Notas del Curso

Optimización Dinámica Aplicada a Finanzas

Parte Estática

Germán Daniel Fermo, Ph.D

Arbitrage Pricing Theory: APT
Ecuación de Factores

El APT model desarrollado por Ross se basa en el supuesto de que los retornos de un activo en particular se pueden descomponer en múltiples factores de riesgo:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \beta_{i3}F_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\beta_{in}F_n + \varepsilon_i$$

En donde los factores, $F's$, pueden indicar variables generales de ***RIESGO NO DIVERSIFICABLE*** tales como: tasa de interés, PBI, inflación, etc.. Finalmente, el término ε_i está relacionado directamente al ***RIESGO DIVERSIFICABLE*** del activo i. Como vemos, un modelo de factores ***DESCOMPONE*** el retorno de un activo en **FUENTES DE RIESGO DIVERSIFICABLE.** Las fuentes de riesgo diversificable son precisamente los factores $F's$. Para simplificar la intuición del modelo supongamos ahora que sólo existen dos factores de riesgo relevantes en esta economía, de esta forma, el retorno del activo se expresa como:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \varepsilon_i$$

Por otra parte, utilizando el concepto de diversificación, el riesgo específico al activo no tiene que ser compensado, por lo que el término épsilon (ε_i) se elimina de la ecuación resultando finalmente en la siguiente expresión:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2$$

La varianza del retorno del activo es:

$$\sigma_i^2 = \beta_{i1}^2 Var(F_1) + \beta_{i2}^2 Var(F_2) + 2\beta_{i1}\beta_{i2}Cov(F_1, F_2)$$

Dado que los factores son exógenos y pueden elegirse con absoluta libertad, siempre es posible escogerlos de forma tal que:

$$Cov(F_i, F_j) = 0 \ \forall\ i \neq j$$

Es importante entender cómo se puede conseguir que la covarianza entre los factores sea cero. Supongamos que inicialmente $Cov(F_1, F_2) \neq 0$. En este caso corremos la siguiente regresión:

$$F_2 = \alpha_2 + \gamma_1 F_1 + \varepsilon_{F2}$$

El valor estimado del factor en base a los resultados de la regresión es:

$$\hat{F}_2 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\gamma}_1 F_1 + e_{F2} \Rightarrow e_{F2} = \hat{F}_2 - \hat{\alpha}_2 - \gamma_1 F_1$$

Por construcción sabemos que dado que el error de la regresión, e_{F2}, es precisamente la parte de F_2 ***NO EXPLICADA*** por F_1, esto implica que:

$$Cov(F_1, e_{F2}) = 0$$

De esta forma los factores que deberían escogerse para correr el modelo son:

$$F_1 = F_1; F_2 = e_{F2}$$

Bajo estas condiciones, la varianza del retorno del activo es:

$$\sigma_i^2 = \beta_{i1}^2 Var(F_1) + \beta_{i2}^2 Var(F_2)$$

Es importante destacar finalmente que el coeficiente β_{i1} mide la sensibilidad del retorno del activo i respecto al factor F_1. Es decir, dada una variación determinada en el factor F_1, *ceteris paribus*, el retorno del activo va a reaccionar en la magnitud $\beta_{i1} dF_1$. Es decir, β_{i1} mide exclusivamente la exposición del retorno del activo al riesgo contenido en el factor F_1. Es entonces en donde se hace interesante expresar al retorno de un activo en forma factorial:

$$r_i = \alpha_i + \beta_{i1} F_1 + \beta_{i2} F_2$$

Es decir, cada β mide la exposición del retorno del activo al riesgo contenido exclusivamente en cada factor respectivo. Finalmente, es una práctica común medir a los factores de forma tal que:

$$E(F_i) = 0 \,\forall i$$

Recordemos que esto siempre puede hacerse dado que los factores pueden escogerse con total libertad, incluso se puede cambiar la escala de los mismos si es necesario. Bajo estas circunstancias se cumple que:

$$E(r_i) = \alpha_i + \beta_{i1} E(F_1) + \beta_{i2} E(F_2) = \alpha_i$$

Vemos entonces, que el spread esperado referido al activo i se define como:

$$\overline{u}_i = \alpha_i - r_f$$

Como siempre, la barra por encima de la variable indica valor esperado. Con lo cual, es común en el APT suponer lo siguiente:

$$Cov(F_i, F_j) = 0 \,\forall\, i \neq j \qquad E(F_i) = 0 \,\forall i$$

El término $\overline{u}_i$ debe ser entendido como el risk premium resultante de la exposición del activo i a ***TODOS*** los factores de riesgo de esta economía.

Tracking Portfolios

Una de las grandes ventajas que implica la existencia de portfolios es que se pueden crear activos sintéticos en forma casi ilimitada los cuales pueden exhibir estructuras de retorno y riesgo distintas de sus activos de base. Es mas, se pueden crear portfolios que ***ex-ante repliquen exactamente el riesgo de un activo particular***. Precisamente, aquéllos portfolios que replican el riesgo de un activo son denominados "***tracking portfolios***". Vamos a analizar cómo funciona esto recordando que el riesgo del activo i referido al factor j está medido por β_{ij}. Con lo cual para ***REPLICAR EXACTAMENTE*** el risk profile del activo i a traves de un portfolio de activos es necesario que los Beta's de este portfolio sean ***EXACTAMENTE IGUALES*** a los del activo cuyo riesgo quiere replicarse. Analicemos este concepto suponiendo que tenemos cuatro activos y que queremos replicar el riesgo del activo 4 a traves de un portfolio compuesto de los activos 1, 2, y 3:

$$r_1 = \alpha_1 + \beta_{11} F_1 + \beta_{12} F_2$$

$$r_2 = \alpha_2 + \beta_{21} F_1 + \beta_{22} F_2$$

$$r_3 = \alpha_3 + \beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2$$

$$r_4 = \alpha_4 + \beta_{41} F_1 + \beta_{42} F_2$$

Dado que cada Beta mide la exposición al riesgo contenido en el factor, replicar el riesgo del activo 4 implica generar un portfolio con Beta's exactamente iguales a los del activo 4:

$$\beta_{P1} = \beta_{41};\ \beta_{P2} = \beta_{42}$$

Con lo cual, β_{P1} y β_{P2} se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta_{P1} = w_1 \beta_{11} + w_2 \beta_{21} + (1 - w_1 - w_2)\beta_{31}$$

$$\beta_{P2} = w_1 \beta_{12} + w_2 \beta_{22} + (1 - w_1 - w_2)\beta_{32}$$

De esta forma, el retorno del activo sintético, es decir, el portfolio es:

$$r_P = \alpha_P + \beta_{P1} F_1 + \beta_{P2} F_2$$

Bajo estas condiciones, ***el riesgo del tracking portfolio es idéntico al del activo 4***. Es ahora en donde por primera vez utilizaremos el concepto de arbitraje (de ahí el nombre de APT). Dos activos que tienen el mismo riesgo (en este caso el activo 4 y el tracking portfolio***) deben rendir lo mismo*** en ausencia de arbitraje, esto implica que:

$$E(r_P) = E(r_4)$$

Vamos a volver a este concepto posteriormente pero por el momento es importante generar dos conclusiones:

1- Un tracking portfolio permite generar un activo sintético con el mismo risk profile que un activo particular;

2- En ausencia de oportunidades de arbitraje, el retorno esperado del tracking portfolio debe ser idéntico al del activo cuyo risk profile se intenta replicar.

Pure Portfolios

Un pure portfolio se define como un portfolio que sólo tiene exposición a un factor determinado, su Beta respecto a ese factor es 1 y sus Beta's con respecto a todos los otros factores son cero. Obviamente, estos portfolios no existen automáticamente en el mercado sino que como cualquier otro portfolio hay que crearlo sintéticamente. Supongamos que tenemos un pure portfolio referido al factor 1, su retorno es:

$$r_{PU} = \alpha_{PU} + \beta_{PU1} F_1 + \beta_{PU2} F_2 \Rightarrow r_{PU} = \alpha_{PU} + 1F_1 + 0F_2 \Rightarrow r_{PU} = \alpha_{PU} + F_1$$

Es importante entender cuáles son las implicancias de construir un portfolio con estas características. La ecuación precedente nos indica dos cosas:

1- Un pure portfolio sólo está afectado por una fuente de riesgo sistemático, en este caso, el riesgo contenido en el factor F_1.

2- La sensibilidad a esa fuente de riesgo es 1.

