Institut Fourier, Université Grenoble Alpes / CNRS
100 rue des maths - BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères
France

Rapport de stage assistant ingénieur 1A

Étude de quelques équations aux dérivées partielles

Roblet Nicolas

Du 23 Mai au 13 Juillet 2022, 8 semaines

Maitre de stage : Éric Dumas

Campagne : 2021/2022 stage AI en 1A

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation personnelle

Ayant une forte attirance pour les Mathématiques et étant particulièrement curieux au sujet de la recherche dans les sciences, j'ai naturellement eu la volonté de réaliser un stage en laboratoire de Mathématiques dès la fin de la première année de mes études d'ingénierie à l'Ensimag. Celui-ci a été réalisé dans le dessein de découvrir le métier d'enseignant-chercheur, d'en apprendre plus sur les Mathématiques et de mieux comprendre son utilisation. Le sujet principal de ce stage était donc la découverte de professions m'attirant et qui m'était totalement inconnues.
J'ai ainsi réalisé des candidatures spontanées aux prés des chercheurs étant lié de prés aux centres d'intérêts du master MathApp dans l'objectif de faire un premier pas dans le monde vers lequel je souhaite m'orienter. Le choix du laboratoire Fourier a été évident car il est un des laboratoires de Mathématiques de l'UGA et est étroitement lié à l'UFR IM^{2}AG que j'allais rejoindre.

1.2 Problématique

Les technologies de notre quotidien et la compréhension des phénomènes du monde réel sont en majeur partie dû à l'étude des équations aux dérivées partielle que l'on notera EDP par la suite. La modélisation de ce qui nous entoure nous achemine souvent à l'étude d'EDP, la compréhension de celle-ci nous permet de comprendre le comportement général ainsi que l'influence des paramètres du modèle.
Étant donné leur importante fréquence d'apparition dans les sciences telle que les études de phénomène physique, il est nécessaire d'attacher beaucoup d'efforts à leur recherche par leur diversité et leur complexité. Les résultats élaborés sur les EDP ne se généralisent pas uniquement à leur résolution formelle. Cela peut-être dû à l'impossibilité d'expliciter une solution comme avec par exemple certaine EDP non-linéaire avec le célèbre effet papillon. Cependant, leurs études ne s'arrêtent pas là, il est tout de même possible de prouver certaines propriétés très intéressantes à leur sujet permettant de tout de même répondre à certaines questions et d'étendre nos connaissances à leur sujet.
La variété des EDP s'étend au rythme du développement des connaissances en physique, nous pouvons par exemple citer les noms tels que Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les EDP de la mécanique quantique ou encore celui de Fourier pour l'équation de la chaleur.

1.3 Objectif

L'objectif de mon travail personnel que nous nous étions fixé avec Monsieur Dumas était la réalisation de l'esquisse d'un cours introductif à l'étude des EDP à travers l'étude de certaines de celle-ci.
Cela permettait l'introduction de certaines notions fondamentales telle que la transformée de Fourier, la classe de Schwartz ou encore les espaces de Sobolev. De même, un des objectifs était d'étendre mes capacités en analyse Mathématiques et de développer ma capacité à fournir un travail personnel afin de maîtriser, approfondir des notions qui m'étaient inconnues. La réalisation d'un tel projet était aussi l'occasion d'apprendre la rédaction d'un document scientifique.
De plus, l'un des objectifs de ce stage était de découvrir le monde de la recherche ainsi que la profession d'enseignant-chercheur.

1.4 Travail réalisé

La majorité du travail réalisé durant ce stage était de la recherche personnel au sein de la bibliothèque du laboratoire. Le reste du temps, je travaillais avec Monsieur Dumas sur ce que j'avais réalisé afin de relever les erreurs, les pistes d'améliorations et amener des premiers éléments de réflexion sur les prochains travaux. De plus, j'ai eu l'occasion d'accompagné Monsieur Dumas lors de séminaire durant lesquelles des chercheurs de diverses universités présentaient leur sujet de recherche. L'objectif principal restant la rédaction d'un document, j'ai aussi passé beaucoup de temps à maîtriser le langage LaTeX et appréhender la structure de ce document. Dans la volonté de faire un travail complet, il a été ajouté des éléments introductifs qui ont été étudiés lors de ma première année d'étude à l'Ensimag.

2 Généralité sur la transformée de Fourier et la classe de Schwartz

La plupart des résultats sont ici présentés en dimension 1 pour le rendre plus lisible, ils sont généralisable à la dimension $d \in \mathbb{N}$ sous réserve de quelques manipulations.

2.1 Rappel de résultats utiles sur les intégrales

Théorème 2.1.1. de domination
Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^d$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $A \times I$.
Soit $a \in I$, on définit pour tout $x \in A$ la fonction $F : t \mapsto \int_a^t f(u,x)du$.

1. ***Continuité :*** *On suppose que*
   — $t \longmapsto f(t,x)$ *est continue sur* I *pp* $x \in A$.
   — $\exists g \in L^1(A),\ \forall t \in I, |f(t,x)| \leq g(x)$ *pp* $x \in A$.
   Alors F est bien définie et est continue sur I pour p.t. x.
2. ***Dérivabilité :***
   — *On suppose 1.*
   — *Il existe $N \subset A$ de mesure nulle tel que pour tout $x \in A \setminus N$, $t \mapsto f(t,x)$ soit continuement différentiable sur I.*
   — $\exists h \in L^1(A),\ \forall t \in I, \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \leq h(x)$ *pp* $x \in A$.
   Alors F est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et continuement différentiable sur I.

Théorème 2.1.2. de Tonelli
Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$. Alors :

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_2 \right)\ \mathrm{d}x_1 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_1 \right)\ \mathrm{d}x_2 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$$

avec égalité dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.
En particulier si $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ alors les termes de l'égalité sont des réels.

Théorème 2.1.3. de Fubini
Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$. Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ de signe quelconque. Alors on a :
— $x_2 \longmapsto f(x_1,x_2) \in L^1(\Omega_2)$ *pp* $x_1 \in \Omega_1$ *et* $x_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_2 \in L^1(\Omega_1)$.
— $x_1 \longmapsto f(x_1,x_2) \in L^1(\Omega_1)$ *pp* $x_2 \in \Omega_2$ *et* $x_2 \longmapsto \int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_1 \in L^1(\Omega_2)$.
— $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_2 \right)\ \mathrm{d}x_1 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_1 \right)\ \mathrm{d}x_2 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1,x_2)\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}x_2$.

2.2 Principaux résultats sur la transformée de Fourier

Définition 2.2.1. Transformée de Fourier
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la ***transformée de Fourier*** *(TF) de f comme la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi}\ \mathrm{d}x$$

Théorème 2.2.2. de Riemann-Lebesgue
Soit $\mathfrak{F}$ l'opérateur transformée de Fourier sur L^1, $\mathfrak{F}(f) = \hat{f}$. Alors :

1. *$\mathfrak{F}$ est un opérateur linéaire de $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ dans $(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.*
2. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{|\xi| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.*

Définition 2.2.3. Produit de convolution
Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:
— $y \longmapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R})$
— $y \longmapsto f(y)g(x-y) \in L^1(\mathbb{R})$

On définit la convolé de f par g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\ \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\ \mathrm{d}y = (g * f)(x)$$

et on a $f * g = g * f \in L^1(\mathbb{R})$.

Lemme 2.2.4. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Lemme 2.2.5. *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons que :*

$$fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

2.3 Présentation et premiers résultats au sujet de la classe de Schwartz

Définition 2.3.1. Décroissance rapide *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite "à décroissance rapide" si :*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \to +\infty} x^p f(x) = 0$$

Définition 2.3.2. *On appelle espace de Schwartz et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :*

1. *$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$;*
2. *$\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est à décroissance rapide.*

Lemme 2.3.3. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier, c'est-à-dire $\mathfrak{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Lemme 2.3.4. *L'espace de Schwartz est stable par multiplication par tout polynôme*

Lemme 2.3.5. *La transformée de Fourier est une application bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 2.3.6. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Lemme 2.3.7. *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\partial_{x_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) = 2i\pi\xi_j \hat{f}(\xi).$$

2.3.1 Preuve des résultats

Théorème 2.2.2 de Riemann-Lebesgue

Démonstration.

