[illegible]

- **n 阶行列式**

义1

> 由两条竖线围成的 n 行 n 列元素组成的式子（数值）称为 n阶行列式：
>
> $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
>
> 有时也记为 $\det(A)$ （determinant）
>
> a_{ij} 称为第 i 行第 j 列元素， a_{ij} 称为主对角线（对角线第 i, j 元素，删去 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列，剩余元素按原来的顺序构成一个 $n-1$ 阶行列式，称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}

义2

> 当 $n=1$ 时，1阶行列式 $|A|$ 定义为 a_{11} ；下设所有 n 阶行列式值已定义好，特别地。
>
> 下定义 n 阶行列式：
>
> $$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

义

> **递归 义** 按第1列进行展开
>
> $$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

义4

> 若 $a_{ij} = 0$ ， $\forall i > j$ ，则主对角线下方所有元素都为0，称 $|A|$ 为上三角行列式。
>
> 若 $a_{ij} = 0$ ， $\forall i < j$ ，则主对角线上方所有元素都为0，称 $|A|$ 为下三角行列式。

性质1

性质2 $|A|$ $|A| = 0$

性质 $|A|$ c $|B| = c|A|$

性质4 $|A|$ $|B| = -|A|$

性质5 $|A|$ $|A| = 0$

性质6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r}+b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2r}+b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nr}+b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质7

性质8

$$|A| = \sum_i a_{ki}A_{ki} = \sum_i a_{ik}A_{ik}$$

性质9 $|A'| = |A|$

- ## 行列式展开和转置

> /proof/
>
> 先从列的角度证明行列式的展开
>
> 考虑如下相邻对换，既仅定义了相邻对换：
>
> $$1 \cdots r-1 \quad r \cdots n \longrightarrow r \quad 1 \cdots r-1 \quad r+1 \cdots n$$
>
> 对于矩阵 M_{ij}：$|A| \to r$ 次列的相邻对换 $|B| \Rightarrow |B| = (-1)^{r+1}|A|$.
>
> $$|B| = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & \cdots & a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nr} & a_{n1} & \cdots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
>
> $$\Rightarrow |B| = a_{1r}N_{1r} - a_{2r}N_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}N_{nr}$$
>
> 容易看出$\forall i$ ，$N_{ir} = M_{ir}$：
>
> $$\begin{aligned} \Rightarrow |A| &= (-1)^{r+1}|B| = (-1)^{r+1}(a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr}) \\ &= (-1)^{r+1}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{r+2}a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr} \end{aligned}$$
>
> $$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}$$
>
> 即按第r列展开的展开式.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

> /theorem/
>
> 定理1：设 $|A|$ 为 n 阶行列式，$1 \le r, s \le n$，则
>
> $$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = \delta_{rs}|A|$$

> /proof/
>
> 若 $r=s$，已证；
>
> 下不妨设 $r<s$ ，构造一个新行列式，
>
> 新行列式将第s列的元素全部换位第r列（方便证明）
>
> 实际上s列无论元素是什么，结论都成立
>
> $$0=|C|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & \cdots & a_{kr} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1r}A_{1s}+a_{2r}A_{2s}+\cdots+a_{nr}A_{ns}$$
>
> 后面推出的式子也称为 $|C|$ 按第 s 列展开
>
> $|A|$ 的第 s 列元素与第 r 列代数余子式的乘积之和为0.
>
> (本节课的一些结论在研究矩阵时仍会用到)

引理2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & {}_{sr} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad {}_{sr} \quad {}_{sr}$$

> /proof/
>
> $|A|$ 按第 r 列进行展开
>
> $$|A|=a_{1r}A_{1r}+a_{2r}A_{2r}+\cdots+a_{sr}A_{sr}+\cdots+a_{nr}A_{nr}$$
>
> $\forall i=s,\quad A_{ir}\neq 0$
>
> A_{ir} 中至少有一行为0 $\implies |A|=a_{sr}A_{sr}$

引理3：$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$ (按第 r 行进行展开)

（该结果可以推广至类似定理1的对偶结果）

> /proof/
>
> 第r行元素的拆分：
>
> $$\begin{gathered} a_{r1}=a_{11}+0+\cdots+0 \\ a_{r2}=0+a_{12}+\cdots+0 \\ \cdots\cdots \\ a_{rn}=0+0+\cdots+a_{1n} \end{gathered}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{r1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{r2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn}$$

> 证毕.

定理4：设$|A|$为n阶行列式，$1 \leq r, s \leq n$，则

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = \delta_{rs}|A|$$

> /proof/
>
> 若$r = s$已证✓ (引理3)
>
> 下不妨设$r < s$
>
> 构造新行列式，按s行展开
>
> $$0 = |C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn}$$
>
> 证毕.

