

# 1 - Ecuaciones de Maxwell

## Introducción

En este Capítulo haremos una introducción general a los problemas que se desarrollarán a lo largo del texto. Muchas descripciones serán necesariamente cualitativas ya que los detalles y aplicaciones a la ingeniería serán material de Capítulos posteriores.

El electromagnetismo ha sido la base de la llamada Segunda Revolución Industrial, fundamentalmente en los aspectos de la conversión electromecánica de energía y las comunicaciones. Actualmente las aplicaciones electromagnéticas dominan toda la técnica moderna y la miniaturización y creciente velocidad de los circuitos electrónicos hacen cada vez más necesaria la modelación de estos fenómenos mediante la teoría de campos.

El electromagnetismo es una **teoría de campos**, es decir, las explicaciones y predicciones que provee se basan en magnitudes físicas cuya descripción matemática son campos vectoriales dependientes de la posición en el espacio y del tiempo. La característica vectorial dificulta notablemente la resolución de las ecuaciones que describen el comportamiento, por lo que se trata en la medida de lo posible de simplificar el problema a ecuaciones escalares, y si no es posible, se utilizan sofisticados métodos numéricos que han explotado en número y variedad en los últimos años. Este texto presentará formulaciones analíticas en casos simples que brindan un trasfondo conceptual y modelos simplificados cuando sea posible, y finalmente daremos una breve introducción a los métodos numéricos de mayor uso en bajas y altas frecuencias.

El objetivo es que el lector adquiera la comprensión conceptual de los problemas que deberá enfrentar en aplicaciones de la ingeniería electromagnética así como las herramientas de modelación más adecuadas para las variadas situaciones. Por otra parte, se dará énfasis a las aplicaciones a la ingeniería y, cuando sea el caso, a las normas de diseño y seguridad vigentes en la explotación de sistemas y equipos electromagnéticos.

Una vez analizados los modelos y problemas generales, cada Capítulo siguiente analizará en detalle teoría, modelos y aplicaciones en cada caso particular, desde los casos más sencillos hasta los más elaborados. Esta organización permite profundizar en los temas de mayor interés y pasar por alto temas y aplicaciones que no son prioritarios, y al lector, una vez que ha dominado las ideas fundamentales, estudiar en detalle las aplicaciones de su interés.

Así, una primera parte se ocupa de los campos estáticos y/o de baja frecuencia, que pueden modelarse mediante circuitos de constantes concentradas, una segunda parte presenta teoría y aplicaciones de los sistemas descriptos por circuitos de parámetros distribuidos (líneas de transmisión) y una tercera parte presenta los sistemas donde es necesaria la teoría de campos, como la propagación libre y guiada y la generación de ondas electromagnéticas. Finalmente se destina un último Capítulo a problemas de compatibilidad electromagnética y a analizar los posibles riesgos de los campos electromagnéticos sobre la salud humana.

## Ecuaciones de Maxwell

Todos los fenómenos electromagnéticos clásicos (no cuánticos) se pueden describir a partir de las **ecuaciones de Maxwell**<sup>1</sup>:

$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$	(ley de Gauss eléctrica)
$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	(ley de Gauss magnética)
$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	(ley de Faraday)
$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	(ley de Maxwell-Ampère)

donde generalmente las incógnitas son los campos vectoriales:

- E: **campo eléctrico** ( $V/m$ ),
- D: **campo de desplazamiento** ( $C/m^2$ ),
- H: **campo magnético** ( $A/m$ ) y
- B: **campo de inducción magnética** ( $T$ ).

Estos campos conforman el **campo electromagnético**. Las dos ecuaciones del rotor (Faraday y Maxwell-Ampère) aseguran que hay una **dependencia mutua** entre campos eléctricos y magnéticos **variables en el tiempo**, de manera que en este caso ambos campos están interrelacionados. Sólo en el caso de **campos estáticos** (que no varían en el tiempo) campo eléctrico y magnético son independientes entre sí.

Llamamos **fuentes de campo** a los sistemas físicos que crean campos en el espacio. En el caso electromagnético, **cargas y corrientes eléctricas** crean campo<sup>2</sup>. En las ecuaciones de Maxwell las fuentes de campo son entonces:

- $\rho$ : la **densidad de carga** eléctrica ( $C/m^3$ ) y
- $\mathbf{j}$ : la **densidad de corriente** ( $A/m^2$ ).

En nuestra descripción consideramos a cargas y corrientes como funciones continuas de la posición. Sin embargo, se conoce que la carga eléctrica se presenta en unidades elementales (a las energías de interés en las aplicaciones tecnológicas actuales) cuyo valor es la carga del electrón:

$$e \approx 1.602 \times 10^{-19} C$$

Esta estructura granular de la carga eléctrica no admitiría la descripción de su distribución como una función continua de la posición, pero la extrema pequeñez de los portadores elementales de carga, en relación al tamaño de los objetos de interés tecnológico, permite usar funciones continuas entendidas como un promedio sobre un gran número de entes discretos, en volúmenes pequeños frente al tamaño de esos objetos, pero grandes en relación al tamaño de los portadores de carga elementales. Podemos escribir entonces:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = N(\mathbf{r}, t) e \quad \text{donde } N(\mathbf{r}, t) \text{ es el número de portadores elementales de carga por unidad de volumen.}$$

El mismo razonamiento se aplica a las funciones continuas que describen la distribución de corrientes, que son en última instancia grupos de cargas elementales en movimiento.

Todas las cantidades que intervienen en las ecuaciones de Maxwell se describen, entonces y en general, como funciones de la posición espacial y del tiempo.

<sup>1</sup> En el Apéndice 1 se presenta un resumen de los operadores vectoriales usados en las ecuaciones de Maxwell.

<sup>2</sup> Hay otras fuentes de campo electromagnético que no se describen en las ecuaciones de Maxwell ya que dependen de fenómenos no electromagnéticos "puros", como baterías, pilas solares, etc.

Este es un conjunto de **ecuaciones diferenciales vectoriales lineales acopladas inhomogéneas**. En general su resolución es bastante difícil, por lo que gran parte de nuestra presentación se dedicará a presentar modelos simplificados que permitan soluciones sencillas.

Una primera propiedad que se deduce de las ecuaciones de Maxwell es que las fuentes de campo (cargas y corrientes) están generalmente ligadas entre sí.

Si tomamos la divergencia de la ley de Maxwell-Ampère obtenemos:

$$\nabla \bullet \left[ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] = \nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)) - \nabla \bullet \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right)$$

Pero la divergencia de un rotor siempre es cero, con lo que queda:  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \bullet \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right)$

La expresión del segundo miembro dice que hay que realizar primero la derivada temporal de  $\mathbf{D}$  y luego las derivadas espaciales. Pero como el tiempo y las variables espaciales son independientes entre sí se puede cambiar el orden de la derivación:

$$\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t))$$

Usamos ahora la ley de Gauss eléctrica para escribir:  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t))$

de donde finalmente nos queda la llamada **ecuación de continuidad**:  $\nabla \bullet \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0$

Esta ecuación indica que las fuentes de campo (cargas y corrientes eléctricas) están interrelacionadas en el caso dependiente del tiempo. Como veremos en el Capítulo de corrientes eléctricas, esta ecuación representa el principio de conservación de la carga eléctrica.

### Soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Potenciales retardados

**En el vacío** es posible hallar una solución general de las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales electrodinámicos o **potenciales retardados** vectorial  $\mathbf{A}$  y escalar  $\Phi^3$ , que se pueden deducir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Estos potenciales no son independientes entre sí<sup>4</sup>, sino que están relacionados por la llamada **condición de Lorentz**:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Con la introducción de los potenciales electrodinámicos, las ecuaciones de Maxwell llevan a las siguientes ecuaciones de onda vectoriales inhomogéneas:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

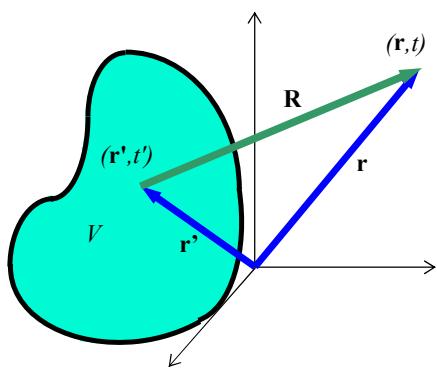
donde  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ . Estas ecuaciones tienen las soluciones particulares:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV'$$

La figura ilustra el significado de los símbolos. Los campos se miden u observan en el **punto campo**, definido por sus coordenadas espacio-temporales  $(\mathbf{r}, t)$ , mientras que las integrales se

<sup>3</sup> Capítulo 10.

<sup>4</sup> Esta relación surge de la relación entre las fuentes de campo, que se explicita en la ecuación de continuidad.



realizan sobre los **puntos fuentes**, de coordenadas  $(\mathbf{r}', t')$ . Se usa esta doble notación porque el denominador de los integrandos usa la distancia entre punto fuente y punto campo  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ .

La particularidad fundamental de estas expresiones es que el tiempo en el punto fuente y el tiempo en el punto campo **no son iguales**:  $t' = t - R/c$ . Por lo tanto, las variaciones en la fuente en el instante  $t'$  se reflejan en un instante **posterior**  $t$  en el campo observado. Hay un **retardo entre causa y efecto**, por lo que estos potenciales se llaman **potenciales retardados**. Este retardo se explica por el principio de que existe una velocidad máxima de propagación de las interacciones (**principio de relatividad**), que es la velocidad de la luz en el vacío. El intervalo  $\Delta t = R/c$  es el tiempo que tarda la interacción en trasladarse desde el punto fuente al punto campo. Maxwell obtuvo este resultado en 1864 y como  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , que es un valor similar al valor medido de la velocidad de la luz en el vacío, formuló la tesis que la luz era un fenómeno electromagnético, tesis recién corroborada experimentalmente por Hertz en 1887.

El retardo de tiempo entre la señal fuente y el campo producido es un hecho fundamental en la modelación de los fenómenos de radiación, como se muestra en el Capítulo 10.

El modelo de campo presentado en esta sección es el modelo más general, aplicable a todas las situaciones<sup>5</sup>, aunque en situaciones prácticas sólo es posible obtener las soluciones mediante métodos numéricos.

### Punto fuente y punto campo

**La notación de punto fuente (posición donde hay fuente de campo - variables primadas descriptas por el vector posición  $\mathbf{r}'$ ) y punto campo (posición donde se desea calcular el campo - variables no primadas descriptas por el vector posición  $\mathbf{r}$ ) que introdujimos en esta sección es básica en muchos cálculos del electromagnetismo y será usada consecuentemente a lo largo del texto.**

### Representación en los dominios del tiempo y de la frecuencia

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son campos vectoriales cuyas componentes son funciones de la posición y del tiempo. Decimos en este caso que los campos están representados en el **dominio del tiempo**:

**En la representación en el dominio del tiempo campos y fuentes dependen de la posición y del tiempo:**  $F = F(\mathbf{r}, t) = F(x, y, z, t)$

donde  $F$  es una componente cualquiera de los campos. Debido a que las ecuaciones de Maxwell son lineales, una forma de simplificar su resolución es utilizar la representación en el **dominio de la frecuencia**. En esta técnica se usa la **representación de Fourier**<sup>6</sup> (**transformada de Fourier**) de las componentes de los campos:

$$F(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) \Rightarrow F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

<sup>5</sup> Eventualmente en medios donde los parámetros dependen de la frecuencia se desarrolla la función temporal fuente en una integral de Fourier y se calculan los campos para cada armónica, como se describe en la siguiente sección.

<sup>6</sup> En el Apéndice 1 se presenta un breve resumen sobre sistemas lineales y la representación de Fourier.

(salvo un factor de normalización). Se ve fácilmente que:

$$F(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \mathfrak{I}(\mathbf{r}, \omega) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} \Leftrightarrow i\omega \mathfrak{I}(\mathbf{r}, \omega)$$

y las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\begin{aligned}\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \rho(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

donde todos los campos son las transformadas de los campos electromagnéticos. Como el contexto evita habitualmente confusiones, usamos la misma notación para el campo en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

### Parámetros dependientes de la frecuencia

En la representación en el dominio de la frecuencia es posible establecer otras relaciones entre los campos que simplifican la resolución. Estas relaciones se denominan leyes o **relaciones constitutivas** y dependen del medio en el que se desarrollan los fenómenos y de la **frecuencia**:

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$	$\epsilon$ : <b>permitividad (dieléctrica)</b>
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma_\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$	$\sigma$ : <b>conductividad</b>
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_\omega \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$	$\mu$ : <b>permeabilidad (magnética)</b>

En general estos parámetros son **tensores** (matrices) que relacionan dos campos vectoriales, dependientes de la posición en medios inhomogéneos y de la dirección en el espacio para medios anisótropos. En este texto analizaremos fundamentalmente **medios isótropos** y que se pueden dividir en regiones macroscópicas donde las propiedades son **homogéneas**. En estos casos los parámetros materiales se reducen a escalares funciones de la frecuencia<sup>7</sup>.

Un caso particular importante es el medio **vacío** (el aire puede considerarse como vacío, desde el punto de vista electromagnético) donde los parámetros constitutivos son constantes:

$$\epsilon_\omega = \epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad \mu_\omega = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hy/m} \quad \sigma_\omega = 0$$

lo que simplifica aún más la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

Con estas relaciones, y si se conocen las fuentes, las ecuaciones de Maxwell tienen dos incógnitas: el campo **E** y el campo **H**. Las aplicaciones de las ecuaciones de Maxwell pueden clasificarse en dos tipos:

- dadas las fuentes, hallar los campos (**problema directo**);
- dados los campos, hallar las fuentes (**problema inverso**).

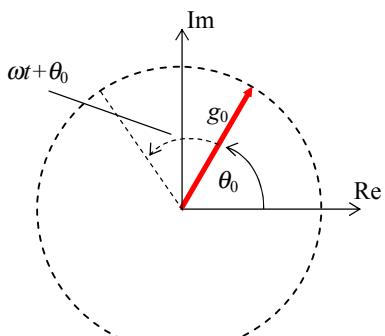
Los problemas directos son los más comunes y sencillos para resolver, y surgen en todo tipo de situaciones tecnológicas.

Los problemas inversos ocurren en situaciones donde se desea hallar la fuente de perturbaciones y son habitualmente mucho más difíciles que los problemas directos.

---

<sup>7</sup> Analizamos algunos modelos sencillos de la respuesta de medios materiales a los campos electromagnéticos en el Capítulo 8, modelos que llevan a parámetros dependientes de la frecuencia.