1. D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, comme :
   (a) $\xi \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue pp $x \in \mathbb{R}$;
   (b) $\left|\xi \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}\right| \leq |f(x)|$ avec $f \in L^1(\mathbb{R})$

   alors $\xi \longmapsto \hat{f}(\xi)$ est continue ; L'opérateur $\mathfrak{F}$ va donc bien de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
   $\mathfrak{F}$ est continue et on a même : $\|\mathfrak{F}(f) - \mathfrak{F}(g)\|_\infty \leq \|f - g\|_1$
   Comme $\mathfrak{F}$ est linéaire (par linéarité de l'intégrale) et continue alors $\|\mathfrak{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$.
   En effet, $\left|\hat{f}\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-2i\pi x\xi}\right|\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \mathrm{d}x = \|f\|_1$ donc $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. Par densité : Soit $g \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, la densité nous donne l'existence d'un $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq M \Rightarrow g(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-M}^{M} \underbrace{g(x)}_{=v} \underbrace{e^{-2i\pi x\xi}}_{=u'} \ \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{IPP}}{=} - \int_{-M}^{M} \frac{g'(x)}{-2i\pi\xi} e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x + \left[\frac{g(x)}{-2i\pi\xi} e^{-2i\pi x\xi} \right]_{x=-M}^{x=M} \\
&= \frac{1}{-2i\pi\xi} \int_{-M}^{M} e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x - \underbrace{\frac{1}{-2i\pi\xi} \left(g(M) e^{-2i\pi M\xi} - g(-M) e^{2i\pi M\xi} \right)}_{=0 \text{ car } g=0 \text{ pour } |x| \geq M \ (g \text{ est continue})}
\end{aligned}$$

$$|\hat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi |\xi|} \int_{-M}^{M} g'(x) \ \mathrm{d}x \leq \frac{\|g'\|_1}{2\pi |\xi|} \underset{\xi \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$ fixé.
D'après le théorème de densité, $\exists g \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}) / \|f-g\|_1 \leq \epsilon$.
Alors $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} (f-g)(x) e^{-2i\pi x\xi} \ \mathrm{d}x$.
Donc $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{\|g'\|_1}{2\pi|\xi|} + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \underbrace{\left|e^{-2i\pi x\xi}\right|}_{=1} \ \mathrm{d}x \leq \frac{\|g'\|_1}{2\pi|\xi|} + \|f-g\|_1$.

Ainsi, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $|\xi| \geq A \Rightarrow \frac{\|g'\|_1}{2\pi|\xi|} \leq \epsilon$. Donc $|\xi| \geq A \Rightarrow \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq 2\epsilon \Rightarrow \hat{f}(\xi) \underset{|\xi| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

Lemme 2.2.4

Démonstration.
Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
On définit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni x, y \mapsto f(x-y) g(y) e^{-2i\pi xy}$. D'après Tonelli, avec $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ il vient :

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad f \hat{*} g(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-2i\pi x \cdot \xi} \ \mathrm{d}x \right) g(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\tau_y f}(\xi) g(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-2i\pi y \cdot \xi} g(y) \ \mathrm{d}y \\
&= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi y \cdot \xi} g(y) \ \mathrm{d}y = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Donc $f \hat{*} g = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

□

Lemme 2.2.5

Démonstration.
Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Nous allons montrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d), \quad |x^\alpha \partial_x^\beta (fg)|_\infty < \infty.$$

La formule de Leibniz en dimension d nous donne :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_x^\beta (fg) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\partial_x^\gamma f)(\partial_x^{\beta-\gamma} g).$$

Ainsi, il vient que :

$$\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}^d),\quad \begin{aligned}|x^\alpha\partial_x^\beta(fg)|_\infty &= |\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}(x^\alpha\partial_x^\gamma f)(\partial_x^{\beta-\gamma}g)| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|x^\alpha\partial_x^\gamma f|\,|\partial_x^{\beta-\gamma}g|.\end{aligned}\tag{1}$$

On en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad p_n(fg)\leq\left(\max_{|\beta|\leq n}\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\right)p_n(f)p_n(g)<\infty.$$

Nous en concluons que $fg\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Lemme 2.3.3

Démonstration.
Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on veut montrer que $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On sait que $f\in L^1(\mathbb{R})$ et f est à décroissance rapide donc d'après le corollaire , $\hat{f}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Reste à montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \hat{f}^{(n)}$ est à décroissance rapide, c'est-à-dire $\forall p\in\mathbb{N},\ \lim_{|\xi|\to+\infty}\xi^p\hat{f}^{(n)}(\xi)=0$.

$$\begin{aligned}\forall\xi\in\mathbb{R},\ \xi^p\hat{f}^{(n)}(\xi) &= \xi^p\mathfrak{F}(x\longmapsto(-2i\pi x)^n f(x))(\xi)\\ &= \frac{1}{(2i\pi)^p}\mathfrak{F}(\left(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}(x\longmapsto(-2i\pi x)^n f(x))\right)(\xi)\\ &= (2i\pi)^{n-p}\mathfrak{F}(\left(\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}(x\longmapsto x^n f(x))\right)(\xi)\\ \text{Or } f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) &\Rightarrow x\longmapsto x^p f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}x\longmapsto x^n f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.4

Démonstration.
Pour montrer que l'espace de Schwartz est stable par multiplication par tout polynôme il suffit de montrer qu'il est stable par multiplication par un monôme.
Soit $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $p\in\mathbb{N}$, on a trivialement que $x\mapsto x^p f(x)$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$. L'on peut donc écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}^d,\quad \partial(x^p f(x))(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\underbrace{x^{p-k}f^{(k)}(x)}_{\text{à décroissance rapide}}.$$

□

Lemme 2.3.5

Démonstration.
Soit $f\in\mathcal{S}$, montrons que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Étant donné que $f\in\mathcal{S}$, on a :

$$\forall\xi\in\mathbb{R}^d,\quad \widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^d$ car

$$\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,|f(x)e^{-2i\pi x\xi}|\leq|f(x)|\text{ avec } f\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On a que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}^d$ et admet pour dérivé $\xi \mapsto -2i\pi x f(x)e^{-2i\pi x\xi}$.
Or
$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |-2i\pi x f(x)e^{-2i\pi x\xi}| \leq |2i\pi x f(x)|,$$
avec $x \mapsto 2i\pi x f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ car la classe de Schwartz est stable par multiplication par tout polynôme.
Nous en concluons grâce au théorème de dérivation d'intégrale à paramètre que $f \in \mathcal{C}^1$, cette preuve se généralise pour la dérivée d'ordre $\forall p \in \mathbb{N}$ de f.
On obtient donc que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a aussi prouvé que
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \partial^n \widehat{f}(\xi) &= (-2i\pi)^n \int_{\mathbb{R}^d} x^n f(x)e^{-2i\pi x\xi}dx \\ &= (-2i\pi)^n \mathcal{F}(x \mapsto x^n f(x))(\xi)\end{aligned}$$

Montrons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{f}^{(n)}$ est à décroissance rapide.
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \xi^p \partial^n \widehat{f}(\xi) &= \xi^p (-2i\pi)^n \mathcal{F}(x \mapsto x^n f(x))(\xi) \\ &= (2i\pi\xi)^p (-1)^n (2i\pi)^{n-p} \mathcal{F}(x \mapsto x^n f(x))(\xi) \\ &= (-1)^n (2i\pi)^{n-p} \mathcal{F}(\partial^p (x \mapsto x^n f(x)))(\xi) \\ &\underset{|\xi \to \infty|}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$
Cette limite se justifie grace au théorème de Riemann-Lebesgue car $\partial^p(x \mapsto x^n f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et ceux grâce aux propriétés de fermeture de $\mathcal{S}$.
Nous en concluons que que la tranformée de Fourier applique l'espace $\mathcal{S}$ dans lui-même.
Soit $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut donc appliqué $\mathcal{F}^{-1}$ à celle-ci.
Or nous avons la propriété suivante de $\mathcal{F}^{-1}$:
$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = f(x) \text{ partout où } f \text{ est continue, donc sur } \mathbb{R}^d.$$
Nous en concluons que la transformée de Fourier est une application bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

