性

$$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a}) = (nm)\vec{a}$$

/ /yt e o p rp r

律 换 交

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

律 合

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}\end{aligned}$$

i/ /f e Ð n

$\vec{a}$ $\vec{b}$ 义 个定 为 两 ,

$\vec{a}$ $\vec{b}$ θ $0 \le \theta \le \pi$ 定 两乘) , 的 (

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

$\vec{a}$ 称$\vec{b}$ 为 与积 两乘 积 点 积 或点数积 或的 或

然后给出性

> / /yt e o p rp r
>
> 性 :
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
>
> ---
>
> 性 2 :
>
> $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$
>
> ---
>
> 性 3 :
>
> $$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$
>
> $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 反 之
>
> $\Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$
>
> $\Rightarrow \cos\theta=0$ 或 $|\vec{a}|=0$ 或 $|\vec{b}|=0$
>
> $\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$, 即 $\vec{a}\perp\vec{b}$
>
> $|\vec{a}|=0\Rightarrow\vec{a}=\vec{0}$ 或
>
> $\vec{a}=0$ 成 写
>
> ---
>
> 性 4
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$$
> $$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

点乘积的物理意义 一个 点M在恒力$\vec{F}$的作用下沿直线由A点移动到B点所做的功W = $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$

> i/ /f e Ð n
>
> $\vec{a}\neq\vec{0}$ $|\vec{a}|\neq 0$ 即
>
> $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\vec{a}$ 称 $\hat{a}$ 位 $\hat{a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 为单 作 矢 即 的
>
> $$\Rightarrow\vec{a}=|\vec{a}|\hat{a}$$
> $$|\hat{a}|=\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right|=\frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$$

$\hat{a}$ 是单位矢 求矢 $\vec{a}$ 在 矢 $\vec{b}$ 上的投影

P

> $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\vec{b} \neq \vec{0}$ ， 时
>
> $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

• 空间直角坐标

• 集合直积

/example/ $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$

定义 A 与 B 的直积$A \times B = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}$ $A \times A = A^2$

$R = (-\infty, +\infty)$ $R \times R = R^2 = \{(x,y)|x,y \in R\}$

二维平 $R \times R \times R = R^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in R\}$

三维空 $\underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n个} = R^n$

$R^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|x_1,x_2,\ldots,x_n \in R\}$

$n > 3$ 时 称为抽 空

• 空间直角坐标系

全体空 点组成的 合与 $\{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$ 建立一一对应。

三个平 把空 分成八个卦

第一卦 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

xOy 平 方程 $z = 0$ yOz 平 方程 $x = 0$ zOx 平 方程 $y = 0$

x 方程 $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y 方程 $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ z 方程 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$M(x,y,z)$ 关于 xOy 平 对称点为 $(x,y,-z)$

oz 对称点为 $(-x,-y,z)$ O 点对称点为 $(-x,-y,-z)$

• 空间两点间距离

$P_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $P_2(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$|P_1P_2| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$$

> i/ /f e Ð n
>
> X 义$\forall P_1, P_2 \in X$ 个是定 $d(P_1, P_2)$ 个 是 一 数 实
>
> 条满 且件列 下
>
> $d(P_1,P_2) \geq 0$ 性 .
>
> $d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1)$ 2 称对 性 .
>
> $\forall P_3 \in X$ 3 形三 法 则 .
>
> $d(P_1,P_2) \leq d(P_1,P_3) + d(P_2,P_3)$

> $d(P_1$ [redacted] 穗^3 是 个 一 的 离

/a[redacted]ditional/

P_1[redacted]$x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ [redacted] $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$d($[redacted]$_1, P_2) = |x_2 - x$[redacted]$|y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|$

[redacted]满 离定义 [redacted]是并 日常所 离

(实[redacted]上是三维空 中[redacted]曼哈 离)

[redacted] 坐标式

[redacted]

称[redacted]

$\{x,$[redacted]

然后[redacted]

我们[redacted]

$\vec{a} = \{|$[redacted]

其[redacted]中 $|\vec{a}|$ [redacted]

称[redacted]为单位向[redacted]

- **坐标运算**

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1$ [redacted]

不妨给出 $\vec{b}$ [redacted]

同理 [redacted]

对于数 [redacted]

对于 [redacted]

根据 [redacted]

不 [redacted]

按第 [redacted]

- **混** [redacted]

$\vec{a}$ [redacted]

积（[redacted] 称为 [redacted] 的混合积，结果是一个数 [redacted]

$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ 矢 [redacted]

混合积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ [redacted]

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [$ [redacted]

> $y_1 = 0 \cdot \lambda = 0$ 唯 以 可

- **几何意义**

向 叉乘几何意义

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ $S = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ 与 $\vec{a}$ $\vec{b}$ θ 相关的平 四 形 积

混合积的几何意义

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle| = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$

$$V_{O-ABC} = \frac{1}{2}S\cdot h = \frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

Fragment 2 平面与直线方程

- **空间曲面曲线方程**

> i/ /f e Ð n
>
> $\Sigma(\Omega)$ $F(x,y,z)$ 是 0 一 充 是 一张 三 有曲
>
> $$M(x_1,y_1,z_1)\in\Sigma \Rightarrow F(x_1,y_1,z_1)=0$$
>
> $M(x_1,y_1,z_1)$ 反 对 若 $F(x_1,y_1,z_1)=0$ 有
>
> $$\Rightarrow M(x_1,y_1,z_1)\in\Sigma$$
>
> $M|\ M\in\Sigma$ $(x,y,z)|F(x,y,z)=0$ 与 } { 建 对 一应
>
> $f(x,y,z)=0$ 称 Σ 是 方 的曲
>
> Σ $F(x,y,z)=0$ 是 方 曲 的 曲
>
> $f(x,y,z)=0$ Σ 称方 为 一 方 的曲
>
> 如果 $=f(x,y)$ 从 方 称 以 可 为 显数 的曲 函式

求曲 Σ 方程的方法

$M(x,y,z)$ 是 Σ 上任意一点 找到 M 点满 的等式

$$\Leftrightarrow F(x,y,z)=0$$

就是曲 Σ 的方程

曲线 Γ 的方程 用

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

称为曲线方程的一般式

空 曲线Γ参数式:

$$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

t为参数

空 曲 Σ参数式:

$$\Sigma = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

u,v为参数

- # 平面与直线方程

- ## 平面方程

1.点法式

平 π经 已知点$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与 常矢 $\vec{n}=\{A,B,C\}$垂直 求平 π的方程

$\vec{n}=(A,B,C)$ 是平 π 的法向 $\mathbf{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 是平 上一点 则平 π 的点法式方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

就是所求的平 方程 个方程称为平 π 的点法式方程。

> π $\mathbf{n}$ 平 法 求 法方 的
>
> $\overrightarrow{a}\in\pi$ $\overrightarrow{b}\in\pi$ $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ $\vec{n}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 则 .
>
> $\overrightarrow{a}\in\pi$ $\overrightarrow{b}\parallel\pi$ $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ $\vec{n}2=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 则 .
>
> $\overrightarrow{a}\parallel\pi$ $\overrightarrow{b}\parallel\pi$ $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{b}$ $\vec{n}3=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 则 .

