

Notas de Señales y Sistemas

Nicolás Zorzano

Índice

1. Introducción	3
2. Señales y Sistemas	4
2.1. Señales de energía y de potencia	4
2.2. Señales Periódicas	4
2.2.1. Señales pares e impares	4
2.2.2. Señales periódicas continuas exponenciales	5
2.2.3. Señales periódicas discretas exponenciales	5
2.3. Funciones impulso unitario y escalón unitario	6
2.3.1. Funciones impulso unitario y escalón unitario discretas	6
2.3.2. Funciones impulso unitario y escalón unitario continuas	7
2.4. Propiedades de los sistemas	9
2.4.1. Tipos de sistemas	9
2.4.2. Propiedades	10
3. Sistemas LTI	10
3.1. Convolución	10
3.1.1. Convolución discreta	10
3.1.2. Convolución continua	11
3.1.3. Propiedades de la convolución	12
3.1.4. Convoluciones importantes	12
3.2. Memoria en sistemas LTI	14
3.3. Invertibilidad de sistemas LTI	14
3.4. Causalidad de sistemas LTI	14
3.5. Estabilidad de sistemas LTI	15
3.6. Respuesta al escalón unitario de un sistema LTI	15
3.7. Sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y en diferencias	15
3.7.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes	16
3.7.2. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes	16
4. Series de Fourier	17
4.1. Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas	17
4.2. Representación en series de Fourier de señales periódicas continuas	17
4.2.1. Convergencia de las Series de Fourier	18
4.2.2. Propiedades de la Serie Continua de Fourier	20
4.3. Representación en Series de Fourier de señales periódicas discretas	21
4.3.1. Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente	22
4.3.2. Determinación de la representación en Serie de Fourier	22
4.3.3. Propiedades de la serie discreta de Fourier	22
4.4. Series de Fourier y sistemas LTI	23
5. Transformada de Fourier de Tiempo Continuo	24
5.1. Convergencia de la Transformada de Fourier	25
5.2. Propiedades	25
5.3. Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales	27

6. Transformada de Fourier de Tiempo Discreto	28
6.1. Propiedades	28
6.2. Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias	31
7. Muestreo	31
7.1. Representación de una señal continua mediante muestreo	31
7.1.1. Teorema de Muestreo	32
7.1.2. Muestreo con un retenedor de orden cero	33
7.1.3. Interpolación	34
7.2. Muestreo de señales discretas	35
7.2.1. Muestreo con tren de impulsos	35
7.2.2. Decimación en tiempo discreto y sobremuestreo	36
8. Transformada Discreta de Fourier (DFT)	37
8.1. Representación de secuencias periódicas	37
8.2. Muestreo de la Transformada de Fourier	37
8.3. Representación de Fourier de secuencias de duración finita	38
8.4. Propiedades de la DFT	39
9. Transformada de Laplace	42
9.1. ROC para la Transformada de Laplace	43
9.2. Transformada Inversa de Laplace	44
9.3. Evaluación geométrica de la Transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros	45
9.4. Propiedades de la Transformada de Laplace	45
9.5. Caracterización de sistemas LTI usando la Transformada de Laplace	47
9.5.1. Causalidad	47
9.5.2. Estabilidad	47
9.6. Transformada Unilateral de Laplace	48
9.6.1. Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace	48
10. Transformada Z	49
10.1. Propiedades de la ROC	50
10.2. Transformada Z inversa	50
10.3. Propiedades de la Transformada Z	50
10.4. Caracterización de sistemas LTI usando la Transformada Z	52
10.4.1. Estabilidad	52
10.4.2. Causalidad	53
10.5. Transformada Z unilateral	53
A. Fracciones simples	54
B. Muestreo e Interpolación	54
C. Sobremuestreo y submuestreo	56
D. Convolución Circular y Convolución Lineal	59

1. Introducción

¿Qué es una señal? Son funciones de una o mas variables independientes que contienen información acerca del comportamiento o naturaleza de algún fenómeno.

¿Qué es un sistema? Es una transformación que recibe señales de entrada, provocando determinadas señales de salida de acuerdo con una ley determinada.

Tanto las señales como los sistemas, pueden ser modelados con modelos matemáticos, de forma tal que es posible abstraerse del problema físico que se desea analizar.

El modelo matemático para una señal (de tiempo continuo o discreto), es el siguiente:

$$\begin{cases} x(t) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} & \text{Señal de tiempo continuo} \\ x[n] : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R} & \text{Señal de tiempo discreto} \end{cases}$$

Las señales también se puede clasificar como:

- Señales determinísticas: Cada valor de la señal para cada t o n , según corresponda, esta perfectamente determinado a través de una función matemática o una tabla de valores.
- Señales estocásticas: El valor de la señal para cada t o n , según corresponda, no esta perfectamente determinado y obedece a una ley de probabilidad. Se puede decir, que una señal estocástica es un conjunto de señales, todas perfectamente realizables, por un esquema subyacente de probabilidades.

Para poder formalizar matemáticamente a las señales, es necesario poder definir las dentro de espacios vectoriales, por lo que deben cumplir propiedades concretas.

Teorema: Sea \mathcal{H} un conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que además satisfacen:

1. Si $f(t) \in \mathcal{H}$ entonces $\alpha f(t) \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
2. Si $f(t)$ y $g(t)$ pertenecen a \mathcal{H} entonces $f(t) + g(t)$ pertenece a \mathcal{H} .

Se dice entonces que \mathcal{H} es un espacio vectorial estructurado sobre \mathbb{R} . En caso de tener señales de tiempo discreto, la definición sigue valiendo.

Como se está trabajando con un espacio vectorial, es posible definir un producto interno.

Definición: Decimos que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto interno sobre el espacio vectorial \mathcal{H} compuesto por funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si satisface:

1. El producto es conmutativo: $\langle f(t), g(t) \rangle = \langle g(t), f(t) \rangle$
2. El producto es lineal: $\langle \alpha f(t), g(t) \rangle = \alpha \langle f(t), g(t) \rangle$
3. Se puede definir una norma: $\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle > 0$. La única manera de que la norma sea cero, es que se cumpla que $f(t) = 0 \forall t$.
4. Ortogonalidad: Se dirá que dos señales son ortogonales siempre y cuando su producto interno sea nulo.

Con estas definiciones, se define el producto interno para las señales como:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^T f(t)g^*(t)dt$$

Nota: En caso de estar trabajando con funciones reales, el conjugado no provoca ninguna modificación sobre la función.

Una base ortonormal definida para este espacio vectorial (y este producto interno) es:

$$\left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{-2jw_0t}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{-jw_0t}, \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{jw_0t}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{2jw_0t}, \dots \right\} \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Como se dijo anteriormente, los sistemas consisten en transformaciones. Desde el punto de vista matemático formal podemos definir a un sistema como a un operador que opera entre dos espacios de señales, por lo tanto se tiene la siguiente definición.

Definición: Un sistema cuyas entradas son señales en el espacio vectorial \mathcal{H}_1 y sus salidas son señales en el espacio vectorial \mathcal{H}_2 , se puede representar en forma matemática por un $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. En forma compacta la acción del sistema representado por \mathcal{T} se puede escribir como:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

donde $x(t) \in \mathcal{H}_1$ es la señal de entrada e $y(t) \in \mathcal{H}_2$ es la señal de salida. Para el análisis de señales de tiempo discreto (o mixto) la definición es la misma.

2. Señales y Sistemas

2.1. Señales de energía y de potencia

La energía de una señal (continua y discreta) en un intervalo de tiempo, se obtiene mediante:

$$\begin{cases} E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt & \text{Energía de una señal continua para } t_1 < t < t_2 \\ E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 & \text{Energía de una señal discreta para } n_1 < n < n_2 \end{cases}$$

A partir de estas definiciones, es posible obtener la potencia de las señales:

$$\begin{cases} P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt & \text{Potencia de una señal continua para } t_1 < t < t_2 \\ P = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 & \text{Potencia de una señal discreta para } n_1 < n < n_2 \end{cases}$$

Dependiendo de los límites sobre los que se calcule la energía y la potencia, se obtendrán distintos resultados, permitiendo agrupar a las señales en tres clases:

1. *Señales con energía total finita:* Al hacer tender los límites hacia infinito ($t_1 \rightarrow -\infty$ y $t_2 \rightarrow \infty$) la energía debe ser finita $E_\infty < \infty$. Estas señales deben tener potencia promedio cero, ya que se debe cumplir que:

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_\infty}{t} = 0$$

2. *Señales con potencia promedio finita:* Debido a que $P_\infty > 0$, necesariamente $E_\infty = \infty$.
3. Señales donde ni la potencia ni la energía son finitas.

2.2. Señales Periódicas

Las señales periódicas son aquellas que no se modifican ante un corrimiento de tiempo T (o N para las discretas), siempre y cuando no se trate de señales constantes. Matemáticamente se tiene que:

$$\begin{cases} x(t) = x(t + T) \\ x[n] = x[n + N] \end{cases}$$

De esta manera, se dice que la señal es periódica con periodo T .

2.2.1. Señales pares e impares

Una señal se considera par si se cumple que:

$$\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ x[n] = x[-n] \end{cases}$$

Por otra parte, una señal es impar si se cumple que:

$$\begin{cases} x(t) = -x(-t) \\ x[n] = -x[-n] \end{cases}$$

Con estas definiciones, es posible separar cualquier señal continua o discreta en su parte par o impar:

$$\begin{cases} \mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) & \text{Señal par} \\ \mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) & \text{Señal impar} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{E}v\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) & \text{Señal par} \\ \mathcal{O}d\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) & \text{Señal impar} \end{cases}$$

2.2.2. Señales periódicas continuas exponenciales

Una señal exponencial continua es de la forma:

$$x(t) = e^{\alpha t}$$

Dependiendo del valor que tome α se tendrán distintos tipos de señales. Para los casos en que α toma valores reales, se tendrá exponenciales reales, las cuales puede ser crecientes si $\alpha > 0$ o decrecientes si $\alpha < 0$. Un caso mas importante, se produce cuando α toma valores complejos, donde en estos casos se obtienen señales periódicas dadas por la identidad de Euler.

$$e^{\pm jw_0 t} = \cos(w_0 t) \pm j \sin(w_0 t)$$

Para poder demostrar que se trata de una señal periódica, se debe cumplir:

$$e^{jw_0 t} = e^{jw_0(t+T)} = e^{jw_0 t} e^{jw_0 T}$$

Para que esta señal sea periódica entonces se debe cumplir que $w_0 T_0 = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, por lo que se puede deducir que el periodo fundamental es:

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$$

Se puede definir entonces las siguientes propiedades sobre la periodicidad de estas señales:

1. Mientras mayor sea w_0 , mayor será la velocidad de oscilación de la señal.
2. Estas señales son periódicas para cualquier valor de w_0 .

Las señales periódicas complejas son ejemplos de señales con energía total infinita pero potencia promedio finita. Si calculamos la energía y la potencia para un periodo se tiene:

$$\begin{cases} E_{\text{periodo}} = \int_0^{T_0} |e^{jw_0 t}|^2 dt = T_0 \\ P_{\text{periodo}} = \frac{E_{\text{periodo}}}{T_0} = 1 \end{cases}$$

De esta forma, si se calcula la energía para $-\infty < t < \infty$ se observará que su valor no será finito. Sin embargo, como la potencia promedio por cada periodo es 1, al promediar la potencia en los infinitos ciclos, se obtendrá el mismo resultado, por lo que la potencia total promedio también vale 1.

2.2.3. Señales periódicas discretas exponenciales

Una señal exponencial discreta es de la forma:

$$x[n] = e^{\alpha n}$$

Al igual que con las señales continuas, para casos donde α toma valores reales, se tendrán exponenciales reales que pueden ser crecientes o decrecientes. Por otra parte, se tendrán señales periódicas en aquellos casos en donde α tome valores complejos¹:

$$x[n] = e^{jw_0 n}$$

Como sucedía con las exponenciales continuas, las exponenciales discretas también pertenecen al grupo de señales con energía total no finita, pero potencia total finita.

Este tipo de señales presentan algunas diferencias importantes con respecto a las exponenciales complejas continuas. Por ejemplo, si modificamos la frecuencia de oscilación en un valor de 2π se tiene:

$$e^{j(w_0+2\pi)n} = e^{jw_0 n} e^{j2\pi n} = e^{jw_0 n}$$

De esta forma, se puede observar que la exponencial de frecuencia $w_0 + 2\pi$ es la misma que aquella con frecuencia w_0 , cosa que no ocurre con las continuas ya que para cada valor de w_0 se tiene una señal diferente. Por lo tanto, a medida que se va aumentando w_0 de forma que el $0 < \Delta w < \pi$, se verá un incremento en la frecuencia de oscilación. Este aumento se

¹Se seguirá cumpliendo la identidad de Euler para las señales discretas.

verá hasta que $\Delta w = \pi$, ya que en el intervalo $\pi < \Delta w < 2\pi$ se observará una disminución de la frecuencia de oscilación, hasta llegar al valor de $\Delta w = 2\pi$ donde el proceso volverá a comenzar, ya que se obtiene nuevamente la señal inicial. Por esta razón es que las señales de alta frecuencia poseen frecuencias cercanas a múltiplos impares de π y las señales de baja frecuencia son cercanas a $w_0 = 0$ o $w_0 = 2\pi$. En particular, la señal discreta de máxima frecuencia se encuentra para $w_0 = \pi$:

$$e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

En cuanto a la periodicidad, para que una señal exponencial compleja discreta sea periódica se debe cumplir que:

$$e^{jw_0 n} = e^{jw_0(n+N)} = e^{jw_0 n} \underbrace{e^{jw_0 N}}_1$$

Para que esta condición se cumpla, se tiene que dar que $w_0 N = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, es decir:

$$\frac{w_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \quad m, N \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}$$

Por lo tanto, para que la señal sea periódica el cociente $\frac{w_0}{2\pi}$ debe ser un número racional, y es no periódica en los demás casos.

En la figura 2.1 se puede ver una tabla con las comparaciones entre las señales periódicas continuas y discretas.

$e^{j\omega_0 t}$ (CONTINUA)	$e^{j\omega_0 n}$ (DISCRETA)
Señales distintas para distintos valores de ω_0	Señales idénticas para valores de ω_0 separados por múltiplo de 2π
Periódica para cualquier elección de ω_0	Periódica sólo si $\omega_0 = 2\pi m/N$ para algunos enteros $N > 0$ y m .
Frecuencia fundamental ω_0	Frecuencia fundamental* ω_0/m
Periodo fundamental $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Periodo fundamental* $\omega_0 = 0$: indefinido $\omega_0 \neq 0$: $m \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$

* Supone que m y N no tienen ningún factor en común.

Figura 2.1: Cuadro comparativo sobre las diferencias entre las señales exponenciales complejas continuas y discretas.

2.3. Funciones impulso unitario y escalón unitario

2.3.1. Funciones impulso unitario y escalón unitario discretas

Delta de Dirac

Esta función se puede definir como:

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$

En la figura 2.2 se tiene un gráfico de la delta de Dirac.

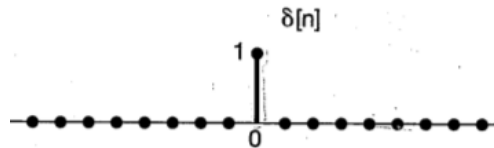


Figura 2.2: Delta de Dirac discreta o impulso unitario discreto.

Gracias a esta definición de impulso unitario, se puede definir cualquier señal como una superposición de impulsos unitarios (multiplicados cada uno por su correspondiente valor) corridos un determinado n , siendo posible utilizar la siguiente propiedad:

$$x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]$$

Función escalón

La función escalón (que se puede ver en la figura 2.3) se define como:

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 1 & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases}$$

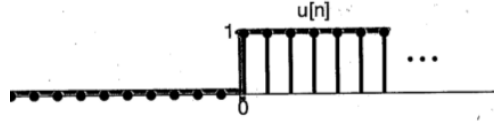


Figura 2.3: Función escalón discreta.

Las relaciones entre la función escalón y el impulso unitario son:

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

2.3.2. Funciones impulso unitario y escalón unitario continuas

Delta de Dirac

A diferencia del impulso unitario discreto, el valor de la delta de Dirac en t_0 se encuentra indeterminado. Por esta razón, se dice que no es una función sino que una distribución. Lo que caracteriza a la delta de Dirac no es su valor en t_0 , sino que el “área” encerrada, ya que se considera que esta distribución acumula toda su masa en un único punto. De esta forma se puede definir que:

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1$$

La delta de Dirac se encuentra relacionada con la “derivada” de la función escalón continua, pero eso se verá en el ítem siguiente. Al igual que con la delta discreta, el impulso unitario continuo presenta una propiedad de muestreo muy importante:

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Observación: Una propiedad que posee esta distribución es:

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \delta(t)$$

Función escalón

La función escalón continua, es muy similar a la discreta, definiéndose como:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

En este caso, la relación entre la función escalón y el impulso unitario es:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(r) dr$$

Como se dijo anteriormente, es posible definir a la $\delta(t)$ como la derivada de la $u(t)$. Para que esto tenga sentido, se debe hacer una especie de zoom a la función escalón tomando un Δt sobre el cual la variación de $u(t)$ no sea infinito. De esta forma, el área bajo esta curva tomará el valor que caracterizará a la $\delta(t)$, la cual se obtendrá tomando un $\Delta t \rightarrow 0$. En la figura 2.4 se tienen los gráficos que describen esta situación.

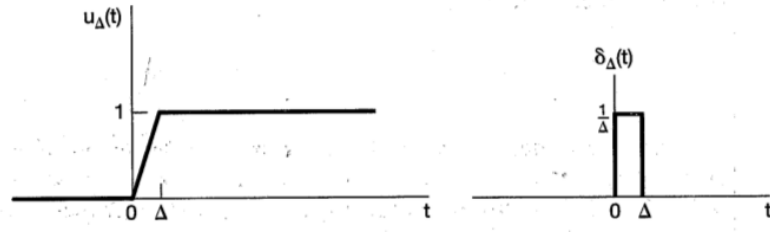


Figura 2.4: Obtención de la delta de Dirac como una derivada de la función escalón.

Función doblete

A la derivada de la función impulso unitario, se la conoce como *doblete unitario* $u_1(t)$. Para los sistemas LTI, se cumple que:

$$(x(t) \star u_1(t)) = \frac{dx(t)}{dt}$$

para cualquier señal $x(t)$. A partir de esta definición, es posible obtener la derivada k-ésima de la función impulso. Para el *triplete* se tiene por ejemplo:

$$(x(t) \star u_2(t)) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) = (x(t) \star u_1(t) \star u_1(t)) \rightarrow u_2(t) = (u_1(t) \star u_1(t))$$

De manera general, la derivada k-ésima de la función impulso se obtiene como:

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) \star u_1(t) \star \dots \star u_1(t)}_{k \text{ veces}}$$

y a partir de esta función, es posible obtener la derivada k-ésima de cualquier señal en el punto:

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} = (x(t) \star u_k(t))$$

Gráficamente, la función doblete corresponde a una flecha hacia arriba y otra hacia abajo, el triplete corresponde a dos flechas hacia arriba y una hacia abajo, y así sucesivamente.

Función rampa unitaria

Así como se tienen funciones diferenciadoras, se pueden definir señales que representan integrales sucesivas de la función impulso unitario. Como primer elemento, tenemos a la ya definida función escalón, con la cual se tiene que:

$$(x(t) \star u(t)) = \int_{-\infty}^t x(r) dr$$

A partir de esto, es posible definir un sistema que consiste en la cascada de dos integradores, cuya respuesta se denota $u_{-2}(t)$ y se lo conoce como *rampa unitaria*:

$$u_{-2}(t) = (u(t) \star u(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r) u(t-r) dr = \int_0^t u(t) dr = tu(t)$$

Mediante esta función, es posible obtener:

$$(x(t) \star u_{-2}(t)) = (x(t) \star u(t) \star u(t)) = \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma) d\sigma \right) d\tau$$

En el caso general, la función integradora de orden k es:

$$u_{-k}(t) = \underbrace{u(t) \star \dots \star u(t)}_{k \text{ veces}} = \int_{-\infty}^t u_{-(k-1)}(\tau) d\tau \rightarrow u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} u(t)$$

Por cuestiones de notación, se establece que:

$$\begin{cases} \delta(t) = u_0(t) \\ u(t) = u_{-1}(t) \end{cases}$$

De esta forma, si se ponen en cascada dos sistemas cualesquiera (derivador o integrador) se obtiene de forma general:

$$(u_k(t) \star u_r(t)) = u_{k+r}(t)$$

Por lo tanto, dependiendo de los signos y valores de k y r , se tendrá un sistema integrador o derivador de un orden determinado.

2.4. Propiedades de los sistemas

2.4.1. Tipos de sistemas

Sistemas con memoria

Se dice que un sistema *no posee memoria* si su salida para cada valor de la variable independiente en un tiempo dado depende solamente de la entrada en ese mismo tiempo. De forma general, el concepto de memoria en un sistema corresponde a la presencia de un mecanismo en el sistema que mantiene o almacena información sobre los valores en instantes diferentes al tiempo actual.

