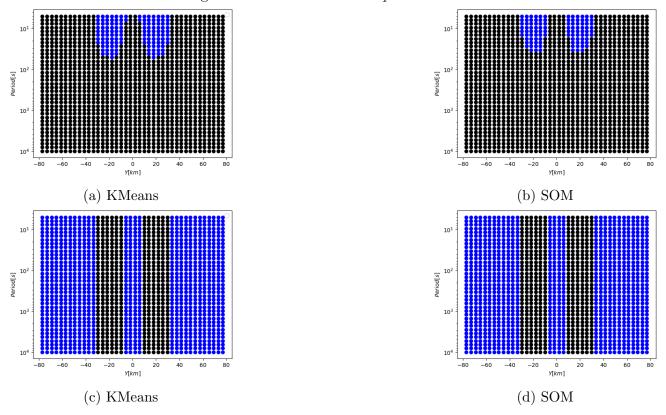


Figura 4.22: Resistividades TE/TM para 2 bloques acercados

4.5.2. Variaciones de espesor

Investigemos que sucede cuando al bloque derecho se le reduce el espesor a la mitad o es duplicado. Si lo reducimos, el modelo es mostrado en la Fig. (4.23). Viendo la componente en la dirección TE, las técnicas presentan diferencia en que KMeans tiene bordes menos suaves que la SOM y su agrupamiento vertical es más extenso que el de la SOM. Ambas son capaces de detectar la reducción del espesor en el bloque derecho. Para la TM, no hay ninguna diferencia respecto del modelo original.

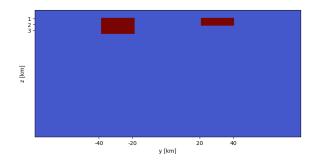


Figura 4.23: Modelo de bloque derecho reducido

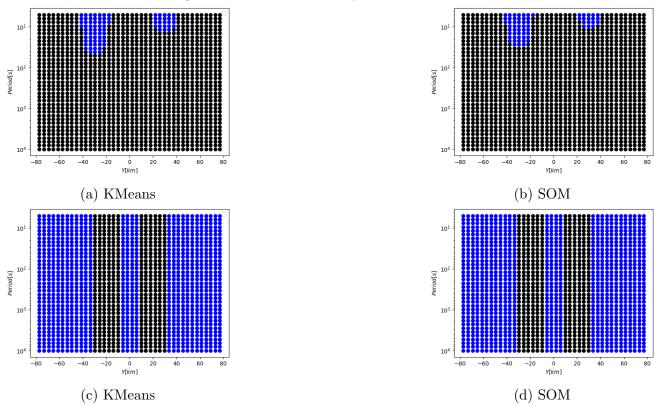


Figura 4.24: Resistividades TM para bloque derecho reducido

Para un aumento del espesor en la Fig. (4.25), ocurre el efecto inverso a lo que se vio al reducirse el espesor en la TE, y la TM sigue sin alteración.

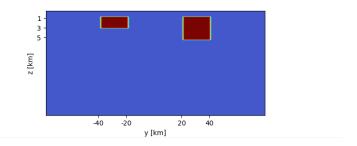


Figura 4.25: Modelo de bloque derecho aumentado



Figura 4.26: Resistividades TM para bloque derecho aumentado



Figura 4.27: Resistividades TM para bloque derecho aumentado

4.5.3. Variaciones de conductividad

Por último se modificó la resistividad de los bloques en Fig. (4.16) a $0.1~\Omega m$, siendo los resultados el conjunto Fig. (4.28). Para la TE los resultados mostrados en las Figs. (4.28a~y~4.28b) se observan patrones similares, que sugieren que la inhomogeneidad es alcanzada a periodos bajos/intermedios y que la transición de los dos grupos se termina antes de llegar a los periodos más altos. Respecto de la TM, la SOM muestra más imprecisiones respecto del KMeans para periodos intermedios/altos.

