$$\int_{birth}^{death} study\, \mathrm{d}\, time = life$$

Fragment 1 多元函数极限

• 平面点集

P (x,y)

$P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$ $d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$d(P_1,P_2)\geq 0$ $P_1=P_2$

$d(P_1,P_2)\leq d(P_1,P_3)+d(P_3,P_2)$

$E=\{P\mid P \quad\}$

$\{P_n\}$

P_n δ $\{P\mid d(P,P_n)<\delta\}$ $N(P_n,\delta)$

P_0 α $\{P\mid 0<d(P,P_n)<\delta\}$ $N_\alpha(P_n,\delta)$

P_0 δ

E P_0

- $\exists\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E=\varnothing$
- $\exists\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$ $N(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$

-
- $\exists\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E=\{P_0\}$

> 1. 内 内
> 2. 内 为 E 全体 作 F 为 包 全体 作 ∂E

P_0

$\forall\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E\neq\varnothing$

$\forall\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E$

$\forall\delta>0$ $N(P_0,\delta)\cap E$

> PS 内 但 不一 内 例 分

E

- $E \subset E^*$
- $E^* \subset E$
- $F \subset E$

E

- $\exists M > 0$ $E \subset N(O, M)$ $O(0,0)$
- $\forall M > 0$ $\exists P_0 \in E$ $P_0 \notin N(O, M)$

> 1. 义 值 为 $d(P_1, P_2) = \sup_{P_1, P_2 \in E} d(P_1, P_2)$ 则 E 且仅 $d(E)$ 为 值
> 2. $\{P_1(x_1, y_1)\}$ 且仅 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$

> 2 F G 则 $F \setminus G$ $G \setminus F$.

E

> PS 区 但 不一 区 例 分 区

• 二元函数极限

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$

> /Define/
>
> $D \subset \mathbb{R}^2$ 则 f D 中 一 $P(x,y)$ 一 $z \in \mathbb{R}$ 与之 则 f 为 义 D 上 二元函 D 为 f 义 $P \in D$ z 为 f P 函 值 作 $z = f(P)$ $z = f(x,y)$ 全体函 值 为 f 值 作 $f(D) \subset \mathbb{R}$。

$S = \{(x,y,z) | (x,y) \in D, z = f(x,y)\}$ f

> /Define/
>
> 义 f 为 义 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上 二元函 P_0 为 D 一个 A 一个 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall p \in (P_0, \delta) \cap D$ $|f(P) - A| < \varepsilon$ 则 A 为 f D 上 $P \to P_0$ 作
>
> $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(P) = A \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$
>
> **等价描述** $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall |x - x_0| < \delta$ $|y - y_0| < \delta$ 且 $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ $|f(x,y) - A| < \varepsilon$。

理（海涅 理） f $D \subset \mathbb{R}^2$ P_0 D $\lim_{P \to P_0} f(P) = A$ D $P_n \neq P_0$ $P_n \to P_0$ $n \to \infty$ $\{P_n\}$ $\lim_{n\to\infty} f(P_n) = A$