## Fasores



La integral de Fourier representa la superposición o adición de un número indefinido de funciones **armónicas** elementales  $\mathfrak{J}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}$ . Para distintos valores de  $\omega$  estas funciones son independientes y ortogonales, porque forman un conjunto base (ver el Apéndice 1). Cada uno de estos términos es en general una cantidad compleja, pero su suma debe ser real porque lo es la función original.

Por la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y de la mayoría de las operaciones realizadas sobre los campos<sup>8</sup> es posible escribir, para la aplicación de un operador lineal a la función en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{F}[F(\mathbf{r}, t)] = \mathcal{F} \int_0^{\infty} \mathfrak{J}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \mathcal{F}[\mathfrak{J}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}] d\omega$$

de donde vemos que:

**la aplicación de un operador lineal a la función en el dominio del tiempo equivale a la superposición de la aplicación del operador a las armónicas de la representación.**

En el caso de una operación lineal, la representación de Fourier nos permite trabajar con cada armónica de la representación por separado y al final recomponer por superposición el resultado, lo que habitualmente simplifica notablemente los cálculos.

Esto lleva a que el análisis de las propiedades de las señales armónicas sea de interés y será el tipo de señales que usaremos en el texto con mayor frecuencia.

En la electrotecnia se denomina **fasores** a las funciones armónicas, porque se las puede pensar como un cantidad cuya fase varía en el tiempo. Por ejemplo:  $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \theta_0)$  representa un fasor de amplitud  $g_0$  y fase inicial  $\theta_0$ .

Podemos pensar que el fasor se mueve en un plano complejo, de modo que las proyecciones sobre el eje real y el eje imaginario son, respectivamente:

$$\tilde{g}(t) = g_0 e^{i(\omega t + \theta_0)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}[\tilde{g}(t)] = g_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\ \text{Im}[\tilde{g}(t)] = g_0 \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

Luego se ve que:  $g(t) = \text{Re}[\tilde{g}(t)]$ .

En muchas aplicaciones de los fasores se deben aplicar sobre ellos operadores **lineales**. Como para dos complejos cualesquiera,  $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$  se puede operar con los fasores y tomar la parte real para reconstruir las funciones físicamente significativas al final de la operación. Como los fasores tienen exponentiales complejas, es más fácil generalmente trabajar con

**La suma algebraica, la derivación y la integración son operaciones lineales y en ellas se pueden usar fasores. El producto de dos funciones no es una operación lineal, y por lo tanto se debe trabajar desde el principio con la forma real de las funciones.**

ellas que con las operaciones trigonométricas asociadas a las funciones originales. Sin embargo:

### Promedio temporal

En muchas ocasiones la cantidad físicamente significativa es el **promedio temporal** o **valor**

<sup>8</sup> Existe la muy importante excepción de los cálculos que involucran potencia y energía, que son productos de campos y por lo tanto operaciones no lineales.

**medio** de las magnitudes en estudio:

- Si  $f(t)$  es una función **periódica** de periodo  $T$ , definimos el valor medio como:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

- Si  $f(t)$  es una función **no periódica**, definimos el valor medio como:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Se puede demostrar que, para dos funciones **armónicas de igual frecuencia** representadas por fasores:  $f(t) = \operatorname{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\}$  y  $g(t) = \operatorname{Re}\{g_0 e^{i\omega t}\}$  el promedio temporal es:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0^* g_0\}$$

Para demostrar esta propiedad consideremos dos funciones armónicas de igual frecuencia:

$$f(t) = \operatorname{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\} \text{ y } g(t) = \operatorname{Re}\{g_0 e^{i\omega t}\}$$

que expresamos por los fasores  $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 e^{i\omega t}$  y  $\tilde{g}(t) = \tilde{g}_0 e^{i\omega t}$ , respectivamente, donde sobreentendemos que se debe tomar la parte real. Las cantidades  $\tilde{f}_0$  y  $\tilde{g}_0$  son generalmente complejas a fin de introducir un eventual ángulo de fase inicial.

Queremos calcular el valor medio temporal del producto  $f(t)g(t)$ , que es:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \quad \text{con} \quad T = 2\pi/\omega$$

Podemos escribir la parte real de los fasores como:  $f(t) = \operatorname{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\} = \frac{1}{2} [f_0 e^{i\omega t} + f_0^* e^{-i\omega t}]$

Luego:  $\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{1}{4T} \int_0^T [f_0 e^{i\omega t} + f_0^* e^{-i\omega t}] [g_0 e^{i\omega t} + g_0^* e^{-i\omega t}] dt$

y tenemos:  $\langle fg \rangle = \frac{1}{4T} \int_0^T [f_0 g_0 e^{i2\omega t} + f_0 g_0^* + f_0^* g_0 + f_0^* g_0^* e^{-i2\omega t}] dt$

Las integrales que tienen los factores exponenciales tienen valor medio cero, y entonces:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0^* g_0\}$$

que es lo que queríamos demostrar.

**Ejemplo 1-1:** La tensión sobre una carga tiene una dependencia temporal:

$V(t) = V_0 \cos(2\pi t/T)$  con  $t$  en s. a) Calcular el valor medio de la tensión sobre la carga. b) Calcular el valor medio de la potencia disipada en la carga.

- a) Para calcular el valor medio de la tensión dato usamos su definición:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T V_0 \cos(2\pi t/T) dt = 0$$

ya que la integral del coseno sobre un periodo completo es cero.

- b) La potencia instantánea disipada en la carga es:  $P(t) = \frac{V^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(2\pi t/T)$

Y la potencia media puede calcularse mediante definición o usando la notación fasorial. Por definición:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2(2\pi t/T) dt = \frac{V_0^2}{RT} \int_0^T \cos^2(2\pi t/T) dt$$

Si hacemos el cambio de variables:  $u = 2\pi t/T \Rightarrow du = 2\pi dt/T$

$$\text{nos queda: } \langle P \rangle = \frac{V_0^2}{RT} \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = \frac{V_0^2}{2\pi R} \pi = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_{ef}^2}{R}$$

donde hemos definido la tensión eficaz:  $V_{ef} = V_0 / \sqrt{2}$

Para usar la notación fasorial, escribimos la tensión en forma fasorial:

$$V(t) = \Re \{ V_0 e^{i2\pi ft} \} = V_0 e^{i2\pi ft}$$

donde sobreentendemos que debe tomarse la parte real. Usando esta notación podemos escribir:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2R} \Re \{ V V^* \} = \frac{1}{2R} \Re \{ V_0 e^{i2\pi ft} V_0^* e^{-i2\pi ft} \} = \frac{1}{2R} \Re \{ |V_0|^2 \} = \frac{V_0^2}{2R}$$

ya que  $V_0$  es real. Se ve que obtenemos el mismo valor que antes, como debe ser.

---

## Entornos de modelación en el dominio de la frecuencia

Las ecuaciones de Maxwell y sus soluciones generales permiten describir cualquier problema electromagnético, pero la resolución práctica de estas soluciones es difícil y habitualmente no es posible obtener soluciones analíticas.

Por otra parte, el mismo nivel de generalidad de este análisis esconde a veces las características fundamentales de los fenómenos que son las que habitualmente importan desde el punto de vista del análisis y diseño en la ingeniería. Por ello se introducen, cuando es posible, modelos que llevan a simplificar el tratamiento matemático y a enfatizar las propiedades esenciales del comportamiento del fenómeno en estudio.

