P[redacted]t [redacted]

文[redacted]

[redacted] $, c$ [redacted]

命题 [redacted]

> 证明: [redacted]
>
> 下面只 [redacted]
>
> 记 r_c [redacted]
>
> 1. 先 [redacted]
>
> (I) [redacted]
>
> (II [redacted]
>
> (III [redacted]

[redacted]

引理 $A^{m\times n}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ 为列分 Q 为 m ， $\{\beta_{i_1},\beta_{i_2},\dots,\beta_{i_r}\}$ A 列 关 则 $\{Q\beta_{i_1},Q\beta_{i_2},\dots,Q\beta_{i_r}\}$ $QA=(Q\beta_1,Q\beta_2,\dots,Q\beta_n)$ 列 关 。

但 $\{\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}\}$ 线性无关 $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$

$\Rightarrow Q\beta_{i_1}, \ldots, Q\beta_{i_r}$ 线性无关 ✅

第二步：再证 $Q\beta_j$ 都是 $Q\beta_{i_1}, \ldots, Q\beta_{i_r}$ 的线性组合。

由 β_j 是 A 列向量的极大无关组可知：

$$\beta_j = \mu_1\beta_{i_1} + \mu_2\beta_{i_2} + \cdots + \mu_r\beta_{i_r}$$

两边左乘 Q 得：

$$Q\beta_j = \mu_1 Q\beta_{i_1} + \cdots + \mu_r Q\beta_{i_r}$$

$\Rightarrow Q\beta_j$ 是 $Q\beta_{i_1}, \ldots, Q\beta_{i_r}$ 的线性组合 ✅

$$\Rightarrow Q\beta_j = \mu_1 Q\beta_{i_1} + \mu_2 Q\beta_{i_2} + \cdots + \mu_r Q\beta_{i_r}, \quad \forall 1 \le j \le n$$

结论：

$\{Q\beta_{i_1}, \ldots, Q\beta_{i_r}\}$ 是 QA 的列向量的极大无关组，即为基。

因此，$r_c(QA) = r_c(A)$，故列秩在初等行变换下不变。

引理 初 变 保 列 关 列 。

说明：在引理中令 Q 为初等阵，从而可得：

$$r_c(QA) = r_c(A) \quad r$$

若 $A = 0$，则 $QA = 0$，此时 $r_c(QA) = r_c(A) = 0$

理 = 列

证明：设 $A^{m\times n}$ 相抵于标准形：

$$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由命题2知：

- A 的行秩 = B 的行秩 = r
- A 的列秩 = B 的列秩 = r

$\Rightarrow A$ 的行秩 = 列秩 = r ✅

命题 $A \in M_{m\times n}(K)$ 则 $r(A) = r(A^T)$

证明：$r(A) = A$ 的行秩 = A 的列秩 = $r(A^T)$ ✅

推论4 $A \in M_{m\times n}(K)$ 则 $r(A) = r(A^T)$

注：这是定理3与命题3的直接推论。

推论5 $A \in M_{m\times n}(K)$ P 为 m Q 为 n 则

$$r(PAQ) = r($$

证明：

$$PAQ = P_1 \cdots P_k A Q_1 \cdots$$

> 为初等矩阵，由命题2（初等变换不改变秩），逐次应用可得：
>
> $$r(PAQ) = r(A)$$

推论6 $A \in M_{m\times n}(K)$ $r = r(A)$ 则 $P \in M_m(K)$ $Q \in M_n(K)$ 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

> 注：这是矩阵相抵标准形的存在性结论。

推论7 $A, B \in M_{m\times n}(K)$ 则

$$A \sim B \iff r(A) = r(B)$$

> **充分性**：设 $r(A) = r(B) = r$，则
>
> - $$A \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
> - $$B \sim \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
>
> $\Rightarrow A \sim B$ ✅
>
> **必要性**：若 $A \sim B$，则 A 可通过初等变换变为 B，由命题2知 $r(A) = r(B)$ ✅

