[redacted]

分 [redacted] 决 [redacted] 。

[redacted] 函 [redacted] $[a,b]$ 上 [redacted] 分 $\int_a^b f(x)\,dx$ [redacted] 义为

[redacted]

为 $a,$ [redacted]

[redacted] $)\Delta x_i$ [redacted] 似于 [redacted]

[redacted] 了一个

[redacted]

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

D $\Delta\sigma_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $f(x,y)$ $\Delta\sigma_{ij}$ M_{ij} m_{ij} $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \leq M_{ij}\Delta y_j,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m.$$

j

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\Delta y_j \leq \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = A(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\Delta y_j,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Δx_i i

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j.$$

$\lambda = \max|\sigma_{ij}|$ $\to 0$ $\lambda^* = \max|\Delta x_i| \to 0$ $f(x,y)$ D $\lambda \to 0$ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\int_a^b A(x)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

$A(x)$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

$f(x,y)$ $f_1(x)/f_2(y)$

$$\iint_D f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx \int_c^d f_2(y)\,dy,$$

推论 $f(x,y)$ $D = [a,b] \times [c,d]$ 上 则

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

$f(x,y)$ D

$$= \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} f(x, \ldots$$

$f(x,y)$ … Tonelli … 。Fubini

Tonelli … 函 … 以分 … 为两个 … 函

… 中 … 公

公

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy, \tag{1}$$

$f(x,y)$ … D

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \tag{2}$$

… Ouv … Oxy … T … T … Ouv … Δ

Oxy … D … $T : \Delta \to D$

φ … ψ … Δ

dx … dy

$$\iint_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv \right)$$

… $dx\, dy$

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Δ … Δ … $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ … $T : \Delta \to D$ … Δ

D … Δ … D

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, du\, dv.$$

引理 σ Δ 内 一个 下 为 (u_0, v_0) 为 h T 为 D 内 一个 为 S 则 S

$$|S| = \iint_{\sigma} |J(u,v)|\, du\, dv.$$

理2

T

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

Ouv 上 光 Δ 一一 为 Oxy D 且 φ ψ Δ 上 二 偏

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0 \quad 当\, (u,v) \in \Delta,$$

$f(x,y)$ 义 D 上 函 则

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, du\, dv.$$

> h Δ $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ T D $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$ $(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in \Delta\sigma_i$
>
> $$|\Delta S_i| = |J(\bar{u}_i, \bar{v}_i)| \cdot |\Delta\sigma_i|.$$
>
> $$\begin{cases} \bar{x}_i = \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \\ \bar{y}_i = \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \end{cases}$$
>
> $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta S_i$
>
> $$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) |\Delta S_i| = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)) |J(\bar{u}_i, \bar{v}_i)| \Delta\sigma_i$$
>
> $$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)) |J(\bar{u}_i, \bar{v}_i)| |\Delta\sigma_i|.$$
>
> $h \to 0$ $\lambda = \max(d(\Delta S_i)) \to 0$
>
> $$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, du\, dv.$$

从 元 公 。事 上 公 以写

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \iint_{\Delta} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) |J(u,v)|\, d\sigma.$$

于 作 Δ 分 到 D 作 分 D 上 元 dS 与 Δ 元 $d\sigma$ 之 下列 关

$$dS = |J(u,v)|\, d\sigma,$$

两 $f(P)$ 分便 上 元公 。 义下

$$\iint_D f(P)\, dS = \iint_{\Delta} f(\varphi(Q), \psi(Q)) |J(Q)|\, d\sigma$$

出 [redacted]

Impor [redacted]

分 [redacted]

[redacted] $(x, y)\, d$ [redacted] $y = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d$ [redacted]

$r =$ [redacted]

$$dS = r\, dr\, d\theta,$$

[redacted]

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

[redacted]

> $$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \le \theta < 2\pi, \\ z = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$$
>
> $$J(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -r^2\sin\varphi,$$
>
> $$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$
>
> $Oxyz$ r $M(x,y,z)$ φ $\overrightarrow{OM}$ z θ $\overrightarrow{OM}$ Oxy x
>
> $r =$ $\theta =$ z $\varphi =$ z
>
> r $r + dr$ Oxz θ $\theta + d\theta$ z φ $\varphi + d\varphi$
>
> $$dr \cdot r\,d\varphi \cdot r\sin\varphi\,d\theta = r^2 \sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Part 2 应用

- **曲面面积**

也 以 切 似 以从 分三 出

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

下 们 个 义 。先 S 函

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

出 其中 D 光 。 f 具 x y 偏 则 光 。 上 任一 切 。

任 D 一个分 $\Delta D_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。 于 个分 分为 n ΔS_i 使 ΔS_i Oxy 上 为 ΔD_i 。任 $(\xi, \eta_i) \in \Delta D_i$ 上 (ξ, η_i) 作切

切 上与 ΔS_i 公共 ΔD_i 一 为 $\Delta\sigma_i$ ΔS_i ( ) 似。

$\lambda = \max\{d(\Delta D_i)\}$ 其中 $d(\Delta D_i)$ ΔD_i 。 $\lambda \to 0$ $\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ 则 S 且 便

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i.$$

下 们 $\Delta\sigma_i$ 。 $\Delta\sigma_i$ n_i 余 为

$$(\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i),$$

则

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\gamma_i|}.$$

光 $z = f(x, y)$ (ξ, η_i)

$$n_i = \pm(f_x(\xi, \eta_i), f_y(\xi, \eta_i), -1),$$

与 余 为

$$\bar{z}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \rho(P_i) \Delta\Omega_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(P_i) \Delta\Omega_i}.$$

$\lambda \to 0$

$$\bar{x} = \frac{\int_\Omega x\rho(P)\,d\Omega}{\int_\Omega \rho(P)\,d\Omega} = \frac{\int_\Omega x\,dm}{\int_\Omega\,dm},$$

$$\bar{y} = \frac{\int_\Omega y\rho(P)\,d\Omega}{\int_\Omega \rho(P)\,d\Omega} = \frac{\int_\Omega y\,dm}{\int_\Omega\,dm},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_\Omega z\rho(P)\,d\Omega}{\int_\Omega \rho(P)\,d\Omega} = \frac{\int_\Omega z\,dm}{\int_\Omega\,dm}.$$

Ω $dm = \rho(P)\,d\Omega$ $\int_\Omega dm$ Ω

Ω D D

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}.$$

Ω V V

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_V \rho(x,y,dz)}.$$

转动惯

V $\rho(x,y,z)$ V V
V dV $dm = \rho(x,y,z)dV$ dV x y z

$$dI_x = (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV = (y^2+z^2)dm,$$

$$dI_y = (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV = (x^2+z^2)dm,$$

$$dI_z = (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV = (x^2+y^2)dm.$$

V

dI_x dI_y dI_z V

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

V

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

引力

V $\rho(x, y, z)$ 在 上连续。求 对 外一点 处质量为1的质点的引力 。任取 上的质量微元 。 到 的向量为 。这时 对

$$dF = \frac{k\rho(x, y, z)}{r^3}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)dV,$$

k $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ V F

$$F_x = \iiint_V k\frac{x - x_0}{r^3}\rho(x, y, z)\, dx\, dy, dz,$$

$$F_y = \iiint_V k\frac{y - y_0}{r^3}\rho(x, y, z)\, dx\, dy, dz,$$

$$F_z = \iiint_V k\frac{z - z_0}{r^3}\rho(x, y, z)\, dx\, dy, dz.$$

.