

Modelamiento e Identificación de Parámetros para el Helicóptero 2DOF QUANSER

Juan Nicolas Gonzalez Camberos



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

Facultad de Ingeniería

Proyecto Curricular de Ingeniería Electrónica

Bogotá D.C.

2024

Modelamiento e Identificación de Parámetros para el Helicóptero 2DOF QUANSER

Juan Nicolas Gonzalez Camberos Código: 20181005116

Trabajo de grado para optar al título de:
Ingeniero Electrónico

Directora:
Doc.-Ing. Diana Marcela Ovalle Martínez

Modalidad de Grado:
Investigación



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
Facultad de Ingeniería
Proyecto Curricular de Ingeniería Electrónica
Bogotá D.C.
2024

Contenido

Lista de Figuras	VIII
Lista de Tablas	XIII
1. Estado del arte	1
1.1. Modelos	2
1.1.1. Modelo Lineal QUANSER	2
1.1.2. Modelo Euler lagrange	4
1.1.3. Euler lagrange -torque lineal - fricción viscosa	5
1.1.4. Euler lagrange - torque cuadratico -friccion viscosa	5
1.1.5. Perturbaciones o variaciones en la planta	6
1.1.6. Ajuste torques cruzados	7
1.1.7. Modelo-fricciones	8
1.1.8. Funciones propias	9
1.2. Control sin modelo	10
2. Modelización	13
2.1. Modelo No Lineal	13
2.2. Modelo lineal- Linealización	16
2.2.1. Consideraciones iniciales	16
2.2.2. Puntos de equilibrio	17
2.2.3. Linealización	17
2.3. Estabilidad	19
2.3.1. Punto de operación theta=0	19
2.3.2. Punto de operación theta=20	20
2.3.3. Punto de operación theta=40	20
2.3.4. Punto de operación theta=60	20
2.3.5. Punto de operación theta=-20	21

2.3.6. Punto de operación theta=-40	21
2.3.7. Punto de operación theta=-60	22
2.4. Motor	23
2.4.1. Modelo Segundo Orden	23
2.4.2. Modelo de Primer Orden	26
2.5. Modelo Motor-Planta	26
3. Protocolo toma de datos	28
3.1. Configuración	29
3.1.1. Toma de datos	31
3.2. Resultados	33
3.2.1. Lazo abierto	34
3.2.2. Lazo cerrado	37
3.2.3. LQR	51
3.2.4. PID	54
3.2.5. PID OFFSET	56
3.2.6. Desacople	56
4. Identificación	63
4.1. Parámetros basicos	63
4.1.1. Inercia	63
4.1.2. Fricción Viscosa	64
4.1.3. Empuje	68
4.2. Metodología Básica	71
4.2.1. Preparación de datos	72
4.2.2. Procedimiento identificación	73
5. Estimación	83
5.1. Lazo abierto	83
5.1.1. Dominio del tiempo	83
5.1.2. Dominio de la frecuencia	92
5.1.3. Parámetros individuales	93
5.2. Lazo cerrado	97
5.2.1. LQR	97
5.2.2. PID	103
5.2.3. Desacople	106
5.3. Motor	109
5.3.1. Tiempo	110

5.3.2. Frecuencia	112
5.4. Conjunto motor planta	112

Listado de Figuras

1-1. Plant QUANSER AERO [?]	2
1-2. Marco referencial, tomado de [?]	3
1-3. Esquema control MPC, tomado de [?]	5
1-4. Esquema control pole placement, tomado de [?]	6
1-5. Esquema control PID GPI, tomado de [?]	7
1-6. Lógica controlador H infinito, tomado de [?]	10
2-1. Yaw	22
2-2. Pitch	22
2-3. Comportamiento polos	22
2-4. Circuito equivalente motor	23
2-5. Sistema con dinámica de motor	25
3-1. Bloques QUANSER AERO	28
3-2. Tomado de [?] Ajuste motor	29
3-3. Tomado de [?] seguros movimiento	30
3-4. Configuración comunicación	30
3-5. Configuración lectura	31
3-6. Configuración escritura	32
3-7. Host to file	32
3-8. Visualización sensores completos	33
3-9. Montaje lazo abierto	34
3-10. Entrada 0 a 10 v	34
3-11. Entrada 0 -10 v	34
3-12. Entrada 12 14 V	35
3-13. Entrada 8 a 10 v	36
3-14. Entrada -8 -10 v	36
3-15. Entrada 0 10 v	36

3-16. Entrada theta 8 a 10 v psi 0 a 8 v	37
3-17. Entrada theta -10 a 10 v psi -6 a 6 v	37
3-18. Lazo cerrado	37
3-19. Montaje lazo cerrado	37
3-20. ref 0.5 Ganancia 1	38
3-21. ref 0.5 Ganancia 20	38
3-22. ref 0.5 Ganancia 30	38
3-23. ref 0.17 Ganancia 30	39
3-24. ref 0.34 Ganancia 30	39
3-25. ref 0.69 Ganancia 30	39
3-26. ref 0.69 Ganancia 10	39
3-27. ref 0.17 Ganancia 10	40
3-28. ref 0.17 Ganancia 20	40
3-29. ref 0.17 Ganancia 30	40
3-30. ref 0.52 Ganancia 10	41
3-31. ref 52 Ganancia 20	41
3-32. Pruebas simultáneas Yaw ref 0	41
3-33. Pruebas simultáneas Pitch ref 0	42
3-34. Pruebas simultáneas Pitch ref diferentes de 0	42
3-35. Pruebas simultáneas Pitch ref diferentes de 0	43
3-36. Voltaje umbral inferior 3.5 v	44
3-37. Voltaje umbral inferior 3.6 v	44
3-38. Voltaje umbral inferior 3.7 v	44
3-39. Voltaje umbral superior 3.6 v	45
3-40. Voltaje umbral superior 3.7 v	45
3-41. Voltaje umbral superior 3.8 v	45
3-42. Voltaje umbral inferior 8 v	46
3-43. Voltaje umbral inferior 9 v	46
3-44. Voltaje umbral inferior 10 v	46
3-45. Voltaje umbral superior 10 v	47
3-46. Voltaje umbral superior 10.3 v	47
3-47. Voltaje umbral superior 10.5 v	47
3-48. Voltaje umbral superior 11 v	47
3-49. Esquema con offset	48
3-50. Montaje lazo cerrado con offset	48
3-51. Psi 1.5 rad G 1	49
3-52. Psi 1.5 rad G 1.5	49

3-53. Psi 1.5 rad G 2	49
3-54. Theta 0.52 rad G 1	49
3-55. Theta 0.52 rad G 1.4	49
3-56. Theta 0.52 rad G 2	50
3-57. Theta 0.52 rad G 3	50
3-58. Implementación offset simultaneo	50
3-59. Theta 0.3 rad Psi 0.3	50
3-60. Diagrama de bloques LQR	51
3-61. Montaje controlador LQR	52
3-62. Theta 0.1745 rad psi 0	52
3-63. Theta 0 psi 1.047 rad	52
3-64. Theta 0.2617 rad psi 0.5235 rad	53
3-65. Theta 0.698 rad psi 0.698 rad	53
3-66. Theta 1.047 rad psi 0.5235 rad	53
3-67. Theta 0.349 rad	54
3-68. Theta 0.174 rad	54
3-69. Psi 0.785 rad	54
3-70. Psi 0.52 rad	54
3-71. Realimentación	54
3-72. Theta 0 psi aleatorio	55
3-73. Theta aleatorio psi 0	55
3-74. Theta aleatorio psi aleatorio	56
3-75. Theta aleatorio psi aleatorio	56
3-76. Sistema representado en bloques	57
3-77. Sistema PID representado en bloques	57
3-78. Sistema representado en bloques	59
3-79. Quanser Theta 0 rad Psi 1.074 rad	60
3-80. Quanser Theta 1.074 rad Psi 0 rad	60
3-81. Quanser Theta 1.074 rad Psi 1.074 rad	60
3-82. Sintonización inicial	61
3-83. Sintonización referencias desfasadas	61
3-84. Sintonización yaw	62
3-85. Sintonización final	62
3-86. Resultados 0.26 a 0.43 rad (${}^{\circ}15$ a ${}^{\circ}25$)	62
4-1. Respuesta libre pitch	66
4-2. Respuesta libre yaw	67

4-3. Empuje Vp theta	69
4-4. Empuje Vy theta	69
4-5. Empuje Vy psi	69
4-6. Empuje Vp Psi	69
4-7. Theta 0 a 10 V	70
4-8. Theta 0 a -10 V	70
4-9. Psi 8 a 10 V	71
4-10. Psi -8 a -10 V	71
4-11. Psi 0 a 10 V	71
4-12. Ejemplo datos a procesar	73
4-13. Ejemplo ventana compare	82
5-1. Datos estimación solo pitch	84
5-2. Identificación solo numerador	85
5-3. Identificación solo denominador	87
5-4. Identificación todos los parámetros función de transferencia	88
5-5. Resultados ss Theta -8 -12 v Psi 0 8 v	89
5-6. Resultados ss Theta 8 10 v Psi 0 8 v	90
5-7. Resultados ss Theta 8 12 v Psi 8 12 v	91
5-10. Resultados id no lineal Theta 8 12 Psi 0	92
5-8. Resultados id no lineal Theta 0 10 Ps 0	92
5-9. Resultados id no lineal Theta 7.5 12.5 Psi 0	92
5-11. Identificación en frecuencia	93
5-12. Impulso positivo Vy	94
5-13. Resultados impulso Vy	95
5-14. Impulso negativo Vy	95
5-15. Resultado impulso negativo Vy	95
5-16. Impulso positivo Vp	96
5-17. Resultado impulso negativo Vp	96
5-18. Impulso negativo Vp	96
5-19. Resultado impulso negativo Vp	97
5-20. sys Psi40 theta40 yaw on pitch on	98
5-21. sys Psi60 theta30 yaw on pitch on	98
5-22. Sistema Psi 1.047 rad Theta 0 rad	99
5-23. Sistema Psi 1.047 rad Theta 0.5235 rad	99
5-24. Sistema Psi 1.570 rad Theta 0.5235 rad	99
5-25. Sistema Psi 1.570 rad Theta 0.785 rad	99

5-26. ARX Psi 0.785 rad theta 0 0	100
5-27. ARX Psi 0.1745 rad theta 0.349 rad	100
5-28. Resultados id PID referencias aleatorias	105
5-29. Theta -0.26 a -0.42 rad	107
5-30. Theta 0.61 a 0.76 rad	107
5-31. Theta	107
5-32. Psi	107
5-33. Identificación simultánea theta 0.076 a -0.26 rad	108
5-34. Datos Vp-Theta	109
5-35. Resultados Theta	109
5-36. Dato Vy-Psi	109
5-37. Resultados Psi	109
5-38. Entrada motor 10v	110
5-39. Respuesta variable en función del voltaje	110
5-40. Motor 15v	111
5-41. Motor 20v	111
5-42. Identificación motor en frecuencia	112
5-43. Sistema con dinámica de motor primer orden	113
5-44. Identificación conjunta planta motor dominio de la frecuencia	113
5-45. Resultada estimación 3 orden polo fijo	114
5-46. Lazo abierto	115
5-47. PID	115
5-48. PID Desacoplado	115

Listas de Tablas

1-1. funciones usadas	9
3-2. Puertos elementos cartesianos	33
3-1. Puertos elementos de control	33
3-3. Resultados Umbrales	47
4-1. Parámetros inercia	64
4-2. Respuesta libre pitch	66
4-3. Resultados fricción viscosa pitch	66
4-4. Resultados fricción viscosa yaw	68
4-5. Resultados empujes	70
4-6. Opciones modelo procest	75
5-1. Parámetros motor	111

Capítulo 1

Estado del arte

Es importante validar las características de un helicóptero con 2DOF, como se presenta en [?], este prototipo cuenta con un motor DC de pitch y uno de yaw así como con un soporte que permite el movimiento en θ y ψ cada uno acoplado a su respectiva hélice. Particularmente la planta de quanser permite configurar la dirección en la que estos apuntan a, lo que permite trabajar en un grado de libertad, dos grados de libertad y medio cuadricoptero; sin embargo, se recalca que para este trabajo se utiliza únicamente la configuración de 2DOF.

El sistema trabaja con encoders ópticos para determinar la posición de cada ángulo, sin embargo, también incluye acelerómetro y giroscopio; además tiene integrados sensores de voltaje y corriente para cada uno de los motores lo que hace posible conocer también su velocidad angular, en el apartado físico se tiene un mecanismo de anillo que permite 360° de rotación en psi y el acople de pitch permite 60° de inclinación. La comunicación se realiza usando el módulo QFLEX USB el cual en conjunto con el software QUARC permite utilizar MATLAB y SIMULINK para interactuar con los periféricos, es importante resaltar que el QUANSER AERO tiene integrado un amplificador de potencia que permite y limita que el voltaje aplicado a los motores esté entre -24v y +24v.

Para el diseño y simulación de controladores se tiene inicialmente dos opciones, trabajar con o sin el modelo. Es importante resaltar que los controladores sin modelo pueden utilizar una base para funcionar, es decir, las ecuaciones diferenciales, pero no se tiene certeza los parámetros



Figura 1-1: Plant QUANSER AERO [?]

1.1. Modelos

Actualmente, se tienen varios enfoques a la hora de encontrar un modelo que represente la dinámica de la planta es posible partir de un modelo lineal para la construcción de los controladores, encontrar un modelo no lineal y linealizarlo en el punto de operación o trabajar con un controlador no lineal.

1.1.1. Modelo Lineal QUANSER

La primera situación es el lineal desde la concepción [?], este realiza un análisis físico de las fuerzas que actúan sobre el sistema partiendo de algunos supuestos.

- La distancia entre cada motor con el centro de masa es la misma y la masa de ambos motores es igual
- Las interacciones sobre entre un motor con el otro son representadas como una perturbación proporcional al voltaje aplicado.
- El torque generado por cada motor es igual sin importar el sentido de giro.
- La velocidad de giro de los motores es modelada mediante una ecuación lineal

Asumiendo lo anterior, el modelo se construye analizando las fuerzas que actúan sobre el sistema y se simplifica a un conjunto de 4 funciones de transferencia de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta(s)}{V_p(s)} & \frac{\theta(s)}{V_y(s)} \\ \frac{\psi(s)}{V_p(s)} & \frac{\psi(s)}{V_y(s)} \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

Para esta construcción se parte de que el voltaje aplicado a cada motor genera

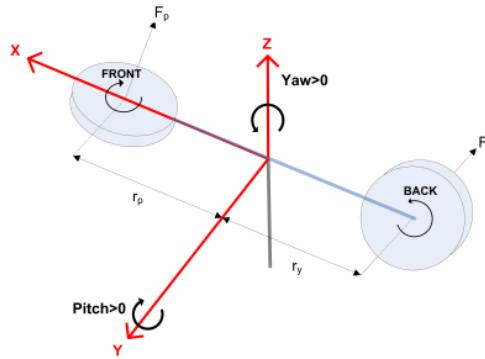


Figura 1-2: Marco referencial, tomado de [?]

rotación y por consiguiente una fuerza que actúa sobre la normal con respecto al pivote, sin embargo, esto genera movimiento en los dos ángulos, por lo tanto, es necesario modelar el efecto cruzado que tienen los motores, en donde para hallar los valores de las constantes se realiza un bloqueo de cada eje, posteriormente aplicando voltaje a cada motor de forma independiente se estima su aporte.

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y$$

$$\tau_\psi = K_{py}V_p + K_{yy}V_y$$

Para hallar los otros componentes de la dinámica se observa la presencia de la fricción viscosa y para el caso de theta el efecto de la rigidez; obteniendo las siguientes ecuaciones.

$$J_p \dot{\theta} p + D_p \dot{\theta} + K_{sp}\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y$$

$$J_y \dot{\psi} + D_y \dot{\psi} = K_{py}V_p + K_{yy}V_y$$

Es posible separar estas ecuaciones para obtener 4 expresiones y posteriormente realizar transformada de lapce para obtener la matriz de funciones de transferen-

cia.

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{pp}}{J_ps^2 + D_ps + K_{sp}} & \frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{py}}{J_ps^2 + D_ps + K_{sp}} \\ \frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{yp}}{J_ys^2 + D_ys} & \frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{yy}}{J_ys^2 + D_ys} \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

Este enfoque permite identificar que se tiene un integrador en psi, algo correcto, pues ese movimiento sigue la referencia, además las 4 funciones de transferencia son de segundo orden; sin embargo, es insuficiente al no incluir las relaciones entre los movimientos como por ejemplo el efecto giroscopio ni tampoco el efecto del sentido de giro de las hélices sobre el torque generado.

1.1.2. Modelo Euler lagrange

Este modelo es el más usado a lo largo de los desarrollos, se encuentra desarrollado con especial detalle en [?]; sin embargo, también es usado como base para el resto de modelos aquí expuestos e incluso en [?], [?], [?] como punto de partida del cual escoger los parámetros iniciales de sus sistemas antes de ejecutar algoritmos de búsqueda.

Un resumen general del proceso es el siguiente:

1. Identificar el Lagrangiano: El Lagrangiano es una función que describe la diferencia entre dos formas de energía; en este caso cinética y potencial.
2. Aplicar el Principio de Acción Mínima: Este principio establece que el camino que sigue un sistema físico minimiza la acción, que es la integral sobre el tiempo de la diferencia entre las dos formas de energía.
3. Derivar la Ecuación de Euler-Lagrange: A partir del principio de acción mínima, se puede derivar una relación diferencial para el camino que minimiza la acción. Esta ecuación es la ecuación de Euler-Lagrange.
4. Resolver la Ecuación de Euler-Lagrange: Las soluciones a esta ecuación describen la evolución del sistema físico.

El proceso completo para llegar al resultado se encuentra expuesto en 2-1 siendo este resultado final

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta &= \tau_\theta \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= \tau_\psi \end{aligned} \quad (1-3)$$

1.1.3. Euler lagrange -torque lineal - fricción viscosa

En [?] este artículo sigue la metodología expresada en 2-1 y definen las fuerzas aplicadas sobre el sistema de la siguiente forma.

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}$$

$$\tau_\psi = K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}$$

Remplazando tienen el siguiente modelo

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}$$

$$ml_{mc}^2\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}$$

Este modelo permite caracterizar de mejor manera al incluir efectos de la gravedad y efecto giroscopio, por lo anterior es el modelo más común encontrado en la literatura. En este caso se usa en un control MPC no lineal, este tipo de control se basa en la optimización numérica, futuras referencias y respuesta de la planta para predecir el comportamiento de la planta y optimizar la acción de control en esos intervalos.

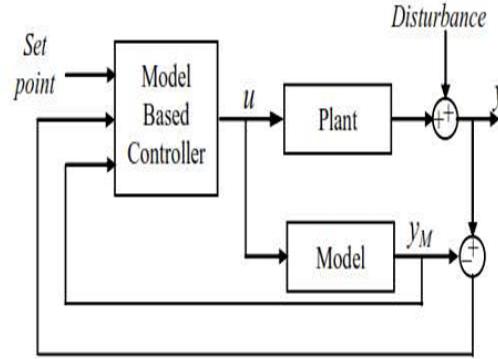


Figura 1-3: Esquema control MPC, tomado de [?]

1.1.4. Euler lagrange - torque cuadratico -friccion viscosa

En [?] se realiza un enfoque diferente al torque generado modelándolo partiendo de la velocidad angular del motor y además considerando la dinámica del motor

significativamente más rápida que la de la planta, por lo que la velocidad angular es modelada con una ecuación lineal. $w = K_w \cdot V$

$$\begin{aligned}\tau_\theta &= K_{pp}l_{mc}\omega_p^2 + K_{py}l_{mc}\omega_p^2 \\ \tau_\psi &= K_{py}l_{mc}\omega_y^2 + K_{yy}l_{mc}\omega_y^2\end{aligned}$$

Teniendo así

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta = K_{pp}l_{mc}\omega_p^2 + K_{py}l_{mc}\omega_p^2 - D_p\dot{\theta}$$

$$ml_{mc}^2\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = K_{py}l_{mc}\omega_y^2 + K_{yy}l_{mc}\omega_y^2 - D_y\dot{\psi}$$

Este modelo se utiliza para diseñar un controlador por desplazamiento de polos, pues es considerado una buena solución para manejar no linealidades y acoplos entre movimientos, aunque se linealizó el modelo.

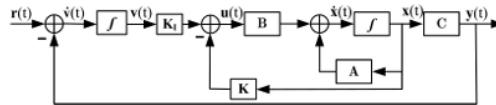


Figura 1-4: Esquema control pole placement, tomado de [?]

1.1.5. Perturbaciones o variaciones en la planta

Debido al papel que juegan las perturbaciones en [?] se aprecia un enfoque así la posible inclinación del motor de la cola, en este se parte de la base que el motor se encuentra inclinado 90° con respecto a la normal, sin embargo, ya que habitualmente este tipo de plantas permiten mover el ángulo de los motores, por lo que al no estar fijos es posible que este se encuentre en un ángulo diferente.

$$\begin{bmatrix} k_{pp} & k_{py} \sin(\phi) + k_{pv} \cos(\phi) \\ k_{vp} & k_{vy} \cos(\phi) + k_{vv} \sin(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_\theta \\ U_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_\theta \\ B_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}$$

En el artículo se realiza una comparación del desempeño de un controlador PID y un GPI teniendo este varias ventajas como su capacidad para manejar sistemas con dinámicas no lineales y tiempos muertos, lo que resulta en una respuesta más rápida y precisa. Además, el GPI puede ser más efectivo en la reducción de errores de estado estacionario y en la mejora de la estabilidad del sistema bajo condiciones cambiantes. Vale la pena destacar que se basa en reconstructores integrales, por lo que no es necesario medir todas las variables de estado.

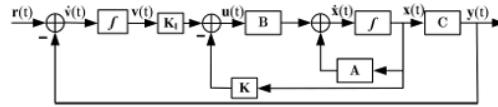


Figura 1-5: Esquema control PID GPI, tomado de [?]

1.1.6. Ajuste torques cruzados

Al analizar los resultados en algunos experimentos se encuentra que las ganancias de los voltajes de entrada solo son válidas en un rango pequeño, debido a esto [?] se toma dos consideraciones. Primero en su montaje se tiene un desplazamiento del centro de masa en el eje z representado po h, por lo cual parte de la siguiente

matriz. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Generando ecuaciones de movimiento que contienen este parámetro

$$(J_{eq-p} + m(l_{mc}^2 + h^2))\ddot{\theta} + m \left[\frac{\sin(2\theta)(l_{mc}^2 - h^2)}{2} \right] -$$

$$l_{mc}h \cos(2\theta)]\dot{\psi}^2 + mg(l_{mc} \cos \theta + h \sin \theta) + D_p \dot{\theta} = \tau_\theta$$

$$[J_{eq-y} + m(\cos^2 \theta(l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h \sin 2\theta + h^2)]\ddot{\psi} + m[\sin 2\theta(h^2 l_{mc}^2) + 2l_{mc}h \cos 2\theta]\dot{\psi} \dot{\theta} + D_y \dot{\psi} = \tau_\psi$$

Como se aprecia, se trata del desarrollo del método Euler-Lagrange añadiendo h; sin embargo, también se propone una definición diferente para los torques.

$$\tau_\theta = K_{pp}V_p + F_{cpp} + K_{py}V_y + F_{cyp}$$

$$\tau_\psi = (K_{yp}V_p + F_{cyp}) \cos \theta + (K_{yy}V_y + F_{cyy}) \cos \theta$$

Se incluye primero los términos F_{cpp} , F_{cyp} , F_{cyp} y F_{cyy} que son encontrados experimentalmente y representan la fuerza de coulomb, o sea, el voltaje necesario para iniciar el movimiento. También en el torque para ψ se incluye un término que relaciona la posición de θ .

El modelo se linealizó para realizar la construcción de dos controladores, LQR y H infinito, vale la pena destacar que la planta usada tenía más peso en uno de los extremos, por lo que la posición inicial °45 por lo cual implementaron

el algoritmo PEN para la estimación de parámetros y lo compararon con los resultados empíricos.

1.1.7. Modelo-fricciones

En los anteriores modelos únicamente ha variado la forma como se define el torque, sin embargo, en [?] y en [?] se realiza un análisis más detallado de los componentes del sistema; inicialmente se realiza una definición de las fuerzas que actúan sobre el fuselaje

$$I_{\ddot{\theta}} = T_{mr} - T_{f\theta} - T_q + T_{\dot{\phi}} - T_G$$

- Friccion de coulom y viscosa $T_{f\theta} = B_\theta + C_\theta \text{sign}(\dot{\theta})$
- Gravedad $T_g = mgl \sin \theta$
- Fuerza centrifuga $T_{\dot{\phi}} = \frac{1}{2}m(l^2 \sin(\dot{\theta}))$
- Efecto giroscopio $T_G = K_{G\dot{\phi}\omega_m} \cos(\theta)$

$$I_{\ddot{\psi}} = T_{tr} - T_{f\psi} - T_R$$

Quedando asi:

$$T_\theta = I_{\ddot{\theta}} + B_\theta + C_\theta \text{sign}(\dot{\theta}) + mgl \sin \theta - ml^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - K_{G\dot{\phi}\omega_m} \cos(\theta)$$

$$T_{\ddot{\psi}} = I_{\ddot{\psi}} + B_\psi + C_\psi \text{sign}(\dot{\psi}) + l^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Adicionalmente, describen el torque generado como

$$T_{ir} = K_{ai}\omega_i^2 \text{sgn}(\omega_r)$$

sin embargo, para la velocidad angular es descrita como una ecuacion diferencial.

$$T_{Mi} = \frac{V_i - K_{bi}\omega_{ir}}{K_M i R_i} T_f = B_{ir} + C_{ir} \text{sign}(\omega_{ir}) T_{ii} = B_a \omega_{ir} + D_a \omega_{ir}^2 \text{sign}(\omega_{ir})$$

Donde K_m es el coeficiente de torque, K_{bi} es la constante fem inversa y R es la resistencia de la bobina.

1.1.8. Funciones propias

En los modelos anteriores se aprecia como se usa el resultado de euler-lagrange y posteriormente se analiza la forma correcta de definir los torques; sin embargo, en [?] se usa la ecuación de Euler-Newton para posteriormente hallar de forma práctica las funciones que definen los torques cruzados, amortiguamiento, inercia y fuerza centrífuga.

$$J_p \ddot{\theta}_p = F_p(V_0)D + M_{py}(V_1) - M_{rp}(\text{sign}(\theta_p)\Sigma M_p) - M_{Dp}(\theta_p) - nm \text{ sign } \theta_p - M_s(|\dot{\theta}_y|, \theta_p)$$

$$J_y(\theta_p)(\ddot{\psi}_y) = F_y(V_1) \cos \theta_p D - M_{yp}(V_0) \cos \theta_p - M_{rv}(\text{sign}(\dot{\theta}_v), \Sigma M_y) - MD_v(\dot{\theta}_y)$$

Tabla 1-1: funciones usadas

	Pitch	Yaw
Inercia y aceleración sobre los ejes	$J_\phi \ddot{\theta}_p$	$J_y(\theta_p) \ddot{\theta}_y$
Momento generado por los motores	$F_p(V_0)D$	$F_y(V_1) \cos \theta_p, D$
Torques cruzado	$M_{py}(V_1)$	$M_{yp}(V_0) \cos \theta_p$
Friccione de coulomb	$M_{rp}(\text{sign}(\dot{\theta}_p)\Sigma M_p)$	$M_{ry}(\text{sign}(\dot{\theta}_y), \Sigma M_y)$
Fricción viscosa	$MD_p(\dot{\theta}_p)$	$MD_y(\dot{\theta}_y)$
Gravedad	$m_g g \sin \theta_p$	-
Fuerza centrífuga	$M_s(\dot{\theta}_y , \theta_p)$	-

Los torques son definidos de la siguiente manera.

$$F_p(V_0) = F_y(V_1) = C_1 V^2 + C_2 V - C_3$$

Siendo valida esta ecuación si V es positivo, si es negativa se refleja la función en ambos ejes.

$$M_{py}V1 = M_{yp}V0 = F_p(V_0)$$

Esto debido a que al realizar pruebas se reportó que el efecto cruzado presentaba el mismo comportamiento que los torques correspondientes. La fricción viscosa e representada así:

$$\begin{aligned} M_{Dy}(\dot{\theta}_y) &= C_4 \dot{\theta}_y^2 + C_5 \dot{\theta}_y \\ M_{Dp}(\dot{\theta}_p) &= C_6 \theta_p \end{aligned}$$

Finalmente, la fuerza centrífuga es:

$$C_7 \dot{\theta}_y^2 \sin \theta_p \cos \theta_p$$

1.2. Control sin modelo

Una alternativa para realizar el control sin modelo se tiene en [?] donde se utiliza un algoritmo robusto de aprendizaje simple; donde se usa el concepto de descenso del gradiente para minimizar la función de costo que en este caso es el error de posición de lazo cerrado. La razón para implementar este control y no uno que se base en el modelo es la incertidumbre sobre algunos parámetros físicos, así como las perturbaciones.

Vale la pena destacar que si bien no era necesario, para mejorar el desempeño del algoritmo, los autores partieron de los parámetros que conocían del sistema, reduciendo el espacio de búsqueda y evitando algunos mínimos locales.

Otras alternativas como [?] realizan un mayor énfasis en las incertidumbres del modelo tradicional y las no linealidades, por lo que usan μ síntesis junto con H infinito como herramientas del control óptimo para así:

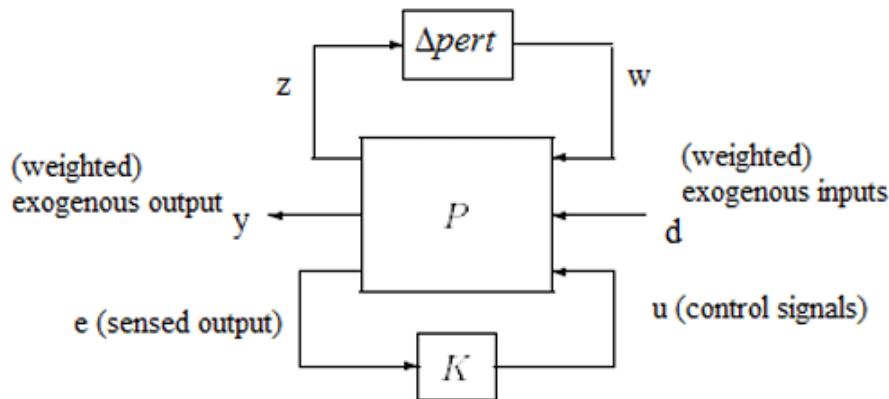


Figura 1-6: Lógica controlador H infinito, tomado de [?]

Donde se tiene el modelo de la planta (P) pero con la incertidumbre de algunos parámetros que son añadidas por $\Delta pert$, K es el controlador.

Es importante notar que ninguno de los modelos tratados ha tenido en cuenta efectos como la saturación de las entradas y los límites físicos de las salidas, por eso en este trabajo [?] se busca unificar estos efectos más las perturbaciones, asegurando la estabilidad en lazo cerrado haciendo uso de un control neuronal adaptativo. El control usado tiene las siguientes características:

- Red neuronal de función de base radial (RBFNN) esta se utiliza para estimar las incertidumbres del sistema. Se elige por su capacidad de aproximación

general en conjuntos compactos, lo que lo hace adecuado para sistemas no lineales inciertos.

- Parámetro auxiliar adaptativo para compensar la perturbación compuesta, que incluye error de saturación y perturbaciones externas. Este parámetro ayuda a mantener la estabilidad del sistema a pesar de estas perturbaciones.
- Función de barrera asimétrica de Lyapunov (BLF); se emplea para evitar la violación de restricciones de la salida del sistema. El uso de BLF garantiza que la salida del sistema permanezca dentro de una región que varía en el tiempo, abordando el problema de las restricciones de salida que varían en el tiempo.

