Fragment 1 数

- 义

> /Define/
>
> 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ 内有定义，$x_0+\Delta x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$,若
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
>
> $$x_0+\Delta x = x$$
>
> 存在
>
> 该极限值称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ ，或
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{d}{dx}|_{x=x_0} \text{ or } \frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0} \text{ or } \frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}$$
>
> 其中 $\frac{d}{dx}$ 称之为导数算子
>
> 如果有
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$
>
> 称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导， $f(x_0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处变化率
>
> 否则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导

导数表示形式：

$$f'(x_0) = y'|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}$$

切线方程：

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$$

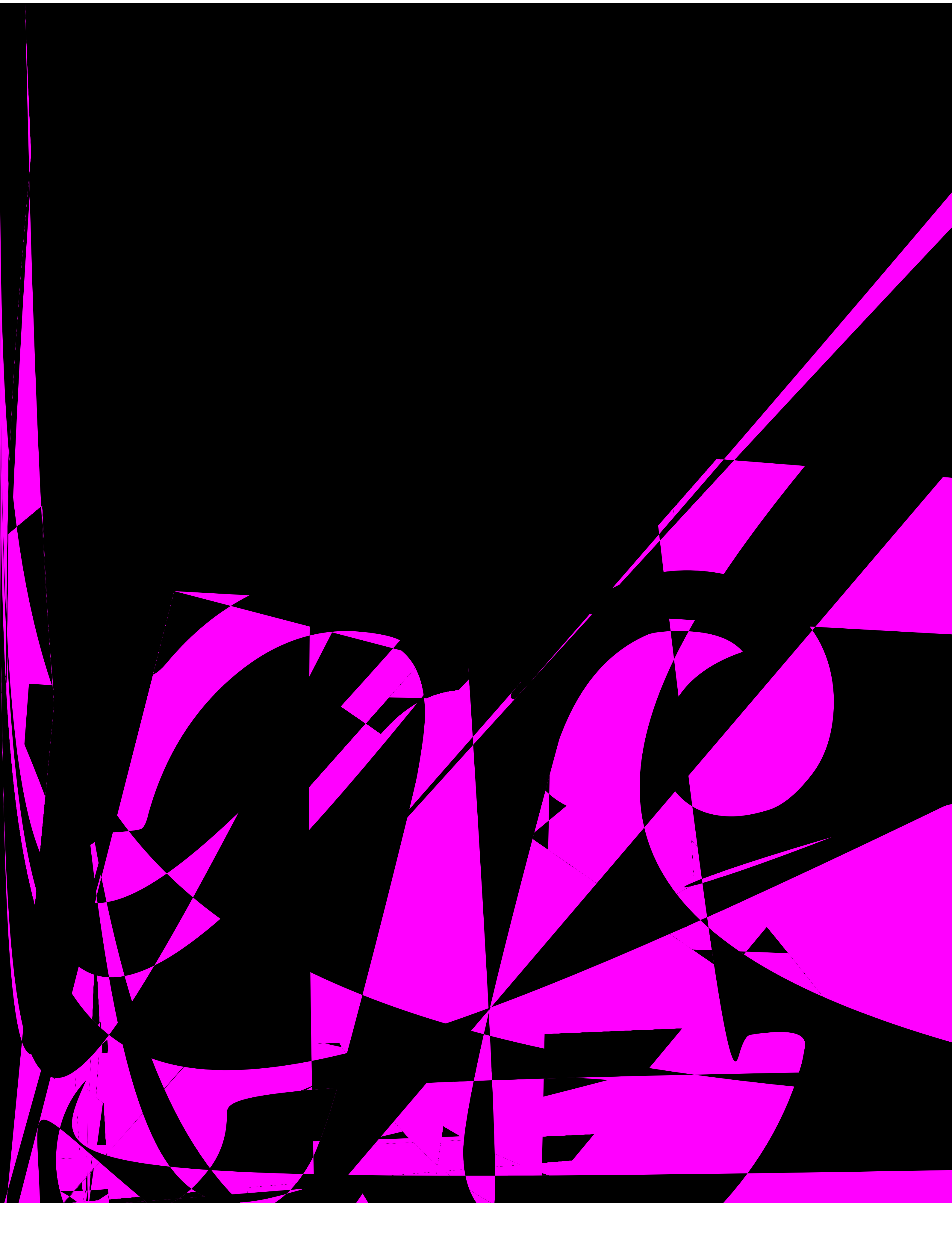
法线方程：

$$y-y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

然后我们可以给出左右导数的概念：

> /Define/
>
> 右导数：
>
> $f(x)$在$(x_0, x_0+\delta_0)$ $(\delta_0>0)$有定义，$x_0+\Delta x \in (x_0, x_0+\delta_0)$
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ (e}$$