La modelación en el dominio de la frecuencia es la técnica más usada por su sencillez conceptual y matemática. El comportamiento de los sistemas en distintas frecuencias lleva a los paradigmas usuales en la ingeniería eléctrica. Siempre debe tenerse en cuenta que el modelado en el dominio de la frecuencia describe el **comportamiento dominante** en un cierto ancho de banda, pero tal modelo no es universal y puede ser inaplicable si cambia la frecuencia de los fenómenos o se generan fenómenos no deseados por interferencia o inexactitudes del diseño.

Por ejemplo, un circuito cuyo objetivo es amplificar señales de audio se diseñará aplicando el modelo circuital cuasi-estacionario que describimos más abajo, pero la eventual presencia de oscilaciones de alta frecuencia por caminos de realimentación no puede describirse mediante este modelo.

Veremos a lo largo del texto tres entornos de modelado fundamentales de los fenómenos electromagnéticos: el modelo o entorno cuasi-estático (bajas frecuencias), que puede describirse modelando al sistema mediante un circuito de parámetros concentrados, el modelo de parámetros distribuidos y finalmente el modelo de campos. A continuación describimos las características esenciales de cada modelo.

### Caso estático

Consideramos primero como introducción el **caso estático** puro: los campos y sus fuentes **no dependen del tiempo**. Se trata de distribuciones de cargas en reposo<sup>9</sup> y corrientes **estacionarias** o continuas.

Las ecuaciones de Maxwell se escriben en este caso:

---

<sup>9</sup> En reposo en un sistema de referencia inercial.

$$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

y se ve que los campos eléctrico y magnético están **desacoplados**. La mutua dependencia que surge de las leyes de Faraday y de Maxwell-Ampère sólo opera cuando los campos dependen del tiempo. El campo eléctrico (**electrostático**) depende solamente de la distribución de cargas y el campo magnético (**magnetostático**) depende solamente de la distribución de corrientes (**estacionarias** o continuas). En el caso general estas distribuciones están acopladas entre sí por la ecuación de continuidad, pero en el caso estático no:

$$\nabla \bullet \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{j} = 0$$

En términos de los potenciales electrodinámicos, los campos se pueden escribir como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

y los potenciales electrodinámicos se convierten en los correspondientes **potenciales estáticos**:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' \\ \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \end{aligned}$$

Obsérvese que toda referencia al tiempo se ha eliminado y ya no existe retardo entre la fuente y el campo. Existe una acción a distancia instantánea. Por otra parte, al estar desvinculadas las distribuciones de cargas y corrientes, estos potenciales estáticos son independientes, como lo son los campos entre sí.

De estas ecuaciones surgen las propiedades de los circuitos eléctricos elementales de corriente continua, como veremos en el Capítulo 2.

### Modelo cuasi-estático o cuasi-estacionario

La teoría de circuitos es sencilla, fácil de visualizar y ha sido durante años el paradigma básico del análisis de los equipos electrónicos. **Pero sólo es rigurosamente válida para frecuencia cero** (fenómenos estáticos o estacionarios). Para fenómenos variables en el tiempo se requiere el análisis de campos con los potenciales retardados, las corrientes dejan de ser estacionarias, y las reglas de Kirchhoff dejan de cumplirse. Sin embargo, podemos pensar que para **frecuencias muy bajas** el comportamiento de los sistemas no debe diferir demasiado del comportamiento a corriente continua, y que el pasaje de los fenómenos circuitales puros a los fenómenos de radiación debe ser gradual y paulatino a medida que aumenta la frecuencia.

Este razonamiento nos lleva a analizar el **caso cuasi-estático o cuasi-estacionario**, donde la frecuencia es tan baja que podemos aproximar las ecuaciones de Maxwell a su formato estático/estacionario, **pero conservando la dependencia temporal**:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) & \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &\approx \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) & \nabla \bullet \mathbf{j} &\approx 0 \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla \Phi(\mathbf{r}) & \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \\ \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \end{aligned}$$

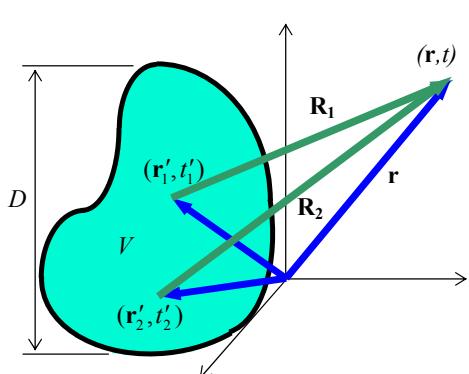
Obsérvese que ha desaparecido la distinción entre tiempo fuente y tiempo campo, es decir que en la aproximación cuasi-estática los efectos son **instantáneos**, como en el caso estático.

Como las ecuaciones que dan lugar a la teoría de circuitos se mantienen en esta aproximación,

sigue siendo válidas las reglas de Kirchhoff, aunque ahora los elementos de circuito incorporan reactancias. Este es el modelo de los **circuitos de parámetros concentrados**, que introducimos en el Capítulo 5.

La aproximación cuasi-estática es válida para bajas frecuencias, pero ¿cuán baja debe ser la frecuencia para que esta aproximación sea válida?

La clave para responder esta pregunta reside en analizar la validez del uso de potenciales electrodinámicos cuasi-estáticos. Veamos el potencial escalar para variaciones armónicas de la fuente de frecuencia  $f = \omega/2\pi$ .



$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad t' = t - R/c \quad \text{con:}$$

$$\rho(\mathbf{r}', t') = \rho_s(\mathbf{r}') e^{i\omega t'} = \rho_s(\mathbf{r}') e^{i\omega t} e^{-i\omega R/c}$$

$$\text{Entonces: } \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_s(\mathbf{r}') e^{-i\omega R}}{R} dV' \quad \text{con } k = \omega/c$$

Para pasar a la descripción cuasi-estática se debería eliminar el retardo  $\Delta t = R/c$  o lo que es lo mismo, el factor  $e^{-i\omega R}$ . Una posible situación donde esto ocurre es cuando el punto de observación (el punto campo) se halla muy cerca del recinto de integración, con lo que  $R$  es pequeño. Sin embargo, aún en este caso el retardo será diferente para distintos puntos fuente.

Se ve en la figura que:

$$\Delta t_1 = R_1/c \neq \Delta t_2 = R_2/c$$

Esta diferencia de retardo se traduce en una diferencia de fase  $k|R_1 - R_2|$ , que, en general, producirá interferencia. En el caso estático no hay retardo ni interferencia.

Esta interferencia se vuelve despreciable cuando la separación entre los puntos fuente más alejados es suficientemente pequeña para que  $k|R_1 - R_2| \ll 2\pi$ . Sea  $D$  la máxima dimensión de la fuente. Como para una señal armónica de frecuencia angular  $\omega$ :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k|R_1 - R_2| \leq kD = 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

y entonces:

$$k|R_1 - R_2| \ll 2\pi \Rightarrow D/\lambda \ll 1$$

Esta es la condición para que el desfasaje introducido por la posición relativa de los puntos fuente no genere interferencias en el punto campo, y todo ocurre como si la velocidad de propagación de las interacciones fuera infinita.

Concluimos que es posible aplicar la aproximación cuasi-estática cuando la máxima dimensión de la fuente de campo es muy pequeña frente a la longitud de onda de los campos emitidos.

