

# Análisis numérico del sistema Péndulo acoplado en el límite de oscilaciones pequeñas.

Nicolás Sepúlveda<sup>1, a)</sup>

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

(Dated: 1 January 2019)

Se resuelven numéricamente las ecuaciones de movimiento de un péndulo acoplado, formado por dos péndulos simples cuyas masas son unidas por un resorte débil. Se revisan estados de oscilación asociados a los modos normales del sistema, a la superposición de estos, y a la respuesta dado un término disipativo y una fuerza periódica aplicada en uno de los péndulos.

## I. INTRODUCCIÓN

El sistema de péndulos acoplado consiste en dos péndulos simples, cuyas masas son unidas por un resorte, como se ve en la figura 1. El movimiento está restringido a dos dimensiones, y la fuerza elástica que actúa en ambas es mucho menor que la fuerza de gravedad sobre ellas. La simpleza del sistema permite comprender cómo se comportan sistemas análogos de acoplamiento tanto en escalas macro como microscópicas. Para estudiarlo, se resolverán numéricamente las ecuaciones de movimiento mediante Python, basándose en una solución para un sistema de masas acopladas<sup>1</sup>, y se expondrán figuras que muestran los tipos de movimiento fundamentales que lo caracterizan, realizando una breve discusión de cada uno de ellos. En primera instancia se simula el caso ideal, para obtener una representación visual de los batidos producidos en el sistema; luego se agregan términos de forzamiento y disipación.

## II. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Luego de la simplificación  $\sin\theta \approx \theta$  para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento para los péndulos

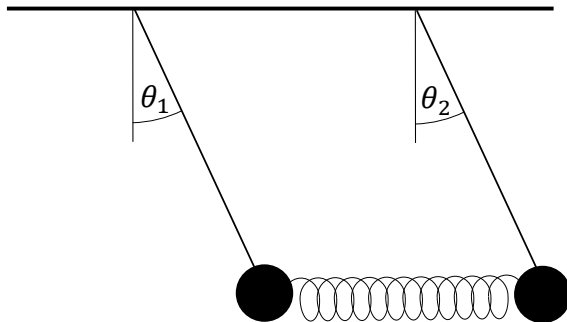


FIG. 1. Diagrama del sistema. El ángulo se mide con respecto a la vertical del péndulo 1 y 2 respectivamente. El resorte tiene constante elástica  $k$ .

1 y 2 respectivamente es:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{L_1}\theta_1 + \frac{k}{m_1}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L_2}\theta_2 + \frac{k}{m_2}(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (2)$$

en donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos medidos para los péndulos de largo  $L_1$  y  $L_2$  y masa  $m_1$  y  $m_2$ ;  $k$  la constante elástica del resorte, y  $g$  la aceleración de gravedad.

En esta idealización del sistema, y para péndulos idénticos, se pueden encontrar soluciones en las cuales la frecuencia de oscilación de ambos péndulos es la misma. Estos estados corresponden a los modos normales del sistema; uno dependiente de la frecuencia natural de los péndulos, y otro asociado a la fuerza ejercida por el resorte. Dada la ortonormalidad entre estos, cualquier movimiento del sistema puede ser descrito como una combinación lineal de ambos, y es en tales movimientos en donde se puede observar una transferencia de energía de un péndulo a otro, cuya proporción depende de las condiciones iniciales. El intercambio entonces genera el fenómeno de batidos, pues las frecuencias naturales de cada modo son distintas. En un caso específico a estudiar, en donde las amplitudes de oscilación son iguales, se da que las soluciones para ambos péndulos son:

$$\theta_1 = [2A\cos w_b t]\cos w_{prom} t \quad (3)$$

$$\theta_2 = [2A\sin w_b t]\sin w_{prom} t, \quad (4)$$

en donde  $A$  es la amplitud,  $w_b$  la frecuencia del batido y  $w_{prom}$  la frecuencia promedio entre ambos péndulos. Se hace notar que se cumple  $w_b \ll w_{prom}$ <sup>2</sup>.

Cuando en las ecuaciones de movimiento se agrega el término de disipación dependiente de la velocidad angular  $\gamma\dot{\theta}$ , con la constante impuesta igual para ambos péndulos, se esperan soluciones moduladas por una exponencial atenuante, es decir, cuya amplitud disminuya con el tiempo: ecuaciones de oscilador amortiguado.

Además, agregando un término de forzamiento periódico en el primer péndulo, expresado por  $F\cos(at)$ , con  $F$  la amplitud y  $a$  la frecuencia, se obtienen soluciones en donde es posible estudiar el fenómeno de resonancia del sistema.