Posteriormente, los mismos autores proponen en [?] otra estrategia enfocada en los parámetros de los actuadores y a un fenómeno denominado “dirección de control desconocida”, en el cual no se tiene pleno conocimiento del signo de la referencia esto puede suceder debido a dinámicas complejas o a inquietudes en los parámetros. Las características principales del control usado son:

- La estrategia de control utiliza una red neuronal de base radial (RBFNN) para aproximar las funciones inciertas dentro del sistema del helicóptero.
- Para abordar el problema de la dirección de control desconocida, se emplea una clase de funciones de Nussbaum en el diseño de control. La función de Nussbaum se utiliza para manejar situaciones donde se desconoce el signo del coeficiente de control, asegurando estabilidad y robustez ante esta incertidumbre.
- Parámetro adaptativo para compensación de fallas del actuador; al adaptar la estrategia de control en función de las fallas detectadas, el sistema puede mantener la estabilidad y el rendimiento incluso en presencia de fallas del actuador.

También se han aplicado algunos métodos híbridos como el expuesto en [?] el cual se basa en un controlador PID-AFC-IL (Proportional Integral Derivative - Active Force Control - Iterative Learning). El control AFC es una estrategia de control robusto que funciona basándose en la segunda ley del movimiento de Newton y tiene como objetivo expulsar perturbaciones conocidas o desconocidas de un sistema, garantizando al mismo tiempo la estabilidad. En este contexto, se utiliza para rechazar perturbaciones externas que afectan al sistema del helicóptero de doble rotor.

Por otro lado, el Aprendizaje iterativo (IL) mejora el rendimiento de los sistemas de control aprendiendo de iteraciones pasadas y mejorando la entrada de control en consecuencia. En este esquema, IL se utiliza para estimar automáticamente la inercia de la dinámica del sistema en línea, mejorando la efectividad de la estrategia AFC. Este artículo es valioso, pues demuestra primero la posibilidad de integrar múltiples técnicas de control, así como su efecto sobre las perturbaciones. No solamente desde una perspectiva teórica, sino con una implementación y validación.

Capítulo 2

Modelización

En este trabajo se seleccionó el modelo que integra la metodología Euler-Lagrange, pues su desarrollo es claro, integra la mayoría de las fuerzas que afectan la dinámica del sistema y además es el más utilizado no solo con helicópteros de 2DOF pero particularmente con el modelo de quanser.

2.1. Modelo No Lineal

Para el desarrollo del modelos no lineales es necesario seguir las directrices dadas anteriormente y realizar el análisis de la planta a partir del método Euler Lagrange, para esto se partió del procedimiento descrito en [?]

Para realizar la identificación es necesario calcular la energía cinética y potencial del sistema, para esto es necesario conocer la posición del sistema; sin embargo, se debe primero usar matrices de transformación que representan la posición y orientación del cuerpo.

Sistema de coordenadas

En primer lugar, a parir de la observación de la planta, se observa que el centro de más del sistema se encuentra desplazado únicamente en x es decir, a lo largo

del eje sobre el que se soportan los 2 motores.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \psi - \cos \psi \cos \theta & 0 & l_{mc} \cos \psi \cos \theta \\ -\cos \theta \sin \psi & \cos \psi + \sin \theta \sin \psi & 0 & -l_{mc} \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & l_{mc} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo el siguiente sistema de coordenadas para la posición y la velocidad cartesianas de la masa

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} l_{mc} \cos \psi \cos \theta \\ -l_{mc} \cos \theta \sin \psi \\ l_{mc} \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$V_c = \frac{\partial D_c}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial D_c}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \sin \psi - l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \\ -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi + l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \\ l_{mc} \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Cálculo de la energía cinética y potencial

Para la energía potencial se parte de:

$$U = mg^T D_c$$

$$U = m [0 \ 0 \ g] \begin{bmatrix} l_{mc} \cos \psi \cos \theta \\ -l_{mc} \cos \theta \sin \psi \\ l_{mc} \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$U = mgl_{mc} \sin \theta$$

Energía cinética

$$K = \frac{1}{2} m ||V_c||^2$$

$$||V_c||^2 = V_c^T V_c$$

$$= \begin{bmatrix} -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \sin \psi - l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \\ -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi + l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \\ l_{mc} \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \sin \psi - l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi \\ -l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi + l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi \\ l_{mc} \dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$||V_c||^2 = [l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \sin \psi - l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \cos \psi]^2 [-l_{mc} \dot{\psi} \cos \theta \cos \psi + l_{mc} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi]^2 \\ [l_{mc} \dot{\theta} \cos \theta]^2$$

$$\begin{aligned} ||V_c||^2 &= l_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta) \\ K &= \frac{1}{2}ml_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta) \\ K &= \frac{1}{2}ml_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}J_{eq-p}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq-y}\dot{\psi}^2 \end{aligned}$$

Calculó del operador de Lagrange

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= K - U \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}ml_{mc}^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}J_{eq-p}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq-y}\dot{\psi}^2 - mgl_{mc} \sin \theta \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}ml_{mc}^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}J_{eq-p}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{eq-y}\dot{\psi}^2 - mgl_{mc} \sin \theta \end{aligned}$$

A partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = \tau$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\dot{q}^T D(q)\dot{q} = \frac{1}{2}(D_p\theta + D_y\psi) \\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} &= \begin{bmatrix} D_p\dot{\theta} \\ D_y\dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desarrollando Theta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= (ml_{mc}^2)\dot{\theta} + J_{eq-p}\dot{\theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= (ml_{mc}^2)\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= -ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl_{cm} \cos \theta \end{aligned}$$

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta = \tau_\theta$$

Psi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= (ml_{mc}^2)\dot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\dot{\psi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= (ml_{mc}^2)\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2(ml_{mc}^2)\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned}$$

$$(ml_{mc}^2)\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2(ml_{mc}^2)\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = \tau_\psi$$

Generando el siguiente modelo

$$\begin{aligned} ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta &= \tau_\theta \\ ml_{mc}^2\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta &= \tau_\psi \end{aligned} \quad (2-1)$$

2.2. Modelo lineal- Linealización

2.2.1. Consideraciones iniciales

Partiendo del modelo

$$ml_{mc}^2\ddot{\theta} + J_{eq-p}\ddot{\theta} + ml_{mc}^2\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - D_p\dot{\theta}$$

$$ml_{mc}^2\ddot{\psi} \cos^2 \theta + J_{eq-y}\ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = K_{py}V_p + K_{yy}V_y - D_y\dot{\psi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-K_{pp}V_{mp} + K_{py}V_{my} - D_p\dot{\theta} - ml_{mc} \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\psi}^2 - mgl_{mc}^2 \cos(\theta)}{ml_{mc}^2 + J_p}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{K_{yp}V_{mp} + K_{yy}V_{my} - D_y\dot{\psi} + 2ml_{mc}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}}{ml_{mc}^2 \cos(\theta)^2 + J_y}$$

Antes de realizar la linealización se define el vector de estados Al pasar el sistema a espacio de estados, queda de la siguiente manera:

$$\mathbf{X} = [\theta \ \psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\psi} = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\psi}$$

Adicionalmente, se definen las entradas del sistema; recordando que V_p es el voltaje aplicado al motor de pitch y V_y al motor de yaw

$$\mathbf{U} = [V_p \ V_y]^T = [U_1 \ U_2]$$

2.2.2. Puntos de equilibrio

Para encontrar el punto de equilibrio se busca cuando la solución del sistema es constante, por lo tanto, se igualan las ecuaciones de estado a 0, teniendo en cuenta que las derivadas presentes también son 0, por lo tanto, los estados deberían tomar la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \\ K_{pp}U_1 + K_{py}U_2 - mgl_{mc}^2 \cos(\theta) &= 0 \\ K_{yp}U_1 + K_{yy}U_2 &= 0\end{aligned}$$

Al despejar U_1 y U_2 se llega a:

$$\begin{aligned}U_2 &= \frac{-K_{yp}U_1}{K_{yy}} = \bar{V}_y \\ U_1 &= \frac{K_{py} - K_{yy} + K_{yy}mgl_{cm} \cos \theta}{K_{pp}K_{yy} - K_{py}K_{yp}} = V_p\end{aligned}$$

Como se observa $\bar{x}_2 = \bar{\psi}$, ya que con las ecuaciones de estado igualadas a 0 no se genera ninguna restricción, el sistema se puede equilibrar para cualquier valor, ψ lo que genera infinitos puntos de equilibrio.

2.2.3. Linealización

Para la linealización se siguió el proceso utilizado en [?], primero es necesario tener el modelo no lineal en variables de estado para conocer las ecuaciones a las que se le aplican las derivadas parciales.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\theta} = f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= \dot{\psi} = f_2(x) \\ \dot{x}_3 &= \frac{-K_{pp}V_{mp} + K_{py}V_{my} - D_p\dot{\theta} - ml_{mc} \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\psi}^2 - mgl_{mc}^2 \cos(\theta)}{ml_{mc}^2 + J_p} = f_3(x) \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_{yp}V_{mp} + K_{yy}V_{my} - D_y\dot{\psi} + 2ml_{mc}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi}}{ml_{mc}^2 \cos(\theta)^2 + J_y} = f_4(x)\end{aligned}$$

obteniendo un modelo parametrizado por $\bar{\theta}$ y las demás componentes de la planta a esto se le asigna q

$$\dot{X} = A(q)x + B(q)u \quad (2-2)$$

donde

$$\tilde{X} = x - \bar{x} \quad ; \quad \tilde{U} = u - \bar{u}$$

y

$$A(q) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad ; \quad B(q) = \frac{\partial f(x)}{\partial u}$$

con

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

Resultando en

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgl_{cm} \sin \bar{\theta}}{J_{eqp-p} + ml_{cm}^2} & 0 & \frac{-D_p}{J_{eqp-p} + ml_{cm}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-D_y}{J_{eqp-y} + ml_{cm}^2 \cos^2 \bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{J_{eqp-p} + ml_{cm}^2} & \frac{K_{py}}{J_p + ml_{cm}^2} \\ \frac{K_{yp}}{J_{eqp-y} + ml_{cm}^2 \cos^2 \bar{\theta}} & \frac{K_{yy}}{J_{eqp-y} + ml_{cm}^2 \cos^2 \bar{\theta}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Para volver a la expresión en funciones de transferencia se usa:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = (C((sI - A)^{-1}B)) + D \text{ Lo anterior genera una matriz } 2x2$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{K_{pp}}{ml_{cm}g \sin(\theta) + s(D_p + s(ml_{cm}^2 + J_p))} & \frac{K_{py}}{ml_{cm}^2 g \sin(\theta) + s(D_p + s(ml_{cm}^2 + J_p))} \\ \frac{K_{yp}}{s(D_y + s(ml_{cm}^2 \cos^2(\theta) + J_y))} & \frac{K_{yy}}{s(D_y + s(ml_{cm}^2 \cos^2(\theta) + J_y))} \end{array} \right)$$

Al simplificar y convertir a funciones de transferencia se tienen de la siguiente

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{mp}(s) \\ V_{my}(s) \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm} \sin \bar{\theta}} \quad (2-6)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm} \sin \bar{\theta}} \quad (2-7)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{(J_{eqp-y} + ml_{cm}^2(\cos^2 \bar{\theta}))s^2 + D_y s} \quad (2-8)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{(J_{eqp-y} + ml_{cm}^2(\cos^2 \bar{\theta}))s^2 + D_y s} \quad (2-9)$$

2.3. Estabilidad

Para analizar los efectos del punto de operación sobre la estabilidad, es necesario utilizar los valores encontrados en la **4-3**, **4-4** y **4-1**; posteriormente se hallan los calores propios del sistema y se encuentran los polos de las funciones.

2.3.1. Punto de operación theta=0

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s} \quad (2-10)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s} \quad (2-11)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{py}}{0,549s^2 + 0,0122s} \quad (2-12)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,549s^2 + 0,0122s} \quad (2-13)$$

$$\lambda(1) = (0)(-0,1168)$$

$$\lambda(2) = (0)(-0,2531)$$

2.3.2. Punto de operación theta=20

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 0,6306} \quad (2-14)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 0,6306} \quad (2-15)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{py}}{0,05107s^2 + 0,0122s} \quad (2-16)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,05107s^2 + 0,0122s} \quad (2-17)$$

$$\lambda(1) = (-0,0583 + 3,2003i)(-0,0583 - 3,2003i)$$

$$\lambda(2) = (0)(-2,703)$$

2.3.3. Punto de operación theta=40

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 1,1851} \quad (2-18)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 1,1851} \quad (2-19)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{0,04132s^2 + 0,0122s} \quad (2-20)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,04132s^2 + 0,0122s} \quad (2-21)$$

$$\lambda(1) = (-0,0583 + 4,3876i)(-0,0583 - 4,3876i)$$

$$\lambda(2) = (0)(-0,3265)$$

2.3.4. Punto de operación theta=60

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 1,5966} \quad (2-22)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s - 1,5966} \quad (2-23)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{0,03023s^2 + 0,0122s} \quad (2-24)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,03023s^2 + 0,0122s} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned}\lambda(1) &= (-0,0583 + 5,0930i)(-0,0583 - 5,0930i) \\ \lambda(2) &= (0)(-0,4273)\end{aligned}$$

2.3.5. Punto de operación theta=-20

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 0,6306} \quad (2-26)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 0,6306} \quad (2-27)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{0,05107s^2 + 0,0122s} \quad (2-28)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,05107s^2 + 0,0122s} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned}\lambda(1) &= (-3,259)(3,1430) \\ \lambda(2) &= (0)(-0,2703)\end{aligned}$$

2.3.6. Punto de operación theta=-40

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 1,1851} \quad (2-30)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 1,1851} \quad (2-31)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{0,04132s^2 + 0,0122s} \quad (2-32)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,04132s^2 + 0,0122s} \quad (2-33)$$

$$\begin{aligned}\lambda(1) &= (-4,4467)(4,3301) \\ \lambda(2) &= (0)(-0,3265)\end{aligned}$$

2.3.7. Punto de operación theta=-60

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 1,5966} \quad (2-34)$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{0,0549s^2 + 0,0064s + 1,5966} \quad (2-35)$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}}{0,03023s^2 + 0,0122s} \quad (2-36)$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}}{0,03023s^2 + 0,0122s} \quad (2-37)$$

$$\lambda(1) = (-5,1519)(5,0353)$$

$$\lambda(2) = (0)(-0,273)$$

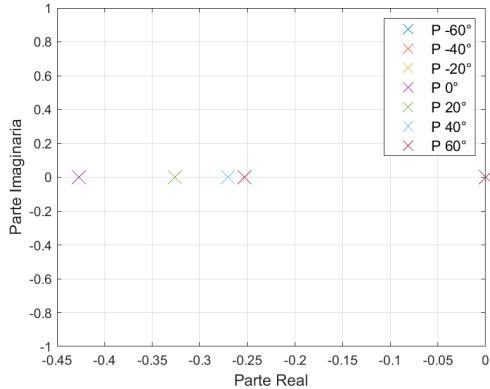


Figura 2-1: Yaw

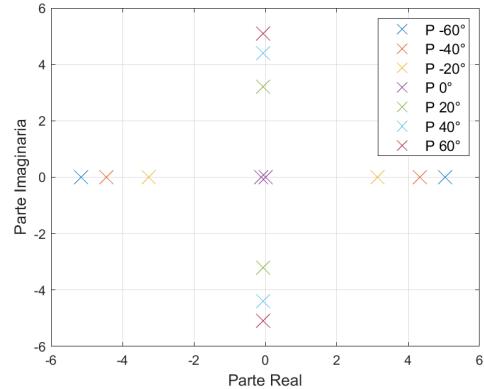


Figura 2-2: Pitch

Figura 2-3: Comportamiento polos

Como se observa en la gráfica de polos de Yaw, cada escenario tiene 2 polos, uno en el origen y otro real, sin embargo, a medida que crece la magnitud del ángulo theta los polos se desplazan hacia el origen. Mostrando que sin importar el valor de theta Yaw siempre es inestable en lazo abierto. Por otro lado, en el pitch se aprecia como con valores positivos de theta el comportamiento es estable y a medida que el valor del ángulo disminuye los polos conjugados se acercan al origen; tan pronto su valor es negativo, se tiene un polo con parte real positiva, por lo que el sistema se vuelve inestable.

2.4. Motor

Para algunos análisis es necesario tener presente el comportamiento del motor, por lo tanto, se realizó su análisis

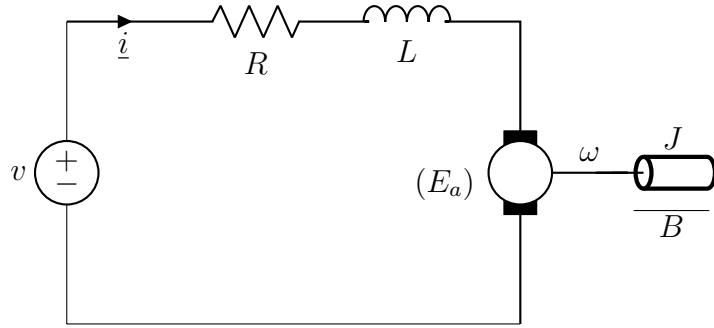


Figura 2-4: Circuito equivalente motor

Partiendo del circuito equivalente del motor donde v es la fuente de alimentación, i la corriente; R es la resistencia de armadura; L la inductancia; E_a la fuerza contra electromotriz; J el momento de inercia y B la fricción viscosa; primero se realiza malla del circuito.

2.4.1. Modelo Segundo Orden

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + E_a(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} = v(t) - Ri(t) - E_a(t)$$

Ahora, al desarrollar la parte mecánica se tiene:

$$T_m(t) = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega(t)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = T_m(t) - B\omega(t)$$

Es necesario relacionar las dos ecuaciones, por lo que se tomó como hipótesis, que existe una relación proporcional K_a entre el voltaje inducido en la armadura y la velocidad angular del eje del motor.

$$E_a(t) = K_a \omega(t)$$

Y la relación electromecánica establece que el torque es proporcional a la corriente eléctrica del motor DC.

$$T_m(t) = K_m i(t)$$

Después de haber realizado la transformada de la ecuación a las ecuaciones, estas se combinan:

$$\begin{aligned} Ls \frac{T_m(s)}{K_m} &= v(s) - R \frac{T_m(s)}{K_m} - K_a \omega(s) \\ v(s) &= \frac{(R + Ls) T_m(s)}{K_m} + K_a \omega(s) \end{aligned}$$

$$J s \omega(s) = T_m(s) - B \omega(s)$$

$$\omega(s) = \frac{T_m(s)}{J s + B}$$

Finalmente, se pueden combinar ambas ecuaciones para obtener una función de transferencia

$$v(s) = \frac{(R + Ls) T_m(s)}{K_m} + K_a \frac{T_m(s)}{J s + B}$$

$$\frac{T_m(s)}{v(s)} = \frac{K_m(Js + B)}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a}$$

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{K_m}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a}$$

Cálculo parámetros individuales:

Cálculo K_a partiendo de la ecuación de malla en estado estacionario:

$$K_a = \frac{E_a}{w(t)} = \frac{v - iR}{w(t)}$$

Momento de inercia

$$J = \frac{t_m K_a K_m}{R}$$

Fricción de Coulomb con la ecuación mecánica en estado estacionario.

$$B = \frac{T_m}{\omega(t)} = \frac{K_m i(t)}{\omega(t)}$$

Representación en espacio de estados Ya que en las ecuaciones iniciales (eléctrica y mecánica) se tomaron las variables (i y w) como las razones de cambio o derivadas utilizadas, los estados propuestos son los siguientes:

$$x_1 = \omega$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\omega}$$

$$x_2 = i$$

$$\dot{x}_2 = \dot{i}$$

Al reescribir las ecuaciones diferenciales se llega a:

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_m}{J}x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R}{L}x_2 - \frac{K_a}{L}x_1 + \frac{1}{L}v$$

Resultando en

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m}{J} \\ -\frac{K_a}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

También es posible llegar a una representación de estados partiendo de la función de transferencia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{RB+K_mK_a}{LJ} & -\frac{RJ+LB}{LJ} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{LJ} \end{bmatrix} C = [1 \ 0]$$

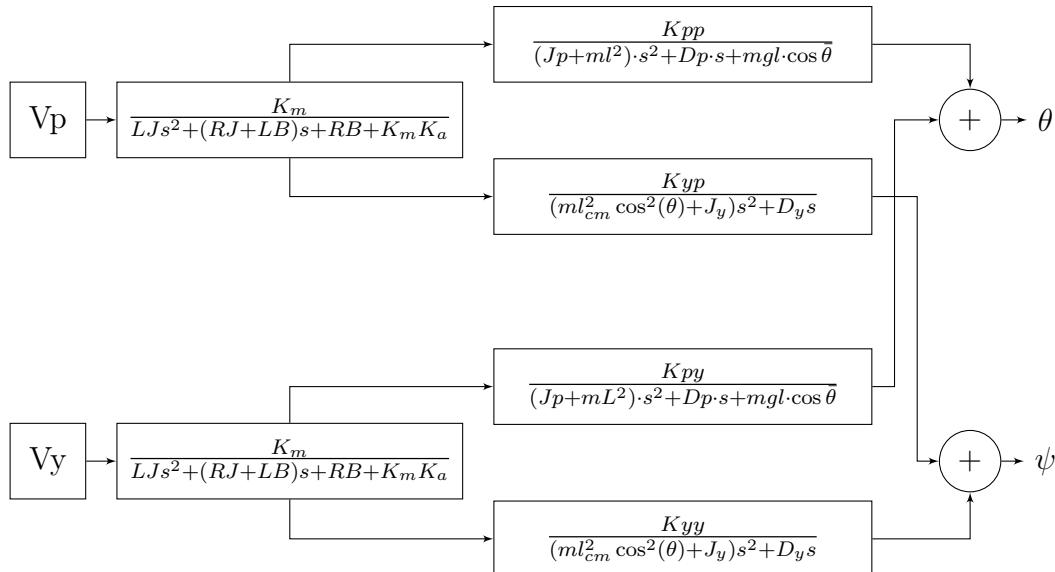


Figura 2-5: Sistema con dinámica de motor

2.4.2. Modelo de Primer Orden

Ya que en varias ocasiones es necesario un modelo de primer orden, se puede simplificar de las ecuaciones del Motor DC por el método de eliminación de la constante eléctrica del motor.

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri(t) + E_a(t) \\ v(t) &= R \frac{T_m(t)}{K_m} + K_a \omega(t) \end{aligned}$$

Se realiza la transformada de Laplace y se remplaza

$$\begin{aligned} v(s) &= R \frac{T_m(s)}{K_m} + K_a \frac{T_m(s)}{Js + B} \\ \frac{T_m(s)}{v(s)} &= \frac{K_m(Js + B)}{R(Js + B) + k_a k_m} \\ \frac{\omega(s)}{v(s)} &= \frac{K_m}{RJs + RB + K_m K_a} \end{aligned}$$

2.5. Modelo Motor-Planta

Tomando los resultados anteriores, se afirma que los motores particulares no tienen interacciones entre ellos por lo tanto se trata de un sistema MIMO 2x2 desacoplado con la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{K_m}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a} & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{LJs^2(RJ + LB)s + RB + K_m K_a} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la representación en diagrama de estados sigue una lógica similar.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{RB + K_m K_a}{LJ} & -\frac{RJ + LB}{LJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{RB + K_m K_a}{LJ} & -\frac{RJ + LB}{LJ} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_m}{LJ} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{LJ} \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$D = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al integrar el desarrollo en la dinámica de la planta se obtiene una nueva matriz de funciones de transferencia.

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{pp}K_m}{(ml_{cm}^2 g \sin(\theta) + s(D_p + s(ml_{cm}^2 + J_p)))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a)}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{py}K_m}{(ml_{cm}^2 g \sin(\theta) + s(D_p + s(ml_{cm}^2 + J_p)))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{K_{yp}K_m}{(s(D_y + s(ml_{cm}^2 \cos^2(\theta) + J_y)))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{K_{yy}K_m}{(s(D_y + s(ml_{cm}^2 \cos^2(\theta) + J_y)))(LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_m K_a)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{BR+KaK_m}{JL} & -\frac{BL+JR}{JL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{BR+KaK_m}{JL} & -\frac{BL+JR}{JL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{pp}}{ml_{cm}^2 + J_p} & 0 & \frac{K_{py}}{ml_{cm}^2 + J_p} & 0 & \frac{K_{pp}}{ml_{cm}^2 + J_p} & 0 & -\frac{D_p}{ml_{cm}^2 + J_p} & 0 \\ \frac{K_{yp}}{ml_{cm}^2 + J_y} & 0 & \frac{K_{yy}}{ml_{cm}^2 + J_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_y}{ml_{cm}^2 + J_y} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_m}{JL} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_m}{JL} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Protocolo toma de datos

Para realizar la correcta estimación de los parámetros del modelo es necesario contar con datos reales que reflejen el comportamiento del sistema a diversas entradas en la configuración de 2DOF, para esto se hizo uso de las herramientas dadas por Quanser; básicamente se dispone de 3 bloques, uno para enviar la señal de control a los motores y otro para realizar la lectura de los datos adicionalmente se tiene un bloque para la configuración de hardware y otro para la toma de datos.

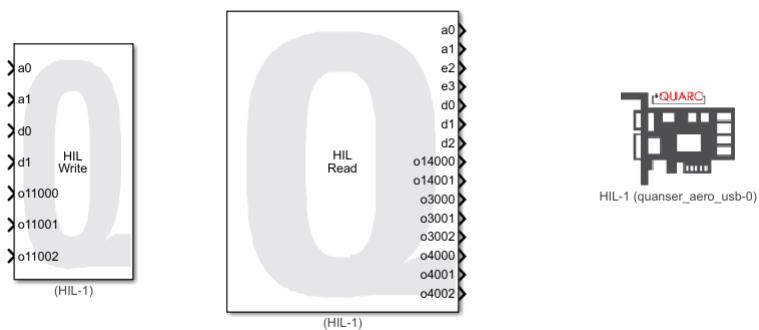


Figura 3-1: Bloques QUANSER AERO

3.1. Configuración

Hardware

La primera consideración que se debe seguir es el ajuste de las hélices, ya que el modelo dispone de 2 pares, uno de alta y otro de baja eficiencia; en caso de querer cambiar la que se trae por defecto, se debe utilizar una llave hexagonal para soltar el seguro del protector de la hélice; posteriormente este se retira tirando hacia arriba. Una vez se tiene expuesta la hélice, esta se retira haciendo uso de una varilla delgada, insertándola en los orificios de la parte superior y girando en sentido antihorario.

Finalmente, se ensamblan las nuevas hélices, se debe verificar la correcta para cada motor usando las referencias.

Ahora es necesario orientar los motores para la configuración deseada (2DOF). Cada motor tiene una ranura hexagonal, la cual permite ajustar la posición del motor, en este caso se busca que el motor de Pitch esté apuntando de forma perpendicular a la base mientras que el de Yaw sea paralelo.



Figura 3-2: Tomado de [?] Ajuste motor

Antes de realizar alguna prueba se deben retirar los bloqueos de cada eje, para pitch se tiene 2 seguros en el tenedor que permite el movimiento; mientras que para yaw únicamente se debe retirar una llave en la parte inferior del tenedor.

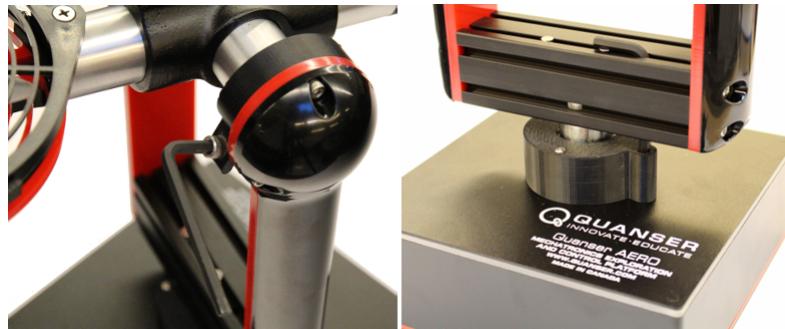


Figura 3-3: Tomado de [?] seguros movimiento

Software

Para la comunicación con el modelo se usa el software Matlab, junto con la API de QUARC de esta forma es posible comunicarse usando SIMULINK. Al crear un nuevo archivo primero se debe insertar el bloque de comunicación y configurarlo, escogiendo la planta a utilizar como se ve en la siguiente figura.

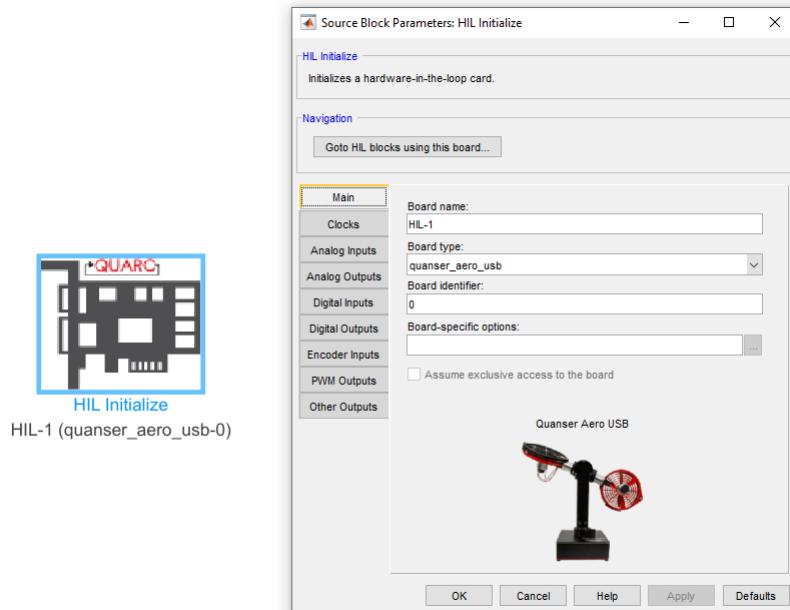


Figura 3-4: Configuración comunicación

Una vez se verifica el estado en la comunicación, se insertan los bloques de lectura y escritura. En el caso del de lectura se configura las variables que se desean leer en la siguiente ventana y de ser necesario sea realizar una conversión para llevarlas

a la unidad deseada.

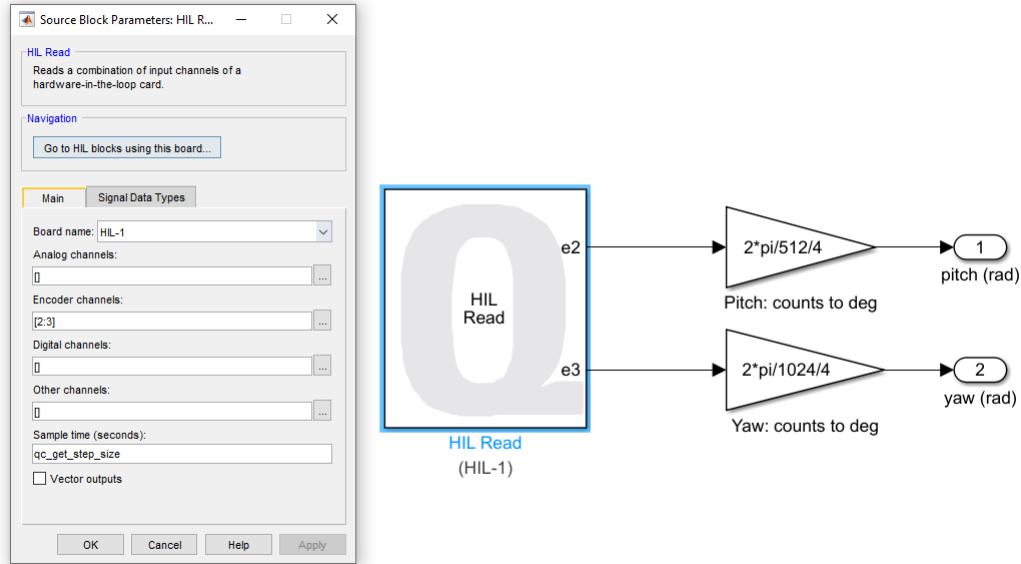


Figura 3-5: Configuración lectura

Para la escritura la configuración es similar, pero también se agrega un bloque de saturación para asegurarse de que la señal se mantenga en el rango deseado ($\pm 24v$)

3.1.1. Toma de datos

Si bien la configuración anterior es la mínima para el funcionamiento del equipo; para la identificación también es necesario guardar los datos, para esto se hace uso del bloque “to host file” dado por el fabricante, en este se debe seleccionar el nombre del archivo .mat a crear, el nombre de la variable así como el periodo de muestreo y el formato. Para este caso los datos se ingresaron al bloque usando un multiplexor, por ende se creó una sola variable con varias columnas y se configuró el periodo de muestreo con -1 (0.002) para que se utilizara el mismo en todo el programa.