Estos dos aspectos considerados simultáneamente implican que el spread esperado de un pure portfolio mide el risk premium esperado asociado exclusivamente al riesgo contenido en el factor 1 y nada mas que eso***. De esta forma, la construcción de pure portfolios nos permite identificar el risk premium contenido en cada fuente de riesgo aisladamente:***

$$r^1_{PU} = \alpha^1_{PU} + F_1 \Rightarrow \bar{u}^1_{PU} = \alpha^1_{PU} - r_f \qquad r^2_{PU} = \alpha^2_{PU} + F_2 \Rightarrow \bar{u}^2_{PU} = \alpha^2_{PU} - r_f$$

Recordemos que $E(F_1)=0$ y $E(F_2)=0$. Es importante destacar que r_{PU}^1 es el retorno del pure portfolio concentrado en el factor 1 (pure portfolio 1) y r_{PU}^2 es el retorno del pure portfolio concentrado en el factor 2 (pure portfolio 2). Es importante ahora concentrarnos en identificar el significado de $\overline{u}_{PU}^1$ y $\overline{u}_{PU}^2$. $\overline{u}_{PU}^1$ es la compensación por la parte del riesgo no diversificable que enfrenta esta economía contenido exclusivamente en el factor 1 y $\overline{u}_{PU}^2$ mide la compensación por la parte de riesgo no diversificable contenido exclusivamente en el factor 2. Vemos que detrás del APT está implícito el supuesto de que el riesgo no diversificable de una economía puede resumirse en un grupo finito de factores. Como vemos, la gran utilidad de los pure portfolios es que mediante su construcción podemos aislar y por lo tanto ***"pricear"*** el riesgo asociado a cada factor independientemente de los demás. Con lo cual, el precio del riesgo asociado a cada factor (lambda) es:

$$\lambda_1 = \overline{u}_{PU}^1 \qquad \lambda_2 = \overline{u}_{PU}^2$$

Es importante destacar que ***ES NECESARIO CREAR*** los pure portfolios. Dado que seguimos con el supuesto de dos factores, construir el pure portfolio concentrado en el factor 1 implica resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} w_i^1 \beta_{i1} \qquad 0 = \sum_{i=1}^{n} w_i^1 \beta_{i2}$$

Vemos que n es la cantidad de activos que se utiliza para construir el pure portfolio 1 y w_i^1 es el weight otorgado al activo i para construir el pure portfolio 1, el supraíndice 1 se refiere a que es el weight del pure portfolio 1. Para construir el pure portfolio 2 se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \beta_{i1} \qquad 1 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \beta_{i2}$$

Es importante destacar que la función mas importante de un pure portfolio es que por construcción, ***cada pure portfolio permite identificar aisladamente el premio del riesgo asociado a un factor en cuestión***.

Es ahora en donde a traves de la utilización del concepto de pure portfolio vamos a derivar la ecuación del APT derivada por Ross. Vamos ahora a utilizar los dos pure portfolios creados precedentemente para construir otro portfolio que combine a los dos pure portfolios mas el activo libre de riesgo que replique perfectamente el risk profile del activo 4. Es decir, vamos a construir un tracking portfolio pero este tracking portfolio no utilizará como activos de base a activos individuales sino que su base serán portfolios (los dos pure portfolios) mas el activo libre de riesgo. Es decir, el tracking portfolio es un portfolio compuesto exclusivamente por los dos pure portfolios y el activo libre de riesgo. Dado que la exposición al riesgo del activo 4 está determinada por β_{41} y β_{42}, el tracking portfolio deberá generar estos mismos Beta's a traves de la resolución del siguiente sistema:

$$\beta_{41} = w_1 \beta_{PU1}^1 + w_2 \beta_{PU1}^2 = w_1 1 + w_2 0 = w_1 \Rightarrow \beta_{41} = w_1$$

$$\beta_{42} = w_1 \beta_{PU2}^1 + w_2 \beta_{PU2}^2 = w_1 0 + w_2 1 = w_2 \Rightarrow \beta_{42} = w_2$$

$$w_f = 1 - w_1 - w_2 \Rightarrow w_f = 1 - \beta_{41} - \beta_{42}$$

Es decir, el tracking portfolio implica:

1- Comprar β_{41} unidades del pure portfolio 1;
2- Comprar β_{42} unidades del pure portfolio 2;
3- Comprar $1-\beta_{41}-\beta_{42}$ unidades del activo libre de riesgo.

Al hacer esto creamos un portfolio con el mismo riesgo que el activo 4. El retorno de este portfolio es:

$$r^P = \beta_{41}(\alpha_{PU}^1 + F_1) + \beta_{42}(\alpha_{PU}^2 + F_2) + (1-\beta_{41}-\beta_{42})r_f \Rightarrow$$
$$r^P = \beta_{41}(\alpha_{PU}^1 + F_1 - r_f) + \beta_{42}(\alpha_{PU}^2 + F_2 - r_f) + r_f$$

El retorno esperado de este portfolio (recordar que $E(F_1)=0$ y $E(F_2)=0$) es:

$$E(r^P) = \beta_{41}(\alpha_{PU}^1 - r_f) + \beta_{42}(\alpha_{PU}^2 - r_f) + r_f = \beta_{41}\lambda_1 + \beta_{42}\lambda_2 + r_f$$

Pero recordemos que como este portfolio tiene exactamente el mismo riesgo que el activo 4 implica que en ***AUSENCIA DE OPORTUNIDADES DE ARBITRAGE*** ambos activos deben rendir lo mismo:

$$E(r_4) = E(r^P) \Rightarrow E(r_4) = r_f + \beta_{41}\lambda_1 + \beta_{42}\lambda_2$$

Generalizando esta última expresión, arribamos a la ecuación del APT desarrollada por Ross:

$$E(r_i) = r_f + \beta_{i1}\lambda_1 + \beta_{i2}\lambda_2 + ... + \beta_{in}\lambda_n$$

Esta ecuación es muy intuitiva, nos dice que en ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor esperado del retorno de un activo es la tasa libre de riesgo mas la suma del valor del riesgo implícito en cada factor ($\lambda' s$) ponderada por la sensibilidad que el activo tiene respecto a cada factor. Como vemos, esta ecuación no se diferencia mucho de la correspondiente al CAPM. Sin embargo, la gran diferencia entre el APT y el CAPM es que el ***APT NO NECESITA*** funciones de utilidad para probar la relación lo cual es una ventaja notable. Sin embargo, como desventaja principal, el APT no define teóricamente cuáles deberían ser los factores de riesgo a utilizar.

<u>Conclusión:</u> El APT se basa en el supuesto de no arbitraje para derivar su ecuación mientras que el CAPM se basa en el supuesto de maximización de utilidad para derivar su ecuación.

<u>Del APT al CAPM</u>

Supongamos que escogemos como único factor al retorno del portfolio de mercado:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_m$$

Es importante tener en cuenta que r_m es en este caso un factor (como antes era F_1, por ejemplo). Para el caso del retorno de mercado se cumple esta relación trivial:

$$r_m = \alpha_m + \beta_m r_m \Rightarrow \alpha_m = 0; \beta_m = 1$$

Dado que $\beta_m = 1$, la ecuación precedente es la ecuación de un pure portfolio. Usemos ahora a este pure portfolio y combinémoslo con un activo libre de riesgo para generar el mismo risk profile que el del activo i. Esto implica resolver la siguiente ecuación:

$$\beta_i = w_f \beta_{r_f} + (1-w_f)\beta_m \Rightarrow \beta_i = w_f 0 + (1-w_f)1 \Rightarrow w_f = (1-\beta_i)$$

Es importante destacar que como r_f corresponde al activo libre de riesgo, $\beta_{r_f} = 0$, ya que por definición un activo libre de riesgo no es sensible a nada. Con lo cual, si creamos un tracking portfolio con $(1-\beta_i)$ unidades destinadas a comprar el activo libre de riesgo y β_i a comprar el portfolio de mercado, generamos un activo sintético con un riesgo idéntico al del activo i cuyo valor esperado es:

$$E(r^P)=(1-\beta_i)E(r_f)+\beta_i E(r_m)\Rightarrow E(r^P)=r_f+\beta_i(E(r_m)-r_f)$$

En ausencia de arbitraje debe cumplirse que:

$$E(r_i)=E(r^P)\Rightarrow E(r_i)=r_f+\beta_i(E(r_m)-r_f)$$

Vemos que esta ecuación es idéntica a la del CAPM!!!.

Implementación del APT

Se puede realizar en dos pasos. Primero, es necesario estimar las siguientes regresiones:

$$r_1=\alpha_1+\beta_{11}F_1+\beta_{12}F_2 \qquad r_2=\alpha_2+\beta_{21}F_1+\beta_{22}F_2$$

$$r_3=\alpha_3+\beta_{31}F_1+\beta_{32}F_2 \qquad r_4=\alpha_4+\beta_{41}F_1+\beta_{42}F_2$$

Es importante destacar que esta regresión se puede correr como una pooled regression en donde en este caso especial se estimarían 12 parámetros (cuatro lambdas y ocho beta's). El resultado de esta regresión son los estimadores para $\hat{\alpha}_i$ y para $\hat{\beta}_{ij}$.

