Guía 3-respuestas

9 de mayo de 2022

1. Ver este link.
2. Ver este link.
3. Ver este link.
4. (a) Multiplicando y dividiendo por x, haciendo el cambio de variables $xy = t$, se llega a que el límite es 0.

   (b) Multiplicando y dividiendo por y, haciendo el cambio de variables $x^2y = t$, se llega a que el límite es 0.

   (c) Usando que $\text{sen}^2(xy) + \cos^2(xy) = 1$ y que $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$, se llega a que el límite da 2.

   (d) Usando que $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ por la regla de L'Hôpital, se llega a que el límite da ∞.
5. (a) Usando que $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ está acotado, se llega a que el límite es 0.

   (b) Usando que $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$ está acotado, se llega a que el límite es 0.

   (c) Aproximando por rectas se llega a que el límite no existe.

   (d) Dado que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, se llega a que el límite es 4.

   (e) Aproximando por rectas se llega a que el límite no existe.
6. (a) Usando que $\frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}y + \frac{y^2}{x^2+y^2}y$ y que $\frac{x^2}{x^2+y^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2}$ son acotados, se llega a que el límite da 7.

   (b) Aproximando por rectas se llega a que el límite no existe.

   (c) Aproximando por rectas se llega a que el límite no existe.

   (d) Aproximando por rectas se llega a que el límite no existe.

   (e) Dado que $\frac{xy-3\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3$ y $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ es acotado, se tiene que el límite es -3.

   (f) Haciendo el cambio de variables $x^2 + 3y^2 = t$ y aplicando la regla de L'Hôpital se llega a que el límite es 2.

   (g) Haciendo el cambio de variables $(x-1)^2 + 4y^2 = t$ y notando que $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{t} = -\infty$, se tiene que el límite es $-\infty$.

   (h) Usando que $\frac{x^4-y^4}{\text{sen}(x^2+y^2)} = (x^2-y^2)\frac{x^2+y^2}{\text{sen}(x^2+y^2)}$ y haciendo el cambio de variables $x^2+y^2 = t$ se llega a que el límite es 0.
7. Usando que $\frac{(x-3)^2}{(x-3)^2+y^2} = \left(\frac{x-3}{||(x-3,y)||}\right)^2$ es acotado, se tiene que la función es continua.
8. Usando que $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ es acotado, se llega a que $a = 3$, y para este valor f es continua en $\mathbb{R}^2$.
9. (a) En $(-1, 2)$ es continua pero no es continua en $(1, 0)$.

   (b) El único punto de la forma $(a, 0)$ donde f es continua es $a = 0$.
10. Se tiene que el único punto de la forma $(a, 0)$ donde f es continua es el punto $(1, 0)$.

11. (a) $f_x(x,y) = 6xy^5 - 3x^2y^2, f_y(x,y) = 15x^2y^4 - 2x^3y + 4.$
   (b) $f_x(x,y,z) = 2xe^{x^2-y^2}, f_y(x,y,z) = -2ye^{x^2-y^2}, f_z(x,y,z) = 2.$
   (c) $f_x(x,y) = \cos(x^2 - 3xy)(2x - 3y), f_y(x,y) = -3x\cos(x^2 - 3xy).$
   (d) $f_x(x,y) = \frac{-2x^2+y^3}{(x^3+y^3)^2}, f_y(x,y) = -\frac{3xy^2}{(x^3+y^3)^2}.$
   (e) $f_x(x,y,z) = -e^{-x}\cos(xyz^2) - e^{-x}\mathrm{sen}(xyz^2)yz^2, f_y(x,y,z) = -e^{-x}\mathrm{sen}(xyz^2)xz^2, f_z(x,y,z) = -e^{-x}\mathrm{sen}(xyz^2)2xyz.$
   (f) $f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$
   (g) $f_x(x,y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}, f_y(x,y) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}.$
   (h) $f_x(x,y,z) = \frac{ye^{xy}(x^2+y^2)-(\cos(z)+e^{xy})2x}{(x^2y^2)^2}, f_y(x,y,z) = \frac{xe^{xy}(x^2+y^2)-(\cos(z)+e^{xy})2y}{(x^2+y^2)^2}, f_z(x,y,z) = \frac{-\mathrm{sen}(z)}{x^2+y^2}.$

12. (a) Puesto que $\frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 3\left(\frac{x}{||(x,y)||}\right)^2 y$ y $\frac{x}{||(x,y)||}$ está acotado, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$.
   (b) Las derivadas parciales en $(0,0)$ son 0.

