



Universidad Internacional de La Rioja
Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología

Máster en Ingeniería Matemática y Computación

Modelo del Flujo Sanguíneo en Capilares basado en el Método de Elementos Finitos

Trabajo fin de estudio presentado por:	Ing. Nicolás Téllez Cáceres
Tipo de trabajo:	Tipo 2: Aplicación práctica real
Director/a:	Dr. Hugo Ramiro Zaldaña Bustamante
Fecha:	Septiembre del 2021

Resumen

Entender el flujo de la sangre en el cuerpo humano es una parte fundamental de la ciencia médica para avanzar en la comprensión y tratamiento de patologías fisiológicas. Los capilares son los vasos sanguíneos encargados de entregar el oxígeno y nutrientes a los tejidos del cuerpo. Una manera común de modelar el flujo sanguíneo es tratar a la sangre como un fluido de dos fases – una central (hematocrito) y otra periférica (plasma sanguíneo) – pudiendo considerar al hematocrito como fluido no-newtoniano o fluido micropolar, mientras que al plasma como fluido newtoniano.

Para poder comprender el comportamiento del flujo sanguíneo en los capilares se requiere de un modelo matemático basado en las teorías y conceptos de la hemodinamia. Entonces en este trabajo se obtiene un modelo numérico que se aproxime al modelo real basado en el Método de Elementos Finitos MEF.

El modelo propuesto en este trabajo se basa en las ecuaciones de Navier-Stokes, la teoría formulada por (ERINGEN, 1966) sobre fluidos micropolares y la ecuación de Brinkman principalmente, además de considerar el efecto del glucocáliz endotelial. El modelo propuesto se desarrolla en un sistema de coordenadas polares cilíndricas (r, ϕ, z) en el cual el hematocrito es tratado como fluido micropolar y el plasma como fluido newtoniano para un capilar de sección constante. También, se considera el flujo sanguíneo como incompresible, laminar, permanente (estado estable), completamente desarrollado, isotérmico y axisimétrico.

Para la aplicación del MEF se utiliza elementos unidimensionales de Lagrange que discretizan el problema, seguidamente se utiliza el Método de los Residuos Ponderados MRP para resolver el problema numéricamente con la ayuda del software MATLAB.

Los resultados obtenidos del sistema de ecuaciones proveniente del MEF son representados gráficamente. Se obtienen distintos perfiles de velocidad de flujo y velocidad micropolar para la variación de parámetros como la presión, la resistividad hidráulica y parámetros micropolares.

Palabras clave: fluido micropolar, flujo sanguíneo, capilares, elementos finitos, medio poroso.

Abstract

Understanding the flow of blood in the human body is a fundamental part of medical science to advance the understanding and treatment of physiological pathologies. Capillaries are the blood vessels responsible for delivering oxygen and nutrients to the body's tissues. A common way to model blood flow is to treat blood as a two-phase fluid – a central (hematocrit) and a peripheral (blood plasma) – and the hematocrit may be considered a non-Newtonian fluid or micropolar fluid, while plasma is considered a Newtonian fluid.

In order to understand the behavior of blood flow in capillaries requires a mathematical model based on the theories and concepts of hemodynamics. Then in this work a numerical model is obtained that approximates the real model based on the Finite Element Method FEM.

The model proposed in this work is based on the Navier-Stokes equations, the theory formulated by (ERINGEN, 1966) on micropolar fluids and the Brinkman equation mainly, in addition to considering the effect of endothelial glycocalyx. The proposed model is developed in a cylindrical polar coordinate system (r, ϕ, z) in which the hematocrit is treated as a micropolar fluid and the plasma as a Newtonian fluid for a constant-section capillary. Also, blood flow is considered incompressible, laminar, permanent (steady state), fully developed, isothermal and axisymmetric.

For the application of the FEM, one-dimensional Lagrange elements are used that discretize the problem, then the Weighted Residues Method (WRM) is used to solve the problem numerically with the help of MATLAB software.

The results obtained from the FEM equations system are represented graphically. Different flow rate and micropolar velocity profiles are obtained for the variation of parameters such as pressure, hydraulic resistivity and micropolar parameters.

Keywords: micropolar fluid, blood flow, capillaries, finite elements, porous medium.

Índice de contenidos

1. Introducción	9
1.1. Justificación.....	9
1.1.1. ¿Cuál es el problema que se quiere tratar?	9
1.1.2. ¿Cuáles son las posibles causas del problema?.....	9
1.1.3. ¿Por qué es relevante el problema?.....	9
1.2. Planteamiento del trabajo	9
1.2.1. ¿Cómo se podría solucionar el problema?	9
1.2.2. ¿Qué es lo que se propone?	10
1.3. Estructura del trabajo	10
2. Contexto y estado del arte	11
2.1. Marco teórico.....	11
2.1.1. Vasos sanguíneos.....	11
2.1.2. Reología de los fluidos.....	16
2.1.3. Método de Elementos Finitos	22
2.2. Estado del Arte.....	33
2.2.1. Fluidos micropolares	33
2.2.2. Flujo sanguíneo en medios porosos	34
2.2.3. Flujo sanguíneo en capilares	36
2.2.4. MEF aplicado al flujo sanguíneo	37
3. Objetivos concretos y metodología de trabajo.....	39
3.1. Objetivo general.....	39
3.2. Objetivos específicos	39
3.3. Metodología del trabajo	39
3.4. Identificación de requisitos.....	40

3.4.1.	Requisitos a nivel del flujo sanguíneo en capilares	40
3.4.2.	Requisitos a nivel del Método de Elementos Finitos	40
4.	Descripción del modelo y resultados obtenidos	41
4.1.	Ecuaciones del sistema	42
4.1.1.	Región I Micropolar	42
4.1.2.	Región II Newtoniana	46
4.1.3.	Región III Porosa	47
4.2.	Ecuaciones del sistema adimensionales	48
4.3.	Condiciones de Frontera	51
4.4.	Resolución por el Método de los Elementos Finitos	51
4.4.1.	Construcción de la funciones de aproximación de los elementos	52
4.4.2.	Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento	56
4.4.3.	Matriz de rigidez global y condiciones de contorno	60
4.5.	Interpretación de resultados	63
5.	Conclusiones y trabajo futuro	71
5.1.	Conclusiones	71
5.2.	Líneas de trabajo futuro.....	73
	Referencias bibliográficas.....	74
	Anexo A. Código de MATLAB para la implementación del Método de Elementos Finitos ...	78

Índice de figuras

Figura 1. Una red de unidad microcirculatoria.....	12
Figura 2. Sección transversal típica de la arteria.....	13
Figura 3. Contenidos relativos de endotelio, tejidos elásticos y fibrosos, y músculo suave en diferentes vasos.....	13
Figura 4. Tipos de capilares.	14
Figura 5. Representación del glucocáliz endotelial.	15
Figura 6. Esquema de un flujo de adelgazamiento/engrosamiento por corte.	17
Figura 7. Perfil de velocidad cerca a la interfaz de un fluido y una capa porosa hecha de esferas de varios tamaños.	21
Figura 8. Elemento unidimensional lineal y sistema global de referencia.....	27
Figura 9. Funciones de interpolación de un elemento unidimensional lineal	29
Figura 10. Familia de funciones de interpolación de Lagrange; caso unidimensional.....	30
Figura 11. Representación gráfica de las funciones de interpolación de elementos unidimensionales; (a) elemento lineal; (b) elemento cuadrático; (c) elemento cúbico.	31
Figura 12. Integral mediante método de los trapecios.....	32
Figura 13. Esquema de modelo de flujo sanguíneo con varias regiones.	41
Figura 14. Elemento de tres nodos equidistantes en sistema local de referencia.	53
Figura 15. Variaciones de velocidad de flujo con el número de acoplamiento micropolar m . $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$	64
Figura 16. Variaciones de velocidad microrotacional con el número de acoplamiento micropolar m . $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$	65
Figura 17. Variaciones de velocidad de flujo con parámetro micropolar N . $m=0.5$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$	65
Figura 18. Variaciones de velocidad microrotacional con parámetro micropolar N . $m=0.5$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$	66

Figura 19. Variaciones de velocidad de flujo con resistividad hidráulica 1 α_1 . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_2=5$, $P=8$	66
Figura 20. Variaciones de velocidad microrotacional con resistividad hidráulica 1 α_1 . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_2=5$, $P=8$	67
Figura 21. Variaciones de velocidad de flujo con resistividad hidráulica 2 α_2 . $m=0.5$, $N=30$. $\alpha_1=7$, $P=8$	67
Figura 22. Variaciones de velocidad microrotacional con resistividad hidráulica 2 α_2 . $m=0.5$, $N=30$. $\alpha_1=7$, $P=8$	68
Figura 23. Variaciones de velocidad de flujo con presión P . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$	68
Figura 24. Variaciones de velocidad microrotacional con presión P . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$	69

Índice de tablas

Tabla 1. Funciones del glucocáliz endotelial.	16
Tabla 2. Valores de los parámetros con sus fuentes.....	64

1. Introducción

1.1. Justificación

1.1.1. ¿Cuál es el problema que se quiere tratar?

El problema a tratar es la falta de un modelo exacto del flujo sanguíneo en capilares que permita estudiar el comportamiento de dicho flujo en función de las necesidades de la ciencia médica.

1.1.2. ¿Cuáles son las posibles causas del problema?

El flujo sanguíneo es un modelo complejo por lo que no existe un modelo matemático exacto de este fenómeno físico que permita estudiar el comportamiento y los fenómenos del flujo sanguíneo en capilares.

1.1.3. ¿Por qué es relevante el problema?

Hay una gran importancia de comprender los fenómenos médicos concernientes al flujo de sangre ya que el flujo sanguíneo en capilares permite nutrir los tejidos (prácticamente la sangre se filtra a través de los capilares) y puede verse afectado a causa de distintas patologías; generando que procesos fisiológicos se deterioren como la función renal, la función pulmonar, entre otros.

1.2. Planteamiento del trabajo

1.2.1. ¿Cómo se podría solucionar el problema?

Se podría solucionar el problema obteniendo un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares.

1.2.2. ¿Qué es lo que se propone?

Una de las formas que permite obtener un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares es mediante el uso de métodos numéricos y en este trabajo se propone usar el Método de Elementos Finitos. Este método otorga una perspectiva distinta para solucionar el problema, principalmente debido a que tiene la ventaja de que se puede tener un mayor control sobre las condiciones de frontera del problema en comparación con otros métodos de resolución aproximada.

Se pretende obtener información de investigaciones anteriores para establecer las teorías y conceptos que deben regir el modelo del flujo sanguíneo en capilares y establecer valores experimentales de algunos parámetros hemodinámicos. A partir de aquello se pueden definir las ecuaciones gobernantes del modelo que, posteriormente, pueden ser resueltas numéricamente por medio del método de elementos finitos.

1.3. Estructura del trabajo

El presente trabajo está organizado en cinco capítulos descritos brevemente a continuación.

- En el primer capítulo se expone el problema de estudio del presente Trabajo Fin de Máster justificándolo y planteando una solución al mismo.
- El segundo capítulo consiste en el Contexto y Estado del Arte del estudio del flujo sanguíneo en capilares basado en el método de elementos finitos, donde se hace referencia a los conceptos y teorías que se utilizan en este trabajo; además de mencionar varios trabajos realizados por otros autores que se relacionen de alguna manera al objeto de estudio del presente TFM.
- En el tercer capítulo se expone el objetivo general y se detallan los objetivos específicos que tiene este estudio al igual que los pasos necesarios para conseguirlos.
- El cuarto capítulo se enfoca en presentar el desarrollo de la contribución realizada en el trabajo, explicando todos los cálculos y procesos utilizados; además de representar gráficamente e interpretar los resultados obtenidos.
- En el quinto capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo y las posibles líneas de trabajo futuro que existen.

2. Contexto y estado del arte

2.1. Marco teórico

2.1.1. Vasos sanguíneos

Los vasos sanguíneos son los encargados de transportar la sangre del corazón a todos los órganos y tejidos y viceversa, con el objetivo de intercambiar los nutrientes y desechos necesarios para el buen funcionamiento del cuerpo humano. Los principales vasos sanguíneos se encuentran en el sistema arterial y en el sistema venoso.

La anatomía de los vasos sanguíneos está ligada a las funciones que realizan de modo que los vasos sanguíneos se clasifican como:

- Arterias: “Llevar sangre desde el corazón a todos los tejidos” (Li, 2004).
- Arteriolas y meta-arteriolas: “Las arteriolas surgen de la ramificación de las arterias. A medida que disminuyen su diámetro se transforman en meta-arteriolas” (Li, 2004).
- Capilares: “Surgen de la ramificación de las meta-arteriolas. Son vasos sanguíneos muy finos, sin capa muscular y una única capa endotelial que se apoya en una membrana basal” (Li, 2004). En los capilares se realiza el paso de nutrientes hacia los tejidos.
- Vénulas: “Los capilares se reúnen formando vénulas, de mayor diámetro que los capilares” (Li, 2004). Estas vénulas van recogiendo los desechos de los tejidos.
- Venas: “La confluencia de las vénulas da lugar a las venas, encargadas de transportar la sangre en dirección al corazón” (Li, 2004). El número total de venas es mayor al de arterias.

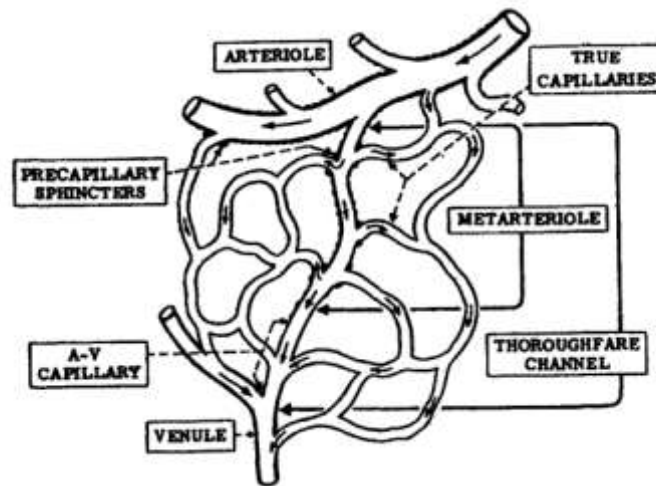
2.1.1.1. Microcirculación

La microcirculación consiste de una arteriola y su ramificación mayor de metarteriolas; éstas a su vez conducen a los verdaderos capilares a través de un esfínter precapilar. Los capilares se reúnen para formar pequeñas vénulas, las cuales a su vez se convierten en las venas recolectoras (Li, 2004).

Los componentes estructurales de la microcirculación están clasificados, según la obra de Li, (2004), en vasos de resistencia, intercambio, derivación y capacitancia. Los vasos de resistencia, que están comprendidos por las arteriolas, metarteriolas y esfínteres precapilares,

sirven principalmente para disminuir la presión arterial a niveles de los capilares para facilitar el intercambio efectivo.

Figura 1. *Una red de unidad microcirculatoria.*



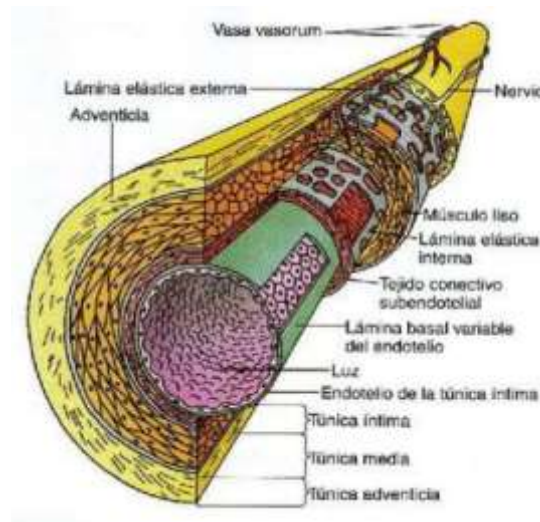
Fuente: Li, 2004.

2.1.1.2. Estructura de los vasos sanguíneos

Las paredes de los vasos sanguíneos constan de distintas capas, a saber según (Alejandra Sánchez Andrade, n.d.):

- Adventicia: Es la capa más externa de la pared del vaso, es una capa de tejido conectivo que está formada mayormente de fibras de colágeno rígidas lo que otorga resistencia a los vasos sanguíneos.
- Túnica media: Es una capa de tejido muscular liso que, por fuera y por dentro tiene una lámina fina de tejido conectivo elástico que contiene elastina, colágeno y músculo liso. La diferencia en su composición divide las arterias en vasos elásticos y musculares.
- Túnica íntima: Es la capa más interna de los vasos sanguíneos y por ende la que está en contacto con el flujo de la sangre. Consiste de una delgada capa (0.5-1 μm) de células endoteliales, tejido conectivo (subendotelio) y una membrana basal. Otorga elasticidad al vaso y proporciona una superficie lisa para el flujo de la sangre.

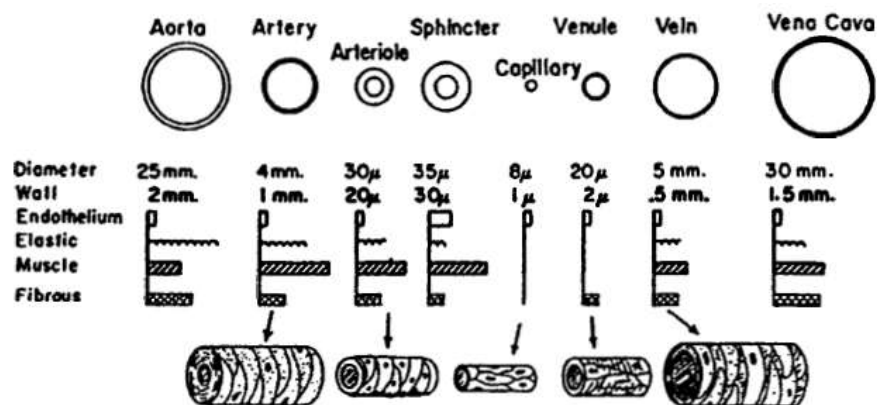
Figura 2. Sección transversal típica de la arteria.



Fuente: Alejandra Sánchez Andrade, n.d.¹.

A continuación se presentan las dimensiones típicas y un esquema de sus composiciones de los distintos vasos sanguíneos:

Figura 3. Contenidos relativos de endotelio, tejidos elásticos y fibrosos, y músculo suave en diferentes vasos.



Fuente: Li, 2004².

¹ Se pueden apreciar las tres capas distintivas de una arteria: túnica íntima, túnica media y túnica adventicia.

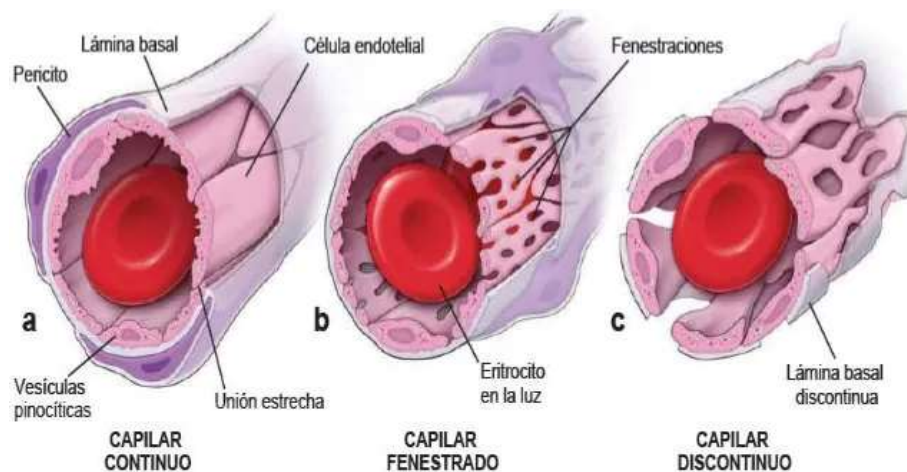
² Los capilares sólo contienen endotelio y la lámina basal.

2.1.1.3. Capilares

Los capilares y las vénulas poscapilares, a diferencia de los otros vasos sanguíneos, carecen de las capas media y adventicia, por lo que sólo contienen la capa íntima y pericitos en reemplazo del músculo liso.

- Capilar continuo: Tiene un diámetro entre 5 a 10 micras. No tiene poros ni fenestras en sus paredes. Está localizado en tejidos muscular, nervioso y conjuntivo, prácticamente es donde se realiza el intercambio entre la sangre y el líquido tisular (Alejandra Sánchez Andrade, n.d.).
- Capilar fenestrado: En sus paredes tiene poros o fenestras de 60 a 80 nanómetros cubiertos por un diafragma del poro. Está ubicado en lugares de intercambio aumentado entre la sangre y el líquido tisular como es el caso del páncreas, intestinos y glándulas endocrinas (Alejandra Sánchez Andrade, n.d.).
- Capilar sinusoide: Contiene muchas fenestras grandes que carecen de diafragmas. La pared endotelial puede ser discontinua lo mismo que la lámina basal. Tiene un diámetro mayor a 30 o 40 micras. Está ubicado en lugares de mayor intercambio entre la sangre y el líquido tisular como ser en la médula ósea, hígado, bazo, algunos linfoides y algunas glándulas endocrinas (Alejandra Sánchez Andrade, n.d.).