¿Qué sucede cuando tenemos una señal no armónica? En este caso descomponemos la señal por Fourier y aplicamos la condición que acabamos de hallar en el peor caso: la mínima longitud de onda (máxima frecuencia) significativa del espectro. Si la condición de cuasi-estaticidad se cumple para esa armónica se cumplirá también para toda otra armónica del espectro. En resumen:

**Es posible aplicar la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria de las ecuaciones del electromagnetismo cuando la mínima longitud de onda significativa del espectro de Fourier de los campos involucrados (que en medios lineales es el espectro de Fourier de la fuente de campo), es muy grande frente a las dimensiones de la fuente:**

$$\lambda_{min} \gg D$$

¿Cuánto es muy grande? La respuesta depende de la precisión que se deseé para el análisis. En la práctica se toma habitualmente  $\lambda_{min} \geq 10D$  como valor testigo.

### Tres entornos

El estudio precedente de la validez de la aproximación cuasi-estática define tres entornos de modelación diferentes en el dominio de la frecuencia:

- Las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. Este es el caso de la aproximación cuasi-estática. Vale la teoría de circuitos y se modela el sistema mediante elementos de **parámetros concentrados** (resistores, capacitores, inductores, etc.).
- Dos de las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. En este caso se modela al sistema como una cascada de elementos de longitud infinitesimal a lo largo de la dimensión que no cumple la condición cuasi-estática. Como cada elemento infinitesimal de la cascada cumple esta condición, se lo modela mediante un circuito equivalente. Se tiene entonces un modelo de **parámetros distribuidos**. El caso típico es el de las líneas de transmisión.
- Al menos dos de las tres dimensiones no cumplen la condición cuasi-estática. Se requiere usar el **modelo de campo** en toda su generalidad. Esto ocurre por ejemplo en antenas y circuitos de microondas.

A lo largo del texto analizaremos los modelos utilizados en estos tres entornos en el dominio de la frecuencia.

# Apéndice 1 - Sistema Internacional de Unidades

## Introducción matemática

### Sistema Internacional de Unidades

Para el estudio científico o el desarrollo de tecnologías, se separa del universo el grupo de objetos de interés. Este grupo constituye un **sistema físico**, y el resto del universo se considera el **ambiente** o **medio ambiente** en que el sistema en estudio se encuentra. En el **análisis** del sistema se desea hallar una descripción del comportamiento del sistema y/o de sus interacciones con el ambiente. En la **síntesis** de un sistema se desea diseñar tal sistema de manera que, por sí mismo y/o en interacción con su medio ambiente produzca una serie de respuestas a determinados estímulos.

Para describir estas respuestas de utilizan las **magnitudes físicas** del sistema.

Una **magnitud física** define una dada característica observable de un sistema físico. Son magnitudes físicas la longitud, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

A cada magnitud le corresponde una **unidad** de medida, de manera de poder expresar cuantitativamente su valor en una medición o cálculo referido a un sistema físico. Un **sistema de unidades** es el conjunto de unidades asignadas a cada magnitud básica o derivada que se use en la ciencia o la técnica.

La normalización internacional de pesos y medidas se halla bajo el control de la Conferencia General de Pesos y Medidas. Las conferencias se realizan en la actualidad cada cuatro años. La Conferencia designa el Comité Internacional de Pesos y Medidas, formado por 18 miembros de países diferentes, se reúne cada año y controla la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (**Bureau International des Poids et Mesures - BIPM**), que es el organismo encargado de asegurar la unificación mundial de las mediciones físicas. El BIPM se creó en 1875 con la adhesión de 17 estados. Actualmente (1997) 47 estados, entre ellos la Argentina, adhieren al sistema. Debido a la creciente complejidad de la definición, control y adecuación de los patrones de medida a los avances científicos, la Conferencia ha creado Comités Consultivos (nueve, en la actualidad) sobre diferentes aspectos metrológicos y desde 1965 publica una revista científica propia, llamada Metrologia, además de las publicaciones realizadas por sus expertos en distintas revistas científicas internacionales y los distintos informes de sus cuerpos consultivos y laboratorios propios.

En 1960 la Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó el llamado **Sistema Internacional de Unidades (SI)** que fue adoptado luego por cada país adherente con particularidades propias. En la Argentina se adoptó el SI con la denominación **SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino)** en el año 1972, por ley 19511, agregando algunas unidades derivadas de uso habitual en el país. Debe notarse que las unidades del SIMELA conservan la grafía del SI cuando el original deriva del nombre de una persona (p.ej., debe decirse volt y no voltio, watt y no vatio, etc.).

El **SI** (y el **SIMELA**) tiene unidades básicas (consideradas por convención dimensionalmente independientes) y derivadas (que surgen algebraicamente de combinaciones de las unidades básicas):

## Unidades básicas

Magnitud	Unidad	Definición
Longitud	metro (m)	Longitud del camino recorrido por la luz en el vacío en un intervalo de $1/299\ 792\ 458$ segundos <sup>10</sup> .
Tiempo	segundo (s)	Duración de $9\ 192\ 631\ 770$ periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo cesio-133 a 0K.
Masa	kilogramo (kg)	Masa del prototipo internacional, un cilindro de platino-iridio conservado por el BIPM en Sèvres, Francia. Este es el único artefacto o <b>patrón</b> que define una unidad básica del SI.
Corriente eléctrica	ampere (A)	Corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita y despreciable sección circular recta, separados en 1 metro, produciría entre estos conductores una fuerza igual a $2 \times 10^{-7}$ newtons por unidad de longitud.
Temperatura termodinámica	kelvin (K)	Es la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua <sup>11</sup> .
Intensidad luminosa	candela (cd)	Es la intensidad luminosa, en una dada dirección, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia $540 \times 10^{12}$ hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de $1/683$ watt por esterradián.
Cantidad de sustancia	mol (mol)	Es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como el número de átomos en 0.012 kilogramos de carbono-12.

Nótese que los nombres (no el símbolo, que se da entre paréntesis) de las unidades se escriben en minúsculas.

## Unidades derivadas

Las unidades derivadas se obtienen de las básicas mediante combinaciones dadas por leyes científicas. Hay unidades derivadas que tienen nombres especiales (p.ej., la unidad de fuerza newton:  $1\ N = 1\ Kg \cdot m/s^2$ , la de energía:  $1\ joule = 1\ N \cdot m = 1\ Kg \cdot m^2/s^2$ , etc.). Hay otras que no tienen nombres especiales (p.ej., la unidad de aceleración:  $1\ m/s^2$ ). La legislación sólo da ejemplos de estas unidades, dado que nuevas unidades derivadas pueden agregarse a medida que el uso las hace necesarias y que distintas magnitudes a veces comparten las mismas unidades (p.ej.,  $joule/K$  corresponde a la magnitud capacidad calorífica y a la magnitud entropía).

La Conferencia realizada en 1960, que creó el SI, incluyó al radián (unidad de ángulo plano) y al esterradián (unidad de ángulo sólido) como una clase separada de unidades, llamadas unidades complementarias. La Conferencia de 1996 eliminó esta categoría de unidades e incluyó al radián y al esterradián dentro de la clase de unidades derivadas, en una subclase especial, llamada de unidades con nombres y símbolos especiales.

## Prefijos

Además de las unidades, el **SI** (y el **SIMELA**) define los prefijos de múltiplos y submúltiplos de las unidades, y recomienda que estas cantidades se presenten en cifras de  $10^3$  o  $10^{-3}$ . De esta forma, se prefiere expresar longitudes en *m*, *mm* o *km* y no usar las unidades intermedias, aunque éstas se siguen usando en la práctica.