13. (a) Puesto que $\frac{x^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \left(\frac{x}{||(x,(y+1)||}\right)^2 (y+1)^2$ y $\frac{x}{||(x,y+1)||}$ está acotado, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = 1$ y por lo tanto f es continua en $(0,0)$.
   (b) $f_x(0,-1) = 0, f_y(0,-1) = -2.$

14. (a) La función no es continua en $(0,0)$ (aproximarse por rectas), por lo tanto f no es de clase $\mathcal{C}^1$.
   (b) Se tiene que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 3\frac{2xy^2(x^2+y^4)-2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = \frac{6xy^2}{x^2+y^4} - \frac{6x^3y^2}{(x^2+y^4)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Aproximándonos sobre $x = at^2, y = t$ y $t \to 0$, obtenemos el límite

$$\lim_{t\to 0} f(at^2,t) = \lim_{t\to 0} 3\frac{6at^2t^2}{a^2t^4+t^4} - \frac{6a^3t^6t^2}{(a^2t^4+t^4)^2} = \frac{6a}{a^2+1} - \frac{6a^3}{(a^2+1)^2} = \frac{6a}{(a^2+1)^2},$$

   que depende de a, y por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ no existe, de donde se infiere que f no es de clase $\mathcal{C}^1$.
   (c) f es de clase $\mathcal{C}^1$.
   (d) Se tiene que

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - 2\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Tomando la recta $y = mt$ y $t \to 0$ tenemos que

$$\lim_{t\to 0} mt\mathrm{sen}\left(\frac{1}{t^2(1+m^2)}\right) - 2\frac{mt^3}{t^4(1+m^2)^2}\cos\left(\frac{1}{t^2(1+m^2)}\right) = -2\lim_{t\to 0}\frac{m}{(1+m^2)^2}\frac{1}{t}\cos\left(\frac{1}{t^2(1+m^2)}\right),$$

   y este límite no existe. Por lo tanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ no existe, de donde se infiere que f no es de clase $\mathcal{C}^1$.

15. (a) Puesto que el límite acercándonos al $(1,1)$ desde $x = y$ vale 11, y el límite acercándonos al $(1,1)$ desde $x \neq y$ vale 0, se tiene que la función no es continua en $(0,0)$.
   (b) Dado que las derivadas parciales son las derivadas de la función sobre las rectas $[(1,0)] + (1,1)$ y $[(0,1)] + (1,1)$ que sólo intersecan a la recta $x = y$ en el $(0,0)$, se tiene que $f(1+h,1) = (1+h-1)^2 = h^2, f(1,1+h) = (1-1-h)^2 = h^2$, por lo tanto los cocientes incrementales

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \frac{h^2-11}{h}, \frac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h} = \frac{h^2-11}{h}$$

   no tienen límite finito y las derivadas parciales en $(1,1)$ no existen.

(c) Puesto que f no es de continua, se tiene que no es de clase $\mathcal{C}^1$.

(d) Dado que la dirección v es exactamente la dirección de la recta $x = y$, se tiene que $f\left((1,1) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right) = 3(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) + 8(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})$, de donde se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left((1,1) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\right) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) + 8(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}) - 11}{h} = \frac{11}{\sqrt{2}}.$$

16. (a) La función es continua.

(b) Se tiene que $f_x(1,2) = 3$ y $f_y(1,2) = 4$.

(c) Se tiene que $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = -10$.

17. En todos los ítems, f es de clase $\mathcal{C}^1$ por lo tanto puede calcularse $\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = \langle \nabla f(a,b), v\rangle$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(a,b,c) = \langle \nabla f(a,b,c), v\rangle$.