Finalmente probemos la variación recíproca, es decir, roca de caja con un $\rho_c = 0.1~\Omega \text{m}$ y la inhomogeneidad $\rho_{inho} = 1000~\Omega \text{m}$. Para la TE mostrada en la Figs (4.29a y 4.29b), como

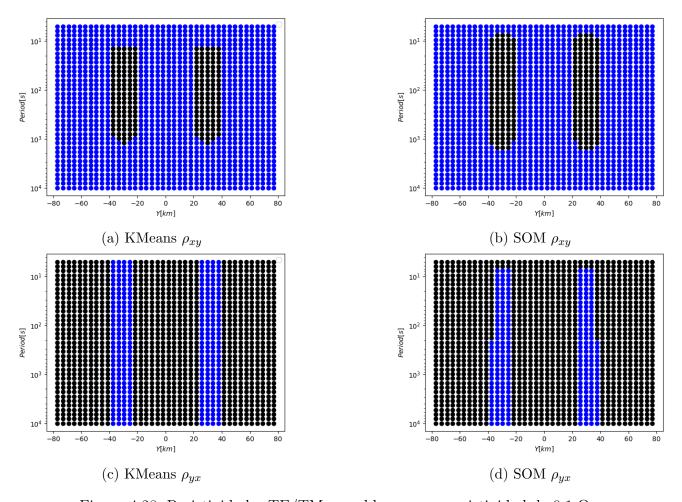


Figura 4.28: Resistividades TE/TM para bloques con resistividad de 0.1 Ω m

es de esperar el modelo predice correctamente que para periodos bajos la onda no alcanza la inhomogeneidad como vimos en la sección anterior con el caso del medio conductivo. Ambas técnicas presentan irregularidades en algunos de sus bordes. Respecto de la TM en las Figs. (4.29c y 4.29d) occure lo mismo que para la TE en periodos bajos, los bordes laterales estan bien marcados, excepto para algunos periodos en la SOM.

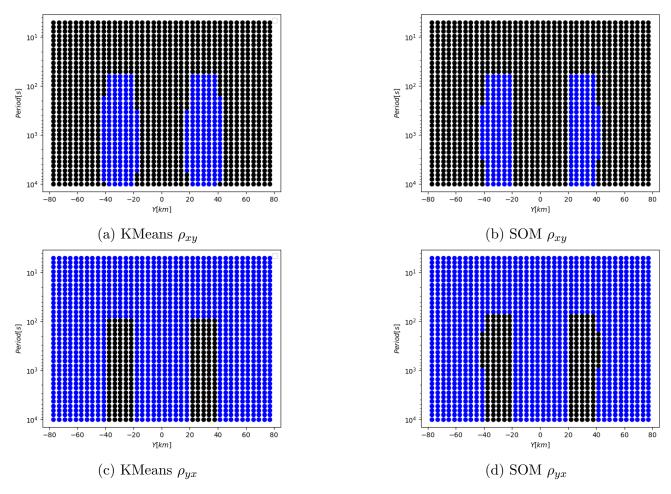


Figura 4.29: Resistividades TE/TM para bloques con resistividad de 1000 Ωm y caja 0.1 Ωm

4.6. Modelo de 3 Resistividades

En esta sección, se toma el modelo de la Fig. (4.16) pero se cambia la resistividad de uno de los bloques por una distinta a la del otro cuerpo y la roca de caja. (Fig 4.30). Se realizó el mismo procedimiento de entrenamiento que para la sección anterior, y los resultados de agrupamiento para ambas técnicas están presentados en la Fig. (4.31).