Los prefijos tabulados son:

Prefijo	Valor	Símbolo	Prefijo	Valor	Símbolo
yotta	$10^{24}$	Y <sup>12</sup>	deci	$10^{-1}$	d
zetta	$10^{21}$	Z <sup>5</sup>	centi	$10^{-2}$	c
exa	$10^{18}$	E	mili	$10^{-3}$	m

<sup>10</sup> ¡Esto convierte a la unidad de longitud en una especie de unidad derivada de la de tiempo!...

<sup>11</sup> Nótese que el signo de grados ( $^\circ$ ) no se usa en kelvin. Se define también en el SI la temperatura Celsius como:  $t\ (^{\circ}C) = T(K) - T_0$  donde  $T$  es la temperatura en kelvin y  $T_0 = 273.16$ .

<sup>12</sup> No existe en el **SIMELA**.

peta	$10^{15}$	P		micro	$10^{-6}$	$\mu$
tera	$10^{12}$	T		nano	$10^{-9}$	n
giga	$10^9$	G		pico	$10^{-12}$	p
mega	$10^6$	M		femto	$10^{-15}$	f
kilo	$10^3$	K		atto	$10^{-18}$	a
hecto	$10^2$	h				
deca	$10^1$	da				

### Unidades eléctricas

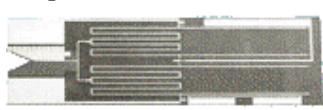
Las unidades eléctricas fundamentales son las unidades de corriente (unidad básica), de carga eléctrica, de diferencia de potencial y fuerza electromotriz, de resistencia, de capacidad, de inductancia y de flujo magnético (unidades derivadas) que se describen en la Resolución 2 de la Conferencia de 1946 de la siguiente manera:

Magnitud	Unidad	Definición
Carga	coulomb	Cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.
ddp y fem	volt	Diferencia de potencial entre dos puntos de un alambre conductor que lleva una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre estos dos puntos es igual a 1 watt.
Resistencia	ohm	Resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una ddp constante de 1 volt, aplicada entre estos puntos, produce en el conductor una corriente constante de 1 ampere. El conductor no debe ser el sitio de ninguna fem.
Capacidad	farad	Capacidad de un capacitor entre cuyas placas aparece una ddp de 1 volt cuando se carga con una cantidad de electricidad de 1 coulomb.
Inductancia	henry	Inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fem de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía uniformemente a razón de 1 ampere por segundo.
Flujo magnético	weber	Flujo magnético que, concatenado por un circuito de una sola vuelta, produciría sobre él una fem de 1 volt si se redujera a cero a velocidad uniforme en 1 segundo.

La realización práctica del ampere (unidad básica) y del volt y del ohm (unidades derivadas) para obtener una buena precisión a partir de sus definiciones es difícil y laboriosa, por lo que diversas Conferencias han recomendado la búsqueda de métodos más precisos y reproducibles. En los últimos años se han desarrollado dos métodos basados en fenómenos cuánticos: el **efecto Josephson** (que da un estándar para el volt) y el **efecto Hall cuántico** (que da un estándar para el ohm). Estos métodos dan mayor reproducibilidad y estabilidad que los métodos tradicionales.

En 1962 Brian Josephson, entonces estudiante de posgrado del Trinity College, Cambridge, Inglaterra, predijo que los electrones pueden agruparse en pares de Cooper para pasar por efecto túnel una barrera aislante delgada (unos pocos nm) colocada entre dos superconductores. Si se aplica una corriente alterna de frecuencia  $f$  a esta juntura Josephson se observa un conjunto de niveles discretos de diferencias de potencial continua entre los dos superconductores de la juntura, proporcionales a la frecuencia de la corriente aplicada:  $\Delta V_n = n(h/2e)f = nf/K_J$ . Para una corriente de microondas de 10 GHz el salto entre niveles adyacentes es de unos 41.4  $\mu V$ .

Se ha asignado para propósitos metrológicos en la Conferencia de 1988 el valor a la constante de Josephson  $K_J = 2e/h = 483\,597.9\,GHz/V$ . Se pueden crear chips con muchas juntas Josephson conectadas en serie (figura) para producir estándares de 1V y 10V, que se usan actualmente en varios laboratorios metrológicos como estándares primarios de tensión. Se han logrado precisiones de alrededor de 1 parte en  $10^{10}$ .



En 1980 el físico alemán Klaus Von Klitzing descubrió un nuevo fenómeno en el efecto Hall generado por estructuras MOS de AsGa/AlAsGa a bajas temperaturas en altos campos magnéticos.

cos. Observó que la ddp de Hall se cuantifica en niveles proporcionales a la corriente que circula. La resistencia de Hall (cociente de la ddp de Hall y la corriente circulante) resulta:  $R = (h/e^2)/n = R_K/n$ . Debido a la generalización del uso de este efecto para producir patrones de resistencia, la Conferencia de 1988 ha asignado para propósitos metrológicos a la constante de Von Klitzing el valor  $R = 25812.807 \Omega$ . Este método permite lograr precisiones de alrededor de 1 parte en  $10^{10}$ .

La adopción de estos métodos como definiciones del volt y el ohm modificarían el status de  $\mu_0$  de ser una constante con un valor exactamente definido - modificando así la definición del amperio - y produciría unidades eléctricas incompatibles con la definición del kilogramo y las unidades derivadas de él. Sin embargo, para usar estos métodos nuevos se han dado en la Conferencia de 1988 valores convencionales a las constantes de Josephson y von Klitzing que aparecen en los efectos cuánticos en relación al volt y al ohm. En 1991 la Conferencia recomendó continuar la investigación básica en la teoría del efecto Josephson y el efecto Hall cuántico.

El archivo **SI.ZIP**, ubicado en el ftp de la materia, contiene los siguientes documentos:

- **Brochure-si.pdf.** Publicación oficial del BIPM. 7ma. Edición (1998). En francés.
- **Si-supplement2000.pdf.** Publicación oficial del BIPM. En francés e inglés.
- **SP330.PDF.** Publicación del NIST (National Institute of Standards and Technology, USA):Describe el SI. Edición 2001. En inglés.
- **SP811.PDF.** Publicación del NIST. Es una guía de uso. El uso correcto del SI no es trivial y hay un número de reglas para su utilización en publicaciones técnicas o científicas. Edición 1995.

### Enlaces a sitios de interés

Bureau International des Poids et Mesures (BIPM):

<http://www.bipm.fr>

National Institute of Standards and Technology (NIST):

<http://physics.nist.gov/cuu/Units>

Depto. de Patrones Nacionales de Medida - INTI:

<http://www.inti.gov.ar/dpnm>

(aquí se puede consultar una traducción al castellano de la séptima edición del original francés (brochure-si.pdf) y de la correspondiente versión en inglés (1998) y del Suplemento 2000, elaboradas por el BIPM. Este documento no incluye la traducción del Anexo 2: Realización Práctica de las Definiciones de las Principales Unidades ni las notas al margen del documento original).

## Introducción Matemática

La siguiente introducción no reemplaza a textos especializados. Su objetivo es tener un resumen de conocimientos necesarios empleados en el texto e introducir la notación usada.

