Part 1 微分中值 理

义1 $\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta),f(x)\le f(x_0)$ x_0 $f(x_0)$ 值大 则 为 值大 伪 地 值 值 值大 值和 值。 为 。

> **注意**：
>
> 1. 极值点也是局部性质
> 2. 前提是 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义
> 3. 函数定义区间的端点不是极值点

理1（ 马引理） $f(x)$ x_0 在 x_0 $f(x)$ 义 $f(x)$ 定值 。x_0 在 且 $f'(x_0)=0$ 。

> **证明**：不妨设 x_0 为极大值点，根据定义
>
> $$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta),f(x)-f(x_0)\le 0$$
>
> 所以 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$
>
> $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0\implies f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$
>
> 且 $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$
>
> $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\implies f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$
>
> 故 $f'(x_0)=0$ ，若 x_0 为极小值点同理可证

> Important
>
> $f'(x_0)\neq 0$ 命 x_0 否 值 则
>
> $f'(x_0)=0$ 命 2x_0 **反例** 值 $y=x^3$ $y'(0)$ 则为 $=0$
>
> 值 3 不 导 + 可 .

理2（最值 理） $f\in C[a,b]$ f $[a,b]$ 在 则 上取值大 到值 与以 可 从 即 $\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b],\forall x\in[a,b]$ $f(\xi_1)\le f(x)\le f(\xi_2)$ 。

> Important
>
> **注意** **闭区间** 对 定 只。

理 （罗尔 理） $f\in C[a,b]$ f (a,b) 在 $f(a)=f(b)$ 上 $\exists\xi\in(a,b)$ 导 $f'(\xi)=0$ 可 使 则

> **证明**： $f\in C[a,b]$
>
> 根据最值定理，存在最大值 M ，最小值 m
>
> 若 f 是常值函数，则定理显然成立
>
> 若 f 不是常值函数，则 M 与 m 至少有一个不等于 $f(a)=f(b)$
>
> 不妨设 $M>f(a)=f(b)$
>
> 故 $\exists\xi\in(a,b),f(\xi)=M$ ， ξ 也是极大值点

根据费马引理， $f'(\xi)=0$

> Important

注意

何 几 义 光在存 切

2 义 位 一 不 .变 刻

$f \in C[a,b]$ f (a,b) 否 在 $\forall x$ 且 $\in (a,b), f'(x) \neq 0$ 导 $f(a) \neq f(b)$ 可 则

推广： $f \in C[a,b]$ 且 f 在 (a,b) 上可导，若 $\forall x \in (a,b), f''(x) \neq 0$ ，则 $[a,b]$ 上任意两点不同。

/ $f \in C[a,b]$ e f e (a,b) 在 m 且 $f(a) = f(c) = f(b)$ 导 $\exists \xi \in (a,b)$ 可 $f''(\xi)=0$ 使

证明：

$$[a,c]: \exists \xi_1 \in (a,c), f'(\xi_1)=0$$

$$[c,b]: \exists \xi_2 \in (c,b), f'(\xi_2)=0$$

对区间 $[\xi_1,\xi_2] \subset (a,b)$

$f' \in C(\xi_1,\xi_2)$ 且 f' 在 (ξ_1,ξ_2) 上可导， $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$

由罗尔定理， $\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

> Important

注意 $f \in C[a,b]$ 命 (a,b) 在 且 $\forall x \in (a,b)$ 上, $f''(x) \neq 0$ 导 $[a,b]$ 可
值 两 。 函

推广 $f \in C[a,b]$ f (a,b) n 在 且 $n+1$ 上 导个 $\exists \xi$ 值 $\in (a,b)$ 可 使 则
$f^{(n)}(\xi)=0$
。

注意 $f \in C[a,b]$ 命 (a,b) n 在 且 $\forall x \in (a,b)$ 上, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ 导 $[a,b]$ 可
n 值 。 函

理4 $f \in C[a,b]$ 值 f (a,b) 定在 $\exists \xi$ 且 $\in (a,b)$ 上 导 ：使 则可

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注：

1. 罗尔定理经过旋转可以得到拉格朗日中值定理
2. 几何意义：存在某点的切线平行于弦
3. 物理意义：存在某时刻瞬时速度等于平均速度
4. $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$$\Rightarrow f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

5. 令 $\theta=\frac{\xi-a}{b-a} \in (0,1) \Leftrightarrow \exists \theta \in (0,1)$ 使得

$$f'(a+\theta(b-a))=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

由罗尔定理， $\exists\xi \in (a$ 使得

分析：将 ξ 用 x 替换，

$\in (a,b), f'$

$x_1, x_2 \in (a$

$[x_1, x_2] \subset$

x_2）使得

$C[a,b]$

上得 $\forall x$

的定义

证明：

令

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, a+\delta) \\ 0 & x = a \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & x \in (a, a+\delta) \\ 0 & x = a \end{cases}$$

任取 $x \in (a, a+\delta)$

则 F，G 在 $[a,x]$ 连续，在 (a,x) 上可导且 $G'(x) = g'(x) \neq 0$

由柯西中值定理，$\exists \xi \in (a,x)$ 使得

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

注意此处的 ξ 依赖于 x 的选取，且 $a < \xi < x$

由追敛性定理， $x \to a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$ ， ξ 可视为 x 趋近 a^+ 过程中的一个子列

故

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{Heine}{=}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

Important

注意

x代$\to a^-$入 $x \to a^+, a$以可: $A \in \mathbb{R}, \infty, +\infty, -\infty$ 以

2 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{(2)}{=}A$.