Figura 4. Tipos de capilares.



Fuente: Fonseca, n.d.

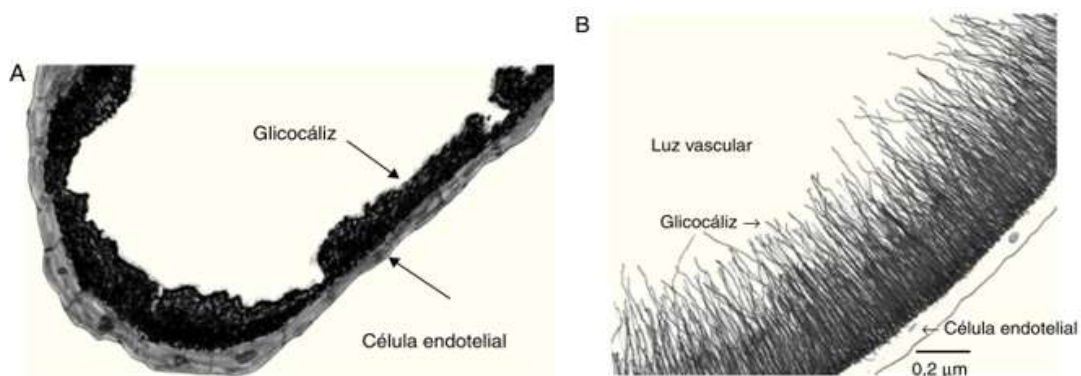
2.1.1.4. Endotelio y Glucocáliz

Frati-Munari (2013) define al endotelio como una capa vascular que recubre en su cara luminal a todas las venas, arterias y capilares, donde por si solo forma su pared misma que actúa como una barrera física entre la sangre y los tejidos en el caso específico de los capilares; además, el endotelio tiene un papel importante en el mantenimiento de la homeostasis vascular.

Zhang et al., (2015) mencionan que se ha identificado un revestimiento molecular en la superficie del endotelio microvascular que puede tener un espesor de cientos de nanómetros, le llaman Capa Superficial Endotelial CSE que también se la puede entender como el glucocáliz endotelial; es por eso, que esta capa ha sido tratada como un dominio poroso dentro del cual los esfuerzos cortantes de fluido son disipados y transmitidos a la matriz sólida para iniciar los eventos de mecanotransducción.

Dicho de otra manera, Frati-Munari, (2013) menciona que “el glucocáliz endotelial es una capa que recubre la cara luminal del endotelio de arterias, venas y capilares; está formado por tres tipos de componentes: proteoglicanos, glucosaminoglicanos, y glucoproteínas”. Su espesor es variable dependiendo del método y del vaso estudiado, mide entre 20 a 500 nm, o aún mayor. En las células endoteliales en cultivo el glucocáliz aparece desde la primera semana y mide entre 0.3-1 μm . En la Figura 5 se representa el glucocáliz endotelial y en la Tabla 1 se detallan sus principales funciones.

Figura 5. Representación del glucocáliz endotelial.



Fuente: Frati-Munari, 2013³

³ “Como se ve en el microscopio con rojo de rutenio (A) y con azul alciano (B), dimensiones variables según el vaso estudiado” (Frati-Munari, 2013).

Tabla 1. *Funciones del glucocáliz endotelial.*

“Protector, sensor y transductor de las fuerzas mecánica del torrente sanguíneo.
Regulación de la permeabilidad de agua y solutos
Regulación de la filtración glomerular.
Regulación de la permeabilidad de macromoléculas (proteínas).
Regulación del hematocrito capilar y flujo sanguíneo capilar.
Barrera a la filtración de lipoproteínas.
Prevención de adhesión de plaquetas al endotelio.
Prevención de leucocitos al endotelio.
Regulación local de la coagulación (prevención de trombosis, activación de fibrinólisis)”. .

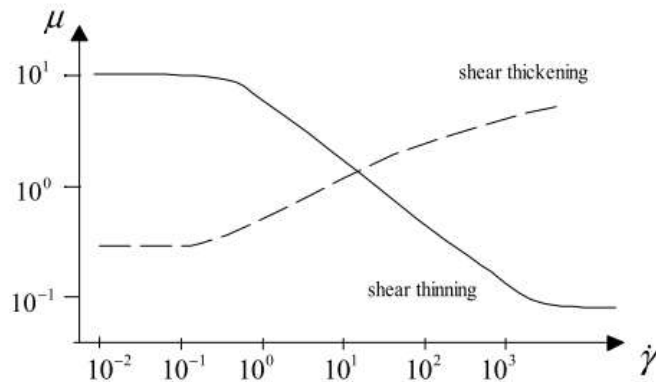
Fuente: Frati-Munari, 2013.

2.1.2. Reología de los fluidos

La reología es la parte de la física, en específico de la mecánica de medios continuos, que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación (curva de flujo) en los materiales que son capaces de fluir. Tiene por objetivo de estudio encontrar ecuaciones constitutivas que permitan modelar el comportamiento de dichos materiales

Los comportamientos reológicos mencionados por Ancy & Ancy, (2005) se representan en la Figura 6:

Figura 6. Esquema de un flujo de adelgazamiento/engrosamiento por corte.



Fuente: Ancey & Ancey, 2005.

- Adelgazamiento por corte (shear thinning): ante un incremento en la velocidad de corte, la viscosidad disminuye. A altas velocidades de corte, la curva de la viscosidad puede empezar a aplanarse y alcanzar otra meseta (Ancey & Ancey, 2005).
- Engrosamiento por corte (shear thickening): ante un incremento de la velocidad de corte, la viscosidad aumenta. Es un comportamiento de los fluidos poco común (Ancey & Ancey, 2005).
- Para ambos casos anteriores la viscosidad es constante para bajas velocidades de corte y se dice que la curva se encuentra en la meseta newtoniana (Ancey & Ancey, 2005).

Esfuerzo de fluencia: Ancey & Ancey, (2005) Considera que cuando la velocidad de corte disminuye hacia cero, el esfuerzo cortante tiende a un valor constante o esfuerzo límite, es decir, el límite inferior para el que no hay movimiento ($\dot{\gamma} = 0$) es llamado esfuerzo de fluencia.

2.1.2.1. Fluido Newtoniano

Existe una relación lineal entre la magnitud del esfuerzo cortante aplicado y la tasa de deformación angular. Los gases y líquidos más comunes tienden a ser fluidos newtonianos mientras que los hidrocarburos espesos y de cadenas largas pueden ser no newtonianos (Streeter et al., 1999).

En otras palabras un fluido newtoniano tiene la característica de que su viscosidad sea una constante. Para el caso de la sangre la región periférica, es decir, el plasma de la sangre es el que se comporta como un fluido newtoniano.

La ecuación de un modelo newtoniano es:

$$\tau = -\mu\dot{\gamma}$$

En donde τ representa el esfuerzo cortante, $\dot{\gamma}$ es la velocidad de deformación o velocidad de corte y μ es la relación lineal entre el esfuerzo y la velocidad o también llamada viscosidad.

2.1.2.2. Fluido No-Newtoniano

Todos los fluidos para los que la proporcionalidad entre esfuerzo y rango de deformación no se cumple, debido a la no-linealidad o a un esfuerzo de fluencia inicial, son considerados no-newtonianos. Algunas de las características más notorias del comportamiento no-newtoniano son la dependencia de la viscosidad tanto del tiempo como de la deformación, el esfuerzo de fluencia y el esfuerzo de relajación. Este tipo de comportamiento se presenta en la región central del flujo sanguíneo, debido a que en esta región son transportadas las células componentes de la sangre como los hematocritos lo que produce una variación de la viscosidad del fluido (Sochi, 2010).

Los fluidos no-newtonianos se clasifican principalmente en tres: independientes del tiempo o viscoplásticos, dependientes del tiempo y viscoelásticos.

- Fluidos independientes del tiempo o viscoplásticos: Una de las características más importantes y definitorias es la dependencia de la velocidad de corte. Ejemplos de modelo de flujo son la Ley de Potencias, Ellis, Carreau y Herschel-Bulkley (Sochi, 2010).
- Fluidos dependientes del tiempo: Han sido poco desarrollados. Son de dos tipos: tixotrópicos (equivalente a shear thinning) y reopéticos (equivalente a shear thickening) dependiendo de si el esfuerzo se incrementa o disminuye con el tiempo para una velocidad de corte dada y temperatura constante. Los modelos más comunes son Godfrey y el Modelo Exponencial Estirado (Sochi, 2010).
- Fluidos viscoelásticos: Pueden ser lineales y no lineales. Los fluidos viscoelásticos lineales son para deformaciones pequeñas. No pueden describir la viscosidad o el esfuerzo normal dependientes de la velocidad de corte. Son usados para describir el

comportamiento de materiales viscoelásticos para pequeñas deformaciones. Sirven como punto de comienzo para desarrollar modelos no-lineales ya que estos últimos son generalmente extensiones de los modelos lineales. Son usados para analizar datos experimentales obtenidos en experimentos de pequeña deformación y para interpretar importantes fenómenos viscoelásticos, al menos cualitativamente (Sochi, 2010). Los modelos lineales más prominentes son: Maxwell y Jeffreys. Por otro lado los fluidos viscoelásticos no lineales permiten estudiar deformaciones mucho más grandes que en los fluidos viscoelásticos lineales. Los modelos más comunes son Oldroyd-B y el Maxwell Convectado Superior.

2.1.2.3. Modelos viscoplásticos

- Ley de Potencias: Este modelo es una modificación del modelo newtoniano con la velocidad de corte $\dot{\gamma}$ elevada a una potencia que incluye un índice no-newtoniano. Este comportamiento es la base para otros modelos.

$$\tau = K\dot{\gamma}^n$$

En donde K es el índice de consistencia del flujo, mientras que n es el índice de comportamiento del flujo, siendo que:

Si $n < 1 \rightarrow$ flujo viscoplástico

Si $n = 1 \rightarrow$ flujo newtoniano

Si $n > 1 \rightarrow$ flujo dilatante

Del modelo de Ley de Potencias se derivan muchos otros como el modelo Casson o Herschel-Bulkley.

- Modelo de Casson: El modelo de Casson es del tipo semiempírico, aunque su fundamento es teórico su extensión y aplicación se han empleado diversos tipos de suspensiones. La ecuación de Casson es del tipo viscoplástico, es decir, tiene un esfuerzo de fluencia.

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_o} - \sqrt{\mu\dot{\gamma}}$$

- Modelo Herschel-Bulkley: Cuando se dispone de datos experimentales adecuados, este modelo da resultados más precisos del comportamiento reológico que la Ley de Potencias

$$\tau = \tau_o + (\mu\dot{\gamma})^n$$

2.1.2.4. Flujo en medios porosos

Sochi, (2010) define a un medio poroso como “una matriz sólida a través de la cual cavidades pequeñas interconectadas, que ocupan una fracción medible de su volumen, están distribuidas”. Se pueden estudiar los medios porosos desde distintos enfoques como el enfoque de Fluido Continuo, métodos numéricos, etc.

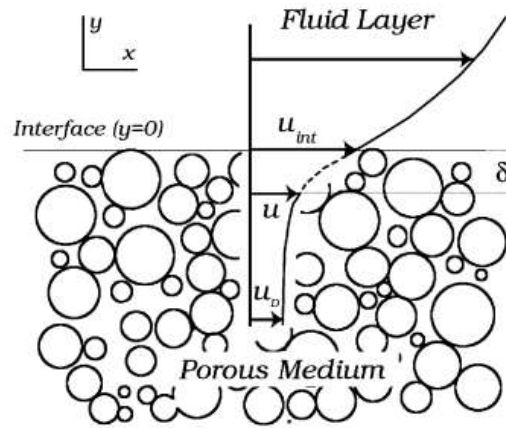
Los medios porosos se pueden modelar tomando en cuenta la capa Brinkman y la región de Darcy.

- Capa de Brinkman: La extensión vertical debajo de una interfaz fluido-porosa dentro de la cual la velocidad de fluido libre se reduce a una velocidad Darcy constante en el medio poroso es conocida como capa Brinkman (Morad & Khalili, 2009). En otras palabras es la capa de transición entre un medio libre y un medio poroso como se puede apreciar en la Figura 7.
- Región de Darcy: La ecuación de Darcy considera la caída de presión debido al flujo de un fluido a través de un medio poroso, es decir:

$$\nabla p = - \left(\frac{\mu}{k_p} \right) \mathbf{u}_D$$

En donde \mathbf{u}_D es la velocidad de Darcy o tasa de flujo por unidad de área y k_p es la permeabilidad de Darcy del medio poroso.

Figura 7. Perfil de velocidad cerca a la interfaz de un fluido y una capa porosa hecha de esferas de varios tamaños.



Fuente: Morad & Khalili, 2009.

2.1.2.5. Microfluidos

Los microfluidos son fluidos que exhiben ciertos efectos microscópicos surgiendo de la estructura local y los micromovimientos de los elementos de fluido. Estos fluidos pueden soportar momentos de esfuerzo y momentos de masa y son influenciados por la inercia de giro (ERINGEN, 1966).

El mismo autor ERINGEN, (1966) planteó que su comportamiento puede estar gobernado por un conjunto de leyes de movimiento y teoría constitutiva, como ser:

La conservación de la masa:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}$$

Balance de momentum:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

La conservación de energía:

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} + \nabla \cdot (E_c \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}$$

2.1.2.6. Fluidos micropolares

Autores como Lukaszewicz, (2012) y ERINGEN, (1966) definen a los fluidos micropolares como aquellos que poseen una microestructura, son una subclase de los fluidos polares (o fluidos con tensor de esfuerzo no simétrico) en la que se incluye el modelo ya establecido de Navier-Stokes de los fluidos ordinarios. En estos fluidos micropolares, la deformación de las partículas de fluido no es tomada en cuenta; por otro lado, exhiben una inercia y efectos micro-rotacionales además de que estos fluidos pueden soportar pares de esfuerzo y pares de masa solamente.

2.1.3. Método de Elementos Finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) consiste en reemplazar un conjunto de ecuaciones diferenciales, por un conjunto equivalente, pero aproximado, de ecuaciones algebraicas, donde cada una de las variables es evaluada en los nodos. En la evaluación de las ecuaciones algebraicas pueden usarse distintos tipos de aproximaciones, y los métodos de elementos finitos se clasifican de acuerdo al método usado (Cordero & Torregrosa, 2019b).

2.1.3.1. Pasos del Método de Elementos Finitos

Con independencia de la naturaleza física del problema, el MEF requiere de los siguientes pasos:

- 1) Definición del problema y su dominio.- Requiere el establecimiento de coordenadas globales. El dominio puede ser limitado o no limitado (que se extienda hasta el infinito) y también puede haber subdominios. Las condiciones de interfaz deben estar definidas de manera previa a la discretización (Da Fonseca Lopes, 2011).
- 2) Discretización del dominio en elementos finitos.- El autor Da Fonseca Lopes, (2011) indica que las ecuaciones que rigen el problema son válidas en todo el dominio del problema o en una parte de él, con excepción de las condiciones de frontera, lo que permite idealizar el dominio a partir de regiones de tamaño finito, también llamados elementos, que pueden estar interconectados de diferente forma y tamaño.

- 3) Identificación de las variables de estado.- “La descripción matemática de un fenómeno físico va a generar un Problema de Valor de Contorno correspondiente, el cual debe contener las variables de estado que estén asociadas al mismo” (Da Fonseca Lopes, 2011).

Estas variables se relacionarán entre sí a través de las ecuaciones constitutivas que representan la expresión matemática de un fenómeno físico.
- 4) Formulación del problema.- El sistema físico puede estar formulado por lo general mediante dos formas:
 - Forma diferencial, es decir, mediante ecuaciones diferenciales y sus condiciones de contorno.
 - Forma variacional, es decir, mediante un funcional o ecuación integral sujeto a requerimiento estacionario (máximo o mínimo).
- 5) Establecimiento de los sistemas de referencia.- Además del sistema global de referencia, muchos autores mencionan que debe haber un sistema de referencia local para los elementos.
- 6) Construcción de las funciones de aproximación de cada elemento.- La aproximación tanto del dominio como de las variables de estado se realiza mediante funciones algebraicas las cuales pueden ser funciones lineales o de orden superior. Se deben tener en cuenta el orden tanto de la aproximación física (variables de estado) como de la aproximación geométrica (forma del elemento) lo que conduce a tres distintas categorías de elementos mencionados por Da Fonseca Lopes, (2011): si m y n representan dos grados de aproximación distintos para la forma de los elementos y las variables de estado, respectivamente, se dice que un elemento es: (a) subparamétrico si $m < n$; (b) isoparamétrico si $m = n$; (c) superparamétrico si $m > n$.
- 7) Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento.- “Ahora se debe establecer sobre cada uno de los elementos las ecuaciones discretizadas del problema continuo, este paso involucra la determinación de la matriz de rigidez de cada elemento con respecto a su sistema local de referencia” (Da Fonseca Lopes, 2011). Aquí es cuando se aplican los distintos métodos y técnicas de los elementos finitos como el directo, variacional, residuos ponderados, entre otros.
- 8) Transformación de coordenadas.- Una vez determinadas las matrices de rigidez y antes del ensamblaje se debe realizar la transformación de coordenadas locales a globales.

- 9) Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos.- Se considera únicamente los nodos de las interfaces y como resultado se tiene la matriz de rigidez global del sistema.
- 10) Introducción de las condiciones de contorno.- Se las introduce a la matriz global lo que permite reducir ésta a su forma final. A veces se pueden introducir las condiciones de contorno durante el ensamblaje.
- 11) Solución del conjunto de ecuaciones simultáneas.- Es la resolución del sistema de ecuaciones simultáneas resultantes a través de métodos iterativos como Gauss Seidel, Jacobi, Sobrerrelajación, Newton, etc.
- 12) Interpretación de resultados.- Se obtienen los valores aproximados de las variables en los nodos del dominio para compararlos con los resultados de otros estudios.

2.1.3.2. Tipos de métodos de elementos finitos

Los distintos métodos usados en los elementos finitos son:

- Método directo.- De acuerdo con este método: “la matriz de rigidez y las ecuaciones de los elementos que relacionan a las fuerzas nodales con los desplazamientos nodales son obtenidas usando las condiciones de equilibrio de fuerzas para un elemento básico” (Ortiz Prado et al., 2013). Este método es muy utilizado en problemas de elementos unidimensionales, debido a su sencillez de implementación.
- Método Variacional.- En el desarrollo de la matriz de rigidez y las ecuaciones de los elementos bidimensionales y tridimensionales, es mucho más sencillo aplicar el método de la energía que el método directo (Ortiz Prado et al., 2013). Algunos principios utilizados por lo general son el de trabajo virtual, el principio de energía potencial mínima, el teorema de Castigliano y el método de Rayleigh-Ritz.
- Método de los residuos ponderados.- “Este método es usado para desarrollar las ecuaciones de los elementos cuando se conoce la ecuación diferencial que describe al fenómeno físico” (Ortiz Prado et al., 2013). La técnica más usada es la de Galerkin, ésta permite obtener las mismas ecuaciones que en el método variacional.

2.1.3.3. Método de los Residuos Ponderados

Básicamente este método consiste en re-escribir una ecuación diferencial $\mathfrak{S}(\phi)$ que gobierna el problema de tal modo que el lado derecho de la igualdad sea cero.

$$\mathfrak{S}(\phi) - f = 0$$

Se utiliza entonces una solución aproximada $\tilde{\phi}$, lo que conduce a un error residual o residuo “R” distinto de cero.

$$\mathfrak{S}(\tilde{\phi}) - f = R \neq 0$$

Donde la solución aproximada $\tilde{\phi}$ es igual a la sumatoria del producto de las N_i funciones de interpolación y las a_i que son parámetros o funciones desconocidas de una de las variables independientes para todas las m incógnitas:

$$\phi \cong \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^m N_i a_i$$

El error residual es multiplicado por una función peso W y el producto es integrado sobre toda la región del dominio debiendo igualar la integral a cero.

$$\int_{\Omega} R W_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Luego para cada valor nodal existe una función peso W y un residuo R , ambos desconocidos, lo que permite formular un conjunto de ecuaciones algebraicas globales. La selección de las funciones peso W da origen a diferentes criterios de residuos ponderados (Da Fonseca Lopes, 2011).

