

## Trabajo práctico 2

**Fecha límite de entrega:** Viernes 7 de octubre, hasta las 17:00 hs.

**Fecha estimada de devolución:** Tres semanas después de la fecha en la que es entregado el TP.

**Primer fecha de reentrega:** Dos semanas después de devueltas las correcciones, hasta las 17:00 (viernes) o hasta las 22 (martes).

**Segunda fecha de reentrega:** Viernes 9 de diciembre, hasta las 17:00 hs.

Este trabajo práctico consta de 4 problemas. Para aprobar el mismo se requiere aprobar todos los problemas.

Los requisitos de aprobación del mismo así como los criterios de corrección están detallados en las pautas de aprobación que pueden encontrar en el repositorio de la materia.

En este trabajo práctico se evaluarán contenidos de algoritmos y problemas sobre grafos. Los problemas que serán evaluados en el mismo serán sobre:

- Flujo y matching bipartito.
- Teorema de Dilworth.
- Ejes puente, puntos de articulación y componentes biconexas.
- Orden topológico y componentes fuertemente conexas.

**Problema A: Alumnos de secundario**

*Al fin tenemos la suerte  
Que casi toda esta parte  
De armar el TP fue un arte  
Sino puede ser la muerte*

*Por eso hoy necesitamos  
Sabiendo que las personas  
Se mueven en ciertas zonas  
Que vos nos des una mano*

*Para eso es que averiguamos  
Los puntos donde hay colegios  
Usemos el privilegio  
De estar muy bien informados*

*Nos pide el departamento  
Hoy difundir la carrera  
A cambio de una remera  
Si ya la tienen lo siento*

*Tenemos un objetivo  
El plan de cubrir las rutas  
Y de una manera astuta  
Seamos abarcativos*

*También sabemos los puntos  
Donde estos alumnos viven  
Prohibamos que nos esquiven  
Tratemos de hacerlo juntos*

*Queremos tener contacto  
Con chicos adolescentes  
De entre toda la gente  
Para generar impacto*

*A chicos de secundaria  
Que van hoy para la escuela  
Veamos si los desvela  
La vida universitaria*

*Un mapa les proveemos  
Por eso les preguntamos  
A cuantos necesitamos  
Para que a todos lleguemos*

*Difícil tener presencia  
Por temas combinatorios  
En todos los territorios  
Para difundir la ciencia*

*Pongamos en su camino  
A alguien que sea vidriera  
Contando de la carrera  
Que vean que esto no es chino*

*Para todos esos pibes  
Que en una esquina haya uno  
Que espere muy oportuno  
Por donde sea que camine*

El problema consiste en dadas  $N$  esquinas,  $M$  calles bidireccionales que conectan pares de esas esquinas, sabiendo que en algunas de esas esquinas hay escuelas, en otras de esas esquinas hay alumnos que van a alguna de esas escuelas (pero no sabemos bien a cual de todas), y que todo par de esquinas están conectadas por un camino que usa algunas de esas calles, contar la mínima cantidad de esquinas en las que podemos poner a un estudiante del departamento a contar sobre la carrera de Ciencias de la Computación, de modo tal que no importe qué camino utilice cada chico para llegar de su casa al colegio, ni a qué colegio vaya cada chico, siempre tenga que pasar por una esquina donde lo podamos interceptar para contarle de la carrera.

El algoritmo debe tener una complejidad temporal  $O(NM^2)$ .

**Entrada**

La primera línea consta de un valor entero positivo  $N$ , que indica la cantidad de esquinas de la ciudad, y un entero positivo  $M$  que indica la cantidad de calles que conectan pares de esas esquinas.

A continuación,  $N$  líneas, una por cada esquina, indicando si en esa esquina hay una escuela ('E'), un alumno ('A') o ninguna de las dos ('X').

Por último, la entrada contará con  $M$  líneas indicando los pares de esquinas que conecta cada calle.

La entrada contará con el siguiente formato:

```
N M
D1
D2
...
DN
A1 B1
A2 B2
...
AM BM
```

Indicando  $A_i$  y  $B_i$  los números de esquinas que están conectadas por la  $i$ -ésima calle bidireccional, y  $D_i$  la descripción de la  $i$ -ésima esquina, que podrá ser alguna de las siguientes:

E  
A  
X

Indicando que hay una escuela ('E'), la casa de un alumno ('A') que va a alguna de esas escuelas, o ninguna de las dos ('X').

## Salida

La salida debe constar de una línea que indique la mínima cantidad de personas que necesita el departamento para cubrir al menos una esquina en cada ruta que conecte la casa de un alumno con alguna de las escuelas, con el siguiente formato:

P

siendo  $P$  esta cantidad de personas.