$y = f(x)$ 在 x



[redacted]

若$u=\varphi(x)$对x可导，$y=f(u)$对u可导，则复合函数$y=f(\varphi(x))$对x也可导，且$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$，此称为链式法则。

[redacted]

因为$f'(u)$存在，即$\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$，设$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$（当$\Delta u\to 0$时），则$\Delta y=f'(u)\cdot\Delta u+\alpha\Delta u$。

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u)\cdot\Delta u+\alpha\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

补充定义，当$\Delta u=0$，令$\alpha=0$，则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x) + \lim_{\Delta x \ldots}$$

[redacted]

/example/ 求$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$（$a > 0$）的导数

> /solution/
>
> $$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot (1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$
>
> 并且在第三章我们会学到
>
> $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \quad x^2 + a^2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x}=0=f'(0)$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0=f'(0)$$

$\therefore f'(0)=0$

• 高阶 数

• 义

/Define/

若$f(x)$在区间I上的导函数$f'(x)$在I上又可导，即$[f'(x)]'$存在，记为$f''(x)$。

$(y')'=y''=\frac{d^2y}{dx^2}$

$y''=(y')'=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}y'=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})\triangleq\frac{d^2y}{dx^2}$

$dx^2=dx\cdot dx=(dx)^2\neq d(x^2)=2xdx$

称为$f(x)$在区间I上的二阶导函数，或简称为二阶导数。

如果$f(x)$在区间I上的n阶导函数存在，记作：

$$y^{\underbrace{''\cdots'}_{n}}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\frac{d}{dx}\cdot y^{(n-1)}$$

当$n>1$时，$y^{(n)}$称为高阶导数，$y^{(0)}=y$。

• 基本 等函数高阶 数

(1). $y=a^x$，求$y^{(n)}$

/solution/

$y'=a^x\ln a$

$y''=(a^x\ln a)'=\ln a(a^x)'=\ln a\cdot a^x\ln a=a^x(\ln a)^2$

$\cdots$

$y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

$(e^x)^{(n)}=e^x$

(2). $y=x^a$（$a\neq0$常），求$y^{(n)}$

/solution/

$y'=ax^{a-1}$，$y''=a(a-1)x^{a-2}$

$\cdots$

$y^{(n)}=a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$

$(x^n)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdots1\cdot x^{n-n}=n!$

约定$x^0=1$，$n,m\in N$，$m>n$，$(x^n)^{(m)}=0$

(3). $y=\ln x$，求$y^{(n)}$

[redacted]

/Theorem/ [redacted]

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(f_1 f_2 f_3 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{k} f_1 f_2 f_3 \cdots f_i' \cdots f_n$$

[redacted]

/Theorem/ [redacted]

若$u^{(n)}$，$v^{(n)}$均存在，则

$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(1)} + \cdots + C_n^n u^{(0)} v^{(n)}$$

[redacted]

当u，v [redacted]

xample/ [redacted]

/solution/ [redacted]

$(n \geqslant 2)$，当n [redacted]

例题

. 求$y=\cos^2 x$的n [redacted]

/solution/

[redacted]

$y^{(n)} = 2^{n-1}\cos(2x +$ [redacted]

2) [redacted] 的n阶导数 [redacted]

[redacted]

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = (x+1)^{-1}(x+2)^{-1}$$

[redacted] $(x+1)^{-1} - (x+2)^{-1}]^{(n)}$

[redacted] $-1)(-1-1)\cdots(-1-(n-1))[(x+1)^{-1-n} - (x+2)^{-1-n}]$

[redacted] $-1)^n n![(x+1)^{-n-1} - (x+2)^{-n-1}]$

$y' = e^x \cos$ [redacted]