义（ ） $A \in M_{m\times n}(K)$

- $r(A) = m \iff m$ 个 关 $\Rightarrow$ A 为**行满秩阵**
- $r(A) = n \iff n$ 个列 关 $\Rightarrow$ A 为**列满秩阵**

$A \in M_n(K)$ $r(A) = n \iff n$ 个 /列 关 $\Rightarrow$ A 为**满秩阵**

推论8 $A \in M_n(K)$ 则 A $\iff$ A

> **充分性**：$r(A) = n \Rightarrow$ 由推论6 $\Rightarrow A \sim I_n \Rightarrow A$ 非异 ✅
>
> **必要性**：若 A 非异 $\Rightarrow A = A \cdot I_n \Rightarrow$ 由推论5 $\Rightarrow r(A) = r(I_n) = n$ ✅

引理9 A 为 $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_r}$ 为 A **阶梯点** 则 $r(A) = r =$ 个 且 列 A 列 关 。

命题 $r(A) = r$ $A = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ $\{\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}\}$ 以下 件一

1. $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}$ 关

2 β_j $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}$ j

则 $\{\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_r}\}$ A 列 关 。

> 由引理9可知，**阶梯点所在列**是 A 的列向量的极大无关组

> Important
>
> P 1 A 及列 关
>
> > (1) 用行变换将 A 化为阶梯形矩阵 B，设 $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{k_r}$ 为 B 的阶梯点；
> >
> > (2) $r(A) = r(B) = B$ 的非零行个数 $= r$；

理10 $A \in M_{m\times n}(K)$ 则 $r(A) = r \iff$ 一个 r 不于 且 $r+1$ 全为

> 因为 $r(A)=r \Rightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_{r+1}$ 线性相关
>
> 设 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in K^n$，且 $T_{r+1}\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$
>
> $\Rightarrow T_{r+1}\alpha_1, T_{r+1}\alpha_2,\dots,T_{r+1}\alpha_{r+1}$ 线性相关
>
> $\Rightarrow$ 所有 $r+1$ 阶子式为零 ✅
>
> $$\begin{bmatrix} T_{r+1}\alpha_1 \\ T_{r+1}\alpha_2 \\ \vdots \\ T_{r+1}\alpha_{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \cdots & \alpha_{i_{r+1}} \\ \alpha_{j_1} & \alpha_{j_2} & \cdots & \alpha_{j_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k_1} & \alpha_{k_2} & \cdots & \alpha_{k_{r+1}} \end{bmatrix}$$
>
> 不满秩
>
> $$\Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r+1 \\ 1 & 2 & \cdots & j+1 \end{pmatrix} = |C| = 0$$
>
> 充分性：
>
> 由 $r+1$ 阶子式全为零，以及 Laplace　理，可证明 A 的任一大于 r 阶子式全为 0。
>
> 设 $r(A)=t$，则由必要性 $\Rightarrow A$ 有一个 t 阶子式 $\neq 0$，且所有 $t+1$ 阶子式全为 0。
>
> - 若 $t>r$，则存在一个 t 阶子式 $\neq 0$，但 $t>r$，与“所有 $r+1$ 阶子式为 0”矛盾！
> - 若 $t<r$，则存在一个 r 阶子式 $\neq 0$，但 $r>t$，与“所有 $t+1$ 阶子式为 0”矛盾！
>
> 故 $t=r \Rightarrow r(A)=r$ ✅

例 1　$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ 则

$$r(C)=r(A)+r(B)$$

> 设 P_1,P_2,Q_1,Q_2 为非异阵，使得
>
> $$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{bmatrix},\quad P_2BQ_2=\begin{bmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
>
> 构造：
>
> $$\begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1AQ_1 & O \\ O & P_2BQ_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$
>
> 即化为对角块形式，非零行数为 r_1+r_2
>
> $\Rightarrow r(C)=r_1+r_2=r(A)+r(B)$ ✅

性质　乘以　不变 $\Rightarrow$ 分　分 初 变 下　橐

例 2　$C=\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} A & O \\ D & B \end{bmatrix}$ 则

$$r(C)\geq r(A)+r(B)$$

> 证明（以第一种为例）：

$$\begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1AQ_1 & P_1DQ_2 \\ O & P_2BQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r_1} & O & 0 & 0 \\ O & O & O & D_{22} \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_{r_1} & O & O & O \\ O & D_{22} & O & O \\ O & O & I_{r_2} & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