## III. SIMULACIÓN

Usando el módulo Scipy de Python, se han solucionado las ecuaciones de movimiento del sistema bajo diferentes

<sup>a)</sup>Electronic mail: nicosepulveda4673@gmail.com

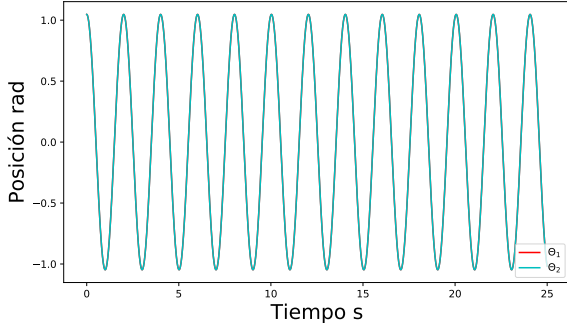


FIG. 2. Posición angular de los dos péndulos en función del tiempo. Se observa que oscilan con misma fase y amplitud.

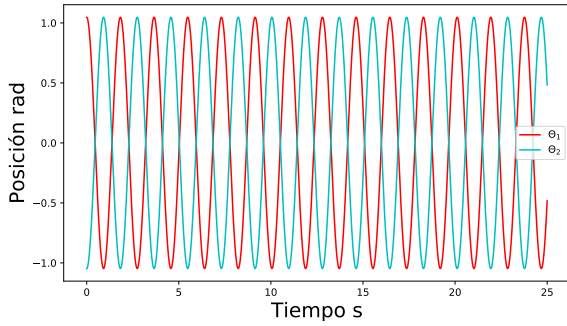


FIG. 3. Posición angular en función del tiempo. Ambos oscilan con la misma frecuencia y amplitud, pero desfasados en  $\pi \text{ rad}$ . Con  $k$  mayor, la frecuencia aumenta.

parámetros y condiciones iniciales. Se escogieron valores específicos para simular los estados que se describen a continuación.

#### A. Sistema ideal

Bajo condiciones iniciales específicas, el sistema tiene comportamientos característicos, como los modos normales, y la transferencia de energía de un oscilador a otro.

- **Modos.** Como fue mencionado, existen dos modos normales para el sistema. Uno asociado a la frecuencia natural de los péndulos, y el otro a la elasticidad del resorte. El primero se ha simulado con la condición inicial  $\theta_1 = \theta_2$ , lo cual indica un movimiento idéntico en ambos péndulos, si el resorte no está actuando sobre las masas. El segundo, tiene como condiciones iniciales  $\theta_1 = -\theta_2$ , lo que genera un movimiento contrario entre ambos péndulos, siendo atraídos entre sí por el resorte cuando las masas están en su separación máxima. En las figuras 2 y 3 se observan ambas soluciones.

- **Superposición de modos.** Cuando el sistema no se encuentra oscilando en ninguna de sus frecuencias naturales, el movimiento se puede expresar como una suma de los modos, con respectivas amplitudes. En la figura 4 se observa el movimiento

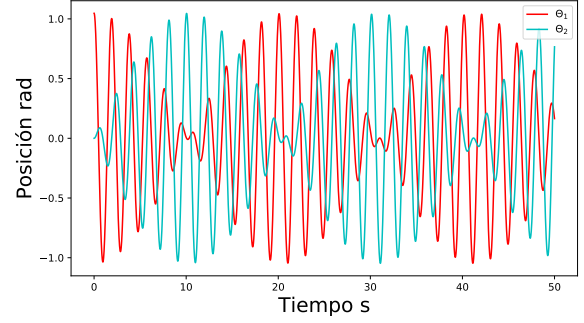


FIG. 4. Solución con condición inicial  $\theta_1 = \pi/3$ ;  $\theta_2 = 0$ . La transferencia de energía en el batido es total.

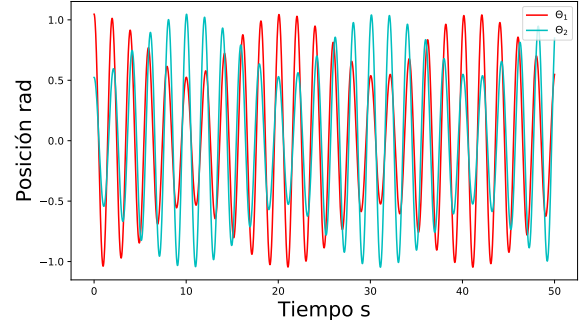


FIG. 5. Solución con condición inicial  $\theta_1 = \pi/3$ ;  $\theta_2 = \pi/6$ . Las amplitudes iniciales se intercambian con una frecuencia mucho menor que la de las oscilaciones.

descrito por las ecuaciones 3 y 4, en el cual uno de los dos péndulos comienza en  $\theta = 0$ . Este comienza a oscilar con un aumento de amplitud, mientras que el otro cede su energía y termina en oscilaciones pequeñas. El ciclo se repite alternadamente, y se generan los patrones de *batidos*. En la figura 5, las condiciones iniciales son  $\theta_1 \neq \theta_2 \neq 0$ , y se observa el mismo fenómeno de transferencia, pero no total, pues el segundo péndulo no inició en su posición de equilibrio.