Una vez realizada esta regresión, se calcula la ***media muestral*** para cada uno de los cuatro activos: $\bar{r}_1,\bar{r}_2,\bar{r}_3,\bar{r}_4$ y se corre la siguiente pooled regresión:

$$\bar{r}_1=\lambda_0+\hat{\beta}_{11}\lambda_1+\hat{\beta}_{12}\lambda_2$$

$$\bar{r}_2=\lambda_0+\hat{\beta}_{21}\lambda_1+\hat{\beta}_{22}\lambda_2$$

$$\bar{r}_3=\lambda_0+\hat{\beta}_{31}\lambda_1+\hat{\beta}_{32}\lambda_2$$

$$\bar{r}_4=\lambda_0+\hat{\beta}_{41}\lambda_1+\hat{\beta}_{42}\lambda_2$$

Es importante entender la gran diferencia que existe entre esta regresión y la primera. Esta segunda regresión se basa en medias muestrales porque intenta estimar la ecuación del APT. Recordemos que la ecuación del APT está definida para el valor esperado de un activo en particular y por lo tanto el equivalente muestral del valor esperado es la media muestral:

$$E(r^i)\Rightarrow \bar{r}_i$$

Esta segunda regresión forzosamente debe ser pooled y en nuestro caso particular de cuatro activos tendría sólo cuatro observaciones (esto es una simplificación). Vemos que en esta segunda regresión, $\hat{\beta}_{ij}$ es la variable independiente (la cual fue estimada en la primer regresión) y cambia la variable dependiente de r^i a $\bar{r}_i$. Esta segunda regresión permite estimar todos los lambdas: $\lambda_0,\lambda_1,...........\lambda_n$ los cuales pueden utilizarse para finalmente estimar el retorno esperado de cada activo libre de oportunidad de arbitraje:

$$E(r_i)\cong\hat{\lambda}_0+\hat{\beta}_{i1}\hat{\lambda}_1+\hat{\beta}_{i2}\hat{\lambda}_2+........+\hat{\beta}_{in}\hat{\lambda}_n$$

Modelo de Incentivos Óptimos: Incentivos al Trabajador

Supongamos que tenemos un modelo con un productor y un trabajador en relación de dependencia. El problema que enfrenta el productor es uno standard: maximizar sus beneficios. El único problema adicional que en este caso enfrenta el productor es que no puede obligar al trabajador a que trabaje todo lo que el productor quisiera. Es decir, esto no quiere decir que no existan formas de lograr que el trabajador termine ejerciendo el esfuerzo que el productor quiere, lo que quiere decir es que no se puede ejercer coerción sobre el trabajador.

Dado esto, es necesario ***INCENTIVAR*** a que el trabajador termine ejerciendo el esfuerzo que es óptimo para el productor. Vamos a setear el modelo para entenderlo mejor. En primer lugar, supongamos que el productor tiene una función de producción que solamente depende del esfuerzo del trabajador:

$$f(e) = e^{0.5}$$

El productor va a enfrentar dos restricciones respecto al trabajador. La primera se refiere al hecho de que su empresa le debe pagar como mínimo su costo de oportunidad. Supongamos que la compensación del trabajador tiene un componente variable y otro fijo:

$$we + K - e^2 = \overline{u}$$

Como vemos, la parte variable es el salario por unidad de esfuerzo, w, y la parte fija es K, $-e^2$ indica la desutilidad que le genera al trabajador esforzarse para trabajar. Es importante destacar que tanto w como K forman parte de las variables de optimización y en definitiva conforman el sistema de incentivos óptimos que el productor le ofrece al trabajador. Es decir, el problema de optimización implica hallar simultáneamente el nivel óptimo de esfuerzo y un incentive schedule que sea compatible con ese nivel de esfuerzo. Finalmente, $\overline{u}$ representa el costo de oportunidad del trabajador. Lo que esta restricción nos dice es que lo primero que tiene que hacer el productor es pagarle al trabajador su costo de oportunidad porque de lo contrario se iría. A esta restricción se la denomina ***"Participation Constraint***" ya que asegura que el trabajador no se vaya a otra ocupación alternativa.

La segunda restricción es mas complicada de entender pero es mucho mas interesante. Supongamos que la función de utilidad del trabajador tiene dos componentes:

$$we + K - e^2$$

En donde, $we + K$ es la parte positiva e indica lo que el trabajador recibe como fruto de su trabajo y $-e^2$ indica la desutilidad de esforzarse. El esfuerzo óptimo del trabajador ***DADO EL INCENTIVO SALARIO*** es:

$$Max_e \; we + K - e^2$$

La condición de primer orden es:

$$w - 2e = 0 \Rightarrow e = w/2 \Rightarrow w = 2e$$

Es muy importante entender qué implica esta ecuación. Esta ecuación nos dice cuánto salario debo abonarle al trabajador para que ejerza un determinado nivel de esfuerzo. Es por esta razón que a esta restricción se la denomina como: "***Incentive Compatibility Constraint***". Es decir, si se respeta este esquema de incentivos, pagando lo necesario, el productor ***SIEMPRE*** puede conseguir un determinado nivel de esfuerzo.

Muy bien, ahora es necesario definir el problema de optimización del productor:

$$Max_{e,w,K,\lambda_1,\lambda_2} \; e^{0.5} - we - K + \lambda_1(\overline{u} - we - K + e^2) + \lambda_2(w - 2e)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$FOC_e \; 0.5e^{-0.5} - w - \lambda_1 w + \lambda_1 2e - \lambda_2 2 = 0$$

$$FOC_w \; -e - \lambda_1 e + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$FOC_K \quad -1-\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$$

$$FOC_{\lambda_1} \quad \bar{u}\text{-}we - K + e^2 = 0 \Rightarrow \bar{u} - e^2 = K$$

$$FOC_{\lambda_2} \quad w - 2e = 0 \Rightarrow w = 2e$$

Utilizando la quinta ecuación en la cuarta, tenemos:

$$\bar{u}\text{-}we\text{-}K = \bar{u} - 2ee + e^2 - K = 0 \Rightarrow \bar{u} - e^2 = K$$

Utilizando la tercer ecuación en la segunda, tenemos:

$$\lambda_2 = 0$$

Utilizando todas las ecuaciones anteriores, la ecuación 1 resulta:

$$0.5e^{-0.5} - 2e + 2e - 2e = 0 \Rightarrow 0.5e^{-0.5} = 2e \Rightarrow \bar{e} = 0.25^{(1/1.5)}$$

Como vemos, este es el nivel de esfuerzo que maximiza los beneficios del productor. Como esta maximización se realizó cumpliendo la "***Participation Constraint***" y la ***"Incentive Compatibility Constraint***", el productor sabe inmediatamente que el trabajador va a estar incentivado para esforzarse lo que el productor quiere. Obviamente, el incentivo está dado por el salario. Dado el esfuerzo óptimo encontrado por el productor, para que el trabajador se esfuerce ese nivel se necesita que el salario sea:

$$\bar{w} = 2\bar{e} = 2(0.25^{(1/1.5)})$$

Es importante entender qué implica la restricción $\lambda_2(w-2e)$ en el Lagrangiano. Esta restricción lo que implica es que si se cumple, cualquiera que sea el nivel de esfuerzo óptimo encontrado por el productor, el trabajador va a ejercerlo dado que el salario se ajusta automáticamente a incentivar ese nivel de esfuerzo. Es decir, con el salario $\bar{w} = 2\bar{e} = 2(0.25^{(1/1.5)})$ no hay nada mejor para el trabajador que ejercer el nivel de esfuerzo $\bar{e} = 0.25^{(1/1.5)}$ el cual es óptimo para ambos, productor y trabajador. Es decir, la ***"Incentive Compatibility Constraint***" hace que el nivel óptimo de esfuerzo sea idéntico tanto para el productor como para el trabajador. Finalmente, el valor de K (que incentiva al trabajador para que se quede trabajando con el productor) es:

$$\bar{u} - e^2 = K \Rightarrow K = \bar{u} - 0.25^{(2/1.5)}$$

Estática Comparada: Ecuación de Slutsky

Definamos la demanda del bien 1 a los precios (P_1, P_2) :

$$x_1(Y, P_1, P_2)$$

Definamos la demanda del bien 1 a los precios $(P_1^{'}, P_2)$.

$$x_1(Y, P_1^{'}, P_2)$$

El cambio final en la demanda generado por un cambio en P_1 es:

$$dx_1 = x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2)$$

Supongamos ahora que sumamos y restamos el siguiente término:

$$x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)$$

De esta forma, la ecuación precedente puede expresarse como:

$$dx_1 = x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2) + x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)$$

Reagrupando, tenemos:

$$dx_1 = [x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2)] + [x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)]$$

Si dividimos por dP_1, tenemos:

$$\frac{dx_1}{dP_1} = \frac{[x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2)]}{dP_1} + \frac{[x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)]}{dP_1} \qquad \text{(A)}$$

Supongamos que P_1 disminuye al valor $P_1^{'}$, con lo cual, la vieja y nueva restricción presupuestaria respectivamente son:

$$Y = P_1 x_1 + P_2 x_2 \, ; \qquad Y' = P_1^{'} x_1 + P_2 x_2$$

Si queremos compensar al individuo "a lo Slutsky" dado que el precio del bien disminuyó, es necesario reducirle su ingreso nominal de manera tal que pueda seguir comprando la misma combinación de bienes que antes del cambio en el precio:

$$Y^{'} - Y = (P_1^{'} - P_1)x_1 = -dY = dP_1 x_1 \Rightarrow dP_1 = -dY / x_1$$

Vemos que en este modelo dejar constante el ingreso implica modificarlo de forma tal que el consumidor pueda adquirir el mismo par de bienes antes y después del cambio en el precio. Reemplazando en (A) dP_1 por su equivalente, $-dY / x_1$, tenemos:

$$\frac{dx_1}{dP_1} = \frac{[x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2)]}{dP_1} - \frac{[x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)]}{dY} x_1 \qquad \text{(B)}$$

Esta es la famosa ecuación de Slutsky la cual descompone el cambio en la demanda de un bien particular en dos efectos: sustitución e ingreso.
El efecto sustitución es:

$$\frac{dx_1^C}{dP_1} = \frac{[x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y, P_1, P_2)]}{dP_1}$$

Vemos que son dos cosas las que cambian en esta ecuación: $Y^{'}, P_1^{'}$. Esto es así porque el efecto sustitución mide el cambio en la demanda cuando se produce una variación en los precios relativos y se compensa perfectamente al consumidor. Es decir, en este diferencial se mantiene constante el ingreso del individuo (constante se define en términos de poder consumir exactamente lo mismo que antes del cambio de precio) y lo único que cambia es el ratio de precios relativos. Es por esta razón que el efecto sustitución ***AISLA*** el cambio en la demanda del bien originada exclusivamente por cambio en precios relativos.
El efecto ingreso es:

$$\frac{dx_1^I}{dP_1} = \frac{[x_1(Y, P_1^{'}, P_2) - x_1(Y^{'}, P_1^{'}, P_2)]}{dY}$$

Vemos aquí que lo único que cambia es el nivel de ingreso dado que los precios relativos son los mismos. Es por esta razón que este diferencial mide el cambio en la demanda del bien originado exclusivamente por un cambio en el ingreso del individuo. Es por esta razón que en este diferencial los precios relativos son los mismos.