Sistemas invertibles

Si a un sistema al que se le introduce una señal $x(t)$ es *invertible*, entonces existe un *sistema inverso* tal que, cuando está en cascada con el sistema original, produce una salida $w(t)$ igual a la entrada original $x(t)$. Este resultado se encuentra ejemplificado en la figura 2.5.

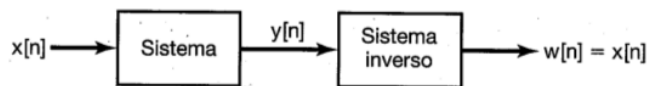


Figura 2.5: Ejemplo de sistema invertible.

Causalidad

Un sistema es *causal* si su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de entrada en el momento presente y en el pasado (este sistema también se lo conoce como *no anticipativo*). De esta forma, los sistemas sin memoria son causales, ya que solo dependen de valores presentes.

Un sistema se dice *no causal* cuando su salida puede depender de valores del pasado, del presente y del futuro.

Un sistema se dice *anticausal* cuando su salida depende únicamente del presente y del futuro.

Estabilidad

Un sistema se dice que es *estable* cuando ante estímulos acotados en la entrada, las respuestas a la salida también son acotadas. Es decir que las señales de salida serán finitas si a la entrada se tiene una señal finita. Este criterio se lo conoce como BIBO estable (Bounded Input - Bounded Output).

Invariancia en el tiempo

Un sistema es *invariante en el tiempo* si ante un corrimiento en el tiempo de la señal de entrada, se refleja en un corrimiento en el tiempo de igual magnitud en la señal de salida. Matemáticamente esto se traduce a:

$$x(t - t_0) \implies y(t - t_0)$$

Propiedad: Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, el sistema dado por $y(t) = f(x(t))$ es invariante en el tiempo.

Linealidad

Se dice que un sistema es *lineal* si cumple con las siguientes propiedades:

1. Aditividad: Para dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que producen $y_1(t)$ e $y_2(t)$ respectivamente al aplicar el sistema \mathcal{T} , se tiene que:

$$\mathcal{T}(x_1(t) + x_2(t)) = \mathcal{T}(x_1(t)) + \mathcal{T}(x_2(t)) = y_1(t) + y_2(t)$$

2. Homogeneidad: Sea $x(t)$ la señal de entrada al sistema \mathcal{T} , dando como salida $y(t)$, y sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\mathcal{T}(\alpha x(t)) = \alpha \mathcal{T}(x(t)) = \alpha y(t)$$

Si el sistema cumple con estas dos propiedades, se tiene que el sistema cumple con el principio de superposición:

$$\mathcal{T}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n \mathcal{T}(\alpha_k x_k(t)) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(t)$$

Bajo estas condiciones, se puede afirmar que se trata de un sistema lineal.

Cuando se tiene sistemas que son invariantes en el tiempo y lineales, se está en presencia de *sistemas LTI* (Linear Time-Invariant).

Existen también una clase de sistemas que se conocen como *sistemas incrementalmente lineales*, que corresponden a sistemas que responden de manera lineal, pero que su entrada es diferente de nula en cero. Por ejemplo el sistema $y(t) = x(t) + 2$ no es lineal porque $y(0) \neq 0$, pero es incrementalmente lineal porque la diferencia entre dos entradas cualesquiera es una función lineal.

2.4.2. Propiedades

1. Como se verá mas adelante, la conexión en *serie o cascada* de sistemas LTI, se puede representar como:

$$y(t) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x(t))) = (g_1(t) \star g_2(t) \star x(t))$$

donde g_1 y g_2 corresponden con las respectivas transformaciones (las cuales más adelante se verá que corresponden con la respuesta al impulso unitario). Debido a que la operación de convolución es lineal, el resultado de la convolución de dos sistemas LTI, es otro sistema LTI. Esto permite unir o separar distintos bloques, sin nunca perder las propiedades de los sistemas LTI.

2. Si se conectan en cascada dos sistemas invariantes en el tiempo, se lo puede pensar como un nuevo sistema equivalente, el cual también es invariante en el tiempo.
3. Cuando se tienen sistemas LTI, el orden de conexión de éstos no modifica la señal de salida:

$$y(t) = (g_1(t) \star g_2(t) \star x(t)) = (g_2(t) \star g_1(t) \star x(t))$$

Esta propiedad no se cumple para sistemas que no son LTI.

3. Sistemas LTI

Como se mencionó en la sección anterior, la utilización del impulso unitario permite la representación de cualquier tipo de señal como una combinación de impulsos desplazados. Este hecho, junto con las propiedades de superposición e invariancia en el tiempo, permiten caracterizar cualquier sistema LTI en términos de su respuesta al impulso unitario. Para poder realizar esto, es necesario utilizar la convolución como herramienta principal.

3.1. Convolución

3.1.1. Convolución discreta

Una de las propiedades importantes del impulso unitario discreto es que permite obtener el valor de una señal para un determinado instante, siguiendo la siguiente relación:

$$\delta[n - n_0] x[n] = \delta[n - n_0] x[n_0]$$

De esta forma, es posible recrear la señal como una combinación lineal de deltas desplazadas:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Por lo tanto, se puede deducir que la respuesta de un sistema lineal a una señal de entrada $x[n]$ será la superposición de respuestas escaladas del sistema a cada uno de estos impulsos desplazados. Además, la propiedad de invariancia en el tiempo muestra que las respuestas de un sistema invariante a los impulsos unitarios desplazados son simplemente versiones desplazadas de la respuesta al impulso unitario sin desplazar. Se puede entonces realizar el siguiente desarrollo:

$$\begin{cases} y[n] = \mathcal{T}[x[n]] \rightarrow y[n-k] = \mathcal{T}[x[n-k]] \\ h[n] = \mathcal{T}[\delta[n]] \rightarrow h[n-k] = \mathcal{T}[\delta[n-k]] \end{cases} \rightarrow y[n] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]\right]$$

Debido a que el sistema es lineal, es posible extraer la sumatoria fuera de la transformación \mathcal{T} , y lo mismo ocurre con cada uno de los términos $x[k]$ ya que se trata de una constante para cada n . Se tiene entonces:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\mathcal{T}[\delta[n-k]]}_{h[n-k]}$$

Finalmente, se obtiene como resultado que la salida de un sistema LTI ante una señal de entrada $x[n]$ queda caracterizada por la convolución discreta entre dicha señal de entrada y la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = (x[n] \star h[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad \text{Convolución Discreta}$$

De aquí se desprende que un sistema LTI se caracteriza completamente por su respuesta a una sola señal, es decir, su respuesta al impulso unitario.

3.1.2. Convolución continua

De manera análoga a lo realizado para las señales discretas, se desea obtener una caracterización completa de un sistema LTI continuo en términos de su respuesta al impulso unitario. Para esto se debe utilizar la propiedad ya descrita anteriormente:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

De esta forma, se puede escribir a la señal $x(t)$ como una sumatoria continua de deltas de Dirac desplazadas (que va a converger a una integral) multiplicadas por el factor correspondiente:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(r)\delta(t-r)dr$$

Por lo tanto, al introducir esta señal como una entrada a un sistema LTI, debido a las propiedades que éste posee, se observará:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{T}(x(t)) \rightarrow y(t-t_0) = \mathcal{T}(x(t-t_0)) \\ h(t) = \mathcal{T}(\delta(t)) \rightarrow h(t-t_0) = \mathcal{T}(\delta(t-t_0)) \end{cases} \rightarrow y(t) = \mathcal{T}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(r)\delta(t-r)dr\right)$$

Nuevamente, como se trata de un sistema lineal, al aplicar el operador \mathcal{T} es posible introducirlo dentro de la integral, así como también sacar fuera de éste el término $x(r)$, por lo que el operador sólo aplica sobre la delta de Dirac.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(r) \underbrace{\mathcal{T}(\delta(t-r))}_{h(t-r)}dr$$

De esta forma, se obtiene la expresión de la convolución continua:

$$y(t) = (x(t) \star h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(r)h(t-r)dr \quad \text{Convolución Continua}$$

Al igual que en el caso discreto, es posible inferir que un sistema LTI se caracteriza completamente por su respuesta al impulso unitario.

3.1.3. Propiedades de la convolución

Propiedad conmutativa

Para demostrar que se trata de una operación conmutativa, sólo es necesario un cambio de variable. En el caso continuo se tiene:

$$(h_1(t) \star h_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(r)h_2(t-r)dr$$

Con el cambio de variable $x = t - r$, se tiene que $dx = -dr$. Sin embargo, como x y r tienen signos opuestos, también deben invertirse los límites de integración, lo que permite eliminar el signo de dr . Se tiene entonces:

$$(h_1(t) \star h_2(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-x)h_2(x)dx = (h_2(t) \star h_1(t))$$

Esto demuestra que se trata de una operación conmutativa.

Propiedad distributiva

Debido a que la operación de convolución utiliza integrales, las cuales son operadores lineales que admiten la distribución, lo mismo ocurre con la convolución:

$$(g_1(t) \star (g_2(t) + g_3(t))) = (g_1(t) \star g_2(t)) + (g_1(t) \star g_3(t))$$

Propiedad asociativa

El orden en que se realiza la convolución, no afecta el resultado:

$$(g_1 \star g_2) \star g_3 = g_1 \star (g_2 \star g_3)$$

3.1.4. Convoluciones importantes

Función barrera con la función impulso

En la figura 3.1 se tiene el resultado de esta convolución.

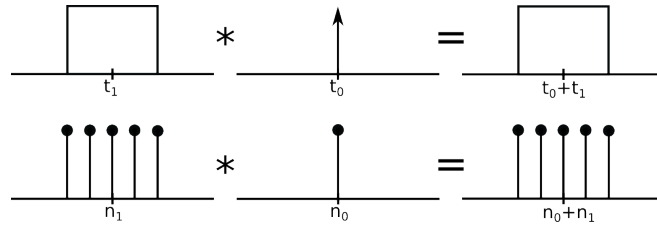


Figura 3.1: Convolución continua y discreta para una función barrera y un impulso unitario.

Se puede ver en la figura 3.1 que el resultado de esta operación, es equivalente a un corrimiento espacial de la función barrera. Matemáticamente, para el caso discreto, este resultado se obtiene como:

$$\begin{cases} f[n] = u[n] - u[n - n_1] & n_1 > 0 \\ g[n] = \delta[n - n_0] \end{cases}$$

Se puede ver que $f[n]$ es una función barrera con un extremo en cero y el otro en n_1 . Al realizar la convolución se tiene:

$$(g[n] \star f[n]) = (\delta[n - n_0] \star u[n]) - (\delta[n - n_0] \star u[n - n_1]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n - n_0 - k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k - n_1] \delta[n - n_0 - k]$$

Se puede ver que la primer sumatoria es distinta de cero para los casos en que $k > 0$ y que $k = n - n_0$. En cuanto a la segunda sumatoria, se tendrán resultados no nulos para $k > n_1$ y para $k = n - n_0$. El resultado de esta operación entonces es:

$$(g[n] \star f[n]) = u[n - n_0] - u[n - n_0 - n_1]$$

Este resultado se corresponde con los de la figura 3.1 (a excepción de los subíndices, ya que por comodidad se tomaron de manera diferente). Para el caso continuo se resuelve de la misma manera, pero se deben utilizar integrales.

Función barrera con un tren de pulsos

La convolución de la figura 3.2 es similar a la de la figura 3.1, pero ahora se tienen infinitas funciones impulso equiespaciadas.

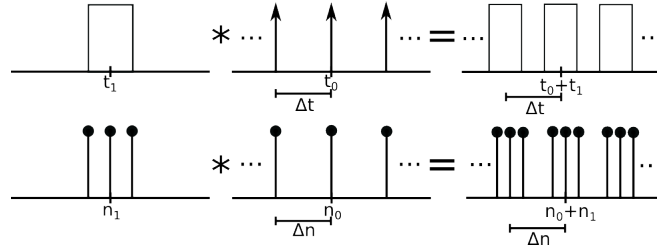


Figura 3.2: Convolución de un tren de impulsos unitarios con una función escalón.

Debido a que la convolución es distributiva, al realizar la convolución entre la función barrera con el tren de impulsos unitarios (es decir una sumatoria de impulsos desplazados), se tiene como resultado infinitas copias de la función barrera desplazadas cada una a la posición que le asigna cada delta en particular. Para obtener este resultado matemáticamente, lo que se debe hacer es aplicar el desarrollo obtenido para una única delta, obtenerlo para cada delta desplazada y sumar los resultados.

Dos funciones barrera

En la figura 3.3 se tiene la convolución de dos barreras.

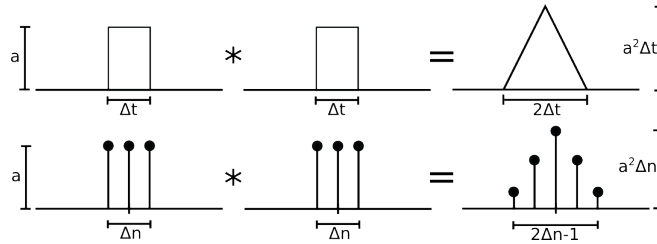


Figura 3.3: Convolución de dos funciones barrera.

Para realizar el desarrollo matemático se tomarán las siguientes señales:

$$\begin{cases} x_1(t) = A(u(t - t_0) - u(t - t_1)) & t_1 > t_0 \\ x_2(t) = B(u(t - t_2) - u(t - t_3)) & t_3 > t_2 \end{cases}$$

Debido a que la convolución admite la distribución, esto se puede separar en cuatro convoluciones diferentes. Para calcularlas se debe realizar de la siguiente manera:

$$(u(t - t_0) \star u(t - t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r - t_0) u(t - t_2 - r) dr = \int_{t_0}^{t-t_2} u(t - t_0 - t_2) dr = (t - t_0 - t_2) u(t - t_0 - t_2)$$

Luego de desarrollar las demás convoluciones, el resultado general es:

$$\frac{(x_1 \star x_2)}{AB} = (t - t_0 - t_2) u(t - t_0 - t_2) - (t - t_0 - t_3) u(t - t_0 - t_3) - (t - t_1 - t_2) u(t - t_1 - t_2) + (t - t_1 - t_3) u(t - t_1 - t_3)$$

Para poder tener el caso particular de la figura 3.3, se debe cumplir que ambas barreras deben tener el mismo ancho, es decir que $t_3 - t_2 = t_1 - t_0 = \Delta T$. Lo que se obtiene entonces es:

$$\frac{(x_1(t) \star x_2(t))}{AB} = (t - t_0 - t_2) u(t - t_0 - t_2) - 2(t - t_2 - t_1) u(t - t_2 - t_1) + (t - 2t_1 - t_2 + t_0) u(t - 2t_1 - t_2 + t_0)$$

Esta expresión se corresponde con el triángulo de altura $h = A \cdot B \cdot \Delta T$, centrado en $t = t_1 + t_2$, y de ancho $W = 2\Delta T$. Como se dijo antes, este resultado es sólo valido para dos barreras de igual ancho. En caso de querer analizar dos funciones de anchos diferentes, se debe aplicar la condición completa, la cual puede no representar un triángulo.

En el caso discreto se pueden analizar las siguientes funciones barrera:

$$\begin{cases} x_1[n] = A(u[n - n_0] - u[n - n_1]) & n_1 > n_0 \\ x_2[n] = B(u[n - n_2] - u[n - n_3]) & n_3 > n_2 \end{cases}$$

Al distribuir las convoluciones como en el caso anterior, se obtiene como forma general del resultado:

$$\frac{(x_1 \star x_2)}{AB} = \sum_{k=n_0}^{n-n_2} u[n - n_2 - n_0] - \sum_{k=n_0}^{n-n_3} u[n - n_3 - n_0] - \sum_{k=n_1}^{n-n_2} u[n - n_2 - n_1] + \sum_{k=n_1}^{n-n_3} u[n - n_3 - n_1]$$

Nuevamente para obtener el resultado de la figura 3.3, se deben tener dos barreras de igual ancho, por lo que se debe cumplir que $n_3 - n_2 = n_1 - n_0 = \Delta N$. La expresión para este caso particular entonces es:

$$\frac{(x_1 \star x_2)}{AB} = \sum_{k=n_0}^{n-n_2} u[n - n_2 - n_0] - \left(\sum_{k=n_0}^{n-n_1-n_2+n_0} + \sum_{k=n_1}^{n-n_2} \right) u[n - n_2 - n_1] + \sum_{k=n_1}^{n-n_1-n_2+n_0} u[n - n_2 + n_0 - 2n_1]$$

De esta forma, si se convolucionan dos funciones barrera discretas de igual ancho (usando la expresión correspondiente), se tiene una señal triangular de alto $h = A \cdot B \cdot \Delta N$, centrada en $n = n_1 + n_2 - 1$ y de ancho $W = 2\Delta N - 1$.

Con estos resultados, se puede sacar una conclusión importante. Si se realiza la convolución entre dos señales continuas cualquiera de anchos $\Delta T_1 = t_1 - t_0$ y $\Delta T_2 = t_3 - t_2$, o en el caso discreto señales de ancho $\Delta N_1 = n_1 - n_0$ y $\Delta N_2 = n_3 - n_2$, la señal resultante tendrá un ancho tal que cumple que:

$$\begin{cases} W = \Delta T_2 + \Delta T_1 & \text{Caso continuo} \\ W = \Delta N_1 + \Delta N_2 - 1 & \text{Caso discreto} \end{cases}$$

3.2. Memoria en sistemas LTI

Como se dijo anteriormente, para que un sistema no posea memoria, su salida en cualquier instante de tiempo debe depender únicamente de la entrada en ese instante de tiempo. Por lo tanto, para que un sistema LTI no posea memoria se debe cumplir que $h[n] = 0$ con $n \neq 0$, es decir que sólo debe sobrevivir el valor de la entrada en el instante actual. De esta forma, la respuesta al impulso debe ser:

$$h[n] = K\delta[n] \rightarrow y[n] = Kx[n]$$

Si la respuesta al impulso de un sistema es diferente de cero para algún instante distinto del instante actual, entonces dicho sistema posee memoria. El análisis para sistemas continuos es exactamente igual.

3.3. Invertibilidad de sistemas LTI

Un sistema es invertible únicamente si existe un sistema inverso que cuando se encuentra conectado en serie con el sistema original, a la salida se tiene nuevamente la señal de entrada del primer sistema. En cuanto a los sistemas LTI, se tiene que si un sistema LTI es invertible, su inversa también es LTI.

Si se tiene un sistema LTI con respuesta al impulso $h_1(t)$, el cual posee un sistema inverso con respuesta al impulso $h_2(t)$, entonces se cumple:

$$(h_1(t) \star h_2(t)) = \delta(t)$$

3.4. Causalidad de sistemas LTI

Si analizamos un sistema LTI discreto, para que éste sea causal la salida $y[n]$ no debe depender de $x[k]$ para $k > n$, ya que los sistemas causales solo dependen de valores del pasado y del presente. Por lo tanto, el producto $x[k]h[n - k]$ debe ser nulo con $k > n$, que se reduce a:

$$h[n] = 0 \quad n < 0$$

Lo que en palabras significa que la respuesta al impulso debe ser nula antes de que ocurra el impulso. Esta propiedad es equivalente a la propiedad de *reposo inicial*², es decir que si la entrada de un sistema es nula hasta un instante t_0 , la salida de dicho sistema debe permanecer en cero hasta el instante t_0 .

Si un sistema LTI es causal, entonces se cumple:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n - k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n - k]h[k]$$

Para los sistemas continuos el desarrollo es completamente análogo.

²Esta equivalencia sólo se aplica para sistemas LTI.

3.5. Estabilidad de sistemas LTI

Para que un sistema sea estable, se debe cumplir que ante una señal de entrada acotada, la salida debe ser acotada. En un sistema LTI se cumple que:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|x[n-k]|}_B |h[k]| = B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Por lo tanto, para que un sistema LTI discreto sea estable, su respuesta al impulso debe ser *absolutamente sumable*:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

De manera análoga, para que un sistema LTI continuo sea estable, su respuesta al impulso debe ser *absolutamente integrable*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < \infty$$

3.6. Respuesta al escalón unitario de un sistema LTI

Caso discreto

La respuesta al escalón unitario $s[n]$ se la puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$s[n] = (u[n] \star h[n]) = (h[n] \star u[n])$$

Desarrollando la convolución, se obtiene que la respuesta al escalón se puede calcular como:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

A partir de la respuesta al escalón, es posible recuperar la respuesta al impulso:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

Caso continuo

De manera análoga al caso discreto, se tiene que la respuesta al escalón se puede calcular como:

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(r) dr$$

Para poder recuperar la respuesta al impulso a partir de la respuesta al escalón, se debe analizar la derivada:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

Gracias a estas relaciones, es posible caracterizar de forma completa cualquier sistema LTI tanto con la respuesta al impulso, como con la respuesta al escalón.

3.7. Sistemas LTI causales descritos por ecuaciones diferenciales y en diferencias

Una clase muy importante de sistemas es aquella en la que la entrada y la salida se encuentran relacionadas a través de una *ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes* para el caso continuo o una *ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes* para el caso discreto.

