Part 1 矩阵概

义1

> 把 mn 个数 $a_{ij}(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 排成一个矩形阵列，称为一个 $m \times n$ 阶矩阵。
>
> $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$
>
> a_{ij} 称为第 i,j 元素。若 $a_{ij}(\forall i,j) \in \mathbb{R}$ (C)，则称为实(复)矩阵。
>
> 若 $\forall i,j$ ， $a_{ij} = 0$ ，则称 A 为零矩阵，记为 O_{mn} 。
>
> 若 $m = n$ ，称 A 为 n 阶方阵。
>
> 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为方阵，则称 $a_{ii}, a_{12}, \cdots, a_{nn}$ 连成一线为 A 的主对角线。
>
> 若 $\forall i \ne j$ ， $a_{ij} = 0$ ，则称 A 为对角阵，简记为 $diag\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$ 。
>
> $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> 进一步，若 $a_{ii} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ ，这样的对角阵称为单位阵，记为 I_n 。
>
> $$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
>
> 若 $a_{ij} = 0(\forall i > j)$ ，则称 A 为上三角阵，若 $a_{ij} = 0(\forall i < j)$ ，则称为下三角阵。

义2

> 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ， $B = (b_{ij})_{s \times t}$ 。
>
> $$A = B \Leftrightarrow m = s, n = t, a_{ij} = b_{ij}(\forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

义

> 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则 $(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})$ 称为 A 的第 i 个行向量。
>
> $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ 称 $1 \times n$ 矩阵， $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维行向量，称 $m \times 1$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 称为 n 维列向量。
>
> 记 $M_n(\mathbb{R})$ 为 n 阶实方阵全体构成的集合
>
> 映射（函数）：
>
> $$det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto |A| = det(A)$$

Question:

(i) n 阶行列式的值在多大程度上反映 n 阶方阵的性质?

(ii) 映射 $\det$ 具有怎样的性质?

• 矩阵运算

义4：矩阵加减

> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ， $B=(b_{ij})_{m\times n}$
>
> $$A+B\overset{\text{def}}{=}(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\qquad A-B\overset{\text{def}}{=}(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}\qquad A_{m\times n}+O_{m\times n}=A_{m\times n}$$
>
> (1). 交换律:
>
> $$A+B=B+A$$
>
> (2). 结合律:
>
> $$(A+B)+C=A+(B+C)$$
>
> (3). 零矩阵:
>
> $$A+0=A$$
>
> (4). 负矩阵:
>
> $$A+(-A)=0$$
>
> (5).
>
> $$A-B=A+(-B)$$

义5：矩阵数乘

> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ， C 为常数， c 与 A 的数乘为 (scalar product)
>
> $$c\cdot A\overset{\text{def}}{=}(c\cdot a_{ij})_{m\times n}$$
>
> 负矩阵
>
> $$-A\overset{\text{def}}{=}(-1)\cdot A=(-a_{ij})_{m\times n}$$
>
> (1). 数的分配律:
>
> $$(c+d)\cdot A=c\cdot A+d\cdot A$$
>
> (2). 矩阵的分配律:
>
> $$c\cdot(A+B)=c\cdot A+c\cdot B$$
>
> (3). 数乘的结合律:
>
> $$(c\cdot d)\cdot A=c\cdot(d\cdot A)$$
>
> (4). 数乘单位元:
>
> $$1\cdot A=A$$

数乘 [redacted]

矩 [redacted]

$A =$ [redacted]

只 [redacted]

AB 的 [redacted]

AB 的 [redacted]

矩阵乘 [redacted]

- (1) [redacted]

- (2 [redacted]

[redacted]

结合律 [redacted]

[redacted] $(A+B$ [redacted]

[redacted] $c\cdot(AB$ [redacted]

[redacted] $A = A$ [redacted]

$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{p\times q}$

对于 $(AB)C$，先考虑 AB 的第 (i,j) 元素 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

