ANALISI 1 - FORMULE e RIASSUNTO

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

ax^2+bx+c $\Delta = b^2-4ac$

• Se $\Delta>0$ $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	• Se $\Delta<0$ IMPOSSIBILE	• Se $\Delta=0$ $x_1=\frac{-b}{2a}$

DISEQUAZIONI DI 2° GRADO

- $ax^2+bx+c>0$ soluzioni esterne
- $ax^2+bx+c<0$ soluzioni interne
- $\Delta=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ per ≥ 0
- $\Delta=0$ $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1\}$ per >0
- $\Delta=0$ x_1 per ≤ 0
- $\Delta=0$ IMPOSSIBILE per <0
- $\Delta<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ per >0
- $\Delta<0$ IMPOSSIBILE per <0

MODULO

$$|x|=\begin{cases} x & \text{per } x>0 \\ -x & \text{per } x<0 \end{cases}$$

polinomio

$|P(x)|>\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha>0$

$P(x)<-\alpha$ $P(x)>\alpha$

$|P(x)|<\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha>0$

$-\alpha<P(x)<\alpha$

$|P(x)|\geq-\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha>0$

$\forall x\in\mathbb{R}$

→ il modulo rende tutto positivo

$|P(x)|\leq-\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha>0$

$\nexists x\in\mathbb{R}$

impossibile $\emptyset$

Eliminare il modulo

$$|P(x)|=\begin{cases} P(x) & P(x)\geq 0 \\ -P(x) & P(x)<0 \end{cases}$$

POTENZE e RADICALI: PROPRIETÀ

POTENZE

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

RADICALI

- $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $\sqrt[p]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^n} = a^{\frac{m}{p}} \cdot a^{\frac{n}{q}}$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

PORTARE FUORI X DALLA RADICE

$2:2 = 1$ con resto 0

$3:2 = 1$ con resto 1

$$\sqrt{a^2 b^3} = |ab|\sqrt{b}$$

bisogna sempre esplicitare il valore assoluto

ESPONENZIALI

$$a^x = b \rightarrow \log_a b = x$$

TRUCCO DELL'ESPONENZIALE

$$a^B = e^{B \log A}$$

LOGARITMI

→ per confrontare logaritmi uso quelli già noti (es. $\log_5 25 = 2$)

- $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^m = m \log_a b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

NOTAZIONE

$$\mathrm{Log}(x) = \log_{10}(x)$$

$$\log(x) = \ln(x) = \log_e(x)$$

e = costante di nepero

GEOMETRIA ANALITICA

- EQUAZIONE RETTA

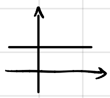
$ax + by + c = 0$ → CANONICA

$y = mx + q$

$\uparrow$ coeff. (inclinazione)

- RETTA ORIZZONTALE

$y = k$

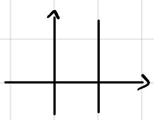


- Due rette sono parallele quando $m_1 = m_2$

→ perpendicolari quando $m_1 \cdot m_2 = -1$

- RETTA VERTICALE

$x = h$

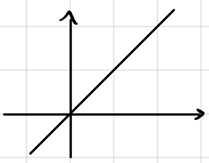


- RETTA PASSANTE PER UN PUNTO

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

- BISETTRICE

$y = x$



- PER DUE PUNTI

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

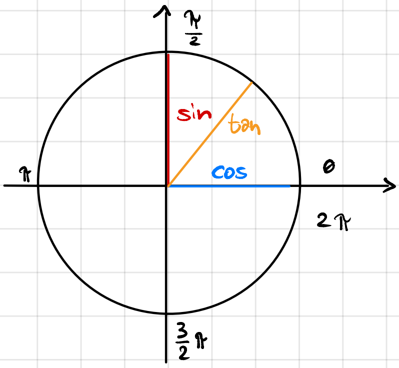
TRIGONOMETRIA

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
- $\arctan -\infty = \frac{\pi}{2}$
- $\arctan +\infty = \frac{\pi}{2}$
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
- $\arctan 0 = 0$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

VALORI FUNZIONI

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\pm\infty$
2π	0	1	0
π	0	-1	0



FUNZIONI

$f(x) : A \to B$

A = dominio → dove esiste la funzione
B = codominio

Immagine di una funzione

- Valori che produce una funzione nel suo codominio B

Per ogni $f(x)$ esiste inf e sup

* inf → massimo dei minoranti
* sup → minimo dei maggioranti

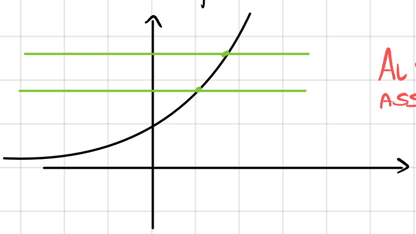
Non sempre esistono MAX e MIN

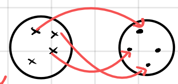
* $\nexists$ max se $\sup = +\infty$ oppure se sup non è compreso nel dominio
* $\nexists$ min se $\inf = -\infty$ oppure se inf non è compreso nel dominio

Altrimenti $\exists$ max = sup, $\exists$ min = inf

FUNZIONE INIETTIVA

Se le linee orizzontali intersecano una sola y allora la funzione è INIETTIVA

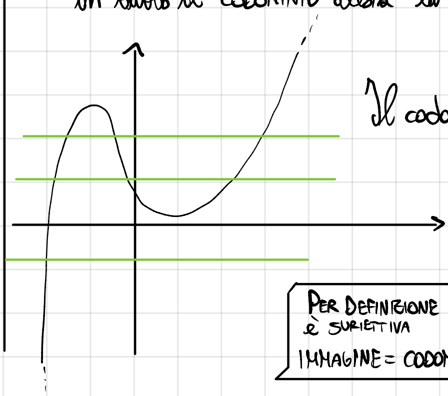




AL MASSIMO (PIÙ) UNA X ASSOCIATA AD Y

FUNZIONE SURIETTIVA

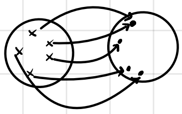
Se le linee orizzontali intersecano la funzione in tutto il CODOMINIO allora la funzione è SURIETTIVA



Il codominio è tutto $\mathbb{R}$

ALMENO UN ELEMENTO X ASSOCIATO AD Y

PER DEFINIZIONE SE È SURIETTIVA IMMAGINE = CODOMINIO



FUNZIONE BIETTIVA

Se una $f(x)$ è sia iniettiva che suriettiva allora è detta biettiva (o biunivoca) $\longrightarrow$ La funzione biunivoca è anche una funzione invertibile

$\downarrow$

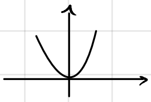
POSSO RENDERE INIETTIVA/SURIETTIVA UNA FUNZIONE CHE NON LO È RESTRINGENDO DOMINIO o CODOMINIO

* metto in evidenza la x e a fine evidenza li sostituisco
* scambio dominio e codominio e controllo siano validi