2.一般式

由平 方程的点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ $\Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$

其中 $A,\ B,\ C$ 不全为 0。

反之 $Ax+By+Cz+D=0$ 其中 $A,\ B,\ C$ 不全为 0。

不妨 $A\neq 0$ 取 $y=y_0$ $z=z_0$

$$x=\frac{-By_0-Cz_0-D}{A}\triangleq x_0$$

得到了方程的一组 (x_0,y_0,z_0)。

有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

$$\Rightarrow D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz+(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$$\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

[redacted] $x +$ [redacted] $+ C$ [redacted] 示一个平 [redacted] 。

[redacted] $+$ [redacted]

[redacted] $+$ [redacted]

[redacted] 对应。

所以 [redacted] $+ By +$ [redacted]

二法 :

$$\forall M(x, y, z) \in \pi$$

$$\overrightarrow{MM_1}, \quad \overrightarrow{M_1M_2}, \quad \overrightarrow{M_1M_3} \text{ are coplanar}$$

稔 混 为 0

$$\left|\begin{matrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{matrix}\right.$$

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

求两平 不平 即

$$[A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2] \neq 0$$

L 的方向向

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

直线方程常用点向式

/question/ 如何求直线 L 的方向向

> / / f oo p r
>
> $L \perp \vec{a}$ $L \perp \vec{b}$ $\vec{a} \times \vec{b}$ 且 , . ,
>
> $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$
>
> $L \perp \vec{a}$ $L \parallel \pi$ π 2 $\vec{n}$ 法 为 , . , 的
>
> $\vec{n} \perp \pi, L \parallel \pi \Rightarrow L \perp \vec{n}$
>
> $\therefore \vec{v} = \vec{a} \times \vec{n}$

• 平面方程 平面束

经 直线 $L = \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

的平 方程一定可以写成

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ, μ 为待求的参数 称为平 束方程。

• 距离问题

• 点到平面距离

平 $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$

$P(x_1, y_1, z_1)$ 是空 一点 求 P 到 π 的 离 d

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$\mathbf{P} \in \pi, \mathbf{P} \neq \mathbf{P}_0$

$$
\begin{aligned}
d = |\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} \\
= \frac{|A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
= \frac{|Ax+By+Cz-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}
$$

- **点到直线 距离**

$$L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$\mathbf{P}_1(x_1, y_1, z_1)$是空 一点 求$\mathbf{P}_1$到$L$的 离

$$d = |\overrightarrow{\mathbf{P}'\mathbf{P}_1}| = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{S_{parallelogram}}{a}$$

- ## 直线方程转化

(1) 点向式 化为一般式

根据

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

消元

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} m(x-x_0) - l(y-y_0) = 0 \\ n(y-y_0) - m(z-z_0) = 0 \end{cases}$$

---

(2) 一般式 化为点向式

由 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

方法一 L 的方向向

$$\overrightarrow{v} = \{A_1, B_1, C_1\} \times \{A_2, B_2, C_2\} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

求出 L 的一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 用点向式写出方程

方法二 消元法

/example/ 化为点向式

$$L=\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+3z=0\end{cases}$$

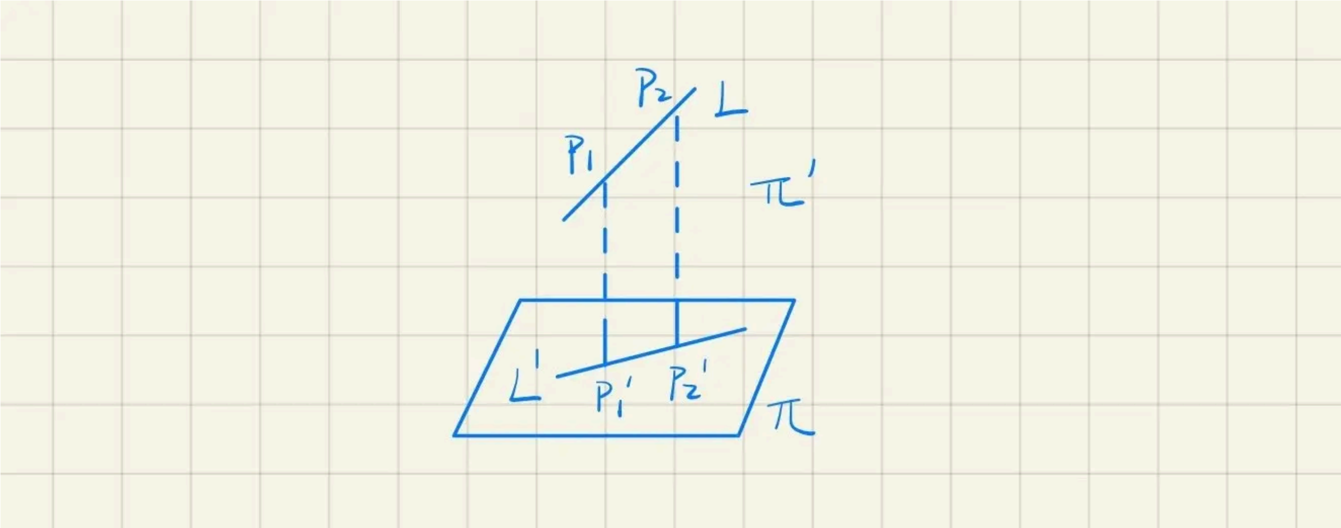
> / / f oo p r
>
> z 取 为 数 。
>
> x -)) 去 消 2 ((
>
> $$y+2z=-1,\quad z=\frac{y+1}{-2}$$
>
> y × -)) 去 消 2 2 ((
>
> $$-x+z=-2,\quad z=x-2$$
> $$\Rightarrow\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-0}{1}$$
>
> $(2,-1,0)$ 知 直
>
> $\overrightarrow{v}=\{1,-2,1\}$ 方

/example/ $L=\begin{cases}x+y+z=1\\x-y+z=2\end{cases}$

> / / f oo p r
>
> z 为 数以
>
> y)) 去 消 + 2 ((
>
> $$2x+2z=3,\quad z=\frac{x-\frac{3}{2}}{-1}$$
>
> x -)) 去 消 2 ((
>
> $$2y=-1\Rightarrow 2y+1=0$$
> $$\Rightarrow z=\frac{2y+1}{0}=\frac{y+\frac{1}{2}}{0}$$
>
> 形 上 比 式 的
>
> $$\frac{x-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{0}=\frac{z-0}{1}$$

• 直线投 问题

/example/ 求直线 $L=\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平 $\pi=x+y+z=0$ 上投影直线 L' 的方程



法一　直线的两点式

L 上任取 P_1, P_2 两点　P_1 与 π 点向式　得到 P_1P_1'　与 π 交于 P_1'　P_2 同理。

法二　直线的一般式

L' 为 π 与 π' 联立　点法式求 $\pi' = L$ 上任取一点 P_1

L 的方向向　$\overrightarrow{l} = \{1,-1,1\} \times \{1,-1,1\}$ 与 π 的法向　$\overrightarrow{n} = \{1,1,1\}$ 叉乘　得 π' 的法向

法三　　L 与 L' 确定的平　为 π'