进一步化简得:

$$\begin{bmatrix} I_{r_1} & D_{12} \\ O & I_{r_2} \end{bmatrix}$$

(通过列变换消元)

$$\Rightarrow r(C) = r_1 + r_2 = r(A) + r(B)$$

> 注：若 $D = 0$，则 $r(C) = r(A) + r(B)$；否则可能更大，但至少等于。

所以一般有:

$$r(C) \geq r(A) + r(B)$$

当且仅当 $A = 0$ 时等号成立 $\iff$ 矩阵方程 $AX + YB = 0$ 有解 $\iff$ $D = 0$

例 3 公 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 则

(1) A 则

$$r(M) = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$$

(2) D 则

$$r(M) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$$

( ) A, D 则

$$r(A) + r(D - CA^{-1}B) = r(D) + r(A - BD^{-1}C)$$

证明：只需证 (1) 即可。

对分块矩阵进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{-CA^{-1}} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & O \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由 **例1** 得:

$$r(M) = r(A) + r(D - CA^{-1}B)$$

例 4 A 为 n 则

$$A = A^2 \iff r(A) + r(I_n - A) = n$$

通过初等变换能够推出:

$$\Rightarrow rank \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_n - A \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} A - A^2 & O \\ O & I_n \end{bmatrix}$$

根据例一，我们能得到结论:

$$r(A) + r(I_n - A) = r(A - A^2) + r(I_n)$$

[redacted]

则

特殊子空间

[redacted] $\rightarrow$ $\dim = 0$ V 全 $(\{0_v\}, V$ 为 凡 $)$

引理 V_0 [redacted] V 则

[redacted] 0

> $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 \in V_1,\ \alpha_2 \in V_2$$
> $$\beta = \beta_1 + \beta_2,\ \beta_1 \in V_1,\ \beta_2 \in V_2$$
>
> 则:
>
> $$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) \in V_1 + V_2$$
>
> $$k \in K,\ k\alpha = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1 + V_2$$
>
> $\Rightarrow V_1 + V_2$ 是子空间。

$V = \mathbb{R}^3$

- $V_1 =$ x $V_2 =$ y $V_3 =$ z

义

- $V_{12} = xy$ $V_{13} = xz$ $V_{23} = yz$

则

$$V_{12} \cap V_{13} = V_1, \quad V_{12} \cap V_{23} = V_2, \quad V_{13} \cap V_{23} = V_3$$

$$V_1 + V_2 = V_{12}, \quad V_1 + V_3 = V_{13}, \quad V_2 + V_3 = V_{23}$$

$$V_1 + V_{23} = V = \mathbb{R}^3, \quad V_1 + V_2 + V_3 = \mathbb{R}^3$$

推广 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ V 则

- 交

$$V_1 \cap V_2$$

> (2)
>
> $$L(S) \overset{\text{linear}}{\to} S \overset{\text{linear}}{\to} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$$
>
> $$\Rightarrow L(S) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$$
>
> 又 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关 $\Rightarrow$ 是 $L(S)$ 的一组基
>
> $$\Rightarrow \dim L(S) = r = r(S)$$

/e amp el/ V_1, V_2 V 则

$$L(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$$

> 证明：
>
> 任取 $\alpha \in V_1 + V_2$，即 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，$\alpha_1 \in V_1$，$\alpha_2 \in V_2$
>
> $$\Rightarrow \alpha_1 \in V_1 \cup V_2, \quad \alpha_2 \in V_1 \cup V_2$$
>
> $$\Rightarrow \alpha \in L(V_1 \cup V_2)$$
>
> 另一方面：
>
> - $$V_1 \subseteq V_1 + V_2, \quad \alpha_1 \in V_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_1 + 0 \in V_1 + V_2$$
> - $$V_2 \subseteq V_1 + V_2, \quad \alpha_2 \in V_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0 + \alpha_2 \in V_1 + V_2$$
>
> $$\Rightarrow V_1 \cup V_2 \subseteq V_1 + V_2$$
>
> $$\Rightarrow L(V_1 \cup V_2) \subseteq V_1 + V_2$$
>
> 结合得：
>
> $$L(V_1 \cup V_2) = V_1 + V_2$$