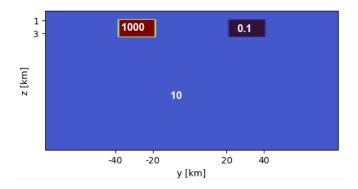


Figura 4.30: Modelo de 3 resistividades

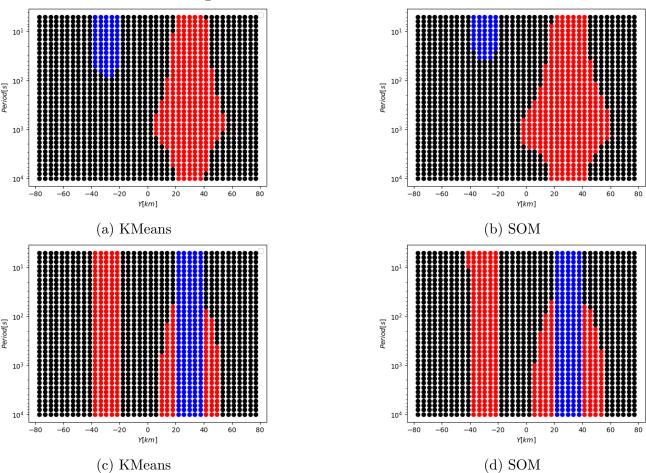


Figura 4.31: Resistividades TE/TM para 2 bloques acercados

En la primera fila, veasé Figs. (4.32a, y 4.32b) como se viene trabajando, está la resistividad

 (ρ_{xy}) . Ambas técnicas son capaces de detectar los tres cuerpos, pero con mayor imprecisión en la SOM para los periodos en torno a 1000 s que corresponden al cuerpo conductivo de la derecha. Respecto de la la segunda fila ρ_{yx} en las Figs. (4.32c y 4.32d), para periodos bajos en el cuerpo resistivo (izquierda), la SOM presenta imprecisiones desde los primeros periodos hasta los 10 s, mientras que el KMeans no presenta estos detalles. En ambos resultados se puede observar un área del grupo rojo, alrededor del grupo asociado al cuerpo de la derecha (que para ambas imágenes es el grupo de color azul), sugiriendo que justo antes del contacto con el cuerpo hay un aumento de resistividad aparente que los asemeja con el cuerpo de la izquierda.

4.6.1. Variaciones laterales

Primero alejamos los bloques usando como referencia de este modelo, la geometría de Fig. (4.19) pero con las resistividades de los bloques en Fig. (4.30).

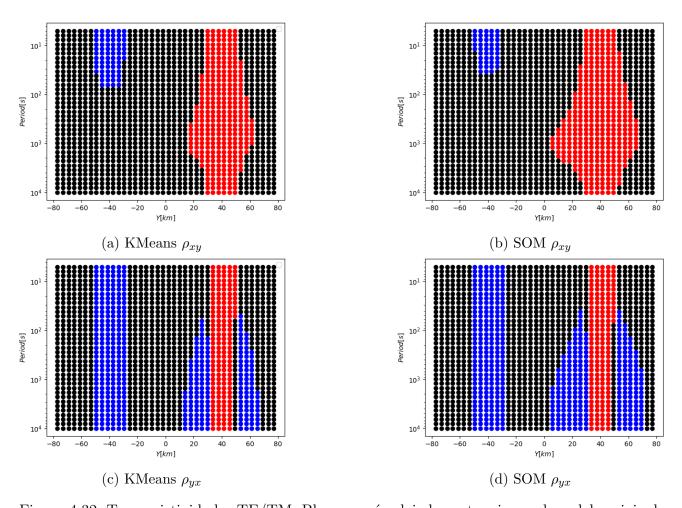


Figura 4.32: Tres resistividades TE/TM. Bloques más alejados entre si que el modelo original.

Como se puede apreciar en la primera fila en las Figs. (4.32a y 4.32b) se identifican los tres cuerpos, pero se preservan las imprecisiones producidas en el entrenamiento. Respecto de la segunda fila en las Figs. (4.32c y 4.32d), ambas técnicas presentan una mala agrupación en el

cuerpo de la derecha a los 50 km desde los 100 s hasta los 10000 s,

pero sin ningún problema para el cuerpo resistivo.