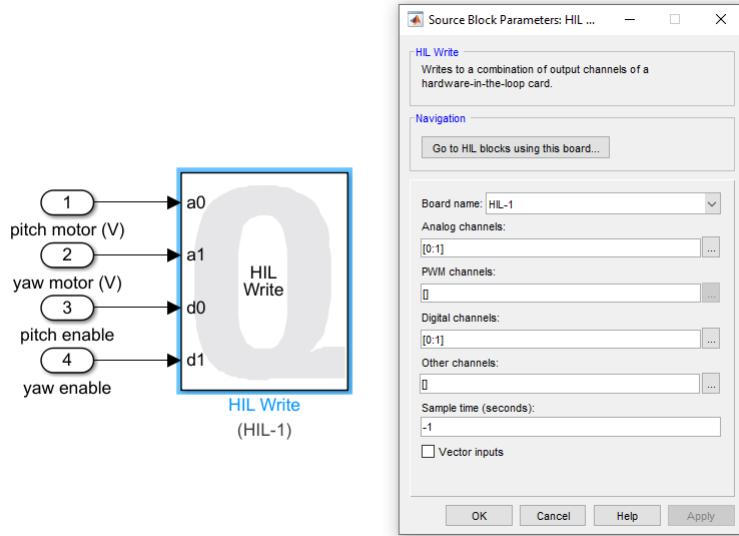


Figura 3-6: Configuración escritura

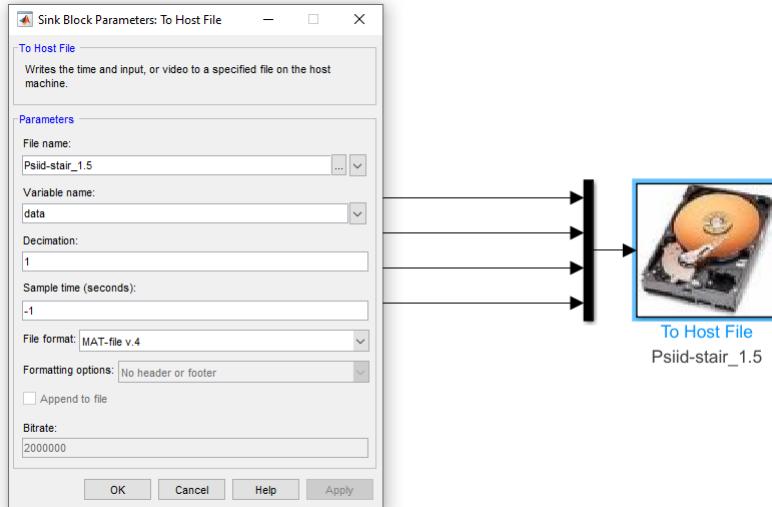
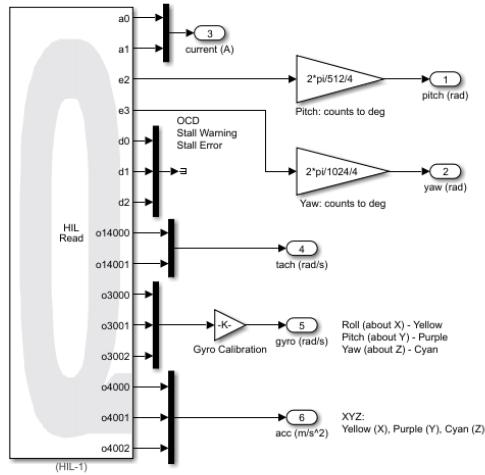


Figura 3-7: Host to file

Adicionalmente, para la caracterización del motor se hizo uso de los tacómetros y de los sensores de corriente integrados. Su acceso es similar a las otras lecturas para esto se presenta el bloque completo de lectura junto con los puertos correspondientes.

**Figura 3-8:** Visualización sensores completos

Elemento	Giroscopio (rad/s)	Aceleración (m/s ²)
x	o3000	o4000
y	o3001	o4001
z	o3002	o4002

Tabla 3-2: Puertos elementos cartesianos

Elemento	Corriente (A)	Velocidad Motor (rad/s)	Posición Eje (rad)
Pitch	a0	o14000	e2
Yaw	a1	o14001	e3

Tabla 3-1: Puertos elementos de control

3.2. Resultados

Para la identificación del sistema es posible tomar datos con diferentes configuraciones; sin embargo, debido a las características propias del sistema se busca capturar la dinámica completa, por lo cual se exploraron varias configuraciones y combinaciones. Es importante tener presente las restricciones del sistema, es decir, la señal que ingresa a los motores está limitada a $\pm 24V$, para el caso de pitch se tienen limitaciones físicas de movimiento, por esto se evita que el sistema choque y, ya que la función de transferencia de yaw tiene un integrador en el origen el

aplicar un voltaje constante causa que el sistema gire sin parar, por lo tanto, se debe tener cautela.

3.2.1. Lazo abierto

La primera toma de datos se realizó en lazo abierto con el siguiente montaje; en este se aplica directamente una señal de voltaje a cada motor, las pruebas se realizaron con diferentes señales variando frecuencia, forma y amplitud.

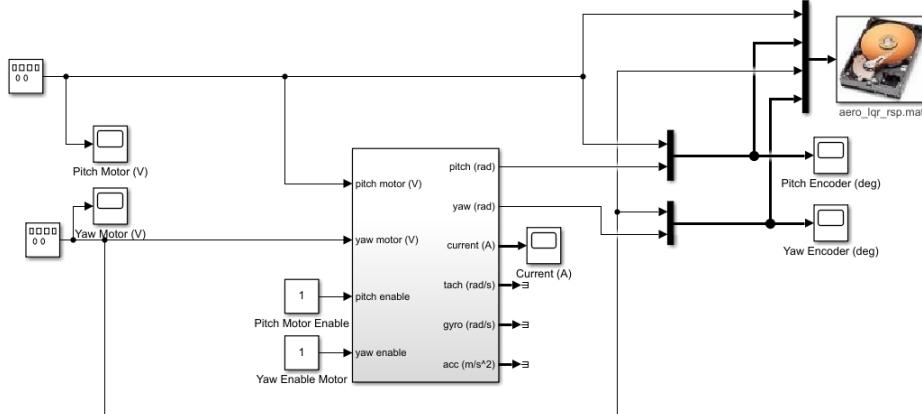


Figura 3-9: Montaje lazo abierto

Las pruebas iniciales se realizaron fijando un voltaje a 0 v y el otro como una señal cuadrada; para el caso de theta la señal primero va de 0 v a 10 v y en seguida de 0 v a -10 v

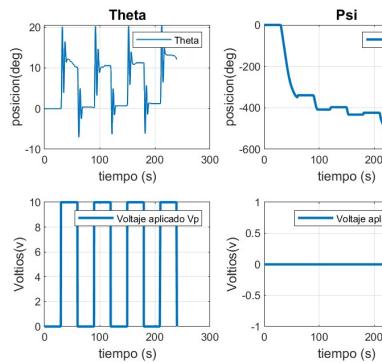


Figura 3-10: Entrada 0 a 10 v

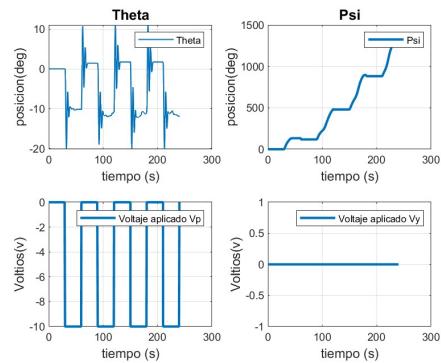


Figura 3-11: Entrada 0 -10 v

En esta prueba se aprecia primero el efecto que tiene el motor de pitch sobre el movimiento en yaw, además como el ángulo theta afecta a yaw, tal como se vio en la linealización del sistema 2-9.

Al realizar pruebas en yaw se encontró que si el sistema gira este genera fuerza sobre pitch llevándolo a 0° , esto se explica a partir del efecto giroscopio presente en 2-1, por lo tanto.

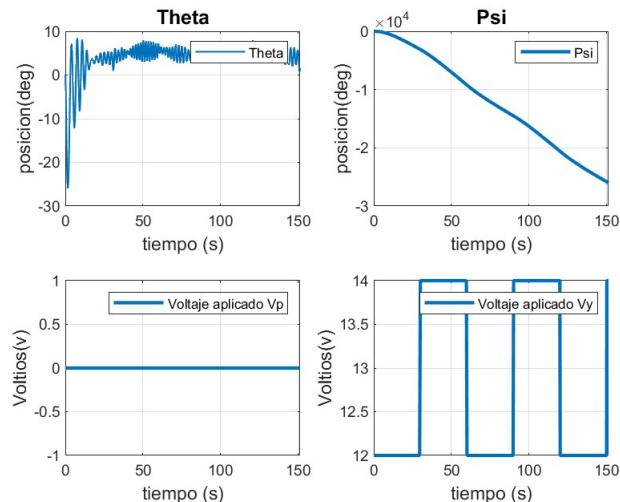
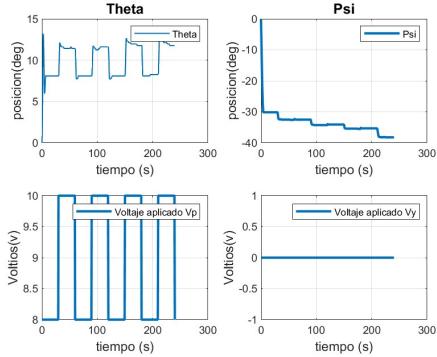
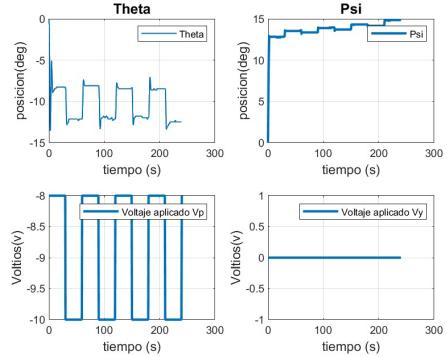
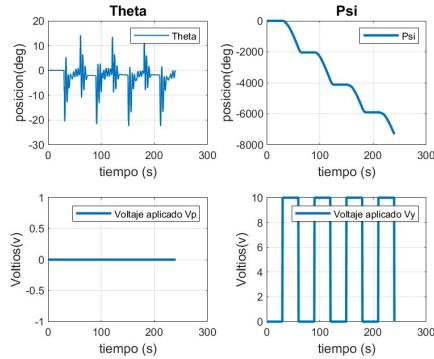


Figura 3-12: Entrada 12 14 V

Posteriormente, se ajustaron los voltajes para generar movimiento en yaw sin afectar fuertemente a pitch.

**Figura 3-13:** Entrada 8 a 10 v**Figura 3-14:** Entrada -8 -10 v**Figura 3-15:** Entrada 0 10 v

Con estos resultados se confirma que el motor de yaw puede generar movimiento en pitch así como la presencia de una zona muerta, en otras palabras, aun cuando el voltaje de entrada puede variar entre ± 24 hay rangos que no generan movimiento, sí se parte desde el reposo.

Esto permitió confirmar que el sistema era inestable, presentaba zonas muertas respecto a la fuerza mínima que debía ejercer el motor para generar movimiento, y además estas no eran constantes, sino que dependían de la posición del otro motor. Adicionalmente, se realizaron pruebas usando ambos motores, teniendo en cuenta que no se produjeran choques.

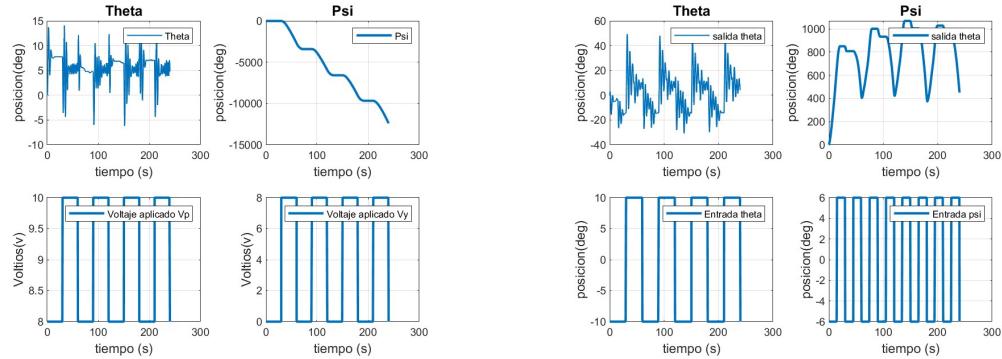


Figura 3-16: Entrada theta 8 a 10 v psi 0 a 8 v

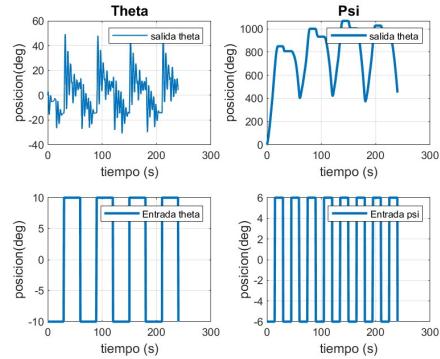


Figura 3-17: Entrada theta -10 a 10 v psi -6 a 6 v

3.2.2. Lazo cerrado

Partiendo de los resultados anteriores se decidió cerrar el lazo de control y añadir una ganancia a la señal de error.

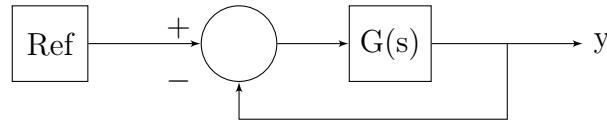


Figura 3-18: Lazo cerrado

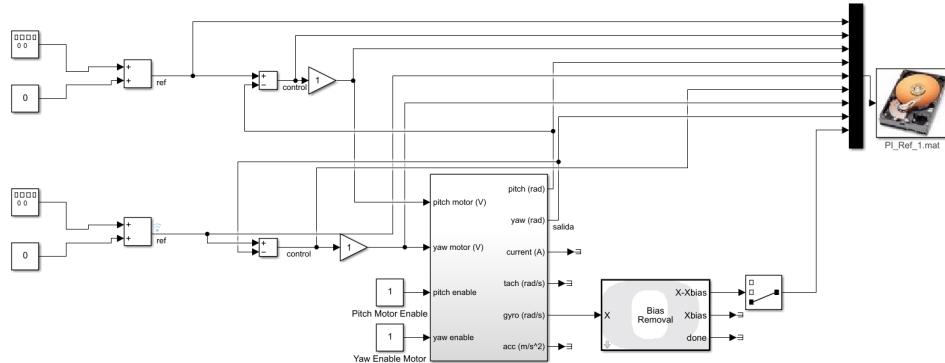
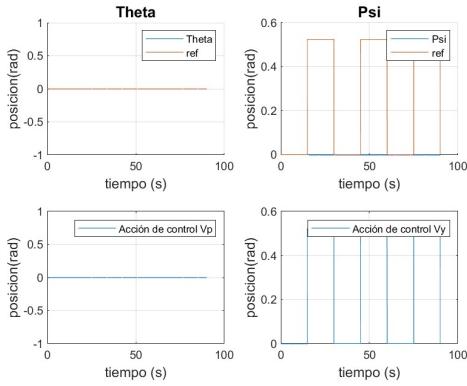
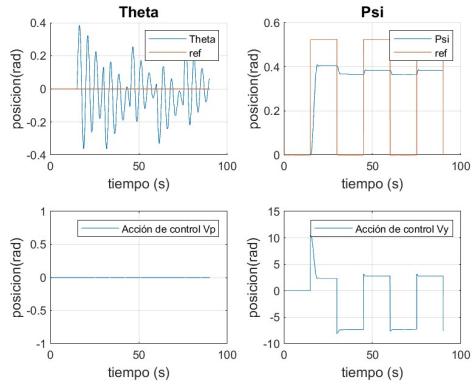
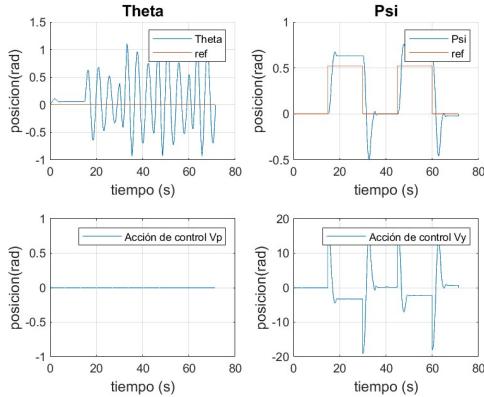


Figura 3-19: Montaje lazo cerrado

En esta parte del desarrollo se inició seleccionando una referencia para yaw (0.52 rad) y apagando la acción de control en theta, esto con el objetivo de encontrar la ganancia adecuada.

**Figura 3-20:** ref 0.5 Ganancia 1**Figura 3-21:** ref 0.5 Ganancia 20

El primer comportamiento que se observa es en efecto la zona muerta, pues aun cuando se tienen implementada una ganancia de 20, no se tiene movimiento, pues el error decae rápidamente, sin embargo, esta es diferente para cada motor ya que en **3-21** se aprecia que aun sin generar movimiento en psi si se genera en theta.

**Figura 3-22:** ref 0.5 Ganancia 30

Una vez se encontró la ganancia correcta, se verificó el rango de funcionamiento de esta, cambiando la referencia a 0.17, 0.34 y 0.69 rad.

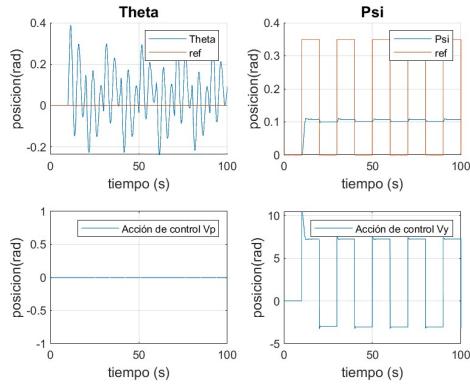


Figura 3-23: ref 0.17 Ganancia 30

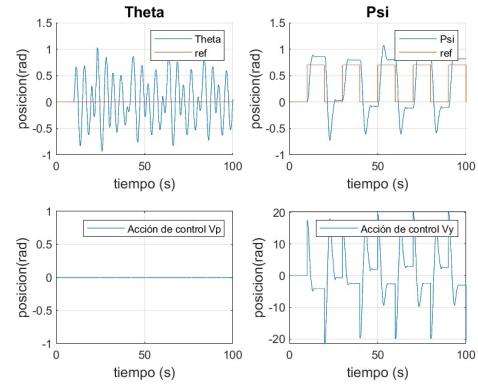


Figura 3-24: ref 0.34 Ganancia 30

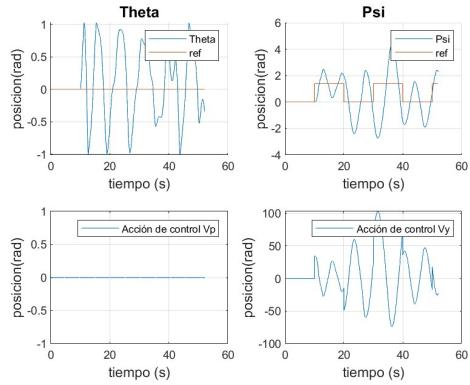


Figura 3-25: ref 0.69 Ganancia 30

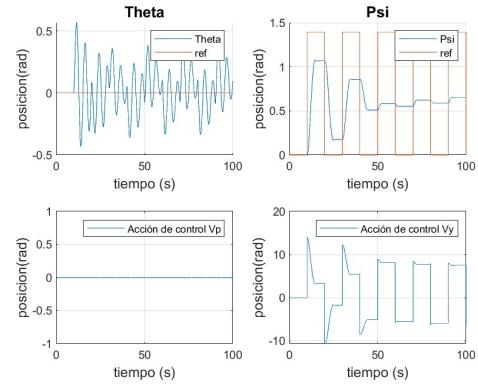


Figura 3-26: ref 0.69 Ganancia 10

Siendo este entre 0.34 y 0.5 radianes (20 a 30 grados), se observó el fenómeno de inestabilidad debido a que se satura la acción de control **3-25**, por otro lado, en **3-26** se presenta un caso en el que la ganancia era la suficiente para ganancia movimiento, sin embargo, a medida que el error se reduce esta no es suficiente.

Con el rango ya establecido se repitió el experimento pero ahora en pitch con una referencia de 0.17 rad

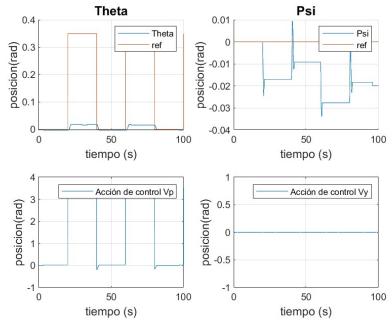


Figura 3-27: ref 0.17 Ganancia
10

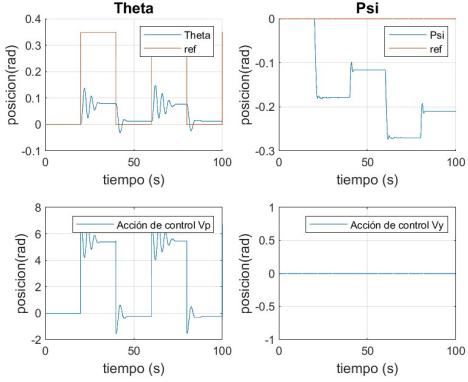


Figura 3-28: ref 0.17 Ganancia 20

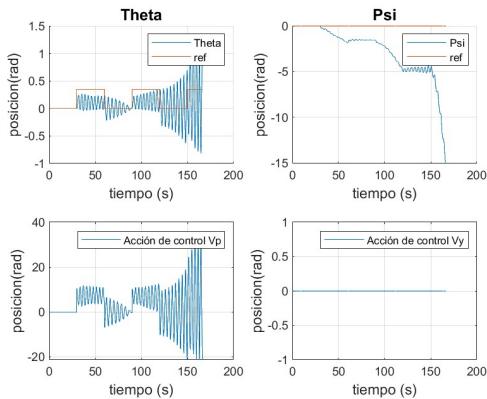
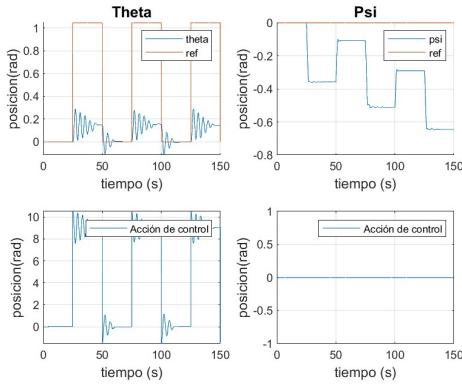
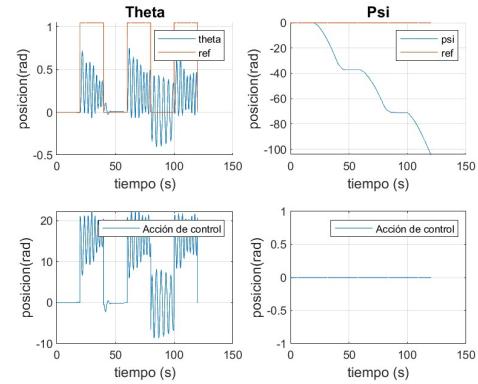
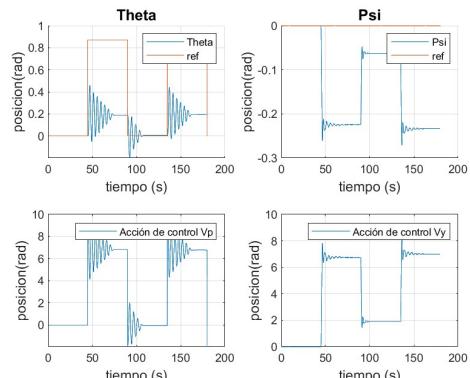
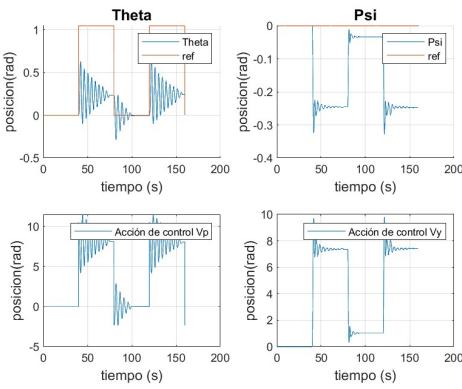


Figura 3-29: ref 0.17 Ganancia 30

De manera inesperada no se encontró una ganancia adecuada para la referencia, porque como se ve primero no se tiene movimiento, en el segundo caso si bien se desplaza sigue en la zona muerta y al final el sistema se inestabiliza, generando movimiento en psi. Se decidió repetir con referencia de 0.52 rad.

**Figura 3-30:** ref 0.52 Ganancia 10**Figura 3-31:** ref 52 Ganancia 20

Por causa de las relaciones entre los movimientos, los valores no son válidos, siendo necesarios sintonizarlos de forma simultánea. Primero con una referencia en 0 después intercambiándolas y finalmente ambas diferentes de 0

**Figura 3-32:** Pruebas simultáneas Yaw ref 0

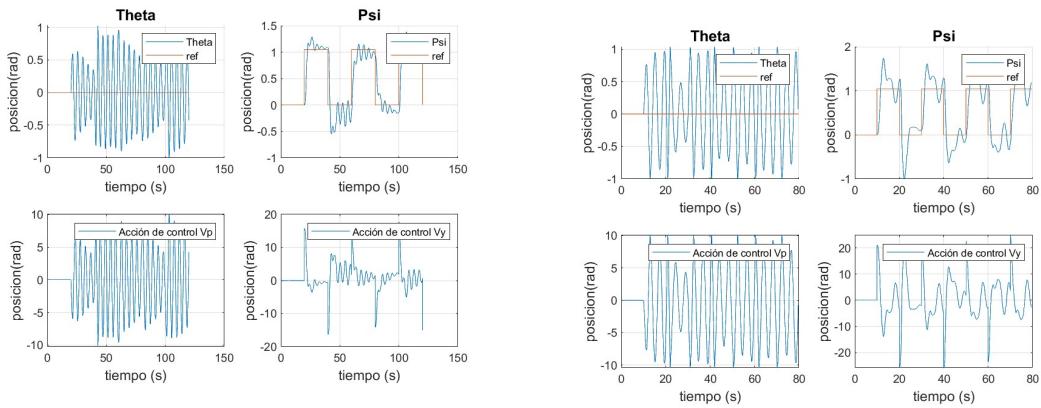


Figura 3-33: Pruebas simultáneas Pitch ref 0

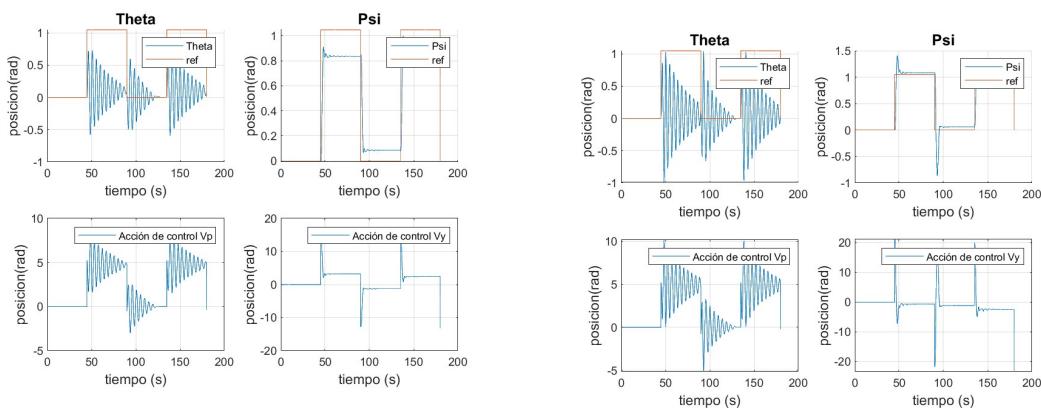


Figura 3-34: Pruebas simultáneas Pitch ref diferentes de 0

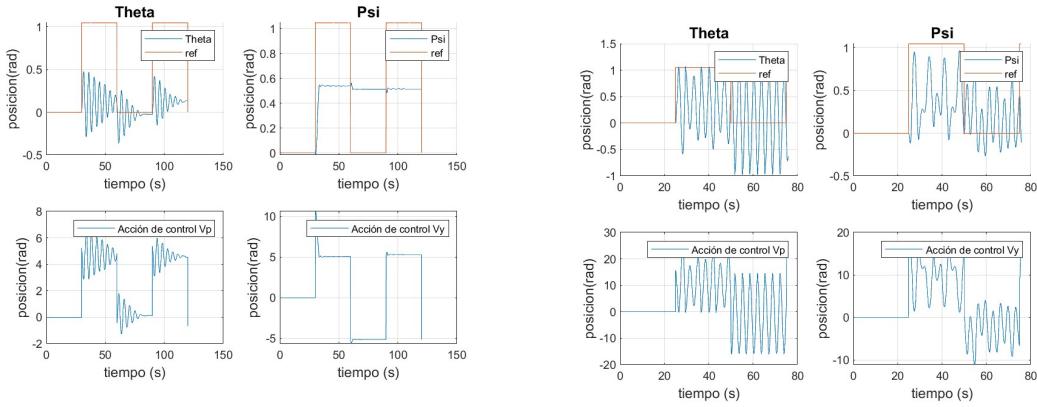


Figura 3-35: Pruebas simultáneas Pitch ref diferentes de 0

Desafortunadamente, solo con ganancias no es posible superar las dos zonas muertas y mantener los sistemas estables.

Enseguida se buscó subsanar la dificultad relacionada con la zona muerta por lo cual se busca para cada uno de los movimientos los valores de voltaje que generan movimiento, se tuvo en cuenta que debido a que los motores junto con las hélices generan una fuerza de magnitud diferente dependiendo del sentido de giro es necesario hallar los umbrales para cada caso. Se debe destacar que el objetivo era busca el valor anterior a aquel que genera movimientos.

Esto haciendo uso del montaje en lazo abierto **3-9**, un generador de señal cuadrada y un offset generando una señal que varía entre 0 y n. De esta forma solo se evalúa el efecto en un solo sentido de giro.

Theta

En este caso se aprecia como no en todos los ciclos de la señal se genera movimiento, por este se ajustó el valor a 3.7 v, pues es aquel que entregó resultados con la mayor repetibilidad.