Finalmente es importante aclarar que el cambio en el ingreso ***REAL*** del individuo es:

$$dY = Y - Y^{'}$$

Recordemos que el ingreso que tiene el consumidor antes y después de la suba de precios es: Y. Como vemos esta suma es constante porque se refiere al ingreso nominal. Sin embargo, un cambio de precios genera un cambio en el ingreso real. Supongamos que el precio del bien 1 disminuye:

$$P_1^{'} < P_1$$

Bajo estas circunstancias, al individuo hay que compensarlo negativamente para que a los nuevos precios pueda comprar lo mismo que antes:

$$Y^{'} < Y$$

Vemos que antes de la baja de precios Y compraba el par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ y después de la baja de precios, $Y^{'}$ sigue comprando el par $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. La diferencia $Y - Y^{'} > 0$ es un sobrante real y mide el incremento en el ingreso real generado por una baja en el precio del bien 1.

<u>Derivación de la Ecuación de Slutsky con Funciones Especificas: Cobb-Douglas</u>

<u>Efecto Sustitución</u>

De acuerdo a lo que derivamos anteriormente, las funciones de demanda para el caso Cobb-Douglas son:

$$x_1 = \frac{a}{(a+b)} \frac{Y}{P_1}; \qquad x_2 = \frac{b}{(a+b)} \frac{Y}{P_2}$$

Bajo estas condiciones es interesante determinar cuál es el efecto ingreso y sustitución. Supongamos que P_1 disminuye al valor $P_1^{'}$. Si queremos compensar al individuo "a lo Slutsky" dado que el precio del bien disminuyó, es necesario reducirle su ingreso nominal de manera tal que pueda seguir comprando la misma combinación de bienes que antes del cambio en el precio:

$$Y^{'} - Y = (P_1^{'} - P_1)x_1$$

Con lo cual, su ingreso compensado evaluado en el punto de expansión, x_1, es:

$$Y^{'} = Y + (P_1^{'} - P_1)x_1 = Y + (P_1^{'} - P_1)[aY/(a+b)P_1]$$

Haciendo un poco de álgebra, llegamos a la siguiente expresión:

$$Y^{'} = Y(P_1 b + P_1^{'} a)/(P_1 a + P_1 b)) \Rightarrow \textit{INGRESO COMPENSADO}$$

Vemos que como $P_1^{'} < P_1 \Rightarrow Y^{'} < Y$. Calculemos ahora la demanda compensada la cual surge simplemente de evaluar a la demanda en su nuevo nivel de ingreso y precio:

$$x_1^C = \frac{a}{(a+b)} \frac{Y^{'}}{P_1^{'}} = \frac{a}{(a+b)} \frac{1}{P_1^{'}} \frac{Y(P_1 b + P_1^{'} a)}{(P_1 a + P_1 b)} \Rightarrow \textit{DEMANDA COMPENSADA}$$

Ahora podemos calcular el efecto sustitución:

$$dx^C = x_1^C - x_1 = [\frac{a}{(a+b)} \frac{Y^{'}}{P_1^{'}} - \frac{a}{(a+b)} \frac{Y}{P_1}] = \frac{a}{(a+b)P_1^{'}} \frac{Y(P_1 b + P_1^{'} a)}{(P_1 a + P_1 b)} - \frac{a}{(a+b)} \frac{Y}{P_1} =$$

$$\frac{aY(P_1b+P_1^{'}a)}{(a+b)^2P_1^{'}P_1}-\frac{a}{(a+b)}\frac{Y}{P_1}=\frac{aYP_1b+aYP_1^{'}a-aY(a+b)P_1^{'}}{(a+b)^2P_1^{'}P_1}=\frac{aYP_1b+aYP_1^{'}a-aYaP_1^{'}-aYbP_1^{'}}{(a+b)^2P_1^{'}P_1}=$$

$$dx^C=x_1^C-x_1=\frac{abY(P_1-P_1^{'})}{(a+b)^2P_1^{'}P_1}>0$$

Dado que $P_1^{'}<P_1 \Rightarrow x_1^C-x_1>0$. Vemos que $dx^C>0; dP_1<0 \Rightarrow dx^C/dP_1<0$. Lo cual es totalmente razonable: el efecto sustitución es ***SIEMPRE*** negativo.

Efecto Ingreso

La demanda final del bien 1 es:

$$x_1^{'}=\frac{a}{(a+b)}\frac{Y}{P_1^{'}}$$

El efecto ingreso surge de la diferencia entre:

$$dx^I=x_1^{'}-x_1^C=\frac{a}{(a+b)}\frac{Y}{P_1^{'}}-\frac{a}{(a+b)}\frac{Y^{'}}{P_1^{'}}=\frac{a}{(a+b)}\frac{(Y-Y^{'})}{P_1^{'}}=\frac{a}{(a+b)}\frac{Y}{P_1^{'}}\frac{a(P_1-P_1^{'})}{(P_1a+P_1b)}>0$$

Dado que $P_1^{'}<P_1 \Rightarrow x_1^{'}-x_1^C>0$. Vemos que $dx^I>0$ y $dY>0 \Rightarrow dx^I/dY>0$ lo cual implica que la función Cobb-Douglas genera un efecto ingreso positivo lo cual implica bienes normales. Es importante entender qué indica el término $(Y-Y^{'})$. Recordemos que con Y el consumidor podía comprar el par óptimo $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ a los precios (P_1,P_2). Recordemos además que con $Y^{'}$ el consumidor también puede comprar el mismo par $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ a los precios $(P_1^{'},P_2)$ dado que $Y^{'}$ es un ingreso completamente compensado. En nuestro ejemplo en particular, dado que $P_1^{'}<P_1 \Rightarrow Y^{'}<Y \Rightarrow (Y-Y^{'})>0$. De esta forma, el término $(Y-Y^{'})>0$ indica el efecto riqueza originado por una baja en el precio del bien 1 que resulta en una suba del ingreso real en la cantidad:

$$dY=Y-Y^{'}$$

Derivación de la Ecuación de Slutsky con Funciones Generales

Siguiendo con la ecuación de Slutsky, recordemos que el consumidor intenta maximizar su utilidad sujeto a la restricción presupuestaria, lo cual implica la construcción del siguiente Lagrangean:

$$Max_{x_1,x_2,\lambda}\ L=u(x_1,x_2)+\lambda(Y-P_1x_1-P_2x_2)$$

Las tres condiciones de primer orden son:

$$u_{x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)-\bar{\lambda}P_1=0$$

$$u_{x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)-\bar{\lambda}P_2=0$$

$$Y-P_1\bar{x}_1-P_2\bar{x}_2=0$$

Como ya sabemos, si a estas tres derivadas se las evalúa en el óptimo inicial (determinado por el vector $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{\lambda})$) los valores de las mismas son cero. El objetivo de la estática comparada es

COMPARAR entre óptimos. Los óptimos son diferentes porque corresponden a valores distintos de las variables exógenas del modelo. Es decir, la estática comparada analiza el cambio de un óptimo a otro generado por un cambio en alguna variable exógena. Dado que la estática comparada sólo analiza entre óptimos, la misma debe tener implícito en ***TODO*** momento el concepto de optimalidad. Vamos a volver a esto posteriormente.

Diferenciemos totalmente las tres condiciones de primer orden (evaluadas en el óptimo inicial):

$$u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_1 + u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_2 - \bar{\lambda}dP_1 - P_1 d\bar{\lambda} = 0$$

$$u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_1 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_2 - \bar{\lambda}dP_2 - P_2 d\bar{\lambda} = 0$$

$$dY - \bar{x}_1 dP_1 - P_1 d\bar{x}_1 - \bar{x}_2 dP_2 - P_2 d\bar{x}_2 = 0$$

Es muy importante detenernos en estas tres ecuaciones. Como vemos cada una de estas ecuaciones corresponde al diferencial total de la respectiva derivada parcial primera. Estas derivadas parciales primeras como partimos de un óptimo son ***TODAS*** iguales a cero. Lo que está haciendo el grupo de ecuaciones precedentes es diferenciar a cada una de estas derivadas primeras y ***EXIGIR*** que su valor ***NO CAMBIE***, es por esta razón que el diferencial total para cada una de estas tres derivadas es ***CERO***. Cada uno de estos ceros indica que los valores iniciales de las derivadas primeras no cambian. Recordemos que el valor inicial de cada una de estas derivadas es cero. Con lo cual, al igualar los diferenciales totales a cero, estoy implícitamente exigiendo que ***NO*** me mueva del punto inicial el cual ***YA ERA*** un óptimo. Es por esta razón que decimos que la estática comparada ***COMPARA*** entre óptimos, ***NO IMPORTA*** cual es el cambio exógeno, ***SIEMPRE*** me seguiré moviendo en un nuevo óptimo en la medida que cada uno de los tres diferenciales totales sean ceros.