推广 $V_1, \cdots, V_m$ 则

$$L(V_1 \cup \cdots \cup V_m) = V_1 + \cdots + V_m$$

理6 公 V_1, V_2 V 则

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

> 证明：
>
> 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$，记 $r = \dim(V_1 \cap V_2)$。
>
> 将该基**扩充**为 V_1 的基：
>
> $$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{m-r}\}$$
>
> 将该基**扩充**为 V_2 的基：
>
> $$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r}\}$$
>
> 要证：
>
> $$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_{m-r}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-r}\}$$

是 V_1+V_2 的一组基。

任取 $\nu \in V_1+V_2$，则 $\nu=\nu_1+\nu_2$，$\nu_1\in V_1$，$\nu_2\in V_2$

$$\begin{aligned}\nu_1&=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{m-r}\}\\ \nu_2&=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}\}\end{aligned}$$

考虑线性组合：

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{m-r}\beta_{m-r}+k_1\gamma_1+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}=0$$

将前两部分归入 V_1，后一部分归入 V_2：

$$\begin{aligned}\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_{m-r}\beta_{m-r}&\in V_1\\ =-(k_1\gamma_1+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r})&\in V_2\end{aligned}$$

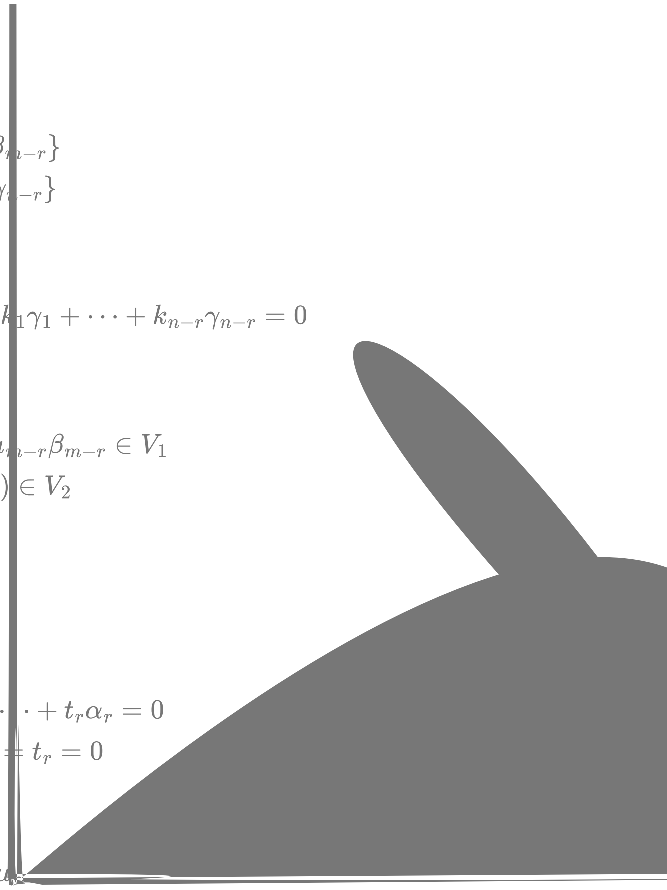
$\Rightarrow$ 上面两组向量 $\in V_1\cap V_2$

又因 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基，故存在 $t_1,\cdots,t_r$ 使得：

$$\begin{aligned}&=t_1\alpha_1+\cdots+t_r\alpha_r\\ &\Rightarrow k_1\gamma_1+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}+t_1\alpha_1+\cdots+t_r\alpha_r=0\\ &\Rightarrow k_1=\cdots=k_{n-r}=t_1=\cdots=t_r=0\end{aligned}$$

代回得：

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\cdots+\mu$$



从而 β 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合，于是 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是 $A\beta$ 的列向量的极大无关组。