□

Lemme 2.3.6

Démonstration.
Prenons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a alors que f est à décroissance rapide.
Ainsi :
$$\begin{aligned}\exists M \in \mathbb{R}_+/ \text{ si } x \in \mathbb{R}^d - \mathcal{B}_f(0,M) &\Rightarrow |(1+|x|^2)^d f(x)| \leq 1 \\ &\Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|^2)^d} \in L^1(\mathbb{R}^d - \mathcal{B}_f(0,M)).\end{aligned}$$
Or vu que f est continue, elle est majorée sur tout compact.
$$\exists K \in \mathbb{R}_+/ \text{ si } x \in \mathcal{B}_f(0,M), \quad |f(x)| \leq K \in L^1(\mathcal{B}_f(0,M))$$
Nous en concluons que f est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. □

Lemme 2.3.7

Démonstration.
On note que ce lemme a déja été prouvé lors du de la preuve du lemme 2.3.5. Nous le revoyons ici de manière un peu plus précise.
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, montrons que $\forall j \in \{1,\ldots,d\}$, $\partial_{x_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Vu que f est $\mathcal{C}^\infty$ alors évidemment pour tout $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\partial_{x_j} f$ l'est aussi.
Étant donné que f est dans la classe de Schwartz, on a la propriété suivante
$$\forall j \in \{1,\ldots,d\}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \partial_{x_j}(\partial_x^\alpha f) = \partial_x^\alpha(\partial_{x_j} f) \text{ est a decroissance rapide.}$$

On en conclut que $\forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \partial_{x_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Par définition de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}^d \qquad \widehat{\partial_{x_j} f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(x) e^{-2i\pi\xi\cdot x} dx \\ &\overset{IPP}{=} [f(x)e^{-2i\pi\xi\cdot x}]_{\mathbb{R}^d} + 2i\pi\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2i\pi\xi\cdot x} dx \\ &= 2i\pi\xi_j \widehat{f}(\xi). \end{aligned} \tag{2}$$

On note que étant donné que f est dans la classe de Schwartz

$$\underset{|\xi|\to+\infty}{lim} |f(\xi)| = 0.$$

De plus $||\mathbb{R}^d \ni y \mapsto \exp(-2i\pi y)||_\infty \leq 1$, nous avons bien que le terme entre crochet vaut zéro. □

3 Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur linéaire homogène avec condition initiale dans la classe de Schwartz

3.1 Résolution du problème de Cauchy

3.1.1 Présentation du problème

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, nous allons nous intéresser à l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$.
On considère toutes les fonctions comme étant à valeurs dans $\mathbb{C}$, ainsi on notera plus simplement $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ pour $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (de même pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).
Nous noterons $|\cdot|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$ et nous abrègerons $x \mapsto u(t,x)$ par $u(t,\cdot)$.

Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u & = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) & = u_0/ \end{cases} \tag{3}$$

$$\text{où } \Delta u = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u.$$

Définition 3.1.1. *On dit que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ est uniformément dans la classe de Schwartz si*

$$\forall T > 0, \ \forall j \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} ||x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta \partial_t^j u(t,x)||_\infty < \infty. \tag{4}$$

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.2. *Pour toute condition initiale $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ uniformément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et solution de* (3).

3.1.2 Étude du système

L'objectif de cette partie sera de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (1). Nous allons débuter par une phase d'analyse du problème.

Supposons que l'on dispose d'une solution u donnée par le Théorème 3.1.2. Nos hypothèses nous donnent en prenant $j = 0$ dans (4) que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a $u(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut donc considérer la transformée de Fourier de cette fonction et de ses dérivées en espace car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ et parce que la classe de Schwartz est stable par dérivation. En choisissant $j = 1$ dans (4) il vient que $\partial_t u(t,\cdot)$ appartient aussi à la classe de Schwartz et ce pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
Nous pouvons ainsi considérer la transformée de Fourier de (3). Il vient par linéarité de cette opération que u vérifie aussi

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u} - \widehat{\Delta u} & = 0 \text{ sur } \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ \widehat{u(0,\cdot)} & = \widehat{u_0}. \end{cases}$$

Définition 3.1.3. *Lorsque $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ uniformément dans la classe de Schwartz, on définit sa transformée de Fourier partielle (en espace) $\widehat{f}$ par*

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \quad & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ & (t,\xi) \mapsto \widehat{f}(t,\xi) = \widehat{f(t,\cdot)}(\xi). \end{aligned}$$

Lemme 3.1.4. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ uniformément dans la classe de Schwartz.*
Alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est uniformément dans la classe de Schwartz et

$$\forall j \in \{1,\dots,d\}, \forall t \geq 0, \qquad \partial_t^j \widehat{f}(t,\cdot) = \widehat{\partial_t^j f(t,\cdot)}.$$

Les lemmes 2.3.7 et 3.1.4 nous permettent d'écrire que $\widehat{u}$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,\xi) + 4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(t,\xi) & = 0 \text{ pour tous } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \widehat{u}(0,\cdot) & = \widehat{u_0}. \end{cases} \tag{5}$$

En résolvant le problème de Cauchy (5) associé à une équation différentielle ordinaire, à ξ fixé, il nous vient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} = \widehat{u_0}(\xi)G_{4\pi^2 t}(\xi),$$

où on a posé, pour tout $a \in \mathbb{C}$: $\mathcal{G}_a = e^{-a|\cdot|^2}$.
Comme $\widehat{u_0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{G}_{4\pi^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, le lemme 2.2.5 nous permet d'assurer que pour tout $t > 0$ nous avons unicité de u :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u(t,\cdot)})$$

Aprés la question de l'unicité, nous allons maintenant montrer l'existence d'une solution à notre problème. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad v(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u_0}\mathcal{G}_{4\pi^2 t}).$$

Ainsi, $v(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pout tout $t \geq 0$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \widehat{v}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\mathcal{G}_{4\pi^2 t}(\xi).$$

Dans l'objectif de montrer que v est le bon cancidat nous allons commencer par prouver que $\widehat{v} \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, que $\widehat{v}$ est uniformément dans la classe de Schwartz et pour finir vérifie (5).
Ainsi les lemmes analogue aux lemmes 2.3.7 et 3.1.4, en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}^{-1}$, assureront que v est la fonction vérifiant (3), étant de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et étant uniformément dans la classe de Schwartz.

Nous allons montrer que $\widehat{v}$ est de classe C^∞.
Pour cela on va commencer par montrer que $(t,\xi) \mapsto \mathcal{G}_{4\pi^2 t}(\xi)$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Il est connu que

$$\begin{aligned} & (t,\xi) \mapsto |\xi|^2 \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d), \\ \text{si bien que} \quad & (t,\xi) \mapsto t|\xi|^2 \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d), \\ \text{et} \quad & (t,\xi) \mapsto \exp(-4\pi^2 t|\xi|^2) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d), \end{aligned}$$

car la composition par exponentielle conserve le caractère C^∞.
De plus nos hypothèses nous assure que $\widehat{u_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc

$$(t,\xi) \mapsto \widehat{u_0}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d).$$

Nous en déduisons que $\widehat{v}$ est le produit de fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, par conséquent que $\widehat{v} \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

Nous allons maintenant montrer que $\widehat{v}$ est uniformément dans la classe de Schwartz.