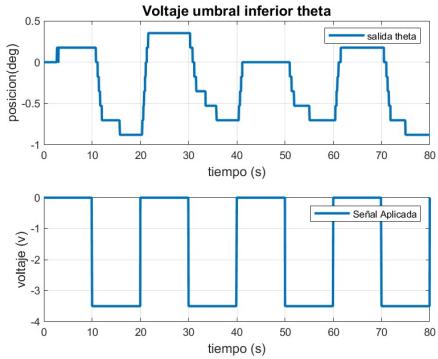


Figura 3-36: Voltaje umbral inferior 3.5 v

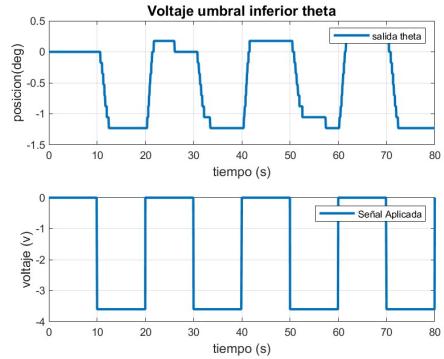


Figura 3-37: Voltaje umbral inferior 3.6 v

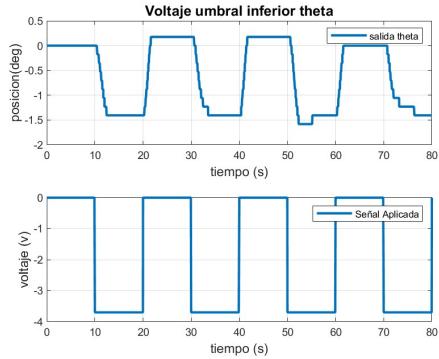


Figura 3-38: Voltaje umbral inferior 3.7 v

En el caso superior se encontró un valor similar de 3.8 v, pues para voltajes inferiores en ocasiones el movimiento se estancaba o frenaba por un periodo de tiempo sin modificar la entrada de voltajes.

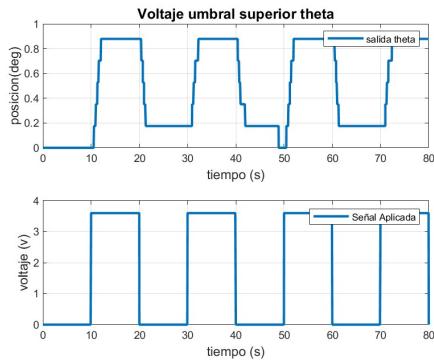


Figura 3-39: Voltaje umbral superior 3.6 v

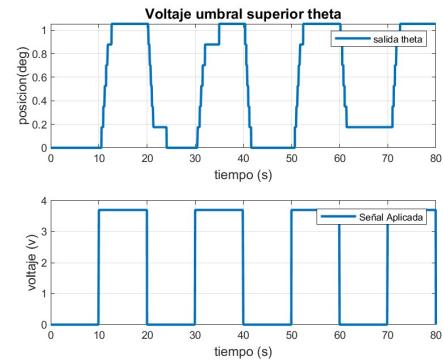


Figura 3-40: Voltaje umbral superior 3.7 v

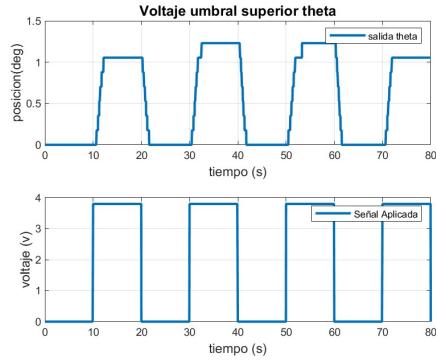


Figura 3-41: Voltaje umbral superior 3.8 v

Psi

El movimiento en Psi fue notoriamente más complejo de caracterizar, ya que se encontró que dependiendo el punto en la trayectoria circular era necesaria una fuerza diferente para garantizar movimiento, incluso al producir desplazamiento con un valor relativamente grande (10 V) la velocidad de giro no era la misma entre iteraciones. Por esto el valor se escogió de 8.3 V recalcando que se buscaba el voltaje anterior a generar movimiento

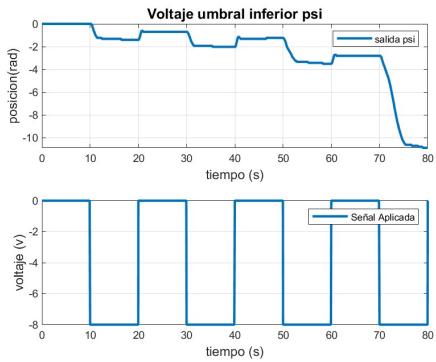


Figura 3-42: Voltaje umbral inferior 8 v

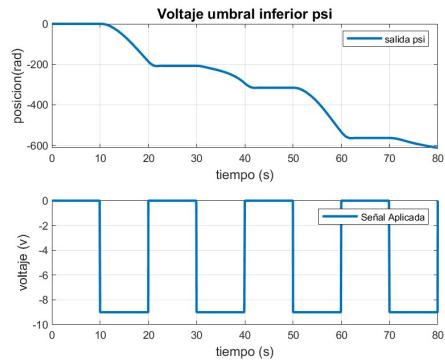


Figura 3-43: Voltaje umbral inferior 9 v

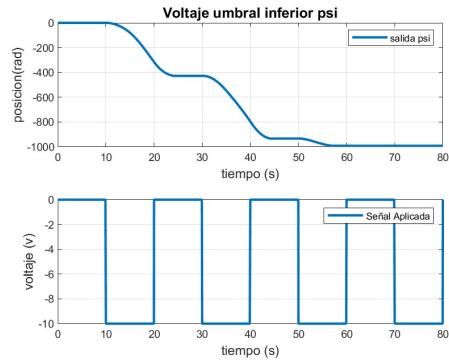


Figura 3-44: Voltaje umbral inferior 10 v

Para este caso es notoria la diferencia respecto al caso superior, pues, señales inferiores a 10 V generaban un desplazamiento despreciable, no obstante aún se presentan diferentes recorridos para la misma señal dependiendo del punto en la trayectoria, esto se confirma al usar 11 v. Se observó que 10.3 v es un valor plausible como umbral, sin embargo, este depende claramente del punto de inicio.

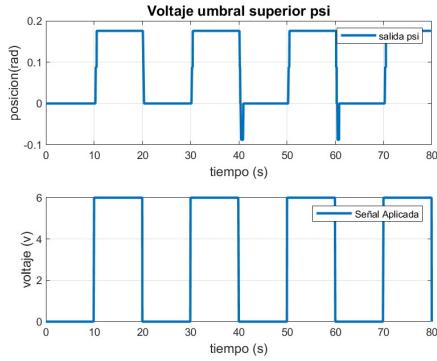


Figura 3-45: Voltaje umbral superior 10 v

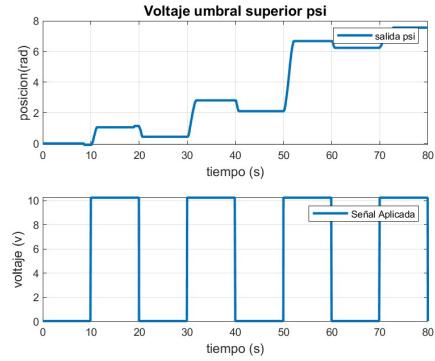


Figura 3-46: Voltaje umbral superior 10.3 v

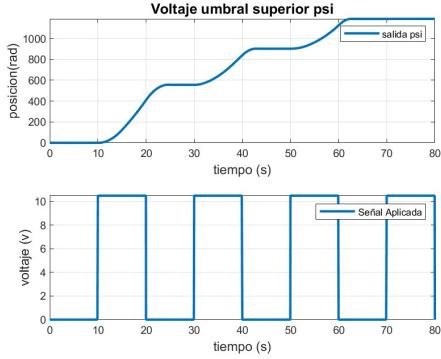


Figura 3-47: Voltaje umbral superior 10.5 v

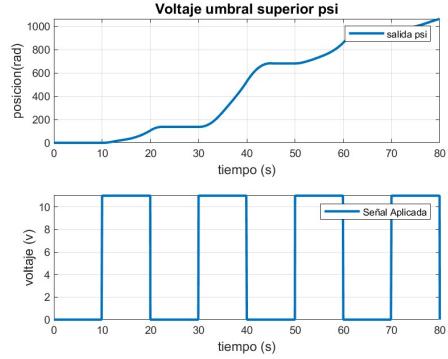


Figura 3-48: Voltaje umbral superior 11 v

Tomando los valores anteriores se añadió un offset en caso de que la señal fuera inferior a la zona muerta. Para estas pruebas primero se activó, únicamente un motor en cada experimento para poder evidenciar el efecto de acople.

Movimiento	Umbral inferior (V)	Umbral superior(v)
θ	3.7	3.8
ψ	8.3	10.3

Tabla 3-3: Resultados Umbrales

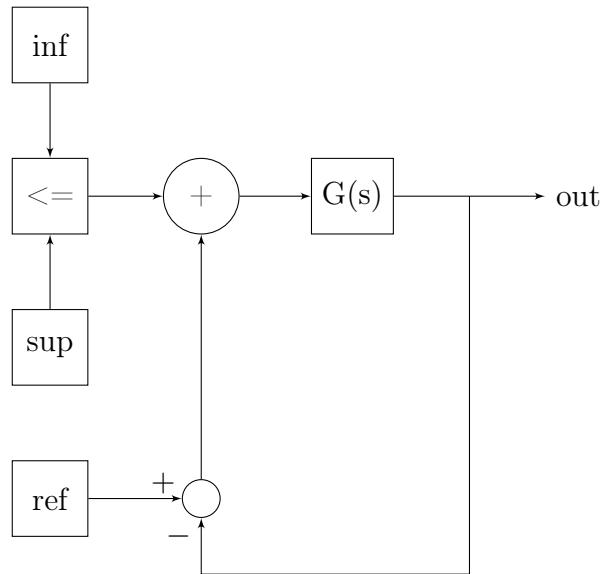


Figura 3-49: Esquema con offset

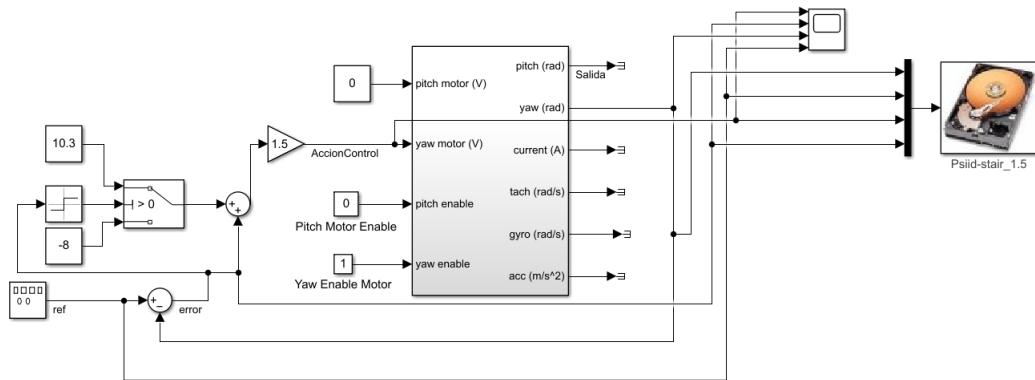
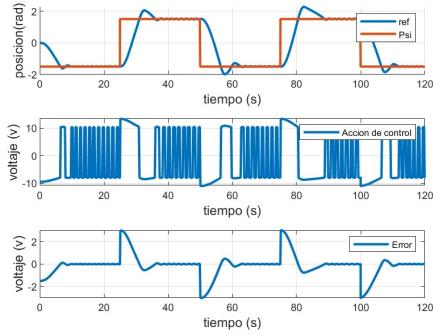
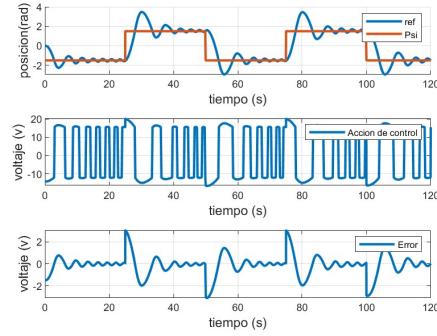
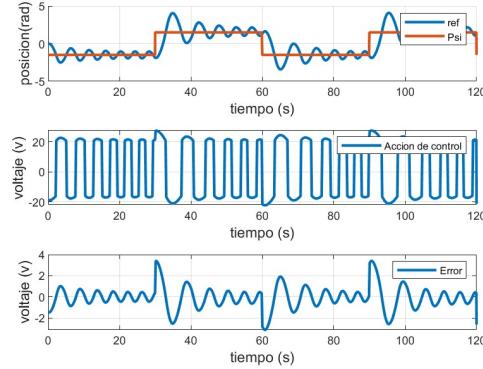
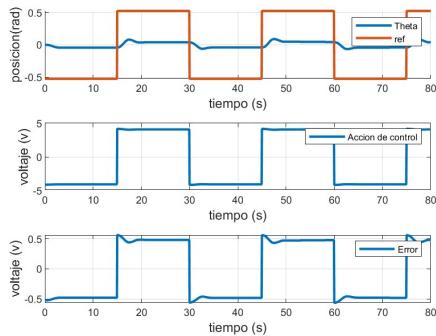
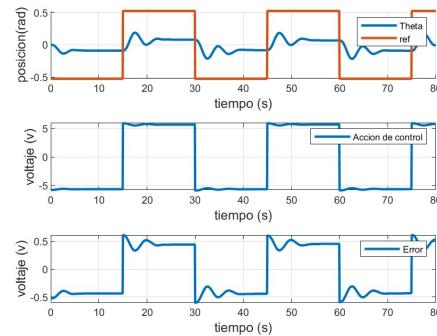


Figura 3-50: Montaje lazo cerrado con offset

Ahora para verificar los resultados se cerró el lazo únicamente de un movimiento y se tomaron datos. En el caso Psi los resultados eran los esperados, pues al eliminar la zona muerta el sistema no se estancaba antes de reducir el error a 0; sin embargo, al aumentar la ganancia crece la tendencia del sistema a oscilar.

**Figura 3-51:** Psi 1.5 rad G 1**Figura 3-52:** Psi 1.5 rad G 1.5**Figura 3-53:** Psi 1.5 rad G 2

Una limitante a la hora de realizar las pruebas fue evitar que el sistema se choque en theta o que se desplace de forma constante en Ψ_i , es decir, los voltajes se limitaban, por lo que no fue posible tomar datos de movimientos cruzados.

**Figura 3-54:** Theta 0.52 rad G 1**Figura 3-55:** Theta 0.52 rad G 1.4

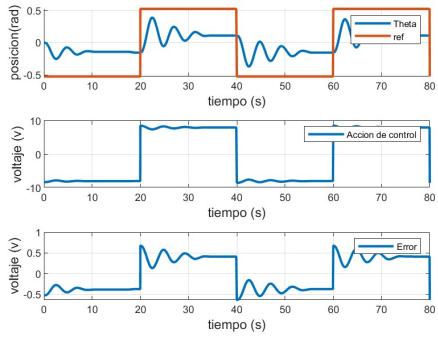


Figura 3-56: Theta 0.52 rad G 2

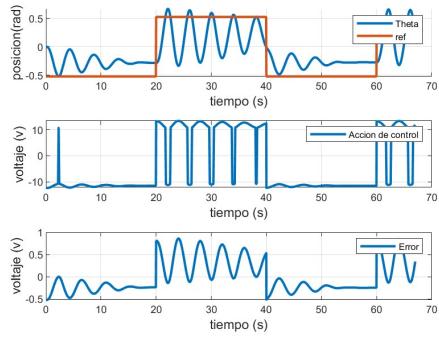


Figura 3-57: Theta 0.52 rad G 3

Con las ganancias ajustadas se procedió a realizar las pruebas conjuntas del sistema, siendo este el montaje base.

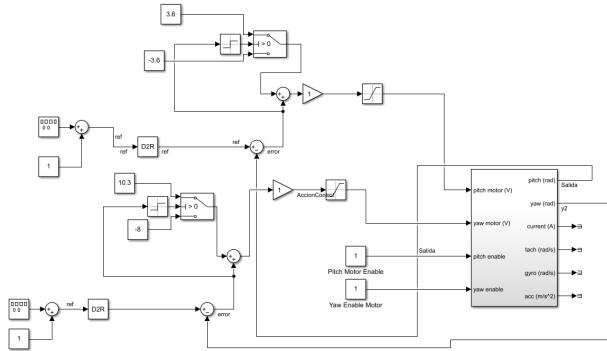


Figura 3-58: Implementación offset simultaneo

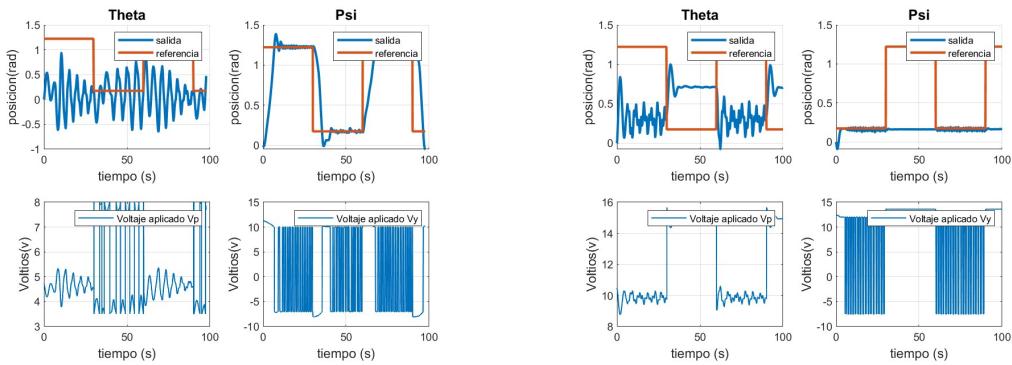


Figura 3-59: Theta 0.3 rad Psi 0.3

Desafortunadamente, los resultados no permiten hacer una identificación, pues, se generan choques y saturaciones.

3.2.3. LQR

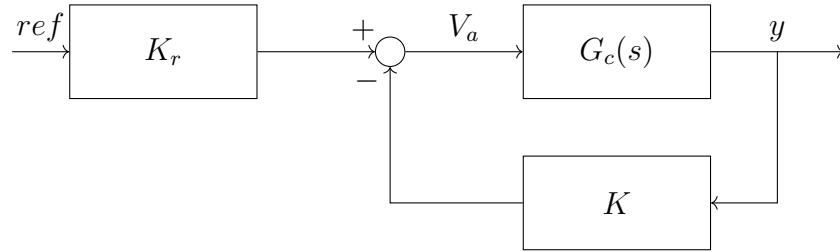


Figura 3-60: Diagrama de bloques LQR

Debido al comportamiento ya mencionado del sistema, se utilizó un controlador LQR para realizar la toma de datos, ya que se evidenció que este controlador produce una acción de control donde tanto las saturaciones como las zonas muertas no son tan relevantes, esto debido a la velocidad de cambio de la señal de control produciendo resultados más limpios y con mayor repetibilidad. Vale la pena resaltar que este controlador se construyó con el modelo lineal que el fabricante proporciona, el cual tiene polos: **Lazo abierto**

$$[(-0,1625 + 1,2982i) \quad (-0,1625 - 1,2982i) \quad (0) \quad (-1,0004 + 0,0000i)]$$

Lazo cerrado

Los parámetros del controlador son los siguientes:

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0,0050 & 0 \\ 0 & 0,0050 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 98,2088 & -103,0645 & 32,2643 & -29,0750 \\ 156,3469 & 66,1643 & 45,5122 & 17,1068 \end{bmatrix}$$

Con el objeto de desplazar los polos a:

$$[-3,0210 + 3,0223i \quad -3,0210 - 3,0223i \quad -3,2763 + 3,4474i \quad -3,2763 - 3,4474i]$$

Usando el siguiente montaje se tomaron datos para varias referencias

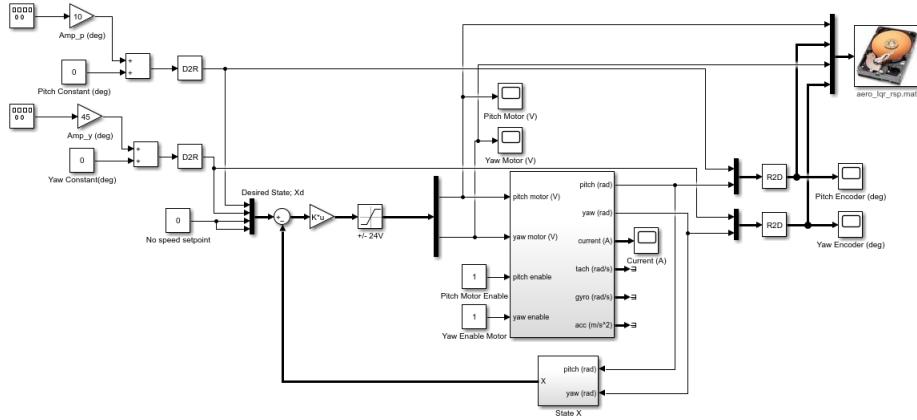


Figura 3-61: Montaje controlador LQR

Primero se realizo dejando uno de las dos referencias en 0

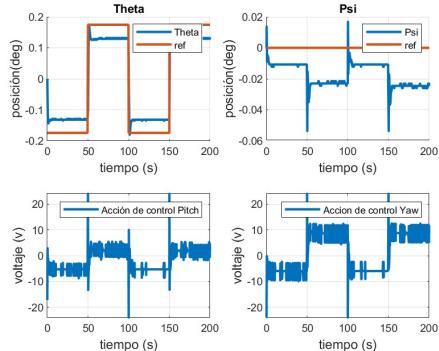


Figura 3-62: Theta 0.1745 rad psi 0

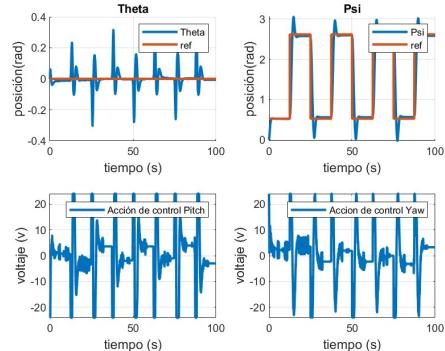


Figura 3-63: Theta 0 psi 1.047 rad

Con estos datos ya se infiere una dificultad pues la señal señal se satura constantemente con los picos de 24 V, por eso se hicieron pruebas para identificar si habia un par de referencias donde no se presentara esta situacion

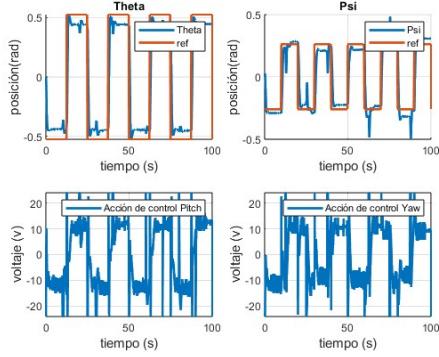


Figura 3-64: Theta 0.2617 rad psi
0.5235 rad

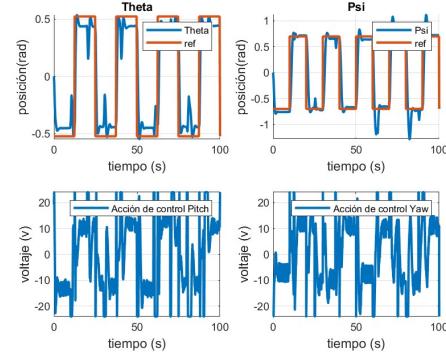


Figura 3-65: Theta 0.698 rad psi
0.698 rad

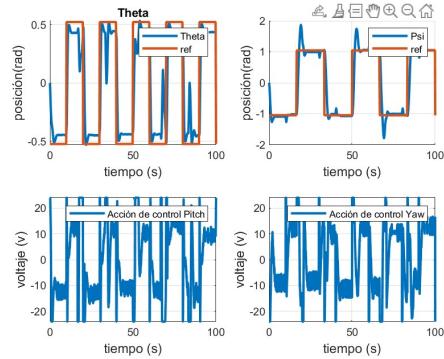


Figura 3-66: Theta 1.047 rad psi
0.5235 rad

Debido a que no se encontró un par de resultados satisfactorios, se propuso activar solamente un controlador para evitar que los efectos de acople forzaran a tener una acción de control con magnitud mayor.

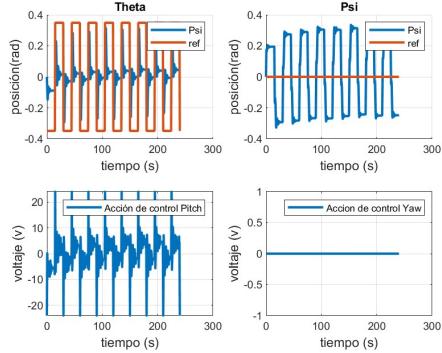


Figura 3-67: Theta 0.349 rad

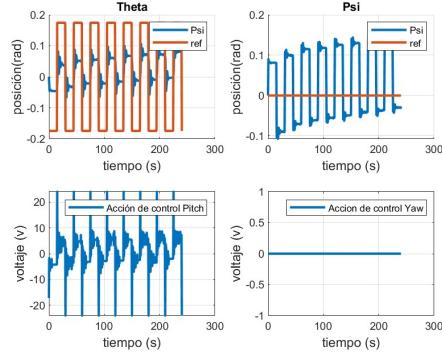


Figura 3-68: Theta 0.174 rad

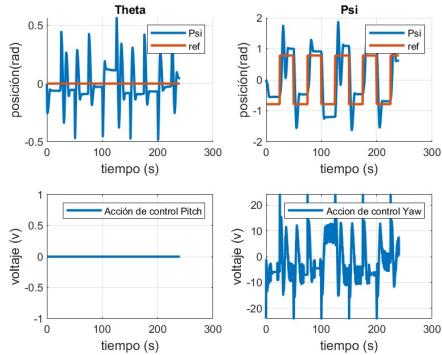


Figura 3-69: Psi 0.785 rad

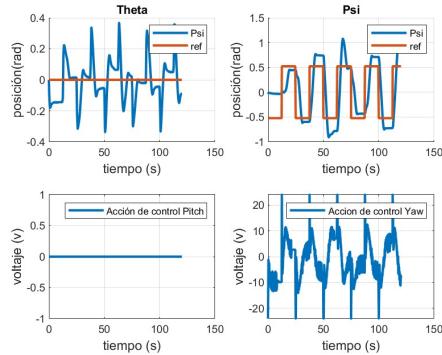


Figura 3-70: Psi 0.52 rad

3.2.4. PID

Debido a que el sistema es inestable en lazo abierto, se propuso tomar datos usando un controlador PID para cada brazo, bajo el supuesto que es posible encontrar el bloque que equivale al PID en serie con la planta y la señal de salida realimentada.

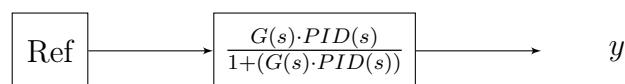
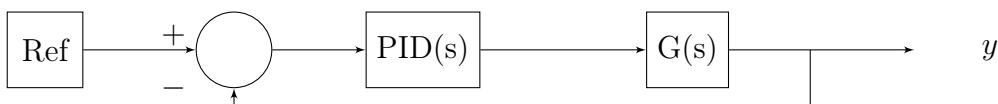


Figura 3-71: Realimentación

A este resultado se llega al realizar álgebra de bloques

$$y = (ref - y) \cdot PID(s) \cdot G(s)$$

$$y = ref \cdot PID(s) \cdot G(s) - y \cdot PID(s) \cdot G(s)$$

$$y + y \cdot PID(s) \cdot G(s) = ref \cdot PID(s) \cdot G(s)$$

$$y(1 + PID(s) \cdot G(s)) = ref \cdot PID(s) \cdot G(s)$$

$$\frac{y}{ref} = \frac{PID(s) \cdot G(s)}{(1 + PID(s) \cdot G(s))}$$

Este se implementó con el siguiente montaje Siguiendo la misma lógica usada en el controlador LQR, se tomaron datos primero con una referencia en 0 y después variando las 2 simultáneamente.

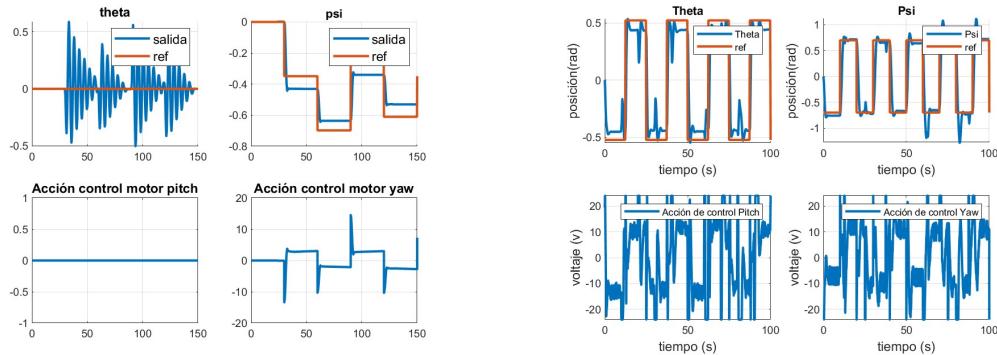


Figura 3-72: Theta 0 psi aleatorio

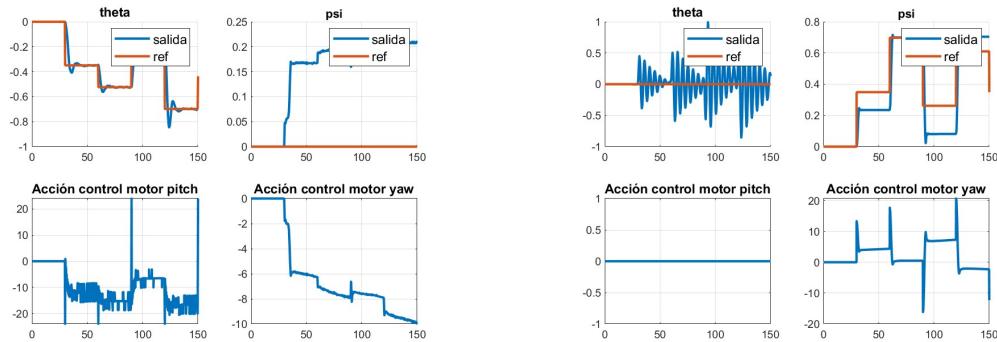


Figura 3-73: Theta aleatorio psi 0

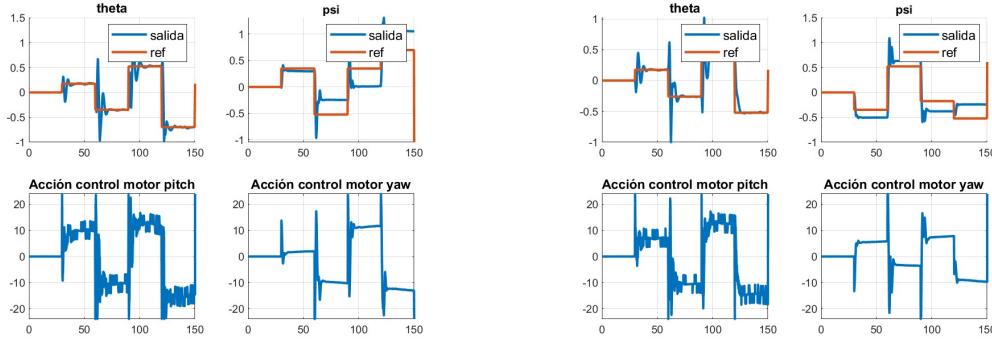


Figura 3-74: Theta aleatorio psi aleatorio

3.2.5. PID OFFSET

El proceso anterior se repitió añadiendo un offset a cada señal para evitar la zona muerta y poder reducir el error, de esta forma se esperaba poder llegar al estado estacionario estable y obtener datos de mejor calidad, sin embargo no se logró pues hasta ahora se había conceptualizado la zona muerta de forma incorrecta. Esta no debe ser relacionada con el voltaje sino con la fuerza necesaria para generar movimiento por ende los dos motores la afectan en diferente proporción. Adicionalmente se debe tener presente la dinámica cruzada.