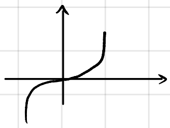
$f: A \to B \qquad f^{-1}: B \to A$

FUNZIONI PARI e DISPARI

$f(-x) = f(x)$ PARI

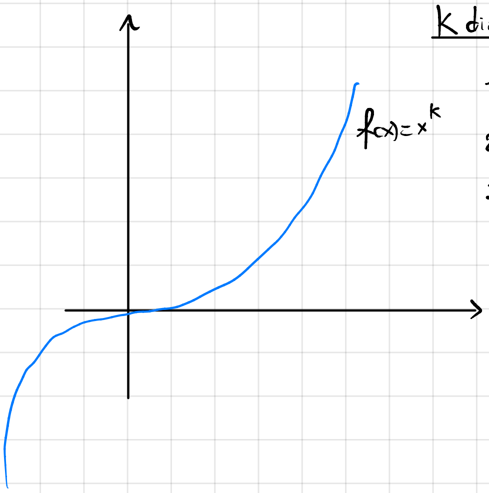


$f(-x) = -f(x)$ dispari



FUNZIONI ELEMENTARI

Potenze

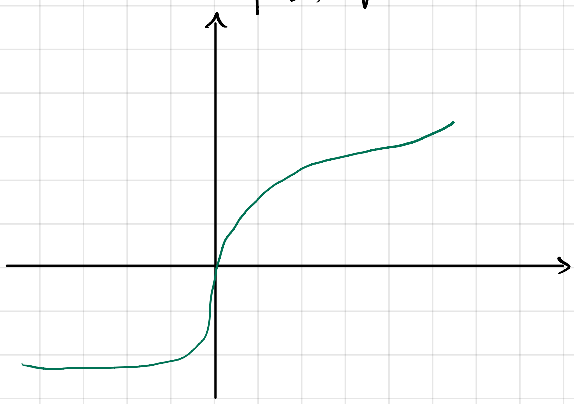


K dispari

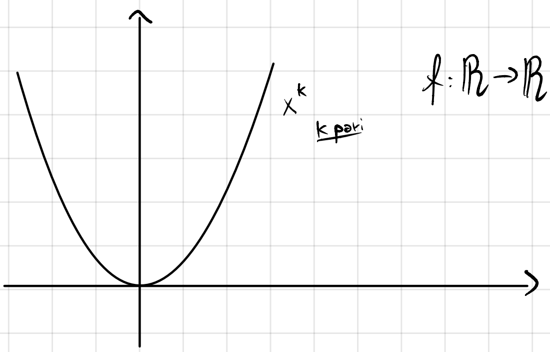
1) $f(x)$ è dispari
2) $f(x)$ è strettamente crescente
3) è biunivoca

INVERSA

$f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$



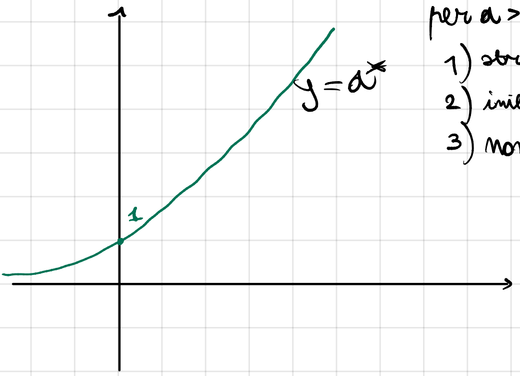
K pari



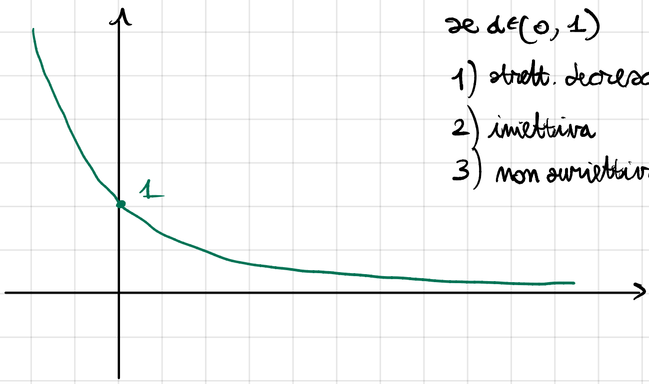
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) non è suriettiva: per $a > 0$ non esiste verso $-\infty$

Esponenziale a^x



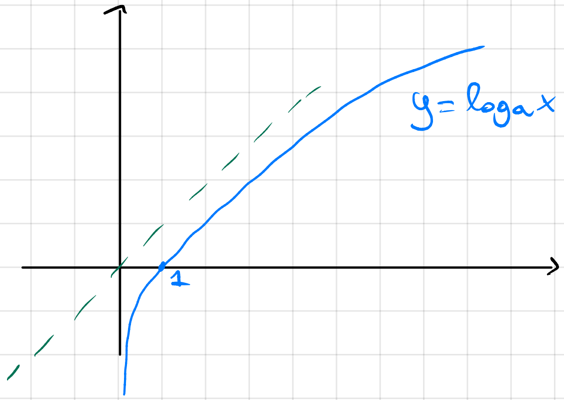
per $a>1$
1) strett. crescente
2) iniettiva
3) non suriettiva



se $a \in (0,1)$
1) strett. decrescente
2) iniettiva
3) non suriettiva

Restringendo il codominio trovo L'INVERSA

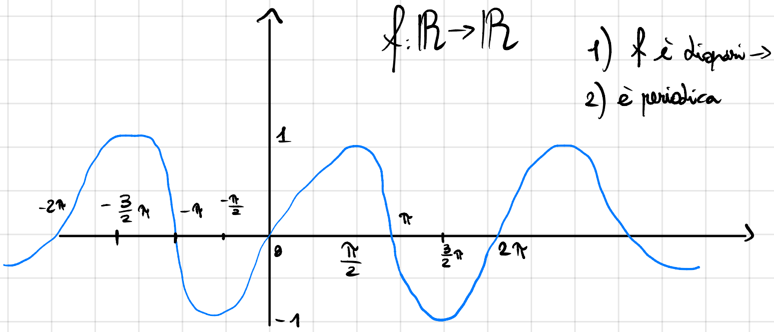
$\log_a x$



Seno

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) f è dispari $\to \sin(-x) = -\sin(x)$
2) è periodica



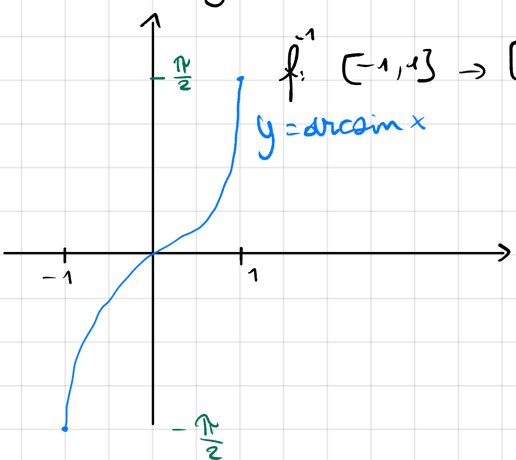
Restringendo D e Cod.