> $$
> \begin{aligned}
> y^{(k+1)} &= (y^{(k)})' \\
> &= \sqrt{2}^k [e^x \cos(x + k \cdot \frac{\pi}{4}) + e^x(-\sin(x + k \cdot \frac{\pi}{4}))] \\
> &= \sqrt{2}^{k+1} e^x [\cos\frac{\pi}{4} \cos(x + k \cdot \frac{\pi}{4}) - \sin\frac{\pi}{4} \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{4})] \\
> &= \sqrt{2}^{k+1} e^x \cos(x + (k+1) \cdot \frac{\pi}{4})
> \end{aligned}
> $$
>
> 当$n = k+1$时也成立，所以$y^{(n)} = \sqrt{2}^n e^x \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{4})$

• 方程确　函数　　数

> 定义：设$F(x,y)=0$，D、Z均为非空实数集，$\forall x_0 \in D$，$F(x_0, y)=0$，如果方程有唯一属于Z的解y，即$F(x_0,y_0)=0$，$y_0 \in Z$，按照函数的定义，得到了D上的一个函数，记作$y=y(x)$，称为方程$F(x,y)=0$确定的函数。

如何求$y=y(x)$的导数?

如果从$F(x,y)=0$中解出y用x的表达式，称$y=y(x)$为显函数。

/example/　$y^3 - x^3 = 1$，确定$y=y(x)$，$y=\sqrt[3]{1+x^3}$，$x \in \mathbb{R}$，满足$(\sqrt[3]{1+x^3})^3 - x^3 \equiv 1$。

如果$F(x,y)=0$确定$y=y(x)$，但是y不能用x的显式表达式表示，称为方程确定的隐函数。

如$y - xe^y = 1$确定$y=y(x)$，称为隐函数，有$y(x) - xe^{y(x)} \equiv 1$，$x \in D$。

• 隐函数求

/example/　已知$y(x) - xe^{y(x)} = 1$，求$\frac{dy}{dx}$。

> /solution/
>
> 方程两边同时对x求导：
>
> $y'(x) - e^{y(x)} - xe^{y(x)} \cdot y'(x) = 0$
>
> $(1 - xe^{y(x)})y'(x) = e^{y(x)}$
>
> $\therefore y'(x) = \frac{e^{y(x)}}{1 - xe^{y(x)}}$

以后用以下方法：

/example/　已知$y - xe^y = 1$，求$\frac{dy}{dx}$。

> /solution/
>
> 方法一：由$y=y(x)$，方程两边对x求导：
>
> $y' - e^y - xe^y y' = 0$ (1)
>
> $y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$
>
> 求$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$：当$x - 0 \cdot e^y = 1$，$\Rightarrow y = 1$，　$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = e$
>
> 在曲线过$(0,1)$处：切线方程：$y - 1 = ex$　；法线方程：$y - 1 = -\frac{1}{e}x$
>
> 求$\frac{d^2y}{dx^2}$：
>
> $$y'' = \frac{e^y \cdot y'(1 - xe^y) - e^y(0 - e^y - xe^y y')}{(1 - xe^y)^2}$$
>
> 化简，把$y' = \frac{e^y}{1-xe^y}$代入，再化简。

边对

$y' -$

化简，解出

：把$x =$

$y = f(x$

),方程两

$= f'(x -$

/solution/

$\ln y = \sin x \ln x$

方程两边对x求导：

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = y(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

/solution/

$$\ln y = \ln(\ln x)^x - \ln x^{\ln x} \iff \ln y = x \ln\ln x - (\ln x)^2$$

$$\frac{1}{y}y' = \ln\ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}$$

/solution/

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{3}\ln|1-5x|$$

方程两边对x求导：

(4). 求$y=(\frac{b}{a})^x$(

由$y =$

于是d

> ⇔已[redacted]
>
> $\therefore y =$ [redacted]

- **近似**[redacted]

若$y = f($[redacted]

当$|\Delta x|$很[redacted]

$\therefore \Delta x \to$ [redacted]

即$\Delta y =$ [redacted]

• 数方程确 数

若$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y=y(x)$，求$\frac{dy}{dx}$

分析：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

总结：若$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$存在，且$\varphi'(t)\neq 0$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

或者

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\psi(t)}{d\varphi(t)}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

一元函数微分学的第一部分就此结束。