Définition 3.1.5. *On définit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in C^n(\mathbb{R}^d), \quad p_n(f) = \max\left(\{||x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta f(x)||_\infty \text{ où } |\alpha|, |\beta| < n\}\right).$$

Lemme 3.1.6. *Une fonction f est dans la classe de Schwartz si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $p_n(f) < \infty$.*

Nous avons que

$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^j \widehat{v}(t,\xi)| &= \left| \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\alpha \partial_\xi^\gamma \widehat{u_0}(\xi) \partial_\xi^{\beta-\gamma} \left((-4\pi^2|\xi|^2)^j \mathcal{G}_{4\pi^2 t}(\xi)\right) \right| \\ &\leq \sum K |\partial^\gamma \widehat{u_0}(\xi)| \xi|^l G_{4\pi t}(\xi)|\end{aligned}$$

où la somme est finie, $\gamma \in \mathbb{N}^d$, $K \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{N}$ dépendent des indices de sommation.
Or nous savons que

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^d, \forall l \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |\partial^\gamma \hat{u}_0(\xi)|\xi|^l G_{4\pi t}(\xi)| \leq |\partial^\gamma \hat{u}_0(\xi)|\xi|^l| < \infty$$

Car l'espace de Schwartz est stable par dérivation et par multiplication par tout polynôme.
Nous en concluons que

$$\forall T > 0, \ \forall j \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,$$
$$\sup_{t \in [0,T]} ||\xi \mapsto \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_t^j \widehat{v}(t,\xi)||_\infty < \infty.$$

Pour finir, nous avons que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \partial_t \widehat{v}(t,\xi) = -4\pi^2|\xi|^2 \widehat{u_0}(\xi) \mathcal{G}_{4\pi^2 t}(\xi) = -4\pi^2|\xi|^2 \widehat{v}(t,\xi),$$

et que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{v}(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi).$$

En d'autres termes, $\widehat{v}$ vérifie (5).
En conclusion v est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, uniformément dans la classe de Schwartz et solution de (3), nous avons donc prouver le Théorème 3.1.2.

3.1.3 Preuve des lemmes

Lemme 3.1.4

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ uniformément dans la classe de Schwartz.
Montrons que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{f}$ est uniformément dans la classe de Schwartz.
On commence par montrer par récurrence que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Initialisation : pour $k = 1$,

Nous allons appliquer $d+1$ fois le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre.

Soit $j \in \{1, \ldots, d\}$.
On a que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\xi_l \in \mathbb{R}$, $l \neq j$, la fonction $\xi_j \mapsto \widehat{f}(t, \xi_1, .., \xi_j, .., \xi_d) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x) e^{-2i\pi \xi \cdot x} dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Nous remarquons que

$$\begin{aligned}\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\partial_{\xi_j} f(t,x) e^{-2i\pi^2 \xi \cdot x}| &= |-2i\pi x_j f(t,x) e^{-2i\pi^2 \xi \cdot x}| \\ &\leq 2i\pi |x_j f(t,x)|.\end{aligned}$$

Or pour tout t potisif, la fonction $\xi \mapsto 2i\pi|x_j f(t,x)|$ est sommable sur $\mathbb{R}^d$ étant donné que $f(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Ainsi le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre nous assure que la fonction $\widehat{f}$ est continuement

dérivable par rapport à sa variable d'espace ξ_j sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, et ce pour j quelconque dans $\{1, \dots, d\}$. De même nous remarquons que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\partial_t f(t,x) e^{-2i\pi\xi\cdot x}| \leq |\partial_t f(t,x)|$$

Vu que f est uniformément dans la classe de Schwartz, nous avons que pour tout t positif, $\partial_t f(t, \cdot)$ est aussi dans la classe de Schwartz.
Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \exists M \in \mathbb{R}_+ / \text{ si } x \in \mathbb{R}^d - \mathcal{B}_f(0, M) \Rightarrow |\partial_t f(t,x)| \leq \frac{1}{(1+|x|^2)^d}$$

Or $\partial_t f$ est continue et donc majorée sur la boule fermée centrée de rayon M, nous pouvons donc construire une fonction de L^1 dominante.
Ainsi le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre nous assure que la fonction $\widehat{f}$ est continuement dérivable par rapport à sa variable de temps t sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.
Nous en concluons que $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Hérédité : Soit $k > 1$, nous supposons que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
D'aprés notre hypothèse de récurrence, nous avons la continuité des dérivées d'ordre $k-1$ de $\widehat{f}$, il ne nous reste plus qu'à prouver la domination de la fonction intégrer pour appliquer le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre afin de montrer que $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Nous remarquons que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d \text{ vérifiant } j + \sum_{l=1}^{d} \beta_l = k, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+,$$
$$|\partial_\xi^\beta \partial_t^j f(t,x) e^{-2i\pi\xi\cdot x}| \leq |P(x) \partial_t^j f(t,x)| \text{ où P est un polynôme.}$$

Or vu que f est uniformément dans la classe de Schwartz, pour tout t positif $\partial_t^j f(t, \cdot)$ est dans la classe de Schwartz, donc $P(\cdot)\partial_t^j f(t, \cdot)$ aussi. De la même manière que dans l'Initialisation nous pouvons construire une fonction dominante sommable.
Le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre assure alors $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
Nous en concluons ainsi que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

Faisons de nouveau une récurrence pour montrer que $\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, \quad \partial_t^j \widehat{f}(t, \cdot) = \widehat{\partial_t^j f(t, \cdot)}$.
Initialisation : pour $j = 1$,
Nous avons l'égalité suivante :

$$\forall (t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\partial_t f}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t f(t, \xi) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Nous allons utilisé le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre.
On a que pour tout $t \geq 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ que

$$|\partial_t f(t, \xi) e^{-2i\pi\xi x}| \leq |\partial_t f(t, \xi)|$$

avec $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$.
De plus il est clair que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ l'application $t \mapsto f(t, \xi) e^{-2i\pi\xi}$ est continuement différentiable sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in \mathbb{R}^d /$$
$$|\partial_t (f(t, \xi) e^{-2i\pi\xi x})| = |\partial_t f(t, \xi) e^{-2i\pi\xi x}| \leq |\partial_t f(t, \xi)| \leq \frac{C}{(1+|\xi|^2)^d}.$$

La dernière inégalité se justifie du fait que pour tout $t \geq 0$ on a que $\partial_t f(t, \cdot)$ est dans la classe de Schwartz donc a une décroissance plus rapide que polynomiale.

Hérédité : Soit $j > 0$,

On suppose que $\forall t \geq 0, \quad \widehat{\partial_t^{j-1} f(t,\cdot)} = \partial_t^{j-1} \widehat{f}(t,\cdot)$.

Nous avons alors

$$\forall t \geq 0, \quad \partial_t^j \widehat{f}(t,\cdot) = \partial_t \partial_t^{j-1} \widehat{f}(t,\cdot) = \partial_t \widehat{\partial_t^{j-1} f(t,\cdot)} = \widehat{\partial_t^j f(t,\cdot)}.$$

Nous allons maintenant montrer que $\widehat{f}$ est uniformément dans la classe de Schwartz.
D'aprés ce que l'on a fait précédemment, l'on peut écrire que

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \partial_\xi^\beta \partial_t^j \widehat{f}(t,\cdot) = \partial_\xi^\beta \widehat{\partial_t^j f(t,\cdot)}$$

Or nous savons que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall j \in \mathbb{N}, \partial_t^j f(t,\cdot)$ est dans la classe de Schwartz.
Ainsi le lemme 6 nous assure que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall j \in \mathbb{N}, \widehat{\partial_t^j f(t,\cdot)}$ est dans la classe de Schwartz, par conséquent que

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \partial_\xi^\beta \partial_t^j \widehat{f}(t,\cdot) \text{ est dans la classe de Schwartz.}$$

Il vient ainsi que $\widehat{f}$ est uniformément dans la classe de Schwartz. □

Lemme 3.1.6

Démonstration.
On suppose que f est dans la classe de Schwartz, on peut donc assurer que f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $\partial_x^\beta f$ est à décroissance rapide.
Il vient que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad \begin{aligned} & x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^d, \\ & x^\alpha f(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

on en déduit alors que $x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta f(x)$ est bornée.
Nous pouvons donc assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $p_n(f)$ est finie.

On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$p_n(f)$ est finie.
Il vient donc que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, ||x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta f(x)||_\infty < \infty.$$

□

3.2 Comportement en temps long

3.2.1 Étude asymptotique

Nous pouvons maintenant assurer que la solution u de notre problème admet pour transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{u}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \\ &= \widehat{u_0}(\xi) \mathcal{G}_{4\pi^2 t}(\xi), \end{aligned}$$

avec $\mathcal{G}_a$ la gaussienne de paramètre a.
Nous allons faire appel au lemme 2.2.4 dans le but de prendre la transformée inverse de $\widehat{u}$.