3.7.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales proporcionan una especificación implícita del sistema, es decir, describen una relación entre la entrada y la salida antes que una expresión explícita para la salida del sistema como una función de la entrada. Para obtener la ecuación explícita, es necesario resolver la ecuación diferencial. Para esto, es necesario especificar una o mas condiciones auxiliares, que en general suelen ser condiciones iniciales para el sistema³, siendo la condición de *reposo inicial*⁴ la condición mas común: $y(0) = 0$.

En general, las soluciones a una ecuación diferencial pueden escribirse como la suma de una solución particular con una homogénea:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

donde a la solución homogénea se la suele conocer como *respuesta natural del sistema*. Cuando se aplica como condición auxiliar el reposo inicial, las soluciones obtenidas serán las de un sistema invariante en el tiempo, lo que significa que la condición de reposo puede ser fijada a cualquier instante de tiempo y siempre se obtendrá la misma solución a la ecuación diferencial, pero desplazada.

Una ecuación diferencial de este tipo de orden N está dada por:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.1)$$

donde la ecuación diferencial homogénea es:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

Al aplicar la condición de reposo inicial en t_0 , se tiene que:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^N y(t_0)}{dt^N} = 0$$

De esta forma, bajo la condición de reposo inicial se tiene que un sistema descrito por la ecuación diferencial (3.1) es LTI y causal.

3.7.2. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Este tipo de ecuaciones son de la forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.2)$$

Al igual que en el caso anterior, las soluciones a este tipo de ecuaciones se pueden escribir como la suma de una solución particular y una homogénea (respuesta natural), siendo esta última de la forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

Aplicando como condiciones auxiliares la condición de reposo inicial, se tiene como resultado un sistema LTI y causal⁵.

Si bien el análisis para los sistemas continuos es similar al de los sistemas discretos, estos últimos poseen la ventaja de poder transformar la ecuación (3.2) en una *ecuación recursiva*:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

Gracias a esta interpretación, al aplicar las condiciones iniciales al sistema es posible obtener de manera recursiva cualquier valor en otro instante, lo que facilita los cálculos en comparación con su contraparte continua.

³Es importante remarcar que al cambiar las condiciones auxiliares a un sistema, las soluciones de la ecuación diferencial serán diferentes.

⁴La condición de reposo inicial implica que la salida será cero hasta que la entrada tome un valor distinto de nulo. Matemáticamente esto significa que si $x(t) = 0$ para $t < t_0$, entonces $y(t) = 0$ para $t < t_0$.

⁵Para los sistemas discretos, la condición de reposo inicial es completamente análoga a la del caso continuo: Si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces $y[n] = 0$ para $n < n_0$.

Nota: Para los casos en que $N = 0$, se tiene una ecuación explícita donde la salida no depende de valores previos en la entrada:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_k} \right) x[n-k]$$

Se puede observar que la respuesta al impulso de este sistema tiene una duración finita. A estos sistemas se los conoce como *sistemas de respuesta finita al impulso (FIR)*. Por otra parte, en los casos en que $N \geq 1$ en general se tendrán respuestas al impulso de duración infinita, por lo que se está en presencia de un *sistema de respuesta infinita al impulso (IIR)*.

4. Series de Fourier

4.1. Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas

La importancia del análisis de Fourier proviene en gran medida del hecho de que el conjunto de señales exponenciales complejas continuas y discretas poseen propiedades importantes a la hora de ser aplicadas a sistemas LTI, lo que facilita mucho el trabajo.

La importancia de las exponenciales complejas en el estudio de los sistemas LTI radica en el hecho de que la respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja con sólo un cambio en la amplitud:

$$\begin{cases} e^{st} \rightarrow H(s)e^{st} & \text{continua} \\ z^n \rightarrow H(z)z^n & \text{discreta} \end{cases}$$

donde los factores $H(s)$ y $H(z)$ son en general funciones de variable compleja. A estas funciones exponenciales que no se modifican, se las puede pensar como *autovectores* del sistema LTI, mientras que los factores de escala $H(s)$ y $H(z)$ corresponden a los *autovalores* asociados a dichos autovectores.

Para mostrar este resultado, en el caso continuo se tiene que $x(t) = e^{st}$, por lo que se obtiene como salida:

$$y(t) = (x(t) \star h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} H(s)$$

De esta forma, se demuestra que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI, y la constante $H(s)$ para un valor específico de s es el valor propio asociado a dicho autovector. En caso de una exponencial compleja $x[n] = z^n$ se tiene:

$$y[n] = (x[n] \star h[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} = z^n H(z)$$

Se obtiene entonces un resultado análogo al obtenido para las exponenciales continuas.

Debido a la linealidad de los sistemas LTI, los resultados obtenidos se puede aplicar para una superposición de señales de entrada, es decir, que es posible tener:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} & \text{Caso continuo} \\ x[n] = \sum_k a_k z_k^n \rightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n & \text{Caso discreto} \end{cases}$$

En otras palabras, si la entrada se presenta como una combinación lineal de exponenciales complejas, entonces la salida se puede representar como otra combinación lineal de las mismas exponenciales complejas.

4.2. Representación en series de Fourier de señales periódicas continuas

Como se mencionó anteriormente, una señal periódica debe cumplir que $x(t) = x(t + T)$ para todo t , y siendo el mínimo valor de T que cumple esta condición el período de la señal. Se tiene entonces que la frecuencia fundamental de la señal es $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. El tipo de señal periódica que se va a utilizar es la exponencial compleja:

$$x(t) = e^{jk\omega_0 t}$$

Estas señales son periódicas con frecuencia ω_0 para todo valor de k . Sin embargo, para $k = 1$ se tiene que ω_0 es la frecuencia fundamental, mientras que para valores mayores de k las frecuencias fundamentales son fracciones de ω_0 , y se tiene entonces una colección de funciones armónicas.

Según el desarrollo en series de Fourier, es posible representar cualquier tipo de señal periódica como una combinación lineal de exponenciales complejas. Se tiene entonces:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad \text{Desarrollo en Serie de Fourier}$$

Donde los coeficientes a_k se obtienen mediante la expresión:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{Coeficientes del desarrollo en Serie de Fourier}$$

Cabe notar que esta integral sólo es necesaria desarrollarla en un período, pero puede ser sobre cualquier periodo, ya que al tratarse de una señal periódica el resultado será el mismo.

Los coeficientes a_k miden la porción de $x(t)$ que está en cada armónica de la componente fundamental. El coeficiente a_0 es el factor de continua de la señal:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \rightarrow \text{Valor promedio de } x(t)$$

4.2.1. Convergencia de las Series de Fourier

Se desea analizar la aproximación a una señal periódica $x(t)$ mediante una Serie de Fourier de términos finitos:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

El error de la aproximación es entonces:

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Para poder garantizar que la aproximación es buena, se debe minimizar el error. Sin embargo, lo que se va a minimizar no es el error en sí, sino que se va a minimizar la *energía del error*:

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2 dt$$

Como es de esperarse, los coeficientes a_k que minimizan la energía del error son aquellos que se obtienen para el desarrollo de la Serie de Fourier. Esto significa que si $x(t)$ tiene una representación en Series de Fourier, la mejor aproximación usando sólo un numero finito de exponenciales complejas relacionadas armónicamente se obtiene truncando la Serie de Fourier (a medida que $N \rightarrow \infty$, se tiene que $E_N \rightarrow 0$).

Hay dos condiciones que una señal periódica debe satisfacer para garantizar que se pueda representar mediante una Serie de Fourier. Una clase de señales periódicas que pueden ser representadas mediante Series de Fourier son aquellas que poseen energía finita sobre un periodo:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

Si esta condición se cumple, entonces se puede garantizar que los coeficientes a_k son finitos, y que el error de la aproximación E_N tiende a cero a medida que aumenta la cantidad de términos:

$$e_N(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \int_T |e_N(t)|^2 dt = 0$$

Es importante aclarar que el hecho de que $E_N = 0$, no implica que la señal $x(t)$ y su representación en Serie de Fourier sean iguales para todo t . Lo que sí es cierto es que no hay diferencia en su energía en un período. Para poder garantizar que $x(t)$ sea igual a su representación en Series de Fourier (salvo en los puntos donde $x(t)$ es discontinua), se deben cumplir las *Condiciones de Dirichlet*:

1. Sobre cualquier periodo, $x(t)$ debe ser *absolutamente integrable*, es decir:

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

Esta condición implica que los coeficientes del desarrollo en serie sean finitos:

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt \rightarrow |a_k| < \infty$$

2. La variación de $x(t)$ en cualquier intervalo finito de tiempo está acotada, es decir, no hay mas que un numero finito de máximos y mínimos durante cualquier periodo de la señal.
3. En cualquier intervalo finito de tiempo hay solo un numero finito de discontinuidades. Además, cada una de estas discontinuidades debe ser finita.

En general, las señales de interés cumplen con estas condiciones, por lo que son poco probables de no ser cumplidas. Para una señal periódica que no posee discontinuidades, la Serie de Fourier converge e iguala a la señal original en todos los valores de t . Para una señal periódica con un numero finito de discontinuidades en cada periodo, la representación de la Serie de Fourier iguala a la señal en cualquier lugar excepto en los puntos de discontinuidad, en los cuales converge al promedio de la señal. Matemáticamente se nota entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} (x(t+0^+) + x(t+0^-))$$

A pesar de esta diferencia en las discontinuidades, la energía de la diferencia entre ambas señales es nula, por lo que se las considera como señales idénticas.

Fenómeno de Gibbs

Este fenómeno se produce al analizar la Serie de Fourier pero truncada, es decir con una cantidad finita de términos. Cuando se calcula la Serie de Fourier truncada para una señal cuadrada por ejemplo, como la de la figura 4.1, se observa que existen oscilaciones en las cercanías de la discontinuidad que se reducen al incrementar la cantidad de términos de la serie. Josiah Gibbs demostró que este rizado presenta una suma parcial del 9 % del salto de la discontinuidad, es decir que en un salto unitario la suma parcial presentará un valor de 1,09.

Este fenómeno ocurre cuando se toma una cantidad finita de términos de la serie, sin importar cuantos se tomen. Lo que ocurre al aumentar la cantidad de términos es que estas oscilaciones se van comprimiendo contra la discontinuidad y su efecto cada vez es menos apreciable a medida que uno se aleja de ella.

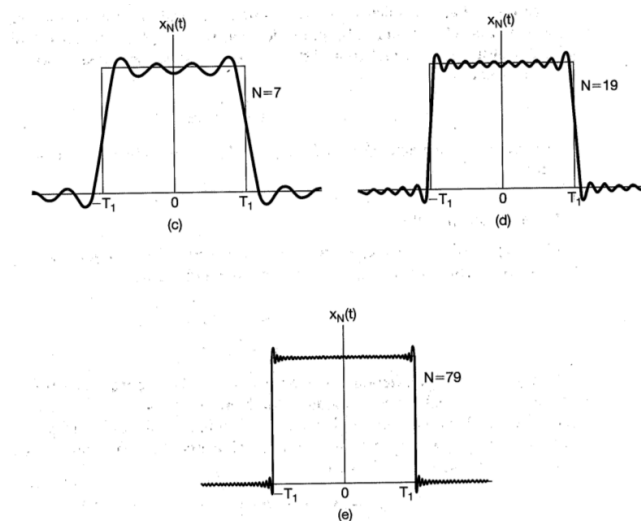


Figura 4.1: Fenómeno de Gibbs para una señal cuadrada.

4.2.2. Propiedades de la Serie Continua de Fourier

Sea una señal $x(t)$ de periodo T , los coeficientes a_k de su representación en Serie de Fourier se denotan como:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$$

A continuación se listan las propiedades de la Serie de Fourier continua.

Linealidad

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales periódicas con periodo T (el mismo periodo):

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k \end{cases}$$

Se cumple entonces que:

$$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_k = \alpha a_k + \beta b_k$$

Desplazamiento en el tiempo

Si se tiene una señal $x(t)$ periódica, con coeficientes a_k de su desarrollo de Fourier, se cumple entonces:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k \rightarrow x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

Esta propiedad demuestra que al desplazar una señal en el tiempo, las magnitudes de los coeficientes de la Serie de Fourier no se alteran.

Inversión de tiempo

Si se tiene una señal $x(t)$ periódica, con coeficientes a_k de su desarrollo de Fourier, se cumple entonces:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k \rightarrow x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}$$

De esta manera, una inversión en el tiempo sólo produce una inversión en la secuencia de los coeficientes de la Serie de Fourier.

En caso de tener una señal par o impar, se cumple que:

$$\begin{cases} x(t) = x(-t) \implies a_k = a_{-k} & \text{Señal par} \\ x(t) = -x(-t) \implies a_k = -a_{-k} & \text{Señal impar} \end{cases}$$

Escalamiento de tiempo

Si se tiene una señal $x(t)$ con periodo T y $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces $x(\alpha t)$ tiene un periodo de T/α y frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$. Sin embargo, los coeficientes de la serie de Fourier no se modifican:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

Multipliación

Sea $x(t)$ e $y(t)$ dos señales con periodo T , entonces se cumple:

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k \\ y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k \end{cases} \rightarrow x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_k = (a_k \star b_k)$$

Conjugación y simetría conjugada

Si se tiene una señal $x(t)$ con coeficientes a_k de su desarrollo en Serie de Fourier, se cumple entonces que:

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{FS}} a_{-k}^*$$

En particular, si $x(t)$ es una señal real ($x(t) = x^*(t)$) entonces los coeficientes de la Serie de Fourier serán *simétricos conjugados*:

$$a_{-k} = a_k^*$$

De esto surgen las siguientes propiedades:

1. Si $x(t)$ es real y par, también lo serán sus coeficientes.
2. Si $x(t)$ es real e impar, entonces sus coeficientes son sólo imaginarios e impares.

Relación de Parseval

La relación de Parseval para señales periódicas continuas es:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Se puede ver que el lado izquierdo de la expresión representa a la potencia promedio de la señal, mientras que $|a_k|^2$ es la potencia promedio de la k -ésima componente armónica. Por lo tanto, la relación de Parseval establece que la potencia promedio total de una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas.

En la figura 4.2 se tiene un resumen de las propiedades de la Serie de Fourier de una señal continua.

Propiedad	Sección	Señal periódica	Coefficientes de la serie de Fourier
		$x(t)$ Periódicas con periodo T y $y(t)$ frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linealidad	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	3.5.6	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Inversión de tiempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	3.5.4	$x(at), a > 0$ (periódica con periodo T/a)	a_k
Convolución periódica		$\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicación	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
Integración		$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	3.5.6	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	3.5.6	$x(t)$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{cases} \Re\{a_k\} \\ j\Im\{a_k\} \end{cases}$

Figura 4.2: Tabla de propiedades de la serie continua de Fourier.

4.3. Representación en Series de Fourier de señales periódicas discretas

A diferencia del caso continuo, las señales periódicas discretas poseen una representación en Serie de Fourier de términos finitos, por lo que no existen problemas de convergencia. Por otra parte, la representación en Serie de Fourier de una señal, representa dicha señal de manera exacta, cosa que no sucedía con las señales continuas donde se minimizaba la energía del error.

4.3.1. Combinaciones lineales de exponenciales complejas relacionadas armónicamente

Como se mencionó anteriormente, una señal es periódica si cumple que $x[n] = x[n + N]$, siendo N su período y frecuencia $w_0 = \frac{2\pi}{N}$. El período fundamental es el entero positivo N mas pequeño para el cual se cumple esta condición.

Un tipo de señal periódica es la exponencial compleja $e^{jk w_0 n}$. El conjunto de todas las señales exponenciales complejas discretas que son periódicas con período N son:

$$\phi_k[n] = e^{jk w_0 n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Todas estas señales se encuentran relacionadas armónicamente. Como se comentó en las secciones anteriores, sólo hay un número finito de exponenciales complejas diferentes, ya que las exponenciales complejas que difieren en una frecuencia múltiplo de 2π son idénticas:

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \quad \forall r \in \mathbb{Z}$$

Por esta razón, si se desea hacer una representación de una señal como una combinación de exponenciales complejas, sólo es necesario incluir los términos en el rango de N valores sucesivos de k . En estos casos, se va a indicar que el rango es $k = \langle N \rangle$, lo cual significa que k se mueve en un rango de N valores (sin importar el valor inicial).

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk w_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

4.3.2. Determinación de la representación en Serie de Fourier

Al igual que en el caso continuo, es posible representar cualquier señal periódica de período N como una combinación lineal de exponenciales complejas. Se tiene entonces, que la representación en Serie de Fourier de una señal $x[n]$ con período N es:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk w_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{Desarrollo en Serie de Fourier}$$

Los coeficientes a_k , a menudo llamados *coeficientes espectrales*, se obtienen mediante:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk w_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad \text{Coeficientes del desarrollo en Serie de Fourier}$$

Se puede concluir, debido a la periodicidad de los exponenciales complejas discretas, que:

$$a_k = a_{k+N}$$

Nota: Cuando se tiene una sumatoria de una cantidad finita de exponenciales, dicha sumatoria converge de la siguiente manera:

$$\sum_{n=n_1}^{n_2-1} r^n = \frac{r^{n_1} - r^{n_2}}{1 - r}$$

4.3.3. Propiedades de la serie discreta de Fourier

En general, las propiedades descritas para el desarrollo en Serie de Fourier para señales continuas se siguen cumpliendo, salvo en algunos casos especiales. En la figura 4.3 se tiene un resumen de las propiedades de la serie discreta de Fourier.

Multiplicación

Esta es una de las propiedades que se diferencia con la del caso continuo. En el caso continuo, cuando se tienen dos señales $x(t)$ e $y(t)$ con coeficientes de Fourier b_k y c_k respectivamente, se tiene que el producto de ambas señales tiene asociado un coeficiente $a_k = (b_k \star c_k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} b_r c_{k-r}$. En el caso discreto, debido a la periodicidad de las exponenciales, se debe realizar una convolución discreta, ya que existe una cantidad finita de coeficientes que se irán repitiendo:

$$\begin{cases} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k \\ y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_k \end{cases} \rightarrow x[n] y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k = (b_k \star c_k)_{per} = \sum_{r=\langle N \rangle} b_r c_{k-r}$$

Esta operación se la conoce como *convolución periódica*.

Propiedad	Señal periódica	Coefficientes de la serie de Fourier
	$x[n]$ Periódicas con periodo N y $y[n]$ frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/N$	a_k Periódica con b_k periodo N
Linealidad	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{jM(2\pi/N)n}x[n]$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a_{-k}^*
Inversión de tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{si } n \text{ es un múltiplo de } m \\ 0 & \text{si } n \text{ no es un múltiplo de } m \end{cases}$ (periódica con periodo mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (vistas como periódicas con periodo mN)
Convolución periódica	$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (de valor finito y periódica sólo) si $a_0 = 0$	$\left(\frac{1}{(1 - e^{-jk(2\pi/N)})} \right) a_k$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \Re[a_k] = \Re[a_{-k}] \\ \Im[a_k] = -\Im[a_{-k}] \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	$x[n]$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	$x[n]$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\begin{cases} \Re[a_k] \\ j\Im[a_k] \end{cases}$
<p>✕ Relación de Parseval para señales periódicas</p> $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k ^2$		

Figura 4.3: Propiedades de la representación en serie de Fourier para señales discretas.

Primera diferencia

La primera diferencia es la alternativa discreta a la derivada, y se define como $x[n] - x[n-1]$. Para una señal $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ se cumple que:

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}) a_k$$

Relación de Parseval

Como se ve en la figura 4.3, la relación de Parseval es:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

donde los a_k son los coeficientes y N es el período. Nuevamente, la relación de Parseval establece que la potencia promedio de una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio en todas sus componentes armónicas, pero en este caso se tiene un numero finito de componentes.

4.4. Series de Fourier y sistemas LTI

Como se mencionó anteriormente, la respuesta de un sistema LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas se puede analizar muy fácilmente, y sólo requiere conocer la respuesta al impulso del sistema. Por ejemplo, si se supone

$x(t) = e^{st}$ en el caso continuo y que $x[n] = z^n$ en el discreto, se tiene:

$$\begin{cases} y(t) = H(s)e^{st} \\ y[n] = H(z)z^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-st}dr \\ H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \end{cases}$$

Donde a $H(s)$ y $H(z)$ se las conoce como *funciones del sistema*. En particular, se van a utilizar señales tales que $e^{st} = e^{j\omega t}$ y $z^n = e^{j\omega n}$, es decir que se trabajará con exponenciales complejas puras. En estos casos, a las funciones $H(j\omega)$ se las conoce como *respuestas en frecuencia del sistema*.

Si se tiene una señal $x(t)$ continua con período T , y $x[n]$ discreta con período N , es posible escribir su desarrollo en Serie de Fourier:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k e^{jk\omega_0 n} \end{cases}$$

Si estas señales se utilizan como entradas a los sistemas LTI $y(t)$ e $y[n]$, se tendría entonces que:

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{T}}) e^{jk\omega_0 t} \\ y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) e^{jk\omega_0 n} \end{cases}$$

De esta forma, las señales $y(t)$ e $y[n]$ son periódicas, y poseen el mismo período que las señales de entrada. Por otro lado, siendo a_k y b_k los coeficientes de Fourier, entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} y(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k H(e^{jk\frac{2\pi}{T}}) \\ y[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k H(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) \end{aligned}$$

Se puede ver que el efecto que produce el sistema LTI es el de modificar de manera individual cada uno de los coeficientes de Fourier de la entrada mediante la multiplicación por el valor de la respuesta en frecuencia a la frecuencia correspondiente.

5. Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

A diferencia de lo que ocurría para el análisis de la Serie de Fourier, la Transformada de Fourier permite analizar funciones que no necesariamente son periódicas. Sea $x(t)$ una señal continua (periódica o no), se define la *Transformada de Fourier* como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

A partir de la TF, es posible recuperar a la señal utilizando la *Antitransformada de Fourier*, que se define como:

$$\hat{x}(t) = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Se puede ver que $\hat{x}(t) = x(t)$ en aquellos puntos donde no se tengan discontinuidades, pero en las singularidades $\hat{x}(t)$ converge al promedio de $x(t)$, al igual que ocurría con las Series de Fourier.

Al igual que con las Series de Fourier, la transformada lo que hace es representar a una señal como una suma de exponenciales, con la diferencia de que se trata de una suma continua. Por esta razón, al transformar una señal se obtiene su *espectro* de frecuencias.

De esta forma, la transformada de Fourier de una señal periódica se encuentra estrechamente relacionada con los coeficientes del desarrollo en Serie de Fourier, pudiendo representar a los coeficientes a_k en términos de muestras igualmente espaciadas de la Transformada de Fourier. Por lo tanto, siendo $x(t)$ una señal de período T , y $X(j\omega)$ la Transformada de Fourier de uno de sus períodos, los coeficientes se pueden obtener como:

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)|_{\omega=k\omega_0}$$

5.1. Convergencia de la Transformada de Fourier

Al igual que con las Series de Fourier, se debe definir convergencia en términos de la energía del error, es decir que tanto la señal original $x(t)$ como la obtenida a partir de la antitransformada $\hat{x}(t)$, debe ser iguales en su contenido energético:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt = 0$$

Para poder garantizar esto, las señales deben cumplir con las siguientes condiciones:

1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable⁶:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. $x(t)$ debe tener un numero finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
3. $x(t)$ debe tener un numero finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además, cada una de esas discontinuidades debe ser finita.

5.2. Propiedades

Linealidad

Sean dos señales $x(t)$ e $y(t)$, entonces se cumple:

$$\begin{cases} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw) \\ y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(jw) \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(jw) + \beta Y(jw)}$$

Desplazamiento en el tiempo

Sea una señal $x(t)$ con Transformada de Fourier $X(jw)$, entonces se cumple:

$$\boxed{x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)e^{-jw t_0}}$$

Conjugación y simetría conjugada

Sea una señal $x(t)$ con Transformada de Fourier $X(jw)$, entonces se cumple:

$$\boxed{x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-jw)}$$

Gracias a esta propiedad, se puede inferir que si $x(t)$ es real, entonces $X(jw)$ tiene simetría conjugada:

$$X(-jw) = X^*(jw) \quad x(t) \text{ real}$$

Otra conclusión importante, es que si se tiene una $x(t)$ real, la parte real de la Transformada de Fourier es una función par de la frecuencia, y la parte imaginaria una función impar de la frecuencia (si $X(jw)$ se lo expresa en su forma polar, se tiene que el modulo $|X(jw)|$ es una función par de w y el argumento de $X(jw)$ es una función impar de w).

En general, se tienen las siguientes equivalencias:

$x(t)$ par	\longleftrightarrow	$X(jw)$ par
$x(t)$ impar	\longleftrightarrow	$X(jw)$ impar
$x(t)$ real	\longleftrightarrow	$X(jw)$ conjugada simétrica
$x(t)$ par y real	\longleftrightarrow	$X(jw)$ par y real
$x(t)$ impar y real	\longleftrightarrow	$X(jw)$ impar e imaginaria

⁶Cuando se trabaja con sistemas LTI, para que su respuesta al impulso posea Transformada de Fourier, se debe pedir que dicho sistema sea estable.

Diferenciación e integración

Si se tiene una señal $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)$, entonces se cumple para la derivada que:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} jwX(jw)$$

Por otra parte, se tiene entonces para la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{jw} X(jw) + \pi X(0) \delta(w)$$

Escalamiento de tiempo y de frecuencia

Si se tiene una señal $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)$, entonces se cumple que:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{jw}{\alpha}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Esta propiedad muestra la relación inversa que existe entre el dominio del tiempo y de la frecuencia, ya que al acelerar uno se hace mover al otro a una velocidad menor. Un caso particular de esta propiedad es cuando $\alpha = -1$, ya que se ve que si se invierte la señal también lo hace su Transformada de Fourier:

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-jw)$$

Dualidad

Esta propiedad muestra que existe una gran simetría en la TF. Si se tiene una señal $x(t)$ al transformarla se tiene su par transformado $X(jw)$. Sin embargo, si tomo una señal $Y(jw)$ que posee la misma forma que $x(t)$ pero en el espacio de Fourier, entonces al antitransformar al espacio del tiempo se obtiene una señal $y(t)$ que será equivalente a $X(jw)$ pero en función del tiempo. Esto se puede ver con el ejemplo de la función barrera: Si se tiene una barrera en el tiempo, se obtiene la función sinc (\cdot) en la frecuencia, y si se tiene una barrera en la frecuencia, se obtiene la función sinc (\cdot) en el tiempo.

De esta forma, es posible establecer las mismas propiedades ya vistas, pero ahora en sentido opuesto:

$$\begin{cases} -jtx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dX(jw)}{dw} & \text{Diferenciación} \\ e^{jw_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(w - w_0)) & \text{Desplazamiento} \\ -\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0) \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^w x(r) dr & \text{Integración} \end{cases}$$

Relación de Parseval

La relación de Parseval se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(jw)|^2 dw$$

La relación de Parseval entonces relaciona a la energía de la señal con la energía de cada una de las frecuencias que la componen.

Convolución

Esta es una propiedad muy importante a la hora de analizar sistemas LTI, ya que mantiene el resultado de que es posible caracterizarlos únicamente con su respuesta al impulso. La propiedad de convolución establece que la Transformada de Fourier de la convolución de dos señales, se puede ver como el producto de las transformadas individuales de cada señal por separado:

$$(x(t) \star h(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(jw)H(jw)$$

Multiplicación

Debido a la propiedad de dualidad, se puede demostrar que:

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} (X(j\omega) \star Y(j\omega))$$

En la figura 5.1 se tiene un resumen de todas estas propiedades.

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \Re\{X(j\omega)\} = \Re\{X(-j\omega)\} \\ \Im\{X(j\omega)\} = -\Im\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{cases}$
Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \mathcal{E}\{x(t)\}$ [x(t) real] $x_o(t) = \mathcal{O}\{x(t)\}$ [x(t) real]	$\Re\{X(j\omega)\}$ $j\Im\{X(j\omega)\}$

Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Figura 5.1: Resumen de propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo continuo.

5.3. Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales

Una clase muy importante de sistemas LTI, son aquellos que se encuentran caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Aplicando la transformada a ambos miembros, y utilizando las propiedades de linealidad y diferenciación, se llega a

que:

$$H(jw) = \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (jw)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (jw)^k}$$

Se puede ver que $H(jw)$ es una función racional, ya que se construye como la división de dos polinomios.

6. Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

Como ocurría en el caso continuo, la Transformada de Fourier de tiempo discreto se diferencia de la representación en Series de Fourier en que es posible trabajar con funciones que pueden o no ser periódicas. Sea una señal absolutamente sumable⁷, es decir que cumple que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Entonces se define a la *Transformada de Fourier de tiempo discreto* como:

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

A diferencia del caso continuo, las exponenciales complejas discretas son periódicas con período 2π , por lo que al tomar intervalos de Ω superiores a 2π , se estarían repitiendo valores. Una de las consecuencias principales a esto, es que la Transformada de Fourier de tiempo discreto es una función periódica con período 2π . Por otra parte, al desarrollar la *Antitransformada de Fourier de tiempo discreto* solo se debe analizar dicho periodo:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Esta integral se puede desarrollar sobre *cualquier* intervalo de longitud 2π . Otra diferencia con el caso continuo, es que no se tienen problemas con la convergencia, ya que la antitransformada se ajusta exactamente a la señal $x[n]$, cosa que no ocurría en el caso continuo.

La relación entre la transformada de Fourier de tiempo discreto y el desarrollo en Serie de Fourier se obtiene mediante la siguiente relación:

$$a_k = \frac{1}{N} X(j\Omega) \big|_{\Omega=k\Omega_0}$$

Donde N es el período de la señal y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$. De esta forma, es posible obtener los coeficientes del desarrollo en Serie de Fourier a partir de la transformada, que se puede obtener de manera directa en la mayoría de los casos.

6.1. Propiedades

Periodicidad de la Transformada de Fourier de tiempo discreto

Como ya se mencionó anteriormente, la Transformada de Fourier de tiempo discreto es siempre una función periódica, con período 2π :

$$X(j(\Omega + 2\pi)) = X(j\Omega)$$

Linealidad

Sean las dos señales $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$ y $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega)$, se cumple que:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(j\Omega) + \beta Y(j\Omega)$$

⁷En el caso de sistemas LTI, esto es equivalente a pedir que el sistema sea *estable*.

Desplazamiento en el tiempo y la frecuencia

Sea $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, se cumple para el desplazamiento en el tiempo:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) e^{-j\Omega n_0}$$

Por otra parte, si se tiene un desplazamiento en la frecuencia, se cumple que:

$$x[n] e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\Omega - \Omega_0))$$

Conjugación y simetría conjugada

Sea $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, entonces se cumple:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\Omega)$$

Como en el caso continuo, se cumple que:

$x[n]$ par	\longleftrightarrow	$X(j\Omega)$ par
$x[n]$ impar	\longleftrightarrow	$X(j\Omega)$ impar
$x[n]$ real	\longleftrightarrow	$X(j\Omega)$ conjugada simétrica
$x[n]$ par y real	\longleftrightarrow	$X(j\Omega)$ par y real
$x[n]$ impar y real	\longleftrightarrow	$X(j\Omega)$ impar e imaginaria

Diferenciación y acumulación

El equivalente a la derivada en el caso discreto, es lo que se conoce como la *primera diferencia*. Sea $x[n]$ con Transformada de Fourier $X(\Omega)$, entonces se tiene que:

$$x[n] - x[n - 1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1 - e^{-j\Omega}) X(j\Omega)$$

Por otra parte, el equivalente a la integración es la *acumulación*:

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(j\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega - 2k\pi]$$

Inversión en el tiempo

Sea $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$, entonces al invertir el tiempo se cumple que:

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\Omega)$$

Expansión en el tiempo

En el caso continuo, se cumple que para cualquier valor de α vale que:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{j\Omega}{\alpha}\right)$$

Para el discreto, no es posible utilizar esta expresión, ya que solo se puede evaluar a la señal en números enteros. Por lo tanto, para poder realizar una definición similar a la del caso continuo, se debe hacer la siguiente definición:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & \text{Si } n \text{ es un múltiplo de } k \\ 0 & \text{Si } n \text{ no es un múltiplo de } k \end{cases}$$

Mediante esta definición, se cumple entonces que:

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j(k)\Omega}\right)$$

Diferenciación en frecuencia

Sea $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$, entonces al derivar la Transformada de Fourier con respecto a ω se cumple que:

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

Relación de Parseval

La relación de Parseval para el Transformada de Fourier de tiempo discreto es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

Esta expresión relaciona la energía de la señal con la energía de su transformada. Por esta razón, a $|X(j\Omega)|^2$ se lo conoce como *espectro de densidad de energía de la señal* $x[n]$.

Convolución

Sean dos señales $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$ y $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega)$, entonces se cumple que:

$$(x[n] \star y[n]) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) Y(j\Omega)$$

Esta propiedad es muy importante para el análisis de sistemas LTI, ya que al estar caracterizados por su respuesta al impulso $h[n]$, es muy fácil obtener la salida a cualquier señal de entrada:

$$y[n] = (x[n] \star h[n]) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega) = X(j\Omega) H(j\Omega)$$

Multiplicación

Sean $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$ y $y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega)$, entonces se cumple que:

$$x[n] y[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (X(j\Omega) \star Y(j\Omega))_{\text{periódica}} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$

Se debe realizar una convolución periódica, ya que la Transformada de Fourier de tiempo discreto es una función con período 2π , por lo que no tiene sentido realizarla para todos los valores de Ω .

En la figura 6.1 se tiene un resumen de las propiedades mencionadas y en la figura 6.2 un resumen de las expresiones de la Serie y Transformada de Fourier.

	Tiempo continuo		Tiempo discreto	
	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia	Dominio del tiempo	Dominio de la frecuencia
Serie de Fourier	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$a_k = \frac{1}{T_d T_o} \int_{T_d T_o} x(t) e^{-jk\omega_0 t}$	$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$
	tiempo continuo periódica en tiempo	frecuencia discreta, aperiódica en frecuencia	tiempo discreto, periódica en tiempo	frecuencia discreta, periódica en frecuencia
Transformada de Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$x[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$
	tiempo continuo aperiódica en tiempo	frecuencia continua, aperiódica en frecuencia	tiempo discreto, aperiódica en tiempo	frecuencia continua, periódica en frecuencia

Figura 6.2: Resumen de expresiones de la Serie y la Transformada de Fourier.

Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
	$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ periódica con
	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ periodo 2π
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Desplazamiento de tiempo	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Inversión en tiempo	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Expansión en tiempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{si } n = \text{múltiplo de } k \\ 0, & \text{si } n \neq \text{múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolución	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Diferenciación en tiempo	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega})$ $+ \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetría conjugada para señales reales	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Simetría para señales par reales	$x[n]$ real y par	$X(e^{j\omega})$ real y par
Simetría para señales impar reales	$x[n]$ real e impar	$X(e^{j\omega})$ puramente imaginaria e impar
Descomposición de señales reales en par e impar	$x_e[n] = \mathfrak{E}_s[x[n]]$ $[x[n]]$ real $x_o[n] = \mathfrak{O}_s[x[n]]$ $[x[n]]$ real	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$ $\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas		
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$		

Figura 6.1: Resumen de propiedades de la Transformada de Fourier de tiempo discreto.

6.2. Sistemas caracterizados por ecuaciones en diferencias

Una ecuación general lineal en diferencias con coeficientes constantes para un sistema LTI con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ tiene la forma:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

Como se trata de un sistema LTI, éste se encuentra totalmente caracterizado por la respuesta al impulso, por lo que se cumple que $y[n] = (x[n] \star h[n]) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$. Por lo tanto, aplicando la TF a la ecuación en diferencias junto a las propiedades de linealidad y desplazamiento, se obtiene que:

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\Omega}}$$

7. Muestreo

7.1. Representación de una señal continua mediante muestreo

El tipo de muestreo que se va a desarrollar es a intervalos iguales, por lo que todas las muestras se encuentran equiespaciadas. Una forma para poder realizar este muestreo, es mediante el uso de un tren de impulsos periódicos multiplicado por la señal continua $x_c(t)$ que se desea muestrear. Este mecanismo se lo conoce como *muestreo con tren de impulsos*. El tren de impulsos $p(t)$ se conoce como *función de muestreo*, el período T como el *período de muestreo* y la frecuencia fundamental $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ como la *frecuencia de muestreo*. Se tiene entonces:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \rightarrow x_p(t) = x_c(t)p(t)$$

Se debe tener en cuenta en este desarrollo la propiedad ya vista de las deltas de Dirac: $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$. Se tiene entonces que la señal muestreada queda como:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

Como se vio en las secciones anteriores, multiplicar dos señales en el tiempo es equivalente a la convolución en el dominio de Fourier:

$$X_p(jw) = \frac{1}{2\pi} (X_C(jw) \star P(jw))$$

Por otra parte, se sabe que la Transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos, de la forma:

$$P(jw) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - kw_s)$$

Al realizar la convolución entre $X_C(jw)$ y $P(jw)$, por las propiedades de las deltas, se observa que es equivalente a colocar copias de $X_C(jw)$ centradas en cada una de las frecuencias donde se encuentran las deltas. Matemáticamente esto se ve como:

$$X_p(jw) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_C(j(w - kw_s))$$

Como se dijo anteriormente, $X_p(jw)$ es una función periódica que consiste en copias de $X_C(jw)$ centradas en kw_s , por lo que existe la posibilidad de que dichas copias se solapen.

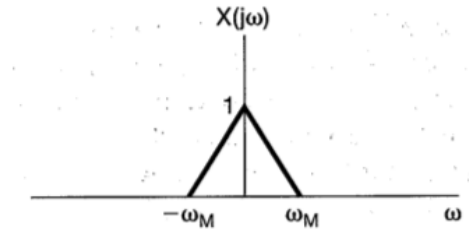


Figura 7.1: Transformada de Fourier de la señal que se desea muestrear $x_c(t)$. Se observa que tiene un ancho de banda de $W = 2w_M$.

En la figura 7.1 se observa un gráfico de $X_C(jw)$. Se puede concluir a partir de esto, que para que no exista solapamiento entre las copias de dicha transformada (también conocido como *aliasing*), la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el ancho de banda:

$$w_s > 2w_M$$

En la figura 7.2 se tiene un ejemplo de estos efectos.

En base a estos resultados, es posible desarrollar el *Teorema de Muestreo*.

7.1.1. Teorema de Muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda limitada con $X(jw) = 0$ para $|w| > w_M$. Entonces $x(t)$ se determina unívocamente mediante sus muestras $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, si:

$$w_s > 2w_M \quad w_s = \frac{2\pi}{T}$$

Dadas estas muestras, podemos reconstruir $x(t)$ generando un tren de impulsos periódicos en el cual los impulsos sucesivos tengan amplitudes que corresponden a valores de muestras sucesivas. Este tren de impulsos es entonces procesado a través de un filtro pasa bajos ideal⁸ con ganancia T cuya frecuencia de corte sea mayor que w_M y menor que $w_s - w_M$. La salida resultante será exactamente igual a $x(t)$ ⁹.

⁸La función de este filtro pasa bajos es la de eliminar las infinitas copias generadas por la convolución de la señal con el tren de deltas, por lo que se recupera la copia original centrada en la frecuencia nula.

⁹La frecuencia $w = 2w_M$ se la conoce como *frecuencia de Nyquist*.

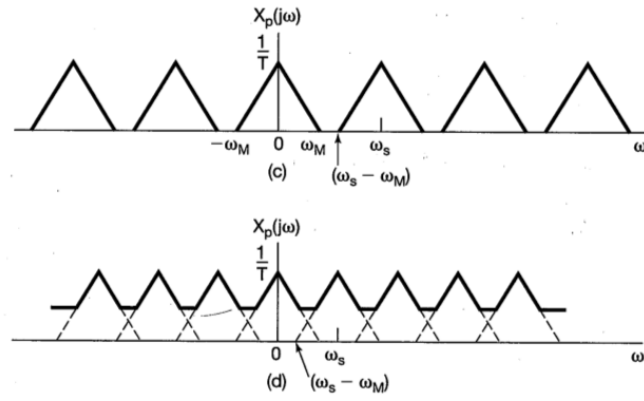


Figura 7.2: En la gráfica superior se tiene que $\omega_s > 2\omega_M$, y por lo tanto no existe solapamiento entre las copias. Por otra parte, en la señal de la gráfica inferior no se cumple dicha condición, por lo que existe aliasing.

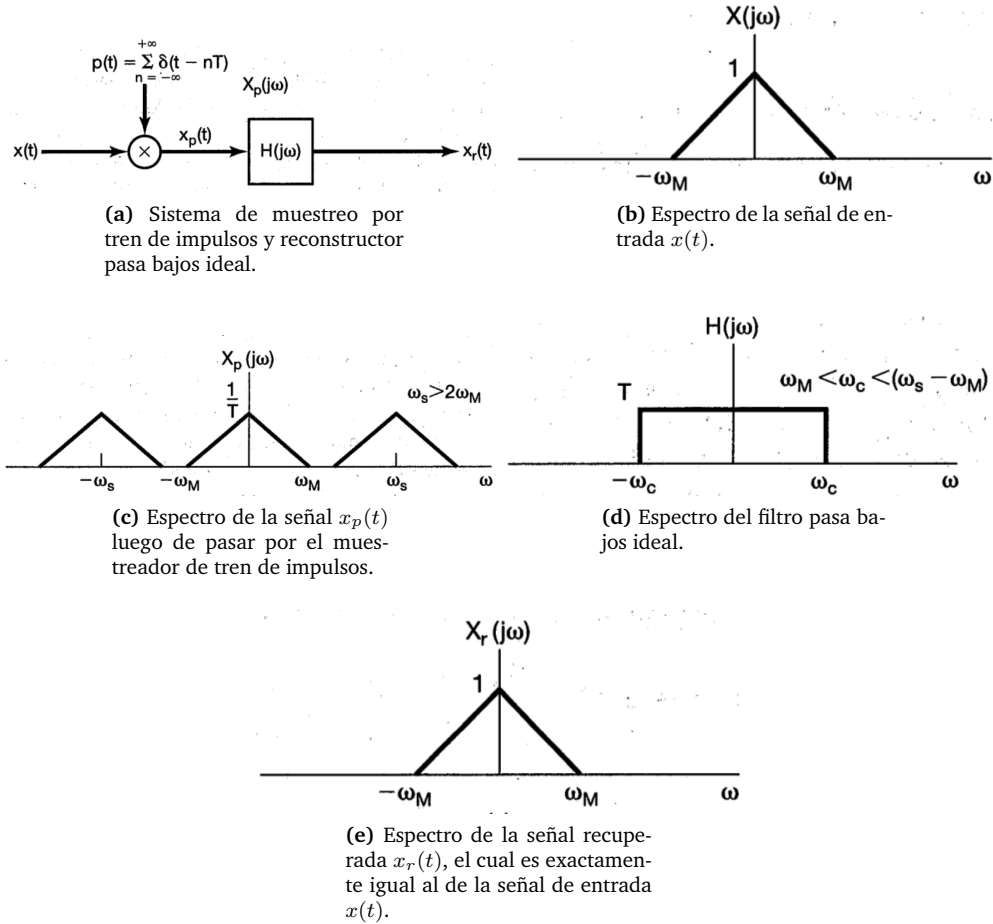


Figura 7.3: Recuperación exacta de una señal continua a partir de sus muestras.