- Método de la colocación.- El autor Da Fonseca Lopes, (2011) indica que “para cada parámetro a_i se selecciona un punto x_i en el dominio, para cada x_i se fuerza a que el residuo sea exactamente igual a cero”. La función peso W_i que se utiliza en este método es la *delta de Dirac* $W_i = \delta(x - x_i)$.

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x; a) \delta(x - x_i) dx = R(x_i; a) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

A los puntos x_i se los conoce como puntos de colocación y pueden encontrarse en cualquier parte del dominio sin seguir ningún patrón determinado.

- Método de los subdominios.- El autor Da Fonseca Lopes, (2011) indica que “para cada parámetro a_i se selecciona un intervalo Δx_i en el dominio y se fuerza a que el promedio del error residual en cada intervalo sea igual a cero”. La función peso W_i asociada a este método es la *función pulso* $W_i = \Pi(x_{i+1} - x_i)$.

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x; a) \Pi(x_{i+1} - x_i) dx = \int_{\Delta x_i} R(x; a) dx \quad i = 1, 2, \dots, m$$

A los intervalos Δx_i se los conoce como subdominios y pueden seleccionarse de forma arbitraria incluso sobreponiéndose o con separación entre ellos.

- Método de los mínimos cuadrados.- Según Da Fonseca Lopes, (2011) en este método se trata de “minimizar la integral sobre todo el dominio del cuadrado del residuo con relación a a_i , dicha integral es una función de los a_i de manera que su minimización requiere que las derivadas parciales con relación a cada a_i sean igual a cero”.

Entonces la función peso asociada a este método es:

$$W_i(x) = \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_i}$$

Y la integral que propone el método:

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_i} dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- Método de Galerkin.- Según Da Fonseca Lopes, (2011) en este método “se requiere que el promedio ponderado del residuo, sobre todo el dominio, sea cero y que las funciones peso W_i sean las propias funciones de interpolación Ψ_i asociadas a cada a_i ”.

$$\int_{x_a}^{x_b} R(x; a) \Psi_i(x) dx = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Entonces se formará un sistema de m ecuaciones.

2.1.3.4. Elementos o funciones de forma y funciones de interpolación

Después de que se ha discretizado el problema, se aproxima el campo de las variables de estado a través de funciones de interpolación que son expresadas como valores nodales de la variable dependiente.

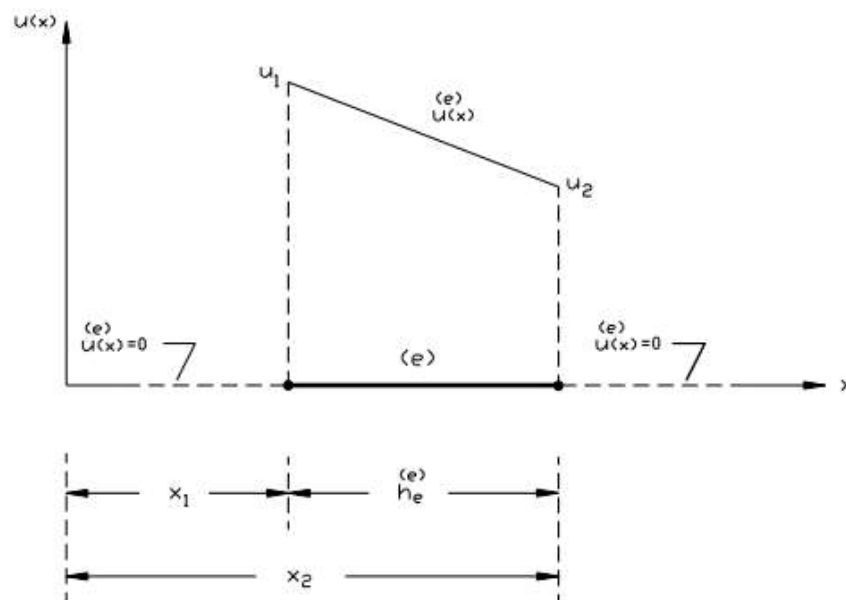
Por lo general para resolver los distintos problemas de la física a través de elementos finitos se utilizan elementos unidimensionales y bidimensionales, ya sean rectos o curvos, según la necesidad de aproximación de cada problema.

Para muchos elementos es posible construir su función de interpolación a través de conceptos básicos de la interpolación polinomial. Las dos funciones más conocidas son la basada en polinomios de interpolación de Lagrange y la basada en polinomios de interpolación de Hermite.

2.1.3.5. Elementos unidimensionales de Lagrange

Sea un elemento unidimensional y lineal de dos nodos como el mostrado en la Figura 8:

Figura 8. Elemento unidimensional lineal y sistema global de referencia.



Fuente: Da Fonseca Lopes, 2011.

La aproximación de la variable $u(x)$ viene dada por:

$$u(x) = \begin{cases} a_1 + a_2x & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Entonces la evaluación de $u(x)$ en los puntos nodales 1 y 2 llega a ser:

$$u_1 = a_1 + a_2x_1$$

$$u_2 = a_1 + a_2x_2$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores para a_1 y a_2 se tiene que:

$$a_1 = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo estos resultados en la evaluación de $u(x)$ se obtiene:

$$u(x) = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} + \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}x$$

Agrupando términos, la variable $u(x)$ queda como:

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}u_2 \quad \forall x_1 \leq x \leq x_2$$

Entonces se observa que la interpolación polinomial de este elemento en particular es una función de los valores de x en los nodos, la distancia entre el primer y último nodo del elemento, y de los valores de $u(x)$ en los nodos. De manera simplificada la variable $u(x)$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$u(x) = N_i u_i \quad i = 1, 2$$

Donde:

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} ; \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x_1 \leq x \leq x_2$$

Nótese que las funciones N_i son las que interpolan los elementos y éstas pertenecen a la familia de Lagrange. Dichas funciones cumplen con la continuidad y la independencia lineal sobre el elemento. Las propiedades de estas funciones de interpolación son:

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^2 N_i(x) = 1$$

La primera propiedad es resultado de la interpolación e implica que se satisfacen las condiciones $u(x_1) = u_1$ y $u(x_2) = u_2$ y que las funciones N_i son linealmente independientes lo que se puede representar gráficamente en la Figura 9.

Figura 9. Funciones de interpolación de un elemento unidimensional lineal



Fuente: Da Fonseca Lopes, 2011.

Por otro lado la segunda propiedad: $\sum_{i=1}^2 N_i(x) = 1$ permite modelar algunos problemas en los que la variable dependiente $u(x)$ es una constante en un elemento, es decir, $u_1 = u_2 = u$. La deducción de las funciones de interpolación depende solamente del tipo de elemento (geometría, número de nodos, etc.) y no así del problema en estudio.

2.1.3.6. Coordenadas naturales

En vez de deducir las funciones de interpolación con relación al sistema global de referencia, el autor Da Fonseca Lopes, (2011) sugiere que: “es más conveniente hacerlo con respecto a un sistema local de referencia ε , que tiene su origen en el centro del elemento y está escalado de manera que $\varepsilon = -1$ en el nodo izquierdo del elemento y $\varepsilon = +1$ en el nodo derecho del elemento”.

En forma general este tipo de transformación, que es lineal, viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{2x - (x_1 + x_2)}{h_e}$$

Donde x_1 y x_2 son las coordenadas globales de los nodos izquierdo y derecho, respectivamente, del elemento (e) y $h_e = x_2 - x_1$ es la longitud del elemento.

“La coordenada ξ se denomina *coordenada normal o natural* para significar que es una coordenada normalizada (adimensional) cuyos valores están siempre entre -1 y +1” (Da Fonseca Lopes, 2011).

En otras palabras ξ transforma los puntos x ($x_1 \leq x \leq x_2$) en los puntos ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$).

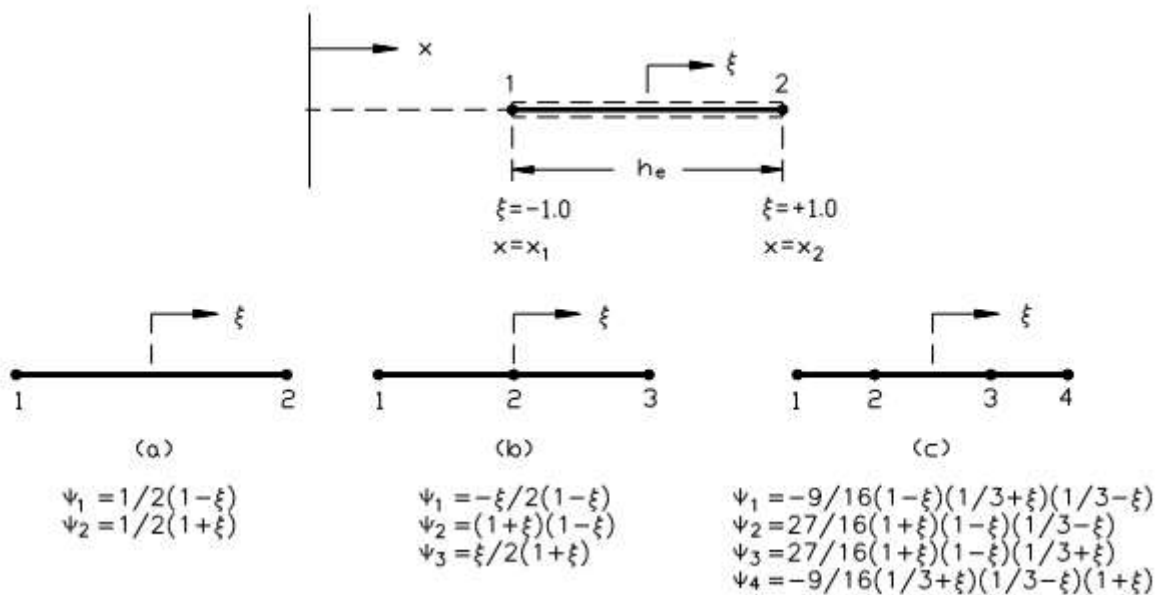
Según el autor Da Fonseca Lopes, (2011), “la coordenada normal es conveniente por dos razones: (1) facilita la construcción de las funciones de interpolación y (2) facilita la integración numérica de los coeficientes de las matrices locales de rigidez”.

La deducción de las funciones de interpolación de Lagrange está basada en que dichas funciones satisfacen la propiedad establecida anteriormente, es decir, en términos del sistema de la coordenada natural:

$$\Psi_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

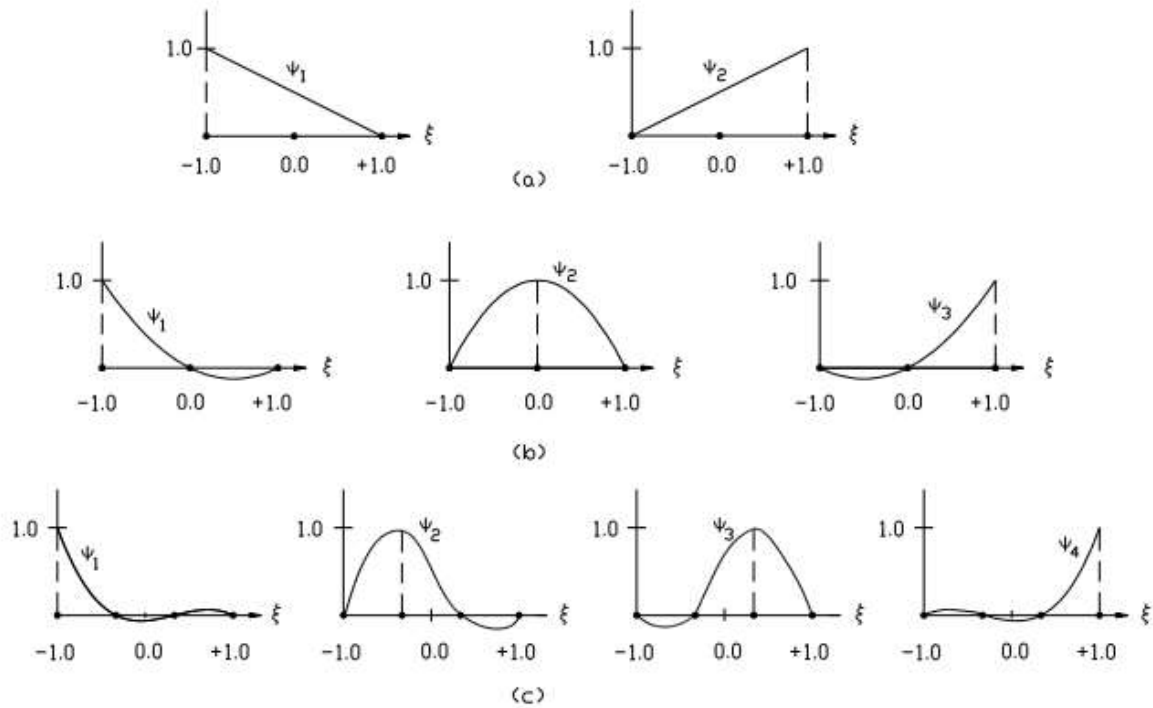
Para un elemento con n nodos, Ψ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) son funciones de grado $n-1$. En las Figuras 10 y 11 se muestran distintas funciones de interpolación expresadas en términos de la coordenada natural (para nodos equiespaciados) y su respectiva representación gráfica.

Figura 10. Familia de funciones de interpolación de Lagrange; caso unidimensional.



Fuente: Da Fonseca Lopes, 2011.

Figura 11. Representación gráfica de las funciones de interpolación de elementos unidimensionales; (a) elemento lineal; (b) elemento cuadrático; (c) elemento cúbico.



Fuente: Da Fonseca Lopes, 2011.

2.1.3.7. Integración numérica

a) Método de los Trapecios

Sea la función $f(x)$ la mostrada en la Figura 12 se puede aproximar dicha función para cada punto $x_k \in [a, b]$ formando trapecios para obtener el área aproximada bajo la curva.

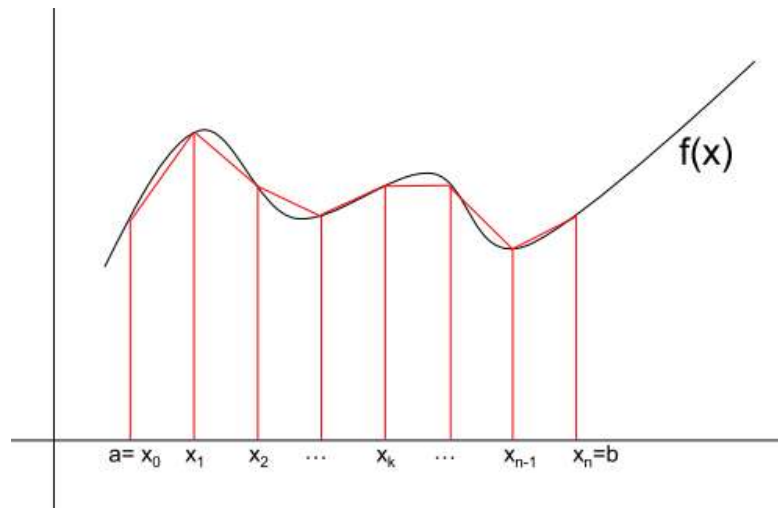
Donde:

$$x_k = a + kh; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; \quad h = \frac{b - a}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_h$$

$$T_h = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Figura 12. Integral mediante método de los trapecios.



Fuente: Cordero & Torregrosa, 2019.

b) Técnica de extrapolación de Richardson

Permite estimar la integral con un error de 4 a partir de dos evaluaciones del método de los trapecios, una evaluación con paso h y la otra con paso $h/2$. Su ecuación es:

$$I \approx \frac{4T_{h/2} - T_h}{3}$$

2.2. Estado del Arte

Las investigaciones realizadas en esta temática van desde el modelado del flujo sanguíneo en arterias sanas y enfermas (estenosis) hasta el modelado de la carótida o el transporte de nanopartículas a través del torrente sanguíneo, ya sea que se considere al flujo sanguíneo como un modelo de fluido de una o dos fases, o que se lo considere como un fluido micropolar; también se encuentran estudios que analizan el flujo sanguíneo en 1, 2 y 3 dimensiones.

2.2.1. Fluidos micropolares

Los primeros estudios y postulados sobre fluidos micropolares los realizó ERINGEN, (1966) en los que determinó las ecuaciones que regían el movimiento de estos fluidos, vale decir, la conservación de la masa, la conservación de momentum y la conservación de momentum angular.

Una simulación del flujo de fluidos micropolares fue realizada por Μηχανικων, (2018) en la que se validaron resultados numéricos con resultados analíticos haciendo uso del software OPEN FOAM. Este estudio fue tanto para el modelo de flujo de Couette como el de Poiseuille.

Un estudio similar fue realizado por Chen et al., (2010) en el que propone un esquema numérico integrando el método de proyección de Chorin al Método de División del Centro de Tiempo, TCSM por sus siglas en inglés, para actualizar el término del gradiente de presión y resolver las formas inestables de las ecuaciones de la Dinámica de Fluidos Micropolares.

Ya tomando en cuenta específicamente a la sangre como un fluido micropolar es que Karvelas et al., (2020) estudian un modelo de carótida humana usando un modelo de fluido micropolar debido a que toma en cuenta el efecto de la auto-rotación de la micro-estructura de la sangre en su flujo. Karvelas et al., (2020) se concentra en la viscosidad vortex y realiza simulaciones en un modelo de carótida humana 3D reconstruido computacionalmente. Los métodos solución son implementados en el software OPEN FOAM y se basan en el método de volumen finito usando la variante de PISO del método de corrección de presión y la integración de Gauss con interpolación lineal.

2.2.2. Flujo sanguíneo en medios porosos

Una revisión de flujos de fase simple para fluidos no-newtonianos en medios porosos realizada por Sochi, (2010), describe estos flujos por medio de cuatro enfoques: modelos del medio continuo, modelos de conjunto de tubos, métodos numéricos y modelado de redes de poros a escala.

Otra revisión de los modelos de flujo no-newtoniano para la descripción del flujo sanguíneo utilizados con mayor frecuencia; se hace una evaluación sobre modelos de sangre seleccionados de la literatura, la recapitulación de los parámetros utilizados para la descripción de la sangre y los resultados de una prueba de concepto para la comparación de modelos de sangre en una arteria (Ortiz-León et al., 2014).

Una investigación interesante realizada en los últimos años reveló una analogía entre la filtración de un fluido newtoniano en un medio Brinkman y el libre flujo de un fluido micropolar tanto para un canal plano como para uno cilíndrico; se resolvieron los modelos de manera analítica y se formularon las condiciones de equivalencia entre estos dos flujos (D. Y. Khanukaeva, 2018).

Otro estudio comparativo en el que se analizan matemáticamente dos modelos de flujo sanguíneo en tubos porosos considera el flujo estable de (a) un fluido Herschel-Bulkley y (b) un fluido Casson. Se analizan los modelos para el flujo a través de un tubo que está rellanado de un medio homogéneo poroso con permeabilidad constante y variable. La solución para el esfuerzo cortante es obtenido primero por el método de iteración general y luego usando integración numérica (Sankar & Nagar, 2013).

Mehmood et al., (2012) investigaron las características de un flujo sanguíneo bidimensional, inestable y con simetría axial en un segmento de arteria porosa enferma con paredes flexibles. Las paredes arteriales son asemejadas a constricciones irregulares, mientras que los trombos, el colesterol y las plaquetas de grasa representan el medio poroso. Aplicando las condiciones iniciales y de contorno apropiadas, resuelve las ecuaciones del modelo numéricamente usando los métodos Marker and Cell (MAC) y Successive Over-Relaxation (SOR).

El tema de la filtración a través de fluidos micropolares fue abordado por D. Khanukaeva, (2020) en el que se juntan las ecuaciones micropolares y tipo Brinkman para modelar el flujo de un fluido micropolar a través de una célula esférica que consiste en un núcleo sólido, una

capa porosa y un líquido envolvente; la permeabilidad hidrodinámica de la membrana es investigada como una función de las características micropolares y del medio poroso.

Si se toma en cuenta que las paredes del canal pueden contraerse y expandirse se puede modelar el flujo del fluido micropolar como bidimensional y las ecuaciones del modelo pueden ser transformadas en un par no-lineal de dos puntos de un problema de valor de contorno y hallar soluciones numéricas tal como lo hizo Si et al., (2016).

Por otro lado a través de la herramienta bvp4c de MATLAB es que se obtuvieron múltiples soluciones para un sistema de EDO's que modelaban el flujo de un fluido micropolar incompresible en un canal poroso (Pan et al., 2014).

Una de las recientes investigaciones modeló matemáticamente el flujo de un fluido de dos fases (micropolar y newtoniano) que no se mezclan y fluyen a través de un canal poroso que considera distintas permeabilidades para cada región del flujo que se lo resuelve mediante un método directo de manera analítica (Yadav et al., 2018).