π' 的方程为

$$\lambda(x+y-z-1)+\mu(x-y+z+1)=0$$

π' 的法向　$\overrightarrow{n'} = \{1,1,1\}$

由 $(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\lambda)z=0$

$$\overrightarrow{n'} = \{\lambda+\mu, \lambda-\mu, \mu-\lambda\}$$

由 $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$　有

$$\lambda+\mu+\lambda-\mu+\mu-\lambda=0$$

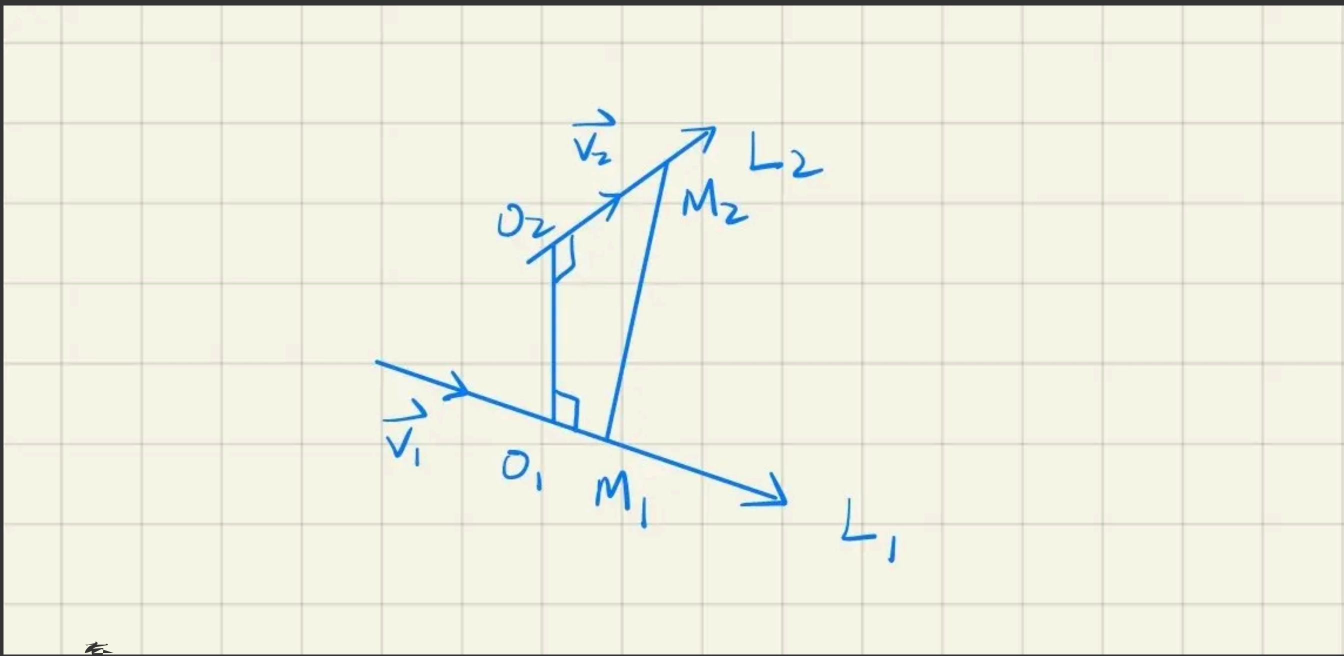
$$\mu=-\lambda$$

$$2\lambda y-2\lambda z-2\lambda=0$$

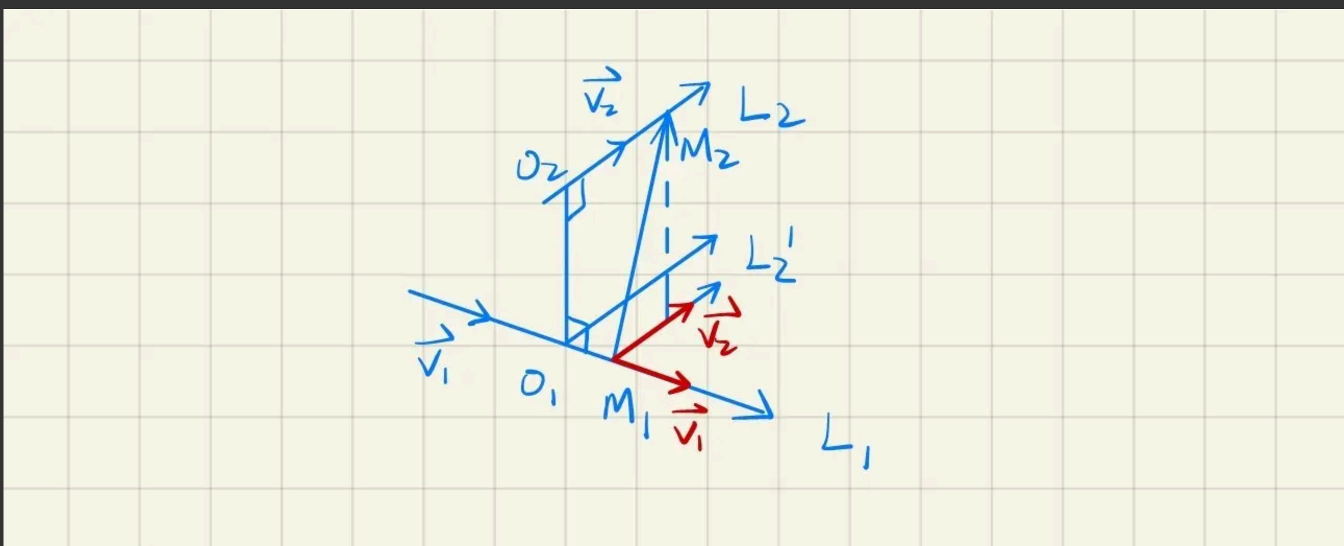
$$\Rightarrow y-z-1=0$$

$$\therefore L' = \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

· 直线平[redacted]



[redacted]



法一　O_1 作$L_2' \parallel L_2$

由L_1, L_2' 构成一平　　L_2 任意一点到平　一点均相等。

如何确定O_1

法二　M_1 作$L_2' \parallel L_2$

则　度$|\overrightarrow{O_1O_2}| = |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{n^0}|$　其中　$\overrightarrow{n^0}$ 为$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$ 的单位矢

$$\overrightarrow{n^0} = \frac{\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}$$

法三 精彩一刻

$$|\overrightarrow{O_1O_2}| = \frac{|(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}$$

$h = \frac{V}{S}$

/question/　求O_1O_2 的方程

O_1O_2 与L_1 确定的平　为π_1

$$M_1 \in \pi_1, \quad \overrightarrow{n_1} = (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \times \overrightarrow{v_1}$$

点法式写出π_1 方程

O_1O_2 与L_2 确定的平　为π_2

$$M_2 \in \pi_2, \quad \overrightarrow{n_2} = (\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \times \overrightarrow{v_2}$$

点法式写出π_2 方程

化思　　使用参数方程

不妨

$$L_1 = \begin{cases} x = x_1(s) \\ y = y_1(s) \\ z = z_1(s) \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \\ z = z_2(t) \end{cases}$$

$O_1(x_1(s), y_1(s), z_1(s))$

$O_2(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$

$\overrightarrow{O_1O_2} \parallel \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \{a, b, c\} \neq 0$　有

$$\frac{x_2(t) - x_1(s)}{a} = \frac{y_2(t) - y_1(s)}{b} = \frac{z_2(t) - z_1(s)}{c}$$