再考虑 $(AB)C$ 的第 (i,j) 元素

$$\sum_{r=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kr})c_{rj}=\sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kr}c_{rj}$$

对于 $A(BC)$，先考虑 BC 的第 (k,i) 元素 $\sum_{r=1}^{p}b_{kr}c_{ri}\Rightarrow$ 第 (i,j) 元素

> $$\overline{\overline{A}}=A,\quad \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B},\quad \overline{cA}=\overline{c}\cdot\overline{A},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{A'}=\overline{A}'$$

• 方阵　逆阵

矩阵乘法的应用可以是解决线性方程组：

$$(*)\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

每次写线性方程组会很烦，但是我们引入矩阵乘法后会变得简洁

我们让所有系数构成一个矩阵（线性方程组的系数矩阵）：

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

我们把所有的未定元拼成列向量，把常数项拼成列向量：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

自然地，根据矩阵乘法 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\iff(*)$

写成矩阵能否借此来解线性方程组？（第三章）

我们学过 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$ ，那矩阵能否求逆：$A\xrightarrow{\sim}A^{-1}$ ，自然地想：$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$

义1：

> 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B ，使得 $AB=BA=I_n$ 则称 B 为 A 的逆阵，记为 A^{-1} 。
>
> 若矩阵 A 存在逆阵，则称为非奇异阵或可逆阵；若矩阵 A 不存在逆阵，则称为奇异阵。

> Important
>
> (1). 只有对方阵才有逆阵的定义，当 $m\neq n$ 时，没有逆阵的定义。
>
> (2). 非零方阵不一定有逆阵。
>
> (3). 一般来说，$A^{-1}B\neq BA^{-1}$.

可逆矩阵性质：

> 设 A 为 n 阶方阵
>
> (1). 若 A 可逆，则逆阵必唯一。
>
> - 设 B,C 均为 A 的逆阵，即 $AB=BA=I_n$ ，$AC=CA=I_n$
> - $B=B\cdot I_n=B(AC)=(BA)C=I_nC=C$
>
> (2). 设 A,B 可逆，则 AB 也可逆，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

> 推广 设 $A_1, \cdots, A_m$ 均为 n 阶可逆阵 $(m \geq 2)$ ，则 $A_1 \cdots A_m$ 也可逆，$(A_1 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}$
>
> $$(A_1 \cdots A_m)(A_m^{-1} \cdots A_1^{-1}) = I_n(A_m^{-1} \cdots A_1^{-1})(A_1 \cdots A_m) = I_n$$

(3). 设 A 可逆， $C \neq 0$ 常数，则 CA 仍可逆，

$$(CA)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$$
$$(C^{-1}A^{-1})(CA) = (C^{-1}C)(A^{-1}A) = I_n$$
$$(CA)(C^{-1}A^{-1}) = (CC^{-1})(A \cdot A^{-1}) = I_n$$

(4). 设 A 可逆，则 A' 也可逆且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

$$A'(A')' = (A^{-1}A)' = I_n' = I_n$$
$$(A')'A' = (A \cdot A')' = I_n' = I_n$$

(5). 设 A 可逆，则 $(A')^{-1} = A$

$$A' \cdot A = A \cdot A' = I_n \Rightarrow (A')^{-1} = A$$

(6). 对可逆阵而言，乘法消去律成立。

- 设 A 为可逆

$$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow B = C \\ BA = CA \Rightarrow B = C \end{cases}$$

- $A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow I_nB = I_nC \Rightarrow B = C$
- $BA \cdot A^{-1} = CA \cdot A^{-1}$ 两边同时右乘 A^{-1} 即 $B = C$

(7) 整性对可逆阵成立，即

- A 可逆， $B \neq 0 \Rightarrow AB \neq 0$
- A 可逆， $C \neq 0 \Rightarrow CA \neq 0$

义2:

> 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， A^* 是 $|A|$ 中的代数余子式，叫 A 的伴随阵，记为 A^* .
>
> $$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> A 不一定有逆阵，但伴随阵总存在.
>
> $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

引理 ：设 A 为 n 阶方阵，则 $AA^* = A^*A = |A| \cdot I_n$.