Veamos que sucede si acercamos entre si los bloques tal como se ve en la Fig. (4.21)

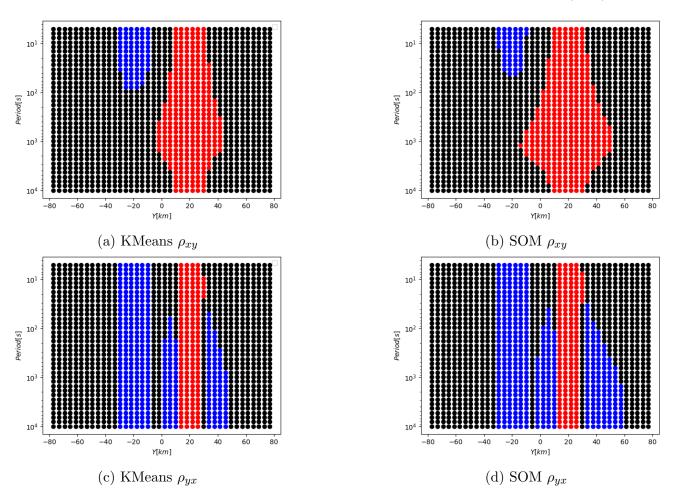


Figura 4.33: Resistividades TE/TM para 3 resistividades alejadas

Puede observarse que no hay una diferencia apreciable respecto del modelo entrenado o el predicho anteriormente, más alla del hecho de que captura el acercamiento de los bloques.

4.6.2. Variaciones de espesor

Para ilustrar mejor este escenario, se usó el mismo modelo geométrico que la Fig. (4.30) pero el valor del bloque derecho en vez de ser $0.1~\Omega m$ será $1~\Omega m$. Tratamos en primer término, en forma análoga a lo hecho en la sección anterior, el caso de reducción de espesor de uno de los bloques (especificamente el bloque derecho) como en la Fig. (4.23). Similar a la sección de variaciones de espesor del modelo de dos bloques, en la dirección TE mostrada en las Figs. (4.34a) y (4.34b) es capaz de predecir el cambio de espesor, con ciertas irregularidades y diferencias entre ambas técnicas en el dominio. La TM mostrada en las Figs. (4.34c) y (4.34c) no presenta cambios

apreciables respecto del modelo entrenado, solo la SOM presenta imprecisiones para periodos bajos en torno al borde de -40 km.

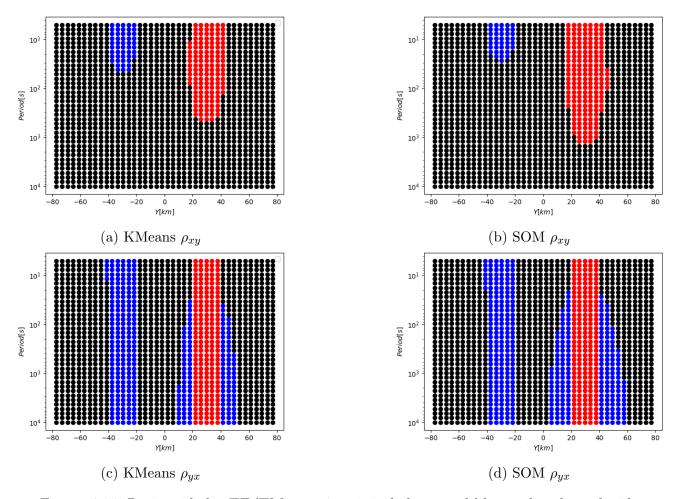


Figura 4.34: Resistividades TE/TM para 3 resistivdades con el bloque derecho reducido

Para contrastar la reducción de espesor, veamos los resultado del bloque derecho con el espesor duplicado en la Fig. (4.35). Los resultados para la componente TE mostrados en las Figs. (4.35a y 4.35b) son más claros que para el bloque reducido, el bloque de la izquierda para ambos grupos es bastante claro, exceptuando la diferencia en su dominio vertical. Respecto del bloque conductivo, ambos predicen bien el aumento del espesor, pero la SOM presenta un mayor ancho de irregularidades en los periodos intermedios que el KMeans. Respecto de la TM mostradas en las Figs. (4.35c y 4.35d), el KMeans puede predecir con pequeños detalles los bordes de ambos cuerpos y la SOM tiene problemas para discernir entre el cuerpo resistivo de la roca circundante.

4.6.3. Variaciones de resistividad

En este apartado se experimentaron 2 escenarios con la geometría trabajada en esta sección, pero con los valores de resistividad dados en la Tabla (4.4), donde ρ_c es la roca circundante, ρ_{izq} el bloque izquierdo y ρ_{der} el bloque derecho.