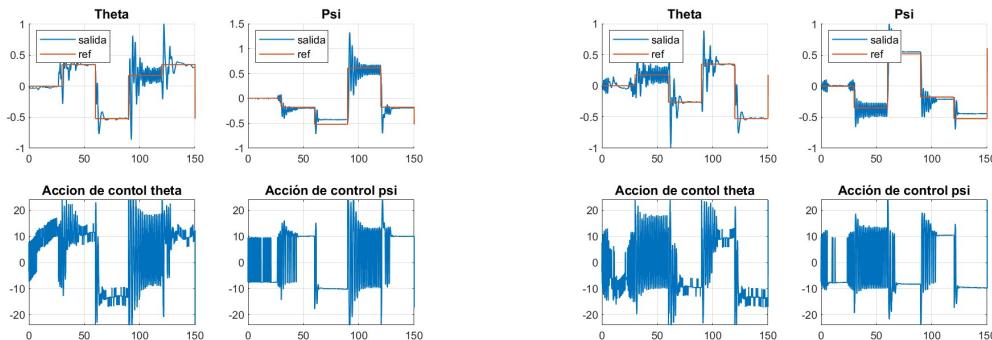
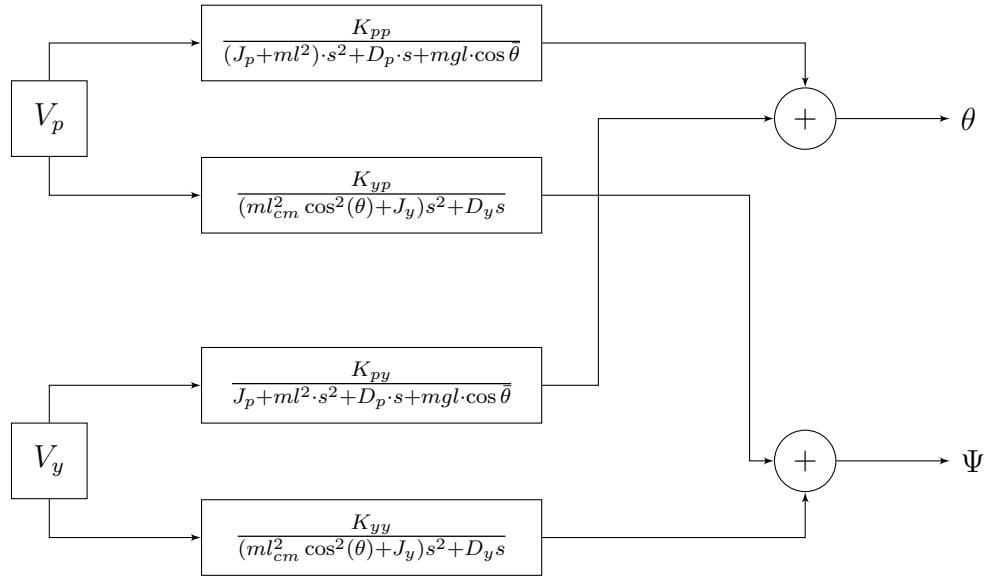


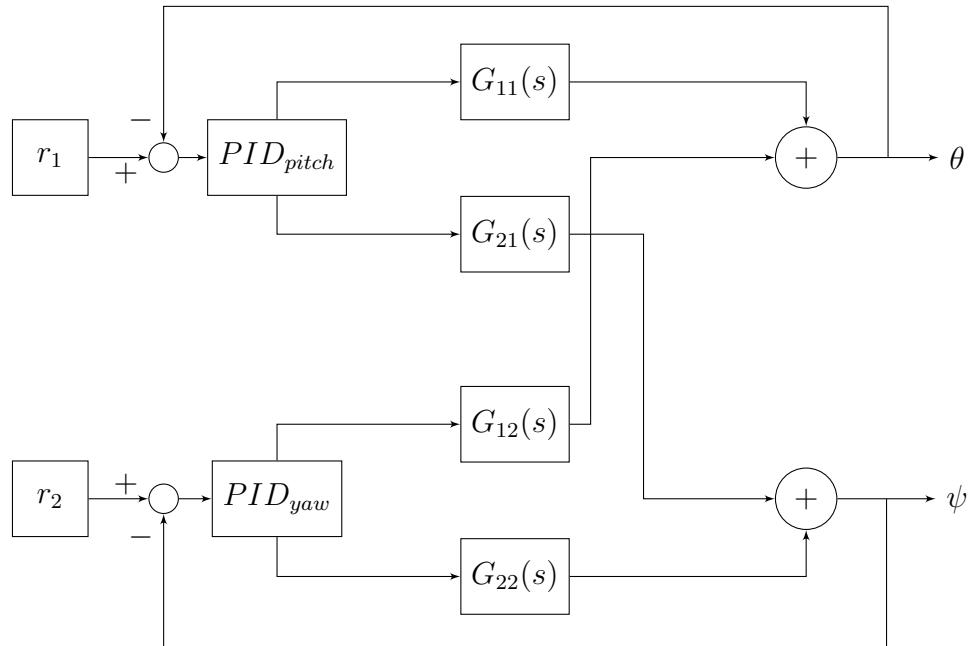
Figura 3-75: Theta aleatorio psi aleatorio

3.2.6. Desacople

Partiendo de los resultados obtenidos con el análisis de la identificación usando los controladores PID, se concluyó la necesidad de estudiar el efecto de acople entre cada uno de los motores sobre los movimientos.

**Figura 3-76:** Sistema representado en bloques

En primer lugar, partiendo del siguiente diagrama **3-76**, se observa que no es posible realizar la simplificación propuesta en **3-71**, pues la implementación real es la presentada en **3-77**.

**Figura 3-77:** Sistema PID representado en bloques

Es por eso que se hace necesario implementar un sistema de desacople, cuya fun-

ción es separar el efecto de cada actuador de forma que solo afecten a un movimiento. Para esto primero se debe determinar que actuador controlará cuál movimiento, generalmente es aquel que cuya influencia sea mayor; determinándolas mediante la matriz de ganancias relativas (RGA).

$$R = P(0) \cdot P^{-1}(T(0)) \quad R = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

Siendo $P(0)$ la ganancia estática del sistema. λ es el índice de interacción, si su valor es 0 o 1 no existe la relación; si es 0.5 los lazos se deben intercambiar y si $0.67 \leq \lambda \leq 1.5$ se sugiere desacoplar. Asumiendo que se va a utilizar la diagonal principal para escoger la función de cada motor, se busca entonces otra matriz que representa un grupo de funciones de transferencias que al multiplicarlos por la planta cancelen los efectos no deseados. Vale la pena resaltar que $Q(s)$ se utiliza para el diseño de los controladores.

$$G(s)D(s) = Q(s) = \begin{pmatrix} q_1(s) & 0 \\ 0 & q_2(s) \end{pmatrix}$$

$$G \cdot D = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}d_{11} + g_{12}d_{21} & g_{11}d_{12} + g_{12}d_{22} \\ g_{21}d_{11} + g_{22}d_{21} & g_{21}d_{12} + g_{22}d_{22} \end{pmatrix}$$

$$D(s) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{pmatrix} \quad Q(s) = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{21}g_{11}}{g_{11}} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, si se intercambia la función de cada motor se tiene:

$$D(s) = \begin{pmatrix} -\frac{g_{12}}{g_{11}} & 1 \\ 1 & -\frac{g_{21}}{g_{22}} \end{pmatrix} \quad Q(s) = \begin{pmatrix} g_{11} - \frac{g_{21}g_{12}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{21}g_{11}}{g_{12}} \end{pmatrix}$$

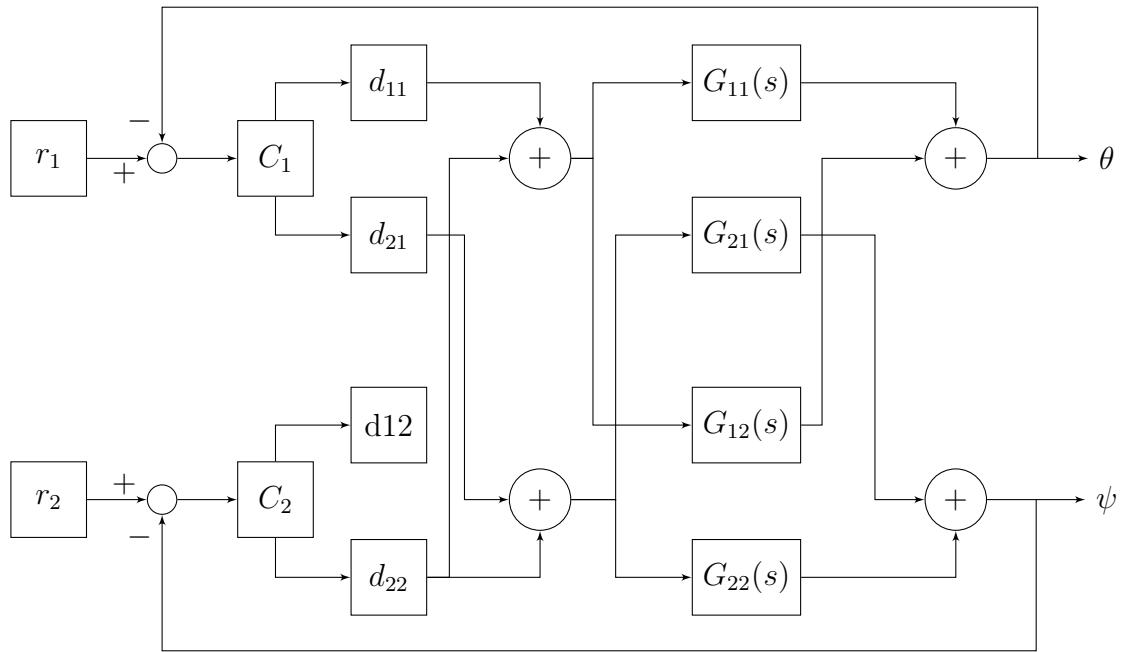


Figura 3-78: Sistema representado en bloques

El primer análisis se realizó usando 4.1.3 el modelo básico este arrojo

$$RGA = \begin{pmatrix} 0,2840 & 0,7160 \\ 0,7160 & 0,2840 \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

Cambio la convención del manejo de los motores

$$RGA = \begin{pmatrix} 0,8113 & 0,1887 \\ 0,1887 & 0,8113 \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

Se mantiene la convención del manejo de los motores

Datos enfoqué Quanser

Utilizando la función de transferencia de Quanser no se obtuvieron los resultados esperados, pues aun con la metodología de desacoplo el control no era de calidad. Evidentemente, las funciones con las que se calculó el controlador PID y el desacoplador D no son las adecuadas.

Desacoplador

$$C_{11} = \frac{-4,818s^2 - 1,408s - 7,92}{2,409s^2 + 0,704s + 3,96}$$

$$C_{22} = \frac{6,38s^2 + 3,544s}{5,06es^2 + 2,811s}$$

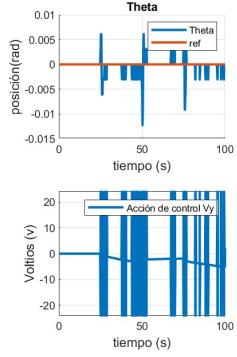


Figura 3-79: Quanser Theta 0 rad
Psi 1.074 rad

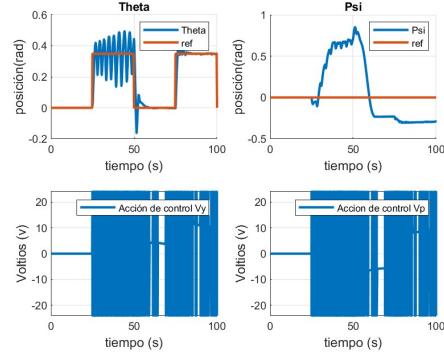


Figura 3-80: Quanser Theta 1.074 rad Psi 0 rad

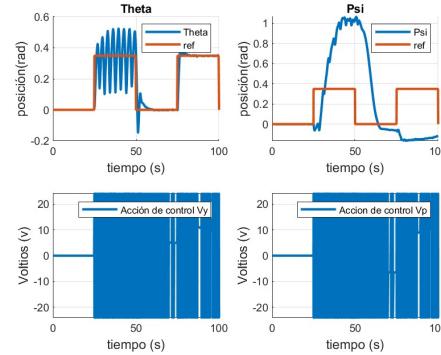


Figura 3-81: Quanser Theta 1.074 rad Psi 1.074 rad

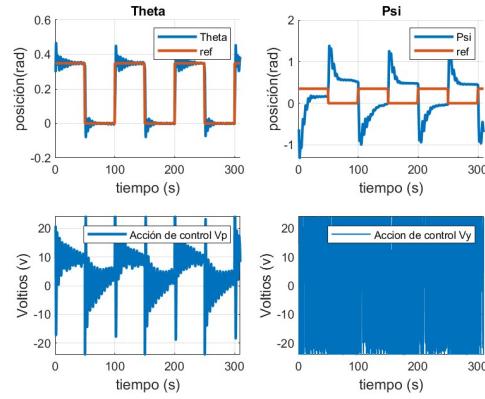
Datos función de transferencia respuesta en frecuencia

En este caso el controlador inicial muestra una enorme mejoría, particularmente en el eje de pitch que en las secciones anteriores fue arduo su control, pues es inestable; sin embargo, si bien en yaw hay cierto seguimiento a la referencia se tiene un error de posición este se atribuye al efecto que tiene V_p pues en la estructura este es de magnitud opuesta al de V_y de forma que se mueve en sentido contrario.

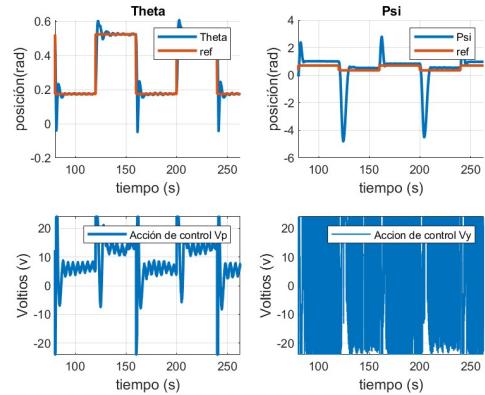
Desacoplador

$$C_{21} = \frac{1,367s^2 + 0,4106s}{0,04s^2 + 1,272s}$$

$$C_{12} = \frac{-0,02955s^2 - 0,002787s - 0,07027}{0,05872s^2 + 0,003445s + 0,09783}$$

**Figura 3-82:** Sintonización inicial

Para solucionar la dificultad anterior se desfasó la señal de referencia de yaw °180 con respecto a pitch evitando el error de signo en la salida de Psi. Si bien se solucionó el problema, ahora se busca sintonizar de mejor forma el controlador reduciendo el sobre pico.

**Figura 3-83:** Sintonización referencias desfasadas

Ya que la tarea de sintonizar 2 controladores de forma simultánea es compleja, se tomó primero el controlador de psi dejando libre theta, una vez se obtuvieron los resultados esperados, este último se conectó y sintonizo.

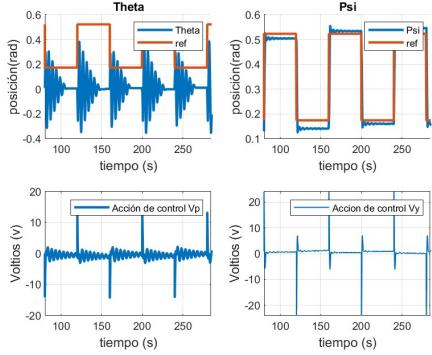


Figura 3-84: Sintonización yaw

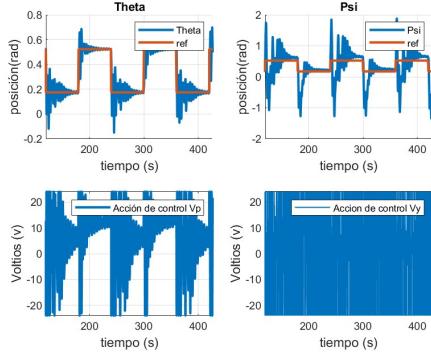


Figura 3-85: Sintonización final

Adicionalmente, se probó la validez del controlador en distintos puntos de operación y se encontró que este funciona correctamente cuando la referencia de theta oscila en un rango de 0,174 rad (${}^{\circ}10$) con cualquier punto inicial que no genere choques.

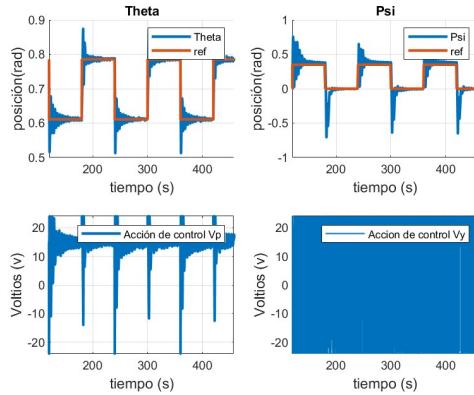


Figura 3-86: Resultados 0.26 a 0.43 rad (${}^{\circ}15$ a ${}^{\circ}25$)

Capítulo 4

Identificación

En este capítulo se expone el proceso para la identificación de modelos lineales y no lineales partiendo de los datos ya recogidos. Sin embargo, antes de mostrar cada uno de los procesos se presenta la metodología y tipos de modelos a los que se busca llegar.

4.1. Parámetros basicos

La primera aproximación se realizó siguiendo la metodología planteada en [?]; en esta se parte del modelo en funciones de transferencia 1.1.1 posteriormente se realizan pruebas individuales para hallar cada uno de los coeficientes; si bien esta estructura no tiene en cuenta las características que se desprenden del modelo no lineal y que se heredan al modelo linealizado escogido 2-9 se ha decidido incluirla, pues es el proceso más usado en la literatura o simplemente se toman los resultados del proceso.

4.1.1. Inercia

Es importante destacar que J_{eq} – hace referencia al momento de inercia equivalente sobre el centro de masa, este hace referencia al eje que se desplaza y a los dos motores, sin embargo, ya que en el movimiento de yaw, gira el yugo, este se agrega.

$$J_{eq} - p = J_{cuerpo_p} + J_p + J_y$$

$$J_{eq} - y = J_{cuerpo_y} + J_p + J_y + J_{yugo}$$

Siguiendo el procedimiento de [?] los componentes individuales son:

$$\begin{aligned} J_y &= m_{prop} r_{prop}^2 \\ J_p &= m_{prop} r_{prop}^2 \\ J_{cuerpo_p} &= \frac{m_{cuerpo_p} L_{cuerpo}^2}{12} \\ J_{cuerpo_y} &= \frac{m_{cuerpo_y} L_{cuerpo}^2}{12} \\ J_{yugo} &= \frac{m_{yugo} r_{yugo}^2}{2} \end{aligned}$$

Parámetro	Descripción	Valor
J_{eqp-p}	Momento de inercia motor yaw	0.0219 Kg/m^2
J_{eqp-y}	Momento de inercia motor yaw	0.0220 Kg/m^2
J_y	Momento de inercia motor yaw	0.0108 Kg/m^2
J_p	Momento de inercia motor pitch	0.0108 Kg/m^2
J_{cuerpo_p}	Momento de inercia equivalente alrededor de pitch	$2.1352 \cdot 10^{-4} \text{ Kg/m}^2$
J_{cuerpo_y}	Momento de inercia equivalente alrededor de yaw	2.1352 Kg/m^2
J_{yugo}	Momento de inercia equivalente alrededor del yugo	$1.052 \cdot 10^{-4} \text{ Kg/m}^2$
m_{prop}	Masa del para motor hélice	0.43 Kg
r_{prop}	Radio del motor	0.1588 m
m_{cuerpo_p}	Masa del cuerpo desplazada en pitch	0.094 Kg
m_{cuerpo_y}	Masa del cuerpo desplazada en yaw	0.094Kg
L_{cuerpo}	Largo del cuerpo	0.1651 m
m_{yugo}	Masa del yugo	0.526 m
r_{yugo}	Radio del yugo	0.02 m

Tabla 4-1: Parámetros inercia

4.1.2. Fricción Viscosa

Pitch

En el momento de identificar los coeficientes D_p y D_y es importante recordar que en la linealización 2-9 se llego a 4 funciones de transferencia de segundo orden, por esto se puede expresar la respuesta libre del sistema usando la siguiente ecuación:

$$J\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + K\alpha = 0$$

Al asumir condiciones iniciales iguales a 0 y realizar la transformada de Laplace se llega a la siguiente función de transferencia:

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_0/J}{s^2 + D/Js + K/J}$$

Además, conociendo la forma típica del denominador de una función de transferencia, se llega a la siguiente igualdad.

$$s^2 + D/Js + K/J = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Que permite hallar los siguientes parámetros:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J} \quad 2\zeta\omega_n = \frac{D}{J}$$

Ahora se busca expresar ω_n en función de datos que son medibles como lo es el periodo de oscilación.

$$T_{osc} = \frac{t_n - t_1}{n - 1}$$

Donde n es el número de oscilaciones

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_{osc}} \quad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

En seguida es necesario hallar ζ , es decir la relación de amortiguación; para esto se utiliza la relación de decremento, expresada en función de la amplitud de las oscilaciones.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{A_1}{A_2} \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\pi^2}{\delta}}}$$

Toma de datos y estimación

Para poder encontrar la respuesta libre del sistema, se utilizó el montaje en lazo abierto **3-9**, se bloqueó el eje de yaw usando el seguro mostrado en **3-3** y se configuró la entrada para inyectar un impulso de amplitud 20 durante 0.776 s. Lo anterior generó la siguiente figura

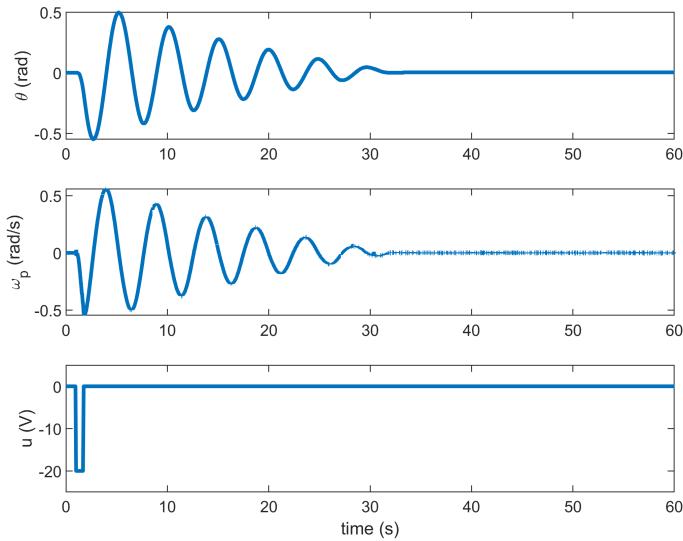


Figura 4-1: Respuesta libre pitch

#Oscilación	Amplitud (rad)	Tiempo (s)
1	0.49701	0.49701
4	0.19021	19.974

Tabla 4-2: Respuesta libre pitch

Con los datos anteriores utilizando las fórmulas expuestas anteriormente se llega a:

Parámetro	Valor
T_{osc}	4.9355 s
δ	0.2590
ζ	0.1138
ω_d	1.2731 rad/s
ω_n	1.2814 rad/s
D_p	0.0064 N/v
K_{sp}	0.0360 N/v

Tabla 4-3: Resultados fricción viscosa pitch

Yaw

El procedimiento varía ligeramente para yaw, pues como se ve en 2-9 la ecuación tiene la siguiente forma,

$$J_y \ddot{\psi} + D_y \dot{\psi} = 0$$

esta se puede expresar en función de la velocidad para posteriormente aplicar Laplace y obtener una ecuación de primer grado.

$$J_y \dot{\psi}_{yaw}(t) + D_y \psi_{yaw}(t) = 0 \quad \Omega_{yaw}(s) = \frac{J_y/D_y}{J_y/D_y s + 1}$$

Ahora sabiendo que una ecuación de primer orden tiene la solución

$$y_1 = e^{-\tau}(y_0 - y_{ss}) \rightarrow D_y = \frac{J_y}{\tau}$$

Para encontrar τ primero se busca el valor donde la magnitud cae al 37% comparado con el valor inicial.

$$\omega_1 = (1 - 0,63)\omega_0 \quad \tau = t_1 - t_0$$

Toma de datos y estimación

Se utilizó el montaje descrito en **3-9** para inyectar un pulso de voltaje de amplitud 20 durante 0.776 s. Lo anterior genero la siguiente figura:

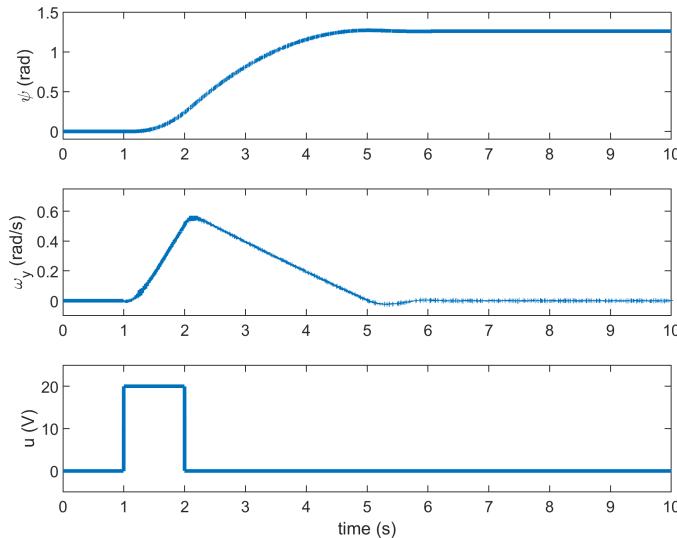


Figura 4-2: Respuesta libre yaw

Parámetro	Valor
ω_0	0.558 rad/s
ω_1	0.0.2065 rad/s
τ	1.8020 1/s
Dy	0.0122 N/v

Tabla 4-4: Resultados fricción viscosa yaw

4.1.3. Empuje

Este desarrollo hace referencia a las constantes k_{pp} , k_{py} , k_{yp} y k_{yy} , las cuales cuantifican el aporte realizado por cada motor, en otras palabras transforman el voltaje aplicado (V_p y V_y) en la fuerza generada por el par motor hélice.

Theta

Partiendo de la sumatoria de fuerzas en función de la posición

$$J_p \ddot{\theta} + D_p \dot{\theta} + K_{sp} \theta = K_{pp} V_p$$

Se expresa en función de la velocidad angular

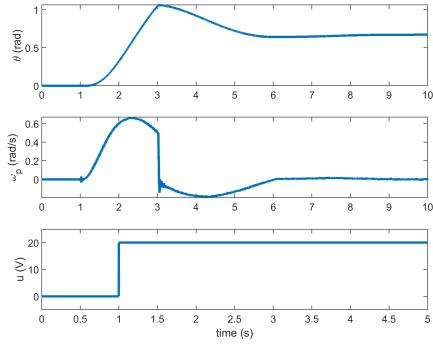
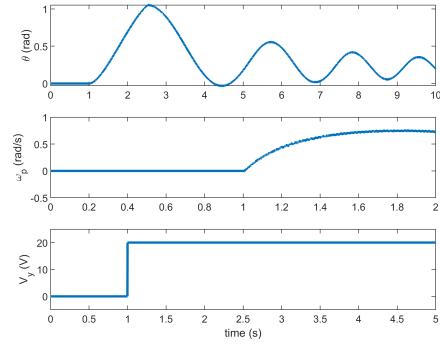
$$J \dot{\omega}_p + D_p \dot{\omega}_p = K_{pp} V_p$$

$$K_{pp} = \frac{J \dot{\omega}_p + D_p \dot{\omega}_p}{V_p}$$

Tomando esta ecuación se encuentra el aporte de yaw para pitch

$$K_{ppy} = \frac{J \dot{\omega}_p + D_p \dot{\omega}_p}{V_y}$$

De forma práctica se utiliza un escalón de voltaje y se registra la velocidad angular, posteriormente usando los parámetros ya encontrados para la inercia y la fricción viscosa, se usa la ecuación anterior

**Figura 4-3:** Empuje $V_p \theta$ **Figura 4-4:** Empuje $V_y \theta$ **Psi**

De manera similar a theta, se expresó las fuerzas en función de la velocidad

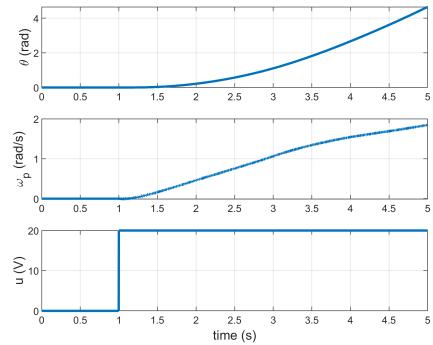
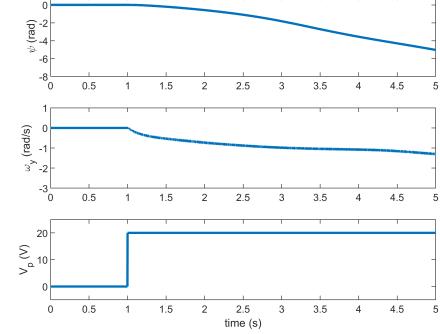
$$J_y \dot{\psi} + D_y \dot{\psi} = K_{yy} V_y$$

$$J_y \omega_y + D_y \omega_y = K_{yy} V_y$$

$$K_{yy} = \frac{J_y \dot{\omega}_y + D_y \dot{\omega}_y}{V_y}$$

Se encuentra el otro aporte

$$K_{yp} = \frac{J_y \dot{\omega}_y + D_y \dot{\omega}_y}{V_p}$$

**Figura 4-5:** Empuje $V_y \psi$ **Figura 4-6:** Empuje $V_p \Psi$

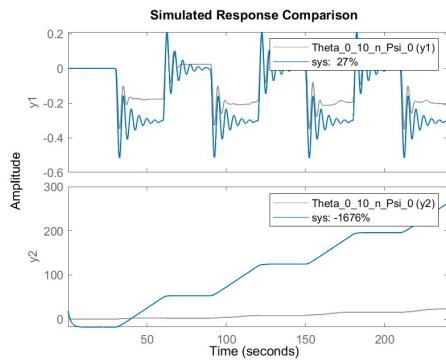
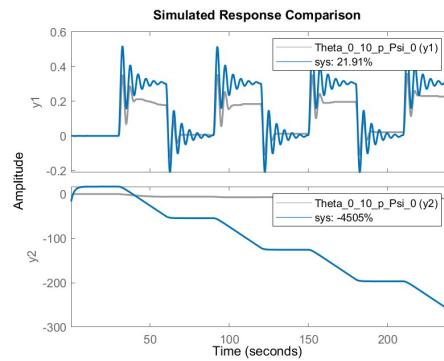
Parámetro	Valor (N-m/v)
k_{pp}	0.0011
k_{py}	0.0022
k_{yp}	-0.0029
k_{yy}	0.0023

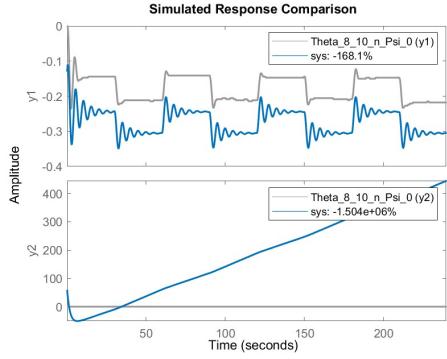
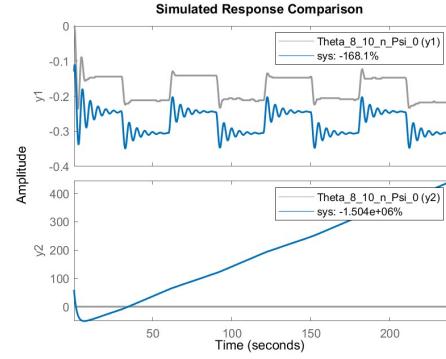
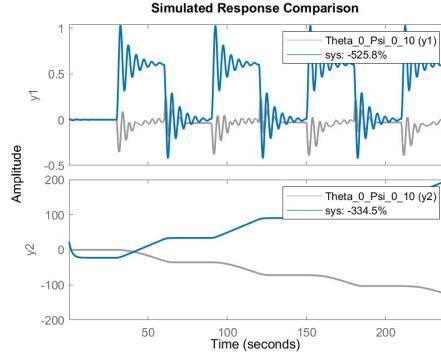
Tabla 4-5: Resultados empujes

Los datos anteriores dan como resultado la siguiente matriz de funciones de transferencia:

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0,0011}{0,0219s^2+0,0064s+0,0360} & \frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0,0022}{0,0219s^2+0,0064s+0,0360} \\ \frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-0,0029}{0,0220s^2+0,0122s} & \frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,0023}{0,0220s^2+0,0122s} \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

Para la verificación del comportamiento se usaron los datos recogidos en lazo abierto

**Figura 4-7:** Theta 0 a 10 V**Figura 4-8:** Theta 0 a -10 V

**Figura 4-9:** Psi 8 a 10 V**Figura 4-10:** Psi -8 a -10 V**Figura 4-11:** Psi 0 a 10 V

Los resultados obtenidos se pueden condensar en un claro error en las constantes K_{yp} y K_{yy} así, pues el comportamiento en psi escala mucho más rápido de lo previsto, por otro lado, para theta se aprecia además de la diferencia del estado estacionario un error en la velocidad de decaimiento de las oscilaciones, lo anterior se puede atribuir primero a que este modelo no tiene en cuenta el punto de operación por lo que los parámetros no deben ser válidos en todo el rango, además de la necesidad de establecer una relación entre las funciones de transferencia más haya de los voltajes aplicados.