Lemme 3.2.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(a) > 0$, alors on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mathcal{G}_a}(\xi) = (a^{-1}\pi)^{\frac{d}{2}} e^{-\pi^2 a^{-1}|\xi|^2}, \qquad \textit{avec } \sqrt{a} = \sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}}.$$

Soit $t > 0$.
En prenant $a = \frac{1}{4t}$, il vient :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}\Bigg(\underbrace{x \mapsto (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\, e^{\frac{|x|^2}{4t}}}_{\in L^1(\mathbb{R}^d)}\Bigg)(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$$

En remarquant que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a que

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{u}(t,\xi) &= \mathcal{F}\left(x \mapsto u_0 * (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\, \mathcal{G}_{\frac{1}{4t}}\right)(\xi) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\, \widehat{u_0 * \mathcal{G}_{\frac{1}{4t}}}(\xi) \end{aligned}$$

Vu que $\widehat{u}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\, u_0 * \mathcal{G}_{\frac{1}{4t}}(x) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)\mathcal{G}_{\frac{1}{4t}}(x-z)dz \\ &= (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)e^{-\frac{1}{4t}|x-z|^2}dz \end{aligned}$$

L'on a que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{t \to +\infty} u_0(z)e^{\frac{1}{4t}|x-z|^2} = u_0(z).$$

De plus nous remarquons que la fontion intégrée est dominée

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall z \in \mathbb{R}^d \quad |u_0(z)e^{-\frac{1}{4t}|x-z|^2}| \leq |u_0(z)|.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
Il nous vient ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)e^{-\frac{1}{4t}|x-z|^2}dz = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)dz.$$

On en conclut le comportement asymptotique de u lorsque t tend vers l'infini

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) \underset{t \to +\infty}{\sim} (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)dz \qquad \text{quand} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(z)dz \neq 0.$$

3.2.2 Preuve du lemme 3.2.1

Démonstration.
Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(a) > 0$ (on note que par conséquent que $a \neq 0$), on a alors trivialement que $\mathcal{G}_a \in \mathcal{S}(R^d)$.
Calculons sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\mathcal{G}_a)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2}e^{-2i\pi x\xi}dx.$$

Étape 1 : Nous allons commencer par se ramener à un problème à une dimension.
Nous avons que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \widehat{\mathcal{G}_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|x|^2}e^{-2i\pi x\xi}dx = \prod_{j=1}^{d} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2}e^{-2i\pi x_j\xi_j}dx_j}_{\widehat{\mathcal{G}_{a,j}}}$$

Nous allons donc maintenant nous intéresser aux intégrales se situant dans le produit que l'on notera $\widehat{\mathcal{G}_{a,j}}$.

Étape 2 : Calcul de $\widehat{\mathcal{G}_{a,j}}$.
Pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, d\}$, la fonction $\xi_j \mapsto e^{-ax_j^2} e^{-2i\pi x_j \xi_j}$ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$. L'inéglité suivante nous permet d'appliqué le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre.

$$\forall j \in \{0, \ldots, d\}, \forall \xi_j \in \mathbb{R}, \forall x_j \in \mathbb{R}, \quad |-2i\pi x_j e^{-ax_j^2} e^{-2i\pi x_j \xi_j}| \leq |-2i\pi x_j e^{-ax_j^2}|$$

Étant donné que $Re(a) > 0$, on a que $x \mapsto -2i\pi x_j e^{-ax_j^2} \in L^1(\mathbb{R})$, on peut donc appliquer le théorème.
Il vient :

$$\forall j \in \{0, \ldots, d\}, \forall \xi_j \in \mathbb{R}, \quad \partial_{\xi_j} \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(\xi_j) = -2i\pi \int_{\mathbb{R}} x_j e^{-ax_j^2} e^{-2i\pi x_j \xi_j} dx_j. \tag{6}$$

Or

$$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R}, \quad \int_0^y x_j e^{-ax_j^2} dx_j &= -\frac{1}{2a} \int_0^y -2ax_j e^{-ax_j^2} dx_j \\ &= -\frac{1}{2a} \int_0^y u'(x_j) e^{u(x_j)} dx_j \\ &= -\frac{1}{2a} \left[e^{-ax_j^2} \right]_0^y = -\frac{1}{2a} e^{-ay^2} + K \text{ avec } K \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie sur l'équation 6 et en utilisant l'égalité précédente l'on obtient :

$$\begin{aligned}\forall j \in \{0, \ldots, d\}, \forall \xi_j \in \mathbb{R}, \quad \partial_{\xi_j} \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(\xi_j) &= -2i\pi \left(\underbrace{\left[-\frac{1}{2a} e^{-ax_j^2} e^{-2i\pi x_j \xi_j} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0 \text{ car } Re(a)>0} - \frac{i\pi\xi_j}{a} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ax_j^2} e^{-2i\pi x_j \xi_j} dx_j \right) \\ &= -2\frac{\pi^2 \xi_j}{a} \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(\xi_j).\end{aligned}$$

Ainsi la transformée de Fourier de $\mathcal{G}_{a,j}$ vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) + 2\frac{\pi^2 \xi}{a} u(x) = 0. \tag{7}$$

En résolvant l'equation différentielle 7, on trouve

$$\forall \xi_j \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(\xi_j) = \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(0) \exp(-\frac{\pi^2}{a} \xi_j^2).$$

Étape 3 : Nous allons déterminer $\widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(0)$.
Nous avons que

$$\widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|^2} dx.$$

Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-a(\xi^2+1)x^2}}{\xi^2 + 1} d\xi.$$

On remarque que pour tout $\xi \in [0, 1]$ la fonction $f_\xi : x \mapsto \frac{e^{-a(\xi^2+1)x^2}}{\xi^2+1}$ est continuement dérivable et admet pour dérivée

$$\forall \xi \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_\xi(x) = -2ax(\xi^2 + 1)e^{-a(\xi^2+1)x^2}.$$

Or il est clair que

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in \mathbb{R}, \forall \xi \in [0, 1], \quad |f'_\xi(x)| \leq \frac{C}{(1 + \xi^2)} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de dérivation d'intégrale à paramètre,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2axe^{-ax^2} \int_{[0,1]} e^{-a\xi^2 x^2} d\xi$$

Le changement de variable suivant $u = x\xi$ donne

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= -2ae^{-ax^2}\int_0^x e^{-au^2}du \\ &= -2ah'(x)h(x)\end{aligned}$$

en posant $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-a|u|^2}du$.
En intégrant l'égalité de 0 à x, avec $x \in \mathbb{R}$ l'on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) - g(0) = a(h^2(0) - h^2(x))$$

On a trivialement que $h(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}g(0) &= \int_{[0,1]} \frac{1}{\xi^2+1}d\xi \\ &= [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

De plus les inégalités

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le g(x) \le e^{-ax^2}\int_{[0,1]} \frac{1}{\xi^2+1}d\xi$$

impliquent $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0$.
Ainsi en passant à la limite dans l'équation ci-dessus, l'on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} ah^2(x) = a\left(\int_0^{+\infty} e^{-au^2}du\right)^2 = \frac{\pi}{4} = g(0) \\ \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-au^2}du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Étape 4 Choix de la racine de a.
Posons la fonction

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } \Re(\alpha) > 0, \quad L : \alpha \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}dy \begin{aligned} &= \sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}} \\ &\overset{\text{ou}}{=} -\sqrt{\tfrac{\pi}{\alpha}}\end{aligned} \qquad \text{avec} \sqrt{\alpha} = \sqrt{|\alpha|}e^{\frac{i\arg(\alpha)}{2}}$$

Nous allons prouver que cette fonction est continue.
Soit $c > 0$, nous avons que

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } \Re(\alpha) > c, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |e^{-\alpha y^2}| \le |e^{-cy^2}| \in L^1.$$

Nous écrirons

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } \Re(\alpha) > 0, \quad l(\alpha) = e^{-\alpha y^2}$$

et $l_{|c}$ sa restriction aux complexes ayant une partie réel plus grande que c.
Vu que la fonction $l_{|c}$ est continue et dominée, nous pouvons assurer que la fonction $L_{|c}$ est continue.
Or cela est vrai pour tout c strictement positif, nous en concluons que L est aussi continue.
De plus étant donné que $\Re(a) > 0$, donc que $\arg(a) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut assurer que L à valeur dans $S_+ \cup S_-$ où $S_+ = \{\alpha \in \mathbb{C}^* | \arg(\alpha) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\}$ et $S_- = \{\alpha \in \mathbb{C}^* | \arg(\alpha) \in]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\}$.