Lo importante ahora es separar entre variables endógenas (es decir, aquellas que son optimizables) y las exógenas. Pasemos al término de la derecha todos los diferenciales relacionados con las variables exógenas (que en este caso son tres: P_1, P_2, Y):

$$u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_1 + u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_2 - P_1 d\bar{\lambda} = \bar{\lambda}dP_1$$

$$u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_1 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)d\bar{x}_2 - P_2 d\bar{\lambda} = \bar{\lambda}dP_2$$

$$-P_1 d\bar{x}_1 - P_2 d\bar{x}_2 = \bar{x}_1 dP_1 + \bar{x}_2 dP_2 - dY$$

Ahora podemos expresar a este sistema en términos de álgebra matricial:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d\bar{x}_1 \\ d\bar{x}_2 \\ d\bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}dP_1 \\ \bar{\lambda}dP_2 \\ -dY + \bar{x}_1 dP_1 + \bar{x}_2 dP_2 \end{bmatrix} \qquad \text{A}$$

Cuando se hace estática comparada, siempre se analiza el cambio de una variable exógena *ceteris paribus*, es decir, con todas las otras exógenas constantes.

Primer Caso:

$dY > 0, dP_1 = 0, dP_2 = 0$. Observando, la expresión matricial de arriba, esto implica que debemos eliminar a todos los términos en donde aparecen (dP_1, dP_2). Con lo cual, la expresión matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d\bar{x}_1 \\ d\bar{x}_2 \\ d\bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -dY \end{bmatrix}$$

Si ahora dividimos a ambos términos de la igualdad por dY, la expresión queda:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d\bar{x}_1/dY \\ d\bar{x}_2/dY \\ d\bar{\lambda}/dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si ahora premultiplicamos a ambos lados de la igualdad por la inversa de la primer matriz tenemos:

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/dY \\ d\bar{x}_2/dY \\ d\bar{\lambda}/dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como vemos, la resolución de este sistema nos da tres resultados: $(d\bar{x}_1/dY, d\bar{x}_2/dY, d\bar{\lambda}/dY)$. Estas derivadas nos indican cómo cambian los óptimos originales por unidad de cambio de ingreso nominal. Vemos que todo el problema radica en resolver la inversa de la matriz. Recordemos que la inversa de una matriz A se define como:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|\,A\,|}$$

El determinante de la matriz es:

$$u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\begin{vmatrix} u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix} - u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\begin{vmatrix} u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix} - P_1\begin{vmatrix} u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \end{vmatrix}$$

Haciendo un poco de álgebra, tenemos que:

$$u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(-P_2^2) - u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(-P_1P_2) - P_1(-u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)$$

Si distribuimos términos tenemos que:

$$F = -u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(P_2^2) + 2u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)(P_1P_2) - u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1^2 > 0$$

Esto no es ni mas ni menos que el determinante del Hessiano Orlado, el cual ***DEBE*** ser positivo por condición de máximo. Hasta ahora lo único que calculamos fue el determinante de la matriz, calculemos ahora el adjunto:

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -P_1 & -P_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ -P_2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ -P_1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -P_1 & -P_2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

La resolución de cada uno de estos determinantes resulta en el adjunto de la matriz (en realidad tendríamos que transponer para llegar al adjunto, pero en este caso la matriz es simétrica con lo que la transposición es redundante):

$$\begin{bmatrix} -P_2^2 & P_1P_2 & -u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1 \\ P_1P_2 & -P_1^2 & u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 - u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1 \\ \begin{matrix}(-u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ +u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ -u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2))\end{matrix} \end{bmatrix}$$

De esta forma, la resolución del sistema es:

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/dY \\ d\bar{x}_2/dY \\ d\bar{\lambda}/dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_2^2/F & P_1P_2/F & (-u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ P_1P_2/F & -P_1^2/F & (u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 - u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ \begin{matrix}(-u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ +u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ -u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2))/F\end{matrix} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Lo bueno ahora es que cualquiera que sea el cambio en las variables exógenas, la matriz inversa es ***SIEMPRE*** la misma!!!!!!!!!!!!. Vamos a ver cuál es la solución para $d\bar{x}_1/dY$:

$$d\bar{x}_1/dY = (u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 - u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \qquad \text{B}$$

Como vemos, lo que acabamos de calcular es el efecto ingreso en la demanda del bien 1. El signo de esta expresión está indefinido dependiendo de si el bien es normal o inferior.

<u>Segundo Caso:</u>

$dY = 0, dP_1 > 0, dP_2 = 0$. Analicemos ahora el cambio en el óptimo cuando *ceteris paribus* lo único que cambia es el precio del bien 1. Usando (A) tenemos ahora:

$$\begin{bmatrix} u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_1 \\ u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d\bar{x}_1/dP_1 \\ d\bar{x}_2/dP_1 \\ d\bar{\lambda}/dP_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Aplicando otra vez la misma inversa, resolvemos el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1/dP_1 \\ d\bar{x}_2/dP_1 \\ d\bar{\lambda}/dP_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_2^2/F & P_1P_2/F & (-u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ P_1P_2/F & -P_1^2/F & (u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 - u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ \begin{matrix}(-u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ +u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ -u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2))/F\end{matrix} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, el cambio final en la demanda del bien 1 cuando cambia el precio del bien 1 es:

$$d\bar{x}_1 / dP_1 = -P_2^2\bar{\lambda} / F + [(-u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F]\bar{x}_1 \qquad \text{C}$$

Como vemos, el efecto final de un cambio en el precio del bien 1 se puede descomponer en dos términos. El segundo término es la negativa del efecto ingreso que ya despejamos precedentemente, vamos a ver qué es el primer término.

<u>Tercer Caso:</u>

$dY = -dP_1\bar{x}_1$. Para ello supongamos que al tiempo de variar el precio del bien 1 ***TAMBIEN*** varía el ingreso nominal del consumidor. Es decir, al consumidor se lo ***COMPENSA*** por la baja en su ingreso real generada por el aumento en el precio del bien 1. La compensación opera así:

$$dY = -\bar{x}_1 dP_1$$

Si el ingreso nominal variase en la forma descripta el consumidor estaría totalmente compensado en el sentido que podría seguir consumiendo si quisiese lo mismo que antes. Si utilizamos (A) nuevamente tenemos en este caso:

$$\begin{bmatrix} d\bar{x}_1^C/dP_1 \\ d\bar{x}_2^C/dP_1 \\ d\bar{\lambda}^C/dP_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_2^2/F & P_1P_2/F & (-u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 + u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ P_1P_2/F & -P_1^2/F & (u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 - u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F \\ \begin{matrix}(-u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ +u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_2 \\ -u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)P_1)/F\end{matrix} & \begin{matrix}(u_{x_1x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ -u_{x_1x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)u_{x_2x_1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2))/F\end{matrix} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual, el cambio en la demanda del bien 1 ***COMPENSADA*** cuando cambia el precio del bien 1 es:

$$\frac{d\bar{x}_1^{Compensado}}{dP_1} = -P_2^2\bar{\lambda} / F < 0 \qquad \text{D}$$

Ahora podemos analizar todo conjuntamente. Vemos que la expresión C es igual a:

$$C = D - B\bar{x}_1$$

Recordemos que D mide el efecto compensado (o sea, efecto sustitución), y B mide el efecto ingreso. Finalmente, C mide el cambio final en la demanda (es decir, neteados los efectos sustitución e ingreso):

$$\frac{d\overline{x}_1}{dP_1} = \frac{d\overline{x}_1^{Compensado}}{dP_1} - \frac{d\overline{x}_1}{dY}\overline{x}_1$$

Vemos que sin darnos cuenta demostramos la ecuación de Slutsky. Lo único cierto en esta ecuación es el efecto sustitución el cual es ***INDISCUTIBLEMENTE*** negativo. El efecto ingreso, como lo mencionamos antes puede ser positivo o negativo. Analicemos el caso de un bien normal. En este caso $d\overline{x}_1 / dY > 0$, pero como en la ecuación precedente está multiplicado por un signo negativo termina teniendo un efecto negativo que es ***IGUAL*** al de sustitución. Es por esta razón que cuando el bien es normal, el efecto sustitución e ingreso tienen el mismo signo resultando en una caída ***INDUDABLE*** de la demanda!!!.