Una manera común de modelar la sangre es considerar que el hematocrito se encuentra en la región central del canal mientras que el plasma en la región periférica (modelo de dos fluidos). Un estudio que trata a la sangre de esta manera es el de Sharma & Yadav, (2017) que supone la región central como un fluido Casson No-newtoniano y a la región periférica como fluido newtoniano, además considera las paredes de los vasos sanguíneos como contraídos y como una región porosa de dos capas: una delgada capa Brinkman de transición sobrelapado por la región Darcy; también establece condiciones de salto de esfuerzo obteniendo así soluciones analíticas para las ecuaciones que rigen este modelo matemático de dos capas del flujo de la sangre.

Siguiendo la idea anterior de considerar al hematocrito y al plasma como fluidos de diferente comportamiento, Sankar & Yatim, (2012) realizaron un análisis comparativo de dos modelos matemáticos para el flujo sanguíneo en arterias contraídas cónicas: un primer modelo que consideraba a la región central como un fluido Herschel-Bulkley, y un segundo modelo en que la misma región central era considerada como fluido Casson; en ambos casos la región periférica era asumida como fluido newtoniano. Se utilizó el Método de Perturbación para obtener las soluciones del sistema de EDO's con condiciones de contorno para ambos casos.

Tiwari & Chauhan, (2019) también consideraron un modelo de flujo sanguíneo pulsátil con una capa Brinkman como región porosa en las paredes de los vasos; la región central fue asumida como fluido Casson mientras que la región periférica como fluido newtoniano. Se solucionó el modelo de manera analítica para enfocar la investigación en estudiar los efectos de variar la viscosidad de la sangre logrando la novedosa observación de que un ligero incremento en la amplitud de onda de la presión conlleva una fluctuación significativa en el hematocrito.

Sacheti et al., (2008) estudiaron el movimiento progresivo y estable de una burbuja líquida en un campo de flujo, específicamente, el movimiento de una región de burbuja no-newtoniana envuelta por una película líquida inmiscible de fluido newtoniano. La región interna está delimitada por un medio cilíndrico vertical y permeable impregnado por el mismo fluido newtoniano. Se realizó un análisis de las ecuaciones que gobiernan los campos: no-newtoniano, la película newtoniana y las regiones porosas como región Brinkman.

2.2.3. Flujo sanguíneo en capilares

El glucocáliz endotelial es muy importante al momento de estudiar el flujo sanguíneo en los capilares pues es la capa que cubre al endotelio vascular en su cara luminal; una descripción de su importancia, sus principales características y funciones del glucocáliz endotelial fue realizado por Frati-Munari, (2013).

Secomb et al., (1998) usaron un modelo teórico para analizar los efectos del glucocáliz sobre el hematocrito y la resistencia al flujo sanguínea en capilares. El glucocáliz es representado como una capa porosa que resiste la penetración de los glóbulos rojos. La teoría de la lubricación es utilizada para computar el flujo del plasma alrededor de la célula y dentro del glucocáliz. Este estudio es consistente con observaciones experimentales resistencia al flujo incrementada en microvasos in vivo, relativo a tubos de vidrio de los mismos diámetros.

La viscosidad aparente de la sangre en tubos de vidrio decrece con la disminución del diámetro, lo que se conoce como efecto de Fahraeus-Lindqvist, y exhibe un distintivo mínimo entre 6-7 μm ; sin embargo, la resistencia al flujo in vivo en pequeños vasos es substancialmente mayor que lo predicho por los datos de viscosidad in vitro. Se propuso que la principal causa de esta diferencia es la presencia de una Capa Superficial Endotelial CSE,

también se propuso un modelo físico para la resistencia de flujo microvascular como una función del diámetro de vaso y el hematocrito in vivo, este modelo físico combina la viscosidad sanguínea in vitro con los efectos de una CSE dependiente del diámetro. (Pries & Secomb, 2005)

Se realizó un estudio experimental en el cual se investigó un medio poroso hecho de perlas esféricas de múltiples tamaños para lograr determinar el espesor de la capa Brinkman a través de la medición del campo de velocidad promedio interfacial (Morad & Khalili, 2009).

Por otro lado un estudio teórico a cerca del flujo sanguíneo en un capilar bajo la influencia de una fuerza corporal modeló la sangre como un fluido de dos fases: fluido micropolar en la región central y fluido newtoniano en la región periférica y modeló al capilar como un tubo poroso consistente de una delgada capa Brinkman de transición superpuesta a una región Darcy poroso (Boodoo et al., 2013).

Un importante estudio examinó los efectos del espesor y la permeabilidad de la Capa Superficial Endotelial en la transmisión de esfuerzos cortantes a través de dicha capa. Los resultados indican una caída rápida de los esfuerzos cortantes del fluido a niveles insignificantes dentro de una delgada capa de transición cerca al límite externo de la CSE con un espesor del orden de los diez nanómetros; además, se encontró que el espesor de la zona de transición entre el fluido libre y la capa poros es proporcional a la raíz cuadrada de la permeabilidad de Darcy. La solución se obtuvo con la ayuda del Modelado Basado en Ecuaciones de COMSOL Multiphysics y usando el método de elementos finitos implementado en el mismo COMSOL (Zhang et al., 2015).

2.2.4. MEF aplicado al flujo sanguíneo

El MEF con una formulación variacional, implementado en código FreeFEM++, es utilizado para resolver numéricamente un modelo de flujo sanguíneo pulsátil bidimensional que transporta nanopartículas metálicas a través de arterias cónicas con estenosis cuyo objetivo es realizar una simulación fármaco-dinámica No-Newtoniana (Vasu et al., 2020). Se logró una buena correlación entre los cálculos de FreeFEM++ y resultados publicados.

Se realizaron análisis computacionales utilizando software de elementos finitos para analizar la influencia de la frecuencia de un pulso sinusoidal de caudal sobre el patrón de flujo

sanguíneo en un tramo de un conducto que presenta estenosis. También se utilizó el método de elementos finitos para comparar predicciones de caídas de presión medidas con catéteres de longitud finita con las obtenidas simulando catéteres infinitos. Para estos análisis se resolvieron modelos compuestos por las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad con condiciones iniciales y de contorno apropiadas (Ubal et al., 2010).

En un Trabajo de Grado se estudió el método de elementos finitos mínimos cuadrados aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes y compresibilidad artificial para simular el flujo de fluidos a través de cuerpos poligonales en 2D. La implementación de este método se basó en una nueva formulación que involucra la incorporación de las condiciones de frontera en las formas variacionales involucradas en el mismo (Velásquez Ceballos, 2004).

3. Objetivos concretos y metodología de trabajo

3.1. Objetivo general

Determinar un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares basado en el método de elementos finitos.

3.2. Objetivos específicos

- Realizar una revisión sistemática de la literatura de los trabajos investigativos más relevantes relacionados al flujo sanguíneo en capilares para conocer las teorías y conceptos necesarios.
- Definir un sistema de ecuaciones que representen un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares, basado en la teoría y conceptos del problema de estudio.
- Resolver numéricamente, a través del método de elementos finitos, las ecuaciones que gobiernen el modelo de flujo sanguíneo en capilares anteriormente definido.
- Analizar e interpretar los resultados obtenidos a través del MEF.

3.3. Metodología del trabajo

El desarrollo del TFM debe considerar las siguientes actividades:

- Una revisión sistemática de la literatura actual que permita una buena comprensión del flujo sanguíneo a través de los vasos desde distintos enfoques (fluidos newtonianos, no-newtonianos, modelos de fluidos de dos fases, microfluidos, medios porosos, etc.).
- Una revisión sistemática de la literatura actual que permita una buena comprensión del Método de Elementos Finitos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Determinar las condiciones necesarias y ecuaciones diferenciales que regirán el modelo de flujo sanguíneo en medios porosos para el caso específico de los capilares.
- Obtener una solución aproximada para el modelo utilizando el Método de Elementos Finitos.
- Analizar e interpretar los resultados en función a otras investigaciones.

3.4. Identificación de requisitos

3.4.1. Requisitos a nivel del flujo sanguíneo en capilares

- Se considera al flujo sanguíneo como incompresible, laminar, permanente (estado estable), completamente desarrollado (la velocidad no varía debido a la dirección del flujo), isotérmico y axisimétrico.
- Se considera a la sangre como un modelo de fluido de doble fase.
- Se considera al hematocrito como un fluido que circula por la zona central de los vasos sanguíneos.
- Se considera que el plasma sanguíneo como un fluido que rodea al hematocrito.
- La región del endotelio es considerada como un medio poroso, además en esta región porosa se considera una capa Brinkman de transición entre el lumen del capilar (medio libre) y el medio poroso (túnica íntima o endotelio).
- Se considera un sistema de coordenadas polares cilíndricas (r, ϕ, z) para referenciar el flujo sanguíneo en el capilar.

3.4.2. Requisitos a nivel del Método de Elementos Finitos

- Se consideran elementos unidimensionales de Lagrange para la discretización del problema como parte de la solución a través del MEF.
- Se considera el Método de Residuos Ponderados (MRP) como parte de la solución a través del MEF.
- Se considera la técnica de Galerkin como parte de la solución a través del MRP.
- Se considera la técnica de Richardson para la integración numérica que forma parte de la solución a través del MRP.
- Se considera el software MATLAB (The MathWorks, 2019) para programar las resoluciones de los distintos pasos que se siguen en el MEF y también en el MRP.

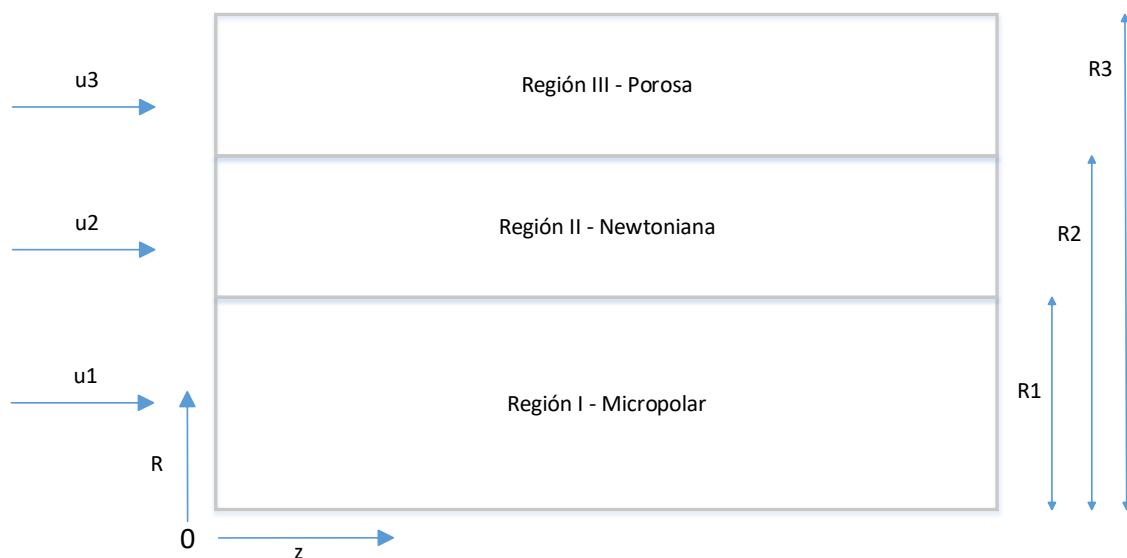
4. Descripción del modelo y resultados obtenidos

La sangre es generalmente considerada como un modelo de fluido de doble fase en el que se considera al hematocrito como un fluido no-newtoniano que circula por la zona central de los vasos sanguíneos, mientras que el plasma sanguíneo, que rodea al hematocrito, es considerado como un fluido newtoniano. Este enfoque suele cambiar un poco cuando se trata de vasos sanguíneos muy pequeños como son los capilares debido a que las microrotaciones del flujo dejan de ser despreciables, es por esto que se puede tratar al hematocrito como un fluido micropolar.

Desde los capilares se realiza el intercambio de sustancias con los tejidos a través de la sangre; justamente es el plasma sanguíneo el que circula a través del endotelio de los capilares para pasar hacia los tejidos. La región del endotelio es considerada como un medio poroso, además en esta región porosa se considera una capa Brinkman de transición entre el lumen del capilar (medio libre) y el medio poroso (túnica íntima o endotelio).

Entonces, se van a considerar tres regiones para modelar el flujo sanguíneo en capilares: región I Micropolar, región II Newtoniana y región III Porosa.

Figura 13. Esquema de modelo de flujo sanguíneo con varias regiones.



Fuente: Elaboración propia.

4.1. Ecuaciones del sistema

4.1.1. Región I Micropolar

Para modelar el flujo sanguíneo en esta región se deben tener en cuenta las ecuaciones que rigen el flujo de un fluido micropolar como son la conservación de masa, la conservación de momentum y la conservación de la microinercia; entonces, según (Pan et al., 2014)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = (\lambda + 2\mu + \kappa_v) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu + \kappa_v) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa_v \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \nabla P + \rho \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\rho j \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \gamma \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \kappa_v \nabla \times \mathbf{u} - 2\kappa_v \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{l} \quad (3)$$

$\rho \rightarrow$ Densidad

$j \rightarrow$ Microinercia

$\mathbf{f} \rightarrow$ Vector de fuerza externa de cuerpo por unidad de masa

$\mathbf{l} \rightarrow$ Vector de par externo de cuerpo por unidad de masa

$p \rightarrow$ Presión termodinámica

$\mu \rightarrow$ Coeficiente de viscosidad dinámica

$\lambda \rightarrow$ Coeficiente de viscosidad de segundo orden

$\kappa_v \rightarrow$ Coeficiente de viscosidad vortex

$\alpha, \beta \rightarrow$ Coeficiente de viscosidad gradiente de giro

$\gamma \rightarrow$ Coeficiente del material

$\mathbf{u} \rightarrow$ Vector de velocidad de fluido

$\boldsymbol{\omega} \rightarrow$ Vector de velocidad microrotacional

Además $\lambda, \mu, \kappa_v, \alpha, \beta$ y γ están relacionados de la siguiente manera según (Yadav et al., 2018):

$$2\mu + \kappa_v \geq 0; \quad 3\lambda + 2\mu + \kappa_v \geq 0; \quad \kappa_v \geq 0; \quad \mu \geq 0$$

$$3\alpha + \beta + \gamma \geq 0; \quad \gamma \geq |\beta|; \quad \gamma \geq 0$$

El operador diferencial $\frac{D(\cdot)}{Dt}$, que se observa en las ecuaciones (2) y (3), es la derivada material o substancial que está definida como:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot) \quad (4)$$

Por otro lado la función $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$ tiene la siguiente equivalencia:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u} \quad (5)$$

Como se estableció anteriormente se considera al flujo sanguíneo como incompresible, laminar, de estado estable (permanente) y completamente desarrollado, de modo que: no existe una dependencia respecto del tiempo para la velocidad de flujo ni para la microrotación; por lo tanto, la densidad se mantiene como constante tanto para el fluido micropolar como para el fluido newtoniano.

Entonces reemplazando las ecuaciones (4) y (5) en las ecuaciones (1) a la (3) y reduciendo términos comunes, éstas quedan como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mu_1 + \kappa_v) \Delta \mathbf{u} + \kappa_v \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \nabla P + \rho \mathbf{f} \quad (7)$$

$$\rho j(\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}) = (\alpha + \beta) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \gamma \Delta \boldsymbol{\omega} + \kappa_v \nabla \times \mathbf{u} - 2\kappa_v \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{l} \quad (8)$$

Se debe tomar en cuenta que todas las propiedades del micro fluido permanecen constantes.

El sistema de coordenadas ideal para este caso es el de coordenadas polares cilíndricas que ayudan a representar fácilmente la geometría de un vaso sanguíneo. Al ser un flujo con simetría axial y de radio constante se puede considerar a los vectores velocidad como:

$$\mathbf{u} = [u_r, u_\theta, u_z] = [0, 0, u(r)] \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_r, \omega_\theta, \omega_z] = [0, \omega(r), 0] \quad (9b)$$

Luego, la derivada material o substancial $\mathbf{u} \cdot \nabla(\cdot)$ se resuelve en coordenadas cilíndricas, tanto para \mathbf{u} como $\boldsymbol{\omega}$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = & \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_\phi u_r}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = & \left(u_r \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{u_\phi \omega_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left(u_r \frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} + \frac{u_\phi \omega_r}{r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left(u_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

De donde se puede verificar que estas derivadas materiales para la velocidad de flujo (ec. (9a)) y para la microrrotación (ec. (9b)), se hacen cero, es decir, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$.

Por otra parte el gradiente de la divergencia de un vector, o sea, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ se resuelve de la siguiente manera para coordenadas polares cilíndricas:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = & \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r \partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial r \partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi \partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z \partial \phi} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = & \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_\phi}{\partial r \partial \phi} + \frac{\partial \omega_z}{\partial r \partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial \phi \partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left(\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega_\phi}{\partial z \partial \phi} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

De donde se puede verificar que, para los vectores \mathbf{u} y $\boldsymbol{\omega}$ de las ecuaciones (9a) y (9b), ambas expresiones se hacen cero, es decir, $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$.

El operador rotacional, expresado en coordenadas polares cilíndricas, viene expresado de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_\phi r) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Que, considerando la ec. (9a), $\nabla \times \mathbf{u}$ queda como:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\phi}} + 0 \hat{\mathbf{z}} \quad (10)$$

Y también:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \omega_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\omega_\phi r) - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

Que, considerando la ec. (9b), $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ queda como:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0 \hat{\mathbf{r}} + 0 \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} + \frac{\omega_\phi}{r} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (11)$$

El operador Laplaciano aplicado a los vectores de velocidad en coordenadas polares cilíndricas, está dado por:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} = \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\nabla^2 u_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + (\nabla^2 u_z) \hat{\mathbf{z}}$$

Que, considerando la ec. (9a), $\Delta \mathbf{u}$ queda como:

$$\Delta \mathbf{u} = 0 \hat{\mathbf{r}} + 0 \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (12)$$

Y también:

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \left(\nabla^2 \omega_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial \phi} - \frac{\omega_r}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\nabla^2 \omega_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} - \frac{\omega_\phi}{r^2} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + (\nabla^2 \omega_z) \hat{\mathbf{z}}$$

Que, considerando la ec. (9b), $\Delta \boldsymbol{\omega}$ queda como:

$$\Delta \boldsymbol{\omega} = 0 \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial^2 \omega_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\phi}{\partial r} - \frac{\omega_\phi}{r^2} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} + 0 \hat{\mathbf{z}} \quad (13)$$

Una última consideración es que no se toman en cuenta las fuerzas o pares de momento externos, es decir, $\mathbf{f} = \mathbf{l} = 0$. Entonces, reemplazando las ecuaciones (10) a la (13) en las ecuaciones (6) a la (8), éstas quedan como:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (14)$$

$$(\mu_1 + \kappa_v) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}} \right) + \kappa_v \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{\omega}}{\bar{r}} \right) - \frac{d\bar{P}_1}{d\bar{z}} = 0 \quad (15)$$

$$\gamma \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{\omega}}{\bar{r}^2} \right) - \kappa_v \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{r}} + 2\bar{\omega} \right) = 0 \quad (16)$$

Donde $\bar{\omega}$ denota a una variable dimensional y \bar{u}_1 es la velocidad del flujo sanguíneo en la región micropolar.