Entrada de ejemplo 1	Salida para la entrada de ejemplo 1
4 3 E X X A 1 2 2 3 3 4	1

Entrada de ejemplo 2	Salida para la entrada de ejemplo 2
4 4 E X X A 1 2 1 3 2 4 3 4	1

Entrada de ejemplo 3	Salida para la entrada de ejemplo 3
8 12 A A A X X E E E 1 4 1 5 2 4 2 5 3 4 3 5 6 4 6 5 7 4 7 5 8 4 8 5	2

Entrada de ejemplo 4	Salida para la entrada de ejemplo 4
3 2 A E A 1 2 2 3	1

**Explicación del ejemplo 1:**

Como hay un solo alumno y una sola escuela, y además hay un único camino de su casa a la escuela podemos poner una persona en cualquier lugar de su camino.

**Explicación del ejemplo 2:**

El único alumno tiene dos caminos distintos para llegar a la única escuela, pero podemos interceptarlo tanto en la puerta de su casa como en la puerta de la escuela.

**Explicación del ejemplo 3:**

Hay casos en los que, si bien una persona puede cubrir todos los caminos de un mismo alumno, conviene poner varias personas que le cubran a un alumno sus caminos para llegar a una solución óptima. Además, las calles son bidireccionales por lo que un alumno puede ir por ejemplo de la esquina 4 a la esquina 6.

**Explicación del ejemplo 4:**

Puede haber más alumnos que escuelas.

**Pesos mínimo y máximo:** 8 y 11.

**Cotas recomendadas para testear:** Se recomienda testear el problema con valores de  $N \leq 100$ ,  $M \leq 500$ .

## Problema B: Buenos gráficos

*A todos hoy les pedimos  
Que lean este enunciado  
Para ayudar al mercado  
Y ver como lo medimos*

*Impriman un resultado  
Queremos que minimicen  
La cantidad y que avisen  
De gráficos que han usado*

*Dados dos días seguidos  
Del rango que analizamos  
Segmento de recta trazamos  
Para que queden unidos*

*Los precios de las acciones  
Este año han sido fluctuantes  
Ya no son como eran antes  
Sufren muchas variaciones*

*Un gráfico es un conjunto  
De una o más mediciones  
De precios de las acciones  
Que no cruzan ni en un punto*

*Los puntos que conectamos  
Indican los precios diarios  
De acciones en las que varios  
Valores tenemos dados*

*Por eso es que les pasamos  
La evolución de los precios  
Les pido que no sean necios  
Y vean como graficamos*

*Veamos como empezamos  
Al grafico permitido  
De acciones que hemos medido  
Formalmente definamos*

*Los gráficos con acciones  
Tendrán segmentos de recta  
Y una respuesta perfecta  
No habrá con intersecciones*

El problema consiste en, dados los valores de  $A$  acciones durante  $D$  días seguidos, calcular la mínima cantidad de gráficos que es necesaria, para poder graficar la evolución de los precios de las acciones (siendo un eje el tiempo y el otro eje el precio, uniendo las mediciones por segmentos de recta) sin que haya un gráfico en el que dos o más acciones se intersequen.

El algoritmo debe tener una complejidad temporal  $O(A^2(A + D))$

### Entrada

La primera línea consta de un valor entero positivo  $A$ , que indica la cantidad de acciones que medimos, y un entero positivo  $D$  que indica la cantidad de días durante los cuales medimos las acciones.

A esta línea le siguen  $A$  líneas con  $D$  enteros cada una, indicando los números  $P_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq A, 1 \leq j \leq D$ ) que indican el precio de la acción  $i$  en el día  $j$ . La entrada contará con el siguiente formato:

```
A D
P11 P12 ... P1D
P21 P22 ... P2D
...
PA1 PA2 ... PAD
```

### Salida

La salida debe constar de una línea que indique la mínima cantidad de gráficos que se necesitan para poder graficar la evolución de los precios de las  $A$  acciones a lo largo de los  $D$  días, con el siguiente formato:

G

siendo  $G$  esta cantidad mínima de gráficos.

Entrada de ejemplo 1	Salida para la entrada de ejemplo 1
3 3 5 5 5 4 4 6 4 5 4	3

Entrada de ejemplo 2	Salida para la entrada de ejemplo 2
5 2 1 1 2 2 5 4 4 4 4 1	2

Entrada de ejemplo 3	Salida para la entrada de ejemplo 3
4 4 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4	1

Entrada de ejemplo 4	Salida para la entrada de ejemplo 4
5 2 1 5 2 4 3 3 4 2 5 1	5

**Explicación del ejemplo 1:**

Dos mediciones que no se crucen pero se toquen en un punto no pueden ir juntas en un mismo gráfico.