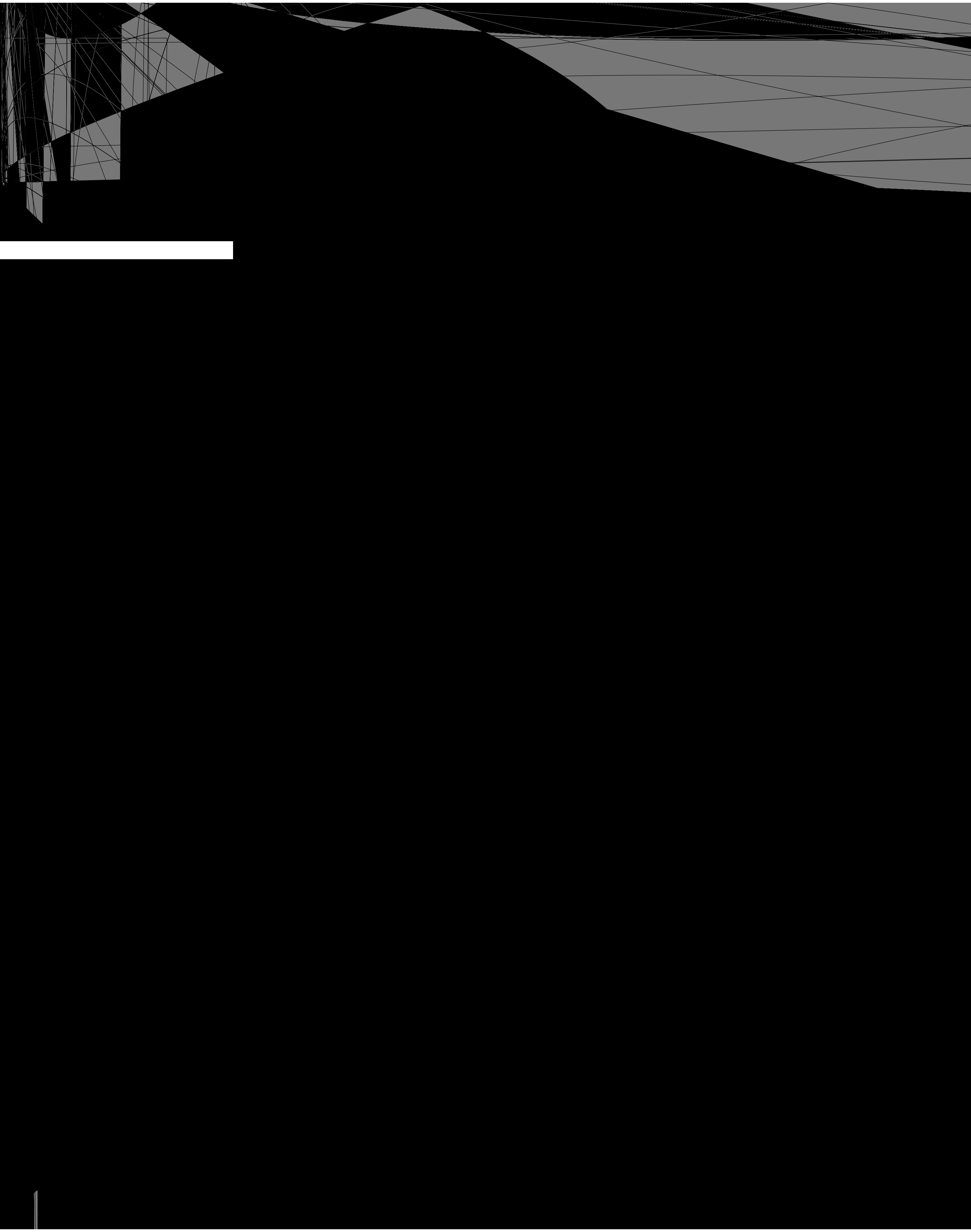
PS

$\{P_n\} : P_n \to P_0$ $\lim_{n\to\infty} f(P_n)$

$\{P_n\} : P_n \to P_1$ $\{P_n'\} : P_n' \to P_2$ $\lim_{n\to\infty} f(P_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(P_n')$ $\lim_{P\to P_0} f(P)$

注意 $\lim_{x\to 0} f(x, kx) \equiv A$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (x_0, y_0)



z E 上 一 则 z E 上 $f_x(x,y)$ 与 $f_y(x,y)$ 为偏 函 。

$z=f(x,y)$ (x_0,y_0)

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases} \quad (0,0)$$

$y=f(x)$ x_0

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$A(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$ $y=f(x)$ x_0 $A\Delta x$ y x_0
$dy=Adx$

/Define/

$z=f(x,y)$ (x_0,y_0) 上 义 且

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

以 $A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

$$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

则 $z=f(x,y)$ (x_0,y_0) 。$A\Delta x+B\Delta y$ 为 z (x_0,y_0) 分 为
$dz|_{(x_0,y_0)}=Adx+Bdy$

$z=f(x,y)$ (x_0,y_0) z (x_0,y_0)

/proof/

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)&=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\\&=f(x_0,y_0)\quad(\Delta y\to 0)\end{aligned}$$

$z=f(x,y)$ (x,y) $dz(x,y)=Adx+Bdy$ $A=f_x(x,y)$ $B=f_y(x,y)$

/proof/

y 即 $\Delta y=0$ 则 $\rho=|\Delta x|$

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\Rightarrow\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A+\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

上 $\Delta x\to 0$ 则 到 $f_x(x,y)=A$

$dz=f_xdx+f_ydy$ $du=f_xdx+f_ydy+f_zdz$

> (1). 一元函 $y=f(x)$
>
> (x_0,y_0) 分 $dy=f'(x_0)dx$
>
> (x_0,y_0) 切 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
>
> (2). 二元函 $z=f(x,y)$
>
> (x_0,y_0,z_0) 分 $dz=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$
>
> (x_0,y_0,z_0) 切 $z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

- **可微性验证**

$$\Delta z-f_x\Delta x-f_y\Delta y=o(\rho)\Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z-f_x\Delta x-f_y\Delta y}{\rho}=0$$

$z=\sqrt{|xy|}$ z $(0,0)$

> /solution/
>
> $f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0$ $f_y(0,0)=0$
>
> $$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{(\sqrt{\Delta x\Delta y}-0)-0\Delta x-0\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\sqrt{|\sin\theta\cos\theta|}$$
>
> 不 不

