Chapter 函数连续

- ## 义

/Define/

定义1：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

定义2：设 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义：

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有定义，A 是一个确定的常数，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$(\delta\le\delta_0)$，

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。

若 $x=x_0$，$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow f(x_0)=A\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续。

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\\&\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0\end{aligned}$$

令 $x-x_0=\Delta x$ 称为自变量的增量，即 $x=x_0+\Delta x$。

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x$$

[redacted]

> $y=\sqrt{\cos x-1}$ 在定义域内每一点都连续。

/example/ $\lim_{x\to 0}\frac{1+e^x+\sqrt{1+x^2}}{\sin x+\cos x+1}$。

> 解：原式 $=\frac{1+1+1}{0+1+1}=\frac{3}{2}$。

/example/ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$。

$=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}0=0$ “ ” 。

> /solution/
>
> 解法一：
>
> $$\text{LHS.}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$$
>
> 解法二：
>
> $$\text{LHS.}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cdot 1}=\frac{1}{2}$$
>
> （$\lim_{x\to 0}\cos x=1\neq 0$，$\cos x\sim 1$，$x\to 0$）
>
> “等价量替换”多次求极限。

/example/ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$。

> /solution/
>
> 正解：
>
> $$\text{LHS.}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$f(x)$ (a,b) 一 $f(x)$ (a,b) 。

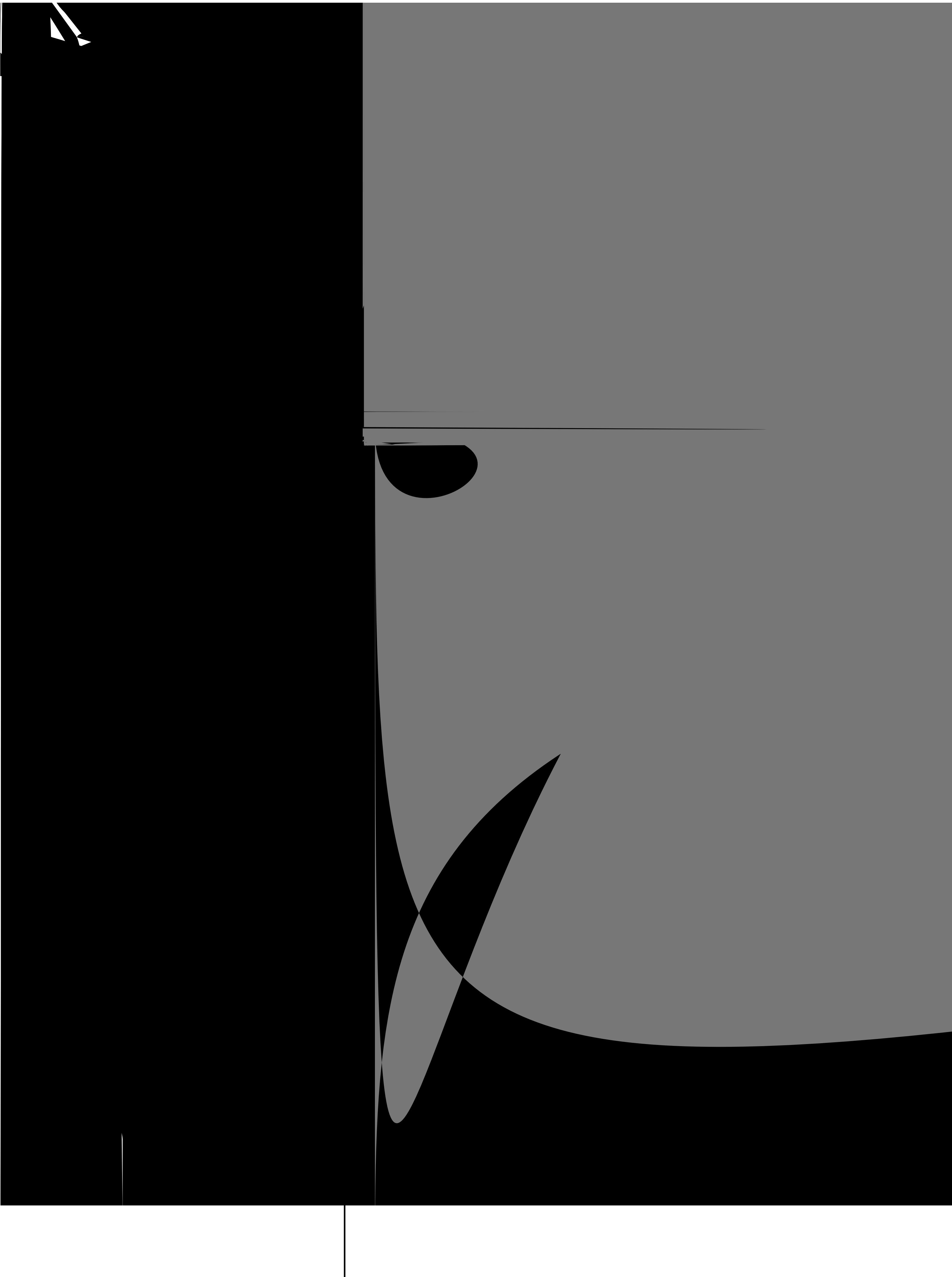
$f(x)$ (a,b) $x=a$ $x=b$ $f(x)$ $[a,b]$ 上 。