从而 $r(A\beta)=r=r(A)$

充分性 设 $r(A)=r(A\beta)=r$ ， $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 是 A 列向量的一个极大无关组。

从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 A 列向量中线性无关的 r 个向量，又 $r(A\beta)=r$ 。

从而 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 也是 $A\beta$ 列向量的极大无关组，于是 β 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合，也是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，从而 (*) 有解。

若 $r(A)=r(A\beta)=n$ ，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

由前定理可知， β 表示为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合是唯一的，则 (x) 有唯一解。

若 $r(A)=r(A\beta)<n$ ，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关。

$\exists$ 不全为0的数 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in k$ ，使得

$$0=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n\cdots(1)$$

(*) 有解， $\exists k_1,k_2,\cdots,k_n\in k$ ，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n\cdots(2)$$

$$(1)xR+(2):\beta=(k_1+k_1c_1)\alpha_1+\cdots+(k_n+k_nc_n)\alpha_n$$

解得:

$$x_1=k_1+k_1c_1,\quad\cdots,\quad x_n=k_n+k_nc_n,\quad\forall k\in k$$

$\Rightarrow$ (*) 有无穷多组解。

理2 Y $Ax=\beta$ 一个 为 则 α $Ax=\beta$ $\Leftrightarrow\alpha-Y$ $Ax=0$ 。

证明:

$$\Rightarrow A(\alpha-Y)=A\alpha-AY=\beta-\beta=0$$

$$\Leftarrow 0=A(\alpha-Y)=A\alpha-AY=A\alpha-\beta=0$$

即 $A\alpha=\beta$ ， α 是 $Ax=\beta$ 的解。

下面考虑齐次线性方程组 $Ax=0\cdots(**)$

$r(A)=r(A|0)=r(A)\Rightarrow(**)$ 有解，平凡解零解。

令 $V_A=\{x\in k^n|Ax=0\}$ (**) 的解集。

断言 V_A 是 k^n 的线性子空间。

$\forall\alpha,\beta\in V_A$ ，即

$$A\alpha=A\beta=0\Rightarrow A(\alpha+\beta)=0\Rightarrow\alpha+\beta\in V_A$$

$$\forall k\in k,\quad A(k\alpha)=k(A\alpha)=0\Rightarrow k\alpha\in V_A$$

理 ( ) $r(A)=r$ 则 V_A k^n $n-r$ 从 一 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 使 $Ax=0$ $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 为 $(*)$ 。

证明：这些对 (*) 在同解的基础上进行行初等变换 $\Leftrightarrow$ 对 A 实施初等行变换。

由行初等变换可将 A 行向量的极大无关组调到前 r 行，

不妨 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 是 A 行向量的极大无关组。

通过第三类行变换 $A\to(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,0,\cdots,0)$ 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

$r(A)=r$ 在列分列对换的情形下（等价于未知数对换）

不妨设 A 的列向量的极大无关组为前 r 列：

$A=(b_1,b_2),r(B_2)=r,$ 从而 B 非零

$A=(b_1,b_2)$ 行变换 $\to(I_r,C)$

总之， A 通过初等行变换及列对换可变为如下 R 阶

$$A\to\begin{pmatrix}I_r & C\\ 0 & 0\end{pmatrix},C=(c_{ij})_{r\times(n-r)}$$

从而 (*) 与下列方程组同解：

$$\begin{cases}x_1+c_{11}x_{n-r+1}+\cdots+c_{1r}x_n=0\\ x_2+c_{21}x_{n-r+1}+\cdots+c_{2r}x_n=0\\ \vdots\\ x_r+c_{r1}x_{n-r+1}+\cdots+c_{rr}x_n=0\end{cases}$$

令

$$x_{r+1}=1,x_{n+2}=\cdots=x_n=0,\quad\eta_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\ -c_{2,r+1}\\ \vdots\\ -c_{n,r+1}\\ 1\end{pmatrix}$$