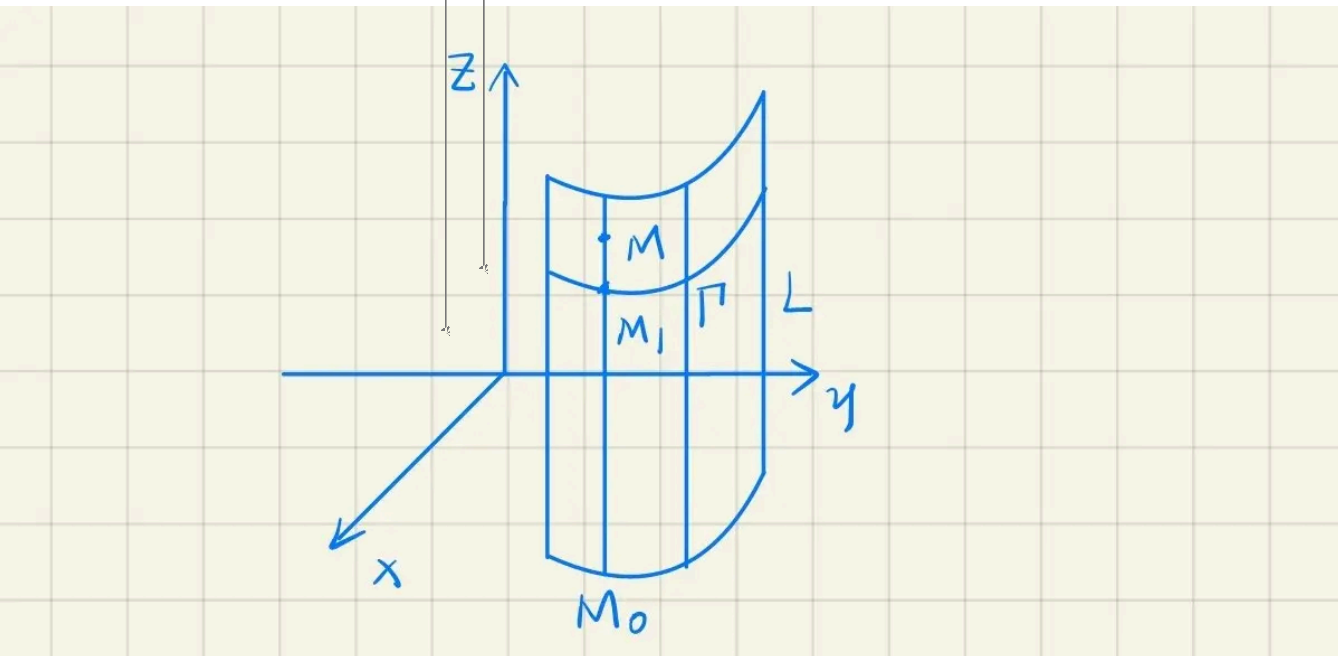
表示　角

- **柱面**

> 当Γ $\vec{v}$ 为一L个 定为一 L Γ 沿着 动着 的 $\vec{v}$ 与 相 平
> 所 产 L称 生 Γ称柱 为母 称 为的 准线

$x^2+y^2=R^2$ $(R>0$ 常数) 示什么

/example/ 求以曲线 $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=k(\text{Constant}) \end{cases}$ 为准线 母线平 于 Oz 的柱 的方程



> $M(x,y,z)$ 柱面上任一点。
>
> M Oz 作 平 Γ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 交于 有的
>
> $$\begin{cases} f(x_1,y_1)=0 \\ z_1=k \end{cases}$$
>
> $$\begin{cases} x=x_1 \\ y=y_1 \end{cases}$$
>
> $\therefore M$ $f(x,y)$ 标0满 点 为
>
> 就 是 方 的 曲