C- Optimización con Restricciones de Desigualdad: Teorema de Khun Tucker

a- Restricciones de No Negatividad

Es común en economía que las variables de análisis deben ser no-negativas. Es por esta razón que es necesario incluir esta restricción de no-negatividad al momento de optimizar. Supongamos que queremos optimizar una función, pero exigiendo que las variables a optimizar sean no negativas:

$$Max_x \ f(x) \qquad \text{Sujeto a} : x \geq 0$$

Para obtener intuición de la forma en la que la restricción de no negatividad afecta a la solución del problema, vamos a preguntarnos qué debería ocurrir para que un valor dado de x cumpla con la condición de óptimo. Supongamos que la función objetivo es cóncava.

Caso a:

Si $x > 0$, esto implica que para que sea un máximo $f'(x) = 0$ (solución interior).

Caso b:

Si $x = 0$, esto implica que para que sea un máximo $f'(x) < 0$ (solución de esquina). O lo que es lo mismo, el máximo corresponde a un valor de x negativo.

Como vemos, tanto en el caso "a" como en el "b" se cumple que:

$$f'(x)x = 0$$

Entonces:

$$Max_x \ f(x) \Rightarrow \partial f / \partial x = 0 \Rightarrow x > 0; \ \ \partial f / \partial x < 0 \Rightarrow x = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\partial f / \partial x \leq 0 \qquad x \geq 0 \qquad (\partial f / \partial x)x = 0$$

b- Restricciones de Desigualdad

Olvidémonos por un momento de las restricciones de no-negatividad y concentrémonos en restricciones de desigualdad. El problema que enfrentamos es el siguiente:

$$Max \ f(x) \qquad \text{Sujeto a} : g(x) \leq r_1$$

Es muy importante recordar cuando utilizamos el Lagrangean, cuál era el significado del coeficiente λ. λ mide el mejoramiento en la función objetivo que podemos obtener si la restricción se relaja marginalmente. En otras palabras, λ mide el precio sombra de una unidad adicional de la restricción. Se pueden dar dos casos:

$$g(x) = r_1 \Rightarrow \lambda > 0 \qquad g(x) < r_1 \Rightarrow \lambda = 0$$

En el primer caso, vemos que es óptimo agotar totalmente la restricción. Es por esta razón que el coeficiente λ es positivo. La razón es sencilla, como se agotó totalmente la restricción todavía no se llegó a un punto de saciedad en la restricción. Esto quiere decir que en el margen estaría dispuesto a pagar por obtener un relajamiento en la restricción.

En el segundo caso, vemos que es óptimo dejar sin utilizar parte de la restricción. En este caso ya se llegó a un punto de saciedad en la restricción y por la tanto λ vale cero. Es decir, un relajamiento de la restricción no vale nada.

Es por esta razón, que si incorporamos una restricción de desigualdad en el Lagrangean, la misma ofrece dos posibilidades:

$$Max_x \ Z = f(x) + \lambda(r_1 - g(x))$$

$$\partial Z / \partial x = r_1 - g(x) = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \qquad \partial Z / \partial x = r_1 - g(x) > 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$\partial Z / \partial x = r_1 - g(x) \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad [r_1 - g(x)]\lambda = 0$$

c- Restricciones de No-Negatividad y Desigualdad Simultaneas

Si el problema que debemos optimizar tiene la siguiente forma:

$$Max \ f(x) \quad \text{Sujeto a : 1) } x \geq 0; \ \text{ 2) } g(x) \leq r_1$$

Entonces, las condiciones de Khun Tucker son:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x} \leq 0 \quad x \geq 0 \quad [\frac{\partial f(x)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x}]x = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = r_1 - g(x) \geq 0 \qquad \lambda \geq 0 \qquad [\frac{\partial Z}{\partial \lambda}]\lambda = 0$$

Ejemplo:

Supongamos que queremos maximizar la siguiente función:

$$Max_{x_1,x_2} \ 3x_1 + 1x_2 \quad \text{Sujeto a : 1) } x_1, x_2 \geq 0; \text{2) } 2x_1 + 1x_2 \leq 10; \text{3) } 1x_1 + 2x_2 \leq 10$$

El Lagrangean y las condiciones de óptimo son:

$$Z = 3x_1 + 1x_2 + \lambda_1(10 - 2x_1 - 1x_2) + \lambda_2(10 - 1x_1 - 2x_2)$$

$$\text{1) } \partial Z / \partial x_1 = 3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad x_1 \geq 0 \quad [3 - 2\lambda_1 - \lambda_2]x_1 = 0$$

$$\text{2) } \partial Z / \partial x_2 = 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad [1 - \lambda_1 - 2\lambda_2]x_2 = 0$$

$$\text{3) } \partial Z / \partial \lambda_1 = 10 - 2x_1 - 1x_2 \geq 0 \quad \lambda_1 \geq 0 \quad [10 - 2x_1 - 1x_2]\lambda_1 = 0$$

$$\text{4) } \partial Z / \partial \lambda_2 = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad [10 - x_1 - 2x_2]\lambda_2 = 0$$

El problema del método es que hay que hacer un guess. Nuestro guess es:

$$x_1 > 0; x_2 = 0; \lambda_1 > 0; \lambda_2 = 0$$

Como vemos las derivadas 1) y 3) deben ser cero:

$$\text{1)} \partial Z / \partial x_1 = 3 - 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3/2; \qquad \text{3)} \partial Z / \partial \lambda_1 = 10 - 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$$

Ahora hay que chequear que 2) y 4) se cumplen. Dado que $x_2 = 0$ y $\lambda_2 = 0$, la derivada 2) debe ser menor que cero y la 4) mayor que cero. Si una de estas dos condiciones no se cumple, quiere decir que el vector que proponemos como solución no es un óptimo.

$$\text{2)} \partial Z / \partial x_2 = 1 - 3/2 < 0; \qquad \text{4)} \partial Z / \partial \lambda_2 = 10 - 5 > 0$$

Vemos que ambas condiciones se cumplen, lo cual implica que el vector propuesto es un óptimo.

Ejemplo 2: Óptimo Paretiano con Funciones de Utilidad No Lineales

Vamos ahora a analizar un concepto muy utilizado en equilibrio general: óptimo de Pareto. El marco de análisis en el que se realiza este estudio es en lo que se denomina ***Caja de Edgeworth***. Esencialmente lo que se hace en este modelo es determinar simultáneamente un equilibrio entre dos consumidores, de ahí el concepto de equilibrio general en el sentido que el equilibrio se determina con dos consumidores interactuando simultáneamente. Un punto se considera óptimo de Pareto si en ese punto, aumentarle la utilidad a uno de los dos consumidores genera necesariamente una pérdida de utilidad en el otro consumidor. Obviamente, existen varios puntos que pueden cumplir la condición de óptimo paretiano. El conjunto de esos puntos se denomina curva de contrato en el sentido que es la curva de transacciones socialmente óptimas. Lo que vamos a analizar es cómo derivar la curva de contrato. El problema principal que enfrenta este modelo es en cuanto a las restricciones. Analicemos cada una de ellas.

Restricciones

El consumo total en esta economía no puede ser superior al endowment de la economía. Vamos a suponer que esta economía además de tener solamente dos consumidores tiene dos bienes. Definamos lo siguiente: x_A es lo que consume el individuo A respecto al bien x, x_B es lo que consume el individuo B respecto al bien x, y_A es lo que consume el individuo A respecto al bien y, y_B es lo que consume el individuo B respecto al bien y. La utilidad que obtiene el individuo A de su consumo es u_A y la que obtiene el individuo B es u_B. Con respecto al bien x, el endowment que tiene esta economía es: $w_x = x_A + x_B$, con respecto al bien y, el endowment que tiene esta economía es: $w_y = y_A + y_B$.

El Lagrangiano en este caso es:

$$L = u^A(x_A, y_A) + \lambda_1(\overline{u}^B - u^B(x_B, y_B)) + \lambda_2(w_x - x_A) + \lambda_3(w_y - y_A) \qquad (1)$$

Como vemos, la restricción asociada a λ_1 implica que podemos aumentar la utilidad del individuo A siempre que no disminuyamos la utilidad del individuo B, $\overline{u}^B$, esta restricción hace a la esencia de un óptimo paretiano. La segunda restricción, es decir, la asociada a λ_2 indica que se puede optimizar en la medida que el consumo resultante no exceda el recurso total que tiene esta economía respecto a ese bien, en este caso, w_x. Finalmente, la tercera restricción, es decir, la asociada a λ_3 indica que se puede optimizar en la medida que el consumo resultante no exceda el recurso total que esta economía tiene respecto a ese bien, en este caso, w_y.