令

$$x_{r+2}=1,x_{r+3}=\cdots=x_n=0,\quad\eta_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\ -c_{2,r+2}\\ \vdots\\ -c_{n,r+2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\cdots$， 令

$$x_n=1,x_{r+2}=\cdots=x_{n-1}=0,\quad\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1,n}\\ -c_{2,n}\\ \vdots\\ -c_{n,n}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

断言： $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}$ 是 (#) 的解空间的一组基。

令 $x_1+\lambda_{r+1}x_{r+1}+\cdots+\lambda_n x_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda$ [redacted]

任取 (#) 的解 $\eta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

$$\eta=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c_{1,r+1}a_{r+1}-\cdots-c_{1,n}a_n \\ -c_{2,r+1}a_{r+1}-\cdots-c_{2,n}a_n \\ \vdots \\ -c_{n,r+1}a_{r+1}-\cdots-c_{n,n}a_n \end{pmatrix}$$ [redacted]

于是，$\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\}$ 也是 (x) 解空间的一组基 (基础 [redacted]

从而 $\dim V_A=n-r=n-r(A)$

[redacted]

题4 ( ) $r(A)=r(\hat{A})=r$ ( ) 。 $\{\eta_1,\eta_2$ [redacted]

则 A 为

其中 a [redacted]

证明: [redacted]

(1) 不妨设 [redacted]

$\Rightarrow (\sum_{i=0}^{n}$ [redacted]

$\Rightarrow \lambda_1\eta_1 + \cdots$ [redacted]

(2) 任 [redacted]

$\xi = \gamma$ [redacted]

$\lambda_1 - \cdots -$ [redacted]

[redacted] $+ \cdots + c_n$ [redacted] $\gamma + \eta_1)$ [redacted]

$\Rightarrow \dim_k V_A +$ [redacted]

[redacted] 只 [redacted] 。

[redacted] 奇异。

[redacted] I_n [redacted]

> $$(II)\begin{cases}\lambda_1^k x_1+\lambda_2^k x_2+\cdots+\lambda_n^k x_n=0\\ \quad\cdots\\ \lambda_1^{n-1}x_1+\lambda_2^{n-1}x_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}x_n=0\end{cases}$$
>
> 设 (I) 解空间 V_1，(II) 解空间 V_2。证明：$k=V_1\oplus V_2$
>
> > 证明：$V_1\cap V_2$ 是 (I) 与 (II) 联立之后新方程组的解空间
> >
> > $$(III)\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ \lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0\\ \quad\vdots\\ \lambda_1^{n-1}x_1+\lambda_2^{n-1}x_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}x_n=0\end{cases}$$
> >
> > 系数矩阵为 A .
> >
> > $$|A|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda)\neq 0$$
> >
> > $$r(A)=n\Rightarrow V_1\cap V_2=0$$
> >
> > $$\Rightarrow V_1\cap V_2=V_3=0$$
> >
> > $$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$
> >
> > $$r(A)=n,\quad\Rightarrow r(A_1)=r,\quad r(A_2)=n-k$$
> >
> > $$\dim V_1=n-r(A_1)=n-k,\quad \dim V_2=n-r(A_2)=k$$
> >
> > $$\dim(V_1\oplus V_2)=(n-k)+k=n=dimK^n$$

应用三　利　V_A　　$r(A)$

> /example/ 设 $A\in M_{mn}(R)$，证明：$r(AA^*)=r(A^*A)=r(A)$
>
> > 证明：
> >
> > $$AX=0\Rightarrow AA'X=0\subseteq V_A\subseteq V_{AA'}$$
> >
> > 任取 $x_0\in V_{A'A}$，此时 $x_0\in R^n$ 且 $A'Ax_0=0$
> >
> > 令 $X_0=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in R^m$，$(Ax_0)'(Ax_0)=0$
> >
> > $$\Rightarrow[a_1,\cdots,a_m]\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}a_i^2=0\Rightarrow\forall i,a_i=0$$
> >
> > $$\Rightarrow Ax_0=0\Rightarrow V_{A'A}\subseteq V_A\Rightarrow V_A=V_{A'A}\Rightarrow r(A)=r(A'A)$$

.