(a) Se tiene que $v = \frac{(1,-1,2)}{(1,-1,2)} = \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}}$, $f_x(1,1,0) = 2, f_y(1,1,0) = 2, f_z(1,1,0) = 0$, y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,0) = \left\langle \nabla f(1,1,0), \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} \right\rangle = \left\langle (2,2,0), \frac{(1,-1,2)}{\sqrt{6}} \right\rangle = 0.$$

(b) Se tiene que $v = \frac{(1,0,2)}{||(1,0,2)||} = \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}}$, $f_x(1,1,1) = f_y(1,1,1) = f_z(1,1,1) = 1$, y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = \left\langle \nabla f(1,1,1), \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle (1,1,1), \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

(c) Se tiene que $v = \frac{(-2,1)}{||(-2,1)||} = \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}}$, $f_x(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, f_y(\frac{\pi}{4}, 1) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \left\langle \nabla f\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), v \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right), \frac{(-2,1)}{\sqrt{5}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right).\end{aligned}$$

18. Dado que la dirección desde $(1,2)$ hacia $(2,2)$ es $(2,2) - (1,2) = (1,0)$, y la dirección desde $(1,2)$ hacia $(1,1)$ es $(1,1) - (1,2) = (0,-1)$, tenemos que $f_x(1,2) = 2$ y al ser f de clase $\mathcal{C}^1$, $-2 = \frac{\partial f}{\partial(0,-1)}(1,1) = \langle \nabla f(1,2), (0,-1)\rangle = -f_y(1,2)$, por lo tanto $\nabla f(1,2) = (2,2)$.

Puesto que f es de clase $\mathcal{C}^1$ y la dirección desde $(1,2)$ a $(4,6)$ es $(4,6) - (1,2) = (3,4)$, tomando $v = \frac{(3,4)}{||(3,4)||} = \frac{(3,4)}{5}$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), v\rangle = \left\langle (2,2), \frac{(3,4)}{5} \right\rangle = \frac{14}{5}.$$

19. La dirección de máximo crecimiento es $\nabla f(1,-2) = (6,-4)$. Puesto que f es de clase $\mathcal{C}^1$, poniendo $v = \frac{\nabla f(6,-4)}{||\nabla f(6,-4)||}$ se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(6,-4) = \langle \nabla f(6,-4), v\rangle = ||\nabla f(6,-4)|| = \sqrt{52}.$$

20. (a) Poniendo $v = \frac{(1,1)}{||(1,1)||} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, w = \frac{(2,3)}{||(2,3)||} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}}$, al ser f de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene que

$$\sqrt{2} = \frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = \langle \nabla f(a,b), v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_x(a,b) + f_y(a,b)),$$

$$\sqrt{13} = \frac{\partial f}{\partial w}(a,b) = \langle \nabla f(a,b), w\rangle = \frac{1}{\sqrt{13}}(2f_x(a,b) + 3f_y(a,b)),$$

de donde queda el sistema

$$\begin{cases} f_x(a,b) + f_y(a,b) = 2 \\ 2f_x(a,b) + 3f_y(a,b) = 13. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene que $\nabla f(a,b) = (-7,9)$.

(b) Como f es de clase $\mathcal{C}^1$, para un tal $v = (v_1, v_2)$ debe tenerse que

$$-7 = \frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = \langle \nabla f(a,b), v\rangle = \langle (-7,9), (v_1,v_2)\rangle = -7v_1 + 9v_2.$$

Como buscamos v con norma 1, debe tenerse que $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Reemplazando $v_2 = \frac{7v_1 - 7}{9}$ en esta ecuación obtenemos $v_1 = 1, v_1 = -\frac{16}{65}$, y por lo tanto $v = (1,0)$ o $v = (-\frac{16}{65}, -\frac{63}{65})$.

21. Como f es de clase $\mathcal{C}^1$, y $f_x(1,1) = 1, f_y(1,1) = -1$, para todo $v = (v_1, v_2)$ de norma 1 debe tenerse que $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \langle \nabla f(1,1), v\rangle = \langle (1,-1), (v_1,v_2)\rangle = 0$. Entonces $v_1 = v_2$ y $v = (v_1, v_1) = v_1(1,1)$, es decir, la dirección es $(1,1)$.