Es importante entender el signo que tendrá el precio sombra de la primer restricción, es decir, la asociada a λ_1. Recordemos que estamos intentando maximizar la utilidad del individuo A sujeto a que la utilidad del individuo B no cambie, es decir, que permanezca en el nivel $\overline{u}^B$. Supongamos que *ceteris paribus*, se incrementase $\overline{u}^B$. El efecto que esto tendría en la utilidad del individuo A es reducirla, es decir, al quitarle grados de libertad el óptimo resultante sería inferior al que se podría obtener antes del incremento en $\overline{u}^B$. De esta forma, $\lambda_1 = \partial L / \partial u^B < 0$ en el sentido que un incremento en la utilidad del otro consumidor necesariamente implica una disminución en la utilidad del consumidor A. Generalmente, estamos acostumbrados a plantear el problema de forma tal que todos los precios sombras sean positivos. Es por esta razón que la restricción relacionada a λ_1 se plantea a la inversa respecto a la expresión (1):

$$L = u^A(x_A, y_A) + \lambda_1(u^B(x_B, y_B) - \overline{u}^B) + \lambda_2(w_x - x_A) + \lambda_3(w_y - y_A) \qquad (2)$$

Respecto a las otras dos restricciones, tanto λ_2 como λ_3 son mayores o iguales que cero en el sentido que aumentar la cantidad total de recursos de esta economía nunca puede significar una pérdida de utilidad. Vamos ahora a asignar funciones de utilidad y endowments específicos a los efectos de resolver este problema utilizando Khun Tucker.

$$L = 2\ln(x_A) + \ln(y_A) + \lambda_1((10 - x_A)^2(20 - y_A) - \overline{u}^B) + \lambda_2(10 - x_A) + \lambda_3(20 - y_A) \qquad (3)$$

Observamos que en definitiva, este Lagrangeano implica maximizar el siguiente problema:

$$Max\, u^A = 2\ln(x_A) + \ln(y_A) \qquad \textit{sujeto a:} \qquad (4)$$

$$1)\ (10 - x_A)^2(20 - y_A) \geq \overline{u}^B$$

$$2)\ x_A \geq 0$$

$$3)\ y_A \geq 0$$

$$4)\ x_A \leq 10$$

$$5)\ y_A \leq 20$$

Las condiciones de primer orden son:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{2}{x_A} - 2\lambda_1(10 - x_A)(20 - y_A) - \lambda_2 \leq 0; \qquad x_A \geq 0 \qquad (5)$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = \frac{1}{y_A} - \lambda_1(10 - x_A)^2 - \lambda_3 \leq 0; \qquad y_A \geq 0 \qquad (6)$$

$$3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (10 - x_A)^2(20 - y_A) - \overline{u}_B \geq 0; \qquad \lambda_1 \geq 0 \qquad (7)$$

$$4)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 10 - x_A \geq 0; \qquad \lambda_2 \geq 0 \qquad (8)$$

$$5)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 20 - y_A \geq 0; \qquad \lambda_3 \geq 0 \qquad (9)$$

<u>Guess : Solución Interior</u>

Que la solución sea interior implica que:

$$x_A > 0; \quad x_A < 10 \qquad\qquad y_A > 0; \quad y_A < 20 \qquad (10)$$

Finalmente, siempre es conveniente suponer que dejamos al consumidor B en el mismo nivel de utilidad inicial:

$$(10 - x_A)^2(20 - y_A) - \overline{u}_B = 0; \qquad \lambda_1 > 0 \qquad (11)$$

Esta última ecuación implica que todos los beneficios del intercambio se los lleva A. Vamos a ver las implicancias del guess en cuanto a los valores de las derivadas y de los multiplicadores.

$$x_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \qquad (12)$$

$$x_A < 10 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \tag{13}$$

$$y_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} = 0 \tag{14}$$

$$y_A < 20 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \tag{15}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{2}{x_A} - 2\lambda_1(10 - x_A)(20 - y_A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{x_A(10 - x_A)(20 - y_A)} \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_A} = \frac{1}{y_A} - \lambda_1(10 - x_A)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{y_A(10 - x_A)^2} \tag{17}$$

Dado que ambos términos son iguales, tenemos:

$$\frac{1}{x_A(10 - x_A)(20 - y_A)} = \frac{1}{y_A(10 - x_A)^2} \tag{18}$$

Esto implica:

$$\frac{y_A(10 - x_A)^2}{x_A(10 - x_A)(20 - y_A)} = 1 \Rightarrow \frac{y_A(10 - x_A)}{x_A(20 - y_A)} = 1 \Rightarrow y_A(10 - x_A) = x_A(20 - y_A) \Rightarrow \tag{19}$$

Esto implica:

$$10y_A - x_A y_A = 20x_A - x_A y_A \Rightarrow y_A = 2x_A \tag{20}$$

Es muy importante concentrarnos en el significado de $y_A = 2x_A$. Esta ecuación mide el conjunto de puntos que implican óptimos paretianos, es decir, puntos socialmente óptimos. Es por esta razón que a esta ecuación se la denomina curva de contrato en el sentido que indica el conjunto de puntos de contratos socialmente óptimos. Vamos ahora a derivar la curva de contrato para B:

$$x_A = 10 - x_B \qquad\qquad y_A = 20 - y_B \tag{21}$$

Esto implica:

$$y_A = 2x_A \Rightarrow (20 - y_B) = 2(10 - x_B) \Rightarrow y_B = 2x_B \tag{22}$$

Con lo cual, la curva de contrato vista desde la óptica de cada jugador es:

$$A \Rightarrow y_A = 2x_A \qquad\qquad B \Rightarrow y_B = 2x_B \tag{23}$$

<u>Utility Possibility Frontier</u>

Esta función indica la cantidad de utilidad que puede obtener un individuo dada la utilidad del otro.

$$u_A = 2\ln(x_A) + \ln(y_A) \qquad\qquad u_B = x_B^2 y_B \tag{24}$$

Si utilizamos la curva de contrato de B tenemos:

$$x_B = \frac{y_B}{2} \Rightarrow u_B = (\frac{y_B}{2})^2 y_B \Rightarrow u_B = \frac{y_B^3}{4} \Rightarrow y_B = (4u_B)^{(1/3)} \tag{25}$$

Dado que $x_B = y_B / 2$, tenemos:

$$x_B = \frac{(4u_B)^{(1/3)}}{2} \tag{26}$$

Como vemos, hasta ahora utilizamos dos conceptos: la función de utilidad de B y la curva de contrato vista desde la óptica de B. De esta forma, las cantidades socialmente óptimas para B quedaron expresadas en función de la utilidad de B:

$$x_B = \frac{(4u_B)^{(1/3)}}{2} \qquad y_B = (4u_B)^{(1/3)} \tag{27}$$

Recordemos ahora que:

$$x_A = 10 - x_B \Rightarrow x_A = 10 - \frac{(4u_B)^{(1/3)}}{2} \qquad y_A = 20 - y_B \Rightarrow y_A = 20 - (4u_B)^{(1/3)} \tag{28}$$

De esta forma, la función de utilidad de A queda expresada como:

$$u_A = 2\ln(10 - \frac{(4u_B)^{(1/3)}}{2}) + \ln(20 - (4u_B)^{(1/3)}) \tag{29}$$

Vemos que las únicas dos variables involucradas en la ecuación precedente son u_A y u_B. De esta forma, la ecuación precedente indica la ***utility possibility frontier***, en el sentido que muestra las posibilidades de utilidad que tiene esta economía.

<u>Ejemplo 3: Óptimo Paretiano con Funciones de Utilidad Lineales</u>

La aplicación de Khun Tucker en el ejemplo anterior fue sencilla en el sentido que al tener ambas funciones de utilidad cóncavas la solución en general es interior. Sin embargo, en este ejemplo vamos a demostrar la verdadera utilidad de Khun Tucker, la cual se evidencia en los casos de funciones de utilidad lineales. Supongamos que las funciones de utilidad son:

$$u_A = x_A + y_A \qquad u_B = x_B + 2y_B \tag{30}$$

Supongamos además que $w_x = w_y = 10$. De esta forma, el Lagrangeano es:

$$u_A = x_A + y_A + \lambda_1((10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}^B) + \lambda_2(10 - x_A) + \lambda_3(10 - y_A) \tag{31}$$

Las condiciones de primer orden son:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0; \qquad x_A \geq 0 \tag{32}$$

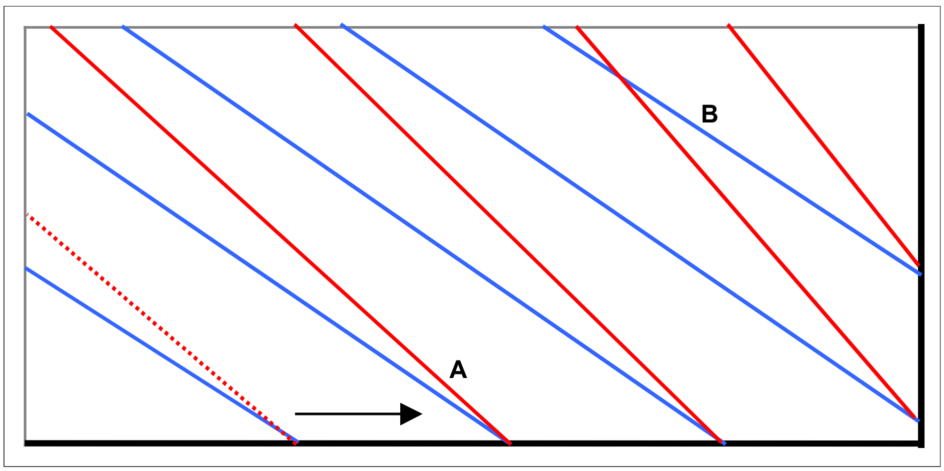
$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 - \lambda_3 \leq 0; \qquad y_A \geq 0 \tag{33}$$

$$3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = (10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}_B \geq 0; \qquad \lambda_1 \geq 0 \tag{34}$$

$$4)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 10 - x_A \geq 0; \qquad \lambda_2 \geq 0 \tag{35}$$

$$5)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 20 - y_A \geq 0; \qquad \lambda_3 \geq 0 \tag{36}$$

Es importante entender adónde en este caso estaría la curva de contrato. En primer lugar, dada la linearidad de ambas funciones de utilidad, es imposible derivar la curva de contrato exigiendo igual tangencia entre ambas curvas de indiferencia dado que al ser lineales, la tangencia no existe. De esta forma, la curva de contrato es el conjunto de puntos en donde ambas curvas de indiferencia se intersectan (y no son tangentes), es decir, la curva de contrato en este caso es una "L" invertida.