4.2. Metodología Básica

Los resultados anteriores muestran la necesidad de escoger cuidadosamente las zonas de operación para capturar la parte deseada de la dinámica, además se ha-

ce evidente la necesidad de partir del modelo encontrado mediante euler-lagrange con su respectiva parametrización 2-9, adicionalmente se aprecia como no es aconsejable bloquear alguno de los ejes para realizar pruebas, pues las fuerzas no se distribuyen únicamente en el eje libre. No obstante, es necesario primero establecer que herramientas se utilizaran para identificar los parámetros, ya que como se mencionó es necesario tomar datos con todos los ejes desbloqueados, lo que implica estimar varios valores simultáneamente.

En este trabajo se ha decidido hacer uso del software MATLAB particularmente de la “System identification toolbox”, ya que al trabajar tanto la toma de datos como la identificación en un solo programa se simplifica el flujo de trabajo además de permitir el diseño, simulación e implementación de los controladores necesarios usando “SIMULINK”.

4.2.1. Preparación de datos

Para usar la herramienta primero es necesario contar con una representación estándar para los datos, estos puedes ser en el dominio de la frecuencia o del tiempo, a su vez se tienen 3 formas para representarlos.

- time table
- iddata
- idfrd

En este trabajó se usa únicamente iddata e idfrd por su facilidad para crear los objetos, así como su fácil estandarización. Para los datos en el tiempo se utiliza iddata, como se observó en **3-7** la herramienta permite almacenar las variables seleccionadas y adicionalmente el vector de tiempo, con estos se crea un objeto compuesto por salida, entrada y periodo de muestreo. A continuación se muestra el proceso para cargar los datos tomados, asignarlos a una variable y construir el objeto.

```
load('aero_abierto_Theta_0_10_n_Psi_0.mat')
t=lqr_rsp(1,:)';
ref_theta=lqr_rsp(2,:)';
ref_psi=lqr_rsp(5,:)';
theta=lqr_rsp(4,:)';
psi=lqr_rsp(7,:)';
Theta_0_10_n_Psi_0=iddata([theta,psi],[ ref_theta ref_psi] ,0.002);
```

Para el caso los datos tomados en el dominio de la frecuencia, se utiliza el objeto idfrd pese a que la estructura del comando es similar al anterior, los datos deben ser pre-procesados, pues se le debe indicar atenuación, desfase y frecuencia. A continuación se presenta un ejemplo en el que se inyectó una señal senoidal a la planta, como era de esperarse su salida presenta cierto desfase y atenuación, estas son medidas y almacenadas para seguir repitiendo este proceso con todas las frecuencias a probar hasta tener un vector de 2 columnas

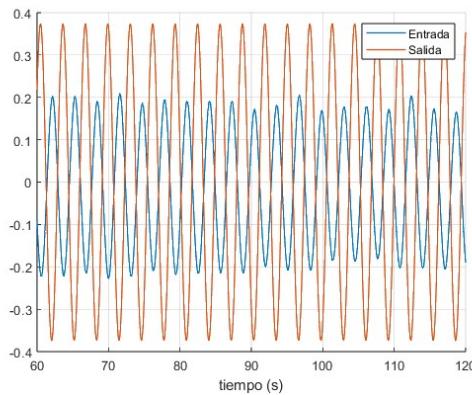


Figura 4-12: Ejemplo datos a procesar

```
AMP=res(:,1);
PHA=res(:,2);
W=[0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 10];
Ts=0.002;
response = AMP.*exp(1j*PHA*pi/180);
frdata = idfrd(response,W,Ts)
```

4.2.2. Procedimiento identificación

Se tienen disponibles varios modelos dependiendo la planta a identificar además de escoger entre un modelo lineal y uno no lineal, en este caso se utilizó modelo ARX, NLARX, Espacio de estados, función de transferencia y ecuaciones diferenciales.

Función de transferencia

La aproximación más básica toma el objeto data y se le da información sobre cantidad de ceros, polos y opcionalmente los delays.

```
sys=tfest(Theta_0_10_n_Psi_0,4,2)
```

Esta opción es interesante dado la naturaleza mimo del sistema y la información extraída de la modelización, es posible conocer los valores individuales de cada componente, para esto se busca fijar la estructura, crear un punto de inicialización de los parámetros y seleccionar qué parámetros se deben estimar. Esto se hace usando la función idtf, cuyo funcionamiento es similar a tf, pero permite definir sus parámetros como identificables, además al entrar en la estructura del sistema se crea un vector que determina que parámetros se deben buscar. Se presenta un ejemplo en el que se creó el sistema 2x2, se inicializaron los parámetros y se configuró para solo estimar los numeradores,

```
% Definir los parametros
Jp=0.0384;Jy=0.0432;Dp=0.800;Dy=0.318;
% Kpp=0.204;Kyy=0.072;Kyp=0.0219;Kpy=0.0068;
masa=1.3872; g=9.8; l=0.186; te=0.08726646;

% Crear las funciones de transferencia
sys1 = idtf(Kpp, [Jp+masa*l^2,Dp,+masa*g*l*sin(te)]);
sys2 = idtf(Kpy, [Jp+masa*l^2,Dp,+masa*g*l*sin(te)]);
sys3 = idtf(Kyp, [Jy+masa*l^2*cos(te)^2, Dy,0]);
sys4 = idtf(Kyy, [Jy+masa*l^2*cos(te)^2, Dy,0]);

% Combinar las funciones de transferencia
sys = [sys1, sys2; sys3, sys4];
% Fijar los parametros que no quieras estimar
sys.Structure(1,1).Denominator.Free=[false, false,false];
sys.Structure(1,2).Denominator.Free=[false, false,false];
sys.Structure(2,1).Denominator.Free=[false, false,false];
sys.Structure(2,2).Denominator.Free=[false, false]
```

El proceso de estimación es similar al anterior donde se utiliza tfest, pero esta vez el sistema definido como argumento, adicionalmente en caso de buscar refinar el modelo se puede utilizar la función pem cuyos argumentos son el sistema ya identificado y otro conjunto de datos.

```
sys_0_10 = tfest(Theta_0_10_Psi_0_8_p,sys);
m_0_10 = pem(Theta_8_10_Psi_0_8_p,sys_0_10)
```

Como dato importante al usar este tipo de estructuras, estas son normalizadas

automáticamente por MATLAB, al tener una función como la siguiente

$$\frac{K_{pp}}{J_p s^2 + D_p s + mgl}$$

Es presentada así:

$$\frac{K_{pp}/J_p}{s^2 + Dps/J_p + mgl \cos(\theta)/J_p}$$

Ceros y polos

Para casos específicos como la identificación de un sistema compuesto por 2 subsistemas, es posible que se conozca algunos polos o ceros y que además no sea posible separar los subsistemas para la identificación; es entonces cuando se puede utilizar el comando procest. Esta estructura permite especificar los componentes del sistema usando ganancias, constantes de tiempo y retardos, así como fijarlos. Para este primero se construye un objeto idproc, en este se especifica las características o tipo de sistema.

Opcion	Significado
PK	Polos reales
Z	Ceros
D	Retardo
I	Integradores
U	Polo complejos conjugados

Tabla 4-6: Opciones modelo procest

En este caso se definió un sistema 2x2 donde la salida 1 tiene componente con 3 polos, en los cuales 2 son complejos conjugados y uno es real; la salida 2 tiene 2 polos reales y un integrador.

```
% Definir el tipo de modelo

type = ["P3U", "P3U";
        "P2I", "P2I"];

proc_f_m = idproc(type);
```

Ahora se puede ingresar a la estructura del modelo para inicializar los parámetros en los valores y si es necesario seleccionar que valores se deben dejar fijo, es decir, no estimarlos.

```
% Asignar los valores conocidos de los polos
proc_f_m.Tp3 = [0.187620, 0.187620; 0, 0];
proc_f_m.Tp2 = [0, 0; 0.18762, 0.18762];

% Fijar los valores de los polos para que no sean estimados
proc_f_m.Structure(1,1).Tp3.Free = false;
proc_f_m.Structure(1,2).Tp3.Free = false;
proc_f_m.Structure(2,1).Tp2.Free = false;
proc_f_m.Structure(2,2).Tp2.Free = false
% estimar el modelo con las opciones configuradas
proc_f_m_est = procest(sys_mimo_2, proc_f_m)
```

La estimación final se hace de la misma forma que la función de transferencia con un objeto data (tiempo o frecuencia) y el sistema inicial.

$$G11(s) = \frac{kp}{(1 + 2 * Zeta * Tw * s + (Tw * s)^2)(1 + Tp3 * s)}$$

$$Kp = -0,043112$$

$$Tp1 = 9,3626e - 07$$

$$Tp2 = 0,18762$$

$$G22(s) = \frac{kp}{s(1 + Tp1 * s)(1 + Tp2 * s)}$$

$$Kp = -0,043112$$

$$Tp1 = 9,3626e - 07$$

$$Tp2 = 0,18762$$

Este objeto también puede ser convertido a la representación deseada:

```
zpk(proc_f_m_est) %Polo y cero
tf(proc_f_m_est) %Funcion de transferencia
ss(proc_f_m_est) %Espacio de estados
```

Espacio de estados

De forma similar a las funciones de transferencias, el proceso más básico consiste en especificar cuantos estados tiene el sistema, junto con los datos a utilizar, es opcional agregar un argumento adicional con las opciones en las que se puede entre otros escoger el método de búsqueda.

```
opt = ssestOptions('EnforceStability', true, 'SearchMethod', 'lm');
m_1 = ssest(aero_90_90_random_1, 8, opt)
```

Al usar este método se pierde una de las características más valiosas, los estados iniciales, por lo que se usó una estructura definida en la cual se pueden inicializar los valores y además escoger cuáles estimar.

```
%Definicion de la estructura
m=1.3872; g=9.8; l=0.186; theta=0.08726646;
A = [0 0 -mg/l sin(theta)/Jp+ ml^2 0 -Dp/Jp+ ml^2 0;
      0 0 0 0 0 -Dy/Jy+ml^2cos^2(theta) ];
B = [0 0 0 0 Kpp/Jp+ ml^2 Kpy/Jp+ ml^2;
      0 0 Kyp/y+ml^2cos^2(theta) Kyy/y+ml^2cos^2(theta) ];
C = [1 0 0 0;
      0 1 0 0];
D = [0 0;
      0 0];
K = zeros(4,2);
x0 = [0;0;0;0];
m = idss(A,B,C,D,K, 'Ts', 0);
```

```
%Fijar estructura
S = m.Structure;
S.A.Free = false;
S.B.Free(1,:) = false;
S.B.Free(2,:) = false;
S.C.Free = false;
S.D.Free = false;
S.K.Free = false;
```

```
m.Structure = s;
opt = ssestOptions;
%Incluir estados iniciales
opt.InitialState = idpar(x0);
opt.InitialState.Free = false;

%Estimacion
m = ssest(aero10_20_down,m,opt);
```

Adicionalmente, se tiene el enfoque de caja gris este permite identificar de forma precisa solo los parámetros en los que se está enfocada no obstante para este desarrollo no es hallaron ventajas sobre la identificación usando ssest, ya que este método también requiere plantear el sistema como un espacio de estados no obstante este se crea en otro archivo como una función y para escoger que parámetros identificar estos se seleccionan directamente sobre el modelo como entradas a la función.

```
function [A,B,C,D,K,x0] = myfunc(par,T)

% Detailed explanation goes here
m=1.3872; g=9.8; l=0.186; theta=0.08726646;
A = [0 0 0;
      0 0 0;
      -mgl sin(theta) /Jp+ ml^2 0 -Dp/Jp+ ml^2 0;
      0 0 -Dy/Jy+ml^2cos^2(theta)];
B = [0 0;
      0 0;
      par(1) par(2);
      par(3) par(4)];
C = [1 0 0 0;
      0 1 0 0];
D = [0 0;
      0 0];
K = zeros(4,2);
x0 = [0;0;0;0];
end
```

Después de tener la función definida, en archivo principal se definen los valores en los que se inicializan los parámetros y se crea un objeto idegrey. Finalmente, la identificación se realiza con el comando greyest cuyos argumentos son los datos y el objeto

```

par = [Kpp/Jp+masa*l^2;Kpy/Jp+masa*l^2;
Kyp/Jy+masa*l^2;Kyy/Jy+masa*l^2];
aux = {};
T = 0;
m = idgrey('myfunc_2',par,'c',aux,T);
m_est = greyest(aero10_20_down,m);

```

Este método es usado como aproximación inicial a la estimación de caja gris para entender de forma sencilla la identificación no lineal.

Identificación NO lineal

Este proceso permite partir de las ecuaciones no lineales 2-1, identificar los coeficientes, además permite escoger condiciones iniciales e inicializar parámetros. Se debe expresar el modelo en un espacio de estados no lineal, presentado en 2-2. Este proceso se realiza, crean una función aparte cuyos argumentos son los estados iniciales, las entradas y los valores a estimar; las salidas son los estados y la salida del sistema (θ y ψ). En este ejemplo se estima únicamente las ganancias de los voltajes, la fricción y el momento de inercia de yaw.

```

function [dx, y]=AERO_non_lin_pitch_yaw_full(~,x,u, Kpp, Kyy, Kpy,
    ↪ Kyp,Jy_F ,Dy,varargin)
Jp=0.0219;
Dp=0.04;
g=9.8;
m=1.0750;
l=0.1561;
dx1=x(3);
dx2=x(4);
dx3=((Kpp*u(1))+(Kpy*u(2))-(Dp*x(3))-(m*l^2*(x(4)^2)*sin(x(1))*cos(x
    ↪ (1))) - (m*g*l*cos(x(1))))/(0.105);
dx4=(Kyy*u(2)+Kyp*u(1)-(Dy*x(4))+(2*m*l^2*x(3)*x(4)*sin(x(1))*cos(x
    ↪ (1))))/(Jy_F*(cos(x(1))^2));
dx=[dx1;dx2;dx3;dx4];
y=[x(1) x(2)];

```

En seguida se crea el objeto idnlgrey, este contiene el nombre de la función, el orden del sistema y los estados iniciales

```

FileName = 'AERO_non_lin_pitch_yaw_full'; % Archivo de la función del
    ↪ modelo

```

```

Order = [2 2 2]; % Orden del sistema [ny nu nx]
Parameters = [0.003; -0.041; ]; % Valores iniciales de los parametros
Is=[-0.3 ;10;0;0];
nlgr = idnlgrey(FileName, Order, Parameters, Is);

% Estimar los parametros
nlgr_Theta_8_12_nn_Psi_0 = nlgreyest(Theta_8_12_nn_Psi_0, nlgr); %

```

Modelo ARX

Otro tipo de modelo disponible es el ARX (AutoRegressive with Exogenous inputs), este caracteriza por su capacidad para describir la relación entre una serie de variables de entrada (exógena) y la salida.

$$y(t) = a_1y_{(t-1)} + a_2y_{(t-2)} + \dots + a_ny_{(t-n)} + b_1u_{(t-1)} + b_2u_{(t-2)} + \dots + b_mu_{(t-m)} + \varepsilon_t$$

Donde (u_t) es la entrada en el tiempo (t), (b_i) son los coeficientes de entrada, n es el número de parámetros de salida y m el de las entradas. Al asumir el ruido blanco ε como 0, el modelo se puede expresar de la siguiente forma.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1z^{m-1} + b_2z^{m-2} + \dots + b_m}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - \dots - a_nz^{-n}}$$

Para la estimación de este modelo se debe especificar el orden, está compuesto por auto-regresión, entradas y retrasos, después se utiliza la función arx cuyos argumentos son los órdenes y los datos a usar. Adicionalmente, el comando present permite pero los polinomios.

```

% Define el orden del modelo [na nb nk]
na = [2 2; 2 2]; % Orden de auto-regresion
nb = [1 1; 1 1]; % Orden de las entradas
nk = [1 1; 1 1]; % Retrasos de entrada

% Crea el modelo ARX
M1 = arx(data_train_1,[na nb nk]);

% Muestra el modelo
present(M1)

```

Modelo NLARX

Como su nombre lo indica, este modelo parte del ARX, pero permite usar regresores no lineares de tipo polinomial, periódico y personalizados, además la función de salida del modelo se puede escoger, entre las opciones se tiene:

- Ondaletas
- Función lineal
- Regresión gaussiana
- Árbol de regresión
- Sigmoide
- Árbol binario
- Máquina de soporte vectorial
- Personalizada

El proceso consiste primero se definen los regresores, para eso se especifica primero el tipo, enseguida las salidas y las entradas involucradas, si se trata de regresores lineales se especifican los retrasos, si son personalizados, se describe el regresor.

```
L = linearRegressor({ 'y1' , 'y2' , 'u1' , 'u2' }, {[1:2], [1:2] , [0:2], [0:2] })
% Crear los regresores personalizados
C1 = customRegressor('y1', [1] , @(y)sign(y));
C2 = customRegressor('y2', [ 1 ] , @(z)sign(z));
% Agrupar los regresores en un vector
R = [L,C1,C2]
```

En este ejemplo se definieron los siguientes regresores:

- | | | |
|---------------|---------------|---------------------|
| ■ $y1(t - 1)$ | ■ $u1(t)$ | ■ $u2(t - 1)$ |
| ■ $y1(t - 2)$ | ■ $u1(t - 1)$ | ■ $y2(t - 2)$ |
| ■ $y2(t - 1)$ | ■ $u1(t - 2)$ | ■ $sign(y1(t - 1))$ |
| ■ $y2(t - 2)$ | ■ $u2(t)$ | ■ $sign(y2(t - 2))$ |

Ahora la selección de la función de salida se realiza en el mismo comando de la identificación nlarx, cuyos otros argumentos son los datos y los regresores; para este ejemplo se utilizó el sigmoide.

```
M1=nlarx(data_train_1,R,idSigmoidNetwork)
```

Validación de resultados

Se tienen varias herramientas, sin embargo, la más usada es el comando, compare debido a que permite comparar un objeto iddata, con los modelos identificados sean lineales o no. Este grafica los resultados esperados sobre los obtenidos, en este caso las dos salidas, adicionalmente ofrece una estimación numérica de la similitud alcanzada.

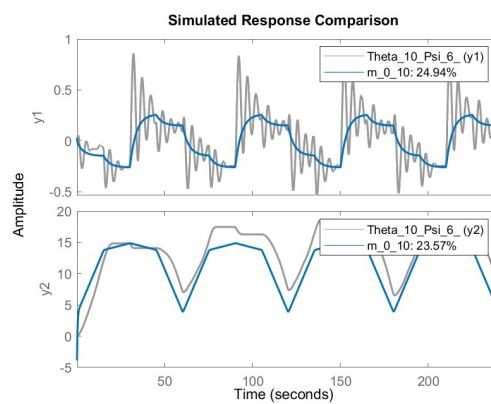


Figura 4-13: Ejemplo ventana compare

Capítulo 5

Estimación

5.1. Lazo abierto

5.1.1. Dominio del tiempo

Para esta parte del proceso se inició utilizando los datos de lazo abierto. Inicialmente, se propuso simplificar la estimación reduciendo parámetros, para estos se usó los datos en los que el voltaje del motor de yaw es 0 **3-11** de esta forma el modelo se redujo a solo 2 ecuaciones. Sin embargo, no es posible realizar la estimación, pues se obtiene un error debido a la estabilidad, este mensaje de error sugiere que la función de pérdida inicial no se pudo calcular correctamente y que el modelo inicial especificado podría ser inestable. Este mismo procedimiento se repitió con todos los datos tomados, pero evidentemente el error no permitía proceder.

Para estudiar el problema de forma particular, se plantea estimar únicamente una función de transferencia, es decir, tomar el par voltaje pitch y salida pitch; se escogieron los siguientes datos debido a su forma similar a la esperada por un sistema de segundo orden

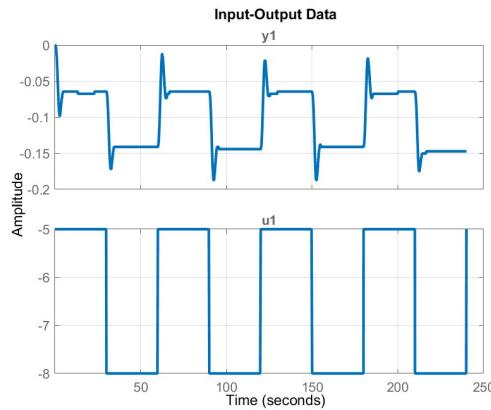
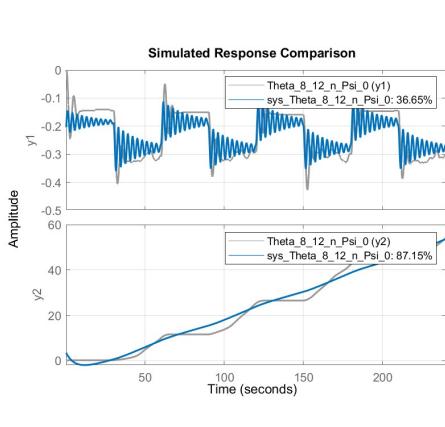


Figura 5-1: Datos estimación solo pitch

A pesar de presentar ese comportamiento, no fue posible obtener algún modelo, así que las siguientes pruebas se realizaron estimando el sistema completo con las 4 ecuaciones. Primero estimando solo numeradores y teniendo como valores iniciales los del fabricante. Se presentan los resultados más significativos, para las mejores tomas de datos, es decir, aquellas donde la zona muerta no es altamente significativa y el sistema tiene un comportamiento predecible.



$$y_1 : \frac{0,1016}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

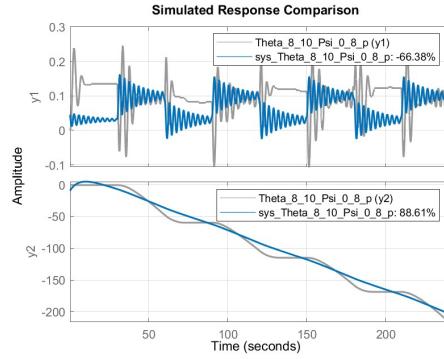
$$y_2 : \frac{-0,004304}{s^2 + 0,175s}$$

From input “ u_2 ” to output...

$$y_1 : \frac{0,2124}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

$$y_2 : \frac{0,004304}{s^2 + 0,175s}$$

From input “ $u1$ ” to output...



$$y_1 : \frac{0,01676}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

$$y_2 : \frac{-0,01799}{s^2 + 0,1752s}$$

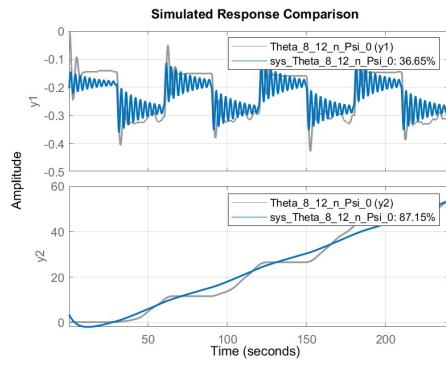
From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{0,03411}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

$$y_2 : \frac{-8,504 \times 10^{-5}}{s^2 + 0,1752s}$$

Figura 5-2: Identificación solo numerador

From input “ $u1$ ” to output...



$$y_1 : \frac{0,01676}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

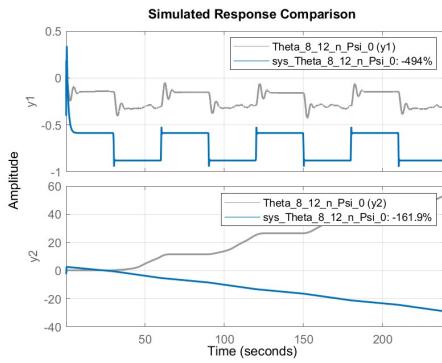
$$y_2 : \frac{-0,01799}{s^2 + 0,1752s}$$

From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{0,03411}{s^2 + 0,1275s + 4,391}$$

$$y_2 : \frac{-8,504 \times 10^{-5}}{s^2 + 0,1752s}$$

Como se observa, la identificación permitió mejorar la cercanía al estado estacionario; sin embargo, es claro que el sistema planteado oscila mucho más que el real; además, como dato curioso, se tuvieron los mismos resultados para dos experimentos diferentes. Por esto en estas pruebas ahora se trata de hallar solo los denominadores.



$$y_1 : \frac{11,58}{s^2 + 10,84s + 158}$$

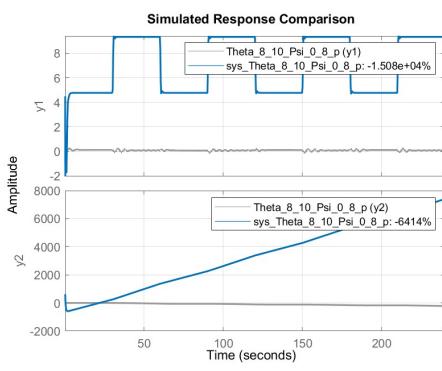
$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 833,6}$$

From input “u2” to output...

$$y_1 : \frac{11,58}{s^2 + 19,9s + 19,02}$$

$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 15,87s}$$

From input “u1” to output...



$$y_1 : \frac{11,58}{s^2 + 10,36s + 158,5}$$

$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 1180s}$$

From input “u2” to output...

$$y_1 : \frac{11,5}{s^2 + 20,73s + 11,99}$$

$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 14,11s}$$

From input “ $u1$ ” to output...

$$y_1 : \frac{11,58}{s^2 + 11,87s + 19,39}$$

$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 2,955s}$$

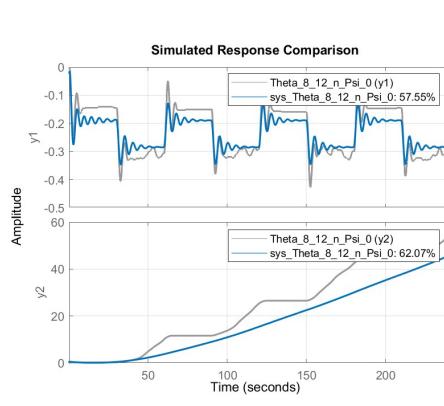
From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{11,58}{s^2 + 5,799s + 27,51}$$

$$y_2 : \frac{11,01}{s^2 + 01,516 * 10^4 s}$$

Figura 5-3: Identificación solo denominador

Ya que los resultados no son satisfactorios, se propone identificar todos los parámetros.



$$y_1 : \frac{0,03546}{s^2 + 0,3435s + 1,497}$$

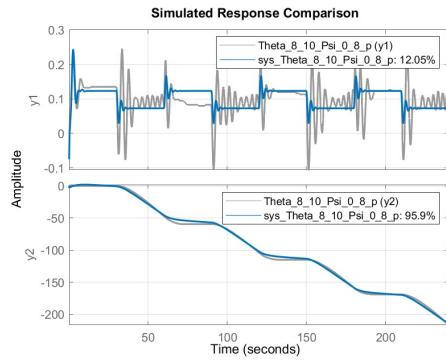
$$y_2 : \frac{-0,0004751}{s^2 + 0,01764}$$

From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{-0,03745}{s^2 + 0,3428s + 1,519}$$

$$y_2 : \frac{-36,24}{s^2 + 1836s}$$

From input “ $u1$ ” to output...



$$y_1 : \frac{0,02989}{s^2 + 0,4854s + 1,545}$$

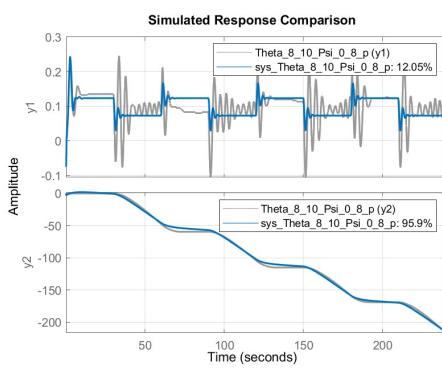
$$y_2 : \frac{-0,005339}{s^2 + 0,1705s}$$

From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{-0,02866}{s^2 + 20,4228s + 1,577}$$

$$y_2 : \frac{-2,837}{s^2 + 1140s}$$

From input “ $u1$ ” to output...



$$y_1 : \frac{0,02655}{s^2 + 1,255s + 1,725}$$

$$y_2 : \frac{-73,67}{s^2 + 3556s}$$

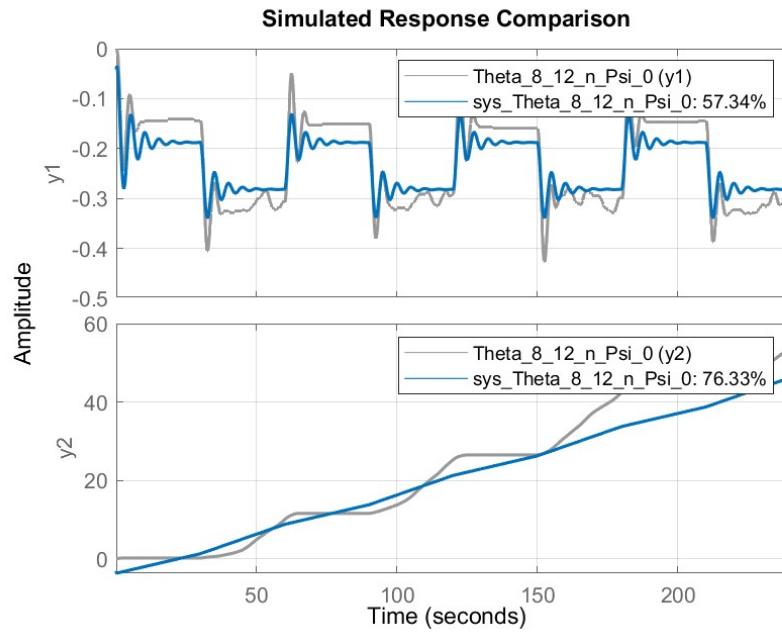
From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{-0,05255}{s^2 + 1,099s + 5,182}$$

$$y_2 : \frac{-0,04479}{s^2 + 0,2387s}$$

Figura 5-4: Identificación todos los parámetros función de transferencia

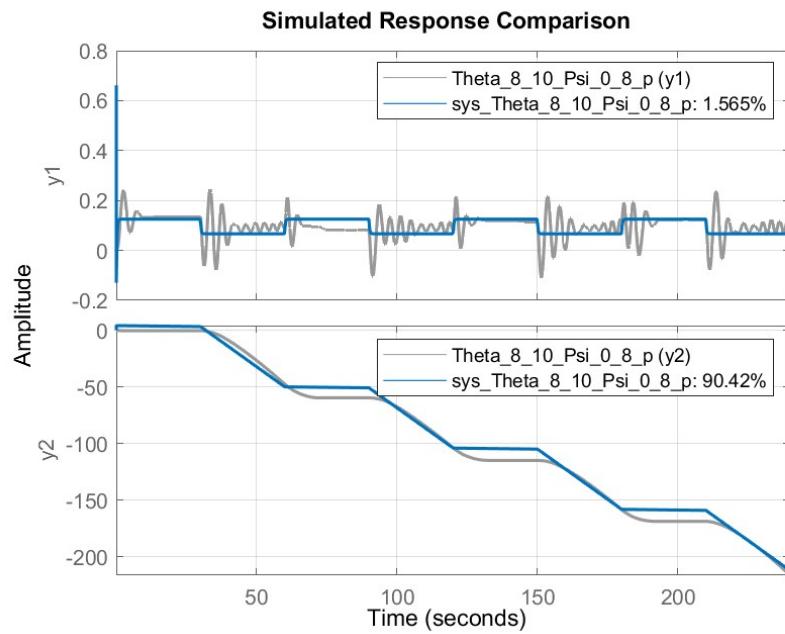
Este proceso se repitió para espacio de estados, sin embargo, por la estructura propia los valores a identificar se encuentran en todas matrices A y B, por lo tanto, se deben buscar todos los parámetros.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,634 & 0 & -0,4057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,03837 & 26,09 \\ -8603 & 11,01 \end{pmatrix}$$

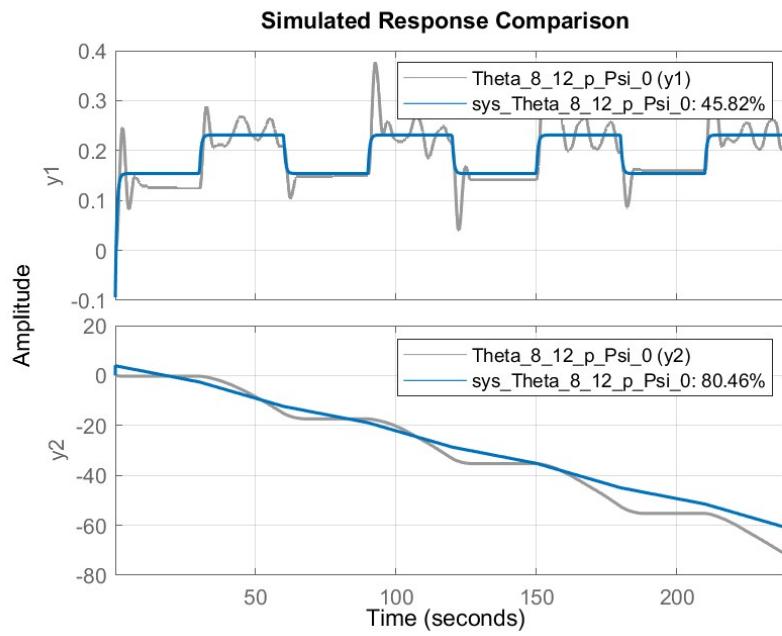
Figura 5-5: Resultados ss Theta -8 -12 v Psi 0 8 v



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1,492 \times 10^{10} & 0 & -8,283 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,054 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2,872 \times 10^8 & 26,09 \\ -8,294 \times 10^5 & 11,01 \end{pmatrix}$$

Figura 5-6: Resultados ss Theta 8 10 v Psi 0 8 v



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4,468 \times 10^9 & 0 & -9,191 \times 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,584 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,981 \times 10^7 & -5,005 \times 10^7 \\ -5,784 \times 10^5 & -3,443 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Figura 5-7: Resultados ss Theta 8 12 v Psi 8 12 v

Es evidente como si bien hay un acercamiento a las curvas, no es posible separar parámetros de forma individual, además la variabilidad de los órdenes dificultad realizar una inferencia.