Nous définissons le chemin

$$\begin{aligned}\alpha : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \Re(a) + i(1-t)\Im(a),\end{aligned}$$

avec a le complexe du lemme.
Posons

$$t_* = \inf\{t \in [0,1] | t' \in [t,1], L(\alpha(t')) \in S_+\}.$$

Supposons que $t_* > 0$, ainsi pour tout ϵ postif nous avons que

$$\exists t_\epsilon \in]t_* - \epsilon, t_*[\text{ vérifiant } L(\alpha(t_\epsilon)) \notin S_+.$$

Par conséquent il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad L(\alpha(t_n)) \notin S_+, \text{ i.e. } L(\alpha(t_n)) \in S_-, \\ \lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_*. \end{cases}$$

Il est clair que le chemin α est continu, ainsi par composition de fonctions continues nous avons

$$\lim_{n\to\infty} L(\alpha(t_n)) = L(\alpha(t_*)),$$

Nous en déduisons que $l(\alpha(t_*))$ est dans l'adhérence de S_-, i.e. $L(\alpha(t_*)) \in \overline{S_-}$.
Supposons que $t_* = 1$, cela implique que $L(\Re(a)) \in \overline{S_-}$ ce qui est absurde.
Ainsi nous avons $t_* \in]0, 1[$, nous pouvons ainsi étudier le cas des t compris entre t_* et 1. Nous obtenons de la même manière que $L(\alpha(t_*)) \in \overline{L_+}$.
Or $\overline{S_-} \cap \overline{S_+} = \{0\}$ ce qui nous donne alors $L(\alpha(t_*)) = 0$ ce qui est impossible.
Nous en concluons que $t_* = 0$, donc que $L(a) \in S_+$, ce qui nous donne en d'autres termes

$$L(a) = \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{avec } \sqrt{a} = \sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}}$$

Étape 5 : Conclusion
Nous avons finalement trouver que

$$\forall j\{0, \ldots, d\}, \forall \xi_j \in \mathbb{R}, \widehat{\mathcal{G}_{a,j}}(\xi_j) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-\frac{\pi^2}{a}\xi_j^2),$$

et par conséquent que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mathcal{G}_a}(\xi) = (a^{-1}\pi)^{\frac{d}{2}} e^{-\pi^2 a^{-1}|\xi|^2}, \qquad \text{avec } \sqrt{a} = \sqrt{|a|} e^{i\frac{\arg(a)}{2}}.$$

□

4 Problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger linéaire homogène avec condition initiale dans la classe de Schwartz

4.1 Résolution du problème de Cauchy

4.1.1 Présentation du problème

Nous allons nous intéresser à l'équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. Nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u & = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, \cdot) & = u_0. \end{cases}$$

L'objectif de cette partie est de montrer le théorème suivant.

Théorème 4.1.1. *Pour toute condition initiale $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ uniformément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et solution du problème de Cauchy associé à l'équation de Schrödinger.*

4.1.2 Étude du système

De manière analogue à l'équation de la chaleur on trouve que u vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(t,\xi) - 4i\pi|\xi|^2 \widehat{u}(t,\xi) & = 0 \text{ pour tout } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^d, \\ \widehat{u}(0,\cdot) & = \widehat{u_0}. \end{cases}$$

En résolvant le problème de Cauchy ci dessus associé à une équation différentielle ordinaire, à ξ fixée, il nous vient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) e^{4i\pi^2|\xi|^2 t} = \widehat{u_0}(\xi)\mathcal{G}_{-4i\pi^2 t}(\xi),$$

Notons

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \widehat{w}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\mathcal{G}_{-4i\pi^2 t}(\xi).$$

Définition 4.1.2. *Soit $\mathcal{O}_M$ l'ensemble des fonctions à croissance modéré définie tel que*

$$\mathcal{O}_M = \{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C, M \geq 0 \ tq \\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \ |\partial_x^\alpha g(x)| \leq C(1+|x|^2)^M\}$$

Lemme 4.1.3. *Nous disposons de la relation*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \forall g \in \mathcal{O}_M, \quad fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Il est évident que pour tout $t > 0, \mathcal{G}_{-4i\pi^2 t} \in \mathcal{O}_M$ et par conséquent que $\widehat{w}(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ car $\widehat{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
En utilisant le même raisonnement que pour l'étude de l'équation de la chaleur, on pourrait montrer que v est solution de notre problème.
On a donc montré qu'il existait une unique fonction uniformément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et solution du système de Cauchy initiale. De plus on a montrer que cette fonction était w.

5 Étude des espaces de Sobolev

5.1 Régularité et caractère local

5.1.1 Définition

Définition 5.1.1. *Pour $s \geq 0$, nous définissons les espaces de Sobolev H^s de la manière suivante*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid (1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2\}.$$

Nous munissons cet espace vectorielle de la norme suivante

$$||u||_{H^s} = ||(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}||_{L^2}.$$

Nous admettrons que H^s est un espace de Banach.

Dans cette partie, nous considérerons la transformation de Fourier de L^2 dans L^2.

5.1.2 Énoncé et preuve du théorème fondamental

Énoncé Nous allons dans cette partie démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.1.2. *Pour $s > \frac{d}{2}$ les éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.*
En outre, le produit de deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$ est encore dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
L'application $(H^s(\mathbb{R}^d))^2 \ni (f,g) \mapsto fg$ est continue.
Nous avons aussi que

$$\forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad ||fg||_{H^s} \leq C||f||_{H^s}||g||_{H^s} \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, nous pouvons alors parler de sa transformée de Fourier.
Il vient l'égalité suivante

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{u}(\xi) = [\underbrace{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi)}_{\in L^2 \text{ car } u \in H^s}](1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}.$$

Lemme 5.1.3. *La fonction* $(1+|\cdot|^2)^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *si et seulement si* $s > \frac{d}{2}$.

Ainsi le second facteur appartient a L^2 si et seulement si $s > \frac{d}{2}$.

Lemme 5.1.4 (Corollaire de l'inégalité de Cauchy-Scwarz)**.** *Soit* $f, g \in L^2$*, nous avons que* $fg \in L^1$.

Il nous vient alors que $\widehat{u}$ est dans L^1 et par conséquent que sous ces conditions u est continue.

Lemme 5.1.5. *La transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *est une isométrie bijective de* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *sur lui-même, d'inverse* $\mathcal{F}^{-1}$.

Grâce à ce lemme nous pouvons écrire que $u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$.
Or nous avons montré que $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$, ainsi l'on a

$$\text{pour p.t. } x \in \mathbb{R}^d, u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}(\xi) e^{2i\pi\xi\cdot x} d\xi.$$

Ainsi le théorème de continuité sous l'intégrale nous permet d'assurer que u est continue sur $\mathbb{R}^d$. Le lemme de Riemann-Lebesgue nous permet d'affirmer que u tend vers 0 à l'infini.
Soit maintenant u et v dans H^s, montrons que leur produit est encore dans H^s.