$f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

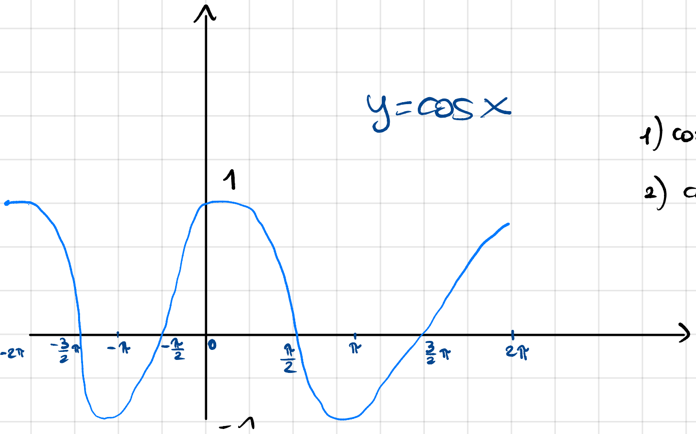
$\downarrow$

INVERSA $y = \arcsin x$

$f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



COSENO



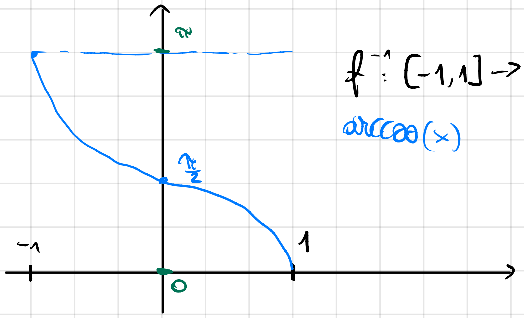
1) $\cos x$ è pari $\cos(x) = \cos(-x)$

2) $\cos x$ è periodica

RESTRINGENDO Dom e Codominio

$f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

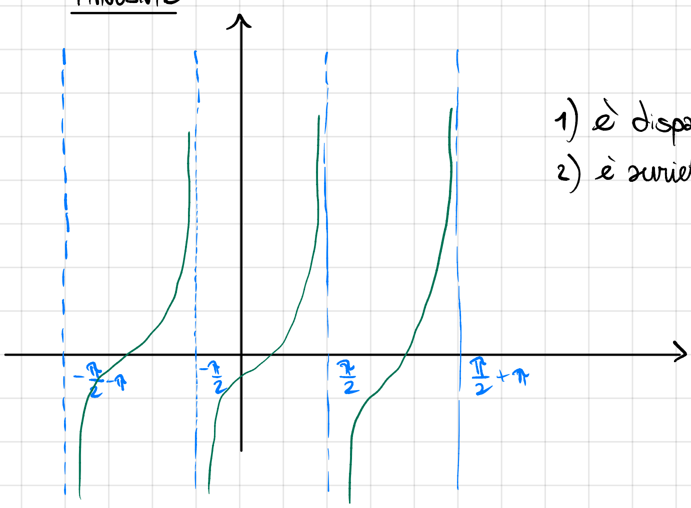
Ottengo INVERSA $\arccos(x)$



$f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\arccos(x)$

TANGENTE



1) è dispari

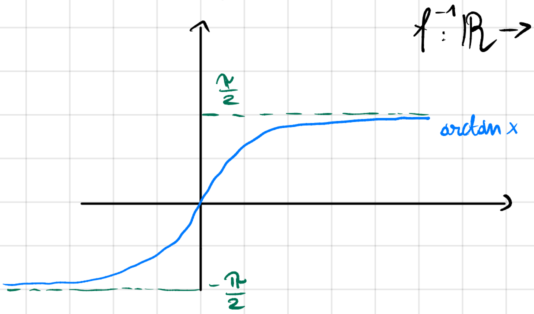
2) è suriettiva

Restringo DOMINIO e OTTENGO

INVERSA $y = \arctan x$

$D: \mathbb{R}$

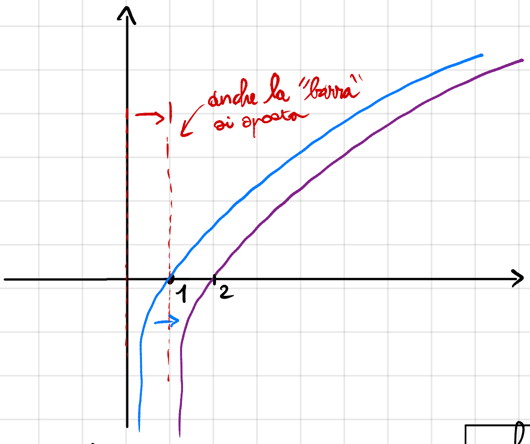
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



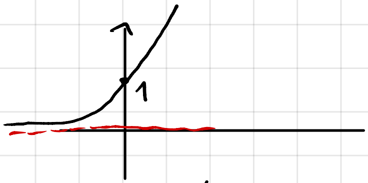
TRASFORMAZIONI DI FUNZIONI

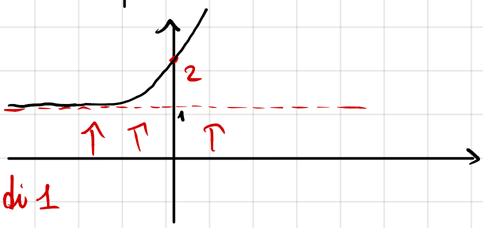
$(x-K)$: sposta a destra di K quadretti
$(x+K)$: sposta a sinistra di K quadretti

traslazione verso destra
$\ln(x-1)$ →



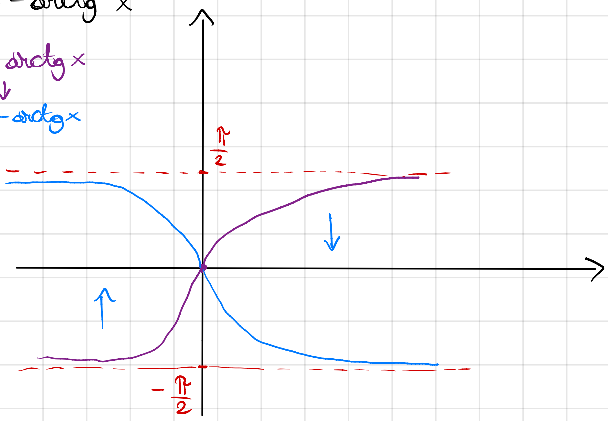
$y = e^x$
↓
$y = e^x + 1$
traslliamo verso l'alto di 1



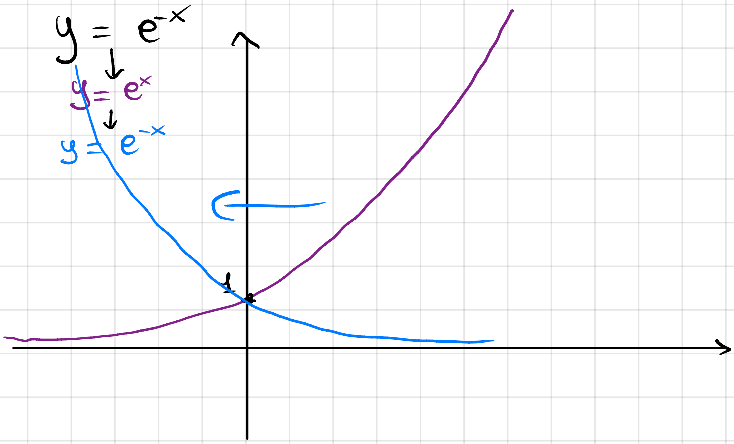


$f(x+K)$ = sposta a sinistra di K quadretti
$f(x-K)$ = sposta a destra di K quadretti
$f(x)+K$ = sposta verso l'alto di K quadretti
$f(x)-K$ = sposta verso il basso di K quadretti
$-f(x)$ = ribalto la funzione verso il basso (simmetria rispetto ad x) (⊥ diventa ⊤)
$f(-x)$ = ribalto la funzione verso il lato opposto (simmetria rispetto ad y) (← diventa →)
$|f(x)|$ = porta la parte negativa in quella positiva