Adicionalmente, se busca hacer un primer acercamiento a la identificación usando la expresión no lineal.

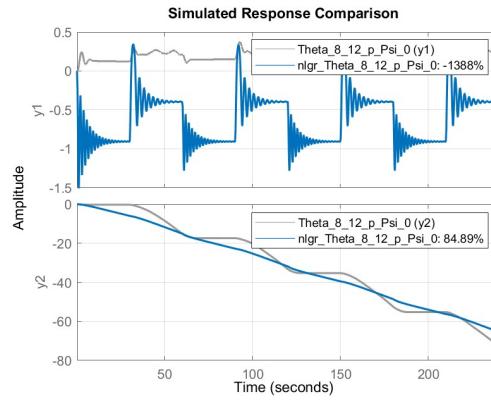


Figura 5-10: Resultados id no lineal Theta 8 12 Psi 0

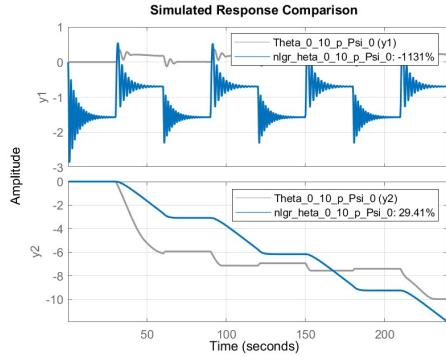


Figura 5-8: Resultados id no lineal Theta 0 10 Psi 0

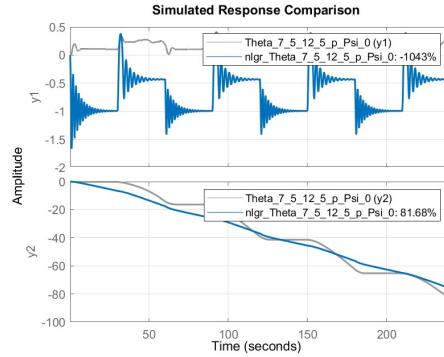


Figura 5-9: Resultados id no lineal Theta 7.5 12.5 Psi 0

Únicamente se encontraron 3 modelos, pues se presenta un error, ya que la suma de los valores de la función al cuadrado en el punto inicial es Inf o NaN. Los únicos datos que no generan ese problema con aquellos donde Psi es 0.

5.1.2. Dominio de la frecuencia

Usando la metodología presentada en anteriormente se construyo el objeto idfrd necesario (2x2) y se realizó la identificación en funciones de transferencia. Antes de presentar los resultados es valioso comentar que los datos se tomaron tratando de usar la entrada más grande, sin embargo, esta no debía producir que el eje theta se choque.

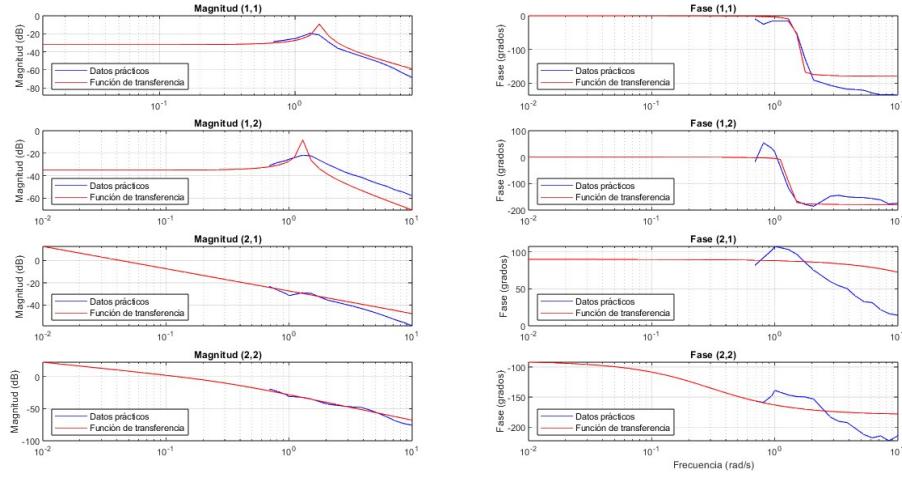


Figura 5-11: Identificación en frecuencia

Sin embargo, para estos resultados solo respeto la forma de las ecuaciones, más no el contenido de los denominadores, es decir, las funciones de una misma salida no comparten, denominadores.

From input “ $u1$ ” to output...

$$y_1 : \frac{0,05872}{s^2 + 0,09433s + 2,378}$$

$$y_2 : \frac{-1,367}{s^2 + 31,81s}$$

From input “ $u2$ ” to output...

$$y_1 : \frac{0,02955}{s^2 + 0,05866s + 1,666}$$

$$y_2 : \frac{0,04}{s^2 + 0,3004s}$$

5.1.3. Parámetros individuales

Para construir otra estimación se parte de las funciones de transferencia y se transforma para llevarla a una forma en la cual se puedan relacionar parámetros con su comportamiento. A diferencia de las pruebas propuestas por el fabricante, estas se realizaron solo con impulsos como entrada y con los dos ejes desbloqueados.

Psi:

$$G(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

$$\frac{K_{yp}}{(J_{eqp-y} + ml_{cm}^2(\cos^2 \bar{\theta}))s^2 + D_y s}$$

$$\frac{K_{yp}/D_y}{\left(\frac{J_{eqp-y} + ml_{cm}^2(\cos^2 \bar{\theta})}{D_y}\right)s^2 + s}$$

$$\frac{K_{yp}/D_y}{s\left(\left(\frac{J_{eqp-y} + ml_{cm}^2(\cos^2 \bar{\theta})}{D_y}\right)s + 1\right)}$$

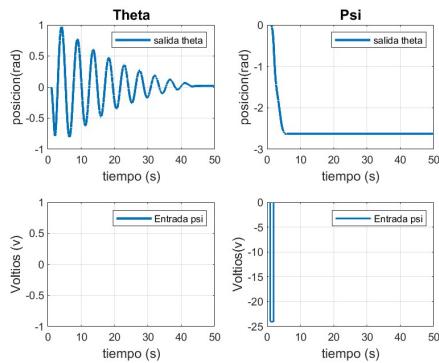
Theta:

$$G(s) = K \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{K_{pp}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)s^2 + D_p s + mgl_{cm} \sin \bar{\theta}}$$

$$\frac{K_{pp}/(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}{s^2 + \frac{D_p}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}s + \frac{mgl_{cm} \sin \bar{\theta}}{(J_{eqp-p} + ml_{cm}^2)}}$$

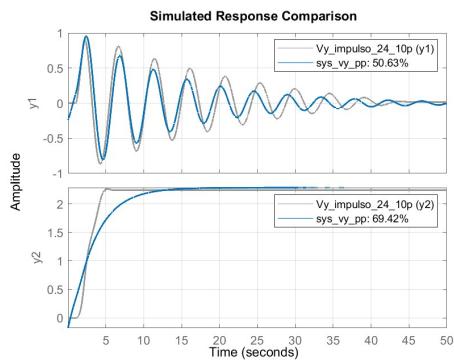
Haciendo uso de las ecuaciones expuestas en 4.1 se identifican los componentes de los denominadores y el numerador se encuentra con la identificación tfest.



$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0,05796}{s^2 + 0,1553s + 2,019}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,008925}{s^2 + 0,3272s}$$

Figura 5-12: Impulso positivo V_y

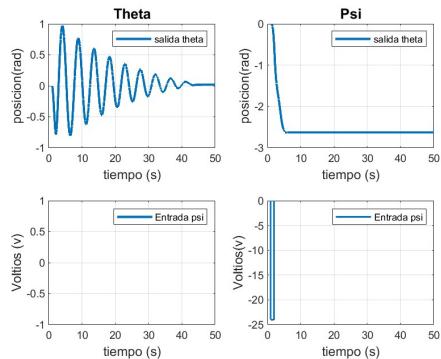


$$J_p = -0,0076$$

$$Dp = 0,0029$$

$$\tau_y = 3,056$$

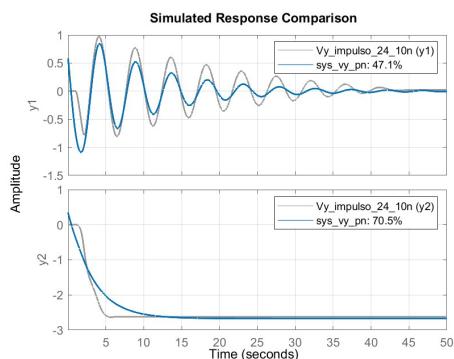
Figura 5-13: Resultados impulso Vy



$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0,01158}{s^2 + 0,202s + 1,764}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,005578}{s^2 + 0,3257s}$$

Figura 5-14: Impulso negativo Vy



$$J_p = -0,0024$$

$$Dp = 0,0048$$

$$\tau_y = 3,07$$

Figura 5-15: Resultado impulso negativo Vy

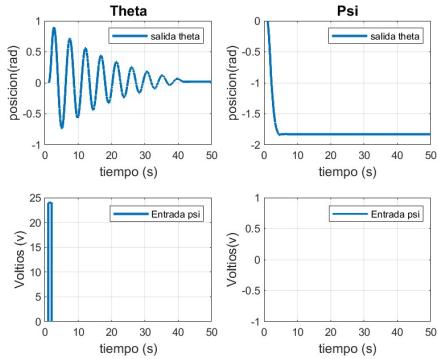


Figura 5-16: Impulso positivo V_p

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0,03723}{s^2 + 0,1759s + 1,765}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{0,009937}{s^2 + 0,4088s}$$

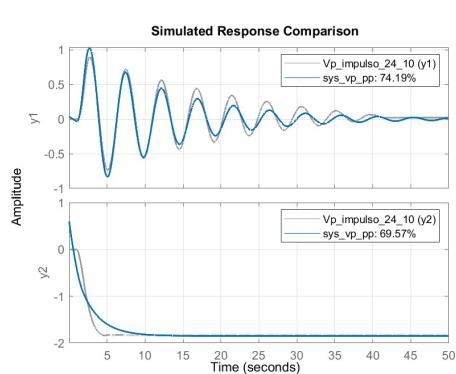


Figura 5-17: Resultado impulso negativo V_p

$$J_p = 0,01635$$

$$Dp = 0,0071$$

$$\tau_y = 2,446$$

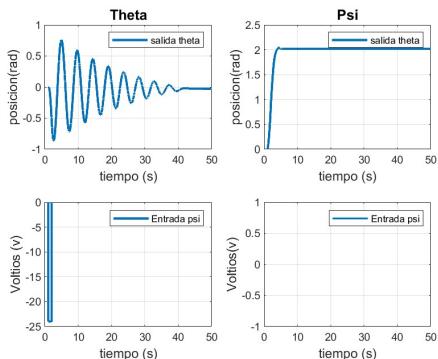
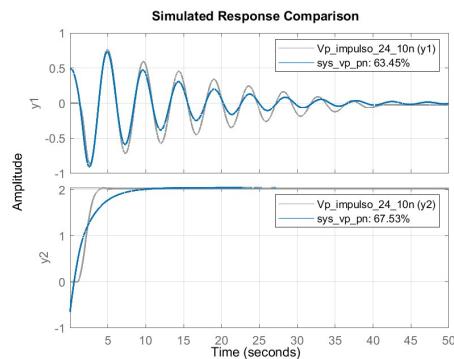


Figura 5-18: Impulso negativo V_p

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0,02269}{s^2 + 0,202s + 1,764}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{0,005578}{s^2 + 0,3257s}$$



$$J_p = -0,0594$$

$$Dp = -0,0061$$

$$\tau_y = 2,4$$

Figura 5-19: Resultado impulso negativo V_p

Un problema que se observa a primera vista son los valores que toma J_p , pues físicamente estos no deberían ser negativos.

5.2. Lazo cerrado

Una de las conclusiones que se pueden extraer de los resultados en lazo abierto, es la necesidad de cerrar el lazo para evitar problemas con la estabilidad, ya sea hallando la función en lazo cerrado o trabajando directamente con la señal de control, se decidió pasar a realizar la estimación directamente con un controlador, como se vio en **3-59** los montajes sin estos generan una señal que se satura, choques o directamente no converge.

5.2.1. LQR

El controlador que se seleccionó fue el LQR(Regulador Cuadrático Lineal) propuesto por el fabricante. Este presenta un diseño en el que se toman en cuenta todas las funciones de transferencia y su forma matricial permite modificarlo fácilmente. Una de las principales ventajas es su capacidad para manejar múltiples señales de entrada y salida de manera más eficiente, optimizando el rendimiento global del sistema. Los LQR están diseñados para minimizar una función de costo cuadrática, lo que les permite considerar tanto el estado actual del sistema como las señales de control para determinar la acción más óptima. Esto resulta en una mejor respuesta transitoria y un control más robusto frente a perturbaciones y cambios en el modelo del sistema. Además, aunque los controladores PID son conocidos por su simplicidad y facilidad de implementación, los LQR proporcionan

una solución más adaptada y eficiente para sistemas MIMO, donde la interacción entre múltiples variables de control es una consideración crítica.

Función de transferencia

Aplicando los aprendizajes anteriores se plantea estimar las funciones de transferencia simultáneamente, con la consideración que las entradas son las acciones de control .

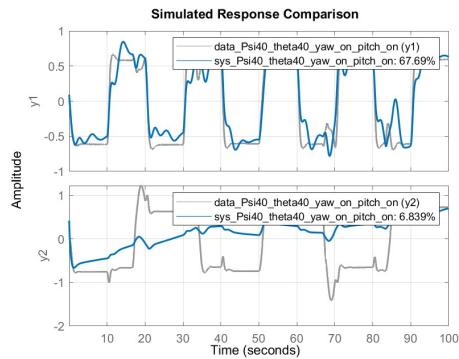


Figura 5-20: sys Psi40 theta40 yaw on pitch on

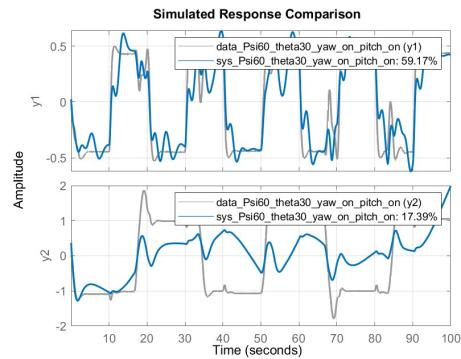


Figura 5-21: sys Psi60 theta30 yaw on pitch on

Con este proceso no se obtuvieron los resultados esperados a un así se siguió la metodología y para llegar a los modelos y comparar. ?? Una primera hipótesis indica que utilizar la señal de control como entrada puede no ser lo correcto debido a que el modelo sigue siendo inestable, una solución es identificar usando un controlador que puede ser integrado en el modelo como lo es el PID, aunque primero se exploran otras técnicas de estimación.

Modelo No lineal

Haciendo uso de la metdología ya mensionada se tratá de llegar a un modelo no lineal sin embargo estos convergen bastante lejos de los esperado.Nonguna de las frecuencias de oscilación, coeficientes de caimineto o valores finales son los correctos.

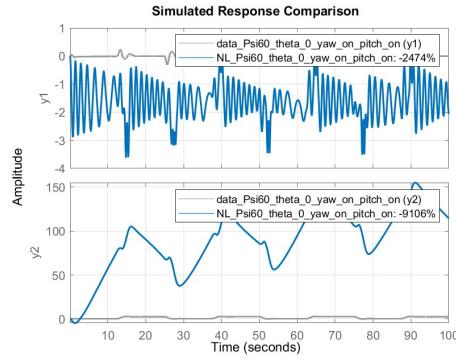


Figura 5-22: Sistema Psi 1.047 rad Theta 0 rad

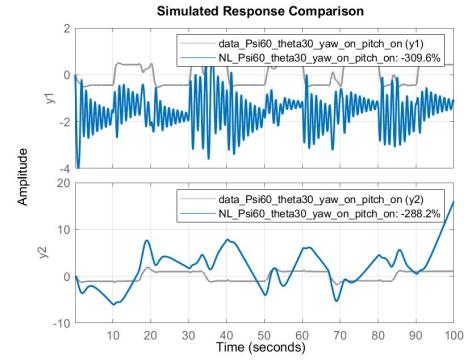


Figura 5-23: Sistema Psi 1.047 rad Theta 0.5235 rad

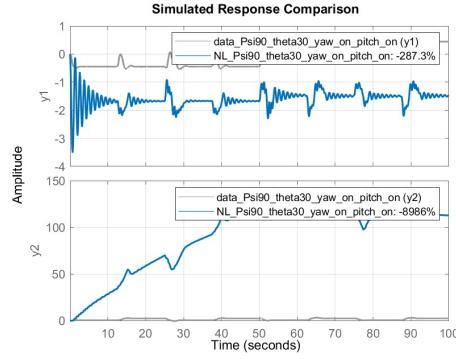


Figura 5-24: Sistema Psi 1.570 rad Theta 0.5235 rad

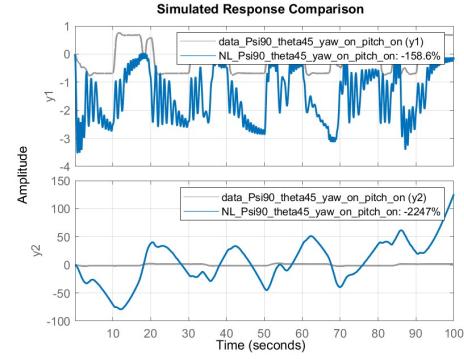


Figura 5-25: Sistema Psi 1.570 rad Theta 0.785 rad

ARX

Como se planteó en 4.2.2 este modelo está expresado en regresores lineales y a su vez estos se relacionan con los retrasos; por esto se realizó la discretización del sistema lineal.

Sabiendo que las 4 funciones son de segundo orden 2-9 se obtiene una forma aproximada de cuales pueden ser sus regresores

$$\frac{\theta(z)}{V_m(z)} = \frac{K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} + a_z^{-2}} = \frac{z^{-1}(K_1 + K_2 z^{-1})}{1 - a_1 z^{-1} + a_z^{-2}}$$

Con esta información se realiza una aproximación a la configuración que se debe tener para realizar la identificación usando matlab.

- Retrazos $nk = \{1 \quad 1; 1 \quad 1\}$

- Auto regresión(datos pasados de la salida) $na = \{2 \quad 2; 2 \quad 2\}$
- Entradas(datos pasados de la entrada) $nb = \{1 \quad 1; 1 \quad 1\}$

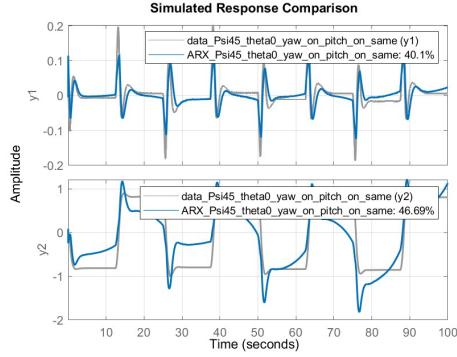


Figura 5-26: ARX Psi 0.785 rad theta 0 0

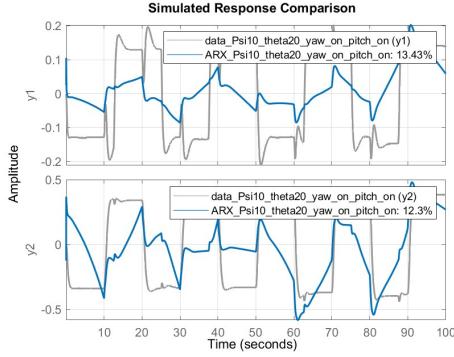


Figura 5-27: ARX Psi 0.1745 rad theta 0.349 rad

NLARX

Como se mencionó en 4.2.2 es necesario contar con regresores no lineales, por ende se realiza la discretización a las ecuaciones obtenidas de la modelización 2-1 Utilizando diferencia atrás partimos de

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta[k] - \theta[k-1]}{T}$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\theta[k] - 2\theta[k-1] + \theta[k-2]}{T^2}$$

Sin embargo para la derivada se usa la siguiente expresión que no contiene términos del presente

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\theta[k-1] - \theta[k-2]}{T} - 4x + 5$$

Pitch

$$ml_{mc}^2 \ddot{\theta} + J_{eq-p} \ddot{\theta} + ml_{mc}^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + mgl_{mc} \cos \theta = K_{pp}V_p + K_{py}V_y - Dp\dot{\theta}$$

Remplazando

$$(ml_{mc}^2 + J_{eq-p}) \left(\frac{\theta[k] - 2\theta[k-1] + \theta[k-2]}{T^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& ml_{mc}^2 \left(\frac{\psi[k-1] - \psi[k-2]}{2T} \right)^2 \sin 2\theta[k-1] + mgl_{mc} \cos \theta[k-1] \\
& = K_{pp}V_p[k] + K_{py}V_y[k] - Dp \left(\frac{\theta[k-1] - \theta[k-2]}{T} \right)
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\frac{ml_{mc}^2}{T^2} \theta[k] - \frac{2ml_{mc}^2}{T^2} \theta[k-1] + \frac{ml_{mc}^2}{T^2} \theta[k-2] + \frac{ml_{mc}^2}{2T^2} \sin(2\theta)(k-2)(\psi[k-1])^2$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ml_{mc}^2}{2T^2} \sin(2\theta)(k-2)(2\psi[k-1]\psi[k-2]) + \frac{(ml_{mc}^2)}{2T^2} \sin(2\theta)(k-2)(\psi(k-2)^2) + \\
& mgl_{cm} \cos[k-1] - K_{pp}V_p[k] - K_{py}V_y[k] + \frac{D_p}{T} \theta[k-1] - \frac{D_p}{T} \theta[k-2] = 0
\end{aligned}$$

Agrupar

$$\begin{aligned}
& \theta[k] \left(\frac{ml_{cm}^2}{T^2} \right) + \theta[k-1] \left(\frac{-2ml_{cm}^2}{T^2} + \frac{D_p}{T} \right) + \\
& \theta[k-2] \left(\frac{ml_{cm}^2}{T^2} - \frac{D_p}{T} \right) + mgl_{cm} \cos \theta[k-1] + \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](\psi[k-1]^2) - \\
& \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](2\psi[k-1]\psi[k-2]) + \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](\psi[k-2]^2) \\
& - K_{pp}V_p[k] - K_{py}V_y[k] = 0
\end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned}
\theta[k] = & -(\theta[k-1] \left(\frac{-2ml_{cm}^2}{T^2} + \frac{D_p}{T} \right) + \theta[k-2] \left(\frac{ml_{cm}^2}{T^2} - \frac{D_p}{T} \right) + mgl_{cm} \cos \theta[k-1] + \\
& \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](\psi[k-1]^2) - \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](2\psi[k-1]\psi[k-2]) + \\
& \frac{ml_{cm}^2}{2T^2} \sin 2\theta[k-2](\psi[k-2]^2) - K_{pp}V_p[k] - K_{py}V_y[k]) / \left(\frac{ml_{cm}^2}{T^2} \right)
\end{aligned}$$

Regresores

- $\theta[k - 1]$
- $\theta[k - 2]$
- $\cos \theta[k - 1]$
- $\sin 2\theta[k - 2] \cdot \psi[k - 1] \cdot \psi[k - 2]$
- $\sin 2\theta[k - 2] \cdot \psi[k - 2]^2$
- $V_p[k - 1]$
- $V_y[k - 1]$

Yaw

$$(ml_{mc}^2 \cos^2 \theta + J_{eq-y}) \ddot{\psi} - 2ml_{mc}^2 \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = K_{py} V_p + K_{yy} V_y - D_y \dot{\psi}$$

$$\begin{aligned} & (ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + J_{eq-y}) \left(\frac{\psi[k] - 2\psi[k - 1] + \psi[k - 2]}{T^2} \right) \\ & - 2ml_{mc}^2 \left(\frac{\psi[k - 1] - \psi[k - 2]}{T} \right) \left(\frac{\theta[k - 1] - \theta[k - 2]}{T} \right) \sin \theta[k] \cos \theta[k] \\ & = K_{py} V_p[k] + K_{yy} V_y[k] - D_y \left(\frac{\psi[k - 1] - \psi[k - 2]}{T} \right) \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} & \psi[k] \left(\frac{ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + J_{eq-y}}{T^2} \right) + \psi[k - 1] \left(-\frac{2ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + 2J_{eq-y}}{T^2} + \frac{D_y}{T} \right) \\ & + \psi[k - 2] \left(\frac{ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + J_{eq-y}}{T^2} - \frac{D_y}{T} \right) \\ & - ml_{mc}^2 \sin(2\theta[k - 1]) (\psi[k - 1]\theta[k - 1] - \psi[k - 1]\theta[k - 2] - \psi[k - 2]\theta[k - 1] + \psi[k - 2]\theta[k - 2]) \\ & - K_{py} V_p[k] - K_{yy} V_y[k] = 0 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \psi[k] &= -(\psi[k - 1] \left(-\frac{2ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + 2J_{eq-y}}{T^2} + \frac{D_y}{T} \right) + \\ & \psi[k - 2] \left(\frac{ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k - 1] + J_{eq-y}}{T^2} - \frac{D_y}{T} \right) - \end{aligned}$$

$$ml_{mc}^2 \sin(2\theta[k - 1]) (\psi[k - 1]\theta[k - 1] - \psi[k - 1]\theta[k - 2] - \psi[k - 2]\theta[k - 1] + \psi[k - 2]\theta[k - 2])$$

$$-K_{py}V_p[k] - K_{yy}V_y[k]) \left(\frac{T^2}{ml_{mc}^2 \cos^2 \theta[k-1] + J_{eq-y}} \right)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \psi[k] = & -(\psi[k-1] \left(-2 + \frac{D_y T}{ml_{mc}^2 \cos^2[\theta[k-1]] + J_{eq-y}} \right) + \\ & \psi[k-2] \left(1 + \frac{D_y T}{ml_{mc}^2 \cos^2[\theta[k-1]] + J_{eq-y}} \right) + \\ & \left(\frac{T^2}{ml_{mc}^2 \cos^2[\theta[k-1]] + J_{eq-y}} \right) (-K_{py}V_p[k] - K_{yy}V_y[k]) + \\ & \left(\frac{-ml_{mc}^2 \sin(2\theta[k-1])}{ml_{mc}^2 \cos^2[\theta[k-1]] + J_{eq-y}} \right) \end{aligned}$$

$$(\psi[k-1]\theta[k-1] - \psi[k-1]\theta[k-2] - \psi[k-2]\theta[k-1] + \psi[k-2]\theta[k-2])$$

Sin embargo, este conjunto de regresores no se puede usar, pues generan respuestas no finitas.

5.2.2. PID

Usando los datos del controlador PID se tienen dos opciones, primero trabajar usando la acción de control como entrada o identificación, el bloque equivalente al producto del controlador y la planta en lazo cerrado para poder utilizar la referencia como entrada.

Utilizando la experiencia acumulada se decidió usar el segundo enfoque para NO identificar un sistema inestable. Es entonces necesaria replantear las características de la función de transferencia que se va a estimar. El controlador tiene la forma

$$P + \frac{I}{s} + Ds = \frac{Ds^2 + Ps + I}{s}$$

la planta esta forma:

$$\frac{Kpp}{J_ps^2 + D_ps + mgl \sin \bar{\theta}}$$

Ahora se halla el producto y su realimentación.

$$\frac{K_{pp}Ds^2 + K_{pp}Ps + K_{pp}I}{J_ps^3 + D_ps^2 + mgls}$$

$$\frac{K_{pp}Ds^2 + K_{pp}Ps + K_{pp}I}{Jps^3 + Dps^2 + mgls + K_{pp}Ds^2 + K_{pp}Ps + K_{pp}I}$$

Simplificando el resultado y ajustándolo a la forma necesaria se tiene:

$$\frac{\frac{K_{pp}D}{J_p}s^2 + \frac{K_{pp}P}{J_p}s + \frac{K_{pp}I}{J_p}}{s^3 + s^2\frac{(D_p+K_{pp}D)}{J_p} + s\frac{(mgl+K_{pp}P)}{J_p} + \frac{K_{pp}I}{J_p}}$$

Esta representación es muy útil porque partiendo de una función de transferencia ajustada, se puede realizar la estimación término a término. Después de realizar la estimación estos son los resultados:

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{1,84s^2 - 0,2405s + 2,694}{s^3 + 1,781s^2 + 2,512s + 2,704}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-0,9504s^2 + 0,4851s + 2,669}{s^3 + 2,905s^2 + 4,662s + 4,222}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0,7613s^2 - 1,078s + 0,02571}{s^3 + 1,014s^2 + 2,206s + 1,205}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,1503s^2 + 3,633s + 2,002}{s^3 + 2,07s^2 + 4,007s + 2,125}$$

La primera dificultad está en los términos de menor grado del numerador y el denominador, se esperaba que estos fueran iguales y no lo son. Además, tomado únicamente la expresión teórica del numerador

$$\frac{K_{pp}D}{J_p}s^2 + \frac{K_{pp}P}{J_p}s + \frac{K_{pp}I}{J_p}$$

Se supone que es posible despejar K_{pp} al tener los parámetros del controlador, pero estos resultados tampoco son los esperados. Las dificultades anteriores son explicadas partiendo de que la implementación de los controladores no es ideal, además la planta tampoco lo es.