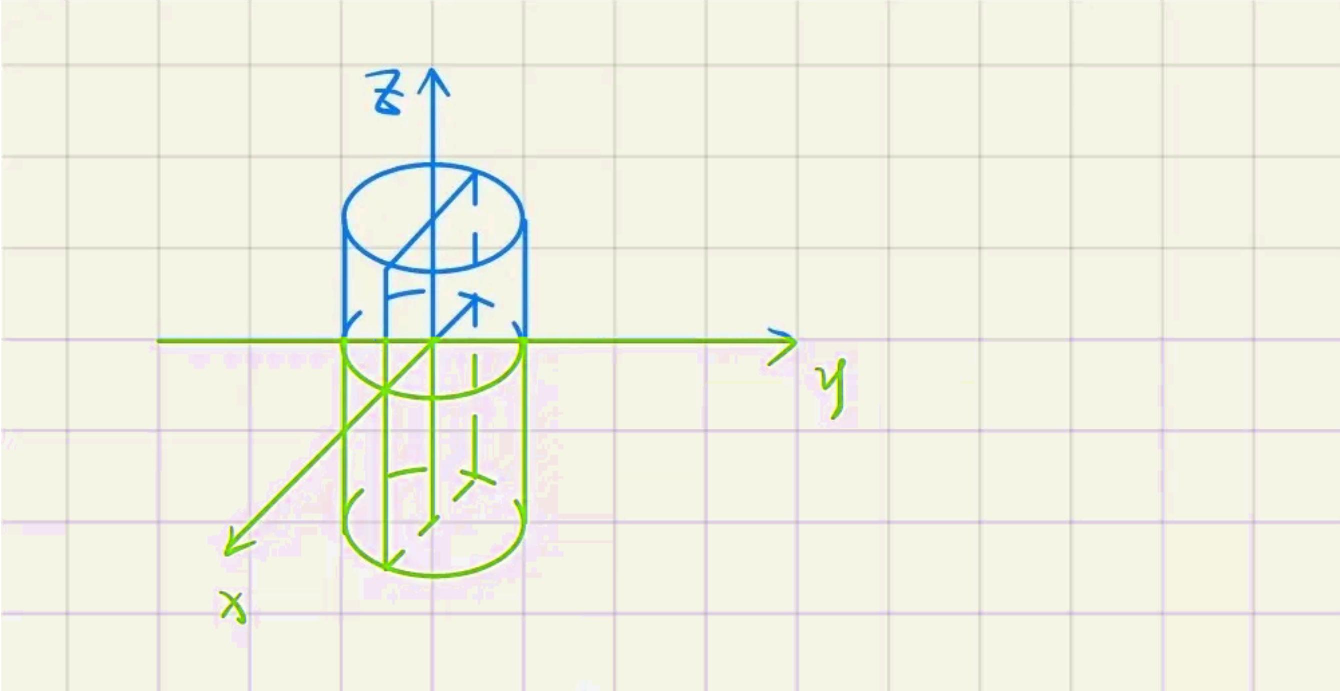
曲 $f(x,z)=0$ 示什么

柱 $f(x,z)=0$ 与 $y=k$ 常数 交线为准线 母线平 于 Oy 。

知 $x^2+y^2=R^2$ 示以

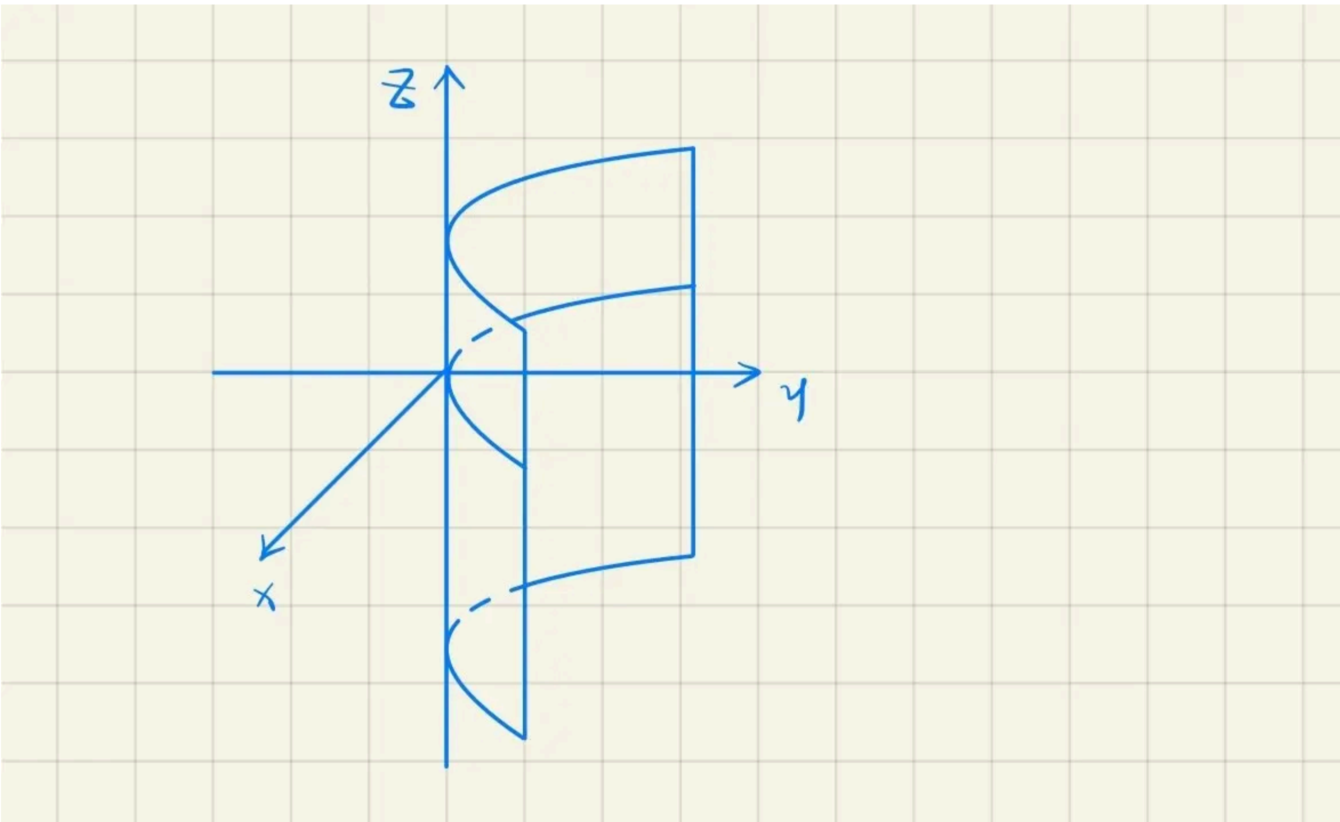
$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$$

为准线 母线平 于 Oz 的圆柱 。



/example/ $y=x^2$ 的曲

> / / f oo p r
>
> $$\begin{cases} y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$$
>
> Oz 母 平行 抛 物于 柱 的



平 于 Oz 的平 方程为 $Ax+By+D=0$ 可看成一柱

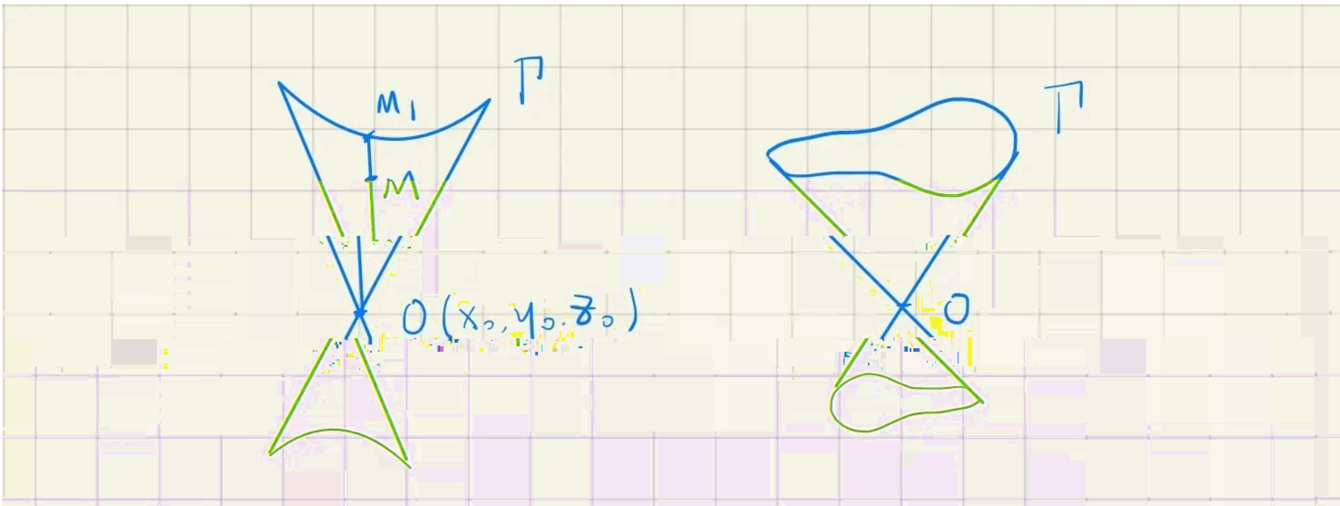
/example/ 侧 $x+y=1$ 示的平

> / / f oo p r
>
> $\begin{cases}x+y=1\\ z=0\end{cases}$ 以 为准
>
> Oz 母 平 于 。

• 锥面

O 是空 一定点 Γ 是一定曲线 $O\notin\Gamma$ 有一动直线 L 经 O 点 与 Γ 相交 Γ 移动所生成的曲 称为

O 点称为 点 动直线称为母线 Γ 称为准线。



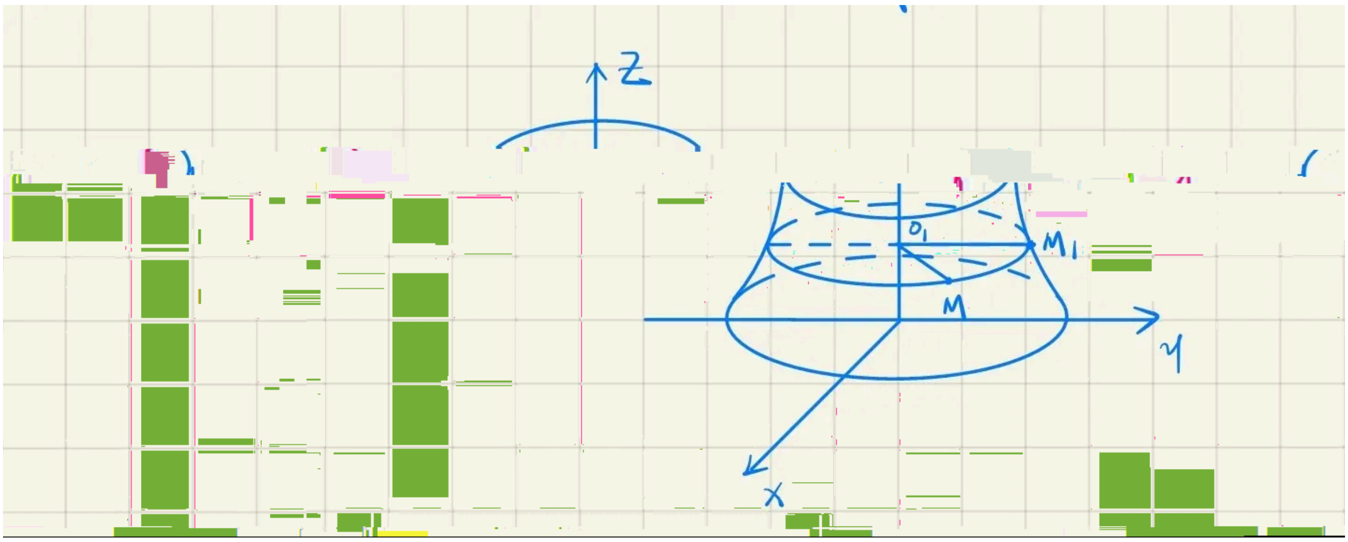
求 方程的方法

M 点是 上任意一点 接 OM 与 Γ 相交于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 满 Γ 的方程 $\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{OM_1}\iff$ 向 对应成比例。

• 旋转曲面

/example/ 求曲线 $\Gamma=\begin{cases}f(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$ 绕 Oz 旋 一周所形成的旋 曲 的方程。