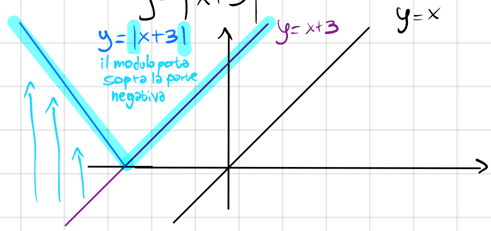
$y = -\operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{arctg} x$
↓
$y = -\operatorname{arctg} x$



$y = e^{-x}$
↓
$y = e^x$
↓
$y = e^{-x}$

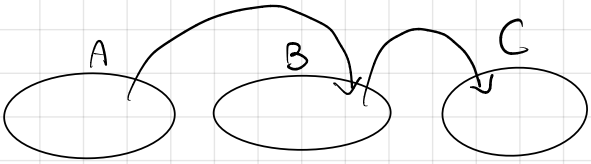


$y = |x+3|$



COMPOSIZIONE DI FUNZ.

$f: A \to B$
$g: B \to C$



Per raggiungere C da A posso usare la funzione composta (si scrive al contrario) prima applico f e poi g

$g \circ f: A \to C$
↓
avrà dominio in A e codominio in C → non è sempre così, è meglio calcolare dominio e codominio per accertarsi

$f \circ g = f(g(x))$
$g \circ f = g(f(x))$

SUCCESSIONI

Sia a_n una successione, ci sono 4 casi

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ (converge)

2) // $= +\infty$ } (diverge)

3) // $= -\infty$ } (diverge)

4) // NON ESISTE

Teorema di unicità del limite

Una successione ha uno solo di quei comportamenti, e se è del tipo 1 allora l è unico. } quindi vuol dire che se converge è anche limitato

$\Downarrow\Downarrow\Downarrow$

ESISTENZA DEL LIMITE

A) Se a_n è crescente, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

B) Se a_n è decrescente, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf a_n \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

Permanenza segno

Se $a_n \to l > 0$ o $a_n \to +\infty$

allora $a_n > 0$ def^{nte}

MONOTONIA FUNZIONE

- CRESCENTE $a_n < a_{n+1}$
- STRETT. CRESCENTE $a_n \leq a_{n+1}$
- DECRESCENTE $a_n > a_{n+1}$
- STRETT. DECRESCENTE $a_n \geq a_{n+1}$

RICORRENZA

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = f(n, a_n) \end{cases}$$

SERIE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ SCRITTURA

Serie calcolabili (note)

→ Telescopiche

Svolgo la serie fino ad una certa n, e trovo il pattern S_n

→ GEOMETRICHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & q \geq 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \text{indeterminata} & q \leq -1 \end{cases}$$

ATTENZIONE

Se $n > 0$, allora bisogna riportarlo a 0 togliendo la diff.

ESEMPIO

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - q^0 - q^1$$

Serie non calcolabili (note)

ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ARMONICA LOGARITMICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n} \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \cup (\alpha = 1 \wedge \beta > 1) \\ \text{diverge se } \alpha < 1 \cup (\alpha = 1 \wedge \beta \leq 1) \end{cases}$$

Se a_n def$^{\text{mte}}$ ≤ 0 la trasformo in def$^{\text{mte}}$ ≥ 0

* porto il $-$ fuori serie

esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 - n!}{n^n} \quad \text{diventa} \quad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! - 10}{n^n}$$

Se a_n def$^{\text{mte}}$ ≥ 0 →

1. condizione necessaria ma non assoluta di convergenza ($a_n \to 0$)
2. criterio del rapporto/radice (quando ci sono esponenziali, fattoriali, n^n)
3. confronto
4. confronto asintotico
5. condensazione di Cauchy (quando ci sono diversi logaritmi)

Se a_n è a segno variabile

→ Criterio di convergenza assoluta

Se a_n è a segno alterno

1. CRITERIO CONVERGENZA ASSOLUTA
2. LEIBNITZ

CONFRONTO

Per a_n trovo b_n tale che

$$a_n \leq b_n$$

- se b_n converge allora anche a_n converge
- se a_n diverge allora anche b_n diverge

CONFRONTO ASINTOTICO

$a_n \sim b_n$ per $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

CRITERIO DEL RAPPORTO →

* fattoriale
* potenza n-esima + altro

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \begin{cases} l < 1 \text{ converge} \\ l > 1 \text{ diverge} \end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE → *potenza n-esima (tutto)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \begin{cases} l = 1 \text{ non funziona} \\ l < 1 \text{ converge} \\ l > 1 \text{ diverge} \end{cases}$$

LEIBNITZ

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

allora la serie converge

Tre condizioni

- $a_n > 0$
- $a_n \geq a_{n+1}$ (strett.$^{\text{nte}}$ decrescente)
- $a_n \to 0$

CONVERGENZA ASSOLUTA

Si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum |a_n|$ converge

LIMITI

CONTINUITÀ

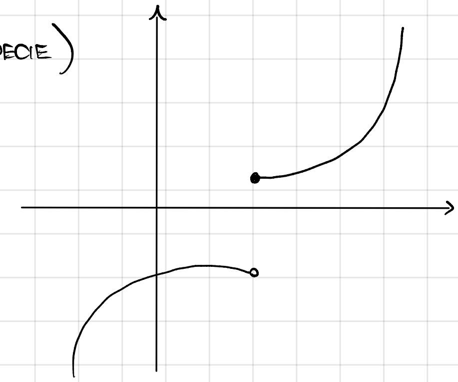
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = f(x_0)$ allora si dice continua in quel punto

ESERCIZIO SU CONTINUITÀ

→ faccio lim destro e sinistro di quel punto, se coincidono allora è continua altrimenti discontinua

TIPI DI DISCONTINUITÀ

1° SPECIE)

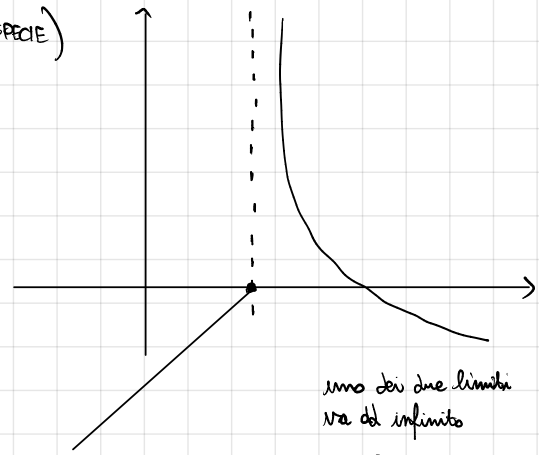


$l_{destro} \neq l_{SINISTRO}$

DIMOSTRARE CHE UN LIMITE ESISTE

Se i limiti in x_0^+ e x_0^- sono diversi, allora il limite non esiste

2° SPECIE)

