[redacted]

$f(n) = \frac{1}{n}$　$n \in N$　$f($[redacted]$)$　$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$。

$f(x) = \frac{1}{x}$　$x > 0$　$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$。

[redacted]义

[redacted]仿数列极　出函数在无　处极　定义

/Define/

给出 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的定义：

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义（a 常），A 是一个确定的常数，

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 的一切实数，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

称 $f(x)$ 当 x 趋于正无穷大时的极限为 A，记作 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to +\infty)$。

给出 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 的定义：

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上有定义（a 常），A 是一个确定的常数，

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x < -X$ 的一切实数，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

称 $f(x)$ 当 x 趋于负无穷大时的极限为 A，记作 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to -\infty)$。

定义：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a] \cup [b,+\infty)$（$a < b$，常），$A$ 是一个确定的常数，

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时（$x < -X$ 或 $x > X$），都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，

称 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时极限为 A，记作 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$　充　条件是 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$　$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$。

/proof/

必要性无需证明。

充分性：

由 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X_1 > 0$，当 $x > X_1$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

又 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$，$\exists X_2 > 0$，当 $x < -X_2$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$。

取 $\max\{X_1, X_2\} = X$，当 $|x| > X$ 时，都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，知 $\lim_{x\to\infty}$ 。

取 $X = (\frac{1}{\varepsilon})$

$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

接下来 出函数某 极 定义

/Define/

若 $\exists$, 在 中有定义,

[redacted]

> $$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} x^n &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n}\\ &= \lim_{x\to x_0} x\cdot \lim_{x\to x_0} x\cdots \lim_{x\to x_0} x\\ &= \underbrace{x_0\cdot x_0\cdots x_0}_{n} = x_0^n\end{aligned}$$
>
> 结束

x ep e $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均为常数 $\lim_{x\to x_0} P_n(x)$。

> /solution/
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P_n(x) &= \lim_{x\to x_0} a_0x^n + \lim_{x\to x_0} a_1x^{n-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0} a_{n-1}x + \lim_{x\to x_0} a_n\\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n\\ &= P_n(x_0)\end{aligned}$$
>
> 结束

x ep e $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$ 且 $Q_m(x_0) \neq 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$。

> /solution/
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m\\ \frac{a_0}{b_0}, & n = m\\ \infty, & n > m\end{cases}$$
>
> 结束

x ep e $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$。 / m

> /solution/
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

例 $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2}, & x < 1\\ x^2 + 2, & x \geq 1\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x = 1$ 处极 是否存在。

> /solution/
>
> $$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + \sqrt{1+x^2}) = 1 + \sqrt{2}\\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + 2) = 3\end{aligned}$$
>
> 由 $1+\sqrt{2} \neq 3$，知 $\lim_{x\to 1} f(x)$ 不存在

定 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \geq 0$ 则 $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$。

> PS：$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$。

取 $\min\{\delta_0, \delta_1\} = \delta_2$. 当 $0 < |x - x_1$[redacted] 都有 [illegible], [illegible] 。

- **无穷大 及性质**

定义 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内 $f(x)\neq 0$。 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$

$f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无 大 作 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$。

$\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\delta\le\delta_0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 有 $\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon\Leftrightarrow|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon}\triangleq M$。

> 定义：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有定义，$\forall M>0$，$\exists\delta>0$（$\delta\le\delta_0$），
>
> 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)|>M$，称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷大量，
>
> 记作：$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$。

---

x ep e$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^k}=\infty$ / $k>0$ 常 。 m

> /proof/
>
> $\forall M>0$，若要 $\frac{1}{x^k}>M$ 成立，（由 $x>0^+$，即 $x>0\Rightarrow x^k<\frac{1}{M}$）$\Leftrightarrow 0<x<(\frac{1}{M})^{\frac{1}{k}}$，
>
> 取 $\delta=(\frac{1}{M})^{\frac{1}{k}}$，当 $0<x<\delta$ 时，都有 $\frac{1}{x^k}>M$，$\therefore\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^k}=\infty$。

理 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 则 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$ $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ $\exists\delta_0>0$ $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $f(x)\neq 0$ 则 $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$。

x ep e$\lim_{x\to 0}0=0$ 但 $\frac{1}{0}$ 有意义。 m

x ep e 明 $\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$ $n>m$ $a_0\neq 0$ $b_0\neq 0$ 。

> /proof/
>
> $\lim_{x\to\infty}\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=0$（$m<n$），$\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$。

x ep e$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$。 / m

> 定义：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有定义，$\forall M>0$，$\exists\delta>0$（$\delta\le\delta_0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $f(x)>M$，记作 $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$（$f(x)<-M$ 记作 $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$）。

x ep e $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}$ / m

> /solution/
>
> 由 $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，知 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}=\infty$，
>
> 或：解 原式 $=\infty$。但是不能写成 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{0}=\infty$（×）。

无 大 性

两个无 大之和不一定是无 大。

例 $\lim_{n\to\infty}n=+\infty$ $\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$ 但是 $\lim_{n\to\infty}[n+(-n)]=0$。

- **性质1** 有 个无 大之 仍是无 大。

  > /proof/
  >
  > 设 $\lim_{x\to x_0}f_1(x)=\infty$，$\lim_{x\to x_0}f_2(x)=\infty$，$\cdots$，$\lim_{x\to x_0}f_k(x)=\infty$。

∞

∞

极

性 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 $\lim_{x\to x_0} g(x)=C$ 常 $\neq 0$ 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在。

/proof

假设 $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=b$（常），

$$\Rightarrow \lim x \to x0 f(x)$$
$$= \lim x \to x0 f(x)g(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{b}{C}$$

$\lim_{x \to 0}$

x ep $e \lim$ /l / 型 。 m