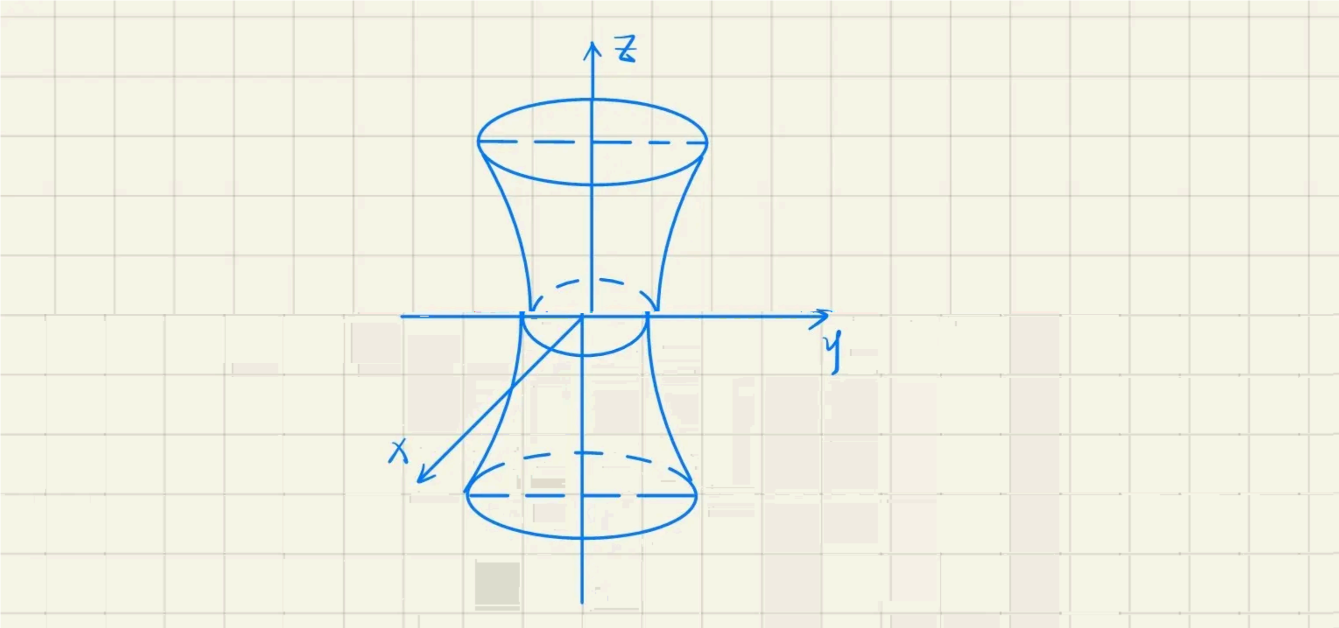


/ / f oo p r

$M(x, y, z)$ 是任 上

$M(x, y, z)$ Γ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 则是

知

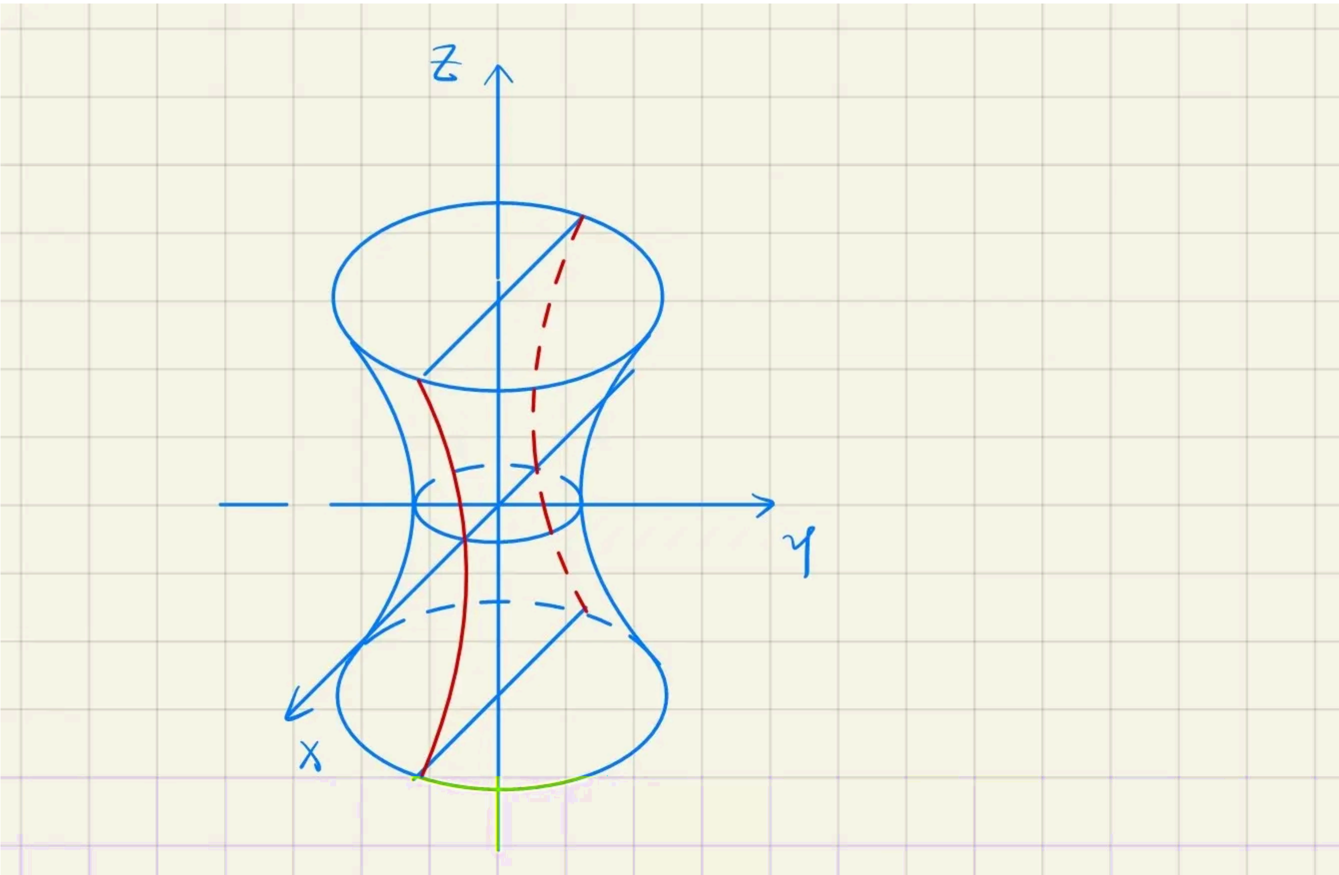


也可以看成由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

绕 Oz 旋 得到

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

即 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



曲线Γ 示为

M

曲 上某

成的圆

就是 所求的曲 方程。

Fr ment 4 二次曲面

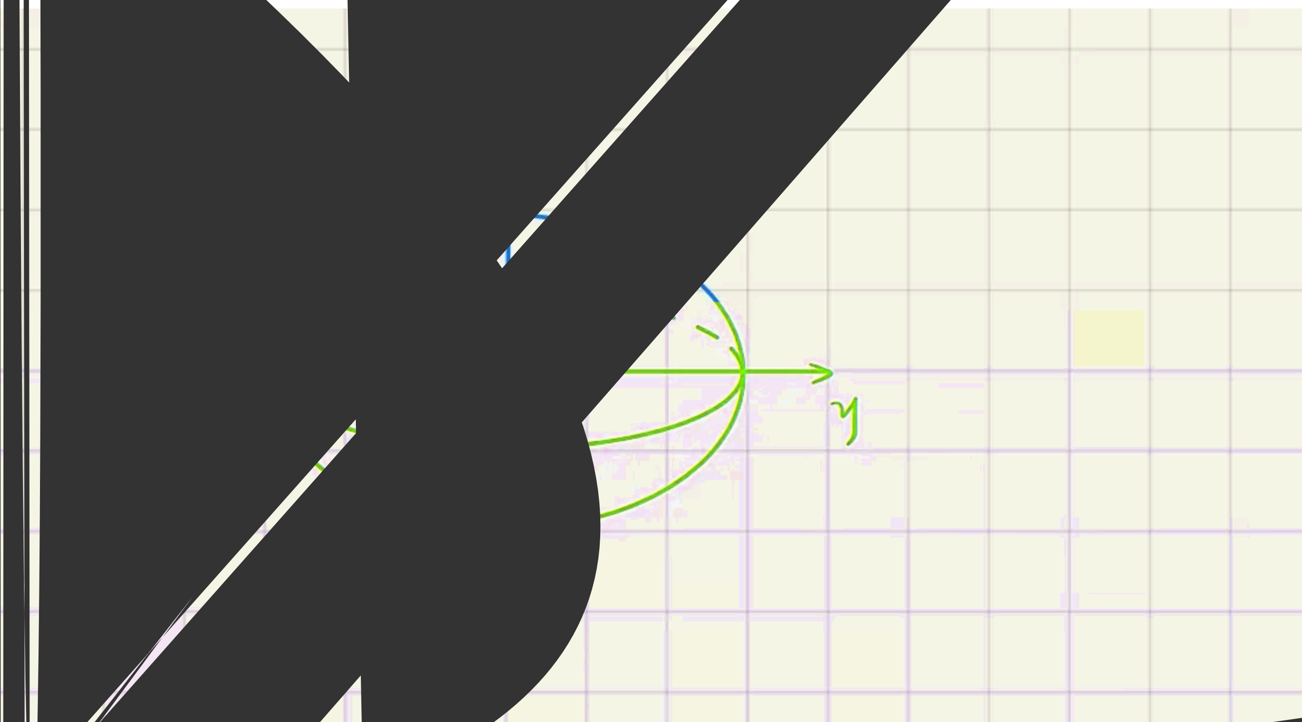
一 程$F(x$ 示的曲 用一系

[redacted]特殊图画一般曲　的　图