Por lo tanto, se debe reestructurar la metodología, utilizando la siguiente estructura para el controlador.

$$PID(s) = P + \frac{I}{s} + D\left(\frac{Ns}{s+N}\right) = \frac{(Ps + I)(s + N) + s^2DN}{s(s + N)}$$

Por lo tanto, cada función a identificar es de la forma 4 polos y 2 ceros

$$G_t(s) = k \frac{(Ps + I)(s + N) + s^2 DN}{(s(s + N))(J_p s^2 + D_p + K_{sp}) + ((Ps + I)(s + N) + s^2 DN)}$$

Los resultados fueron positivos:

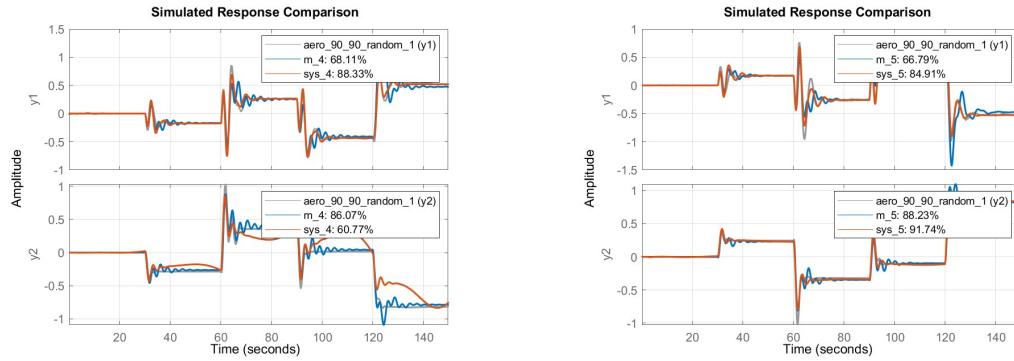


Figura 5-28: Resultados id PID referencias aleatorias

Ahora es necesario, separar la planta de los controladores. Para esto se abre el lazo y se divide entre el controlador.

$$G(s) = \frac{G_t(s)}{PID(1 - G_t(s))}$$

Sin embargo, los resultados no fueron los esperados, pues tienen más polos y ceros:

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0,0023732s(s + 66,3)(s^2 + 1,4952s + 1,725)}{(s + 8,047)(s + 0,001274)(s^2 + 0,7318s + 1,012)(s^2 + 0,2515s + 1,019)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{0,11581s(s - 0,6529)(s + 0,5)(s - 0,008634)}{(s + 0,444)(s + 0,003827)(s^2 + 2,666s + 2,042)(s^2 - 1,115s + 3,634)}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{1,5715e - 05s(s + 66,3)(s^2 - 0,03322s + 0,002113)}{(s + 0,1006)(s - 0,01395)(s^2 - 0,01022s + 0,02724)(s^2 + 0,2515s + 1,019)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,10111s(s + 0,5)(s^2 - 0,03026s + 0,0111)}{(s + 0,9592)(s + 0,444)(s + 0,003827)(s + 0,0007298)(s^2 + 0,04681s + 0,2178)}$$

Por lo tanto, se realizaron pruebas utilizando directamente la señal de error como entrada, es decir

$$G(s)PID = \frac{G_t(s)}{(1 - G_t(s))}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)}(PID_p) = \frac{2,7317(s^2 + 1,495s + 1,725)}{(s + 8,047)(s + 0,001274)(s^2 + 0,7318s + 1,012)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)}(PID_p) = \frac{4,4298(s - 0,6529)(s - 0,008634)}{(s^2 + 2,666s + 2,042)(s^2 - 1,115s + 3,634)}$$

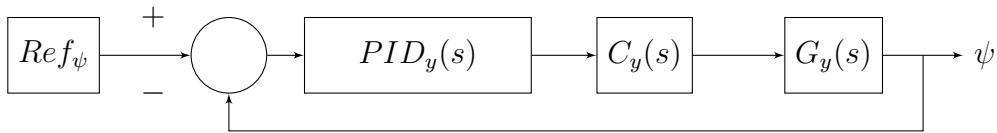
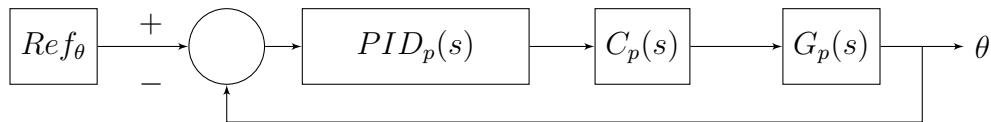
$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)}(PID_y) = \frac{0,018089(s^2 - 0,03322s + 0,002113)}{(s + 0,1006)(s - 0,01395)(s^2 - 0,01022s + 0,02724)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)}(PID_y) = \frac{3,8675(s^2 - 0,03026s + 0,0111)}{(s + 0,9592)(s + 0,0007298)(s^2 + 0,04681s + 0,2178)}$$

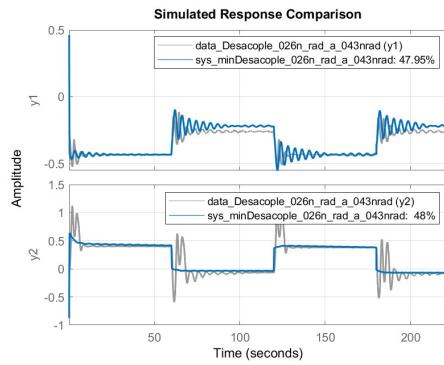
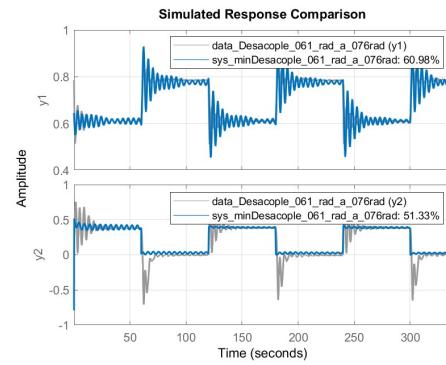
Estos resultados se explican al observar la función de transferencia, ya que en teoría al dividirla por el controlador solo debería quedar la planta, pero las pequeñas variaciones hacen que no se cancelen los componentes y si bien en algunos casos se puede realizar la cancelación manualmente, esto no produce resultados satisfactorios.

5.2.3. Desacople

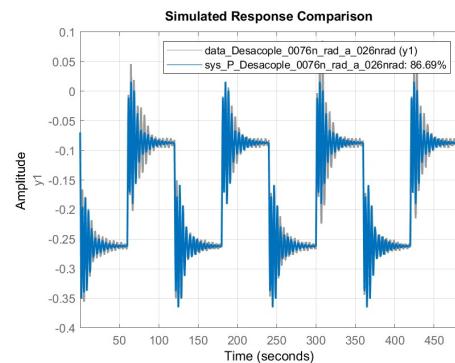
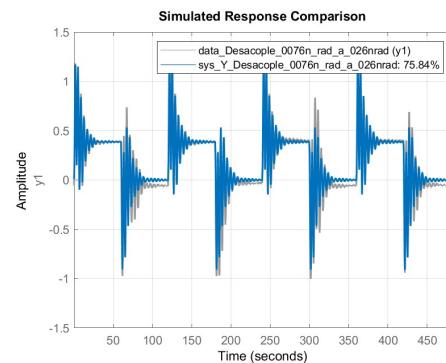
Usando los datos de 3.2.6 se propone realizar la estimación del sistema completo en lazo cerrado, ya que se usa el controlador con desacople se plantea de esta forma el sistema



Al realizar el primer grupo de estimaciones se busca el sistema equivalente a los bloques PID, C y G en lazo cerrado de cada movimiento, usando la respectiva señal de referencia y salida.

**Figura 5-29:** Theta -0.26 a -0.42 rad**Figura 5-30:** Theta 0.61 a 0.76 rad

Debido la estructura 2×2 del sistema, las estimaciones anteriores se realizaron utilizando las dos entradas y dos salidas de forma simultánea, sin embargo, gracias al desacoplador también es posible estimar de forma individual cada pareja. Lo anterior mejora los resultados. Se presentan los resultados primero identificando de forma separada y después de forma simultánea.

**Figura 5-31:** Theta**Figura 5-32:** Psi

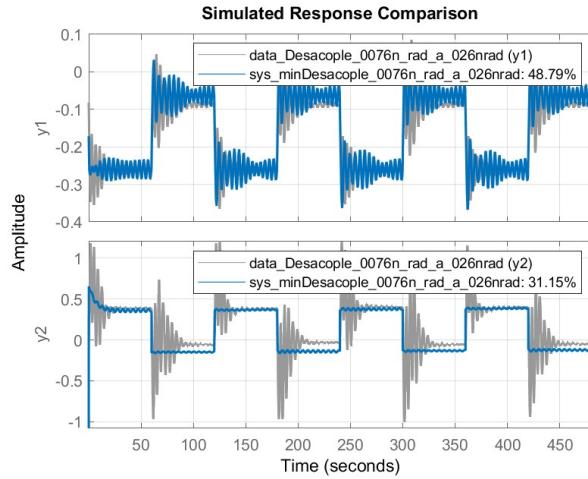


Figura 5-33: Identificación simultánea theta 0.076 a -0.26 rad

La expresión que se obtiene para este caso es:

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{9,578 s^6 + 2,515 s^5 + 469,3 s^4 + 219,3 s^3 + 5435 s^2 + 213 s + 7800}{s^8 + 3,375 s^7 + 80,59 s^6 + 139,6 s^5 + 1672 s^4 + 1262 s^3 + 7015 s^2 + 2191 s + 7798}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{4,8 s^6 + 11 s^5 + 25 s^4 + 32 s^3 + 32 s^2 + 26 s + 3,9}{s^8 + 1,4 s^7 + 8,7 s^6 + 8,9 s^5 + 24 s^4 + 17 s^3 + 23 s^2 + 9,8 s + 3,6}$$

Posteriormente, se abre el lazo y se presenta en polos y ceros.

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{9578s^6 + 2515s^5 + 469300s^4 + 219300s^3 + 5,435e06s^2 + 213000s + 7,8 \times 10^6}{1000s^8 + 3375s^7 + 71012s^6 + 137085s^5 + 1,203 \times 10^6s^4 + 1,043 \times 10^6s^3 + 1,58e06s^2 + 1,978 \times 10^6s + 1,978 \times 10^6}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{4837s^6 + 10670s^5 + 25360s^4 + 31530s^3 + 31530s^2 + 26020s + 3940}{1000s^8 + 1421s^7 + 3911s^6 - 1777s^5 - 990s^4 - 14460s^3 - 8200s^2 - 16182s - 383}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{9,578(s^2 - 0,03656s + 1,663)(s^2 + 1,045s + 14,61)(s^2 - 0,7457s + 33,52)}{(s + 1,098)(s - 0,00101)(s^2 - 0,325s + 1,727)(s^2 + 0,8305s + 25,98)(s^2 + 1,773s + 40,19)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{4,837(s + 1,099)(s + 0,187)(s^2 - 0,1818s + 1,643)(s^2 + 1,101s + 2,412)}{(s - 1,558)(s + 0,02395)(s^2 + 1,482s + 2,02)(s^2 - 0,2651s + 1,64)(s^2 + 1,738s + 3,1)}$$

Desafortunadamente, no es posible realizar la validación, pues el sistema resultante es inestable, lo mismo ocurre al separar el PID, en todos los casos

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{5,6166e13s(s + 1051)(s^2 - 0,03656s + 1,663)(s^2 + 1,045s + 14,61)(s^2 - 0,7457s + 33,52)}{(s + 1,67e18)(s + 1,098)(s + 0,8761)(s - 0,0009969)(s^2 - 0,325s + 1,727)(s^2 + 0,8304s + 25,98)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,062449s(s + 1,648)(s + 1,099)(s + 0,187)(s^2 - 0,1818s + 1,643)(s^2 + 1,101s - 0,2651s + 1,643)}{(s - 1,558)(s + 0,5125)(s + 0,02395)(s + 0,01442)(s^2 + 1,482s + 2,02)(s^2 - 0,2651s + 1,643)}$$

Por las vicisitudes anteriores se planteó la posibilidad de realizar una estimación directamente de la planta tomando la acción de control como entrada.

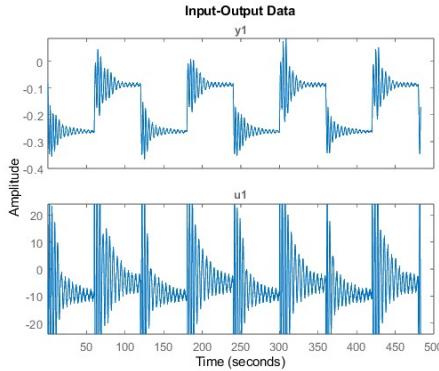


Figura 5-34: Datos Vp-Theta

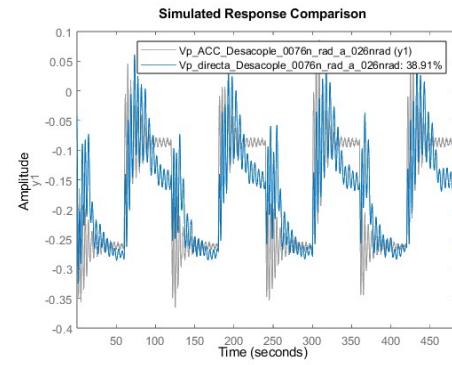


Figura 5-35: Resultados Theta

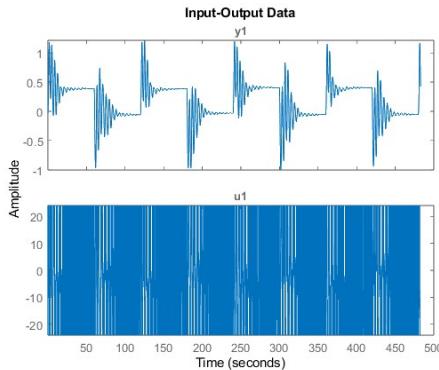


Figura 5-36: Dato Vy-Psi

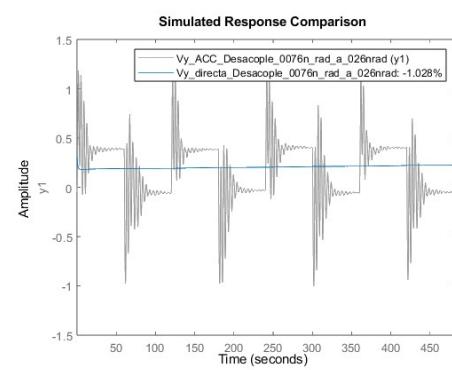


Figura 5-37: Resultados Psi

Como se constata con los resultados, los modelos no son satisfactorios, especialmente en Psi, debido a la agresividad y saturación de la acción de control. No obstante, sabiendo que los datos obtenidos en la salida del sistema son buenos, pues se tuvo control sobre los dos ejes, se presenta la identificación directamente de la planta.

5.3. Motor

Los parámetros de este se estimaron mediante la respuesta en el tiempo y en la frecuencia:

5.3.1. Tiempo

Haciendo uso de los sensores mencionados en 3.1.1 se tomaron datos con una entrada cuadrada y diferentes amplitudes:

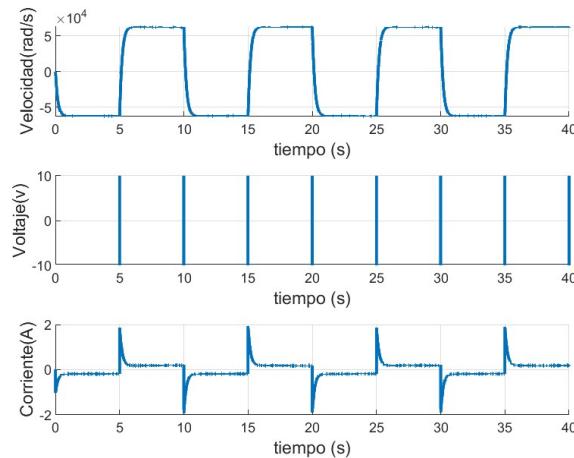


Figura 5-38: Entrada motor 10v

Inicialmente, se realizó una verificación para observar si las variables a medir se comportaban linealmente con respecto al voltaje aplicado. Con esto se encontró que era necesario escoger la zona de trabajo, se seleccionaron 10v

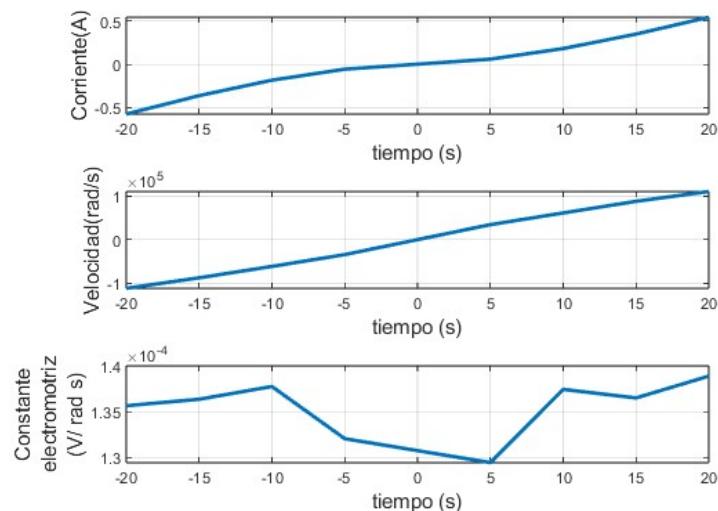


Figura 5-39: Respuesta variable en función del voltaje

Al comparar los datos del fabricante con los obtenidos se encontró un error, pues Quanser tomó de forma errónea la velocidad angular afectando el resto de parámetros. Adicionalmente, se realizó una estimación de la función de transferencia

Parámetro	Calculados	Fabricante	Unidades
K_a	$1,3742 \times 10^{-4}$	0.042	$N \cdot m/A$
K_m	$1,3742 \times 10^{-4}$	0.042	$V/(rad/s)$
J	$6,8344 \times 10^{-10}$	$4,0 \times 10^{-10}$	$Kg \cdot m^2$
B	$4,0723 \times 10^{-10}$	-	$N \cdot m \cdot s$
R	8,4	8,4	Ω
L	$1,2 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-3}$	H

Tabla 5-1: Parámetros motor

utilizando los datos sin tener en cuenta las fórmulas encontradas.

Segundo Orden

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{1,733 \times 10^8}{(s + 7238)(s + 3,887)}$$

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{5,188 \times 10^5}{(s + 150,4)(s + 5,531)}$$

Primer Orden

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{2,394 \times 10^4}{s + 3,885}$$

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{3,27 \times 10^4}{s + 5,33}$$

Se presenta la comparación de resultados con 10 y 15 v

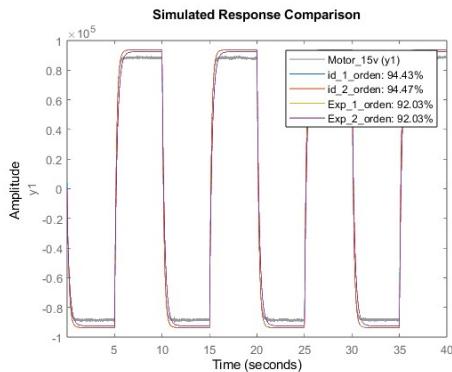


Figura 5-40: Motor 15v

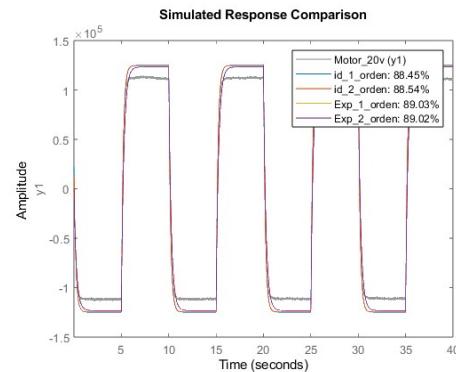


Figura 5-41: Motor 20v

5.3.2. Frecuencia

Siguiendo la metodología establecida para la identificación de un sistema en frecuencia, se construye el objeto Idfrd en el rango en el que fue posible tomar mediciones:

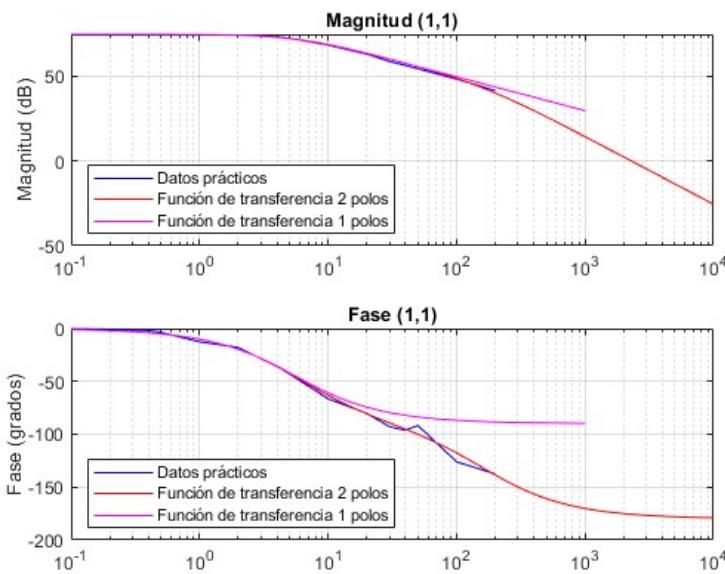


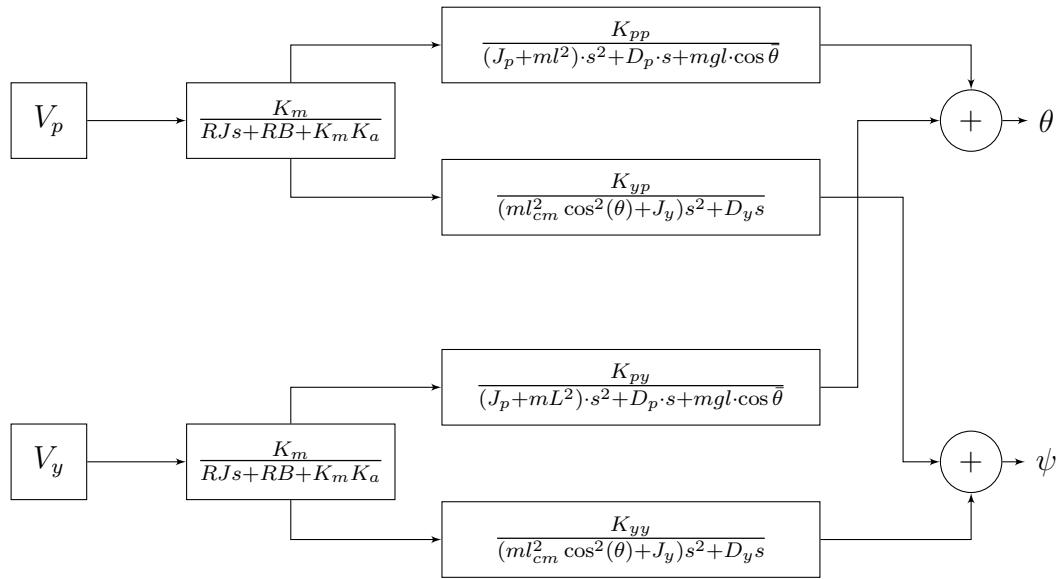
Figura 5-42: Identificación motor en frecuencia

$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{5,276 \times 10^6}{s^2 + 172,4s + 969,9} = \frac{5,276 \times 10^6}{(s + 166,6)(s + 5,821)}$$

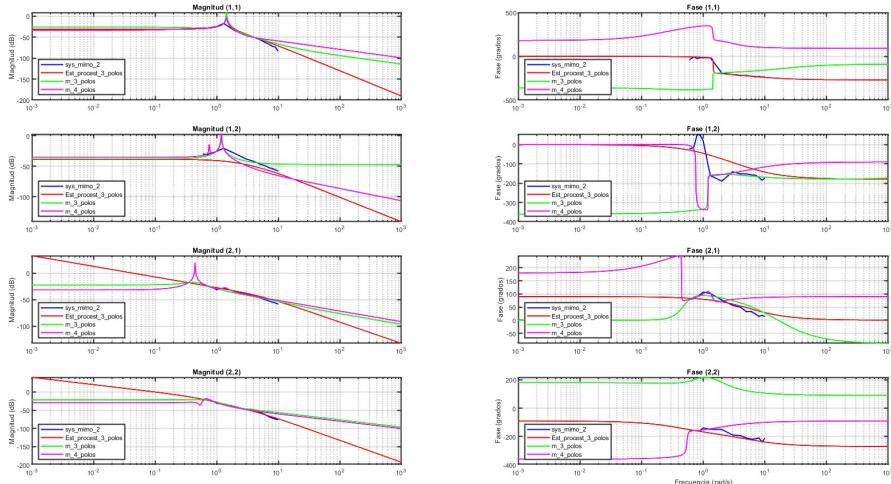
$$\frac{\omega(s)}{v(s)} = \frac{3,051 \times 10^4}{s + 5,586}$$

5.4. Conjunto motor planta

Una de las razones por las cuales posiblemente no se ha obtenido un modelo, más allá de los datos utilizados puede ser la simplicidad del modelo, pues se considera que el movimiento es representado por un grupo de funciones de transferencia de segundo orden, así que se presenta un acercamiento utilizando una variación al **2-5**, esto ya que si bien se busca agregar la dinámica del motor, no se busca que la estimación tenga más variables, es decir, usando la herramienta procest ya descrita en 4.2.2 se fija el valor del polo del motor conocido.

**Figura 5-43:** Sistema con dinámica de motor primer orden

Con este enfoque se realizó de nuevo la identificación en frecuencia, además del resultado con 3 polos y 4 polos.

**Figura 5-44:** Identificación conjunta planta motor dominio de la frecuencia

Se observa el mejor resultado con la planta de 3 orden identificada con el polo fijo

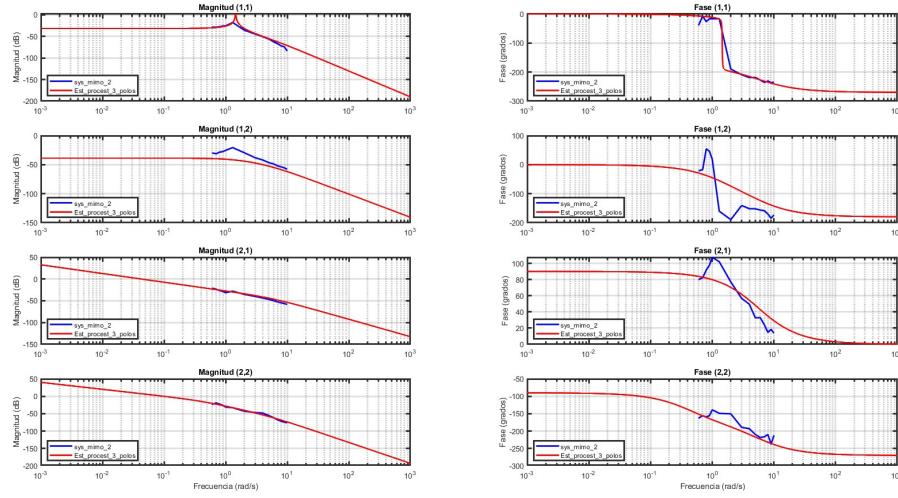


Figura 5-45: Resultados estimación 3 orden polo fijo

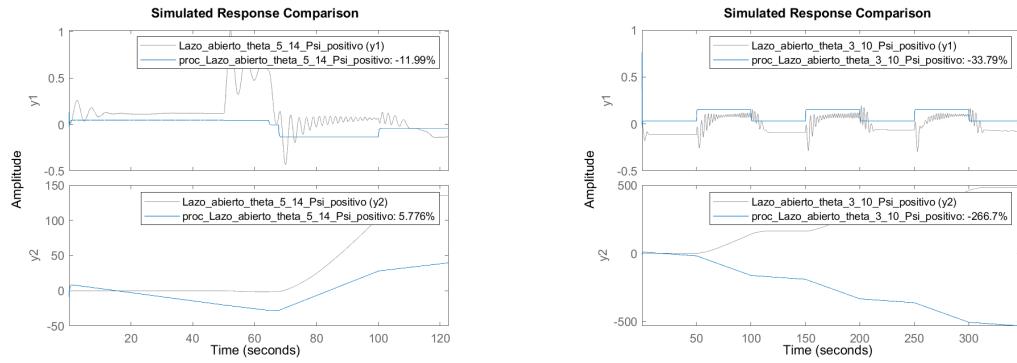
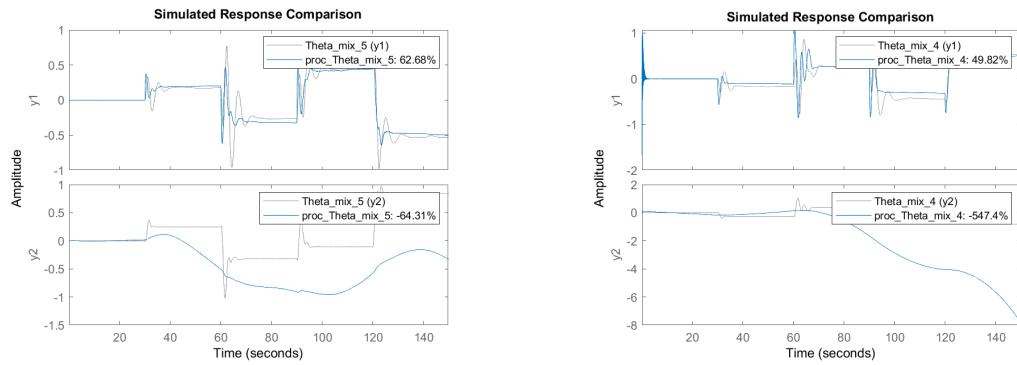
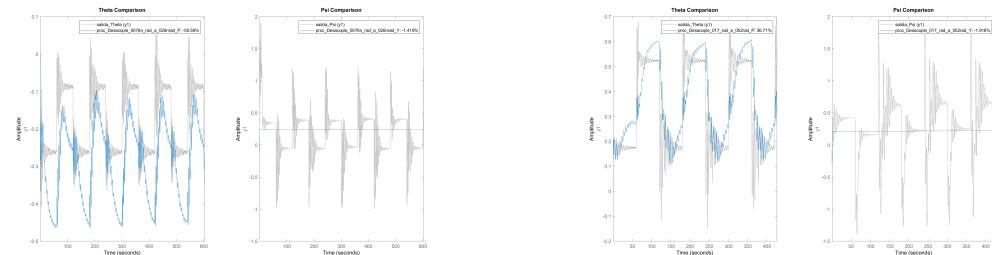
$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{0,30829}{(s + 5,587)(s^2 + 0,02201s + 2,11)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_p(s)} = \frac{-1,0544e + 06}{s(s + 4,485e06)(s + 5,587)}$$

$$\frac{\theta(s)}{V_y(s)} = \frac{0,1142}{(s + 5,587)(s^2 + 0,08088s + 1,517)}$$

$$\frac{\psi(s)}{V_y(s)} = \frac{0,23025}{s(s + 0,3985)(s + 5,587)}$$

También se realizó el proceso de estimación con los datos obtenidos en el tiempo tanto para lazo abierto, PID y PID desacoplado; se presentan algunos resultados, sin embargo, ninguno fue plenamente satisfactorio.

**Figura 5-46:** Lazo abierto**Figura 5-47:** PID**Figura 5-48:** PID Desacoplado