7.1.2. Muestreo con un retenedor de orden cero

Debido a que en la realidad es muy complicada la construcción de un tren de impulsos como señal de muestreo, lo que se suele hacer es utilizar un *retenedor de orden cero* que lo que hace es muestrear a la señal en un instante determinado y se retiene dicho valor hasta el instante donde se toma una nueva muestra. Para poder reconstruir la señal de entrada a partir de la muestra, solo es necesaria la utilización de un filtro pasa bajos, el cual no deberá tener ganancia constante en toda su banda de paso.

Para poder analizar este filtro, se puede pensar que la señal muestreada $x_0(t)$ obtenida del retenedor, puede ser generada por mediante el muestreo por un tren de impulsos seguido por un sistema LTI con una respuesta rectangular al impulso (Ver figura 7.4).

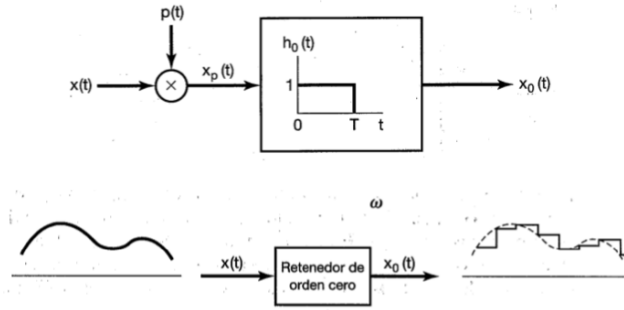


Figura 7.4: Sistema retenedor de orden cero, representado como un muestreador de impulsos en cascada con un sistema LTI de respuesta al impulso rectangular.

Siendo $h_0(t)$ la respuesta al impulso del sistema LTI que se ve en la figura 7.4, entonces su transformada de Fourier es:

$$\mathcal{F}\{h_0(t)\} = H_0(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega} e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

De esta forma, si se desea recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_0(t)$ es necesaria la construcción de un sistema reconstructor con respuesta al impulso $h_r(t)$ y transformada de Fourier $H_r(j\omega)$. Se puede observar, que si la conexión en cascada de $h_0(t)$ y $h_r(t)$ da como resultado un filtro pasa bajos ideal, se obtiene el mismo sistema reconstructor del muestreador de impulsos. De esta forma, siendo $H(j\omega)$ la respuesta al impulso de un pasa bajos ideal, se tiene que:

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} H(j\omega)}{\frac{2 \sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega}}$$

En la figura 7.5 se tiene la conexión de este sistema, y se tiene que la señal de salida $r(t)$ es exactamente igual a $x(t)$.

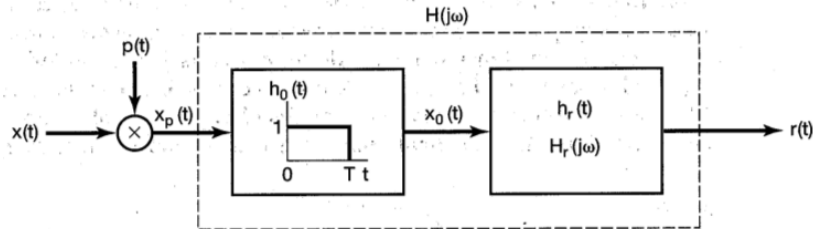


Figura 7.5: Retenedor de orden cero en cascada con el filtro reconstructor.

7.1.3. Interpolación

Como se vio anteriormente, si se tiene una señal de banda limitada, para una frecuencia de muestreo suficientemente grande, es posible reconstruir a la señal de manera exacta mediante el uso de un filtro pasa bajos.

Se tiene entonces que la señal reconstruida se puede expresar como:

$$x_r(t) = (x_p(t) \star h(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT)$$

Si se utiliza un filtro pasa bajos ideal, este proceso se lo conoce como *interpolación de banda limitada*, y la respuesta al impulso de dicho filtro tiene la forma:

$$h(t) = \frac{w_c T \sin(w_c t)}{\pi w_c t} \rightarrow x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{w_c T \sin(w_c (t - nT))}{\pi w_c (t - nT)}$$

En la figura 7.6 se tiene el resultado de la reconstrucción $x_r(t)$ usando $w_c = w_s/2$.

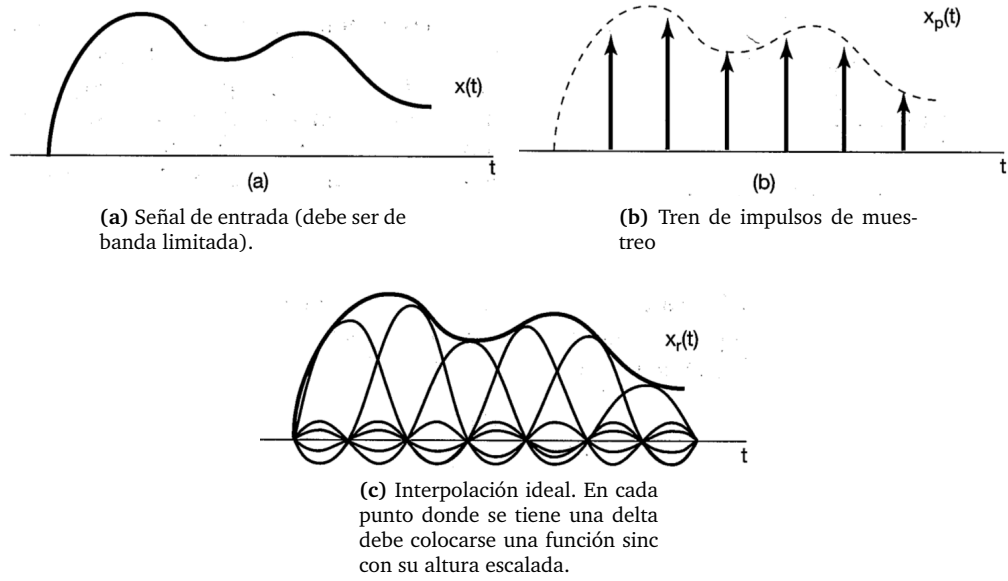


Figura 7.6: Interpolación usando un filtro pasa bajos ideal (en el dominio del tiempo es una función sinc, mientras que en la frecuencia tiene una respuesta rectangular).

Como ya se menciono anteriormente, se intenta reemplazar a los filtros pasa bajos por retenedores de orden cero debido a que son menos complejos que los primeros. Sin embargo, en algunos casos se desea tener una interpolación mas suave, por lo que se utilizan *retenedores de orden superior*, que consisten en la conexión en cascada de varios retenedores de orden cero. Se tiene entonces que la transferencia de un *retenedor de orden n* es:

$$H(jw) = \frac{1}{T} \left(\frac{\sin(w \frac{T}{2})}{w/2} \right)^{n+1}$$

Al retenedor de orden uno se lo suele conocer como interpolador lineal, y produce una interpolación continua pero una primera derivada discontinua. En el caso del retenedor de orden 2 se tiene una interpolación continua, una primera derivada continua, pero la segunda derivada es discontinua. Estas relaciones se pueden continuar para retenedores de ordenes mayores.

7.2. Muestreo de señales discretas

7.2.1. Muestreo con tren de impulsos

Si se considera una señal de entrada $x[n]$ de banda limitada, se puede definir a la señal muestreada $x_p[n]$ como:

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & n = kN \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Este proceso se puede realizar multiplicando a la señal de entrada $x[n]$ por un tren de deltas $p[n]$, de forma que se tiene:

$$x_p[n] = x[n] p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN]$$

De esta forma, teniendo el producto en el tiempo, se debe desarrollar la convolución en la frecuencia:

$$\begin{cases} X_p(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta}) X(e^{j(w-\theta)}) d\theta \\ P(e^{jw}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w - kw_s) \end{cases}$$

donde $w_s = \frac{2\pi}{N}$ es la frecuencia de muestreo. Se obtiene finalmente entonces que:

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\Omega - k\Omega_s)})$$

Como ya se sabe, $X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ es una función periódica en 2π , mientras que ahora $X_p(j\Omega)$ consiste en copias de dicha transformada, pero con período Ω_s . De esta forma, si se cumple con la condición de Nyquist a la hora de muestrear, será posible recuperar $x[n]$ a partir de la señal muestreada utilizando un filtro pasabajos. En la figura 7.7 se tiene una representación de este proceso.

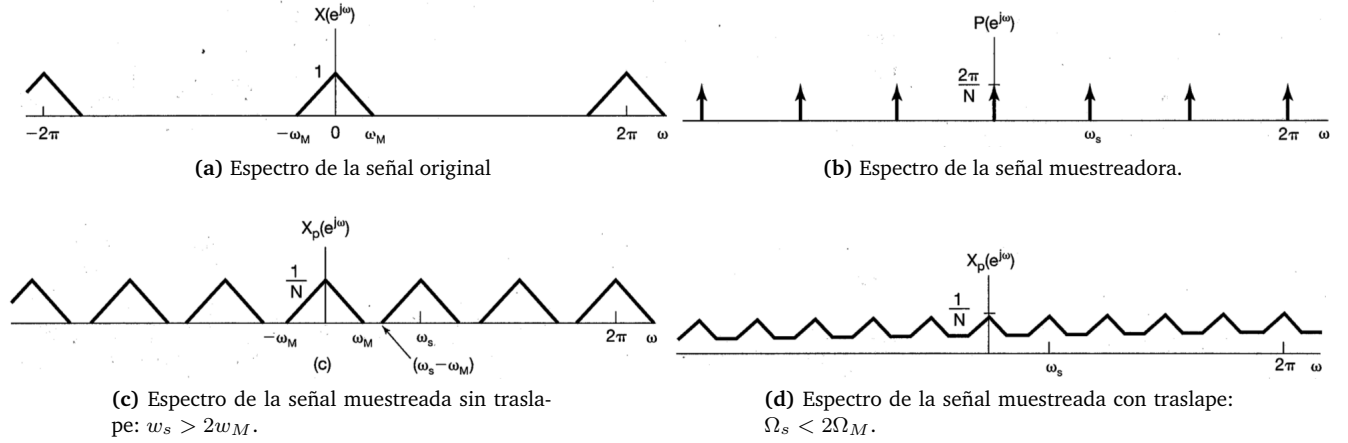


Figura 7.7: Muestreo con tren de impulsos de una señal discreta.

7.2.2. Decimación en tiempo discreto y sobremuestreo

El proceso de eliminar muestras dentro de una secuencia de muestras de una señal, se lo conoce como *decimación*. En general esto es útil para reducir el tamaño de almacenamiento en casos donde se sabe que existen muestras redundantes. Si se tiene una señal $x[n]$ y se la muestrea cada N_1 muestras, se tiene que:

$$x_p[n] = x[nN_1]$$

Sin embargo, esta señal muestreada $x_p[n]$ se la puede decimar volviéndola a muestrear con un periodo N_2 . Se tiene entonces:

$$x_b[n] = x_p[nN_2] = x[nN_1N_2]$$

A partir de estas relaciones, es posible analizar lo que sucede con la transformada de Fourier:

$$X_b(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[k] e^{-j\Omega k} \rightarrow k = \frac{n}{N} \in \mathbb{Z} \rightarrow X_b(j\Omega) = \sum_{n=\text{múltiplo de } N} x_p[n] e^{-j\Omega \frac{n}{N}}$$

Debido a que $x_p[n] = 0$ cuando n no es múltiplo de N , se escribe directamente:

$$X_b(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[k] e^{-j\Omega \frac{k}{N}}$$

Sin embargo, el miembro derecho de esta igualdad corresponde a la transformada de Fourier de $x_p[n]$, por lo que se concluye que:

$$X_b(j\Omega) = X_p\left(j\frac{\Omega}{N}\right)$$

En la figura 7.8 se tienen los efectos que provoca la decimación tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Se puede ver en la figura 7.8 que el proceso de decimación, consiste en ampliar el espectro de la secuencia original sobre una porción mayor de la banda de frecuencia.

En algunas aplicaciones, se desea realizar el proceso inverso al de decimación, el cual consiste en agregar $N - 1$ muestras entre cada muestra obtenida de la señal. Este proceso se lo conoce como *sobremuestreo* o *interpolación*. Los efectos que provoca este proceso son inversos a los vistos para la decimación, ya que se tiene un aumento en la velocidad de muestreo.

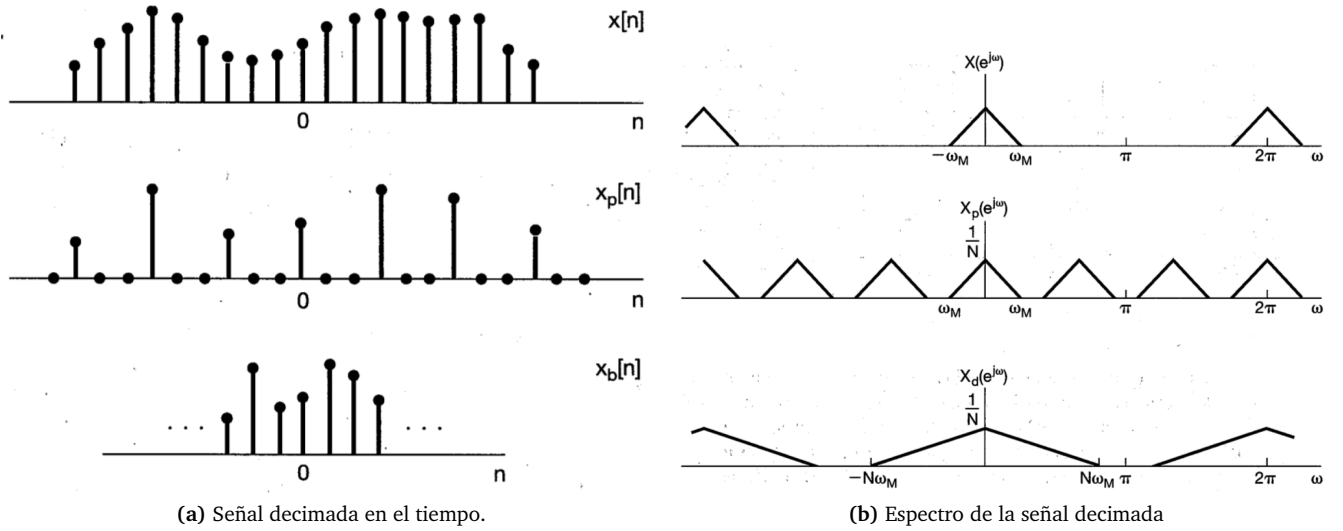


Figura 7.8: Efectos de la decimación en el tiempo y en la frecuencia.

8. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La DFT en lugar de ser una función continua con la composición armónica de una señal, consiste en una secuencia de muestras equiespaciadas en frecuencia de la Transformada de Fourier de la señal. Esto permite trabajar con señales reales que no tienen la forma de funciones analíticas, e incluso es posible analizar señales que no poseen un ancho de banda acotado.

8.1. Representación se secuencias periódicas

Sea una función periódica $x[n] = x[n + rN]$, la cual tiene una representación en Serie de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Los coeficientes a_k se obtienen a partir de:

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Notar que estos coeficientes también son periódicos, ya que se cumple que: $a_0 = a_N$, $a_1 = a_{N+1}$, ..., $a_k = a_{N+k}$. De esta forma, existe una dualidad entre el dominio del tiempo y la frecuencia para las representaciones en Serie de Fourier de secuencias periódicas. Este conjunto se lo denota como *Discrete Fourier Series (DFS)*:

$$\begin{cases} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} & \text{Ecuación de síntesis} \\ a_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} & \text{Ecuación de análisis} \end{cases}$$

8.2. Muestreo de la Transformada de Fourier

Sea una secuencia aperiódica $x[n]$, donde $X(j\Omega)$ es su Transformada de Fourier. Sea $\tilde{X}[k]$ una secuencia de muestras equiespaciadas de $X(j\Omega)$ con $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}$:

$$\tilde{X}[k] = X\left(e^{j \frac{2\pi k}{N}}\right)$$

Debido a la periodicidad de $X(j\Omega)$, se puede afirmar que $\tilde{X}[k]$ también es periódica con periodo N . Debido a esto, se puede pensar a $\tilde{X}[k]$ como los coeficientes de la Serie de Fourier de una señal $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Por lo tanto, se puede escribir:

$$X(j\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} \rightarrow \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} \right)}_{\tilde{p}[n-m]}$$

Se puede observar que se obtiene una convolución. La señal $\tilde{p}[n-m]$ se puede escribir como:

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN]$$

Se tiene entonces:

$$\tilde{x}[n] = \left(x[n] \star \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

Por lo tanto, $\tilde{x}[n]$ corresponde a una versión periodizada de $x[n]$, ya que ésta se encuentra convolucionada con un tren de pulsos, lo que en el dominio de las frecuencias corresponde a una multiplicación del espectro de $x[n]$ con un tren de pulsos, que es lo que da origen a las muestras de dicho espectro. De esta forma, en caso de que $x[n]$ sea una señal de longitud no finita, no será posible realizar un muestreo sin aliasing (en este caso el traslape se dará en el tiempo).

En resumen, se tiene que las muestras de la Transformada de Fourier de una señal aperiódica $x[n]$ coinciden con los coeficientes de la Serie de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ obtenida mediante la suma de replicas periódicas de $x[n]$. En caso de que $x[n]$ tenga una longitud finita y se tomen suficientes muestras (en general un número mayor o igual que la longitud de $x[n]$), entonces va a ser posible recuperar la señal original:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La ventaja de este método es que no es necesario obtener la transformada de Fourier de la señal original, lo que puede llegar a ser muy costoso, ya que lo que se hace es obtener una secuencia finita de muestras que contienen la misma información.

8.3. Representación de Fourier de secuencias de duración finita

Sea $x[n]$ una secuencia finita de muestras de largo N , donde $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$. A partir de esta secuencia, se puede obtener la siguiente secuencia infinita periódica:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] = x[(n \text{ modulo } N)] = x[((n))_N]$$

De esta forma, se puede recuperar a $x[n]$ mediante:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Recordando de la sección anterior, los coeficientes de la Serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ son muestras equiespaciadas por $2\pi/N$ de la transformada de Fourier de $x[n]$.

Los coeficientes $\tilde{X}[k]$ de la Serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$, son una secuencia periódica de período N . De esta forma, se pueden relacionar también los coeficientes de la Serie de Fourier de $X[k]$ mediante:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \rightarrow \tilde{X}[k] = X[(k \text{ modulo } N)] = X[((k))_N]$$

Debido a que $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{x}[n]$ son simplemente versiones periodizadas en N de $X[k]$ y $x[n]$, y como solo interesan aquellos N valores que se encuentran en el intervalo de estudio, es posible escribir:

$$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \\ x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \end{cases} \begin{array}{l} \text{Ecuación de Análisis} \\ \text{Ecuación de Síntesis} \end{array}$$

8.4. Propiedades de la DFT

En la figura 8.1 se tiene una tabla con un resumen de las propiedades de la DFT.

Finite-Length Sequence (Length N)	N -point DFT (Length N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
6. $W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X^*[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X^*[((-k))_N]\} \\ X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X^*[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$

Figura 8.1: Resumen de las propiedades de la DFT.

Linealidad

Sean dos secuencias finitas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de largo N_1 y N_2 respectivamente. Sea la combinación lineal:

$$x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$$

Donde el largo de $x_3[n]$ es $N_3 = \max(N_1, N_2)$. Para poder obtener la DFT, es necesario operar con vectores de igual largo, por lo que se deben completar con $|N_2 - N_1|$ ceros aquella secuencia que es mas corta. Bajo estas condiciones es posible afirmar:

$$\begin{cases} x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_1[k] \\ x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_2[k] \end{cases} \rightarrow \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} \alpha X_1[k] + \beta X_2[k]$$

Corrimiento circular

Debido a que la señal debe ser nula fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$, no es posible realizar un desplazamiento lineal como se hacia en las secciones anteriores. Para poder solucionar esto, lo que se hace en realidad es aplicar el corrimiento no sobre $x[n]$, sino que se aplica sobre la versión periodizada $\tilde{x}[n]$, la cual no tiene problemas para ser desplazada. Una vez se aplicó el desplazamiento a $\tilde{x}[n]$, lo que se hace es tomar aquellos puntos en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$, y esta

nueva secuencia finita será $x[n]$ pero desplazada. En la figura 8.2 se tiene el procedimiento descrito para poder realizar un corrimiento circular.