4.1.2. Región II Newtoniana

La ecuación que rige el flujo de un fluido newtoniano, según (Pan et al., 2014), es:

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = -\nabla P + (\lambda + \mu_2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu_2 \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (17)$$

Los cálculos vectoriales realizados para la región micropolar pueden aplicarse también a la ecuación (17). El resultado obtenido de la simplificación de dicha ecuación, expresado en coordenadas polares cilíndricas es:

$$\mu_2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{d\bar{P}_2}{d\bar{z}} = 0$$

Sin embargo, se puede también considerar el enfoque de (Secomb et al., 1998) que se basa en la teoría de la lubricación e incorpora el parámetro $K(r)$ que se refiere a una resistividad hidráulica considerada debido al glucocáliz del capilar:

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} + K(r)u$$

Lo que comparando con la anterior ecuación, se puede establecer una nueva ecuación que rija el flujo de un fluido newtoniano considerando la resistividad hidráulica generada por el glucocáliz endotelial.

$$\mu_2 \left(\frac{d^2 \bar{u}_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{u}_2}{d\bar{r}} \right) - \frac{d\bar{P}_2}{d\bar{z}} - K(r)\bar{u}_2 = 0 \quad (18)$$

Donde \bar{z} denota a una variable dimensional y \bar{u}_2 es la velocidad del flujo sanguíneo en la región newtoniana. Además, $K(r)$ es la resistividad hidráulica debido al glucocáliz endotelial:

$$K(r) = \frac{K_0}{2} * \operatorname{erfc} \left[\frac{\frac{D}{2} - w - r}{L} \right] \quad (19)$$

$\operatorname{erfc} \rightarrow$ función error complementaria

$D \rightarrow$ Diámetro del capilar

$w \rightarrow$ Ancho nominal de la capa de glucocáliz

$L \rightarrow$ Ancho del contorno difuso

$K(r) \rightarrow$ Resistividad hidráulica

$K_0 \rightarrow$ Resistividad hidráulica del glucocáliz endotelial

4.1.3. Región III Porosa

Generalmente en el flujo sanguíneo en capilares existe un medio poroso en la Capa Superficial del Endotelio (CSE) por el cual circula el plasma sanguíneo. La manera de modelar esta región suele ser a través de la ecuación de Brinkman. Sin embargo, los autores Ochoa-Tapia y Whitaker en 1995 usaron un procedimiento de promediado de volumen para combinar la ecuación de Stokes a través de un salto en el esfuerzo cortante con la ecuación de Brinkman (Zhang et al., 2015):

$$\nabla P = - \left(\frac{\mu}{k_p} \right) \mathbf{u} + \mu_{eff} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (20)$$

Desarrollando la ecuación (20) para obtenerla en coordenadas polares cilíndricas se tiene:

$$\mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{\mu_2}{k_p} \bar{u}_3 - \frac{d\bar{P}_3}{d\bar{z}} = 0 \quad (21)$$

Donde \bar{u}_3 denota a una variable dimensional y \bar{u}_3 es la velocidad del flujo sanguíneo en la región porosa. Además:

$\mu_{eff} \rightarrow$ viscosidad efectiva de Brinkman

$k_p \rightarrow$ Permeabilidad del medio poroso

4.2. Ecuaciones del sistema adimensionales

Entonces las ecuaciones que gobiernan el flujo sanguíneo en un capilar están dadas por las ecuaciones (14) (15) (16) (18) y (21). Para resolver estas ecuaciones se van a utilizar las siguientes variables adimensionales:

$$r = \frac{\bar{r}}{h}; \quad z = \frac{\bar{z}}{h}; \quad u = \frac{\bar{u}}{U_{ref}}; \quad \omega = \frac{\bar{\omega}h}{U_{ref}}; \quad p_i = \frac{\bar{p}_i h}{U_{ref}(\mu + \kappa_v)};$$

$$N = \frac{\kappa_v h^2}{\gamma} \rightarrow (\text{Parámetro micropolar});$$

$$m = \frac{\kappa_v}{\mu + \kappa_v} \rightarrow (\text{Número de acoplamiento micropolar});$$

$$Re_i = \frac{\rho_i U_{ref} h}{\mu_i + \kappa_v} \rightarrow (\text{número de Reynolds});$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{eff}}{\mu_2} \rightarrow (\text{relación de viscosidades});$$

$$\alpha_1 = \frac{K_0 h^2}{\mu_2} \rightarrow (\text{Resistividad hidráulica});$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\bar{k}_p}{h^2} \rightarrow (\text{Resistividad hidráulica})$$

A continuación se desarrollan las ecuaciones de cada una de las regiones para volverlas adimensionales:

Región I Micropolar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_o \partial u}{h \partial z} = 0 \\ \left[(\mu + \kappa_v) \left(\frac{U_o \partial^2 u_1}{h^2 \partial r^2} + \frac{1}{hr} \frac{U_o \partial u_1}{h \partial r} \right) + \kappa_v \left(\frac{U_o \partial \omega}{h^2 \partial r} + \frac{U_o \omega}{h^2 r} \right) - \frac{(\rho_1 U_o^2) dP_1}{h dz} \right] * \frac{h^2}{U_o (\mu + \kappa_v)} = 0 \\ \left[\gamma \left(\frac{U_o \partial^2 \omega}{h^3 \partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{U_o \partial \omega}{h^3 \partial r} - \frac{U_o \omega}{h^3 r^2} \right) - \kappa_v \left(\frac{U_o \partial u_1}{h \partial r} + \frac{2 U_o \omega}{h} \right) \right] * \frac{h^3}{U_o \gamma} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + \frac{\kappa_v}{(\mu + \kappa_v)} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - \frac{(\rho_1 U_o^2)}{h(\mu + \kappa_v)} \frac{dP_1}{dz} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) - \frac{\kappa_v h^2}{\gamma} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + 2\omega \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + m \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - Re_1 \frac{dP_1}{dz} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) - N \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + 2\omega \right) = 0 \end{array} \right.$$

Región II Newtoniana

$$\mu_2 \left(\frac{U_o \partial^2 u_2}{h^2 \partial r^2} + \frac{1}{hr} \frac{U_o \partial u_2}{h \partial r} \right) - \frac{\rho_2 U_o^2 dP_2}{h dz} - \frac{K_o}{2} * \operatorname{erfc} \left[\frac{\left(\frac{D}{2} - w - r \right)}{L} \right] U_o u_2 = 0 * \frac{h^2}{U_o \mu_2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{\rho_2 U_o h}{\mu_2} \frac{dP_2}{dz} - \frac{1}{2} \frac{K_o h^2}{\mu_2} * \operatorname{erfc} \left[\frac{\left(\frac{D}{2} - w - r \right)}{L} \right] u_2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - Re_2 \frac{dP_2}{dz} - \frac{\alpha_1}{2} * \operatorname{erfc} \left[\frac{\left(\frac{D}{2} - w - r \right)}{L} \right] u_2 = 0$$

Región III Porosa

$$\begin{aligned}\mu_{eff} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) - \frac{\mu_2}{k_p} u_3 - \frac{dP_3}{dz} &= 0 \\ \mu_{eff} \left(\frac{U_o \partial^2 u_3}{h^2 \partial r^2} + \frac{1}{hr} \frac{U_o \partial u_3}{h \partial r} \right) - \frac{\mu_2}{k_p} U_o u_3 - \frac{\rho_2 U_o^2 dP_3}{h dz} &= 0 * \frac{h^2}{U_o \mu_2} \\ \frac{\mu_{eff}}{\mu_2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) - \frac{h^2}{k_p} u_3 - \frac{\rho_2 U_o h}{\mu_2} \frac{dP_3}{dz} &= 0 \\ \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) - \alpha_2^2 u_3 - Re_2 \frac{\partial P_3}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Entonces el sistema de ecuaciones del modelo de *Flujo Sanguíneo en Capilar* queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + m \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - Re \frac{dP_1}{dz} = 0 \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} \right) - N \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + 2\omega \right) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - Re_2 \frac{dP}{dz} - \frac{\alpha_1}{2} * \operatorname{erfc} \left[\frac{\left(\frac{D}{2} - w - r \right)}{L} \right] u_2 = 0 \quad (25)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) - \alpha_2^2 u_3 - Re_2 \frac{\partial P_3}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

4.3. Condiciones de Frontera

1. Continuidad de esfuerzos normales a través de todas las regiones, vale decir:

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{dP_2}{dz} = \frac{dP_3}{dz} = P$$

2. El esfuerzo cortante, la velocidad de flujo en la región micropolar y la microrotación son finitos en el eje $R=0$.

$$\tau, u_1, \omega = \text{finitos} \quad \text{en } R = 0$$

3. La microrotación se desvanece en la interfaz de los fluidos Micropolar y Newtoniano:

$$\omega(R) = 0 \quad \text{en } R = R1$$

4. Continuidad de velocidades entre la interfaz de fluidos Micropolar y Newtoniano:

$$u_1(R) = u_2(R) \quad \text{en } R = R1$$

5. Continuidad de los esfuerzos de corte en la interfaz de fluido Micropolar y Newtoniano:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{R1} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_v} \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{R1}$$

6. Continuidad de velocidades entre la interfaz del fluido Newtoniano y la región porosa:

$$u_2(R) = u_3(R) \quad \text{en } R = R2$$

7. La condición de salto de esfuerzo de Ochoa-Tapia-Whitacker es aplicada para esfuerzos tangenciales en la interfaz de fluido Newtoniano y la región porosa.

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial u_3}{\partial r} \right|_{R2} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{R2} = \beta \alpha_2 u_2(R2)$$

4.4. Resolución por el Método de los Elementos Finitos

El sistema de ecuaciones (22) a la (26) puede ser resuelto mediante el Método de Elementos Finitos tomando en cuenta tres criterios importantes:

- El modelo de flujo sanguíneo, que es un modelo en dos dimensiones (r, z) , se lo asume como un modelo unidimensional, es decir, sólo se generarán elementos para la coordenada r ya que la velocidad de flujo únicamente varía respecto al radio.
- Al ser un modelo complejo, es muy complicado encontrar un funcional (método variacional) por lo que es recomendable utilizar el Método de Residuos Ponderados para la resolución mediante el MEF.
- Para resolver el MEF mediante el MRP, según diversos estudios, el método que permite obtener resultados más cercanos a la solución exacta es el método de Galerkin.

Entonces, siguiendo los criterios anteriores, para empezar a aplicar el Método de Residuos Ponderados se comienza a desarrollar cada uno de los puntos enumerados en el apartado del Contexto y Estado del Arte, específicamente el apartado 2.3.1.

Preliminarmente ya se tienen desarrollados los puntos 1), 3) y 4) de la siguiente manera:

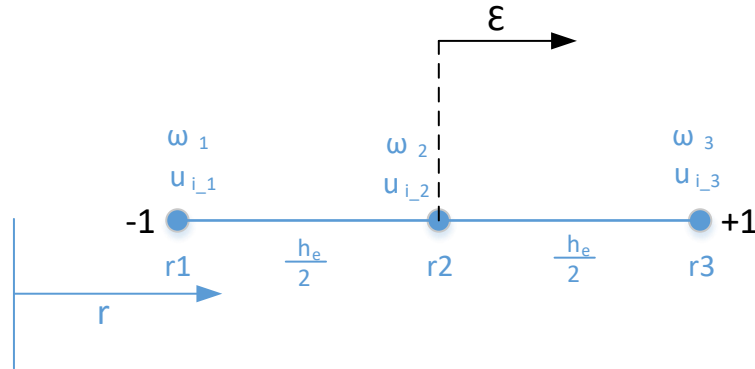
- La definición del problema y su dominio está dada por la figura 13.
- Las variables de estado y la formulación del problema están representadas en las ecuaciones diferenciales (22 a la (26).

4.4.1. Construcción de las funciones de aproximación de los elementos

Como se mencionó anteriormente el modelo se asume como unidimensional, por lo que se propone el uso de elementos unidimensionales (discretización del dominio) en un sistema de referencia local cuya coordenada es ε (*epsilon*) que está definida de -1 a 1.

Dado que las derivadas del sistema son de grado 2, es que se propone el uso del elemento unidimensional de Lagrange de tres nodos equidistantes para discretizar el sistema. Este elemento de tres nodos es de grado 2 y está representado de la siguiente manera:

Figura 14. Elemento de tres nodos equidistantes en sistema local de referencia.



Fuente: Elaboración propia.

Donde h_e representa la longitud del elemento, ω es el valor de la velocidad microrrotacional en cada nodo y u_{i-} es el valor de la velocidad de flujo en cada nodo para cada región i del sistema ($i = 1, 2, 3$).

Las tres funciones de interpolación Ψ_i de este elemento, en el sistema local de referencia, están dadas según (Da Fonseca Lopes, 2011) por:

$$\Psi_1 = -\frac{\varepsilon}{2}(1 - \varepsilon) \quad (27a)$$

$$\Psi_2 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) \quad (27b)$$

$$\Psi_3 = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon) \quad (27c)$$

Haciendo uso de estas funciones de interpolación de Lagrange, la variable independiente r se convierte en:

$$r = \Psi_1 r_1 + \Psi_2 r_2 + \Psi_3 r_3 \quad (28)$$

$$r = -\frac{\varepsilon}{2}(1 - \varepsilon)r_1 + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)r_2 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon)r_3$$

$$r = \left(\frac{r_3 + r_1}{2} - r_2\right)\varepsilon^2 + \frac{r_3 - r_1}{2}\varepsilon + r_2 \quad (29)$$

Esta ecuación es la función de forma para el radio y es la que se utiliza para transformar las coordenadas de un sistema global a un sistema local de referencia.

Para el elemento unidimensional de tres nodos que se utiliza, se considera que los nodos están equidistantes, y también que $r_3 > r_2 > r_1$; por lo que, el primer término de la ecuación (29) siempre es igual a cero, es decir:

$$\left(\frac{r_3 + r_1}{2} - r_2\right) = 0$$

Razón por la cual, para realizar una transformación del sistema global al sistema local de referencia, r se puede igualar a:

$$r = \frac{r_3 - r_1}{2} \varepsilon + r_2 \quad (30)$$

Y para la transformación inversa:

$$\varepsilon = \frac{2(r - r_2)}{r_3 - r_1} \quad (31)$$

Entonces las funciones de aproximación de las variables dependientes, según el Método de Residuos Ponderados, están dadas de la misma manera que para el radio r en la ecuación (28):

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \omega_1 + (1 - \varepsilon^2) \omega_2 + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \omega_3 \\ \tilde{u}_{i-} &= \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) u_{i-1} + (1 - \varepsilon^2) u_{i-2} + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) u_{i-3} \end{aligned}$$

Despejando $\tilde{\omega}$ y \tilde{u}_{i-} en función de ε se tiene:

$$\tilde{\omega} = \frac{(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)\varepsilon^2 + (\omega_3 - \omega_1)\varepsilon + 2\omega_2}{2} \quad (32)$$

$$\tilde{u}_{i-} = \frac{(u_{i-1} - 2u_{i-2} + u_{i-3})\varepsilon^2 + (u_{i-3} - u_{i-1})\varepsilon + 2u_{i-2}}{2} \quad (33)$$

Luego, es necesario calcular las derivadas de estas funciones de aproximación para después poder reemplazarlas en las ecuaciones gobernantes del sistema, todo en función al sistema local de referencia.

Entonces, para calcular $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r}$ se lo puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \quad (34)$$

Derivando $\tilde{\omega}$ respecto a ε :

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varepsilon} = \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \omega_1 + (-2\varepsilon) \omega_2 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \omega_3 \quad (35)$$

Derivando r respecto a ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) r_1 + (-2\varepsilon) r_2 + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) r_3 \\ \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \frac{-r_1 + 2\varepsilon r_1 - 4\varepsilon r_2 + r_3 + 2\varepsilon r_3}{2} \end{aligned}$$

Entonces la inversa de $\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ es:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{2}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \quad (36)$$

Reemplazando las ecuaciones (35) y (36) en la ecuación (34) da como resultado que la derivada de $\tilde{\omega}$ respecto a r es:

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} = \frac{2\varepsilon(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) + \omega_3 - \omega_1}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \quad (37)$$

De igual manera se obtiene la derivada de $\tilde{u}_{i_}$ respecto a r :

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i_}}{\partial r} = \frac{2\varepsilon(u_{i_1} - 2u_{i_2} + u_{i_3}) + u_{i_3} - u_{i_1}}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \quad (38)$$

Ahora, para calcular la segunda derivada tanto de $\tilde{\omega}$ como de $\tilde{u}_{i_}$ respecto a r se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} \quad (39)$$

Además se puede establecer que:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$$

De donde, derivando $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$ respecto a ε , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = - \frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} \quad (40)$$

Reemplazando las ecuaciones (40) y (37) en la ecuación (39) se obtiene la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} = \left[- \frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} \right] * \frac{2\varepsilon(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) + \omega_3 - \omega_1}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} = - \frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3) * (2\varepsilon(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) + \omega_3 - \omega_1)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^3} \quad (41)$$

Y de la misma manera para \tilde{u}_i :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial r^2} = - \frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3) * (2\varepsilon(u_{i-1} - 2u_{i-2} + u_{i-3}) + u_{i-3} - u_{i-1})}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^3} \quad (42)$$

4.4.2. Determinación de las ecuaciones a nivel de cada elemento

4.4.2.1. Residuos

Ahora se reemplazan las funciones aproximadas y sus derivadas, es decir, las ecuaciones (32), (33), (37), (38), (41) y (42) en las ecuaciones gobernantes del sistema (ec. (22) a (26)) para así obtener los residuos del MRP.

Región I Micropolar

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{(2\varepsilon(u_{1-1} - 2u_{1-2} + u_{1-3}) + u_{1-3} - u_{1-1})}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \left[- \frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{2}{(r_3 - r_1)\varepsilon + 2r_2} \right] \\ & + m \left[\frac{2\varepsilon(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) + \omega_3 - \omega_1}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \right. \\ & \left. + \frac{(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)\varepsilon^2 + (\omega_3 - \omega_1)\varepsilon + 2\omega_2}{(r_3 - r_1)\varepsilon + 2r_2} \right] - Re_1 P \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \frac{2\varepsilon(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) + \omega_3 - \omega_1}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \left[-\frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} + 1 \right] \\
 & - ((\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3)\varepsilon^2 + (\omega_3 - \omega_1)\varepsilon + 2\omega_2) \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)\varepsilon + 2r_2} \right. \\
 & \left. + N \right] - N \left[\frac{2\varepsilon(u_{1,1} - 2u_{1,2} + u_{1,3}) + u_{1,3} - u_{1,1}}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \right]
 \end{aligned} \quad (44)$$

Región II Newtoniana

$$\begin{aligned}
 R_3 = & \frac{2\varepsilon(u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3}) + u_{2,3} - u_{2,1}}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \left[-\frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{(r_3 - r_1)\varepsilon + 2r_2} \right] \\
 & - \frac{\alpha_1}{4} [(u_{2,1} - 2u_{2,2} + u_{2,3})\varepsilon^2 + (u_{2,3} - u_{2,1})\varepsilon + 2u_{2,2}] \\
 & * \operatorname{erfc} \left[\frac{D - 2w - (r_3 - r_1)\varepsilon - 2r_2}{2L} \right] - Re_2 P
 \end{aligned} \quad (45)$$

Región III Porosa

$$\begin{aligned}
 R_4 = & \lambda_2 \frac{2\varepsilon(u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3}) + u_{3,3} - u_{3,1}}{2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1} \left[-\frac{4(r_1 - 2r_2 + r_3)}{(2\varepsilon(r_1 - 2r_2 + r_3) + r_3 - r_1)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{2}{(r_3 - r_1)\varepsilon + 2r_2} \right] \\
 & - \frac{\alpha_2^2}{2} [(u_{3,1} - 2u_{3,2} + u_{3,3})\varepsilon^2 + (u_{3,3} - u_{3,1})\varepsilon + 2u_{3,2}] - Re_2 P
 \end{aligned} \quad (46)$$

4.4.2.2. Integración numérica

Para aplicar el método de Galerkin se integran los productos de los residuos R_i con cada una de las funciones peso Ψ_j (funciones de interpolación) en un dominio dado. En este caso el dominio está definido por $-1 \leq \varepsilon \leq +1$. Entonces se tienen las siguientes integrales:

$$\int_{-1}^1 R_i \Psi_j d\varepsilon = 0 \quad i = 1,2,3,4; \quad j = 1,2,3 \quad (47)$$

La ecuación (47) se la debe aplicar para cada uno de los 4 residuos y las 3 regiones, entonces se obtendrán un total de 12 integrales.

Las integrales se las resuelve mediante técnicas de integración numérica, en este caso se utilizan dos técnicas: el método de los trapecios y la técnica de extrapolación de Richardson.

Entonces cada integral está definida mediante:

$$\int_{-1}^1 R_i \Psi_j d\varepsilon = I_R$$

$$I_R \approx \frac{4T_{\frac{h}{2}} - T_h}{3} \quad (48)$$

Donde T_h es la aproximación de la integral mediante el método de los trapecios.

$$T_h = \frac{h}{2} [R_i \Psi_j(\varepsilon_0) + 2R_i \Psi_j(\varepsilon_1) + 2R_i \Psi_j(\varepsilon_2) + \dots + 2R_i \Psi_j(\varepsilon_{n-1}) + R_i \Psi_j(\varepsilon_n)] \quad (49)$$

En este caso el paso h está definido por:

$$h = \frac{\varepsilon_n - (\varepsilon_0)}{n}$$

Donde la coordenada ε está definida en el intervalo $[-1, 1]$, entonces para $n = 10$ pasos:

$$h = \frac{1 - (-1)}{10} = 0.2$$

Entonces para aplicar la técnica de extrapolación de Richardson a cada una de las 12 integrales se las debe evaluar mediante la ecuación (49) tanto para un paso $h = 0.2$ y para un paso $h/2 = 0.1$, luego aplicar cada una de las evaluaciones T_h y $T_{h/2}$ en la ecuación (48).

Nota: La resolución de estas integrales se realiza utilizando el programa computacional MATLAB (The MathWorks, 2019). El código utilizado para el efecto se encuentra detallado en el ANEXO A

El resultado de cada una de las integrales es una función de las variables de estado $\omega_i, u_{1_i}, u_{2_i}$ y u_{3_i} y P lo que permite generar cada una de las matrices de rigidez local.