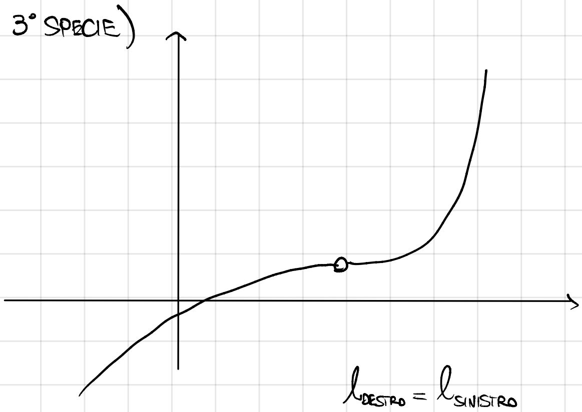


uno dei due limiti va ad infinito

$l_1 \in \mathbb{R}$

$l_2 = \pm\infty$

3° SPECIE)



$l_{DESTRO} = l_{SINISTRO}$

e $f(x_0) \neq l$

oppure $f(x_0)$ non esiste

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
- $\lim \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$
- $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$

Cambio di Variabile

Agevolo i calcoli sostituendo pezzi "rognosi"

1) Creo la mia $y = \sim$

2) per $x \to$ qualcosa, sostituisco in y e trovo quindi $y \to$ qualcosa

3) svolgo il limite

Alcuni esempi limiti

- $\frac{1}{0^+} = +\infty$ • $\frac{1}{0^-} = -\infty$
- $-\frac{1}{0^+} = -\infty$ • $-\frac{1}{0^-} = +\infty$
- $e^{+\infty} = +\infty$ • $e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$
- $\arctan +\infty = \frac{\pi}{2}$ • $\arctan -\infty = -\frac{\pi}{2}$

Hopital

Per $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]$

allora posso fare $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Rapporto Incrementale (derivate)

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Equivalenza Asintotica

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni si dicono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI PER $x \to x_0$ SE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

si scrive $f \sim g(x)$ per $x \to x_0$

Asintotici Limiti Notevoli

* $\sin x \sim x$
* $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
* $tg\, x \sim x$
* $e^x - 1 \sim x$
* $\ln(1+x) \sim x$
* $(1-x)^\alpha \sim \alpha x$

O-PICCOLO

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in UN INTORNO di $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ si dice che $f(x)$ è un o PICCOLO di $g(x)$ SE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x)$ è INFINITAMENTE PIÙ PICCOLA di $g(x)$ per $x \to x_0$

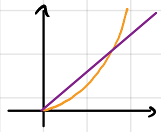
↓↓↓

va più veloce a 0

esempio

$x^2 = o(x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$



$o(x)$ non è una funzione specifica, è qualsiasi goda della proprietà

ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI

- $o(x) - o(x) = o(x)$
- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{m+n})$
- $x^n \cdot o(x^n) = o(x^{n+n})$
- $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$ SE $n < m$

Sviluppi O-PICCOLI

* $\sin x = x + o(x)$
* $e^x - 1 = x + o(x)$
* $1 - \cos = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
* $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$
* $tg\, x = x + o(x)$
* $\ln(1+x) = x + o(x)$

ESEMPIO

$\sin x^3 + 3x^4 + \ln(1+2x^5) = x^3 + o(x^3) + 3x^4 + 2x^5 + o(x^5) = x^3 + o(x^3)$

sopravvivono solo i più piccoli di ≤ 3

DERIVATE

Regole

→ Somma e diff.

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

→ Prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$1\,(3x-2) + 3a$$

→ Reciproco

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

→ QUOZIENTE

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

COMPOSTE

In ordine derivo la più esterna e poi moltiplico le interne

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad \rightarrow f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

→ trucco esponenziale

$$x^x = e^{x \log x}$$

$$A^B = e^{B \log A}$$

RETTA TANGENTE

Per trovare la retta tangente in x_0

1) Calcolare funzione in x_0
2) Trovare il punto di tangenza $(x_0, f(x_0))$
3) Coefficiente retta: $f'(x_0)$
   ↳ calcolo la derivata prima e poi sostituisco x_0

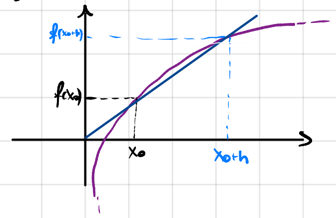
$$y - y_P = m(x - x_P)$$

oppure

$$y - f(x_0) = \underset{\text{derivata}}{m}\,(x - x_0)$$

COS'È UNA DERIVATA?

→ Voglio trovare la retta tangente ad $f(x)$ in x_0



→ L'equazione della retta è $y - f(x_0) = m(x - x_0)$

→ Voglio trovare il coefficiente m

→ Introduco $x_0 + h$ per trovarlo
↓
usiamo la formula della $m_{SECANTE}$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}} \quad h \neq 0$$

→ più avviciniamo $x_0 + h$ ad x_0, più la retta secante tende a diventare tangente
→ devo ridurre quindi h verso 0

$$\boxed{m_{TG} = \lim_{h \to} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

→ se il limite esiste ed è finito la funzione è derivabile, il valore del limite è LA DERIVATA

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$\ln a$

A COSA SERVE?

Conoscere l'andamento delle m ci permette di capire dove la funzione è crescente o decrescente e trovare i punti di MAX e MIN

DERIVATA della FUNZIONE INVERSA

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad y_0 = f(x_0)$$

1) trovo la x_0 per cui $f(x_0) = y_0$
2) calcolo la derivata prima di f
3) faccio l'inversa della derivata
4) Metto x_0 nell'inversa e ho fatto

Se una funzione è derivabile in un punto è continua in quel punto

TAYLOR CON RESTO DI PEANO

A cosa serve?

Permette di APPROSSIMARE, sotto opportune ipotesi, attraverso POLINOMI delle funzioni

FORMULA

- $\underbrace{f(x)}_{\text{funzione da approssimare}} = \overbrace{P_n(x)}^{\text{polinomio approssimante}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{errore di approssimazione}}$

$P_n(x)$ = il polinomio di grado $\leq n$ ricavato dalla formula

- $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!}x^k$

SVILUPPI DI TAYLOR

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ SEGNO ALTERNO
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$ SEGNO ALTERNO
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\dots)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

ALTERNATIVA (senza formule)

→ Uso le derivate, pongo poi $f^n(x_0)$ e trovo così il polinomio

$P_n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$
$+ o(x^n)$

COME SI USA

In base al grado n di approssimazione richiesto uso uno degli sviluppi corrispondenti fino a quel grado e sommo l'o-piccolo di x^n. Un maggior grado implica un'approssimazione più precisa.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + 2x^5}{3x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

uso lo sviluppo di taylor del seno di 3° grado (guardo il denominatore)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^6}{6} + o(x^3) - x + 2x^5}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^6}{6} + o(x^3)}{3x^3} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{18} + \frac{o(x^3)}{3x^3}\right] = -\frac{1}{18}$$

esempio 2: $f(x) = 3\sin x + \cos x \qquad n=4$

$$f(x) = 3\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right] + \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = 1 + 3x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

esempio 3

$g(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad n=4$

!!! essendo di quarto grado, la moltiplicazione darà elementi di $n>4$ che non interessano. Cerco solo quelli di $n \leq 4$

$$g(x) = \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right]\cdot\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right] = x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