**Pesos mínimo y máximo:** 7 y 10.

**Cotas recomendadas para testear:** Se recomienda testear el problema con valores de  $A \leq 1000$ ,  $D \leq 100$ .

## Problema C: Cortes programados

*Nos pide hoy el intendente  
Nuestros servicios brindemos  
Para que el caos evitemos  
Siendo útiles a la gente*

*Nos piden saquemos cuentas  
Para ayudar a la gente  
Que ya les dijo de frente  
Cuidá cuando pavimentas*

*La duda que hoy no distingo  
Es ver si en día laborable  
Un corte es algo viable  
O queda para el domingo*

*Las obras darán comienzo  
Del nuevo pavimentado  
Y ya nos han contratado  
Para este trabajo intenso*

*Si es de lunes a viernes  
Va a ser medio complicado  
Ver algo desconectado  
Y eso a mí me concierne*

*Para eso te hago consultas  
Con tus respuestas decido  
No quiero hacer mucho ruido  
Que afecte a la gente adulta*

*Hay calles del municipio  
Que están muy mal asfaltadas  
Para eso serán cortadas  
Un solo día en principio*

*Por eso hoy a vos te pido  
Respondas unas preguntas  
Podés responderlas juntas  
Y así serás bienvenido*

*Te paso el mapa de calles  
Decime lo que pregunto  
Yo tus respuestas las junto  
Y veo yo los detalles*

En este problema, son dadas  $N$  esquinas (numeradas de 1 a  $N$ ) y  $M$  calles bidireccionales (numeradas de 1 a  $M$ ) de una ciudad donde existe para cada par de esquinas un camino utilizando estas calles que las conecta. Además, recibimos  $Q$  queries (consultas) que pueden ser de varios tipos:

- Tipo A: dadas dos esquinas  $e_1$  y  $e_2$ , imprimir la cantidad de calles que, en caso de ser cortadas (solo cortando esa calle), impiden llegar de  $e_1$  a  $e_2$ , es decir, contar la cantidad de calles  $c$ , tales que si la única calle cortada es  $c$  no es posible llegar de  $e_1$  a  $e_2$  usando otras calles (se pueden usar todas menos  $c$ ).
- Tipo B: dada una calle, imprimir un 1 si al cortar la calle existen al menos dos esquinas entre las que deja de haber un camino, y 0 en caso contrario.
- Tipo C: dada una esquina  $e_1$ , imprimir la cantidad de esquinas  $e_2$  tales que de cortar una sola calle, sea cual sea, seguirá habiendo camino de  $e_1$  a  $e_2$ .

El algoritmo debe tener una complejidad temporal  $\mathbf{O}(M + MQ_A + Q_B + Q_C)$  siendo  $Q_A$  la cantidad de queries de tipo A,  $Q_B$  la cantidad de queries de tipo B y  $Q_C$  la cantidad de queries de tipo C.

### Entrada

La primera línea consta de un valor entero positivo  $N$  y un entero positivo  $M$ , que indican la cantidad de esquinas y calles.

A esta línea le siguen  $M$  líneas con dos enteros  $U_i, V_i$  ( $1 \leq U_i, V_i \leq N, U_i \neq V_i$ ) indicando los números de calles que conecta la  $i$ -ésima calle. No habrá dos calles que conecten las mismas esquinas ( $U_i = U_j \rightarrow V_i \neq V_j$  y  $U_i = V_j \rightarrow U_j \neq V_i$ )

Luego sigue una línea con un entero positivo  $Q$  indicando la cantidad de queries, y  $Q$  líneas, una con cada query, cuya descripción será en alguno de los siguientes formatos:

- $A \ e_1 \ e_2$  (siendo A el caracter 'A',  $e_1$  y  $e_2$  números válidos de esquinas ( $1 \leq e_1, e_2 \leq N, e_1 \neq e_2$ )).
- $B \ c$  (siendo B el caracter 'B',  $c$  un número válido de calle ( $1 \leq c \leq M$ ))
- $C \ e$  (siendo C el caracter 'C',  $e$  un número válido de esquina ( $1 \leq e \leq N$ )).

La entrada contará con el siguiente formato:

N M  
U1 V1

U2 V2  
 ...  
 UM VM  
 Q  
 D1  
 D2  
 ...  
 DQ

Siendo  $D_i$  la descripción de las queries en el formato provisto anteriormente.