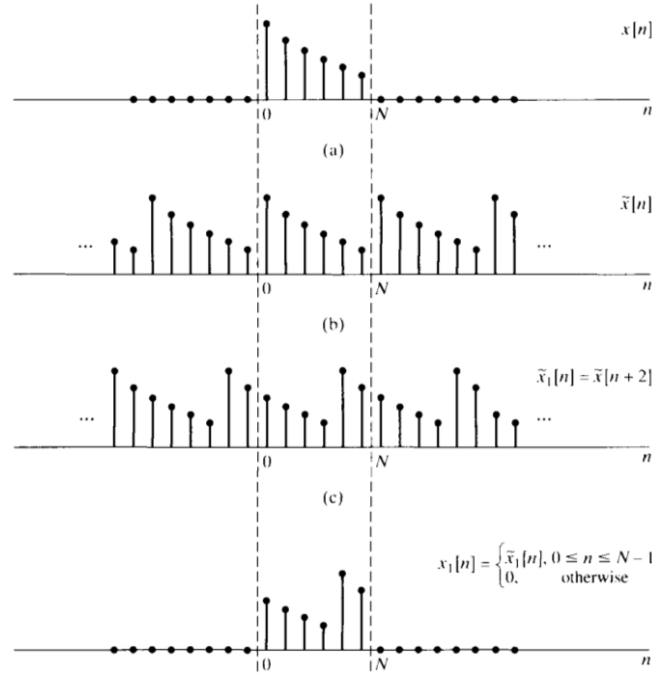


Figura 8.2: Ejemplo de corrimiento circular.

Este procedimiento se puede pensar también, como que se realiza un corrimiento lineal, pero aquellos puntos de la secuencia que abandonan la región de análisis ($0 \leq n \leq N-1$), son introducidos nuevamente por el extremo opuesto al que abandonaron.

Matemáticamente, el corrimiento circular se puede ver como:

$$x[((n-m))_N], 0 \leq n \leq N-1 \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k] e^{-j \frac{2\pi}{N} km}$$

Dualidad

Debido a la gran relación entre la DFT y la Serie de Fourier, es esperable que exista una propiedad de dualidad similar a la que posee ésta última. Sea $\tilde{x}[n]$ la versión periodizada de $x[n]$ tal que cumple:

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} \tilde{X}[k]$$

Por la propiedad de dualidad de las Series de Fourier se cumple que:

$$\tilde{X}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFS}} N \tilde{x}[-k]$$

Para el caso de la DFT se tiene entonces que:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X[k]$$

entonces la propiedad de dualidad impone que:

$$X[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} N x[(-k)_N], 0 \leq k \leq N-1$$

Propiedades de simetría

Nuevamente, debido a la relación con la Serie de Fourier, algunas propiedades se pueden derivar de las que se pueden ver en las figuras 4.2 y 4.3.

En cuanto a la conjugación, se puede establecer que:

$$\begin{cases} x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*[((-k))_N] & 0 \leq n \leq N-1 \\ x^*[((-n))_N] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X^*[k] & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Por otra parte, se puede realizar una descomposición de $x[n]$ en dos secuencias que corresponden a un período de la señal conjugada simétrica y un periodo de la señal conjugada antisimétrica de la señal periodizada $\tilde{x}[n]$. Se tiene entonces que:

$$\begin{cases} \tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]) & \text{Parte conjugada simétrica de } \tilde{x}[n] \\ \tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]) & \text{Parte conjugada antisimétrica de } \tilde{x}[n] \end{cases}$$

Se puede definir entonces:

$$\begin{cases} x_{ep}[n] = \tilde{x}_e[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ x_{op}[n] = \tilde{x}_o[n] & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[(n))_N + x^*[((-n))_N]) \\ x_{op}[n] = \frac{1}{2}(x[(n))_N - x^*[((-n))_N]) \end{cases}$$

Como $((-n))_N = (N-n)$ y $((n))_N = n$ para $0 \leq n \leq N-1$, se puede escribir que:

$$\begin{cases} x_{ep}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[N-n]) & 1 \leq n \leq N-1 \\ x_{ep}[0] = \mathcal{Re}(x[0]) \\ x_{op}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[N-n]) & 1 \leq n \leq N-1 \\ x_{op}[0] = j\mathcal{Im}(x[0]) \end{cases}$$

De esta descomposición, se puede escribir que:

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n]$$

A partir de estas propiedades, se pueden obtener las siguientes:

$$\begin{cases} \mathcal{Re}(x[n]) \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{ep}[k] \\ j\mathcal{Im}(x[n]) \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} X_{op}[k] \\ x_{ep}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} \mathcal{Re}(X[k]) \\ x_{op}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{DFT}} j\mathcal{Im}(X[k]) \end{cases}$$

Convolución circular

Sean dos señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de largo N , donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son sus respectivas DFT's. Sea $x_3[n]$ un periodo de la señal $\tilde{x}_3[n]$, de forma tal que se cumple que $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$. Para conocer esta señal, se puede proceder como:

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N] x_2[((n-m))_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Como $((m))_N = m$ para $0 \leq n \leq N-1$ se puede escribir:

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Esta expresión corresponde con la *convolución circular*, que se diferencia de la lineal en que el corrimiento en el tiempo se debe hacer de forma circular. La convolución circular se expresa como:

$$x_3[n] = (x_1[n] \odot x_2[n]) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[((n-m))_N] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Debido a que la convolución circular y la convolución lineal solo difieren en la forma de desplazar las muestras, todas las propiedades de la convolución lineal siguen valiendo para la convolución circular.

En la figura 8.3 se tiene un ejemplo de la convolución circular.

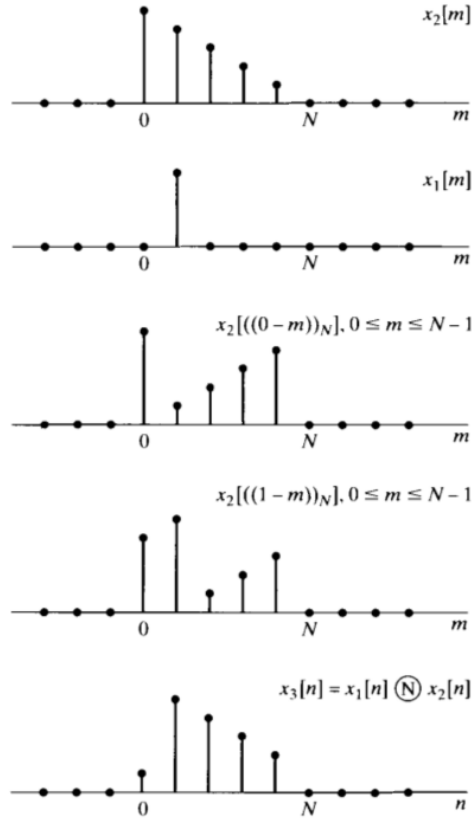


Figura 8.3: Ejemplo de convolución circular.

9. Transformada de Laplace

La transformada continua de Fourier proporciona una representación para señales como combinaciones lineales de exponenciales complejas de la forma e^{st} con $s = jw$. Sin embargo, la propiedad de las funciones propias continúa siendo válida para valores arbitrarios de s y no solo a valores que son puramente imaginarios. Por lo tanto, se puede decir que la *Transformada de Laplace* se trata de una generalización de la transformada de Fourier.

En las secciones previas se mostró que la respuesta de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ a una exponencial compleja es:

$$y(t) = H(s)e^{st} \rightarrow \text{donde } H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

Para una $s = jw$ imaginaria pura, la integral corresponde a la transformada de Fourier de $h(t)$. De esta forma, la Transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt} \quad \text{Transformada de Laplace}$$

Donde la variable compleja s puede escribirse como $s = \sigma + jw$. Se puede ver que para el caso particular donde $s = jw$, la transformada de Laplace corresponde a la transformada de Fourier:

$$X(s)]_{s=jw} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Otra relación que se tiene con la transformada de Fourier se puede ver con valores de s arbitrarios:

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + jw)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{jw t}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se puede obtener como la transformada de Fourier de dicha señal pero multiplicada por una exponencial real en el tiempo. Se puede observar, que al tener exponenciales reales, la transformada de Laplace puede no converger para todos los valores de σ . Por lo tanto, para poder definir la transformada de Laplace de una señal, es necesario definir también la *región de convergencia (ROC)* donde es válida dicha transformada.

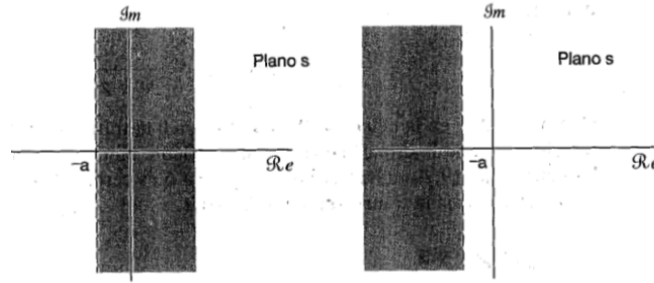


Figura 9.1: Ejemplo de una ROC para la transformada de Laplace. Estas bandas pueden ocupar todo el plano complejo, pero lo importante es que sus limites están dados por $\sigma = \text{cte}$.

Debido a que el factor que provoca las inestabilidades es σ , si se hace un gráfico de la variable s , se puede observar que las regiones de convergencia corresponden a bandas verticales, como se puede ver en la figura 9.1.

Un caso importante de transformadas de Laplace, es aquel en que ésta se encuentra expresada como un polinomio de funciones:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Este tipo de expresiones son muy comunes cuando se analizan sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Excepto por un factor de escala, los polinomios del numerador y del denominador pueden especificarse por sus raíces, por lo que marcar la localización de las raíces de $N(s)$ y $D(s)$ en el plano s indicando la ROC proporciona una forma gráfica conveniente para describir la transformada de Laplace.

Para las transformadas racionales de Laplace, las raíces del polinomio del numerador son conocidas como *ceros* de $X(s)$, y las raíces del polinomio del denominador son conocidas como *polos* de $X(s)$, y para esos valores se cumple que $X(s) \rightarrow \infty$. La representación de $X(s)$ mediante sus polos y sus ceros en el plano s se conoce como el *diagrama de polos y ceros*¹⁰.

9.1. ROC para la Transformada de Laplace

A continuación se enunciarán algunas de las restricciones importantes que deben cumplir las regiones de convergencia.

Propiedad 1: La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje jw en el plano s .

Esta propiedad se obtiene del hecho que la región de convergencia consiste en aquellos valores de s para los cuales $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \rightarrow \text{Sólo depende de } \sigma$$

Propiedad 2: Para la transformada racional de Laplace, la ROC no contiene ningún polo.

La razón de esto es que la transformada diverge en los polos, por lo que no es posible incluir dichos puntos en la ROC.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es de duración finita y es absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano s completo.

Esta propiedad se debe a que si una señal es de duración finita, significa que vale cero por fuera de un intervalo de longitud T . Por esta razón, al multiplicarla por el factor $e^{-\sigma t}$, este conjunto seguirá siendo absolutamente integrable para valores finitos de σ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{T_1}^{T_2} M e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Por esta razón, se puede decir que la ROC es todo el plano s .

Propiedad 4: Si $x(t)$ es una *señal a derecha* y si la línea $\Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re(s) > \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una señal a derecha es aquella para la cual $x(t) = 0$ antes de algún tiempo finito T_1 . Con esta propiedad se puede ver que para una señal derecha, la ROC es un semiplano infinito a derecha.

¹⁰Generalmente los polos se marcan con una cruz (\times) y los ceros con un círculo (\circ)

Propiedad 5: Si $x(t)$ es una *señal a izquierda* y si la línea $\Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los cuales $\Re(s) < \sigma_0$ también estarán en la ROC.

Una *señal izquierda* es aquella para la cual $x(t) = 0$ después de algún tiempo finito T_2 . En este caso se tiene que para una *señal izquierda*, la ROC es un semiplano infinito a izquierda.

Propiedad 6: Si $x(t)$ es una *señal bilateral* y si la línea $\Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá en una banda en el plano s que incluya $\Re(s) = \sigma_0$.

Una *señal bilateral* es aquella que tiene extensión infinita para todo valor de t .

En la figura 9.2 se tiene una representación de estas últimas 3 propiedades.

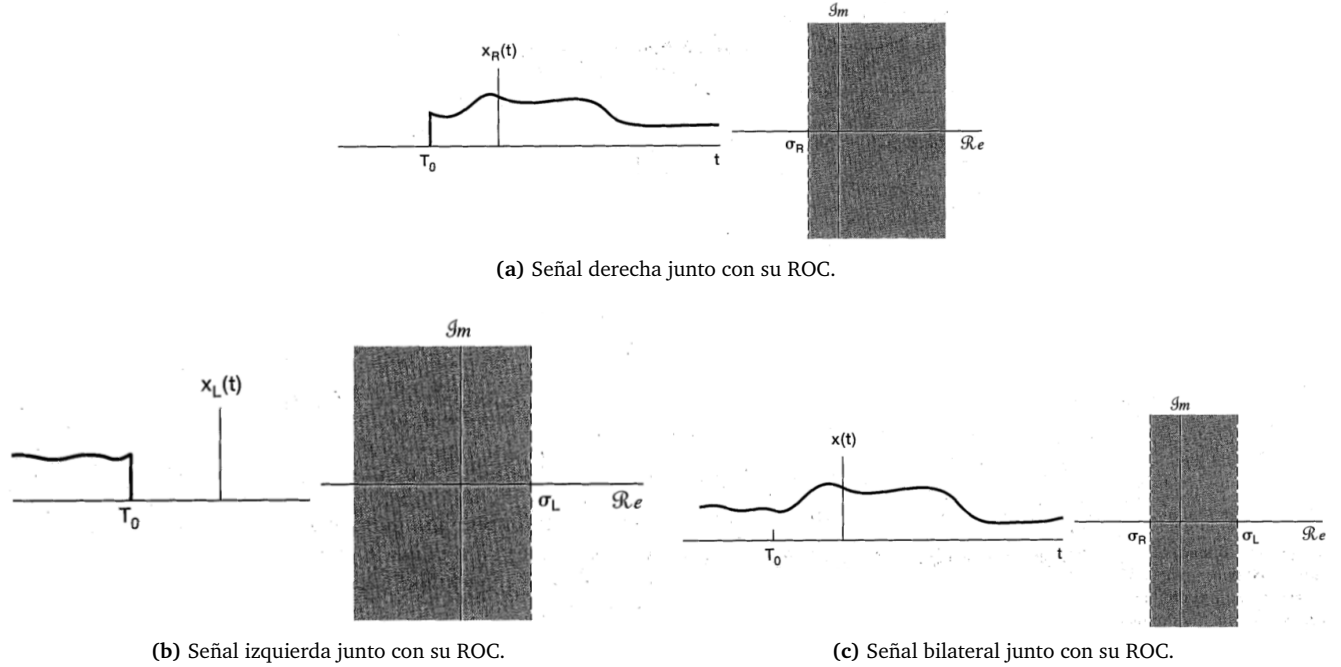


Figura 9.2: Señales derecha, izquierda y bilateral junto con sus respectivas regiones de convergencia.

Con estas propiedades, se puede afirmar que para cualquier señal que tenga transformada de Laplace, la ROC debe ser el plano s completo si la señal es de longitud finita, debe ser el semiplano izquierdo si la señal es izquierda, debe ser el semiplano derecho si la señal es derecha, o debe ser una franja si la señal es bilateral. Existen solo estas cuatro posibilidades para las regiones de convergencia, y en caso de no tener ninguna de estas significa que no existe la transformada de Laplace.

Propiedad 7: Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo de $X(s)$ está contenido en la ROC.

Propiedad 8: Si la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es racional, entonces si $x(t)$ es derecha, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la derecha del polo localizado más hacia la derecha. Para una señal $x(t)$ izquierda, la ROC será la región en el plano s que se encuentra a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

Propiedad 9: Para que exista la transformada de Fourier de $x(t)$, la ROC de la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ debe contener el eje jw del plano s .

9.2. Transformada Inversa de Laplace

Sabiendo que $\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$, es posible obtener la transformada inversa de Laplace a partir de la de Fourier:

$$X(\sigma + jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-jw t} dt \rightarrow x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + jw)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + jw)e^{jw t} dw$$

Por lo tanto, multiplicando a ambos lados por $e^{-\sigma t}$ se tiene:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + jw)e^{(\sigma + jw)t} dw$$

Haciendo el cambio de variables $s = \sigma + jw$ se tiene que $ds = jdw$, por que lo finalmente se tiene:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad \text{Transformada Inversa de Laplace}$$

Si bien el calculo de la transformada inversa implica la integración de contornos en el plano complejo, en general no será necesario resolverla ya que es posible utilizar la técnica de expansión por fracciones simples.

9.3. Evaluación geométrica de la Transformada de Fourier a partir del diagrama de polos y ceros

Como se vio anteriormente, la transformada de Fourier constituye la transformada de Laplace evaluada en el eje jw . Para desarrollar el procedimiento, se considera primero una transformada de Laplace con un solo cero (es decir $X(s) = s - \alpha$), la cual se evalúa en un valor específico de $s = s_1$. La expresión algebraica $s_1 - \alpha$ es la suma de dos vectores en el plano complejo: El vector resultante es entonces un vector que va desde el punto $s = \alpha$ y termina en $s = s_1$. Por lo tanto, el valor de $X(s_1)$ tiene una magnitud igual a la longitud de este vector, y un ángulo que consiste en el ángulo del vector con respecto al eje real.

Si en lugar de un cero $X(s)$ tiene un único polo (es decir $X(s) = \frac{1}{s - \alpha}$), el procedimiento es el mismo, salvo que el valor de $X(s_1)$ tiene una magnitud que es igual al recíproco de la longitud del vector resultante, y el ángulo es el negativo del ángulo del vector con el eje real.

Una transformada de Laplace mas general se puede escribir como el producto de sus polos y ceros de la forma:

$$X(s) = M \frac{\prod_{i=1}^R (s - \beta_i)}{\prod_{j=1}^P (s - \alpha_j)}$$

A partir de esta expresión, se puede deducir que la magnitud del valor de $X(s_1)$ se obtiene como el producto de M con el producto de todas las longitudes de los vectores ceros $s_1 - \beta_i$, todo dividido por el producto de todas las longitudes de los vectores polos $s_1 - \alpha_j$. Por otra parte, el ángulo de $X(s_1)$ se obtiene sumando todos los ángulos de los vectores ceros y restando todos los ángulos de los vectores polos (en caso de que M sea negativo, se debe incluir un ángulo adicional π).

Este procedimiento es muy útil no solo para conocer de forma geométrica algunos valores de las transformadas de Laplace y de Fourier, sino que también permite conocer la forma de los diagramas de Bode.

9.4. Propiedades de la Transformada de Laplace

Linealidad

Si se consideran dos señales $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ y $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$ con sus respectivas ROC (R_1 y R_2), se cumple que:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX_1(s) + bX_2(s) \quad \text{La ROC contiene a } R_1 \cap R_2$$

Se puede ver que la ROC resultante contiene a la intersección de cada una de las ROC's, la cual puede resultar en un conjunto vacío indicando que no existe transformada de Laplace para dicha señal. En otros casos, puede suceder que la ROC resultante sea mas grande que la intersección.

Desplazamiento en el tiempo

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) e^{-st_0} \quad \text{con ROC} = R$$

Desplazamiento en frecuencia

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$x(t) e^{s_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0) \quad \text{con ROC} = R + \mathcal{R}e(s_0)$$

Esto es, la ROC asociada con $X(s - s_0)$ es la de $X(s)$ desplazada por $\mathcal{R}e(s_0)$.

Escalamiento en tiempo

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad \text{con ROC} = \frac{R}{\alpha}$$

Una consecuencia de esto resulta en que:

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(-s) \quad \text{con ROC} = -R$$

Conjugación

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*) \quad \text{con ROC} = R$$

Convolución

Si se consideran dos señales $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$ y $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$ con sus respectivas ROC (R_1 y R_2), se cumple que:

$$(x_1(t) \star x_2(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s) \quad \text{con ROC conteniendo a } R_1 \cap R_2$$

Diferenciación en el dominio del tiempo

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) \quad \text{con ROC conteniendo a } R$$

Diferenciación en el dominio de la frecuencia

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds} \quad \text{con ROC} = R$$

Integración en el dominio del tiempo

Sea $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$, siendo la región R su ROC, se tiene:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s) \quad \text{con la ROC conteniendo } R \cap \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$$

Teorema del valor inicial y valor final

Bajo las restricción de que $x(t) = 0$ para $t < 0$, y que $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden mayor en el origen, es posible establecer las siguientes relaciones:

1. *Teorema del valor inicial:*

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

2. *Teorema del valor final:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

En la figura 9.3 se tiene un resumen de todas estas propiedades mencionadas.