> /proof/
>
> 对阶数进行归纳 $n = 1$ 成立
>
> $n - 1$ 阶成立 ✓ 证n阶
>
> $$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$
>
> $\forall i, j$, N_{ji} 是 M_{ij} 的转置,
>
> 由归纳假设得 $N_{ji} = M_{ij}$, $\forall i, j$
>
> $$|A| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1} = |A'|$$
>
> (按照第一行进行转置)

Part 2 行列式计算

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$|A_i| =$$

/proof/

若 (*) 有解，则解必为如上形式。

此处仅证了存在的唯一性，未证解的存在性.

只要证明 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ 确为 (*) 的解，即可.

其中

$$|A_i| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

/proof/

$$a_{11}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = \delta_{rs}|A|$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = \delta_{rs}|A|$$

> 然后对行列式元素求和
>
> $$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$
>
> > 这里注意一点:
> >
> > $$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$
> >
> > 以后若对一个长方形的二维行列式进行求和，如果行列括号的位置无改变，那么行列括号可以交换次序.
>
> $$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$$
>
> 验证(*) 的第k个方程:
>
> $$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k \quad , \quad \forall k \geq 1$$
>
> $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j &= \sum_{j=1}^{n}\left(a_{kj}\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}\right) = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{kj} b_i A_{ij} \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij}\right) \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{ki} |A| = b_k \quad (i = k, 1; i \neq k, 0) \end{aligned}$$

n

n

> $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{rs} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{rs}A_{rs}$$
>
> 计算行列式的值时，利用行列式的性质， 将行列式的某行或某一列化出尽可能多的零， 再按这一行或这一列展开，进行降阶处理。
>
> > 性质3：行列式的某一行或某一列乘C，得到的值是原来行列式的C倍
> >
> > 性质7：行列式的某一行乘以一个数加到另外一行上或者某一列乘以一个数加到另外一行上，行列式的值不改变

- ## Vandermonde 行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

> /proof/

[redacted]最后一行[redacted]

[redacted]性质化[redacted]

[redacted]递推式:[redacted]

[redacted]上，我们有[redacted]

[redacted] $+ (n -$ [redacted]

/proof/

按第一行展开:

[redacted]

$F_n = (-$

然[redacted]用性[redacted]

然[redacted]照第[redacted]展开[redacted]

然[redacted]列上[redacted]用性[redacted]

提[redacted]因子[redacted]

逆序数

定义1： 我们称 n 个数 $1,2,\ldots,n$ 的排列 $(1,2,\ldots,n)$ 为常序排列，即数字从小到大的排列为常序排列。如果在一个排列中 j 排在 i 之前但是 $j>i$ ，则称这是一个逆序对。一个排列的所有逆序对的总个数称为这个排列的逆序数。

Important

引理1

证明：首先我们考虑相邻两个数的对换。若是 $k_i>k_{i+1}$ ，则对换后逆序数减少了 1；若 $k_i<k_{i+1}$ ，则对换后逆序数增加了 1，无论哪种情形，奇偶性都改变了。再考虑一般情形。k_i 与 k_j 的对换可通过相邻两个数的对换来实现：不妨设 $i<j$ ，将 k_i 与 k_{i+1} 对换，再与 k_{i+2} 对换，$\cdots$，最后与 k_j 对换（共换了 $j-i$ 次）；再将 k_j 与 k_{j-1} 对换，再与 k_{j-2} 对换，$\cdots$，最后与 k_{i+1} 对换（共换了 $j-i-1$ 次）；此时 k_j 到了 k_i 原来的位置，k_i 到了原来 k_j 的位置。这样一共换了 $2(j-i)-1$ 次，因此改变了奇偶性

引理2

证明 设 S_n 中的奇排列有 p 个，偶排列有 q 个。由于 $n\geq 2$ ，故可将每个奇排列的头两个数对换一下，则所有的奇排列变成了互不相同的偶排列，因此 $p\leq q$ 。同理可证 $q\leq p$ ，故 $p=q$.

Caution

引理

$(1,2,$

证明 对 n 进行归纳。$n=1$ 时结论显然成立，设对 $1,2,\cdots,n-1$ 的任一排列结论成立。设 n 在排列 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的第 i 位置，即 $k_i=n$ ，其逆序数为 m_i （这时 $m_i=n-i$ ）。将 k_i 与 k_{i+1} 对换，再与 k_{i+2} 对换，$\cdots$，最后与 k_n 对换（共换了 m_i 次），此时 n 就到了最末一位。注意到

$$N(k_1,k_2,\cdots,k_n)=m_i+N(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n),$$

且 $(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)\in S_{n-1}$ ，由归纳假设知 $(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)$ 经过 $N(k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_n)$ 次相邻对换可变为常序排列 $(1,2,\cdots,n-1)$ ，因此由上面的讨论知 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 经过 $N(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 次相邻对换可变为常序排列 $(1,2,\cdots,n)$.

Important

A B