[redacted]$= b$ 时　椭球　方程为

[redacted]

$$\begin{cases}\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}= \text{[redacted]} \\ x = \text{[redacted]}\end{cases}$$



[redacted]情况[redacted]的平方[redacted]符号相同　画　图时可令其系数相同　变为旋[redacted]

[redacted]

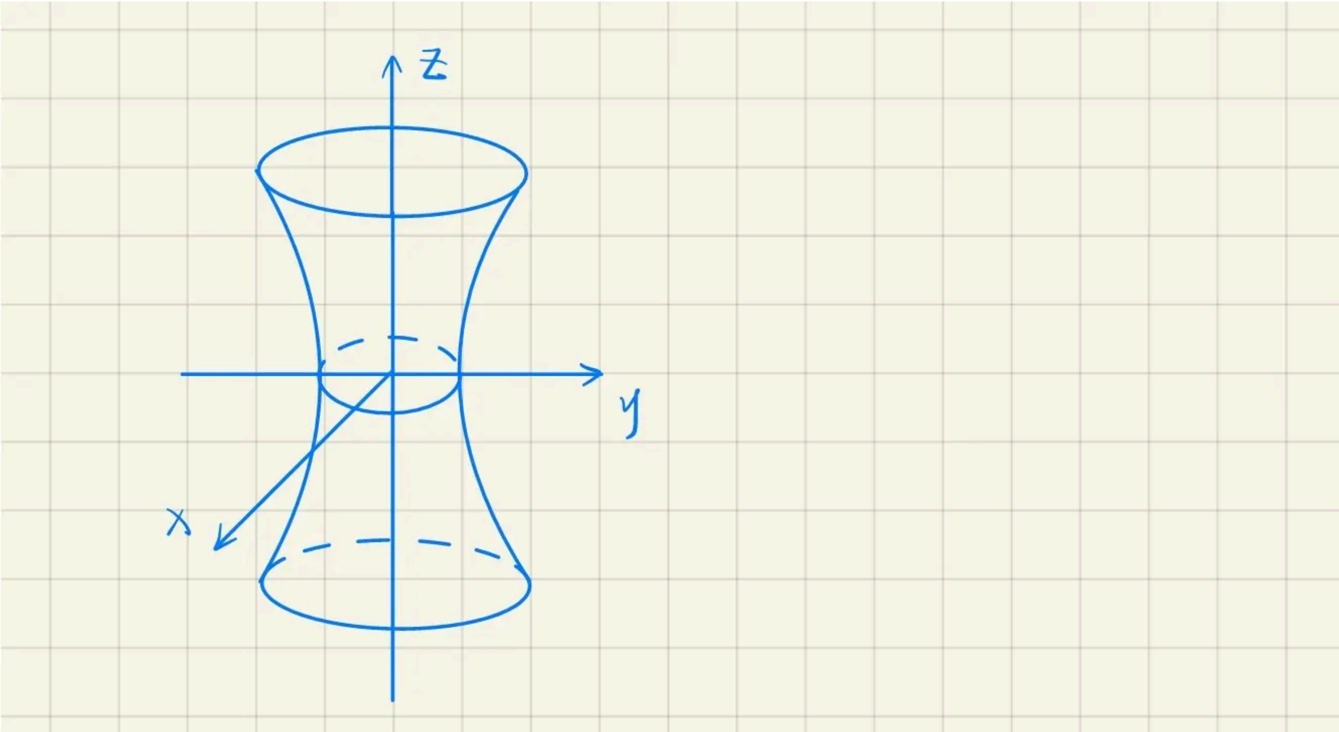
令[redacted]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

是旋 曲 由

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

绕 Oz 旋 得到



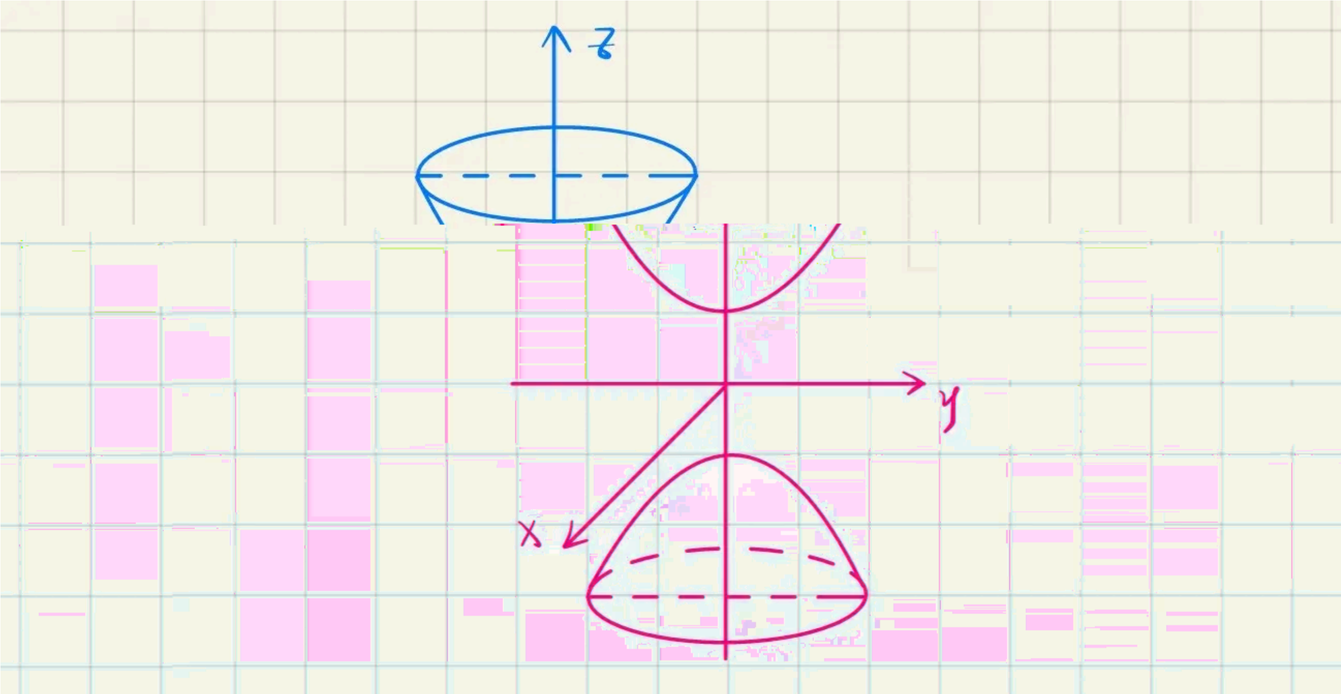
- **双叶双曲面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