### Campos escalares y vectoriales. Notación.

**Un campo es una función que asigna un valor de una propiedad física o matemática a cada punto del espacio.**

Si el valor asignado es un **escalar** (un único número - real o complejo) se dice que el campo es escalar (p.ej., el campo de temperaturas en una barra uno de cuyos extremos se halla dentro de una llama: a cada punto de la barra el campo le asigna un número real asociado a la propiedad temperatura).

Si el valor asignado es un **vector** (un ente que tiene magnitud, dirección y sentido - generalmente definido por sus tres componentes en un sistema de referencia) decimos que el campo es vectorial (p.ej., el campo gravitatorio en los alrededores de un planeta, el campo eléctrico generado por un cuerpo conductor cargado, etc.).

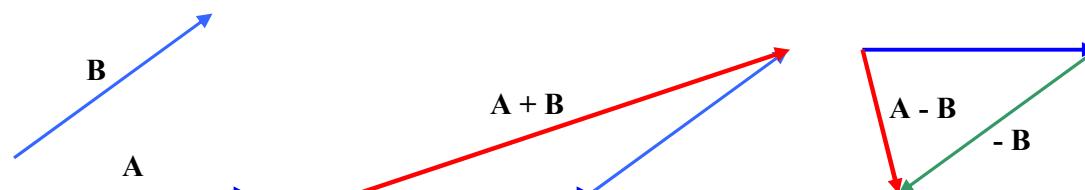
En este texto usaremos una notación para distinguir escalares de vectores. Las cantidades escalares se escribirán en *cursiva*, mientras que las cantidades vectoriales se escribirán en **negrita**. Por ejemplo, el campo de temperaturas en la barra será dado por la función escalar  $T(\mathbf{r})$  donde  $\mathbf{r}$  es el vector de posición que define la posición de cada punto de la barra respecto de un sistema de coordenadas dado.

Los **versores** (vectores de magnitud unitaria) se distinguen usando un acento circunflejo:

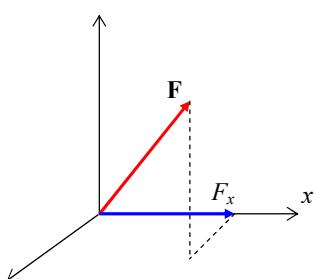
$$\hat{\mathbf{x}} \Rightarrow |\hat{\mathbf{x}}| = 1$$

### Operaciones con vectores

**Suma algebraica** de vectores:  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ .  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$



La suma algebraica de dos (o más) vectores es otro vector.



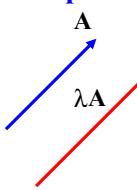
En un sistema de coordenadas dado se puede expresar un vector como la suma de sus **componentes**, que son los vectores proyección sobre cada dirección coordenada. Por ejemplo, en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}$$

La suma algebraica de dos (o más) vectores implica sumar algebraicamente sus componentes homólogas:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y \pm B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z \pm B_z) \hat{\mathbf{z}}$$

**Multiplicación de un vector por un escalar:**  $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A}$ .

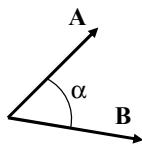


Es otro vector cuya magnitud es  $\lambda$  veces la del vector original:  $|\mathbf{C}| = |\lambda \mathbf{A}|$ , y se conserva la dirección (el vector resultante es paralelo al vector original). El sentido del vector resultante coincide con el del vector original o cambia según  $\lambda$  sea positivo o negativo.

**Producto escalar:**  $f = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A B \cos \alpha$

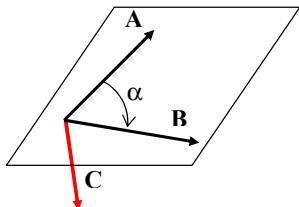
donde  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Es un escalar. **Ejemplo: trabajo de una fuerza.**

La expresión del producto escalar según las componentes de los vectores es:



A partir del producto escalar se puede obtener el **ángulo** entre dos vectores:

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}}{AB} \right)$$



**Producto vectorial:**  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{C}| = C = A B \sin \alpha$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . El producto vectorial es un vector, cuyo sentido surge de la regla de la mano derecha.

**Ejemplo: momento de una fuerza.**

La expresión del producto vectorial según las componentes de los vectores es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{x}} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{\mathbf{y}} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{z}}$$

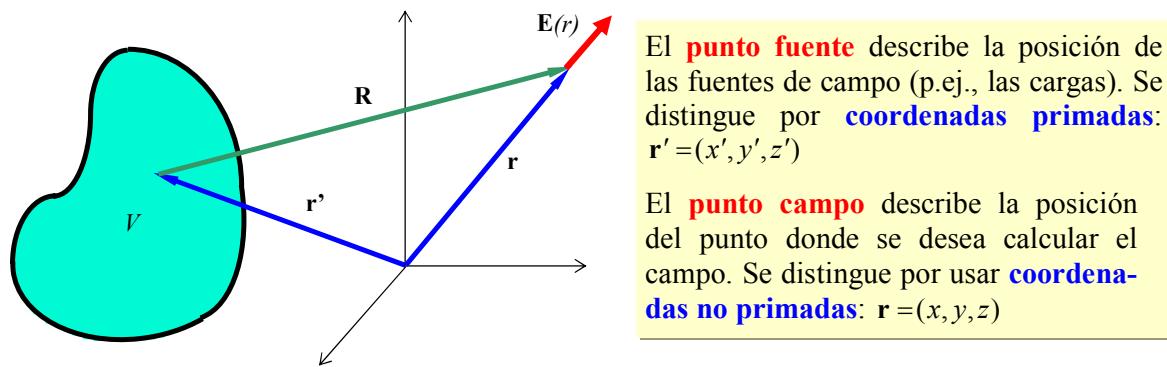
**Producto mixto:**  $\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \bullet (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  Es un escalar.

**Doble producto vectorial:**  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})$ . Es un vector.

Los paréntesis son importantes:  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

## Sistemas de referencia o referenciales

La posición de eventos en el espacio se define respecto de un punto fijo llamado **origen de coordenadas**. La definición de un origen de coordenadas y un origen de tiempos<sup>13</sup> crea un **sistema de referencia** o **referencial**. El **vector posición** es el vector que se dirige desde el origen de coordenadas hasta la posición a definir. La posición de un punto en el espacio respecto a un origen de coordenadas se determina mediante el vector posición. Por las necesidades de la descripción de los campos, es necesario distinguir entre las posiciones de puntos fuente y puntos campo.



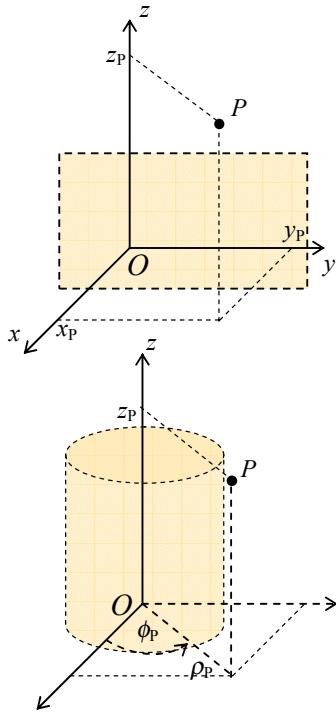
<sup>13</sup> En este texto consideraremos solamente referencias inerciales, donde se cumplen las ecuaciones de la mecánica de Newton. Dentro de la perspectiva de las aplicaciones a la ingeniería, consideraremos solamente velocidades pequeñas respecto a la velocidad de la luz, por lo que no es necesario usar correcciones relativistas y entonces la posición y el tiempo siguen las reglas de la mecánica de Newton.