#### B. Sistema con disipación y forzamiento

Ahora se introduce en las ecuaciones de movimiento un término disipativo  $\gamma\dot{\theta}$ ; y en la del péndulo 1 uno de forzamiento  $F\cos(at)^3$ , con  $F$  la amplitud y  $a$  la frecuencia. La ecuación de este péndulo se transforma en

$$\ddot{\theta}_1 + \gamma\dot{\theta}_1 + \frac{g}{L_1}\theta_1 + \frac{k}{m_1}(\theta_1 - \theta_2) + F\cos(at) = 0. \quad (5)$$

En las figuras 6 y 7 se observan los decaimientos exponenciales asociados al término disipativo, cuya magnitud en la simulación es arbitraria e igual para ambas, y escogida para observar el decaimiento dentro de la línea de tiempo. En base a estas, se puede realizar una comparación cualitativa entre diferentes frecuencias de forzamiento. La magnitud de la primera es aproximadamente un tercio de la segunda. La principal diferencia se observa

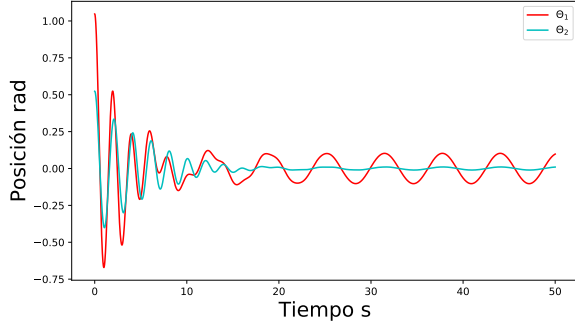


FIG. 6. Movimiento con forzamiento y disipación. Las condiciones iniciales son iguales al caso anterior, pero con  $\gamma = 0.5$ ,  $F = 1$  y  $a = 1$

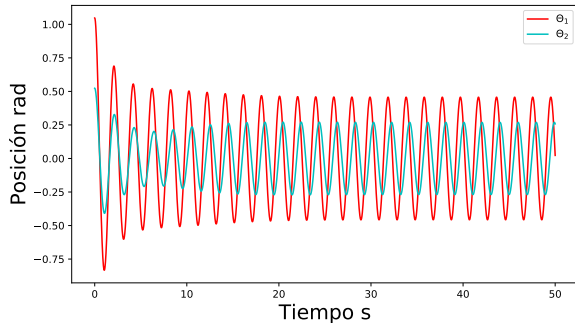


FIG. 7. En este caso, se ha cambiado la frecuencia de la fuerza externa a  $a = 3.2$ , en donde se observa una mayor amplitud de los péndulos.

en la respuesta de las amplitudes de ambos péndulos. En el segundo caso se ha buscado mediante variaciones del parámetro  $a$  la respuesta de mayor amplitud, con la intención de simular un movimiento resonante. Se observa en la figura cómo la amplitud del péndulo 2 incrementa con la del 1, en comparación al primer caso; en donde la amplitud del péndulo forzado es pequeña y la del otro es aproximadamente nula.

#### IV. CONCLUSIÓN

Se han estudiado, mediante simulaciones numéricas en Python, las diferentes soluciones de movimiento para un oscilador acoplado, haciendo énfasis en los modos normales y batidos. Además se han agregado términos de disipación y forzamiento para analizar la evolución de un sistema mas cercano a la realidad. Las gráficas de las posiciones de los péndulos en función del tiempo han permitido un análisis visual de los comportamientos, dando una base para el estudio de sistemas más complejos.

<sup>1</sup><https://scipy-cookbook.readthedocs.io/items/CoupledSpringMassSystem.html>

<sup>2</sup><https://physics.nyu.edu/~physlab/Classical%20and%20Quantum%20Wave%20Lab/cp.pdf>

<sup>3</sup>Jarvis M., *Waves & Normal Modes*, 2016.

[https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-04/normalmodes\\_iandii\\_pdf\\_96820.pdf](https://www2.physics.ox.ac.uk/sites/default/files/2012-09-04/normalmodes_iandii_pdf_96820.pdf)