1. Transformada de Fourier de tiempo continuo

Para la Transformada y Antitransformada de Fourier de tiempo continuo se tienen las siguientes definiciones:

1. Transformada de Fourier:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt}$$

2. Antitransformada de Fourier:

$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{x\left(t^{+}\right) + x\left(t^{-}\right)}{2} = \mathcal{F}\left\{X(jw)\right\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\left(jw\right)e^{jwt}dw}$$

En el cuadro 1.1 se tienen los pares básicos de la Transformada de Fourier de tiempo continuo.

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la Serie de Fourier
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkw_0t}$	$\displaystyle 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(w - kw_0\right)$	a_k
e^{jw_0t}	$2\pi\delta\left(w - w_0\right)$	$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = 0 & k \neq 1 \end{cases}$
$\cos\left(w_0t\right)$	$\pi\left(\delta\left(w - w_0\right) + \delta\left(w + w_0\right)\right)$	$\begin{cases} a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k = 0 & k \neq 1,\ k \neq -1 \end{cases}$
$\sin\left(w_0t\right)$	$\frac{\pi}{j}\left(\delta\left(w - w_0\right) - \delta\left(w + w_0\right)\right)$	$\begin{cases} a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j} \\ a_k = 0 & k \neq 1,\ k \neq -1 \end{cases}$
$x(t) = 1$	$2\pi\delta\left(w\right)$	$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = 0 & k \neq 0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & T_1 < \lvert t\rvert < \frac{T}{2} \end{cases},\ x(t+T) = x(t)$	$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(kw_0T_1)}{k}\delta\left(w - kw_0\right)$	$\frac{w_0T_1}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{kw_0T_1}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{kw_0T_1}{k\pi}\right)$
$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT\right)$	$\displaystyle\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0 & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin(wT_1)}{w}$	-
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(jw) = \begin{cases} 1 & \lvert w\rvert < W \\ 0 & \lvert w\rvert > W \end{cases}$	-
$\delta\left(t\right)$	1	-
$u\left(t\right)$	$\frac{1}{jw} + \pi\delta\left(w\right)$	-
$\delta\left(t - t_0\right)$	e^{-jwt_0}	-
$e^{-\alpha t}u\left(t\right),\ \mathcal{R}e\left(a\right) > 0$	$\frac{1}{\alpha + jw}$	-
$te^{-\alpha t}u\left(t\right),\ \mathcal{R}e\left(a\right) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + jw)^2}$	-
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u\left(t\right),\ \mathcal{R}e\left(a\right) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + jw)^n}$	-

Cuadro 1.1: Tabla de Transformadas de Fourier de tiempo continuo.

En la figura 1.1 se tienen algunas propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo continuo.

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$	$X(j\omega)$
	$y(t)$	$Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t}\, x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)\, Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \|X(j\omega)\| = \|X(-j\omega)\| \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$
	$x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega$$

Figura 1.1: Propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo continuo.

2. Transformada de Fourier de tiempo discreto

Para la Transformada y Antitransformada de Fourier de tiempo discreto se tienen las siguientes definiciones:

1. Transformada de Fourier:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{x\left[n\right]\right\} = X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[n\right] e^{-j\Omega n} \qquad \Omega \in [-\pi, \pi)}$$

2. Antitransformada de Fourier:

$$\boxed{\hat{x}\left[n\right] = x\left[n\right] = \mathcal{F}\left\{X(j\Omega)\right\}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(j\Omega\right) e^{j\Omega n} d\Omega}$$

En el cuadro 2.1 se tienen los pares básicos de la Transformada de Fourier de tiempo discreto.

Señal	Transformada de Fourier
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left[\Omega - \frac{2k\pi}{N}\right]$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right]$
$\cos\left[\Omega_0 n\right]$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta\left[\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right] + \delta\left[\Omega + \Omega_0 - 2\pi k\right]\right)$
$\sin\left[\Omega_0 n\right]$	$\frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta\left[\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right] + \delta\left[\Omega + \Omega_0 - 2\pi k\right]\right)$
$x\left[n\right] = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\Omega - 2\pi k\right]$
$x\left[n\right] = \begin{cases} 1 & \lvert n \rvert \leq N_1 \\ 0 & N_1 < \lvert n \rvert \leq \frac{N}{2} \end{cases},\ x\left[n+N\right] = x\left[n\right]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left[\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right]$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[n - kN\right]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right]$
$\alpha^n u\left[n\right] \quad \lvert \alpha \rvert < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$
$x\left[n\right] = \begin{cases} 1 & \lvert n \rvert \leq N_1 \\ 0 & \lvert n \rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin\left[\Omega\left(N_1 + 1/2\right)\right]}{\sin\left(\Omega/2\right)}$
$x\left[n\right] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$	$e^{-j\Omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\Omega N/2\right)}{\sin\left(\Omega/2\right)}$
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right),\ 0 < W < \pi$	$X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \lvert\Omega\rvert \leq W \\ 0 & W < \lvert\Omega\rvert \leq \pi \end{cases},\ X(j\Omega)$ periódica en 2π
$\delta\left[n\right]$	1
$u\left[n\right]$	$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta\left[\Omega - 2k\pi\right]$
$\delta\left[n - n_0\right]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$\left(n+1\right)\alpha^n u\left[n\right],\ \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\Omega}\right)^2}$
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\alpha^n u\left[n\right],\ \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\Omega}\right)^r}$