## Salida

La salida deberá constar de  $Q$  líneas, una con la respuesta para cada query:

R1  
 R2  
 ...  
 RQ

siendo  $R_i$  la respuesta de la  $i$ -ésima query.

Entrada de ejemplo 1	Salida para la entrada de ejemplo 1
14 20	3
1 2	0
2 3	0
3 1	1
3 4	2
3 5	0
3 6	
4 5	
4 6	
5 6	
6 7	
6 8	
7 8	
7 9	
8 9	
9 10	
10 11	
10 12	
11 12	
12 13	
1 14	
Q	
A 13 14	
A 2 8	
B 1	
B 20	
C 10	
C 14	

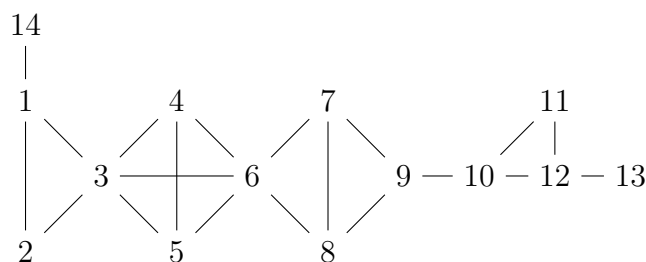
### Explicación del ejemplo 1:

Veamos una por una las queries:

- A 13 14: Cortar las calles 15 (9-10), 19 (12-13) o 20 (1-14) desconecta a las esquinas 13 y 14 entre sí.



- A 2 8: No importa qué calle sea cortada, las esquinas 2 y 8 seguirán conectadas
- B 1: La calle 1 es la calle (1,2) que en caso de ser cortada no deja de haber camino entre ningún par de esquinas.
- B 20: La calle 2 es la calle (1,14) que es la única calle que conecta ambas esquinas, luego las esquinas 1 y 14 quedan desconectadas al desconectar esta calle.
- C 10: Las únicas esquinas que siguen conectadas a la esquina 10 sin importar qué calle es cortada son las esquinas 11 y 12. Notar que si no desconectamos la calle 19 (12-13) la esquina 13 sigue siendo accesible, pero si cortamos esta calle las demás esquinas son accesibles desde la esquina 10, pero no hay ninguna esquina que no sea la 11 o la 12 y que sea accesible desde la 10 cortemos la calle que cortemos.
- C 14: Si cortamos por ejemplo, la calle 20 (1,14) ninguna esquina será accesible desde la esquina 14.



**Pesos mínimo y máximo:** 8 y 9.

**Cotas recomendadas para testear:** Se recomienda testear el problema con valores de  $N \leq 10^4$ ,  $M \leq 10^5$ ,  $Q \leq 10^5$ ,  $Q_A \leq 10^3$ .

**Pista 1:** Si entre todo par de esquinas hay un camino  $N \in \mathbf{O}(M)$ .

**Pista 2:**  $Q_A$  puede ser igual a 0, por lo que  $MQ_A \notin \mathbf{O}(M + MQ_A)$

## Problema D: Desocupando el pabellón

<i>Queremos que en este caso</i>	<i>Tenemos un gran problema</i>	<i>Ahí va a haber que apurarse</i>
<i>Nos brinden valiosa ayuda</i>	<i>Nos piden hoy que evacuemos</i>	<i>Bajando por la escalera</i>
<i>Para sacarnos la duda</i>	<i>Y mientras que le avisemos</i>	<i>Lo antes posible afuera</i>
<i>Resuelvan paso por paso</i>	<i>Al prójimo de este tema</i>	<i>Y así poder escaparse</i>
<i>Sabemos que el martes trece</i>	<i>Para eso hay un protocolo</i>	<i>Siguiendo hoy cada instrucción</i>
<i>Tenemos una amenaza</i>	<i>Que es ir a buscar un aula</i>	<i>El pabellón evacuamos</i>
<i>Para atacar nuestra casa</i>	<i>Me acaba de avisar Paula</i>	<i>Hasta que dicen chequeamos</i>
<i>Por mucho que esto nos pese</i>	<i>Moviéndose a un lado solo</i>	<i>No hay riesgo en ningún rincón</i>
<i>Por ser atea y blasfema</i>	<i>Con esto yo lo que digo</i>	<i>Retomen todas las clases</i>
<i>El blanco hoy es Exactas</i>	<i>Es que un pasillo nos lleva</i>	<i>La facultad ya es segura</i>
<i>Cuidemos todas las actas</i>	<i>Nos deja en un aula nueva</i>	<i>No hay riesgo era joda pura</i>
<i>Por si alguien viene y las quema</i>	<i>Volver por ahí prohibo</i>	<i>Había advertencias falaces</i>
<i>No vaya ser cosa un día</i>	<i>Después de ir a dar aviso</i>	<i>Por si esto vuelve a pasarnos</i>
<i>Después de unos cuantos años</i>	<i>Volvemos por nuestras cosas</i>	<i>El proceso agilizamos</i>
<i>Por lo que dice en el baño</i>	<i>Y usamos las muy famosas</i>	<i>Para eso necesitamos</i>
<i>La facu quede vacía</i>	<i>Bajadas al primer piso</i>	<i>Los datos que han de brindarnos</i>