$f(x)$ I 上 I 上 。

- ## 闭区间上连续函数 性质

  - **理（最大值与最小值 理）** $f(x)\in C[a,b]$ $f(x)$ $[a,b]$ 上一 M m。$\exists x_1,x_2\in[a,b]$ $f(x_1)=M$ $f(x_2)=m$ $\forall x\in[a,b]$ $m\le f(x)\le M$。
    - **推论1** $f(x)\in C[a,b]$ $f(x)$ $[a,b]$ 上 。
    - **推论2** $f(x)\in C[a,b]$ $R(f)\subseteq[m,M]$。
  - **理（根存在 理或零点 理）** $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 一 $\xi\in(a,b)$ $f(\xi)=0$。
  - **理（介值 理）** $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)\neq f(b)$ $f(a)$ $f(b)$ 一 C 一 $\xi\in(a,b)$ $f(\xi)=C$。

    > /proof/
    >
    > 要证原结论成立，只要证 $f(\xi)-C=0$ 成立，令 $\varphi(x)=f(x)-C$，只要 $\varphi(x)=C$ 有一个根（1）成立。



[redacted]有 $f(x)\to 0$，$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$。

[redacted]$-1\sim x$；$x\to x_0$，有 $f(x)\to 0$，$e^{f(x)}-1\sim f(x)$。

[redacted]>0 $a\neq 1$

[redacted]

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a$$

[redacted]。

[redacted]$\alpha\neq 0$

[redacted]

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha$$

[redacted]。

[redacted]$a>0$ $\lim_{x\to x_0}v(x)=b>0$ $\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$ $=a^b$。

$$\begin{aligned}\text{LHS.} &= \lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}\\ &= e^{\lim_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}\\ &= e^{\lim_{x\to x_0}v(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\ln u(x)}\\ &= e^{b\ln a}=a^b\end{aligned}$$

[redacted]

$$\xlongequal{\arcsin x=t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$$

[redacted]

$$\xlongequal{\arctan x=t}\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=1$$

- [redacted]一般形[redacted]

[redacted]x_0 $f(x)\to 0$

[redacted]$\frac{\ln(1+f(x))}{}$[redacted]$=1$ $\lim_{x\to x_0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$

[redacted]

/solution/

解法一：

[redacted]

$$
\begin{aligned}
\text{HLS.} &= \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1}\cdot\frac{1}{x}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x})} \\
&= e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} \\
&= e^{\frac{1}{3}\ln abc} = (abc)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{abc}
\end{aligned}
$$

解法二:

$$
\begin{aligned}
\text{HLS.} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{a^x+b^x+c^x}{3})} \quad (1^{\infty}) \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln[1+(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)]} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1)} \\
&= e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)} = \sqrt[3]{abc}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$。

/solution/

$$
\begin{aligned}
\text{LHS.} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x(1+3^{-x})}{\ln 2^x(1+2^{-x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3^x+\ln(1+3^{-x})}{\ln 2^x+\ln(1+2^{-x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln(1+3^{-x})}{x\ln 2+\ln(1+2^{-x})} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3+\frac{1}{x}\ln(1+3^{-x})}{\ln 2+\frac{1}{x}\ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

- **证明题训练**

/example/

$f(x)$ (a,b) a,b $\lim_{x\to a^+} f(x) = A > 0$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = B < 0$

$\xi\in(a,b)$ $f(\xi)=0$。

证法一:

不妨令

$$
F(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & x\in(a,b) \\ B, & x = b \end{cases}
$$

知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)F(b) = AB < 0$,

由根的存在定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$，$x\in(a,b)$ 时 $F(x)=f(x)$，故 $f(\xi)=0$。

证法二:

由 $\lim_{x\to a^+} f(x) = A > 0$，由保号性，$\exists\delta_1>0$，当 $a<x<a+\delta_1<b$ 有 $f(x)>0$，取 $a<a_1<a+\delta_1$，有 $f(a_1)>0$。

/example/ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $f(x)$ 。

> /solution/
>
> 由 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处无定义，$x = 1$ 为间断点。
>
> $$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \end{aligned}$$
>
> 知 $x = 1$ 为可去间断点。

/example/ $f(x) = \tan x$ 。

> /solution/
>
> 由 $f(x)$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 处无定义，在左侧有定义。
>
> $$\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$
>
> $$\lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to k\pi + \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$
>
> 知 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 为第二类间断点（无穷型间断点）。