> **证明**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| \cdot I_n$$

同理可逆 $A^*A = |A| \cdot I_n$.

理4：设 A 为 n 阶方阵，若 $|A| \neq 0$ ，则 A 可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

证明 $AA^* = A^*A = |A| \cdot I_n$

$$\Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) = \left(\frac{1}{|A|} A^* \right) \cdot A = I_n,$$

(1). $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，若 $|A| = ad - bc \neq 0$ ，则

$$A^* = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(2). $Ax = \beta$ ，且 $|A| \neq 0$ ，从而 A 可逆

同时左乘 $A^{-1} \Rightarrow x = A^{-1}\beta$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x = A^{-1}\beta = \frac{1}{|A|} A^* \beta$$

具体地

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \cdots + b_n A_{jn})$$

理5：设 A, B 为 n 阶方阵，则 $|AB| = |A| \cdot |B|$

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $B = (b_{ij})_{n \times n}$ ，构造 $2n$ 阶方阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ I_n & B \end{bmatrix}$

用 A 乘以 $|C|$ 的 n 行加到第 i 行上 $(1 \leq i, j \leq n)$

$$\begin{bmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$$

用 Laplace 定理来展开，按前 n 行展开。

左边 = $|A| \cdot |B|$ ，右边

$$= |AB| \cdot (-1)^{n^2+n+1+\cdots+n} \cdot |I_n| = |AB| \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1)^n \cdot |I_n| = |AB|$$

理6：设 A 为 n 阶方阵，则 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ； A 奇异 $\Leftrightarrow |A| = 0$

推论7:

(1) 设 $A_1, \cdots, A_m$ 为 n 阶方阵，若存在 i 使得 A_i 是奇异阵，则 $A_1 \cdots A_m$ 是奇异阵。

(2). 设 A 可逆，则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

(3). 设 A, B 为 n 阶方阵，若 $AB = I_n$ 或 $BA = I_n$ ，则 $B = A^{-1}$

证明 只证 $AB = I_n$ 的情形。

/example/

我们知道

那么

$$A = \begin{bmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \cdots \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & C_n^1 a_n & \cdots & \end{bmatrix} \quad \cdots \quad C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^n \prod_{0 \le i < j \le n} (b_j - b_i)$$

> 设 A, B 为 n 阶方阵，c 为常数。
>
> 1. $|A+B| \neq |A| + |B|$
> 2. $|cA| = c^n |A|$
> 3. $|AB| = |A||B|$
> 4. $|A^T| = |A|$
> 5. 若 A 可逆，则 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
> 6. 设 $n \geq 2$，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

/example/ 用Gauss消

PS: 系数矩阵+常数列

给出如下定义：

义1：矩阵

> 第一类：对换矩阵的两行（列）
>
> 第二类：矩阵某一行（列）乘上非零常数
>
> 第三类：矩阵某一行乘常数加到另一行上

若矩阵 A 通过若干的初等变换变为矩阵 B，则称 A 相抵于 B，记 $A \sim B$

> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，称为 A 的相抵标准型。

注意：$r\le \min\{m,n\}$，r 不依赖于初等变换选取，r 唯一确定。

> /proof/
>
> 对 $\min\{m,n\}$ 进行归纳。若 $\min\{m,n\}=0$，则归纳过程结束。
>
> 设 $\min\{m,n\}<k$ 归纳成立，下证 $\min\{m,n\}=k$ 情形。
>
> 若 $A=0$ 则结论成立，下设 $A\neq 0$，不妨设 $a_{ij}\neq 0$，$i\le r$，$j\le s$.
>
> 此时 a_{ij} 变到了 $(1,1)$ 位置，以下不妨设 $a_{ij}=1$.
>
> $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$
>
> 此时 B 是 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵，
>
> $\min\{(m-1),(n-1)\}=\min\{m,n\}-1=k-1$.
>
> 由归纳假设，B 可变换为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A\sim\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