理7 $\frac{0}{0}$ $x \to +\infty$ f g $(a,+\infty)$ 在 $g'(x)\neq 0$ 上 导 且 可

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty,+\infty,-\infty)\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A(\infty,+\infty).$$

证明：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\\&=\lim_{t\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\end{aligned}$$

Caution

注意

x代$\to -\infty$入 $x \to a^+$, 以 现, $+\infty, -\infty, \infty; A \in \mathbb{R}, \infty$, 以 $+\infty, -\infty$

2 $\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{0}{=}\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{(2)}{=}A$.

3 以 可 .

4 价 与 储则 则 四

理8 $\frac{*}{\infty}$ $x \to a^+$ f g $(a,a+\delta)$ 在 $g'(x)\neq 0$ 上 导 且 可

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\infty,+\infty,-\infty)\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A(\infty,+\infty,-\infty).$$

注意 值 出 定 于 只 全不定 完 们 定
发 。

证明： $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ ，根据定义

$$\forall 2>\varepsilon>0,\exists 0<\delta_1<\delta,\forall x\in(a,a+\delta_1)\subset(a,a+\delta),\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

任取 $x\in(a,a+\delta_1)$ （回避 a 点），对 $[x,a+\delta_1]$ 使用柯西中值定理

$\exists\xi\in(x,a+\delta_1)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a+\delta_1)}{g(x) - g(a+\delta_1)}$$

因为 $\xi \in (x, a+\delta_1)$，所以 $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

所以 $\left|\frac{f(x)-f(a+\delta_1)}{g(x)-g(a+\delta_1)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a+\delta_1)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A + \frac{Ag(a+\delta_1) - f(a+\delta_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A + \frac{Ag(a+\delta_1) - f(a+\delta_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - \frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}\right|$$

使用不等式 $|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b|$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A + \frac{Ag(a+\delta_1) - f(a+\delta_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{Ag(a+\delta_1) - f(a+\delta_1)}{g(x)}\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{g(a+\delta_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{Ag(a+\delta_1) - f(a+\delta_1)}{g(x)}\right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{B(\delta_1)}{|g(x)|}$$

因为 $\lim_{x\to a^+} \frac{B(\delta_1)}{|g(x)|} = 0$，根据定义

对上述 ε，

$$\exists 0 < \delta_2 < \delta_1, \forall x \in (a, a+\delta_2), \frac{B(\delta_1)}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$$

故 $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 得证

Important

注意

$f(x)$ $(a, a+\delta)$ 在 $\frac{f}{g} = \frac{*}{\infty} = * \cdot 0 = 0$. 型 定

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty : \frac{f}{g} = \frac{\infty}{\infty}$ 型 定

似 2 x于也a^+, 也定, $a, +\infty$, 定$\infty, \infty; A$以 同, $\infty, +\infty, -\infty$

例 序 下

/ / x e e a m p l

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{\alpha>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} \overset{\alpha>0,a>1}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha])x^{\alpha-(\alpha|+1)}}{a^x(\ln a)^{|\alpha|+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^x} \overset{*/\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(\frac{a}{x})} \overset{e^{-\infty}}{=} 0$$

理9 $\alpha > 0, a$对> 1 原) 从 右 到 (低 ((

$$x \to +\infty : x^x \quad a^x \quad x^\alpha \quad \ln x$$

$$n \to \infty^n : n^n \quad n! \quad a^n \quad n^\alpha \quad \ln n$$

注意:

1. 等级差别： $n!, a^n, n^\alpha, \ln n$ （不包括 n^n ）

   有限个低等级的乘在一起也抵不过一个高等级的

   例如 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{100}x}{x}=0$， $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^n\cdot n^{10000}\cdot\ln^{100}n}{n!}=0$

2. n^n 只比 $n!$ 快一点

$$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}\Rightarrow\frac{n^n}{n!e^n}<1$$

   思考： $\sqrt[n]{n}\sim\frac{n}{e}$， $\ln n\sim 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

/ / x e e a m p l

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\ln x\overset{\alpha>0}{=}\lim_{y\to+\infty}-\frac{\ln y}{y^\alpha}=0$$

/ / x e e a m p l

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\cos x}$$

振荡，洛不达！

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

其他类型

$\infty-\infty$ —) 分 (.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}\right)$$

$0\cdot\infty$ ——) 2 倒 (.

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}-x=0$$

$\infty^0,0^0,1^\infty$)—— 3 对 (.

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\exp\left(\lim_{x\to0^+}x\ln x\right)=1$$

/example/

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}(a_i>0)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right)$$

$$=\exp\left(\frac{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}{n}\right)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

注意 $\stackrel{Heine}{=}$ 列 函

- **泰勒公式**