Sección	Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	ROC
		$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
9.5.1	Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Desplazamiento en el dominio de s	$e^{st_0}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s - s_0$ está en R)
9.5.4	Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
9.5.5	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.7	Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.8	Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap [\operatorname{Re}[s] > 0]$
Teoremas del valor inicial y final				
9.5.10	Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces			
			$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$	
			$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$	

Figura 9.3: Propiedades de la transformada de Laplace.

9.5. Caracterización de sistemas LTI usando la Transformada de Laplace

La importancia de estos sistemas radica en la propiedad de convolución de la transformada de Laplace:

$$y(t) = (h(t) \star x(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = H(s)X(s)$$

Este desarrollo es similar al realizado para la transformada de Fourier, ya que si se toma el caso particular de $s = j\omega$ se deben obtener los mismos resultados.

A la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $H(s)$, se la conoce como *función del sistema* o *función transferencia*. A continuación se muestran algunas propiedades de dicha función.

9.5.1. Causalidad

Para un sistema LTI causal la respuesta al impulso es nula para $t < 0$ (y por tanto se trata de una señal derecha), lo cual implica que *la ROC asociada con la función del sistema para un sistema causal es un semiplano derecho*. En general, el recíproco de esto no es verdadero, ya que si se tiene una ROC a derecha, no se garantiza que sea un sistema causal, solo se garantiza que la respuesta al impulso es derecha. Sin embargo, si se trata de un sistema con una función transferencia racional, la vuelta sí es válida, por lo que si se tiene una ROC a derecha entonces el sistema es causal.

De forma análoga, se puede definir la anticausalidad. Un sistema es anticausal si su respuesta al impulso es nula para $t > 0$. Al igual que antes, si $H(s)$ es racional, entonces se cumple que si la ROC es a izquierda se trata de un sistema anticausal y viceversa.

9.5.2. Estabilidad

La estabilidad de un sistema LTI es equivalente a que su respuesta al impulso sea absolutamente integrable. Por esta razón, se tiene que un sistema LTI es estable si y solo si la ROC de $H(s)$ incluye al eje $j\omega$ (es decir que existe la transformada de Fourier).

Una consecuencia de esto, es que si se tiene un sistema causal con función $H(s)$ racional, es estable si y solo si todos los polos de $H(s)$ caen en la parte izquierda del plano s , es decir, todos los polos tienen parte real negativa.

9.6. Transformada Unilateral de Laplace

Este tipo de transformada es muy importante para el análisis de sistemas causales y en particular, en los sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero. Se define a la *Transformada Unilateral de Laplace* como:

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Se puede ver que la diferencia entre esta transformada y la analizada en las secciones previas, reside en el límite inferior de la integral. Para los casos donde $x(t) = 0$ para $t < 0$, se cumple que la transformada unilateral es idéntica a la transformada bilateral de Laplace, y por lo tanto todas las propiedades mencionadas se siguen cumpliendo. De estas propiedades, se puede deducir que la ROC para una transformada unilateral de Laplace siempre debe ser un semiplano derecho.

9.6.1. Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace

En la figura 9.4 se tiene un resumen de las propiedades de esta transformada.

Propiedad	Señal	Transformada unilateral de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0 t} x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Escalamiento en tiempo	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugación	$x^*(t)$	$x^*(s)$
Convolución (suponiendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son cero para $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s) \mathcal{X}_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} \mathcal{X}(s)$
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{X}(s)$$

Figura 9.4: Propiedades de la Transformada Unilateral de Laplace.

10. Transformada Z

La transformada Z de señales de tiempo discreto es el equivalente de la transformada de Laplace para señales de tiempo continuo, y cada una de ellas está relacionada con la correspondiente transformada de Fourier. Una ventaja de la utilización de esta transformada, es que la transformada de Fourier no converge para todas las secuencias, mientras que la transformada Z cubre una clase mas amplia de señales.

La Transformada Z de una señal $x[n]$ se define como:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Se puede ver en esta expresión, que si se evalúa a la transformada en $z = e^{j\omega}$, se obtiene como resultado a la transformada de Fourier de tiempo discreto de $x[n]$. Por lo tanto, al utilizar la transformada de Fourier, se está restringiendo a la variable z para que tenga modulo unitario.

Como z es un número complejo, puede ser expresado en modulo y ángulo de la forma:

$$z = r e^{j\omega}$$

La transformada Z queda entonces:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (r e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] r^{-n}) e^{-j\omega n}$$

Se puede ver que la transformada Z se corresponde a la transformada de Fourier de tiempo discreto de $x[n] r^{-n}$.

Si se analiza a la transformada Z en el plano complejo, se observa que $|z| = 1$ corresponde a una circunferencia de radio unitario. Este contorno se lo denomina *circunferencia unidad*, es el conjunto $z = e^{j\omega}$ para $\omega \in [0, 2\pi]$ ¹¹. De forma geométrica, se observa que la variable ω corresponde con el ángulo que forma el vector con el eje real (ver figura 10.1).

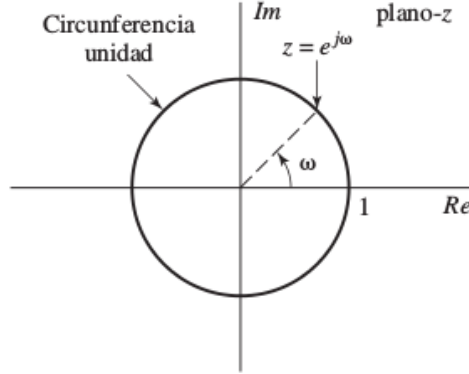


Figura 10.1: Circunferencia unidad en el plano complejo.

Si uno avanza por la circunferencia unidad desde $\omega = 0$ hasta $\omega = 2\pi$, es equivalente a conocer la transformada de Fourier en dichos puntos¹².

Al igual que ocurría con la transformada de Laplace, para poder representar una transformada Z no solo es necesaria su expresión algebraica, sino que también se hace necesario especificar su región de convergencia (ROC), que es la región donde la sumatoria infinita converge. Sabiendo que $\mathcal{Z}\{x[n]\} = \mathcal{F}\{x[n] r^{-n}\}$, para que exista la transformada Z, dicha señal debe ser absolutamente sumable:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] r^{-n}| < \infty$$

Se puede ver que la convergencia de la transformada Z es mas amplia que la de la de Fourier, ya que para señales que $x[n]$ que no son absolutamente sumables, puede que el producto $x[n] r^{-n}$ si lo sea. De forma mas general, la transformada

¹¹La transformada Z evaluada en la circunferencia unidad es la transformada de Fourier.

¹²Se debe recordar que la transformada de Fourier de tiempo discreto es periódica en 2π , y por lo tanto, se puede ver que en cada vuelta que se le da a la circunferencia unidad se observa siempre lo mismo. La transformada Z se corresponde con tomar el eje lineal de la transformada de Fourier entre 0 y 2π , y enrollarlo en una circunferencia.

Z de una señal converge si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |z|^{-n} < \infty$$

Se puede observar en esta expresión, que los contornos de las regiones de convergencia para la transformada Z se corresponden con circunferencias centradas en el origen (y por ende las ROC's son anillos). De acuerdo con esto, para que exista la transformada de Fourier de una señal, la ROC de su transformada Z debe contener a la circunferencia unidad.

Al observar la transformada Z, se puede ver que se trata de una serie de Laurent. Por lo tanto, es posible aplicar todos los teoremas sobre la variable compleja.

Al igual que para la transformada de Laplace, un tipo muy importante de transformadas Z es aquella que se puede expresar como una función racional:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Se tiene entonces que las raíces de $N(z)$ se corresponden con los ceros de la transformada, y las raíces de $D(z)$ son los polos de la transformada.

10.1. Propiedades de la ROC

A continuación se listan algunas propiedades de la región de convergencia para la transformada Z de una señal $x[n]$.

1. La región de convergencia en el plano z puede ser un anillo o un disco centrados en el origen. Es decir: $0 \leq r_L < |z| < r_R \leq \infty$.
2. La transformada de Fourier de $x[n]$ converge si y solo si la región de convergencia de la transformada Z de $x[n]$ contiene a la circunferencia unidad.
3. La región de convergencia no contiene ningún polo.
4. Si $x[n]$ es una *secuencia de duración finita*, es decir, una secuencia que es cero excepto en un intervalo finito $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, la región de convergencia es el plano z completo, pudiendo exceptuarse los valores $z = 0$ o $z = \infty$.
5. Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la izquierda*, es decir, una secuencia que es cero para $n < N_1 < \infty$, la región de convergencia se extiende hacia fuera desde el polo finito *mas exterior* de $X(z)$ hasta (y pudiendo incluir) el valor $z = \infty$.
6. Si $x[n]$ es una *secuencia limitada por la derecha*, es decir, una secuencia que es cero para $n > N_2 > -\infty$, la región de convergencia se extiende hacia dentro desde el polo finito *mas interior* de $X(z)$ hasta (y pudiendo incluir) el valor $z = 0$.
7. Una *secuencia bilateral* es una secuencia de duración infinita, no limitada por la izquierda ni por la derecha. Si $x[n]$ es una secuencia bilateral, la región de convergencia será un anillo en el plano z , limitado en el interior y el exterior por un polo y que no contendrá ningún polo.
8. La región de convergencia debe ser una región conexa.

10.2. Transformada Z inversa

La transformada Z inversa se define mediante la siguiente integral compleja:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

Donde C es un contorno cerrado dentro de la región de convergencia de la transformada Z. Debido a que es necesario realizar integrales en el plano complejo, no es común obtener la transformada inversa por definición, sino que se utilizan otro tipo de métodos al igual que se hace con la antitransformada de Laplace: Descomposición en fracciones simples, Desarrollo en serie de potencias.

10.3. Propiedades de la Transformada Z

A continuación se presentan las propiedades que tiene esta transformada.

Linealidad

Sean dos señales $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$ y $x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$ con sus respectivas regiones de convergencia R_{x_1} y R_{x_2} , se cumple que:

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \alpha X_1(z) + \beta X_2(z) \quad \text{La ROC contiene a } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

En el caso de secuencias con transformadas Z racionales, si los polos de $\alpha X_1(z) + \beta X_2(z)$ suman todos los polos de $X_1(z)$ y $X_2(z)$ (es decir, no hay cancelaciones polo-cero), la región de convergencia será exactamente igual a la intersección de las dos regiones de convergencia. Si la combinación lineal es tal que aparecen algunos ceros que cancelan polos, la región de convergencia puede ser mayor a la intersección.

Desplazamiento en el tiempo

Sea la señal $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ con región de convergencia R_x , se cumple que:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)z^{-n_0} \quad \text{ROC} = R_x \text{ (exceptuando la posible adición o eliminación de } z = 0 \text{ y } z = \infty)$$

Multiplicación por una secuencia exponencial

Sea la señal $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ con región de convergencia R_x , se cumple que:

$$x[n]z_0^n \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{ROC} = |z_0| R_x$$

Se puede ver que la región de convergencia de la nueva señal se encuentra comprimida o expandida dependiendo de los valores de $|z_0|$.

Diferenciación en frecuencia

Sea la señal $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ con región de convergencia R_x , se cumple que:

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = R_x$$

Conjugación

Sea la señal $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ con región de convergencia R_x , se cumple que:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*) \quad \text{ROC} = R_x$$

Inversión temporal

Sea la señal $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ con región de convergencia R_x , se cumple que:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x} \quad x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

Convolución

Sean dos señales $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)$ y $x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_2(z)$ con sus respectivas regiones de convergencia R_{x_1} y R_{x_2} , se cumple que:

$$(x_1[n] \star x_2[n]) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z) \quad \text{La ROC contiene a } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

Teorema del valor inicial y final

Sea $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$ tal que es cero para $n < 0$. Entonces vale:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Además, si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$$

En la figura 10.2 se tiene un resumen de las propiedades de la Transformada Z mencionadas en esta sección.

Número de propiedad	Referencia de sección	Secuencia	Transformada	RDC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contiene $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
2	3.4.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_x , excepto por la posible adición o eliminación del origen o del ∞
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$Re\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contiene R_x
7		$Im\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contiene R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contiene $R_{x_1} \cap R_{x_2}$

Figura 10.2: Resumen de propiedades de la Transformada Z.

10.4. Caracterización de sistemas LTI usando la Transformada Z

Gracias a la propiedad de convolución, la acción de un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ sobre una entrada $x[n]$ puede escribirse como:

$$y[n] = (h[n] * x[n]) \xleftrightarrow{Z} Y(z) = H(z)X(z)$$

donde $H(z)$ es la *transferencia del sistema*. Muchas propiedades de un sistema LTI se pueden determinar a través de $H(z)$ y su correspondiente ROC.

10.4.1. Estabilidad

A diferencia de lo que ocurriría con la Transformada de Fourier, utilizando la Transformada Z siempre se puede definir la transferencia de un sistema inestable. Nuevamente, para que un sistema sea estable, su respuesta al impulso debe ser absolutamente sumable, y por ende debe existir su respuesta en frecuencia:

$$H(jw) = H(z) \Big|_{z=e^{jw}}$$

Conociendo esto, se puede afirmar que un sistema LTI es estable si y solo si la ROC de su función transferencia contiene al círculo unidad: $|z| = 1$.

10.4.2. Causalidad

Para que un sistema LTI sea causal, se debe cumplir que $h[n] = 0, \forall n < 0$. Por lo tanto, un sistema LTI cuya función transferencia es racional, es causal si y solo si su ROC es el exterior de un círculo centrado en el origen que pasa por el polo más exterior (la ROC debe incluir el punto en el infinito). Además el grado del polinomio del numerador debe ser menor o igual al del denominador.

10.5. Transformada Z unilateral

La transformada Z definida en las secciones anteriores se corresponde con la transformada bilateral (es similar al caso de la transformada de Laplace). La transformada Z unilateral se define como:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Como la transformada Z unilateral ignora en efecto cualquier parte izquierda de la señal, las propiedades de la región de convergencia de la transformada Z unilateral serán las mismas que las de la transformada Z bilateral de una secuencia limitada por la izquierda que se obtendría suponiendo que los valores de la secuencia de partida son cero para $n < 0$. Es decir, la región de convergencia de todas las transformadas Z unilaterales será de la forma $|z| > r_R$, y en el caso de transformadas Z unilaterales racionales, la frontera de la región de convergencia estará definida por el polo más lejano al origen del plano z.

A. Fracciones simples

Este método permite descomponer fracciones de polinomios en suma de polinomios mas sencillos. Para esto es necesario utilizar algunas propiedades de la Transformada de Laplace.

Sea una fracción de polinomios de la forma:

$$H(s) = \frac{\gamma s + \chi}{(s - \alpha)(s - \beta)^2}$$

Asumiendo que α y β son positivos, este polinomio posee 3 raíces reales: una simple en α y una doble en β . Para poder descomponer en fracciones simples, lo que se debe hacer es:

1. Cada raíz del denominador se coloca como denominador de una nueva fracción de polinomios, pero en este caso van todas sumadas. En caso de tener raíces múltiples, éstas deben aparecer tantas veces como el orden de la raíz, pero cada vez con un orden menor:

$$H(s) = \frac{A}{s - \alpha} + \frac{B}{(s - \beta)^2} + \frac{C}{s - \beta}$$

2. Para calcular los coeficientes A , B y C se deben tomar las raíces de cada uno de los denominadores de los sumandos, y evaluarlas en la función original, pero eliminando aquella raíz que provoca la singularidad. En el caso de las raíces dobles, se debe realizar este mismo procedimiento tantas veces como el orden de la raíz, pero en lugar evaluarlo en la función, se debe evaluar en la derivada n -ésima (a medida que disminuye el exponente de la raíz en la fracción simple, debe aumentar el orden de la derivada):

$$\begin{aligned} \frac{A}{s - \alpha} &\rightarrow A = (s - \alpha) H(s) \Big|_{s=\alpha} \rightarrow A = \frac{\gamma\alpha + \chi}{(\alpha - \beta)^2} \\ \frac{B}{(s - \beta)^2} &\rightarrow B = (s - \beta)^2 H(s) \Big|_{s=\beta} \rightarrow B = \frac{\gamma\beta + \chi}{(\beta - \alpha)} \\ \frac{C}{s - \beta} &\rightarrow C = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \left((s - \beta)^2 H(s) \right) \Big|_{s=\beta} \rightarrow C = \frac{\gamma(\beta - \alpha) - (\gamma\beta + \chi)}{(\beta - \alpha)^2} \end{aligned}$$

Con estos pasos, se obtiene entonces:

$$H(s) = \frac{\gamma\alpha + \chi}{(\alpha - \beta)^2} \frac{1}{s - \alpha} + \frac{\gamma\beta + \chi}{(\beta - \alpha)} \frac{1}{(s - \beta)^2} + \frac{\gamma(\beta - \alpha) - (\gamma\beta + \chi)}{(\beta - \alpha)^2} \frac{1}{s - \beta}$$

El método general para una función $F(s) = \frac{1}{(s - \alpha)(s - \beta)^n}$ es:

$$F(s) = \frac{(s - \alpha) F(s) \Big|_{s=\alpha}}{s - \alpha} + \frac{1}{0!} \frac{(s - \beta)^n F(s) \Big|_{s=\beta}}{(s - \beta)^n} + \frac{1}{1!} \frac{\frac{d}{ds} ((s - \beta)^n F(s)) \Big|_{s=\beta}}{(s - \beta)^{n-1}} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\frac{d^k}{ds^k} ((s - \beta)^n F(s)) \Big|_{s=\beta}}{(s - \beta)^{n-k}}$$

B. Muestreo e Interpolación

En la figura B.1 se tiene la señal que se va a analizar junto con su transformada de Fourier. Para poder realizar este análisis, es necesario que la señal sea de banda limitada, por lo que la transformada de Fourier debe ser nula fuera de un intervalo finito de frecuencias.

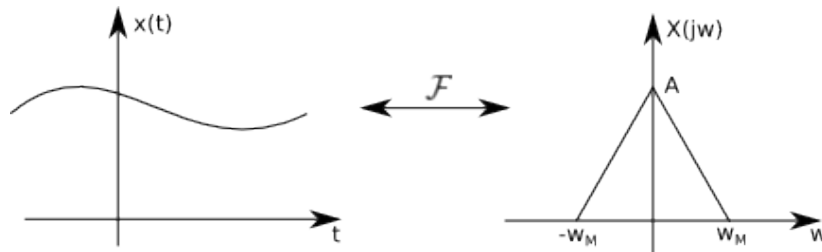


Figura B.1: Señal de banda limitada que se utilizará para el análisis de esta sección.

Para poder realizar un muestreo, es necesario utilizar un conversor Analógico-Digital (A/D), el cual entrega a la salida la señal discretizada. Es posible también recuperar la señal en tiempo continuo (o al menos una aproximación) utilizando un conversor Digital-Analógico (D/A)¹³. En la figura B.2 se tiene estos dos sistemas.

¹³Se debe recordar que para poder realizar un muestreo correcto, se debe muestrear por encima de la frecuencia de Nyquist. Por otro lado, para recuperar la señal continua sin distorsiones, el filtro pasabajos debe ser tal que no se pierde información.

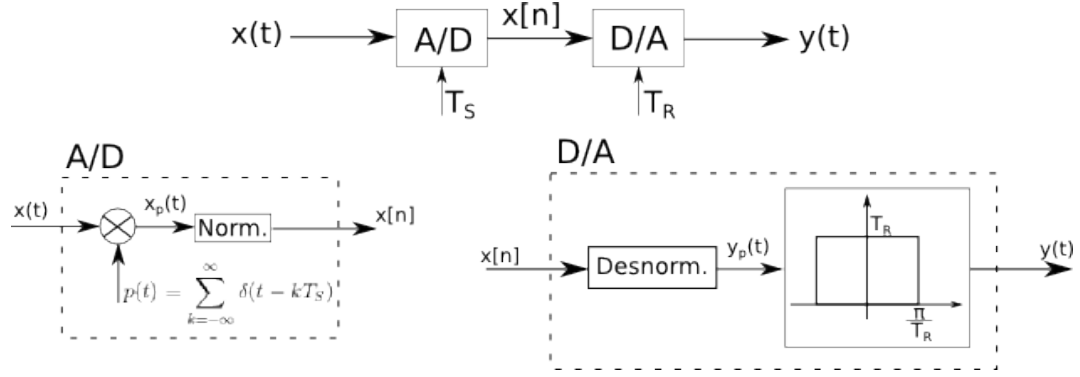


Figura B.2: Conversores A/D y D/A. Se asume que ambos sistemas son ideales y no introducen distorsiones.