义4：

> 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，对任给 m，
>
> $$k_i=\begin{cases} +\infty & \text{if } a_{i1}=0 \\ \min_{j\ge 1}\{j|a_{ij}\neq 0\} & \text{if } a_{i1}\neq 0 \end{cases}$$
>
> 给出阶梯点定义：
>
> A 为阶梯形矩阵 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 存在 r，使得 $k_1<k_2<\cdots<k_r$，$k_{r+1}=\cdots=k_m=+\infty$。

义5：设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则通过初等变换可将 A 化为阶梯形矩阵。

- ## 等矩阵

义6：

> 对单位矩阵 I_n 实施三类初等行变换后得到的矩阵称为三类初等矩阵。
>
> $$P_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$
>
> $$P_{i(c)}=\begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$T_{ij}(c)=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & c & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1\end{bmatrix}$$

理7:

> 初等矩阵行列变换等价于左(右)乘对应初等矩阵，左行右列
>
> $$C_j^iA=P_{ij}A \quad \Rightarrow A=P_{i(c)}A \quad C_{ji}^iA=T_{ij}(c)A$$

引理8:

> 1. 初等矩阵都是可逆矩阵，且逆矩阵为同类初等矩阵。
>
> $$P_{ij}^{-1}=P_{ij} \qquad P_{i(c)}^{-1}=P_{i(-c)} \qquad T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c)$$
>
> 2. 矩阵实施第三类初等行变换后 $|A|$ 不变。
>
> $$|P_{ij}|=-1 \qquad |P_{i(c)}|=c \qquad |T_{ij}(c)|=1$$
>
> 3. 非奇异矩阵经初等变换后仍为非奇异矩阵。奇异矩阵 $\sim$ 奇异矩阵
>
> > /proof/
> >
> > 定理7 $\Rightarrow$ A实施初等变换等价于 $P_1\cdots P_rAQ_1\cdots Q_s$
> >
> > 其中 P_i,Q_j 都是非奇异矩阵，从而都是非奇异矩阵。
> >
> > - A非异 $\Rightarrow$ B非异
> > - A奇异 $\Rightarrow$ B奇异

> ⓘ Caution
>
> 集合A :给定子集 $R\subset A\times A=\{(a,b)|a,b\in A\}$，若 $(a,b)\in R$ 则称 $a\,\underline{R}\,b$
>
> 若又满足以下三条性质，则称为等价关系：
>
> 1. 自反性：$a\,\underline{R}\,a$
> 2. 对称性：$a\,\underline{R}\,b$ 且 $b\,\underline{R}\,a$
> 3. 传递性：若 $a\,\underline{R}\,b$ 且 $b\,\underline{R}\,c$，则 $a\,\underline{R}\,c$

理9:

> 矩阵的相抵关系是等价关系即：
>
> 1. 自反性 $A\sim A$
> 2. 对称性 $A\sim B\Leftrightarrow B\sim A$
> 3. 传递性 $A\sim B$ 且 $B\sim C\Rightarrow A\sim C$

/proof/

> 1. $A=I_n\cdot A\Rightarrow A\sim A$
> 2. 由 $A\sim B$ 可知，存在初等矩阵 $P_1\cdots P_r$ 和 $Q_1\cdots Q_s$ 使得

> $$B = P_1 \cdots P_r A Q_1 \cdots Q_s \Rightarrow P_1 \cdots P_r B Q_1 \cdots Q_s^{-1} = A \Rightarrow B \sim A$$
>
> 3. $B = P_1 \cdots P_r A Q_1 \cdots Q_s$
>
> $$C = R_1 \cdots R_t B T_1 \cdots T_l$$
>
> 其中 P_i, Q_j, R_k, T_l 都是初等矩阵。
>
> $$\Rightarrow C = R_1 \cdots R_t P_1 \cdots P_r A Q_1 \cdots Q_s T_1 \cdots T_l \Rightarrow A \sim C$$