McLaurin = centro in 0
Taylor = centro in x_0

Taylor con centro qualsiasi

→ utile quando $\lim x \to x_0$ e non $x \to 0$

Sia $f(x)$ una funzione, derivabile abbastanza volte in un intervallo contenente x_0, allora esiste un polinomio $P_n(x)$ di grado $\le n$ tale che

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \qquad \text{per } x \to x_0$$

dove $P_n(x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Funzioni continue

$f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x)$ è continua su $A \subseteq \mathbb{R}$ se è continua $\forall x_0 \in A$

$C^0(A)$ = l'insieme delle funzioni continue su A

$C^k(A)$ = insieme delle funzioni derivabili k-volte in ogni punto A, con derivata k-esima continua

$C^\infty(A)$ = insieme delle funzioni derivabili infinite volte in ogni punto di A

Permanenza del segno

Se una funzione è continua in un punto x_0 e positiva allora è positiva anche nell'intorno di x_0 in A
$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

Teorema degli zeri

Per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $\overbrace{f(a) \cdot f(b)}^{\text{devono essere discordi}} < 0$ allora esiste un punto c nell'intervallo a, b tale che $f(c) = 0$

Teorema di monotonia I

Per $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$, con $f'(x_0) > 0$, allora esiste un $\Delta > 0$ tale che

* $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\Delta, x_0) \cap A$ $\quad (x_0^-, x_0]$
* $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\Delta) \cap A$ $\quad [x_0, x_0^+)$

SPIEGAZIONE
→ Se in un punto la derivata è positiva, dopo la funzione è più grande e prima è più piccola

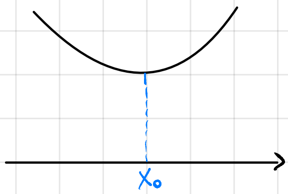
<u>Variante</u>: Se $f'(x_0) < 0$ allora

* $f(x) < f(x_0)$ se $x \in (x_0, x_0+\Delta)$

$f(x) > f(x_0)$ se $x \in (x_0-\Delta, x_0)$

MONOTONIA → $f'(x_0) = 0$

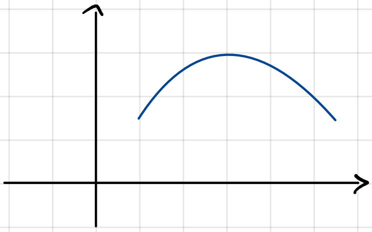
1) MINIMO LOCALE



$\forall x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta)$

$f(x) \geq f(x_0)$

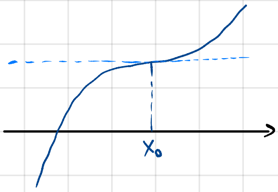
2) MASSIMO LOCALE



$\forall x \in (x_0-\Delta, x_0+\Delta)$

$f(x) \leq f(x_0)$

3) FLESSO ASCENDENTE A TANGENTE ORIZZONTALE

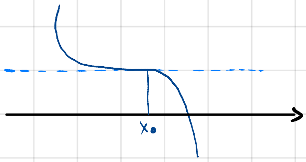


(prima è più piccola poi è più grande)

$f(x) \leq f(x_0)$ per $x \in (x_0-\Delta, x_0)$

$f(x) \geq f(x_0)$ per $x \in (x_0, x_0+\Delta)$

4) FLESSO DISCENDENTE A TANGENTE ORIZZONTALE



(prima è più grande poi è più piccola)

→ $f(x) \geq f(x_0)$ per $x \in (x_0-\Delta, x_0)$

→ $f(x) \leq f(x_0)$ per $x \in (x, x_0+\Delta)$

5) NESSUNA DELLE PRECEDENTI: anche se la derivata è 0 non implica un andamento lineare (monotono)

STUDIO LOCALE DI FUNZIONE → MASSIMI e MINIMI

Per $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0,

$f'(x) = 0$ → ci sono 5 possibilità, come capisco in quale mi trovo?

↓↓↓

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Se $f'(x) = 0$, cerco la prima derivata successiva che non si annulla in x_0

→ f dev'essere derivabile ALMENO due volte in x_0 (anche di più) $(k \geq 2)$

quindi: $f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ e trovo quindi $f^{(k)}(x_0) \neq 0$

↓ ↓ ↓

allora

1. se K è pari e $f^{(K)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di MINIMO LOCALE
2. se K è pari ma $f^{(K)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di MASSIMO LOCALE
3. se K è dispari e $f^{(K)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un FLESSO ASCENDENTE A TG. ORIZZONTALE
4. Se K è dispari e $f^{(K)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un FLESSO DISCENDENTE A TG. ORIZZONTALE
5. 1) La funzione non è costante (monotona) → la derivata continua a essere 0
   2) Smette di essere derivabile prima che una derivata sia $\neq 0$

MASSIMO e MINIMO

$f: A \to \mathbb{R}$

il massimo dei valori assunti da f su a

- il MASSIMO di f su A è $M = \max_A f = \max \{f(x) \mid x \in A\}$
- il MINIMO di f su A è $m = \min_A f = \min \{f(x) \mid x \in A\}$

sono valori unici

- punto di MASSIMO è $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$
- punto di MINIMO è $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = m$

sono infiniti valori
↓
tutti quelli in grado di raggiungere MAX e MIN

ESISTENZA DI MASSIMI e MINIMI (TEO DI WEIERSTRASS)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f ammette MASSIMO e MINIMO su $[a,b]$.

UNA FUNZIONE CON DOMINIO AD INTERVALLO CHIUSO e LIMITATO (CONTIENE GLI ESTREMI)
↓
dev'essere $[a,b]$ per f continua

RICERCA DI max e min

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Per W ha massimo e minimo su $[a,b]$.

I punti di max e min vanno cercati in 3 tipologie

1. STAZIONARI INTERNI: gli x_0 in (a,b) tali che $f'(x_0) = 0$
2. SINGOLARI INTERNI: gli x_0 in (a,b) t.c. f non è derivabile in x_0
3. BORDO: $x_0 = a$, $x_0 = b$

COSA FARE: TROVO I PUNTI 1 e 2 (e 3) e CALCOLO I VALORI DI $f(x)$ IN TALI PUNTI. IL PIÙ GRANDE è IL MASSIMO e IL PIÙ PICCOLO è IL MINIMO

Teo di FERMAT

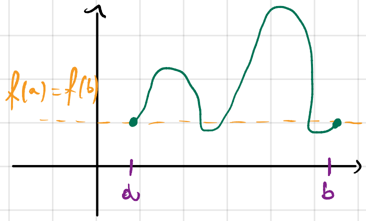
$f: A \to \mathbb{R}$, f derivabile in x_0, se x_0 è pt. di max o min locale allora $f'(x_0)=0$

ESTREMANTE: punto di MAX o min

TEOREMA DI ROLLE

Per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1) f è continua su $[a,b]$
2) f è derivabile su (a,b)
3) $f(a) = f(b)$



Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c)=0$

$\downarrow$

* possono esistere più c dove $f'(c)=0$

* la funzione dev'essere derivabile su TUTTO (a,b)

