UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS - Matemática 2 (Administración- Contador- Negocios Digitales)

Ejercitación 3: Funciones en varias variables

1. Graficar el dominio de la función $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2-1}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{5x+3y-2}$

   (d) $f(x,y) = \ln(x^2+y)$

2. Dibujar las curvas de nivel de la función $f(x,y)$ en cada caso:

   (a) $f(x,y) = x^2+y^2$

   (b) $f(x,y) = y - x^2$

   (c) $f(x,y) = y^2 - x$

   (d) $f(x,y) = (x-1)(y-2)$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   (f) $f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$

3. Graficar las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$. Sugerencia: utilizar GeoGebra.

   (a) $z = x^2+y^2$

   (b) $y = x^2+z^2$

   (c) $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$

   (d) $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$

   (e) $x^2+9y^2+z^2 = 1$

   (f) $z^2+x^2 = 4$

   (g) $z = x^2$

   (h) $x+y = 4$

Límite - Continuidad

4. Calcular los siguientes límites.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{y}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos^2(xy)-1}{x^2y^2}+3$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x)}{(x-1)y}$

5. Calcular, si existen, los siguientes límites. Caso contrario, buscar curvas que prueben su no existencia.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{x\,(y^2-9)}{x^2+(y-3)^2}$

6. Calcular, si existen, los siguientes límites. Caso contrario, buscar curvas que prueben su no existencia.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}+7$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}-\dfrac{4x}{3}$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{(3x-3)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4+y^2}}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-3\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2-2e^{x^2+3y^2}}{x^2+3y^2}$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln((x-1)^2+4y^2)}{(x^2-2x+1+4y^2)\|(x-1,2y)\|}$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{\sin(x^2+y^2)}$

7. Estudiar la continuidad de

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{5(x-3)^2y}{(x-3)^2+y^2} & (x,y)\neq(3,0)\\ 0 & (x,y)=(3,0)\end{cases}$$

en $(3,0)$.

8. Hallar el valor de a para que

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sin(2y)}{x^2+y^2}+3 & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

sea continua en $(0,0)$. Para el a hallado, decidir si la función es continua en $\mathbb{R}^2$.

9. Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}.$$

(a) Decidir si f es continua en los puntos $(1,0)$, $(-1,2)$.

(b) Hallar los puntos de la forma $(a,0)$ donde f es continua.

10. Considerar la función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x-1)(y^2+1) & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}.$$

(a) Probar que f es continua en el punto $(1,0)$.

(b) Decidir si la función es continua en los puntos de la forma $(a,0)$.

Derivadas

11. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = 3x^2y^5 - y^2x^3 + 4y$

(b) $f(x,y,z) = e^{x^2-y^2} + 2z$

(c) $f(x,y) = \sin(x^2 - 3xy)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^3+y^3}$

(e) $f(x,y,z) = e^{-x}\cos(xyz^2)$

(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(g) $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

(h) $f(x,y,z) = \frac{\cos z + e^{xy}}{x^2+y^2}$

12. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Decidir si la función f es continua en el punto $(0,0)$.

(b) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

13. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} + y^2 & (x,y) \neq (0,-1) \\ 1 & (x,y) = (0,-1) \end{cases}.$$

(a) Decidir si la función f es continua en el punto $(0,-1)$.

(b) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en el punto $(0,-1)$.

14. Decidir si las siguientes funciones son de clase $\mathcal{C}^1$ en el punto $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x+8y & x = y \\ (x-y)^2 & x \neq y \end{cases}.$$

(a) Decidir si f es continua en $(1,1)$.

(b) Calcular, si existen, las derivadas parciales de f en $(1,1)$.

(c) ¿ Es f de clase C^1?.

(d) Calcular la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$, siendo $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

16. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{si } y = 2 \\ x^2 + y^2 - 4 & \text{si } y \neq 2 \end{cases}$.

    (a) Decidir si la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(1,2)$.

    (b) Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$.

    (c) Hallar, si existe, la derivada direccional en $(1,2)$ en la dirección $v = (1,-3)$.

17. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones que se indican a continuación.

    (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$ en $(1,1,0)$ en la dirección $v = (1,-1,2)$.

    (b) $f(x,y,z) = xyz$ en $(1,1,1)$ en la dirección $v = (1,0,2)$.

    (c) $f(x,y) = x^2 + y^2\sin(xy)$ en $(\frac{\pi}{4}, 1)$ en la dirección $v = (-2,1)$.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Se sabe que en el punto $(1,2)$ las derivadas direccionales en dirección hacia el punto $(2,2)$ y hacia el $(1,1)$ son 2 y -2 respectivamente. Determinar el vector gradiente en $(1,2)$ y calcular la derivada direccional en dirección hacia el punto $(4,6)$.

19. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^2 + y^2$. Hallar la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1,-2)$ y la derivada direccional en esa dirección.

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que la derivada direccional de f en en un punto cualquiera $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en la dirección $(1,1)$ es $\sqrt{2}$ y en la dirección (2,3) es $\sqrt{13}$.

    (a) Hallar el gradiente de f en (a,b).

    (b) Hallar todos los vectores v de norma 1 tales que la derivada de f en (a,b) en la dirección v sea igual a -7.

21. ¿ En qué dirección la derivada direccional de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(1,1)$, es igual a 0?