Cuadro 2.1: Tabla de Transformadas de Fourier de tiempo discreto.

En la figura 2.1 se tienen algunas propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo continuo.

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{matrix}\right\}$ periódica con periodo 2π
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Inversión en tiempo	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Expansión en tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n = \text{múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \neq \text{múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2p} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Diferenciación en tiempo	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = -\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Simetría para señales par reales	$x[n]$ real y par	$X(e^{j\omega})$ real y par
Simetría para señales impar reales	$x[n]$ real e impar	$X(e^{j\omega})$ puramente imaginaria e impar
Descomposición de señales reales en par e impar	$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_0[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	

Figura 2.1: Propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo discreto.

3. Transformada de Laplace

Para la Transformada y Antitransformada de Laplace se tienen las siguientes definiciones:

1. Transformada de Laplace:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{x(t)\right\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

2. Antitransformada de Laplace:

$$\boxed{x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

Se debe tener en cuenta, tanto para la transformada como la antitransformada, que para poder determinar unívocamente una señal es necesario también conocer su *región de convergencia (ROC)*. En el cuadro 3.1 se tienen los pares básicos de la Transformada de Laplace.

Señal	Transformada	ROC
$\delta(t)$	1	Toda s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{R}e\,(s) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\,(s) < 0$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\,(s) > -\alpha$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{R}e\,(s) < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\,(s) > -\alpha$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{R}e\,(s) < -\alpha$
$\delta\,(t-T)$	e^{-sT}	Toda s
$\cos\,(w_0 t)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$\sin\,(w_0 t)\,u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$\cosh\,(w_0 t)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2-w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$\sinh\,(w_0 t)\,u(t)$	$\frac{w_0}{s^2-w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$
$\cos\,(w_0 t)\,u(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > -\alpha$
$\sin\,(w_0 t)\,u(t)e^{-\alpha t}$	$\frac{w_0}{(s+\alpha)^2+w_0^2}$	$\mathcal{R}e\,(s) > -\alpha$
$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	Toda s
$u_{-n}(t) = \underbrace{(u(t) \star \cdots \star u(t))}_{n \text{ veces}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{R}e\,(s) > 0$

Cuadro 3.1: Tabla de Transformadas de Laplace.

En la figura 3.1 se tienen algunas propiedades de la Transformada de Laplace.

Sección	Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	ROC
		$x(t)$	$X(s)$	R
		$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
		$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s - s_0$ está en R)
9.5.4	Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
9.5.5	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.7	Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.8	Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}$
			Teoremas del valor inicial y final	
9.5.10	Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces			

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Figura 3.1: Propiedades de la Transformada de Laplace.

4. Transformada Z

Para la Transformada y Antitransformada Z se tienen las siguientes definiciones:

1. *Transformada Z:*

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}\left\{x\left[n\right]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left[n\right] z^{-n}}$$

2. *Antitransformada Z:*

$$\boxed{x\left[n\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

Se debe tener en cuenta, tanto para la transformada como la antitransformada, que para poder determinar unívocamente una señal es necesario también conocer su *región de convergencia (ROC)*. En el cuadro 4.1 se tienen los pares básicos de la Transformada de Laplace.

Señal	Transformada	ROC
$\delta[n]$	1	Todo z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z excepto el 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
$\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$\cos(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1-\cos(w_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(w_0)\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{\sin(w_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(w_0)\, z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$r^n\cos(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{1-r\cos(w_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(w_0)\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$r^n\sin(w_0 n)\, u[n]$	$\dfrac{r\sin(w_0)\, z^{-1}}{1-2r\cos(w_0)\, z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
$\begin{cases}\alpha^n & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$	$\dfrac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > 0$

Cuadro 4.1: Tabla de Transformadas Z.

En la figura 4.1 se tienen algunas propiedades de la Transformada Z.

Número de propiedad	Referencia de sección	Secuencia	Transformada	RDC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contiene $R_{x_1}\cap R_{x_2}$
2	3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, excepto por la posible adición o eliminación del origen o del ∞
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contiene R_x
7		$Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contiene R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contiene $R_{x_1}\cap R_{x_2}$

Figura 4.1: Propiedades de la Transformada Z.