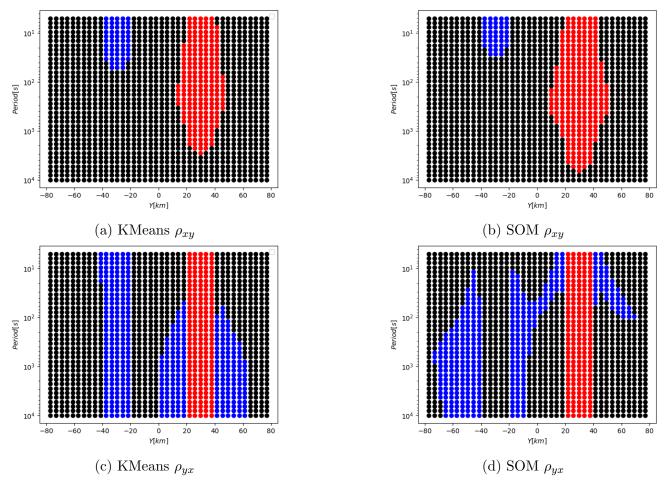


Figura 4.35: Resistividades TE/TM para 3 resistividades con el bloque derecho duplicado

Ensayo 1: Resistivo	Ensayo 2: Conductivo
$\rho_c = 100, \rho_{izq} = 1000, \rho_{der} = 10$	$000 \ \rho_c = 100, \ \rho_{izq} = 0.1, \ \rho_{der} = 10$

Cuadro 4.4: Ensayos de resistividad en Ω m.

Para el ensayo 1, se puede ver en las Figs. (4.36a y 4.36b), que la TE no puede discernir la diferencia entre ambos cuerpos, y la diferencia entre los grupos rojo y azul es debida a la transición de la resistividad en los mismos. Lo que no se ve afectado es la capacidad de detectar correctamente los bordes para la componente TM, como se puede ver en las Figs. (4.36c y 4.36d).

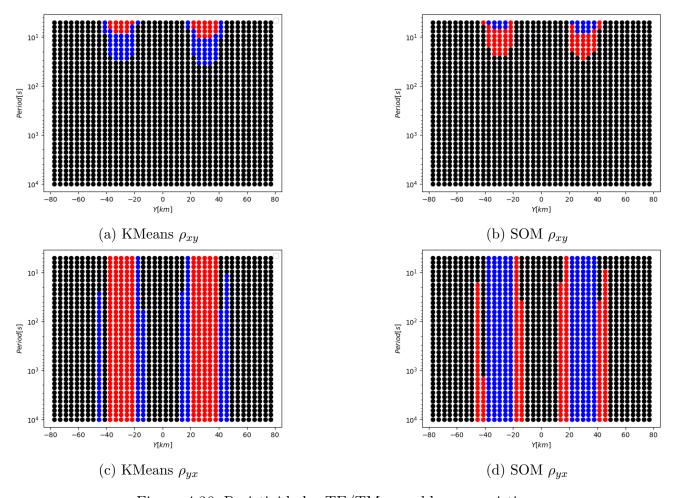


Figura 4.36: Resistividades TE/TM para bloques resistivos

Finalmente para el ensayo 2 en las Figs. (4.37a y 4.37b), la señal penetró considerablemente más en el bloque derecho que el izquierdo, lo cual es coherente porque el bloque izquierdo es más conductivo. Ambas técnicas solamente son capaces de detectar la transición de la resistividad pero no de discernir si un cuerpo es diferente del otro. En la TM, veasé las Figs. (4.37c y 4.37d) se sigue detectando los bordes laterales pero también sin poder distinguir entre los cuerpos.