COME FARE GLI ESERCIZI CON ROLLE

1) Data la funzione, capire se soddisfa le condizioni
   - → dev'essere continua sull'intervallo chiuso $[a,b]$
   - → dev'essere derivabile sull'intervallo aperto (a,b)
   - → $f(a) = f(b)$
2) Controllo se è continua (lim)
3) Controllo se è derivabile (derivate e lim)
4) Controllo se $f(a) = f(b)$
5) Se tutte e 3 OK, allora pongo derivata/e $=0$ e trovo la c per cui $f'(c)=0$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni tali che

1) f, g continue su $[a,b]$
2) f, g derivabili su (a,b)

allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$(f(a)-f(b)) \cdot g'(c) = (g(a)-g(b)) \cdot f'(c)$$ 1° LIVELLO

e se 3) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$g(a) \neq g(b)$$

e

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ 2° LIVELLO

TEOREMA DI LAGRANGE

Per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

1) f è continua su $[a,b]$
2) f è derivabile su (a,b)

allora esiste una $c \in (a,b)$ tale che

$$f(a) - f(b) = (a-b) \cdot f'(c)$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

↑ coeff. angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

TEOREMA DI MONOTONIA 2

Per $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b). Allora

1) f deb^{ole} crescente in $[a,b]$ allora $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
2) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ deb^{ole} crescente in $[a,b]$
3) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ strett^{te} crescente in $[a,b]$

TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

→ è più preciso del resto di Peano

$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ con centro $x = 0$

Presa $f(x)$, $0 \in$ insieme di def., $n \in \mathbb{N}$, se $f(x)$ è derivabile $n+1$ volte in un intervallo (a,b) contenente 0 allora $\forall x \in (a,b)$ vale

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

con c compreso tra 0 e x $\left(\Rightarrow \begin{array}{ll} 0 < c < x & \text{se } x > 0 \\ x < c < 0 & \text{se } x < 0 \end{array}\right)$

SI PUÒ FARE IN QUALSIASI X_0 CENTRATA

COME FARE GLI ESERCIZI CON LAGRANGE

1) Data la funzione, capire se soddisfa le condizioni
   - → dev'essere continua sull'intervallo chiuso $[a,b]$
   - → dev'essere derivabile sull'intervallo aperto (a,b)
2) Controllo se è continua (lim)
3) Controllo se è derivabile (derivata e lim)
5) Se tutte e 2 ok, allora trova c

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(in sostanza pongo derivata uguale a quel rapporto e trovo la c)

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONE

→ perchè farlo?

* utile per trovare inf/sup/max/min di $f([a,b])$ o di $f^{-1}([a,b])$
* Trattare graficamente eq/diseq.

COSA VOGLIO FARE

Tracciare un grafico approssimativo di una funzione $f(x)$ espressa in termini di funzioni elementari in tutto il suo insieme di definizione

↓ DOVE LA FUNZIONE HA SENSO

COME FARE LO STUDIO

1°) TROVO L'INSIEME DI DEFINIZIONE (C.E.)

1°bis) Cerco eventuali simmetrie: pari, dispari, periodicità (guardo l'insieme di def.)

→ per controllare se è pari o dispari introduco $-x$ nella funzione

→ se con $f(-x)$ ottengo comunque $f(x)$ allora è pari

→ se con $f(-x)$ ottengo $-f(x)$ allora è dispari

② CONTINUITÀ e LIMITI

Devo individuare eventuali punti di discontinuità, se non ce ne sono allora dichiaro l'insieme su cui la f è continua

$\Longrightarrow$ se f è continua faccio i limiti agli estremi del dominio $\rightarrow$ esempio : per dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ faccio 4 limiti:
$x \to -\infty$; $x \to +\infty$; $x \to 0^+$; $x \to 0^-$

③ SEGNO (e ZERI) Risolvo, se possibile $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$

per x, y

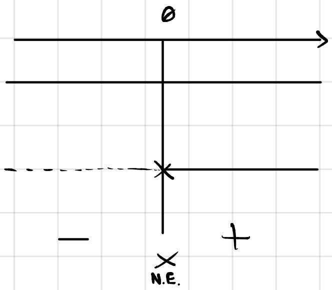
NEL GRAFICO PRENDO IN CONSIDERAZIONE I LIMITI SVOLTI PRIMA

esempio

$\frac{e^x}{x} > 0$

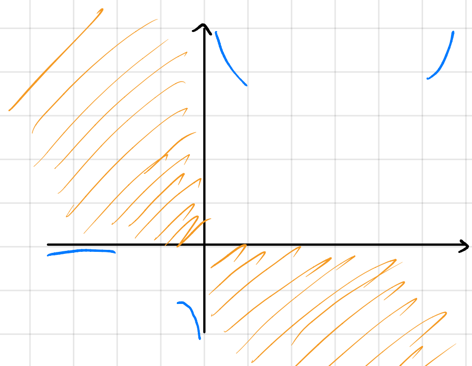
(sempre positivo) e^x

$\frac{1}{x}$ (negativo prima di 0, non esiste in 0 e poi positivo)



quindi

1) per $x<0$, $y<0$
2) per $x=0$, N.E.
3) per $x>0$, $y>0$



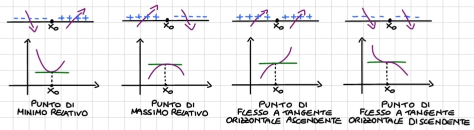
④ DERIVATA e MONOTONIA (esistenza, segno e zeri di $f'(x)$)

$\longrightarrow$ Ci sono punti di non derivabilità?

$\rightarrow$ TROVO LA DERIVATA

$\rightarrow$ STUDIO IL SEGNO e GLI ZERI DI $f'(x)$
↓
Capisco l'andamento della funzione ($\searrow$ per $-$, $\times$ per $\times$, $\nearrow$ per $+$, min o max locali...)
↓
da queste informazioni posso completare il grafico quasi del tutto

SE LA DERIVATA PRIMA SI ANNULLA IN x_0, OVVERO $f'(x_0)=0$, CI SONO 4 POSSIBILITÀ:



⑤ ASINTOTI

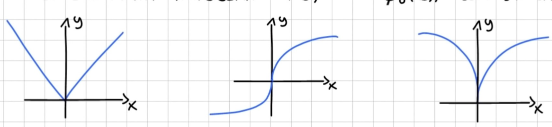
VERT.) Se lim per x_0 produce $\pm\infty$ allora $x = x_0$ (sx/dx)

ORIZZ.) Se il lim per $\pm\infty$ produce una $l \in \mathbb{R}$, $y = l$

OBLIQUO) Se $\nexists$ asintoti orizzontali oppure $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$
↳ cerco asintoto obliquo
$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ e $\pm\infty$, poi $q = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - mx$

5) STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

SE LA DERIVATA PRIMA NON E' DEFINITA IN x_0, OVVERO $\nexists f'(x_0)$, CI SONO 3 POSSIBILITÀ:



PUNTI ANGOLOSI: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

FLESSI A TG. VERTICALE: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ E $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ SONO ENTRAMBI UGUALI A $+\infty$ O A $-\infty$

CUSPIDI: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ E $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ FANNO UNO $+\infty$ E L'ALTRO $-\infty$ OPPURE VICEVERSA