Lemme 5.1.6. *Pour tout* $s \geq 0$ *et pour* ξ, τ *dans* $\mathbb{R}^n$*, on a*

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 4^s[(1+|\xi-\tau|^2)^s + (1+|\tau|^2)^s].$$

Les lemmes 2.2.4 et 5.1.6 nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{uv}(\xi)| &= \int_{\tau\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\tau)\widehat{v}(\tau)d\tau \\
&\leq 2^s \int (1+|\xi-\tau|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi-\tau)\widehat{v}(\tau)d\tau \\
&\quad + 2^s \int \widehat{u}(\xi-\tau)(1+|\tau|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{v}(\tau)d\tau \\
&\leq K([\underbrace{(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}}_{\in L^2} * \underbrace{\widehat{v}}_{\in L^1}](\xi) + [\underbrace{\widehat{u}}_{\in L^1} * \underbrace{(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{v}}_{\in L^2}](\xi)).
\end{aligned}$$

Lemme 5.1.7. *Si* $f \in L^2$ *et* $g \in L^1$*, alors* $f * g \in L^2$.

Ce dernier lemme nous permet d'assurer que chacun des deux termes de la dernière inégalité est dans L^2.
Ètant donné que $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel, nous en déduisons que la fonction $(1+|\cdot|^2)\widehat{uv}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc que uv est dans H^s.

Nous allons maintenant montrer la continuité de l'application $(H^s(\mathbb{R}^d))^2 \ni (f,g) \mapsto fg$.
Nous munissons $H^s(\mathbb{R}^d)$ de la norme suivante

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad ||f||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = ||(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} f||_{L^2}.$$

On supposera par la suite que $s > \frac{d}{2}$ afin que les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d)$ considérées soient continues et que leurs produits restent dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.
Soit $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $f_n, g_n \in (H^s(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ tel que la suite f_n (resp. g_n) admettent converge vers f (resp. g).
Soit $\epsilon > 0$, nous avons ainsi

$$\exists n_f \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \leq n_f, \quad ||f_n - f||_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon \Leftrightarrow \int_{R^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n - f)^2(\xi) d\xi \leq \epsilon,$$

Nous pouvons ainsi en déduire que que quand n tend vers l'infini on a $(f_n - f)^2 = 0$ donc que $f_n = f$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$, et de même pour g et g_n. L'on remarque que

$$\begin{aligned}||f_n g_n - fg||_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n g_n - fg)^2(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n g_n)^2(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (fg)^2(\xi) d\xi - 2\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n g_n fg)(\xi) d\xi\end{aligned}$$

Avec ce que l'on a dit avant, l'on peut assurer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n g_n)^2(\xi) d\xi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (fg)^2(\xi) d\xi,$$

ainsi que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (f_n g_n fg)(\xi) d\xi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s (fg)^2(\xi) d\xi.$$

Nous pouvons donc assurer l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0 l'on ai

$$||f_n g_n - fg||_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq \epsilon.$$

En conclusion l'application $(H^s(\mathbb{R}^d))^2 \ni (f,g) \mapsto fg$ est continue.

5.1.3 Preuve des lemmes

Lemme 5.1.3

Démonstration.

Théorème (Extrait de "A Concise Introduction to the Theory of Integration" écris pas *Daniel W- Stroock*)**.** *Il existe une mesure σ sur $S^d - 1$ telle que si f est mesurable sur $\mathbb{R}^d$, positive ou intégrable on ait :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} f(r\omega) d\sigma(\omega) \right) r^{d-1} dr.$$

Il nous vient grâce à ce théorème que

$$\int_{\mathbb{R}}^d \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} = \underbrace{\int_{S^{d-1}} d\sigma(\omega)}_{<\infty} \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^s} dr$$

Il vient dons que la fonction $(1+|\cdot|^2)^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $2s-(d-1) > 1$, c'est à dire $s > \frac{d}{2}$. □

Lemme 5.1.4

Démonstration.
Soit $f, g \in L^2$, l'on pose u et v tel que $|f| = e^{\frac{u}{2}}$ et $|g| = e^{\frac{v}{2}}$.
Par convexité de l'exponentielle, on a que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^d, |fg|(x) &= \exp(\frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}v(x)) \\ &\leq \frac{1}{2}e^{u(x)} + \frac{1}{2}e^{v(x)} \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2.\end{aligned}$$

On a donc réussi a majorer la norme de fg par une fonction étant dans L^1, on en déduit donc que fg est dans L^1. □

Lemme 5.1.6

Démonstration.
Soit $s \geq 0$. Notons que pour a et b positifs nous avons $(a+b)^s \leq 2^s(a^s+b^s)$.
Supposons que $a \geq b$, on a

$$\begin{aligned} &a+b \leq 2a \\ \Rightarrow &(a+b)^s \leq 2^s a^s \leq 2^s(a^s+b^s). \end{aligned}$$

Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \xi, \tau \in \mathbb{R}^d, (1+|\xi|^2)^s &\leq (1+2(|\xi-\tau|^2+|\tau|^2))^s \\ &\leq 2^s(1+|\xi-\tau|^2+1+|\tau|^2)^s \\ &\leq 4^s[(1+|\xi-\tau|^2)^s+(1+|\tau|^2)^s]. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.7

Démonstration.
Soit $f \in L^2$ et $g \in L^1$, montrons que leur produit de convolution est dans L^2. Pour cela nous allons montrer que l'intégrale suivante est finie :

$$\int (f*g)^2(x)dx = \iiint |f(x-y)||f(x-z)||g(y)||g(z)|dxdydz.$$

Étant donné que f est de carré sommable, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui nous donne

$$\begin{aligned} \forall y, z \in \mathbb{R}^d, \int |f(x-y)||f(x-z)|dx \leq& \sqrt{\int |f(x-y)|^2 dx \int |f(x-z)|^2 dx} \\ \leq& ||f||_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Il nous vient en utilisant le fait que $g \in L^1$ et le théorème de Tonelli que :

$$\begin{aligned} \int (f*g)^2(x)dx &\leq ||f||_2^2 \iint |g(y)||g(z)|dydz \\ &\leq ||f||_2^2 \left(\int g(y)dy\right)^2 \\ &\leq ||f||_2^2 ||g||_1^2 < \infty. \end{aligned}$$

□

6 Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur non linéaire homogène avec condition initiale de type Sobolev

L'étude qui suit n'est pas complète, c'est une ébauche de résolution.

6.1 Résolution du problème de Cauchy

6.1.1 Présentation du problème

Nous allons nous intéresser à l'équation de la chaleur non linéaire sur $\mathbb{R}^d$.
Comme précédemment, on considére que toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Nous noterons $|\cdot|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$ et nous abrègerons $x \mapsto u(t,x)$ par $u(t,\cdot)$.

Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $s > \frac{d}{2}$.
Nous allons étudier localement en temps le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u & = u^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) & = u_0. \end{cases} \qquad \text{(PCC)}$$

On notera (PCCh) le problème de Cauchy homogène analogue.
L'objectif de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une solution localement en temps, et ce pour tout condition initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2}$.

6.1.2 Étude du système

Définition 6.1.1.
On pose pour tout $t \geq 0$ la fonction S suivante

$$\begin{aligned} S(t): \quad & H^s(\mathbb{R}^d) \to H^s(\mathbb{R}^d) \\ & u_0 \qquad \mapsto u(t,\cdot). \end{aligned}$$

où u est solution de (PCCh).