4.4.2.3. Matrices de rigidez local y transformación de coordenadas

Los resultados de las integrales permiten formar cada una de las matrices de rigidez local que luego deben ser ensambladas. Se detallan las matrices de rigidez local K_i obtenidas para cada región de manera generalizada. Al mismo tiempo se realiza la transformación de coordenadas del sistema local de referencia al global para que las ecuaciones queden en función del radio.

El código que realiza todas estas operaciones se encuentra en el ANEXO A

Región I Micropolar

$$K_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \\ u_{1_3} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \\ u_{1_3} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Región II Newtoniana

$$K_3 = \begin{bmatrix} A_{71} & A_{72} & A_{73} \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{2_1} \\ u_{2_2} \\ u_{2_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Región III Porosa

$$K_4 = \begin{bmatrix} A_{101} & A_{102} & A_{103} \\ A_{111} & A_{112} & A_{113} \\ A_{121} & A_{122} & A_{123} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{3_1} \\ u_{3_2} \\ u_{3_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \quad (53)$$

4.4.3. Matriz de rigidez global y condiciones de contorno

La matriz de rigidez global viene del sistema lineal:

$$[A] * [U] = [B] \quad (54)$$

Donde U es la matriz de variables dependientes, B es la matriz de términos independientes del sistema de ecuaciones y A es la matriz de rigidez global

Para ensamblar las matrices de rigidez local se deben seguir los pasos descritos en (Da Fonseca Lopes, 2011) para lo cual se va a sumar el último nodo de los elementos u y ω de la región micropolar con el primer nodo del elemento u de la región newtoniana. También, se va a sumar el último nodo de la región newtoniana con el primer nodo de la región porosa.

Entonces la ecuación (54) queda como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + A_{77} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} + A_{77} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{87} & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{97} & 0 & 0 & A_{97} & A_{98} & A_{99} + A_{1010} & A_{1011} & A_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1110} & A_{1111} & A_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1210} & A_{1211} & A_{1212} \end{bmatrix} [U] = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \\ B_{11} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Donde U es igual a:

$$U = \begin{bmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \\ u_{1_3} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ u_{2_2} \\ u_{2_3} \\ u_{3_2} \\ u_{3_3} \end{bmatrix}$$

Introducción de condiciones de contorno.- Para introducir la condición de contorno que dice que la microrotación se desvanece en la interfaz de los fluidos Micropolar y Newtoniano, $\omega(R) = 0$ en $R = R1$, se elimina la fila y columna correspondientes al elemento A_{66} de la ecuación (55) y también queda eliminada la velocidad microrotacional en el nodo 3, o sea, ω_3 en la matriz U :

$$\begin{bmatrix}
 A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{31} & A_{32} & A_{33} + A_{77} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{51} & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} + A_{77} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A_{87} & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A_{97} & 0 & 0 & A_{97} & A_{98} & A_{99} + A_{1010} & A_{1011} & A_{1012} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1110} & A_{1111} & A_{1112} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1210} & A_{1211} & A_{1212}
 \end{bmatrix} [U] = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{31} & A_{32} & A_{33} + A_{77} & A_{34} & A_{35} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_{51} & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A_{87} & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & A_{97} & 0 & 0 & A_{98} & A_{99} + A_{1010} & A_{1011} & A_{1012} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1110} & A_{1111} & A_{1112} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1210} & A_{1211} & A_{1212}
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \\ B_3 \\ 0 \\ 0 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \quad (56)$$

- Continuidad de velocidades entre las interfaces de fluidos Micropolar – Newtoniano y Newtoniano – Porosa, es decir:

$$u_1(R) = u_2(R) \quad \text{en } R = R1$$

$$u_2(R) = u_3(R) \quad \text{en } R = R2$$

Estas condiciones se convirtieron en condiciones de contorno internas que fueron introducidas durante el ensamblaje, cuyo resultado es la ecuación (56).

- Continuidad de los esfuerzos de corte en las interfaces de fluido Micropolar – Newtoniano y Newtoniano – Porosa:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{R1} = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_v} \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{R1} \quad (57a)$$

$$\lambda_2 \left. \frac{\partial u_3}{\partial r} \right|_{R2} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{R2} = \beta \alpha_2 u_2(R2) \quad (57b)$$

Estas condiciones se las desarrolla utilizando las ecuaciones (32), (33), (37) y (38) para el punto r en el que ambas regiones se unen, es decir, para el nodo 3 del elemento de la región anterior y para el elemento 1 de la región posterior.

$$u_{1-1} - 4u_{1-2} + 3u_{1-3} - \xi(-3u_{2-1} + 4u_{2-2} - u_{2-3}) = 0$$

Donde:

$$\xi = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_v}$$

Teniendo en cuenta que $u_{1-3} = u_{2-1}$ y ordenando términos se tiene para la ecuación (57a):

$$u_{1-1} - 4u_{1-2} + (3 + 3\xi)u_{1-3} - 4\xi u_{2-2} + \xi u_{2-3} = 0 \quad (58)$$

Y para la condición de Ochoa-Tapia-Whitacker (ecuación (57b)):

$$\lambda_2(-3u_{3-1} + 4u_{3-2} - u_{3-3}) - (u_{2-1} - 4u_{2-2} + 3u_{2-3}) - \beta \alpha_2 u_{2-3}$$

Teniendo en cuenta que $u_{1-3} = u_{2-1}$ y $u_{3-1} = u_{2-3}$ y ordenando términos se tiene:

$$u_{1-3} - 4u_{2-2} + (3 + 3\lambda_2 + \beta \alpha_2)u_{2-3} - 4\lambda_2 u_{2-3} + \lambda_2 u_{2-3} = 0 \quad (59)$$

Para introducir en la matriz de rigidez global las condiciones de salto de esfuerzo representadas en las ecuaciones (58) y (59) se procede a restar miembro a miembro cada ecuación con la fila de la matriz de rigidez global que representa la unión de regiones, de manera que la matriz A queda como:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} - 1 & A_{32} + 4 & AC_1 & A_{34} & A_{35} & A_{78} + 4\xi & A_{79} - \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{87} & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{97} - 1 & 0 & 0 & A_{98} + 4 & AC_2 & A_{1011} + 4\lambda_2 & A_{1012} - \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1110} & A_{1111} & A_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{1210} & A_{1211} & A_{1212} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$AC_1 = A_{33} + A_{77} - (3 + 3\xi)$$

$$AC_2 = A_{99} + A_{1010} - (3 + 3\lambda_2 + \beta\alpha_2)$$

La resolución del sistema de ecuaciones generado se los resuelve con la función de contrabarra de MATLAB (The MathWorks, 2019), o sea, $U=A \backslash B$.

4.5. Interpretación de resultados

Se realizó una comparación de resultados de las velocidades de flujo y microrrotacional para distintos valores de m , N , α_1 , α_2 y P . Los valores utilizados en las constantes para la solución del sistema de ecuaciones están detallados en la Tabla 2:

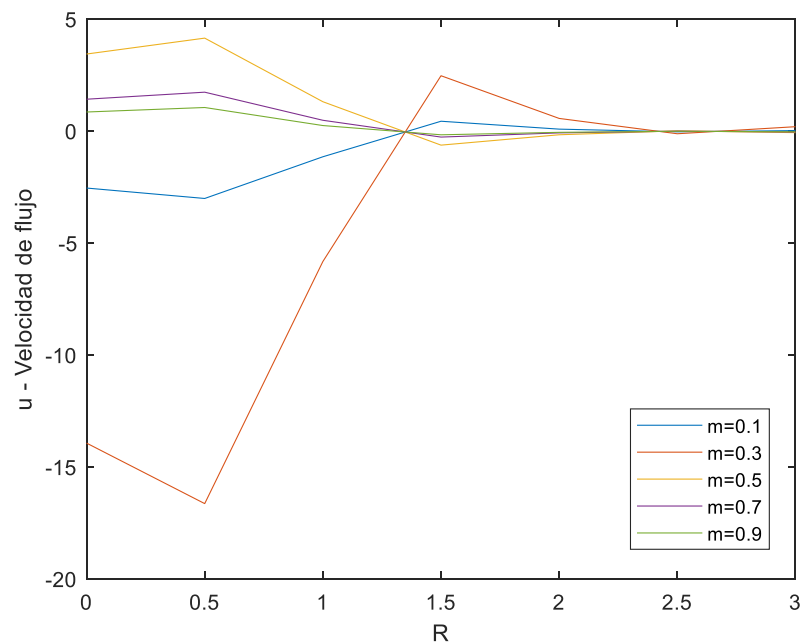
A continuación se presentan gráficamente los resultados obtenidos a través de MATLAB (The MathWorks, 2019).

Tabla 2. Valores de los parámetros con sus fuentes.

Parámetro	Valor	Fuente
Reynolds hematocrito Re_1	0.05	(Boodoo et al., 2013)
Reynolds plasma Re_2	0.09	(Boodoo et al., 2013)
Coef. Salto de esfuerzo β	0.5	(Boodoo et al., 2013)
Relación de viscosidades ξ	0.5	(Boodoo et al., 2013)
Diámetro de capilar d	7	(Zhang et al., 2015)
Ancho nominal de la capa de glucocáliz w	0.8	(Secomb et al., 1998)
Resistividad hidráulica α_1	7	(Secomb et al., 1998)
Resistividad hidráulica α_2	5	(Boodoo et al., 2013)
Relación de viscosidades λ_2	1.2	(Zhang et al., 2015)

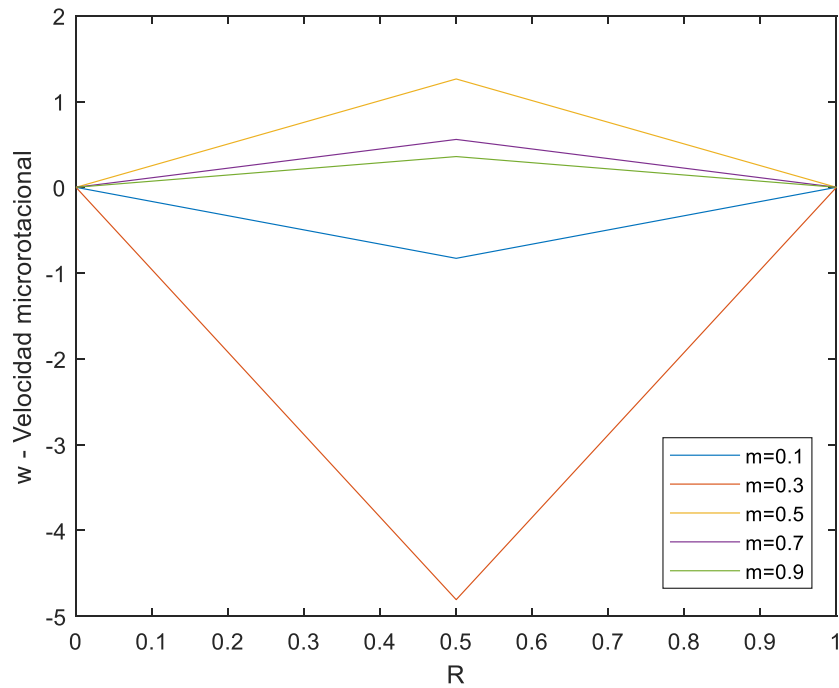
Fuente: Elaboración propia.

Figura 15. Variaciones de velocidad de flujo con el número de acoplamiento micropolar m .
 $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$.



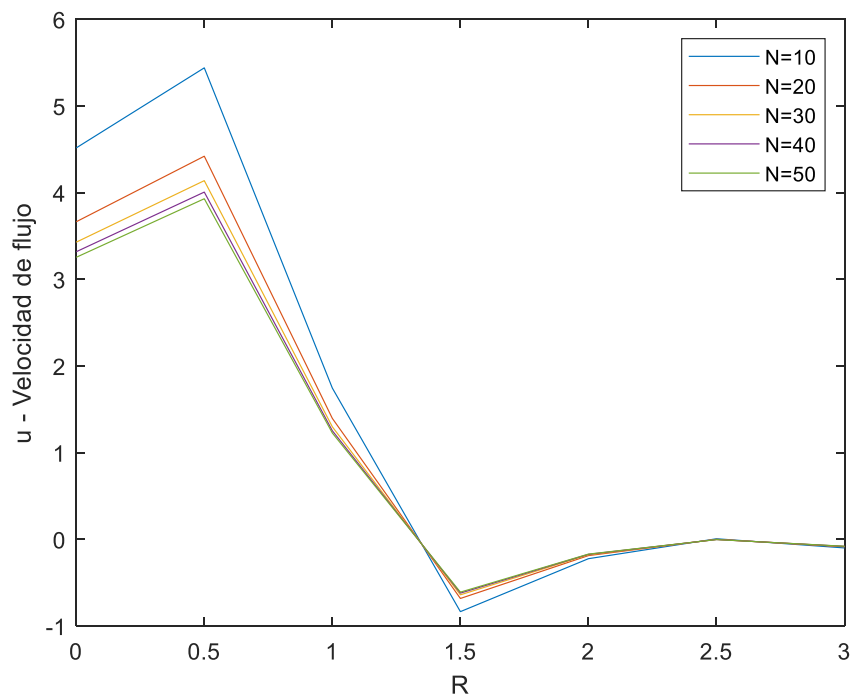
Fuente: Elaboración propia.

Figura 16. Variaciones de velocidad microrotacional con el número de acoplamiento micropolar m . $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$.



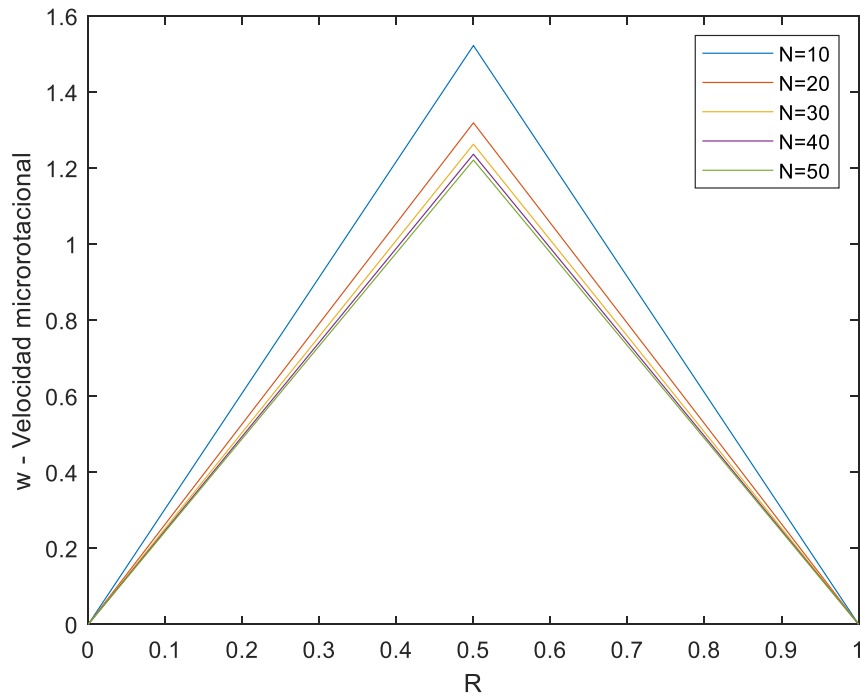
Fuente: Elaboración propia.

Figura 17. Variaciones de velocidad de flujo con parámetro micropolar N . $m=0.5$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$.



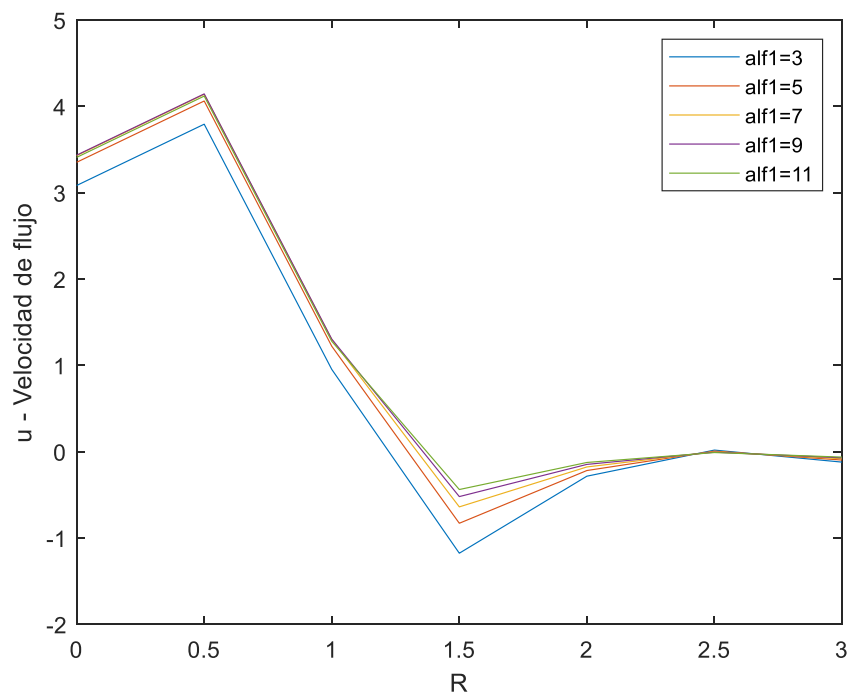
Fuente: Elaboración propia.

Figura 18. Variaciones de velocidad microrotacional con parámetro micropolar N . $m=0.5$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$, $P=8$.



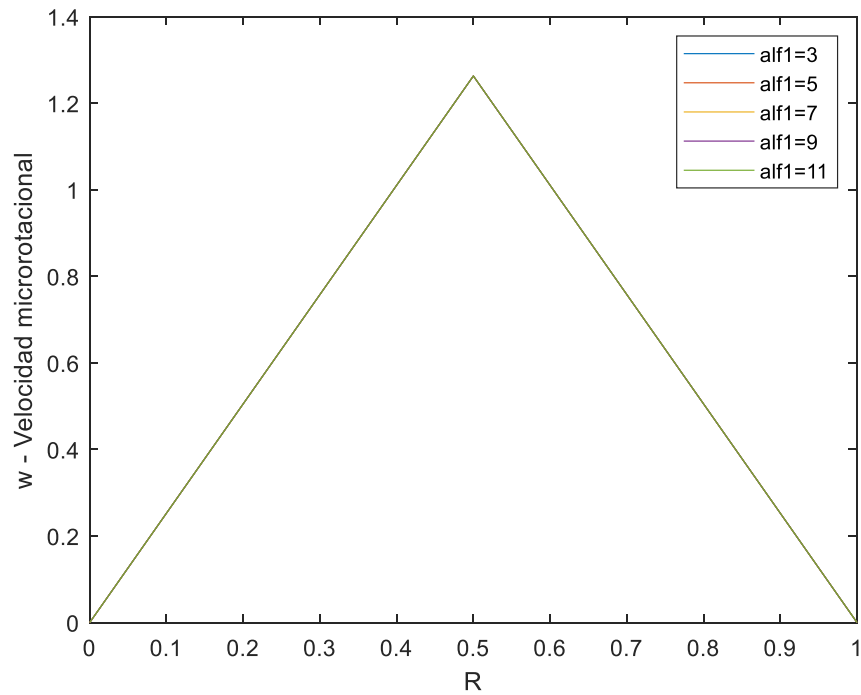
Fuente: Elaboración propia.

Figura 19. Variaciones de velocidad de flujo con resistividad hidráulica 1 α_1 . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_2=5$, $P=8$.



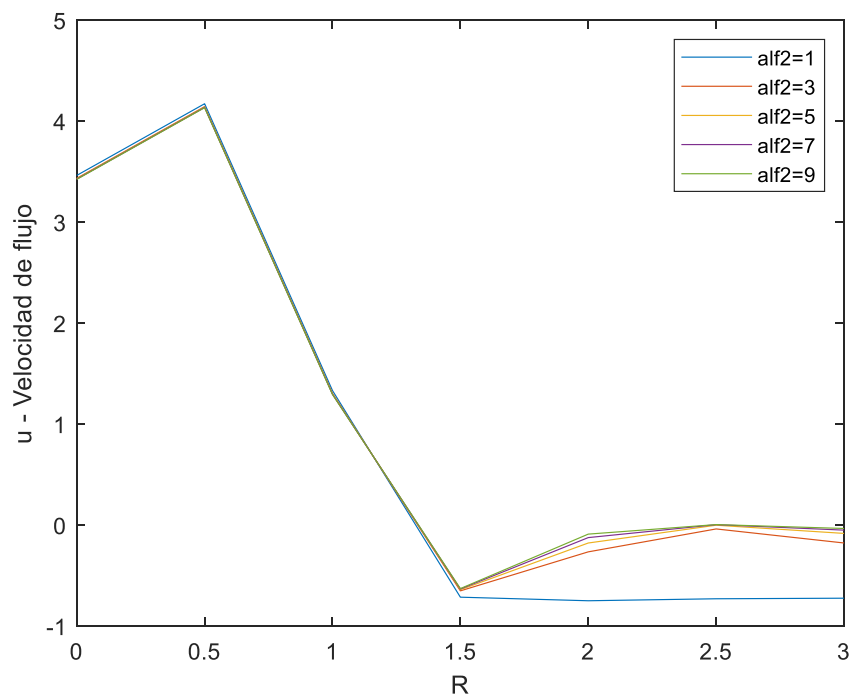
Fuente: Elaboración propia.