令 $a=b$ 得

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1\\ x=0\end{cases}$$

绕 Oz 旋 所得曲



- **二次锥面**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

令 $a=b$ 有

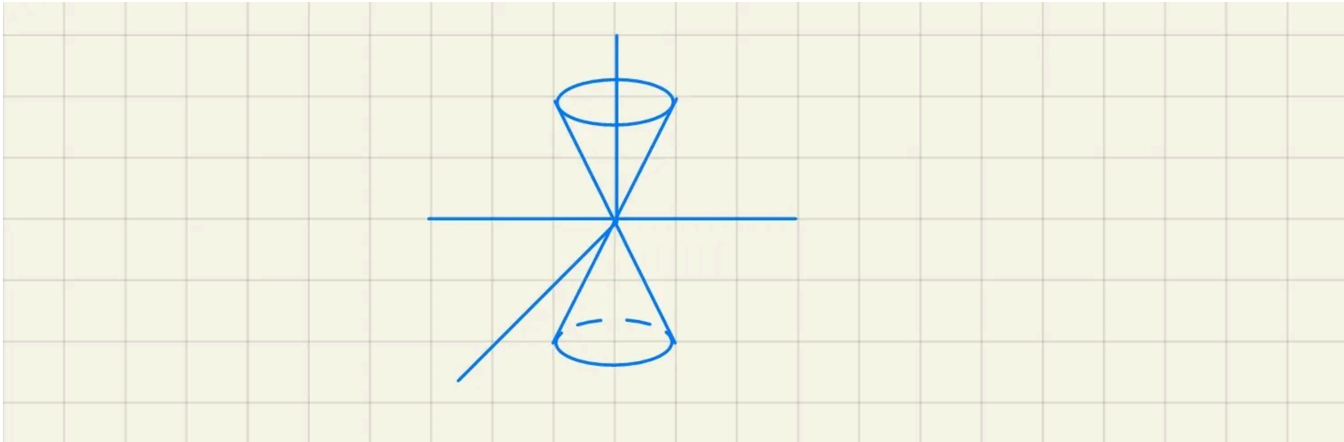
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0\\ x=0\end{cases}$$

绕 Oz 旋 所得曲

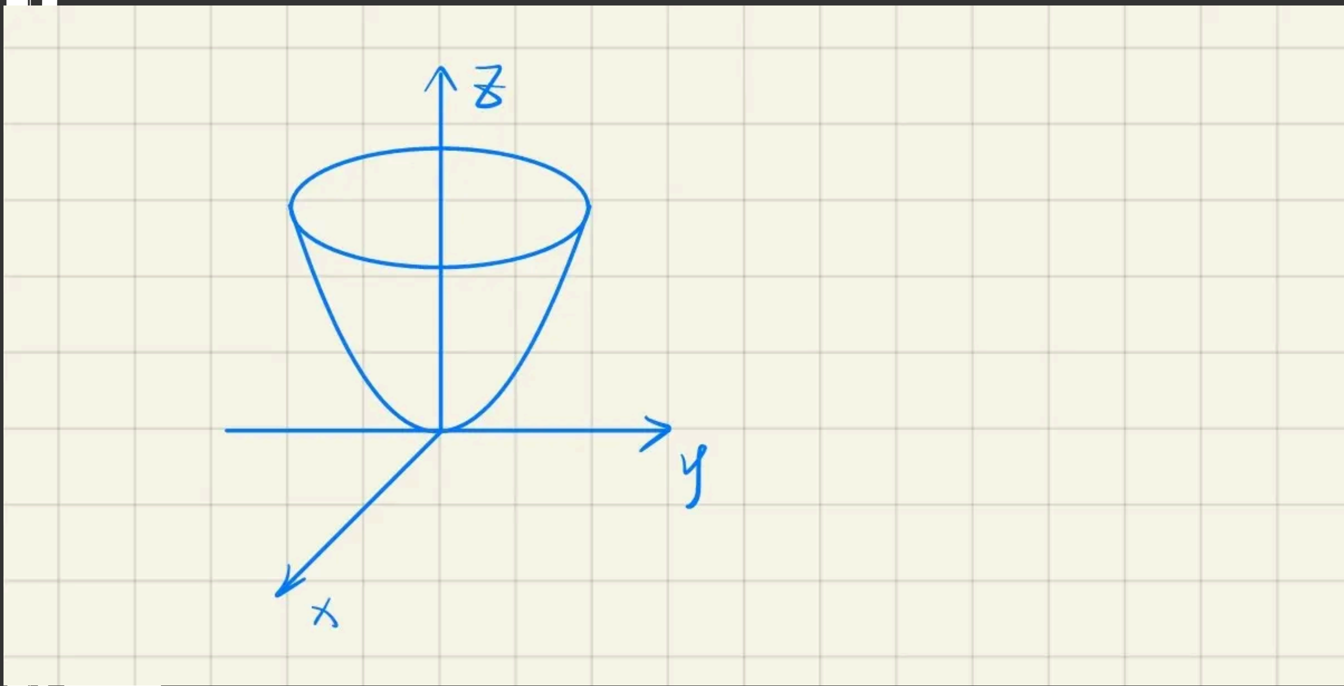
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases} \text{ or } \begin{cases}\dfrac{y}{a}-\dfrac{z}{c}=0\\ x=0\end{cases}$$



· [redacted]抛物面

[redacted]

当 a [redacted]



· 双曲抛物[redacted]

由 $z=-\frac{x^2}{a^2}+$ [redacted]

$x=0$

[redacted]

(1) [redacted]是抛物线

根[redacted]

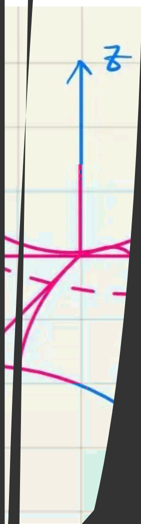
(2) [redacted]是抛物[redacted]

在[redacted]物[redacted]

[redacted]

$$\begin{cases} z = -\frac{x^2}{a^2} + \\ z = k \end{cases}$$

[redacted]



[redacted]

如 图

[redacted]

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{15}{16} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

[redacted]

[illegible]