Propriété 6.1.2.
Dans le cadre de notre étude, on a les propriétés suivantes :
- — $\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d), \forall t, t' \geq 0, \quad S(t)S(t')u = S(t+t')u.$
- — *pour tout $t \geq 0$, l'application $S(t)$ est linéaire et continue.*
- — $\forall t \geq 0, \quad ||S(t)||_{\mathcal{L}(H^s)} \leq 1$

Théorème 6.1.3.
Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^d))$, on résout

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u & = f \textit{ sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,\cdot) & = u_0. \end{cases}$$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-t')f(t')dt'.$

Soit $T > 0$, on notera $E_T = C^0([0,T], H^s)$.
On le munit de la norme $||u||_{E_T} = \sup\limits_{t\in[0,T]} (\{||u(t,\cdot)||_{H^s}, t \in [0,T]\})$

Lemme 6.1.4. *L'espace vectorielle normé $(E_T, ||\cdot||_{E_T})$ est un espace de Banach.*

On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T: \quad & (E_T, ||\cdot||_{E_T}) \to (E_T, ||\cdot||_{E_T}) \\ & \quad u \qquad \mapsto \left(t \mapsto S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')(u(t')^2)dt'\right). \end{aligned}$$

Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution locale en temps de (PCC) nous allons appliquer le théorème du point fixe contractant à $\mathcal{L}_T$.
Il faut tout d'abord montrer que que u est solution de (PCC) sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ si et seulement si c'est un point fixe de $\mathcal{L}_T$.
Soit u une solution de (PCC) sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$.
Par intégration sur $[0,t]$ avec $t \in [0,T]$, il vient

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,T], \quad u(t,\cdot) &= u_0 + \int_0^t u^2(t',\cdot) + \Delta u(t',\cdot)dt' \\ &= S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')(u(t')^2)dt' \end{aligned}$$

Nous en concluons que $\mathcal{L}_T u = u$, ainsi u est bien un point fixe.
Il vient maintenant le moment de montrer la réciproque, ce que je n'ai pas réussi. Supposons par la suite que

cela a été accompli.
Le lemme 6.1.4 nous assure que $(E_T, ||\cdot||_{E_T})$ est un espace de Banach, ainsi il ne nous restera plus qu'à prouver que $\mathcal{L}_T$ est contractante.
Soit $R > 0$ et $u, v \in \overline{B}_{E_T}(0, R)$,

$$\begin{aligned}
||(\mathcal{L}_T u - \mathcal{L}_T v)(t)||_{H^s} &= ||S(t)u_o - S(t)u_0 + \int_0^t S(t-t')(u^2(t') - v^2(t'))dt'||_{H^s} \\
&= ||\int_0^t S(t-t')(u^2(t') - v^2(t'))dt'||_{H^s} \\
&\leq \int_0^t ||S(t-t')(u^2(t') - v^2(t'))||_{H^s} dt'.
\end{aligned}$$

On remarque

$$\begin{aligned}
||S(t-t')(u^2(t') - v^2(t'))||_{H^s} &\leq ||u^2(t') - v^2(t')||_{H^s} \\
&\leq ||(u(t') - v(t'))(u(t') + v(t'))||_{H^s} \\
&\leq C||u(t') + v(t')||_{H^s}||u(t') - v(t')||_{H^s} \\
&\leq C(||u(t')||_{H^s} + ||v(t')||_{H^s})||u(t') - v(t')||_{H^s} \\
&\leq C(||u||_{E_T} + ||v||_{E_T})||u - v||_{E_T} \\
&\leq 2CR||u - v||_{E_T}.
\end{aligned}$$

Au passant que sup il vient finalement que

$$||\mathcal{L}_T u - \mathcal{L}_T v||_{E_T} \leq 2CRT||u - v||_{E_T}.$$

En choisissant $T < \frac{1}{2CR}$ nous avons prouvé que $\mathcal{L}_T$ est contractante.
Nous en concluons que pout T assez petit l'existence et l'unicité d'une solution locale en temps de la (PCC).

6.1.3 Preuve des lemmes

Propriété 6.1.2

Démonstration. D'aprés l'étape 1 on peut assurer que

$$\forall u \in \mathbf{H^s}(\mathbb{R}^\mathbf{d}), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S(t)u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot))$$

— Nous avons que

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d), \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\underbrace{e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot)}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}))(t, \cdot) = e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(S(t)u)(t, \xi)| &= |(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}\widehat{u}(t, \xi)| \\
&\leq |(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(t, \xi)|.
\end{aligned}$$

Il nous vient ainsi que $S(t)u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\forall t, t' \geq 0, \quad S(t)S(t')u &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2} e^{-4\pi^2 t'|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot)) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 (t+t')|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot)) \\
&= S(t + t')u.
\end{aligned}$$

— Soit u et v deux éléments de $H^s(\mathbb{R}^d)$, par linéarité de la transformée de Fourier et de sa réciproque il vient

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad S(t)(u + v) &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{u}(t, \cdot)) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{v}(t, \cdot)) \\
&= S(t)u + S(t)v.
\end{aligned}$$

— Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad ||S(t)u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} &= ||(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{S(t)u}(t,\cdot)||_{L^2} \\ &= ||(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} e^{-4\pi^2 t|\cdot|^2}\widehat{u}(t,\cdot)||_{L^2} \\ &\leq ||(1+|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(t,\cdot)||_{L^2} = ||u||_{H^s(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

□

7 Bilan

Ce stage m'a dans un premier temps permis d'effleurer le monde de la recherche en Mathématiques qui m'était totalement inconnu, accompagner Monsieur Dumas sur ces huit semaines m'a permis d'en savoir plus sur le métier enseignant-chercheur. Ce qui m'a principalement marqué au cours de ce stage est l'investissement personnel que ce métier nécessite, mais cela resté une moindre mesure face à la passion d'exercer cette profession. Mes échanges avec mon maître de stage ont été marqués par l'affection qu'il portait a son emploi, aussi bien l'aspect de recherche que d'enseignement.
J'ai aussi constaté durant ce stage l'importance du travail en équipe, il était précieux de discuter avec d'autres personnes des difficultés rencontrés afin d'avoir un autre point de vue sur le problème. Ce constat ne se limite pas à mon cas, les chercheurs échangent aussi sur leurs études et collaborent, parfois par complémentarité de domaines comme par exemple Mathématiques et Physique, mais aussi parfois pour simplement s'aider. L'échange est au cœur de leur profession et occupe une importante place. J'ai, à travers mon stage, compris qu'il était aussi dans leurs objectifs de transmettre l'affection qu'ils portent à la recherche et à l'enseignement. De plus, les séminaires étaient la parfaite occasion pour discuter avec d'autres enseignants-chercheurs, ces échanges m'ont aussi beaucoup appris concernant la philosophie du monde de la recherche.
En ce qui concerne mon travail personnel, ça a été l'occasion pour moi d'apprendre à travailler sur une documentation ouverte, allez chercher des informations dans différents ouvrages et en retenir ce qui était important pour mon étude. Par la même occasion, cela m'a permis d'approfondir mes connaissances sur les équations différentielles aux dérivées partielles et plus généralement sur la théorie de Fourier, l'analyse Mathématiques.
Pareillement, ce travail m'a appris la gestion d'une étude mathématique plus lourde que celles traiter lors de mes études, un projet plus ambitieux. Il a été très intéressant d'avoir la possibilité d'explorer divers chemins d'études, cela change des problèmes dirigés. Cela m'a permis d'améliorer ma capacité d'analyse étant donné un champ des possibles très large. Il est aussi intéressant de prendre connaissance de la méthodologie et d'avoir pu expérimenter d'une étude de recherche, c'est une réflexion qui diffère de celle réaliser en cours, cela impose une vision plus globale du problème.
Ce stage a aussi été l'occasion de pouvoir approfondir le langage LaTeX, la construction d'un document pouvant servir de support de cours nécessite beaucoup de temps, c'est pour cela que j'ai essayé au maximum d'inclure des outils me permettant d'en gagner. Il en est de même pour la construction du document scientifique, la rédaction est totalement différente sur LaTeX que sur feuille, ayant pour objectif d'aller à l'essentiel tout en restant clair.
Également, le fait de ne pas avoir de contrainte quotidienne au cours du stage, j'ai pu apprendre à gérer mon temps afin d'être au plus efficace. Par exemple, je consacrai ma matinée à étudier sur feuille puis l'après-midi à échanger avec Monsieur Dumas, écrire ce document ou bien continuer à réfléchir aux problèmes rencontrés dans la matinée.
Pour conclure, de plus de tous les éléments cités ci-dessus, ce stage m'aura permis de rencontrer et d'apprendre plus sur le métier d'enseignant-chercheur, ce qui était ma principale motivation a réalisé ce stage.

Références

[1] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse - Théorie des Distributions et Analyse de Fourier*. École Polytechnique Eds, 2001.

[2] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Fourier Analysis - An Introduction*. pp 129-174, Princeton Lectures in Analysis, 2003.

[3] Gourdon Xavier. *Les maths en tête, Analyse - 3e édition*. pp 157-171, édition Ellipses, 2020.

[4] Daniel W- Stroock. *A Concise Introduction to the Theory of Integration*. pp 85-87, édition Birkhauser deuxième édition, 1994.