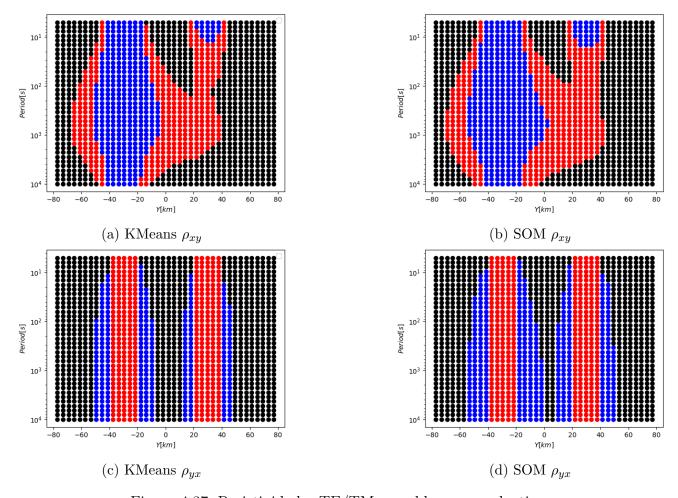


Figura 4.37: Resistividades TE/TM para bloques conductivos

4.7. Modelo Complejo

Como último ensayo analizamos el siguiente modelo complejo, inspirado del COMMEMI (Zhdanov et al., 1997), e ilustrado en la Fig. (4.38) que presenta cuatro resistividades únicas y distintas geometrías, pero sin buzamiento. Esta sección solo analizará el resultado de su entrenamiento y no de variaciones a un modelo entrenado.

Para la TE mostrada en las Figs (4.39a y 4.39c), ambas técnicas tienen comportamiento análogo, y con el detalle de poder detectar aproximadamente la forma de los estratos que se extienden desde -20 km hacia la derecha, Primordialmente lo que resaltan los algoritmos es la agrupación mediante zonas de transición distintas, siendo la de color negro la de menor valor de resistividad, y las que se encuentran por debajo de ella, estan asociadas a mayores valores de resistividad (no un valor exacto sino un rango) considerado que la roca de caja es de un valor 2 a 3 ordenes de magnitud mayor que el resto.

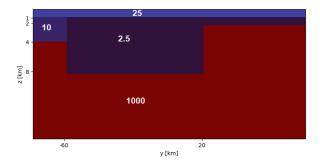


Figura 4.38: Modelo complejo

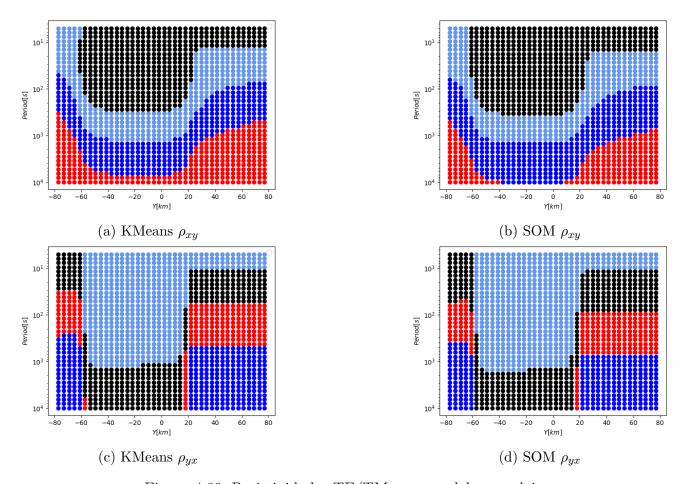


Figura 4.39: Resistividades TE/TM para modelo complejo

Finalmente, la TM mostrada en las Figs. (4.39c y 4.39d) delimita los bordes considerablemente aunque con pequeñas diferencias entre el sector izquierdo (lo que está a la izquierda del conglomerado de color azul aciano) respecto del derecho (lo que está a la derecha del conglomerado de color azul aciano y entre los periodos $10 \text{ s y } 10^4 \text{ s en el eje vertical}$). Estas pueden estar asociadas a que la profundidad del bloque de $10 \Omega \text{m}$ tiene un espesor mayor respecto de la porción de la capa de $2.5 \Omega \text{m}$ en el dominio [20-80] km, por lo cual al momento que se comienza a registrar información del basamento la señal del extremo izquierdo ya presenta un valor mayor que el de la derecha, ergo, la transición entre los conglomerados negro-rojo-azul comienza para periodos más bajos en el sector izquierdo, que para el derecho.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se analizaron y estudiaron las respuestas magnitetotelúricas de distintos modelos isótropos 2D, tanto homogéneos como heterogéneos para tener una mejor comprensión del método y el comportamiento de sus componentes. Una vez analizadas las respuestas y con un mayor entendimiento del método MT, se implementaron las técnicas de aprendizaje automático K-Means y SOM para diferentes ensayos con el fin de encontrar una aplicación de estas técnicas al método, analizar la factibilidad de usarlas y hacer una comparación entre ellas según una misma métrica de agrupamiento (puntuación de silueta).