$z=f(x,y)$ (x,y) $f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ (x,y) $f(x,y)$ (x,y)

> /proof/
>
> $$\begin{aligned}\Delta z&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\\&=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)+f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\end{aligned}$$
>
> 件 Δx与 Δy充分 $f(x,y)$
>
> $f(x+\Delta x,y)$ 作 y 一元函 中值 $\theta_1\in(0,1)$使
>
> $$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)=f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$
>
> $\theta_2\in(0,1)$使 $f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=f_x(x+\theta_2\Delta x,y)\Delta x$
>
> 从
>
> $$\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y$$
>
> $$=[f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y)]\Delta y+[f_x(x+\theta_2\Delta x,y)-f_x(x,y)]\Delta x$$
>
> 于 $f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ (x,y)
>
> $f_y(x+\Delta x,y+\theta_1\Delta y)-f_y(x,y)\to 0\,(\rho\to 0^+)$ 为 $o(1)$
>
> $f_x(x+\theta_2\Delta x,y)-f_x(x,y)=o(1)$ 以

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\left(o(1)\frac{\Delta x}{\rho}+o(1)\frac{\Delta y}{\rho}\right)$$

为 $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|,\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$ 以上 为 $f(x,y)$ (x,y)

---

f_x f_y (x,y)

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)=\int_y^{y+\Delta y}f_y(x+\Delta x,s)ds$$

$$=\int_y^{y+\Delta y}[f_y(x,y)+o(1)]ds=f_y(x,y)\Delta y+o(1)\Delta y$$

例 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

$\Delta z=$ y

---

(1). 中 件不 以

(2). 其中 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 关于 x, y 二元函 $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ 关于 s, t 二元函

从

$$\begin{cases} dx \\ dy \end{cases}$$

全

z

utio

a, b, c

函数偏

PS $F_y \neq 0$

Q $F(x,y,z)=0$ $z=z(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\frac{\partial z}{\partial y}$

Fragment 4 方[redacted]数 梯度

[redacted]

/Define/

$f(x,y)$ $P_0(x_0,y_0)$ [redacted] 内 义 单位 $\vec{l}=(\alpha,\beta)$ $\alpha^2+\beta^2=1$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\alpha,y_0+t\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

则 为 f P_0 l 为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ $f_l(P_0)$

注意 $\vec{l}=(1,0)$ $f_l(P_0$ [redacted]

/Define/

$f(x_1,\dots,x_n)$ $P_0(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ 内 义

单位 $\vec{l}=(\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n)$ $\cos^2\alpha_1+\cdots+\cos^2\alpha_n=1$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_1^{(0)}+t\cos\alpha_1,\dots,x_n^{(0)}+t\cos\alpha_n)-f(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}{t}$$

则 为 f P_0 $\vec{l}$ 为 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$ $f_{\vec{l}}(P_0)$ 其中 α_i 为 。

f P_0 [redacted]

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$ [redacted]

/proof/

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=f_x(P_0)\Delta x+f_y(P_0)\Delta y+f_z(P_0)\Delta z+o(\rho)$$

其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

令 $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=t(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=t\vec{l}$ 则 $\rho=t$

两 以 t $t\to 0^+$ 即 到

/Define/

$f(x,y,z)$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 任 则 $(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$ 为 f P_0
作 $\nabla f(P_0)$ $\nabla f(P_0)$。

$$f(\vec{x}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{m} \partial_i f(\vec{x})($$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_{m-1}}\partial$$

$$+ \frac{1}{m!}\sum_{i_1}\cdots\sum_{i_m}\partial_{i_m}\cdots\partial$$

$m = 1$

值

$y_0)$

$)$

（极值必 条件） f P_0

为 为 。

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \quad (0,$$

Q. $=$ $)$ $P_0(x_0, y_0)$ P

$f(P_n)$

命是 $y)$ $\mathbb{R}^2$

$= f(0,0)$ 则 $\exists$

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(x_0,y_0,z_0)

$$\begin{cases} g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

(x_0,y_0,z_0)

λ_1,λ_2

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0)+\lambda_1 g_{1x}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_2 g_{2x}(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0,z_0)+\lambda_1 g_{1y}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_2 g_{2y}(x_0,y_0,z_0)=0 \\ f_z(x_0,y_0,z_0)+\lambda_1 g_{1z}(x_0,y_0,z_0)+\lambda_2 g_{2z}(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z)$

$$\begin{cases} L_x=L_y=L_z=0 \\ g_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ g_2(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases}$$

$m<n$

Total 总结

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$