Luego de la amenaza que recibimos en la facultad, hemos decidido tomar medidas de seguridad para poder evacuar el pabellón lo antes posible en caso de que una amenaza de este estilo se repita.

La facultad cuenta con  $A$  aulas (numeradas de 1 a  $A$ ) y  $P$  pasillos (numerados de 1 a  $P$ ) que solo se pueden recorrer en un solo sentido. En cada aula hay alumnos y docentes al momento de evacuar la facultad y queremos que todos sepan que es necesario evacuar. Para eso, necesitamos que nos respondan  $Q$  preguntas, la  $i$ -ésima de ellas indicada por dos números  $f_i$  y  $t_i$ , que nos dice que hay alguien en el aula  $f_i$  que tiene que ir a avisarle a alguien en el aula  $t_i$  de la necesidad de evacuar, y luego volver al aula  $f_i$  para buscar sus cosas, y lo que debemos responder es si esto es posible ('S') o no ('N') usando los pasillos del pabellón en el sentido correcto. Sabemos que de cualquier aula se puede llegar a la escalera que nos lleva hacia la salida del pabellón.

El algoritmo debe tener una complejidad temporal  $O(A + P + Q)$ .

### Entrada

La primera línea consta de un valor entero positivo  $A$  y un entero positivo  $P$ , que indican la cantidad de aulas y pasillos respectivamente.

A esta línea le siguen  $P$  líneas con dos enteros  $a_i, b_i$  ( $1 \leq a_i, b_i \leq A, a_i \neq b_i$ ) indicando que existe un pasillo que va del aula  $a_i$  al aula  $b_i$  (y que no se puede recorrer desde  $b_i$  hasta  $a_i$ ). No habrá dos pasillos que conecten las mismas aulas en el mismo sentido ( $a_i = a_j \rightarrow b_i \neq b_j$ ).

Luego sigue una línea con un entero positivo  $Q$  indicando la cantidad de preguntas a responder, y  $Q$  líneas, una con cada pregunta, indicada por los números de aula  $f_i$  y  $t_i$ .

La entrada contará con el siguiente formato:

```
A P
a1 b1
a2 b2
...
aP bP
Q
f1 t1
f2 t2
...
fq tq
```

## Salida

La salida deberá constar de  $Q$  líneas, una con la respuesta para cada pregunta:

R1  
R2  
...  
RQ

siendo  $R_i$  la respuesta de la  $i$ -ésima pregunta, que puede ser 'S' (si se puede) o 'N' (si no se puede).

Entrada de ejemplo 1	Salida para la entrada de ejemplo 1
12 16	S
1 2	N
2 3	N
3 1	N
3 4	
3 7	
4 5	
5 6	
6 4	
7 8	
8 9	
9 7	
6 10	
9 10	
10 11	
11 12	
12 10	
4	
1 3	
3 4	
6 9	
10 1	

### Explicación del ejemplo 1:

Podemos ir del aula 1 al aula 3 pasando por el aula 2 (usando los pasillos 1 y 2) y volver por el pasillo 3 al aula 1 a buscar nuestras cosas. Luego la respuesta a la primer pregunta es S.

Del aula 3 podemos llegar al aula 4 pero no hay forma de volver del aula 4 al aula 3 por lo que en la segunda pregunta la respuesta es N.

No podemos llegar del aula 6 al aula 9 ni viceversa así que la tercera query también tiene como respuesta N.

Si pudieramos ir del aula 10 al aula 1 tenemos como volver, pero como no tenemos como ir, la respuesta en este caso vuelve a ser N.

**Pesos mínimo y máximo:** 8 y 9.

**Cotas recomendadas para testear:** Se recomienda testear el problema con valores de  $N \leq 10^4$ ,  $M \leq 10^5$ ,  $Q \leq 10^5$ .