Comenzando por el análisis de las técnicas, ambas presentan resultados similares en casi todos los escenarios y son capaces de diferenciar y delimitar adecuadamente bien los distintos cuerpos resistivos al menos para las dos variables estudiadas (ρ_{xy} y ρ_{yx}). Las componentes utilizadas presentaron resultados aceptables, aunque se podría experimentar con la creación y adición de más características (features) para obtener mejores resultados. También resaltar el hecho de que un buen puntaje de clasificación de silueta, no necesariamente está relacionado con un resultado con sentido físico.

Respecto del estudio de las variaciones en las geometrías de los modelos (tanto las laterales y de espesor) para los casos de dos y tres resistividades, los modelos entrenados pudieron detectar con resultados favorables estos cambios, a diferencia de lo que sucede con los cambios de resistividad. Para estos últimos un aspecto general que se pudo encontrar es que, las técnicas clasifican aceptablemente los cuerpos resistivos sumergidos en cuerpos más conductivos y, los clasifican con mayor dificultad para el caso recíproco (cuerpos conductivos en medios resistivos). En líneas generales cuando la componente de resistividad aparente en el modo TE es pasada al modelo de aprendizaje automático, debido a su suave transición entre distintas resistividades, es capaz de detectar aceptablemente los bordes laterales y verticales de las estructuras, pudiendo servir como una herramienta para mejorar la interpretación del subsuelo a partir de datos medidos en superficie. Por el otro lado, si es pasada la resistividad aparente en su modo TM, como su respuesta tiene asociada una discontinuidad del campo eléctrico en la dirección perpendicular a

los contactos entre cuerpos con distinta resistividad, no es capaz de detectar adecuadamente las transiciones verticales de los conglomerados, pero para la transición horizontal hace una distinción más estricta y precisa de los conglomerados que el modo TE, por lo que puede ser un dato adicional para poder delimitar aún mejor los bordes laterales de las estructuras al momento de su interpretación.

Por último es menester resaltar que en este trabajo se utilizaron algunas de las componentes 2D del método. Un paso natural en la continuación del mismo sería la incorporación de un número mayor de variables para mejorar el rendimiento de los modelos, y también la consideración de extender este estudio al dominio 3D.

Bibliografía

- [1] Arthur, D., & Vassilvitskii, S. (2007). k-means++: The Advantages of Careful Seeding.
- [2] Bahr, K. (1988). Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: Regional induction and local telluric distortion. Journal of Geophysics, 62, 119-127.
- [3] Bauer, K., Munoz, G., & Moeck, I. (2012). Pattern recognition and lithological interpretation of collocated seismic and magnetotelluric models using self-organizing maps. *Geophysical Journal International*, 189, 984–998. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2012.05402.x
- [4] Berdichevsky, M. N., Bezruk, I. A., & Chinavera, O. M. (1973). Magnetotelluric sounding with the use of mathematical filters. Izv. Akad. Nauk. SSSR Fiz. Zeml., 3, 72-92.
- [5] Berdichevsky, M. N., & Dmitiriev, V. I. (1976). Basic principles of interpretation of mangetotelluric sounding curves. In A. Adam (Ed.), Geoelectric and geothermal studies, KAPG geophysical monograph (pp. 221-221). Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [6] Cagniard, L. (1953). Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, 18, 605-635.
- [7] Coléou, T., Poupon, M., & Azbel, K. (2003). Unsupervised seismic facies classification: A review and comparison of techniques and implementation. *The Leading Edge*, 22(9), 853-858.
- [8] Greiner, T. A. L., Lie, J. E., Kolbjørnsen, O., Evensen, A. K., Nilsen, E. H., Zhao, H., Demyanov, V., & Gelius, L.-J. (2022). Unsupervised deep learning with higher-order total-variation regularization for multidimensional seismic data reconstruction. *GEOPHYSICS*.
- [9] Groom, R. W., & Bailey, R. C. (1989). Decomposition of magnetotelluric impedance tensors in the presence of local three-dimensional galvanic distortion. Journal of Geophysical Research, 94(B2), 1913-1925.
- [10] Jiracek, G. (1990). Near-surface and topographic distortions in electromagnetic induction. Surveys in Geophysics, 11(2-3), 163-203. doi:10.1007/BF01901659.
- [11] Jones, A. G. (1988). Static shift of magnetotelluric data and its removal in a sedimentary basin environment. Geophysics, 53(7), 967-978. doi:10.1190/1.1442533