下面研究非异阵的一些性质:

理1:

> 设 A 为 n 阶方阵，则下列结论等价:
>
> 1. A 为非奇异矩阵
> 2. A 的相抵标准型为 I_n
> 3. A 通过初等行变换或列变换能变为 I_n
> 4. A 是若干个初等矩阵的乘积

/proof/

> (1) $\Rightarrow$ (2) 设 A 相抵标准型为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，由 A 的非奇异性和初等矩阵性质可知 $r = n$。
>
> (2) $\Rightarrow$ (3) 设 $A \sim I_n$ 即 $\exists P_1 \cdots P_r, Q_1 \cdots Q_s$ 使得 $P_1 \cdots P_r A Q_1 \cdots Q_s = I_n$
>
> $$P_1 \cdots P_r A = I_n \quad \text{i.e.} \quad Q_1 \cdots Q_s P_1 \cdots P_r A = I_n$$
>
> (3) $\Rightarrow$ (4)
>
> 设 A 通过行变换变为 I_n，即存在非奇异矩阵 $P_1, P_2, \ldots, P_r$ 使得 $P_r \cdots P_1 A = I_n$。
>
> $$\Rightarrow A = (P_r \cdots P_1)^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_r^{-1}$$
>
> 即 A 是若干个初等矩阵的乘积。
>
> (4) $\Rightarrow$ (1)
>
> 设 $A = P_1 \cdots P_r$，P_i 为初等矩阵。则 P_i 为可逆矩阵 $\Rightarrow$ A 为可逆矩阵。

推论2:

> 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$，则存在 m 阶非奇异矩阵 P 和 n 阶非奇异矩阵 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

/proof/

> 存在 m 阶非奇异矩阵 P 和 n 阶非奇异矩阵 Q 使得 $P \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_s = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。
>
> 令 $P = P_r \cdots P_1$，$Q = Q_1 \cdots Q_s$。

$$A^T = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{r1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{1s} & A'_{2s} & \cdots & A'_{rs} \end{pmatrix}$$

义7：设 $A = (A$ [redacted] r

> 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵，$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$ 表示 A 的一个 s 阶子式，它由 A 的第 $i_1,\cdots,i_s$ 行与第 $j_1,\cdots,j_s$ 列交点上的元素按原次序排列组成的行列式。同理可定义 B 的 s 阶子式。
>
> 1. 若 $m>n$，则必有 $|AB|=0$；
> 2. 若 $m\le n$，则必有
>
> $$|AB|=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

理 ：

> 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵，r 是一个正整数且 $r\le m$。
>
> 1. 若 $r>n$，则 AB 的任意一个 r 阶子式等于零；
> 2. 若 $r\le n$，则 AB 的 r 阶子式
>
> $$AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}.$$

下面介绍 Cauchy-Binet 公式的两个重要应用。它们分别是著名的 Lagrange (拉格朗日) 恒等式和 Cauchy-Schwarz (柯西-许瓦兹) 不等式。这两个结论也可以用其他方法证明，但用矩阵方法显得非常简洁。

推论1：Lagrange 恒等式（$n\ge 2$）

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

> 证明 左边的式子等于
>
> $$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_ib_i \\ \sum_{i=1}^n a_ib_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix},$$
>
> 这个行列式对应的矩阵可化为
>
> $$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}.$$
>
> 用 Cauchy-Binet 公式得
>
> $$\left|\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{i=1}^n a_ib_i\right|=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}=\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

推论2：设 a_i,b_i 都是实数，Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\ge\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2.$$

> **证明**：由上例，Lagrange 恒等式右边总非负，即得结论。