UNA VOLTA TERMINATO LO STUDIO DI $f'(x)$, CONVIENE AGGIORNARE SUBITO IL DISEGNO

5

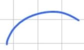
⑥ CONVESSITÀ / CONCAVITÀ

$\rightarrow$ derivata seconda e studio segno

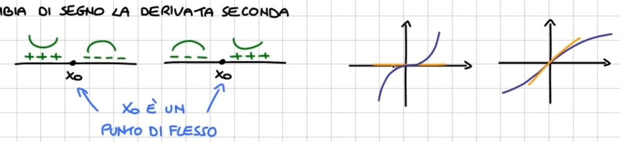
6) STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

NEGLI INTERVALLI IN CUI LA DERIVATA SECONDA E' POSITIVA $f(x)$ E' CONVESSA (CONCAVITA' VERSO L'ALTO)

NEGLI INTERVALLI IN CUI LA DERIVATA SECONDA E' NEGATIVA $f(x)$ E' CONCAVA (CONCAVITA' VERSO IL BASSO)



SE A CAVALLO DI UN CERTO PUNTO x_0 SI ANNULLA E CAMBIA DI SEGNO LA DERIVATA SECONDA



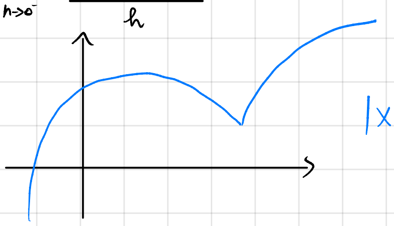
⑦ RICONOSCERE max/min globali/locali oppure flessi

PUNTI DI NON-DERIVABILITÀ

Se $f(x)$ non è derivabile in x_0 (il limite del R.I. non esiste), possono succedere varie cose, tra cui

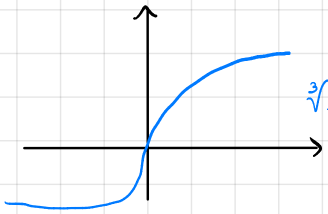
1) $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m \in \mathbb{R}$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = n \in \mathbb{R}$ con $m \neq n$

$\Longrightarrow$ **x_0 è detto PUNTO ANGOLOSO**



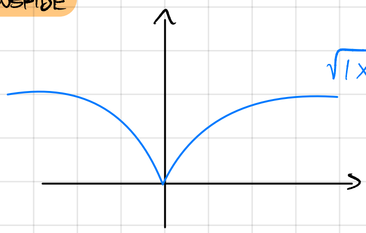
2) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$ (oppure $-\infty$)

$\Longrightarrow$ **x_0 è detto pt. di FLESSO a tg VERTICALE**



3) I limiti dx e sx sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$

$\Longrightarrow$ **x_0 è detto pt. di CUSPIDE**



ASINTOTI

1) ORIZZONTALI: una retta $y = K$ si dice ASINTOTO ORIZZONTALE di $f(x)$ per $x \to +\infty$

se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$

e si dice AS. OR. di $f(x)$ se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$

OSS: ci possono essere al più 2 asintoti orizzontali, si trovano calcolando i limiti di $f(x)$ a $\pm\infty$

2) Una retta $x = x_0$ si dice ASINTOTO VERTICALE di $f(x)$ se si verifica almeno una delle seguenti:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

OSS: $f(x)$ può avere quanti asintoti verticale vuole, saranno tutti nei punti di $\mathbb{R} \setminus A$ oppure nei pt. di discontinuità in $\mathbb{R}$

3) $y = mx + q$ è un ASINTOTO OBLIQUO di $f(x)$ per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - q) = 0 \qquad (\text{idem per } -\infty)$$

Come trovo m e q?

① $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ② $q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$

(idem a $-\infty$)

OSS: Se $m = 0$ è un asintoto verticale

OSS 2: Il valore di m, se esiste, è unico.

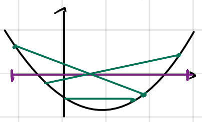
$\boxed{\text{CONVESSITÀ}}$ → ha senso parlarne solo su determinati insiemi dei $\mathbb{R}$

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ uno dei seguenti insiemi

1) intervalli $([a,b], (a,b), [a,b), (a,b])$
2) semirette $((-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty))$
3) $\mathbb{R}$

→ Convessità geometrica $(\cup)$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $f(x)$ è CONVESSA in I se comunque presi due punti del suo grafico sopra I, si ha che il segmento che li congiunge sta tutto sopra il grafico di $f(x)$



→ Si dice strettamente convessa se gli unici punti in comune tra il grafico e il segmento sono gli estremi

OSS: $f(x)$ è convessa $\iff -f(x)$ è concava

→ CONCAVITÀ GEOMETRICA $(\cap)$

$f(x)$ si dice CONCAVA (o STRETT. CONCAVA) se valgono le stesse condizioni di prima SOTTO al grafico

$\boxed{\text{PUNTO DI FLESSO}}$

x_0 si dice pt. di FLESSO se $f(x)$ è concava da un lato di x_0 e convessa dall'altro.

CONVESSITÀ e DERIVATA

La funzione è derivabile in I due volte. Allora $f(x)$ è convesso in I se e solo se $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

* se $f''(x) > 0$ è strettamente CONVESSA
* se $f''(x) \leq 0$ è CONCAVA
* se $f''(x) <$ è strett.$^{\text{mte}}$ CONCAVA
* se $f'(x)$ deb$^{\text{mte}}$ crescente in I è CONVESSA
* $f(x)$ concava in $I \iff f'(x)$ deb$^{\text{mte}}$ decrescente

INTEGRALI

Immediati

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
1	x

INTEGRALI COMPOSTI

$\rightarrow \displaystyle\int f'(x)\cdot[f(x)]^{\alpha}\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$\rightarrow \displaystyle\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$

$\rightarrow \displaystyle\int f'(x)\cdot \sin[f(x)]\,dx = -\cos[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int f'(x)\cdot \cos[f(x)]\,dx = \sin[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int f'(x)\cdot a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$

$\rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \tan[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sin^2[f(x)]}\,dx = -\operatorname{cotg}[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = \arcsin[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \operatorname{arctg}[f(x)]+c$

$\rightarrow \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert+c$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$f(x)\cdot g(x) - \displaystyle\int f'(x)\cdot g(x)$

$f(x) = \sim \qquad g'(x) = \sim$

$f'(x) = \downarrow \qquad g(x) = \downarrow$

$f(x)$ = fattore finito

$g(x)$ = fattore differenziale

INTEGRALE DEFINITO

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

INTEGRALI FRATTI

$\displaystyle\int \frac{N}{D}$

Se $N° \geq D°$ allora (div in colonna)

$\begin{array}{c|c} N & D \\ \hline \sim & \sim \end{array}$

$\displaystyle\int \underbrace{Q(x)}_{\text{quoziente}} + \frac{\overset{\text{resto}}{R(x)}}{\underset{\text{divisore}}{D(x)}}$

Se $N° < D°$ e $\Delta > 0$

$\dfrac{A}{1°D} + \dfrac{B}{2°D}$ $\quad \begin{cases} A = ? \\ B = ? \end{cases}$

scompongo e trovo A e B

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE → radici, esponenziali, logaritmi

Cerco la $f(x) = t$ e sostituisco, poi alla fine sostituisco

$\displaystyle\int \sim\, dx \qquad t = \sim$

$\displaystyle\int \sim\, dt \qquad t = \sim$

MEDIA INTEGRALE

$$M[f[a,b]] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$