Guess 1:

Derivaremos en este caso la parte horizontal de la curva de contrato sin considerar sus límites extremos. La caracteristica principal es que en este caso $y_A = 0$. En esta parte de la curva de contrato se cumple que:

$$x_A > 0; \quad x_A < 10 \qquad\qquad y_A = 0; \quad y_A < 10 \tag{37}$$

Siempre es conveniente suponer que dejamos al consumidor B en el mismo nivel de utilidad inicial:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}_B = 0; \qquad \lambda_1 > 0 \tag{38}$$

Esta última ecuación implica que todos los beneficios del intercambio se los lleva A. Vamos a ver las implicancias del guess en cuanto a los valores de las derivadas y de los multiplicadores.

$$x_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \tag{39}$$

$$x_A < 10 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \tag{40}$$

$$y_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} < 0 \tag{41}$$

$$y_A < 10 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \tag{42}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \tag{43}$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 \leq 0 \Rightarrow 1 - 2(1) = -1 < 0 \Rightarrow Consistente \tag{44}$$

Como vemos, las dos ecuaciones precedentes son consistentes. Esta parte de la curva de contrato se deriva así:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \bar{u}_B = 0 \Rightarrow (10 - x_A) + 20 - \bar{u}_B = 0 \Rightarrow 30 - x_A = \bar{u}_B \Rightarrow \tag{45}$$
$$x_A = 30 - \bar{u}_B \qquad y_A = 0 \qquad 20 < \bar{u}_B < 30$$

Observemos que si $\bar{u}_B$ cae fuera del rango especificado, x_A será negativo o superior al endowment, lo cual es imposible.

<u>Guess 2:</u>

Derivaremos en este caso la parte vertical de la curva de contrato sin considerar sus límites extremos. La caracteristica principal es que en este caso $x_A = 10$. En esta parte de la curva de contrato se cumple que:

$$x_A > 0; \quad x_A = 10 \qquad\qquad y_A > 0; \quad y_A < 10 \tag{46}$$

Como siempre, es conveniente suponer que dejamos al consumidor B en el mismo nivel de utilidad inicial:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \bar{u}_B = 0; \qquad \lambda_1 > 0 \tag{47}$$

Vamos a ver las implicancias del guess en cuanto a los valores de las derivadas y de los multiplicadores.

$$x_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \tag{48}$$

$$x_A = 10 \Rightarrow \lambda_2 > 0 \tag{49}$$

$$y_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} = 0 \tag{50}$$

$$y_A < 10 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \tag{51}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.50 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \qquad (52)$$

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - 0.50 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0.50 \Rightarrow \lambda_2 > 0\ \textit{Consistente} \qquad (53)$$

Como vemos, las dos ecuaciones precedentes son consistentes. Esta parte de la curva de contrato se deriva así:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}_B = 0 \Rightarrow 20 - 2y_A - \overline{u}_B = 0 \Rightarrow 20 - \overline{u}_B = 2y_A \qquad (54)$$

$$x_A = 10 \qquad y_A = 10 - \frac{\overline{u}_B}{2} \qquad 0 < \overline{u}_B < 20$$

Observemos que si $\overline{u}_B$ cae fuera del rango especificado, y_A será negativo lo cual es imposible.

<u>Guess 3:</u>

Vamos a ver si una solución interior es aceptada o rechazada por el método. Ya sabemos que este tipo de funciones de utilidad impide la existencia de puntos interiores en la curva de contrato, con lo cual ya sabemos que si el método funciona bien debería rechazar este guess.

En este caso, las variables exhiben los siguientes valores:

$$x_A > 0; \quad x_A < 10 \qquad y_A > 0; \quad y_A < 10 \qquad (55)$$

Como siempre, es conveniente suponer que dejamos al consumidor B en el mismo nivel de utilidad inicial:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}_B = 0; \qquad \lambda_1 > 0 \qquad (56)$$

Vamos a ver las implicancias del guess en cuanto a los valores de las derivadas y de los multiplicadores.

$$x_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \qquad (57)$$

$$x_A < 10 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \qquad (58)$$

$$y_A > 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} = 0 \qquad (59)$$

$$y_A < 10 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \qquad (60)$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad (61)$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.50 \qquad (62)$$

Como vemos, las dos ecuaciones precedentes son inconsistentes en el sentido que λ_1 exhibe dos valores distintos, lo cual es imposible. Vemos de esta forma que el método rechaza a una solución interior como candidata a la curva de contrato.

Puntos Extremos de la Curva de Contrato:

Finalmente, es importante destacar que nos faltan identificar solamente tres puntos de la curva de contrato:

$$x_A = 0; \qquad y_A = 0; \tag{63}$$

$$x_A = 10; \qquad y_A = 0; \tag{64}$$

$$x_A = 10; \qquad y_A = 10; \tag{65}$$

Como siempre, es conveniente suponer que dejamos al consumidor B en el mismo nivel de utilidad inicial:

$$(10 - x_A) + 2(10 - y_A) - \overline{u}_B = 0; \qquad \lambda_1 > 0 \tag{66}$$

Vamos a ver las implicancias del guess en cuanto a los valores de las derivadas y de los multiplicadores respecto a la primera de las tres combinaciones.

$$x_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} < 0 \tag{67}$$

$$x_A < 10 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \tag{68}$$

$$y_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} < 0 \tag{69}$$

$$y_A < 10 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \tag{70}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$1) \ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 1 \tag{71}$$

$$2) \ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0.50 \, \textit{Consistente} \tag{72}$$

Como vemos, no existe ninguna contradicción en esta combinación. La curva de contrato es:

$$10 - x_A + 20 - \overline{u}_B = 0 \Rightarrow x_A = 30 - \overline{u}_B \qquad y_A = 0 \qquad \overline{u}_B = 30 \tag{73}$$

Analicemos ahora la segunda combinación:

$$x_A = 10 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \tag{74}$$

$$x_A = 10 \Rightarrow \lambda_2 > 0 \tag{75}$$

$$y_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} < 0 \tag{76}$$

$$y_A < 10 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \tag{77}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0.50\ \mathit{Consistente} \tag{78}$$

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 < 1 \Rightarrow 0 < \lambda_2 < 0.5 \tag{79}$$

Como vemos, si $0.50 < \lambda_1 < 1$, esta solución también es consistente. La curva de contrato es:

$$10 - x_A + 20 - \overline{u}_B = 0 \Rightarrow x_A = 30 - \overline{u}_B \qquad y_A = 0 \qquad \overline{u}_B = 20 \tag{80}$$

Finalmente, analicemos ahora la tercer combinación:

$$x_A = 10 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_A} = 0 \tag{81}$$

$$x_A = 10 \Rightarrow \lambda_2 > 0 \tag{82}$$

$$y_A = 10 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y_A} = 0 \tag{83}$$

$$y_A = 10 \Rightarrow \lambda_3 > 0 \tag{84}$$

De esta forma, las primeras dos condiciones de primer orden se simplifican a lo siguiente:

$$1)\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \tag{85}$$

$$2)\ \frac{\partial L}{\partial y_A} = 1 - 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow 1 - \lambda_3 = 2\lambda_1 \Rightarrow \frac{1-\lambda_3}{2} = \lambda_1 \tag{86}$$

Combinando (85) y (86), tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = 1 - (\frac{1-\lambda_3}{2}) - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = (\frac{1+\lambda_3}{2}) \tag{87}$$

Con lo cual, la relación entre los tres multiplicadores es:

$$\lambda_1 = \frac{1-\lambda_3}{2} \qquad \lambda_2 = (\frac{1+\lambda_3}{2}) \tag{88}$$

Recordemos que, dados los supuestos, los multiplicadores deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 > 0 \qquad \lambda_3 > 0 \tag{89}$$

De esta forma:

$$\lambda_1 > 0 \Rightarrow \frac{1-\lambda_3}{2} > 0 \Rightarrow \lambda_3 < 1 \tag{90}$$

$$\lambda_2 > 0 \Rightarrow \frac{1+\lambda_3}{2} > 0 \Rightarrow \lambda_3 > -1 \Rightarrow \lambda_3 < 1 \tag{91}$$

Como vemos, en la medida que $0 < \lambda_3 < 1$, todas las restricciones se cumplen. La curva de contrato es:

$$20 - 2y_A - \bar{u}_B = 0 \Rightarrow y_A = 10 - \frac{\bar{u}_B}{2} \qquad x_A = 10 \qquad \bar{u}_B = 0 \tag{92}$$

A modo de resumen, la curva de contrato en este caso es:

$$x_A = 30 - \bar{u}_B \qquad y_A = 0 \qquad 20 \le \bar{u}_B < 30 \tag{93}$$

$$x_A = 10 \qquad y_A = 10 - \frac{\bar{u}_B}{2} \qquad 0 \le \bar{u}_B < 20 \tag{94}$$