Al ingresar la señal continua $x(t)$ al conversor A/D, se debe multiplicar por un tren de impulsos, por lo que se tiene:

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_S)$$

$$X_P(jw) = \frac{1}{2\pi} (X(jw) \star P(jw)) = \frac{1}{2\pi} \left(X(jw) \star \frac{2\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi k}{T_S}\right) \right)$$

Se obtiene como resultado:

$$X_P(jw) = \frac{1}{T_S} \left(X(jw) \star \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi k}{T_S}\right) \right) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(w - \frac{2\pi k}{T_S}\right)\right)$$

Se puede ver que $X_P(jw)$ se corresponde con copias del espectro de $X(jw)$ escaladas en amplitud y espaciadas en $w_S = \frac{2\pi}{T_S}$ (ver figura B.3).

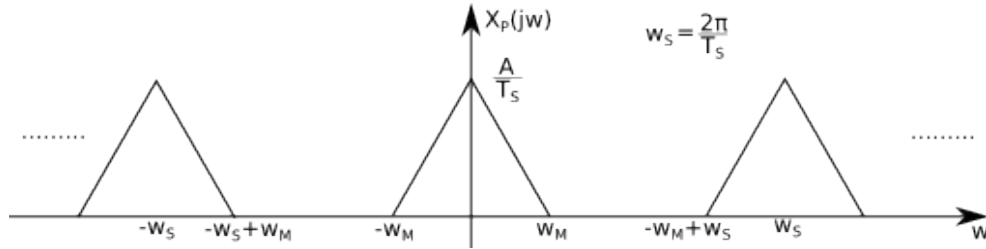


Figura B.3: $X_P(jw)$ se corresponde con el espectro de la señal luego de ser multiplicada por el tren de impulsos. Su espectro es el de infinitas copias del espectro de $X(jw)$ espaciadas en w_S .

Una vez multiplicada por el tren de impulsos, se debe discretizar la señal. Se sabe que el espectro de una señal de tiempo discreto es periódico en 2π , por lo que el bloque normalizador debe hacer un cambio de variable:

$$\Omega = wT_S$$

El espectro de la señal en tiempo discreto es entonces:

$$X(\Omega) = X_P(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{\Omega}{T_S} - \frac{2\pi k}{T_S}\right)\right)$$

En la figura B.4 se tiene el espectro de la señal discreta.

Una vez obtenida la señal discretizada, se debe proceder a la obtención de la señal continua nuevamente. Para esto, se ingresa primero al desnormalizador, en el cual se hace el siguiente cambio de variable:

$$\Omega_R = wT_R$$

Se tiene entonces:

$$Y_P(jw) = X(\Omega = wT_R) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\frac{wT_R}{T_S} - \frac{2\pi k}{T_S}\right)\right) \rightarrow Y_P(jw) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{T_R}{T_S}\left(w - \frac{2\pi k}{T_R}\right)\right)$$

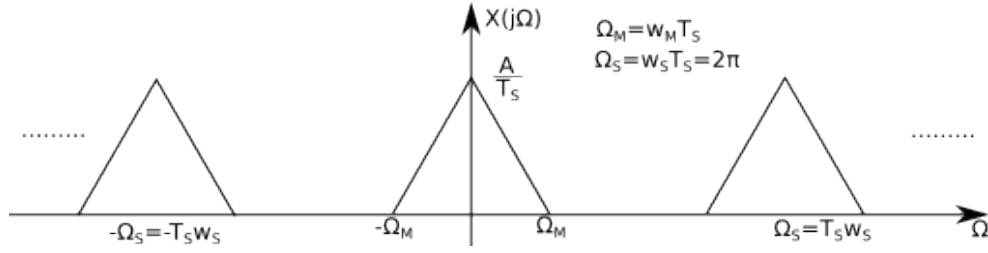


Figura B.4: Espectro de la señal discretizada. Se puede ver que al hacer el cambio de variable el espectro queda periódico en 2π . Se puede ver también que dependiendo del valor de T_S , puede que exista solapamiento al hacer el cambio de variable. Como en este análisis se asume que se trabaja cumpliendo con la condición de Nyquist, no se corre peligro de que esto suceda.

Una vez desnormalizado el espectro, se debe aplicar el filtro pasabajos, para obtener una única copia del espectro. En la figura B.5 se tiene el espectro de $Y_P(jw)$ luego de pasar por el desnormalizador, y la aplicación del filtro pasabajos.

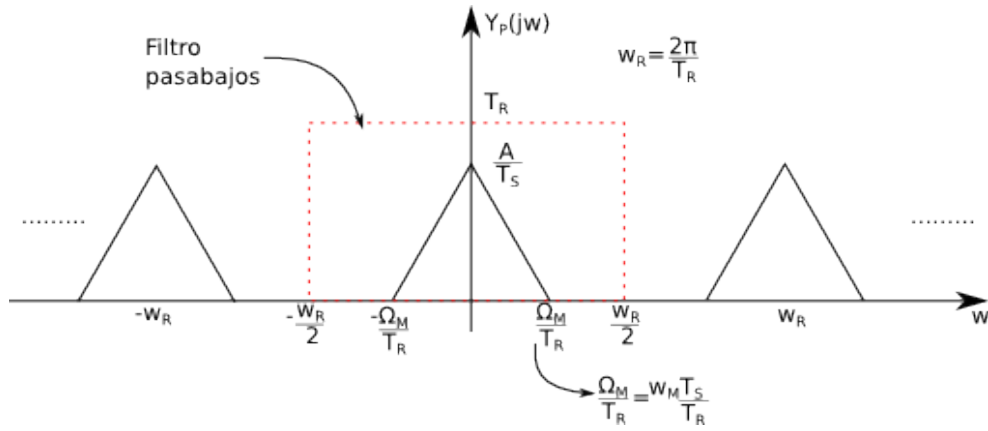


Figura B.5: Aplicación del filtro pasabajos a la señal desnormalizada $Y_P(jw)$.

Finalmente, al aplicar el filtro, la única copia que sobrevive (asumiendo que no hubo ningún tipo de traslape) es la copia que se encuentra en el centro (ver figura B.6):

$$Y(jw) = \frac{T_R}{T_S} X\left(j \frac{T_R}{T_S} w\right)$$

Se puede ver que si $T_R = T_S$ se logra reconstruir a la señal de entrada de manera exacta.

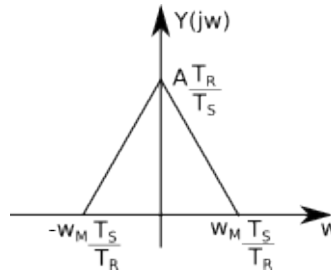


Figura B.6: Señal de salida del sistema total de la figura B.2.

C. Sobremuestreo y submuestreo

Este sistema permite modificar la frecuencia de muestreo sin necesidad de modificar el sistema de muestreo. Para poder desarrollar este análisis es necesario utilizar señales de banda limitada (como la de la figura B.1), y de un ancho tal que no se produzcan solapamientos al modificar las frecuencias de muestreo. En la figura C.1 se tiene el sistema de sobremuestreo y submuestreo que se va a analizar.

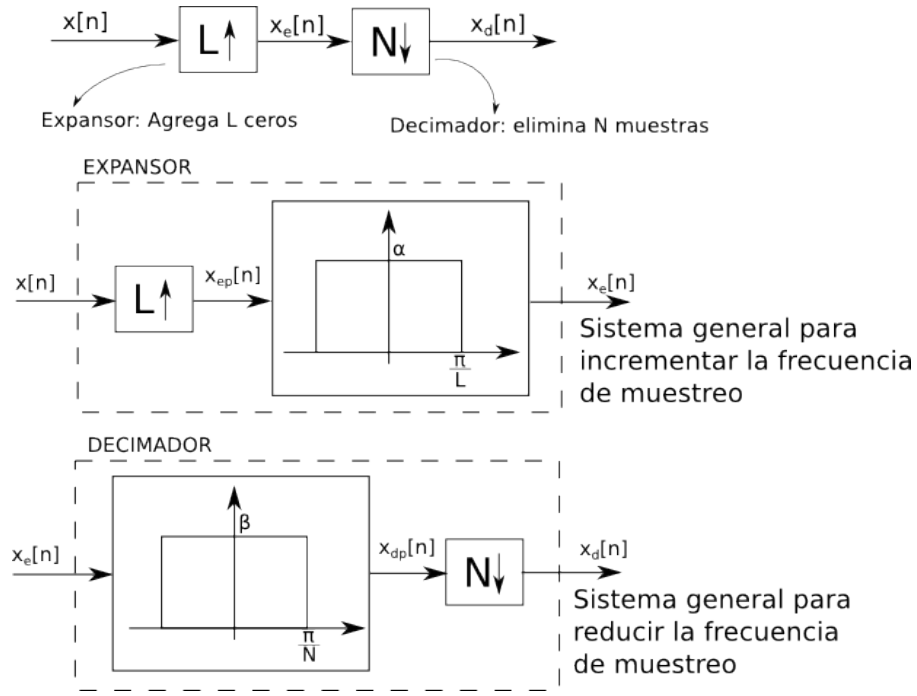


Figura C.1: Sistemas expansor y decimador, los cuales permiten aumentar o reducir la frecuencia de muestreo respectivamente.

Un *sistema expansor o sobremuestreador*, lo que hace es agregar ceros entre muestras, desplazándolas al multiplicarlas por un tren de deltas. En la figura C.2 se tiene la señal que se va a analizar.

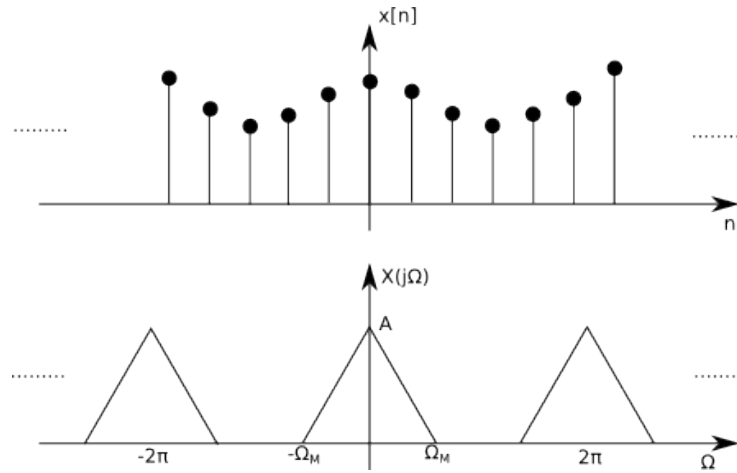


Figura C.2: Señal de entrada $x[n]$ al expansor, junto con su transformada de Fourier.

Cuando la señal de entrada $x[n]$ ingresa al expansor, se deben introducir L ceros entre cada muestra:

$$\begin{cases} x_{ep}[n] = \begin{cases} x[n/L] & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \\ X_{ep}(j\Omega) = X(j\Omega L) \end{cases}$$

Se puede ver en esta expresión que la señal se expande en tiempo pero se comprime en frecuencia. Al agregar L ceros entre cada muestra, el espectro ya no es 2π periódico, sino que es $2\pi/L$ periódico, y por esta razón es que se debe aplicar el filtro pasabajos. En la figura C.3 se tienen los resultados de la aplicación del filtro. Para evitar que haya aliasing, se debe cumplir que:

$$\frac{\Omega_M}{L} < \frac{\pi}{L} \rightarrow \Omega_M < \pi$$

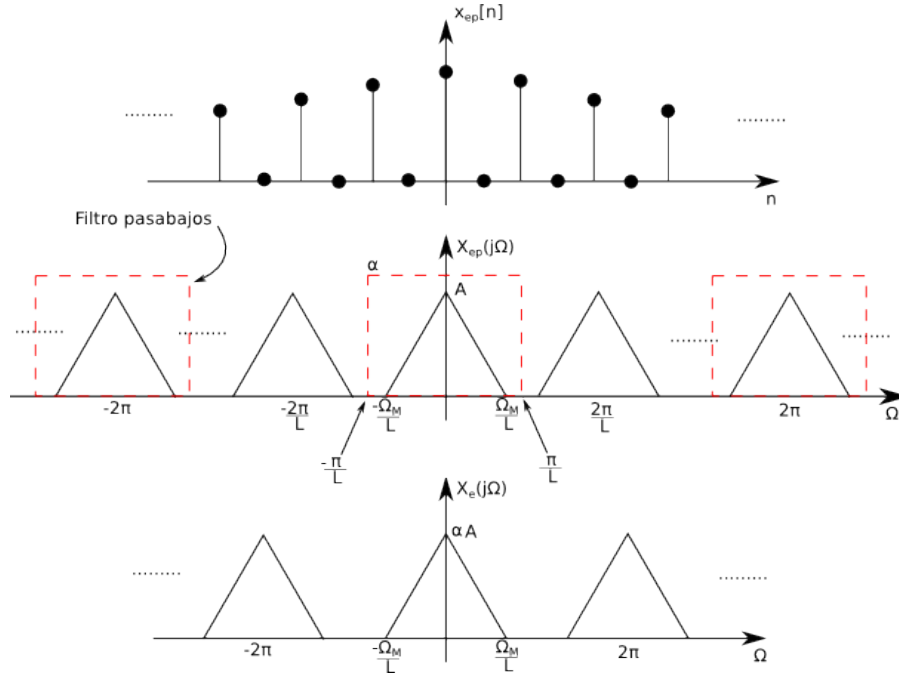


Figura C.3: Señal expandida junto con su espectro, y la señal de salida del sistema. La línea roja punteada indica el filtro pasabajos que utiliza el expansor para obtener el espectro de una señal discreta, el cual debe ser periódico en 2π (el filtro también es periódico en 2π , ya que es un filtro discreto).

Se puede ver en la figura C.3 que una vez aplicado el filtro pasabajos a la señal $x_{ep}[n]$, se obtiene la señal sobremuestreada $x_e[n]$.

El sistema decimador, lo que hará será eliminar una de cada N muestras, por lo que la señal decimada será:

$$x_d[n] = x_e[Nn]$$

Debido a que la señal se expandirá en frecuencia, el filtro pasabajo de la entrada del decimador solo se utiliza para evitar que se produzca aliasing:

$$\frac{\pi}{N} > \frac{\Omega_M}{L}$$

Para poder realizar la decimación, se puede pensar como que se está multiplicando a la señal de entrada (luego de pasar por el filtro antialiasing) con un tren de deltas, el cual selecciona aquellas muestras que se van a conservar. Asumiendo que no se produjo aliasing, se puede considerar que $x_e[n] = x_{dp}[n]$, por lo tanto, luego de pasar por el multiplicador con el tren de deltas se tiene:

$$X_P(j\Omega) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_e\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi i}{N}\right)\right)$$

El espectro de $X_P(j\Omega)$ (es decir el de $X_e(j\Omega)$ luego de multiplicarla por el tren de impulsos) se puede ver en la figura C.4.

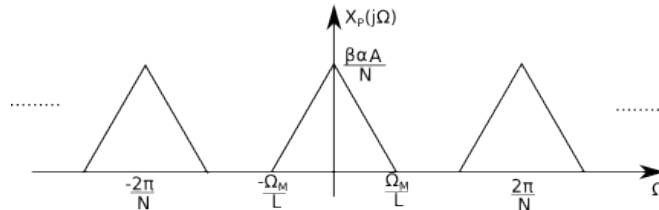


Figura C.4: Espectro de la señal luego de ser multiplicada por el tren de deltas. Se observa que es periódica en $2\pi/N$.

Una vez seleccionadas las muestras que se van a conservar, se debe normalizar el espectro para que sea periódico en

2π . La señal de salida entonces es:

$$X_d(j\Omega) = X_P\left(j\frac{\Omega}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_e\left(j\left(\frac{\Omega}{N} - \frac{2\pi i}{N}\right)\right)$$

Se puede ver que la señal ahora es periódica en 2π ¹⁴. En la figura C.5 se tiene el espectro de la señal resultante.

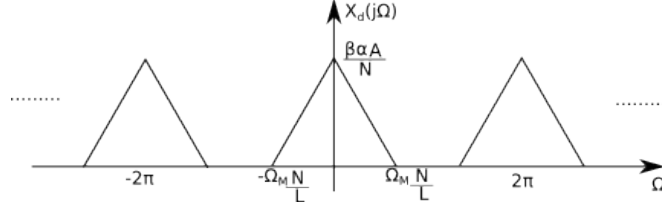


Figura C.5: Espectro de la señal de salida del decimador.

Se puede ver en la figura C.5 que eligiendo correctamente los valores de N y L , y las ganancias de los filtros, es posible recuperar de manera exacta la señal de entrada.

D. Convolución Circular y Convolución Lineal

Existe una relación entre ambas, por lo que es posible obtener una a partir de la otra, u obtener puntos en común. Para hacer el análisis se utilizarán las señales de la figura D.1.

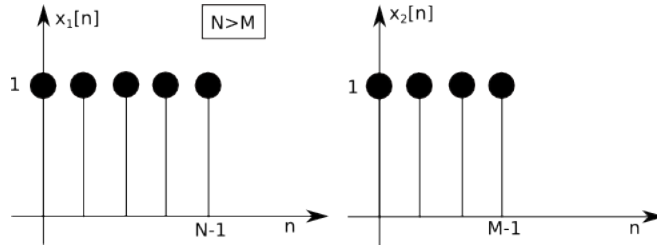


Figura D.1: Señales de entrada para la convolución circular. Se trata de dos escalones de largos N y M tal que $N > M$.

La convolución lineal entre las dos señales de la figura D.1, se obtiene como:

$$x_3[n] = (x_1[n] \star x_2[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

Se sabe que la longitud del resultado de esta convolución es:

$$L = N + M - 1$$

En la figura D.2 se tiene el resultado de la convolución lineal.

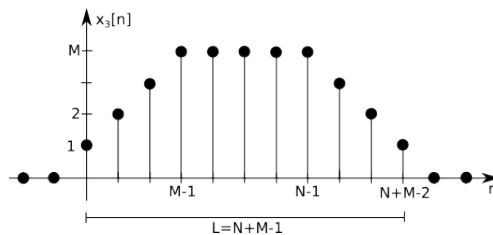


Figura D.2: Resultado de la convolución lineal entre $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

¹⁴Para realizar el gráfico, lo que se debe hacer es pegar copias de $X_P(j\Omega)$ cada $2\pi i/N$, y luego se escala todo por N .

La convolución circular de largo C se obtiene como:

$$x_4[n] = (x_1[n] \odot x_2[n]) = \sum_{m=0}^{C-1} x_1[m] x_2[(n-m)_C] \quad 0 \leq n \leq C-1$$

Se puede ver que el resultado de la convolución circular, depende de la cantidad de puntos que se tomen. En particular, es posible obtener una convolución lineal a partir de una circular, siempre y cuando:

$$C \geq N + M - 1 \rightarrow (x_1[n] \odot x_2[n]) = (x_1[n] \star x_2[n])$$

Ahora hay que ver cuáles son aquellos puntos que coinciden entre la convolución circular y la lineal para $C < N + M - 1$.

Si se elige que $C = N$, se tiene que solo coincide entre la convolución circular y lineal, el punto $n = N - 1 = C - 1$, ya que todos los otros están distorsionados (ver figura D.3).

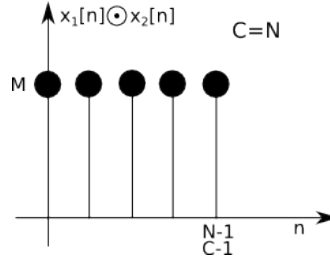


Figura D.3: Resultado de la convolución circular con $C = N$. Se puede ver que solo coincide con la lineal en el punto $n = N - 1 = C - 1$.

En general, si se tiene una convolución circular de C puntos entre $x_1[n]$ de longitud N y $x_2[n]$ de longitud M , se tendrá que se verán distorsionados los primeros $N + M - C - 1$ puntos:

$$(x_1[n] \odot x_2[n])_C \neq (x_1[n] \star x_2[n]) \text{ en los puntos: } 0 < n < N + M - C - 2$$

Ejemplo

Se van a utilizar las señales de la figura D.1 con los siguientes parámetros:

$$\begin{cases} N = 5 \\ M = 4 \\ C = 6 \end{cases}$$

Los resultados de los dos tipos de convoluciones se pueden ver en la figura D.4.

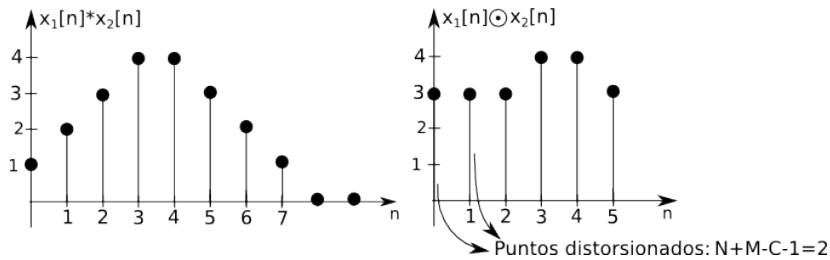


Figura D.4: Resultados de la convolución lineal y circular para las señales de la figura D.1 con $N = 5$, $M = 4$ y $C = 6$.

Se puede ver en la figura D.4 que se encuentran distorsionados los primeros 2 puntos, cumpliéndose la relación mencionada anteriormente. Los puntos en que la convolución circular y lineal coinciden entonces son:

$$\underbrace{N + M - C - 1}_{2} \leq n \leq \underbrace{C - 1}_{5}$$