Figura 20. Variaciones de velocidad microrotacional con resistividad hidráulica 1 $\alpha f1$. $m=0.5$, $N=30$, $\alpha f2=5$, $P=8$.



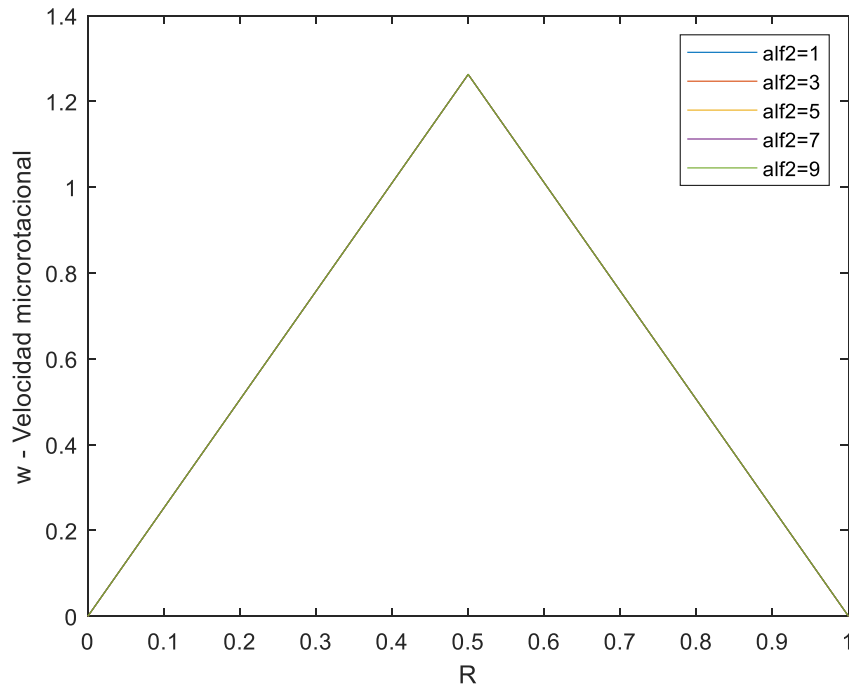
Fuente: Elaboración propia.

Figura 21. Variaciones de velocidad de flujo con resistividad hidráulica 2 $\alpha f2$. $m=0.5$, $N=30$, $\alpha f1=7$, $P=8$.



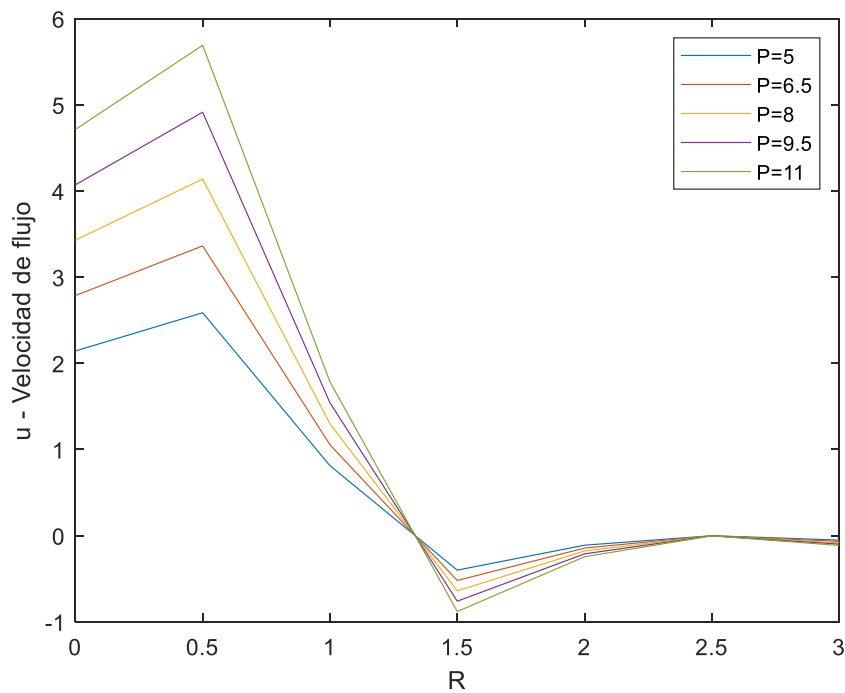
Fuente: Elaboración propia.

Figura 22. Variaciones de velocidad microrrotacional con resistividad hidráulica $2\alpha f_2$. $m=0.5$, $N=30$. $\alpha f_1=7$, $P=8$.



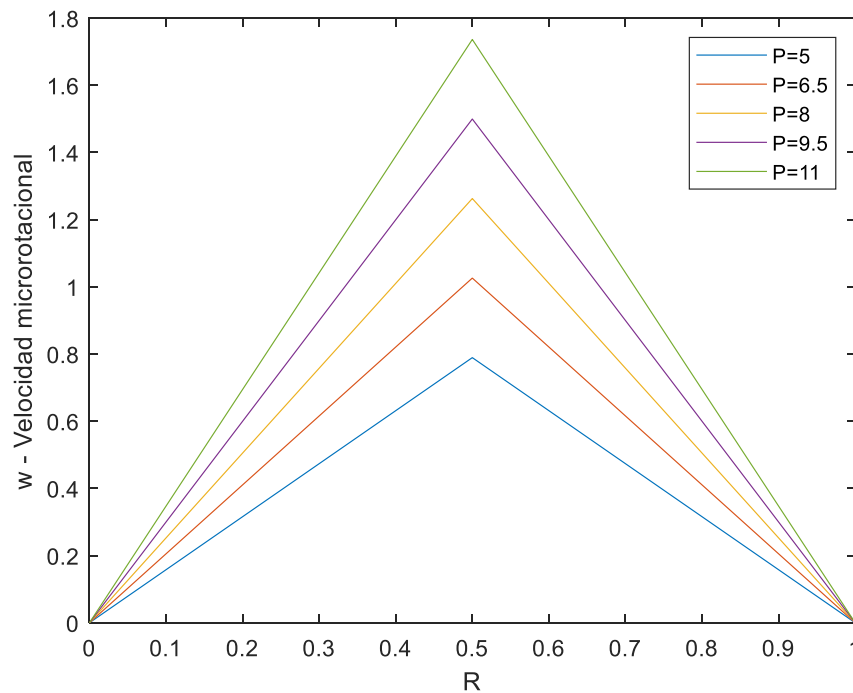
Fuente: Elaboración propia.

Figura 23. Variaciones de velocidad de flujo con presión P . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha f_1=7$, $\alpha f_2=5$.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 24. Variaciones de velocidad microrotacional con presión P . $m=0.5$, $N=30$, $\alpha_1=7$, $\alpha_2=5$.



Fuente: Elaboración propia.

Las variaciones de los perfiles de velocidad debido a parámetros micropolares se pueden observar en las Figuras 15 a 18. Los valores escogidos para este modelo producen grandes cambios en los perfiles de velocidad, tanto de flujo como microrotacional, con el cambio de m ; a mayor valor de m se va suavizando la curva (Figuras 15 y 16), se puede decir que el modelo es sensible a cambios en el valor de este parámetro.

Por otro lado, los cambios de N generan ligeros cambios bajo una misma forma de curva (Figuras 17 y 18); además se aprecia que a valores bajos de N , la velocidad de flujo y la velocidad microrotacional, en el centro del capilar, se incrementan. Prácticamente se puede observar que el incremento de las velocidades es inversamente proporcional al incremento de N con un patrón cuadrático.

Las variaciones en las resistividades hidráulicas generan pequeños cambios en el perfil de velocidad de flujo. Para el caso de α_1 los cambios son en las dos primeras regiones tal como se observa en la Figura 19, mientras que para α_2 los cambios se dan en las dos últimas regiones (Figura 21).

En el caso de la velocidad microrotacional, ésta no presenta ninguna variación con respecto a posibles cambios en los valores de ambas resistividades hidráulicas, tal como se observa en las Figuras 20 y 22; esto debido a que al finalizar la región 1, la microrotación se hace cero, es decir, no es dependiente de α_1 ni α_2 .

Los cambios en el valor de la presión generan un aumento directamente proporcional tanto en la velocidad de flujo como en la velocidad microrotacional como se aprecia en las Figuras 23 y 24, o sea que, el incremento de las velocidades con respecto a la presión es una función lineal.

En todos los casos se confirma la continuidad de velocidades de flujo en las interfaces de las distintas regiones. También, cabe mencionar que la microrotación en el centro del capilar se hace cero independientemente del valor de los distintos parámetros.

Los resultados obtenidos tienen algunas similitudes algunos estudios que trataron el efecto de la variación de la viscosidad en un modelo de flujo de dos fases como es el caso de (Tiwari & Chauhan, 2019), o de un trabajo sobre el flujo de sangre en vasos sanguíneos contraídos que fue realizado por (Sharma & Yadav, 2017).

5. Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

- Como objetivo general se definió “Determinar un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares basado en el método de elementos finitos”. Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales del apartado 4.1. Ecuaciones del Sistema, las condiciones de contorno del apartado 4.3. Condiciones de Frontera, las matrices resultantes en el apartado 4.4.3. Matriz de rigidez global y condiciones de contorno, y los resultados del apartado 4.5. Interpretación de resultados, se puede afirmar que queda determinado un modelo aproximado para el flujo sanguíneo en capilares y así concluir que el objetivo se cumplió.

De la misma manera, los objetivos específicos que se listan a continuación se cumplieron satisfactoriamente:

- Objetivo 1: “Realizar una revisión sistemática de la literatura de los trabajos investigativos más relevantes relacionados al flujo sanguíneo en capilares para conocer las teorías y conceptos necesarios”. Después de revisada la literatura relacionada al campo de estudio (capítulo 2. Contexto y Estado del Arte), se establecieron varios supuestos sobre el comportamiento del flujo sanguíneo en capilares, como el hecho de que el hematocrito puede comportarse como un fluido micropolar mientras que el plasma sanguíneo como un fluido newtoniano, pudiendo integrar ambos tipos de fluidos en un mismo modelo. Por otro el endotelio en el caso de los capilares, suele ser considerada como medio poroso a través del cual circula la sangre para el intercambio de nutrientes. En el caso de los capilares, el flujo sanguíneo, además de verse expuesto a la porosidad del endotelio, también fluye a través de una fina capa conocida como glucocáliz endotelial que genera una resistividad hidráulica al flujo. Entonces, se puede concluir que el objetivo se cumplió.
- Objetivo 2: “Definir un sistema de ecuaciones que representen un modelo aproximado del flujo sanguíneo en capilares, basado en la teoría y conceptos del problema de estudio”. Para obtener el sistema de ecuaciones que represente un modelo

aproximado del flujo sanguíneo en capilares se consideró a la sangre como un modelo de fluido de dos fases, micropolar al centro y newtoniano en la periferia (como se menciona en el apartado 2.2. Estado del Arte); en función a aquello, en los apartados 4.1. Ecuaciones del sistema y 4.3. Condiciones de Frontera, se manejaron las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de Brinkman sobre capas de transición a medios porosos, las ecuaciones desarrolladas sobre fluidos micropolares y las condiciones de contorno que permitieron obtener un sistema de ecuaciones diferenciales (Problema de Valor de Contorno) de un modelo aproximado del problema, considerando tres regiones de circulación de la sangre. Entonces se puede concluir que el objetivo se cumplió.

- Objetivo 3: “Resolver numéricamente, a través del método de elementos finitos, las ecuaciones que gobiernen el modelo de flujo sanguíneo en capilares anteriormente definido”. Tal como se puede observar en el apartado 4.4. Resolución por el Método de Elementos Finitos, se siguió un método de elementos finitos basado en elementos unidimensionales de Lagrange de orden 2 que de manera conjunta al método de residuos ponderados permitieron generar una solución numérica al sistema de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno que rigen el problema. Por lo tanto, se puede concluir que el objetivo se cumplió.

- Objetivo 4: “Analizar e interpretar los resultados obtenidos a través del MEF”. En función a lo redactado en el apartado 4.5. Interpretación de resultados, se observa que para la obtención de resultados se consideraron valores utilizados en trabajos previos de distintos autores. También, los resultados obtenidos, tanto para la velocidad de flujo como para la velocidad microrotacional, se interpretaron gráficamente en función de la variación de distintos parámetros como la presión, la resistividad hidráulica y parámetros micropolares. Estos resultados permiten tener una perspectiva sobre el comportamiento del flujo sanguíneo en capilares para futuros trabajos de investigación. Por lo que se puede concluir que el objetivo se cumplió.

5.2. Líneas de trabajo futuro

Al observar los resultados, un primer paso a futuro para obtener mejores resultados sería refinar la malla de elementos que discretizan el modelo de modo que se pueda tener curvas más suaves y más exactas.

Este modelo se puede ampliar a casos más complejos como por ejemplo el caso de capilares con patologías que generen contracciones uniformes a lo largo de los capilares, presentándose así un problema bidimensional que requeriría de un mallado a través de elementos triangulares o rectangulares.

El presente estudio está basado en un capilar genérico; sin embargo muchos de los capilares que son parte de funciones fisiológicas específicas del cuerpo humano, como la función renal o la pulmonar, tienen ciertas particularidades que requieren mayor atención. Entonces, futuros modelos para estos capilares en específico pueden ser solucionados partiendo de la base de lo redactado en este trabajo.

Referencias bibliográficas

- Alejandra Sánchez Andrade. (n.d.). *Sistema circulatorio* (pp. 1–27). [http://www.facmed.unam.mx/deptos/biocetis/PDF/Portal de Recursos en Linea/Presentaciones/SISTEMA_CIRCULATORIO.pdf](http://www.facmed.unam.mx/deptos/biocetis/PDF/Portal_de_Recursos_en_Linea/Presentaciones/SISTEMA_CIRCULATORIO.pdf)
- Ancey, C., & Ancey, C. (2005). *Notebook Introduction to Fluid Rheology*. July. <https://www.researchgate.net/profile/Edwin-Murillo/post/Visco-elastic-behaviour-of-polymers/attachment/59d62c5179197b807798ab30/AS%3A346511360708608%401459626154251/download/Introduction+to+Fluid+Rheology.pdf>
- Boodoo, C., Bhatt, B., & Comissiong, D. (2013). Two-phase fluid flow in a porous tube: A model for blood flow in capillaries. *Rheologica Acta*, 52(6), 579–588. <https://doi.org/10.1007/s00397-013-0673-y>
- Chen, J., Liang, C., & Lee, J. D. (2010). Theory and simulation of micronolar fluid dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanoengineering and Nanosystems*, 224(1–2), 31–39. <https://doi.org/10.1177/1740349911400132>
- Cordero, A., & Torregrosa, J. R. (2019a). Integración Numérica. In *Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería* (p. 30). Universidad Internacional de la Rioja.
- Cordero, A., & Torregrosa, J. R. (2019b). Método de los Elementos Finitos. In *Métodos Numéricos Avanzados en Ingeniería* (p. 35). Universidad Internacional de la Rioja.
- Da Fonseca Lopes, Z. A. (2011). *El Método de los Elementos Finitos*. Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta.
- ERINGEN, A. C. (1966). Theory of Micropolar Fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16(1), 1–18. <http://www.jstor.org/stable/24901466>
- Fonseca, S. (n.d.). *Histología del sistema circulatorio*. Slideshare. Retrieved July 15, 2021, from <https://www.slideshare.net/SideneiFonseca/histologia-del-sistema-circulatorio-81435109>
- Frati-Munari, A. C. (2013). Importancia médica del glucocáliz endotelial. *Archivos de Cardiología de México*, 83(4), 303–312. <https://doi.org/10.1016/j.acmx.2013.04.015>

- Karvelas, E., Sofiadis, G., Papathanasiou, T., & Sarris, I. (2020). Effect of micropolar fluid properties on the blood flow in a human carotid model. *Fluids*, 5(3), 1–17. <https://doi.org/10.3390/fluids5030125>
- Khanukaeva, D. (2020). Filtration of micropolar liquid through a membrane composed of spherical cells with porous layer. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 34(3), 215–229. <https://doi.org/10.1007/s00162-020-00527-x>
- Khanukaeva, D. Y. (2018). On the Analogy between Filtration Flow of Newtonian Fluid and Free Flow of Micropolar Fluid. *Petroleum Chemistry*, 58(6), 503–507. <https://doi.org/10.1134/S0965544118060051>
- Li, J. K. (2004). *Dynamics Of The Vascular System : Series On Bioengineering & Biomedical Engineering*. World Scientific Publishing Company. <http://ebookcentral.proquest.com/lib/univunirsp/detail.action?docID=231547>
- Lukaszewicz, G. (2012). *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. Birkhäuser Boston. <https://books.google.ru/books?id=X0fTBwAAQBAJ>
- Mehmood, O. U., Mustapha, N., & Shafie, S. (2012). Unsteady Two-Dimensional Blood Flow in Porous Artery with Multi-Irregular Stenoses. *Transport in Porous Media*, 92(2), 259–275. <https://doi.org/10.1007/s11242-011-9900-0>
- Morad, M. R., & Khalili, A. (2009). Transition layer thickness in a fluid-porous medium of multi-sized spherical beads. *Experiments in Fluids*, 46(2), 323–330. <https://doi.org/10.1007/s00348-008-0562-9>
- Ortiz-León, G., Araya-Luna, D., & Vílchez-Monge, M. (2014). Revisión de modelos teóricos de la dinámica de fluidos asociada al flujo de sangre. *Revista Tecnología En Marcha*, 27(1), 66. <https://doi.org/10.18845/tm.v27i1.1697>
- Ortiz Prado, A., Ruiz Cervantes, O., & Ortiz Valera, J. A. (2013). *Modelado de procesos de manufactura*. Universidad Autónoma de México. <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/2548/011-MPM-Cap8-Final.pdf?sequence=11>

- Pan, M., Si, X., Zhu, X., & Zheng, L. (2014). Multiple solutions of the micropolar fluid equation in a porous channel. *IET Conference Publications*, 2014(CP658). <https://doi.org/10.1049/cp.2014.1228>
- Pries, A. R., & Secomb, T. W. (2005). Microvascular blood viscosity in vivo and the endothelial surface layer. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 289(6), H2657–H2664. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.00297.2005>
- Sacheti, N. C., Chandran, P., Bhatt, B. S., & Chhabra, R. P. (2008). Steady creeping motion of a liquid bubble in an immiscible viscous fluid bounded by a vertical porous cylinder of finite thickness. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 2(5), 243–260. <http://www.m-hikari.com/astp/astp2008/astp5-8-2008/chandranASTP5-8-2008.pdf>
- Sankar, D. S., & Nagar, A. K. (2013). Mathematical analysis of blood flow in porous tubes: A comparative study. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013. <https://doi.org/10.1155/2013/287954>
- Sankar, D. S., & Yatim, Y. (2012). Comparative analysis of mathematical models for blood flow in tapered constricted arteries. *Abstract and Applied Analysis*, 2012. <https://doi.org/10.1155/2012/235960>
- Secomb, T. W., Hsu, R., & Pries, A. R. (1998). A model for red blood cell motion in glycocalyx-lined capillaries. *American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology*, 274(3), H1016–H1022. <https://doi.org/10.1152/ajpheart.1998.274.3.H1016>
- Sharma, B. D., & Yadav, P. K. (2017). A Two-Layer Mathematical Model of Blood Flow in Porous Constricted Blood Vessels. *Transport in Porous Media*, 120(1), 239–254. <https://doi.org/10.1007/s11242-017-0918-9>
- Si, X., Pan, M., Zheng, L., Zhou, J., & Li, L. (2016). The solutions for the flow of micropolar fluid through an expanding or contracting channel with porous walls. *Boundary Value Problems*, 2016(1). <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0686-4>
- Sochi, T. (2010). Non-Newtonian flow in porous media. *Polymer*, 51(22), 5007–5023. <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2010.07.047>
- Streeter, V. L., Wylie, F. B., & Bedford, K. W. (1999). *Mecánica de Fluidos* (9th ed.). McGrawHill.
- The MathWorks, I. (2019). *MATLAB and Symbolic Math Toolbox Release 2019b*.