- [12] Jones, A. (1983b). The problem of current channelling: A critical review. Geophysical Surveys, 6(1-2), 79-122. doi:10.1007/BF01453996.
- [13] Junge, A. (1996). Characterization of and correction for cultural noise. Surveys in Geophysics, 17(4), 361-391. doi:10.1007/Bf01901639
- [14] Kelbert, A., Meqbel, N., Egbert, G. D., & Tandon, K. (2014). ModEM: A modular system for inversion of electromagnetic geophysical data. Computers & Geosciences, 66, 40-53.
- [15] Kohonen, T. (1982). Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological Cybernetics*, 43, 59-69.
- [16] Ledo, J. (2006). 2-D versus 3-D magnetotelluric data interpretation. Surveys in Geophysics, 27(5), 511-543.
- [17] Ledo, J., Queralt, P., Martí, A., & Jones, A. G. (2002). Two-dimensional interpretation of three dimensional magnetotelluric data: An example of limitations and resolution. Geophysical Journal International, 150(1), 127-139. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-246X.2002.01705.x
- [18] MacQueen, J. B. (1967). Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In L. M. Le Cam & J. Neyman (Eds.), *Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 1, pp. 281–297). California: University of California Press.
- [19] Miensopust, M. P. (2010). Multidimensional Magnetotellurics: A 2D Case Study and a 3D Approach to Simultaneously Invert for Resistivity Structure and Distortion Parameters. Ph.D. thesis, National University of Ireland, Galway, Ireland.
- [20] Naeem, S., Ali, A., Anam, S., & Ahmed, M. M. (2023). An Unsupervised Machine Learning Algorithms: Comprehensive Review. *International Journal of Computing and Digital Systems*, 13(1).
- [21] Neves, A. S. D. (1957). The generalized magneto-telluric method. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [22] Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes: a graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20, 53-65.
- [23] Saad, O. M., Fomel, S., Abma, R., & Chen, Y. (2023). Unsupervised deep learning for 3D interpolation of highly incomplete data. *GEOPHYSICS*.
- [24] Spichak, V., & Popova, I. (2000). Artificial neural network inversion of magnetotelluric data in terms of three-dimensional earth macroparameters. *Geophysical Journal International*, 142, 15–26.

- [25] Tikhonov, A. N. (1950). On determination of electric characteristics of deep layers of the earth's crust. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 151, 295-297.
- [26] Vozoff, K. (1972). The magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins. Geophysics, 37(1), 98–141.
- [27] Zhang, P., Roberts, R. G., & Pedersen, L. B. (1987). Magnetotelluric strike rules. Geophysics, 52(3), 267-278. doi:10.1190/1.1442301.
- [28] Zhao, L., Zhu, X., Zhao, X., You, Y., Xu, M., Wang, T., & Geng, J. (2024). Deep carbonate reservoir characterization using multiseismic attributes: A comparison of unsupervised machine-learning approaches. *GEOPHYSICS*.
- [29] Zhdanov, M. S., Varentsov, I. M., Weaver, J. T., Golubev, N. G., & Krylov, V. A. (1997). Methods for modelling electromagnetic fields: Results from COMMEMI the international project on the comparison of modelling methods for electromagnetic induction. *Journal of Applied Geophysics*, 37, 133-271.