<https://la.mathworks.com/help/symbolic/index.html>

- Tiwari, A., & Chauhan, S. S. (2019). Effect of Varying Viscosity on Two-Layer Model of Pulsatile Flow through Blood Vessels with Porous Region near Walls. *Transport in Porous Media*, 129(3), 721–741. <https://doi.org/10.1007/s11242-019-01302-1>
- Ubal, S., Campana, D. M., Rodríguez, C. F., Berli, M. E., & Di Paolo, J. (2010). Análisis Computacional de flujos sanguíneos utilizando modelos 3D axisimétricos y el método de elementos finitos. *Entre Ríos, Argentina*. https://www.researchgate.net/profile/Sebastian-Ubal/publication/267996143_ANALISIS_COMPUTACIONAL_DE_FLUJOS_SANGUINEOS_UTILIZANDO_MODELOS_3D_AXISIMETRICOS_Y_EL_METODO_DE_ELEMENTOS_FINITOS/links/546deeea0cf23fe753da5012/ANALISIS-COMPUTACIONAL-DE-FLUJOS-SANG
- Vasu, B., Dubey, A., Bég, O. A., & Gorla, R. S. R. (2020). Micropolar pulsatile blood flow conveying nanoparticles in a stenotic tapered artery: NON-Newtonian pharmacodynamic simulation. *Computers in Biology and Medicine*, 126(September). <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2020.104025>
- Velásquez Ceballos, S. (2004). *Simulación numérica de flujo de fluidos en 2D utilizando el método de elementos finitos mínimo cuadrado*. <http://mriuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/handle/123456789/4258/svelasquez.pdf?sequence=3>
- Yadav, P. K., Jaiswal, S., & Sharma, B. D. (2018). Mathematical model of micropolar fluid in two-phase immiscible fluid flow through porous channel. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 39(7), 993–1006. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2351-8>
- Zhang, S. P., Zhang, X. J., Tian, Y., Meng, Y. G., & Lipowsky, H. (2015). Influence of thickness and permeability of endothelial surface layer on transmission of shear stress in capillaries. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*, 58(7). <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5650-2>
- Μηχανικωv, T. M. (2018). *Simulation of micropolar fluid flows : validation of numerical results with analytical solutions*. <https://ir.lib.uth.gr/xmlui/bitstream/handle/11615/49165/17816.pdf?sequence=1>

Anexo A. Código de MATLAB para la implementación del Método de Elementos Finitos

```
% Código construcción matriz de rigidez
% Se consideran radios distintos para cada región
syms r1_ [1 3]
syms r2_ [1 3]
syms r3_ [1 3]
syms u1_ [1 3]
syms u2_ [1 3]
syms u3_ [1 3]
syms w [1 3]
syms P
syms E E1 N m
syms Re1 Re2
syms alf1 alf2 beta
syms lamb2
syms d W L
syms F F1

A1=2*E*(r1_(1)-2*r1_(2)+r1_(3))+r1_(3)-r1_(1);
A2=2*E*(r2_(1)-2*r2_(2)+r2_(3))+r2_(3)-r2_(1);
A3=2*E*(r3_(1)-2*r3_(2)+r3_(3))+r3_(3)-r3_(1);
B1=2*E*(u1_(1)-2*u1_(2)+u1_(3))+u1_(3)-u1_(1);
B2=2*E*(u2_(1)-2*u2_(2)+u2_(3))+u2_(3)-u2_(1);
B3=2*E*(u3_(1)-2*u3_(2)+u3_(3))+u3_(3)-u3_(1);
B4=2*E*(w(1)-2*w(2)+w(3))+w(3)-w(1);
C1=(u2_(1)-2*u2_(2)+u2_(3))*E^2+(u2_(3)-u2_(1))*E+2*u2_(2);
C2=(u3_(1)-2*u3_(2)+u3_(3))*E^2+(u3_(3)-u3_(1))*E+2*u3_(2);
C3=(w(1)-2*w(2)+w(3))*E^2+(w(3)-w(1))*E+2*w(2);
D11=(r1_(3)-r1_(1))*E+2*r1_(2);
D12=-4*(r1_(1)-2*r1_(2)+r1_(3));
D21=(r2_(3)-r2_(1))*E+2*r2_(2);
D22=-4*(r2_(1)-2*r2_(2)+r2_(3));
D31=(r3_(3)-r3_(1))*E+2*r3_(2);
D32=-4*(r3_(1)-2*r3_(2)+r3_(3));

R1=(B1/A1)*((D12/A1^2)+2/D11)+m*((B4/A1)+(C3/D11))-Re1*P;
R2=(B4/A1)*((D12/A1^2)+1)-(C3*(1/D11+N))-N*(B1/A1);
R3=(B2/A2)*((D22/A2^2)+2/D21)-((alf1/4)*F).*C1-Re2*P;
R4=lamb2*(B3/A3)*((D32/A3^2)+2/D31)-(alf2^2/2)*C2-Re2*P;

FI1=-E*(1-E)/2;
FI2=(1+E)*(1-E);
FI3=E*(1+E)/2;
%% Integración numérica
% Se plantean los elementos de la integración numérica
M1=R1*FI1;%u1
M2=R1*FI2;%u1
M3=R1*FI3;%u1
M4=R2*FI1;%u1
M5=R2*FI2;%u1
M6=R2*FI3;%u1
M7=R3*FI1;%u2
M8=R3*FI2;%u2
M9=R3*FI3;%u2
M10=R4*FI1;%u3
```

```

M11=R4*FI2;%u3
M12=R4*FI3;%u3

funN1=inline(M1);
funN2=inline(M2);
funN3=inline(M3);
funN4=inline(M4);
funN5=inline(M5);
funN6=inline(M6);
funN7=inline(M7);
funN8=inline(M8);
funN9=inline(M9);
funN10=inline(M10);
funN11=inline(M11);
funN12=inline(M12);
%% Valores de los parámetros
m=0.5;% Va desde 0.1 hasta 0.9
N=30;% Va desde 10 hasta 50
alf2=5;% Va desde 1 hasta 9
Ep=0.5;% Es la relación entre visc.2/(visc.1+vortex)
lamb2=1.2; beta=0.5;
P=8;% Varía desde 5 hasta 11
Re1=0.05; Re2=0.09;% Los Reynolds siempre serán menores a 1 dado que las
fuerzas viscosas son las dominantes
alf1=7; d=7; W=0.8; L=157;% alf1 varía de 3 a 11
% r(1)=0;
r1_(3)=1;
r1_(2)=0.5;
h=0.2;
E=[-1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1];
E1=[-1, -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2,
0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1];

r2_(1)=1;
r2_(2)=1.5;
r2_(3)=2.0;
r3_(1)=2.0;
r3_(2)=2.5;
r3_(3)=3.0;
re=0:0.05:0.5;
re1=0:0.025:0.5;
% F=erfc((d-2*W+(-r2_(3))*E+2*r2_(2))/(2*L));
F=erfc((d-2*W-re)/(2*L));
F=vpa(F);
% F1=erfc((d-2*W+(-r2_(3))*E1+2*r2_(2))/(2*L));
F1=erfc((d-2*W-re1)/(2*L));
F1=vpa(F1);
n=length(E);
n1=length(E1);
p=ones(1,n);
p1=ones(1,n1);
p=[p(1) p(2:end-1)*2 p(end)];
p1=[p1(1) p1(2:end-1)*2 p1(end)];

%% Se efectúa la integración numérica para obtener la MATRIZ DE RIGIDEZ
LOCAL
% N_i son las la sustitución de las variables en la función con respecto a
% E para hallar la integral desde -1 hasta +1. Es un matriz de 1x11

N1=feval(funN1,E,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));

```

```

O1=(h/2)*sum(N1.*p);% Esto es la sumatoria de términos, o sea, la integral
que es igual a cero
NP1=feval(funN1,E1,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w
(2),w(3));
OP1=(h/4)*sum(NP1.*p1);
I1=(4*O1-OP1)/3;
% Cuando r=0 el esfuerzo se hace infinito pero la condición de contorno
% indica que debe ser finito
IS1=factor(I1,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);%Se factoriza r_1
IS1(1)=IS1(1)*r1_(1);% Se elimina r_1 del denominador para de tau en cero sea
un valor finito (primera condición).
% No se generan problemas con multiplicar por r_1 porque la ecuación, es
% decir la integral está igualada a cero según Galerkin
T1=subs(IS1,r1_(1),0);% Se sustituye r_1=0 en la integral. Aquí los
términos ya quedan en función de las variables u y w
AT10=vectorize(T1(2));%Empieza el acondicionamiento del resultado para
convertirlo en una matriz
AT11=regexprep(AT10,['.*_uw]1','');
AT12=regexprep(AT11,['.*_uw]2','');
AT13=regexprep(AT12,['.*_uw]3','');
AT14=regexprep(AT13,['.*'],'');
AT15=regexprep(AT14,['+]\s',' ');
AT16=regexprep(AT15,['-]\s',' -');
AT17=regexp(AT16,'\\s*','split');
K1=T1(1)*str2double(AT17([1 2 3 4]));
K1=vpa(K1);

N2=feval(funN2,E,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2
),w(3));
O2=(h/2)*sum(N2.*p);
NP2=feval(funN2,E1,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w
(2),w(3));
OP2=(h/4)*sum(NP2.*p1);
I2=(4*O2-OP2)/3;
IS2=factor(I2,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);
T2=subs(IS2,r1_(1),0);
AT20=vectorize(T2(2));
AT21=regexprep(AT20,['.*_uw]1','');
AT22=regexprep(AT21,['.*_uw]2','');
AT23=regexprep(AT22,['.*_uw]3','');
AT24=regexprep(AT23,['.*'],'');
AT25=regexprep(AT24,['+]\s',' ');
AT26=regexprep(AT25,['-]\s',' -');
AT27=regexp(AT26,'\\s*','split');
K2=T2(1)*str2double(AT27([2 1 3 4 5 6 7]));
K2=vpa(K2);

N3=feval(funN3,E,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2
),w(3));
O3=(h/2)*sum(N3.*p);
NP3=feval(funN3,E1,P,Re1,m,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w
(2),w(3));
OP3=(h/4)*sum(NP3.*p1);
I3=(4*O3-OP3)/3;
IS3=factor(I3,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);
T3=subs(IS3,r1_(1),0);
AT30=vectorize(T3(2));
AT31=regexprep(AT30,['.*_uw]1','');
AT32=regexprep(AT31,['.*_uw]2','');
AT33=regexprep(AT32,['.*_uw]3','');
AT34=regexprep(AT33,['.*'],'');

```



```

AT35=regexprep(AT34,'[+]\s',' ');
AT36=regexprep(AT35,'[-]\s','-');
AT37=regexp(AT36,'\s*','split');
K3=T3(1)*str2double(AT37([1 2 3 4 5 6 7]));
K3=vpa(K3);

N4=feval(funN4,E,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
O4=(h/2)*sum(N4.*p);
NP4=feval(funN4,E1,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
OP4=(h/4)*sum(NP4.*p1);
I4=(4*O4-OP4)/3;
IS4=factor(I4,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);
IS4(1)=IS4(1)*r1_(1);
T4=subs(IS4,r1_(1),0);
AT40=vectorize(T4(2));
AT41=regexprep(AT40,'[.*_uw]1','');
AT42=regexprep(AT41,'[.*_uw]2','');
AT43=regexprep(AT42,'[.*_uw]3','');
AT44=regexprep(AT43,'[.*]','');
AT45=regexprep(AT44,'[+]\s',' ');
AT46=regexprep(AT45,'[-]\s','-');
AT47=regexp(AT46,'\s*','split');
K4=T4(1)*str2double(AT47(1:end));
K4=vpa(K4);

N5=feval(funN5,E,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
O5=(h/2)*sum(N5.*p);
NP5=feval(funN5,E1,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
OP5=(h/4)*sum(NP5.*p1);
I5=(4*O5-OP5)/3;
IS5=factor(I5,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);
T5=subs(IS5,r1_(1),0);
AT50=vectorize(T5(2));
AT51=regexprep(AT50,'[.*_uw]1','');
AT52=regexprep(AT51,'[.*_uw]2','');
AT53=regexprep(AT52,'[.*_uw]3','');
AT54=regexprep(AT53,'[.*]','');
AT55=regexprep(AT54,'[+]\s',' ');
AT56=regexprep(AT55,'[-]\s','-');
AT57=regexp(AT56,'\s*','split');
K5=T5(1)*str2double(AT57(1:end));
K5=vpa(K5);

N6=feval(funN6,E,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
O6=(h/2)*sum(N6.*p);
NP6=feval(funN6,E1,N,r1_(1),r1_(2),r1_(3),u1_(1),u1_(2),u1_(3),w(1),w(2),w(3));
OP6=(h/4)*sum(NP6.*p1);
I6=(4*O6-OP6)/3;
IS6=factor(I6,[u1_(1) u1_(2) u1_(3) w(1) w(2) w(3)]);
T6=subs(IS6,r1_(1),0);
AT60=vectorize(T6(2));
AT61=regexprep(AT60,'[.*_uw]1','');
AT62=regexprep(AT61,'[.*_uw]2','');
AT63=regexprep(AT62,'[.*_uw]3','');
AT64=regexprep(AT63,'[.*]','');

```

```

AT65=regexprep(AT64,'[+]\s',' ');
AT66=regexprep(AT65,'[-]\s','-');
AT67=regexp(AT66,'\s*','split');
K6=T6(1)*str2double(AT67([2 1 3 4 5 6]));
K6=vpa(K6);

N7=feval(funN7,E,F,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3));
O7=(h/2)*sum(N7.*p);
NP7=feval(funN7,E1,F1,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3))
;
OP7=(h/4)*sum(NP7.*p1);
I7=(4*O7-OP7)/3;
I7=vpa(I7);
AT70=vectorize(I7);
AT71=regexprep(AT70,['*_uw]1','');
AT72=regexprep(AT71,['*_uw]2','');
AT73=regexprep(AT72,['*_uw]3','');
AT74=regexprep(AT73,['*]\s*',' ');
AT75=regexprep(AT74,'[+]\s',' ');
AT76=regexprep(AT75,'[-]\s','-');
AT77=regexprep(AT76,['.\s]\s',' ');
AT78=regexp(AT77,'\s*','split');
K7=str2double(AT78([2 1 3 4]));

N8=feval(funN8,E,F,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3));
O8=(h/2)*sum(N8.*p);
NP8=feval(funN8,E1,F1,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3))
;
OP8=(h/4)*sum(NP8.*p1);
I8=(4*O8-OP8)/3;
I8=vpa(I8);
AT80=vectorize(I8);
AT81=regexprep(AT80,['*_uw]1','');
AT82=regexprep(AT81,['*_uw]2','');
AT83=regexprep(AT82,['*_uw]3','');
AT84=regexprep(AT83,['.*]\s',' ');
AT85=regexprep(AT84,'[+]\s',' ');
AT86=regexprep(AT85,'[-]\s','-');
AT87=regexprep(AT86,['.\s]\s',' ');
AT88=regexp(AT87,'\s*','split');
K8=str2double(AT88([3 2 1 4]));

N9=feval(funN9,E,F,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3));
O9=(h/2)*sum(N9.*p);
NP9=feval(funN9,E1,F1,P,Re2,alf1,r2_(1),r2_(2),r2_(3),u2_(1),u2_(2),u2_(3))
;
OP9=(h/4)*sum(NP9.*p1);
I9=(4*O9-OP9)/3;
I9=vpa(I9);
AT90=vectorize(I9);
AT91=regexprep(AT90,['*_uw]1','');
AT92=regexprep(AT91,['*_uw]2','');
AT93=regexprep(AT92,['*_uw]3','');
AT94=regexprep(AT93,['.*]\s',' ');
AT95=regexprep(AT94,'[+]\s',' ');
AT96=regexprep(AT95,'[-]\s','-');
AT97=regexprep(AT96,['.\s]\s',' ');
AT98=regexp(AT97,'\s*','split');
K9=str2double(AT98(1:end));

```

```

N10=feval(funN10,E,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
O10=(h/2)*sum(N10.*p);
NP10=feval(funN10,E1,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
OP10=(h/4)*sum(NP10.*p1);
I10=(4*O10-OP10)/3;
I10=vpa(I10);
AT100=vectorize(I10);
AT101=regexprep(AT100,['*_uw]1','');
AT102=regexprep(AT101,['*_uw]2','');
AT103=regexprep(AT102,['*_uw]3','');
AT104=regexprep(AT103,['*']\s',' ');
AT105=regexprep(AT104,['+']\s',' ');
AT106=regexprep(AT105,['-']\s',' -');
AT107=regexprep(AT106,['.\s']\s',' ');
AT108=regexp(AT107,'\s*','split');
K10=str2double(AT108([3 2 1 4]));

N11=feval(funN11,E,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
O11=(h/2)*sum(N11.*p);
NP11=feval(funN11,E1,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
OP11=(h/4)*sum(NP11.*p1);
I11=(4*O11-OP11)/3;
I11=vpa(I11);
AT110=vectorize(I11);
AT111=regexprep(AT110,['*_uw]1','');
AT112=regexprep(AT111,['*_uw]2','');
AT113=regexprep(AT112,['*_uw]3','');
AT114=regexprep(AT113,['*']\s',' ');
AT115=regexprep(AT114,['+']\s',' ');
AT116=regexprep(AT115,['-']\s',' -');
AT117=regexprep(AT116,['.\s']\s',' ');
AT118=regexp(AT117,'\s*','split');
K11=str2double(AT118(1:end));

N12=feval(funN12,E,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
O12=(h/2)*sum(N12.*p);
NP12=feval(funN12,E1,P,Re2,alf2,lamb2,r3_(1),r3_(2),r3_(3),u3_(1),u3_(2),u3_(3));
OP12=(h/4)*sum(NP12.*p1);
I12=(4*O12-OP12)/3;
I12=vpa(I12);
AT120=vectorize(I12);
AT121=regexprep(AT120,['*_uw]1','');
AT122=regexprep(AT121,['*_uw]2','');
AT123=regexprep(AT122,['*_uw]3','');
AT124=regexprep(AT123,['*']\s',' ');
AT125=regexprep(AT124,['+']\s',' ');
AT126=regexprep(AT125,['-']\s',' -');
AT127=regexprep(AT126,['.\s']\s',' ');
AT128=regexp(AT127,'\s*','split');
K12=str2double(AT128(1:end));

%% MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

% K es la matriz de rigidez global CON 1 ELEMENTO POR REGIÓN
% Las condiciones de contorno internas se autoeliminan, sólo se introdujo

```

```

% la condición w(3)=0
K_L=[K1(1), K1(2), K1(3), K1(4), 0, 0, 0, 0, 0;
      K2(1), K2(2), K2(3), K2(4), K2(5), 0, 0, 0, 0;
      K3(1)-1, K3(2)+4, K3(3)+K7(1)-3-3*Ep, K3(4), K3(5), K7(2)+4*Ep, K7(3)-
      Ep, 0, 0;
      0, 0, 0, K4(1), 0, 0, 0, 0, 0;
      K5(1), 0, K5(2), K5(3), K5(4), 0, 0, 0, 0;
      0, 0, K8(1), 0, 0, K8(2), K8(3), 0, 0;
      0, 0, K9(1)-1, 0, 0, K9(2)+4, K9(3)+K10(1)-3-3*lamb2-beta*alf2,
      K10(2)+4*lamb2, K10(3)-lamb2;
      0, 0, 0, 0, 0, 0, K11(1), K11(2), K11(3);
      0, 0, 0, 0, 0, 0, K12(1), K12(2), K12(3)];
%      1, -4, 3+3*Ep, 0, 0, -4*Ep, Ep, 0, 0;% Condición salto de esfuerzos
entre Micropolar y Newtoniano
%      0, 0, 1, 0, 0, -4, 3+3*lamb2+beta*alf2, -4*lamb2, lamb2]% condición
salto esfuerzos Newtoniano Poroso
% KI son los términos independientes de la matriz de rigidez local
% K_LI=[0;K2(7);K3(7)+K7(4);0;0;K8(4);K9(4)+K10(4);K11(4);K12(4)];
K_LI=[0;-K2(7);-K3(7)-K7(4);0;0;-K9(4);-K9(4)-K10(4);-K11(4);-K12(4)];

U=K_L\K_LI;
vpa(U)

%% Graficado de resultados
figure(1)
r=[0 r1_(2) r1_(3) r2_(2) r2_(3) r3_(2) r3_(3)];
plot(r,U([1 2 3 6 7 8 9]))
hold on

xlabel('R')
ylabel('u - Velocidad de flujo')
legend('alf1=3','alf1=5','alf1=7','alf1=9','alf1=11')

figure(2)
r=[0 0.5 1];
plot(r,[U(4) U(5) 0])
hold on

xlabel('R')
ylabel('w - Velocidad microrotacional')
legend('alf1=3','alf1=5','alf1=7','alf1=9','alf1=11')

```