### Sistemas de coordenadas: cartesiano, cilíndrico y esférico.

Para operar en un sistema de referencia es útil definir coordenadas, que son variables escalares que permiten expresar los campos escalares y vectoriales así como los elementos de arco, superficie y volumen que aparecen en las ecuaciones integrales.

La elección de un **sistema de coordenadas** depende de la **simetría** del problema físico en cuestión. En general se trata de elegir un sistema donde las superficies de potencial y/o campo constante sean superficies de coordenadas constantes. Por ejemplo, en un problema electrostático donde hay un conductor esférico cargado es conveniente usar un sistema de coordenadas esférico centrado en el conductor, ya que la superficie esférica del conductor (que en tal elección de coordenadas es una superficie de coordenada  $r$  constante) es una superficie equipotencial. En muchos problemas de ingeniería no existen estas superficies físicas de alta simetría y entonces es necesario recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, el estudio de los sistemas de alta simetría brinda un marco conceptual para definir aproximaciones y criterios cualitativos para el análisis preliminar de los problemas.

De los múltiples sistemas de coordenadas que se pueden definir, la práctica ha privilegiado aquellos sistemas llamados de **coordenadas separables**. Estos son sistemas que permiten pasar de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales, que surgen de las ecuaciones físicas (en nuestro caso las ecuaciones de Maxwell), a ecuaciones diferenciales a derivadas totales, que son más sencillas de resolver, como veremos en los Capítulos dedicados a la resolución numérica de las ecuaciones del electromagnetismo. Para cada ecuación diferencial a derivadas parciales, hay un número limitado de sistemas donde la ecuación es separable. Por ejemplo, para las ecuaciones de Laplace y Helmholtz, que son las esenciales en el análisis de los problemas electromagnéticos, hay 11 sistemas separables que corresponden a superficies de coordenada constante en la forma de cuádricas confocales<sup>14</sup>. De estos sistemas los más conocidos y usados en la práctica de la ingeniería son los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico.



**cilindros coaxiales de radio variable  $\rho$**  y eje coincidente con  $z$ , como el indicado en la figura.

En el **sistema cartesiano** la posición de un punto  $P$  en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre tres ejes rectos mutuamente perpendiculares que se cruzan en el origen de coordenadas<sup>15</sup>:

$$P = (x_P, y_P, z_P)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos normales** a la coordenada constante, como el indicado de coordenada  $x$  constante.

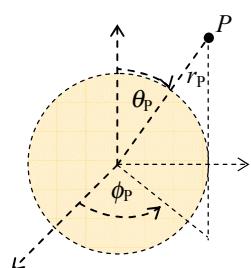
En el **sistema cilíndrico** la posición de un punto  $P$  en el espacio se describe mediante las proyecciones del vector posición sobre un eje recto (que habitualmente se asocia al eje  $z$  del sistema cartesiano correspondiente) y el plano perpendicular al eje antedicho que pasa por el origen de coordenadas y además por el ángulo formado por la proyección sobre el plano y un eje recto del plano que pasa por el origen de coordenadas (que habitualmente se asocia al eje  $x$  del sistema cartesiano correspondiente):

$$P = (z_P, \rho_P, \phi_P)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **planos "horizontales"** normales a la coordenada  $z$  constante, **planos "verticales"** que contienen al eje  $z$  para la coordenada  $\phi$  constante y

<sup>14</sup> P.M. Morse y H. Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., New York, (1953) p.518.

<sup>15</sup> En la figura se muestra una **terna derecha**, que es la que usaremos a lo largo del texto.

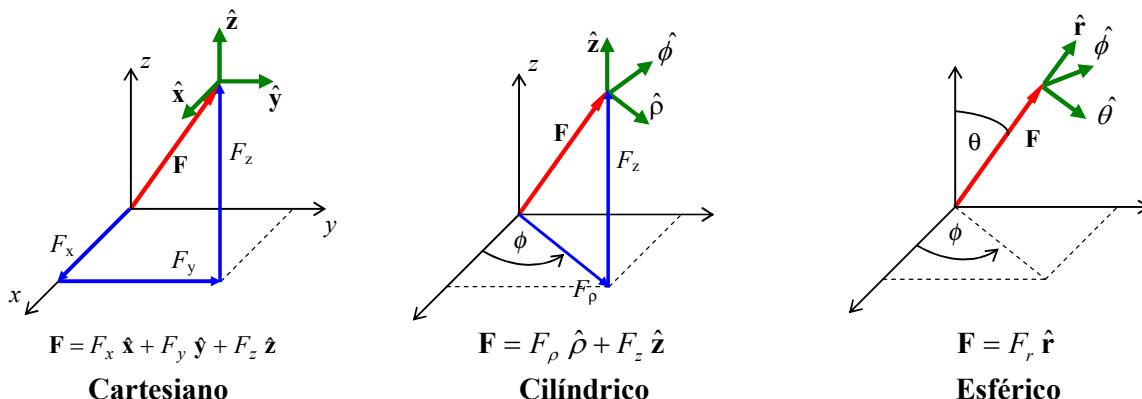


En el **sistema esférico** la posición de un punto  $P$  en el espacio se describe mediante el módulo del vector posición y los ángulos que forma con dos ejes perpendiculares que pasan por el origen de coordenadas, que coinciden con los ejes  $z$  y  $x$  del sistema cartesiano correspondiente.

$$\mathbf{P} = (r_p, \theta_p, \phi_p)$$

Las superficies de coordenada constante son en este caso **conos** de eje  $z$  y cuyo vértice pasa por el origen de coordenadas para  $\theta$  constante, **planos "verticales"** que contienen al eje  $z$  para la coordenada  $\phi$  constante y **esferas** de radio variable  $r$  y origen en el origen de coordenadas, como la indicada en la figura.

En un sistema de coordenadas, los vectores se expresan por sus componentes escalares y los versores asociados a cada coordenada:  $\mathbf{F} = F_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + F_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + F_3 \hat{\mathbf{e}}_3$ .



En el **sistema cartesiano** los versores son **constantes** (no dependen de la posición). En los sistemas cilíndrico y esférico los versores **sí** dependen de la posición.

**La dependencia de los versores con la posición en sistemas de coordenadas distintos del cartesiano debe tenerse en cuenta al integrar una función vectorial.**

Veamos las expresiones matemáticas del vector posición y los elementos de arco, superficie y volumen en los tres sistemas coordinados básicos:

### Vector posición

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}}$	$\mathbf{r} = r \mathbf{r}$

### Elementos de arco, área y volumen

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + rd\theta \hat{\theta} + rsen\theta d\phi \hat{\phi}$
$dS_x = dy dz$	$dS_\rho = \rho d\phi dz$	$dS_r = r^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi$
$dS_y = dx dz$	$dS_\phi = d\rho dz$	$dS_\theta = rsen\theta dr d\phi$
$dS_z = dx dy$	$dS_z = \rho d\rho d\phi$	$dS_\phi = rdr d\phi$
$dV = dx dy dz$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$	$dV = r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi$

El subíndice en los elementos de área representan la coordenada normal a la superficie en consideración.

En el siguiente cuadro se presentan las relaciones entre las coordenadas de los distintos sistemas básicos:

CARTESIANAS	CILINDRICAS	ESFERICAS
$x$	$= \rho \cos \phi$	$= r \sin \theta \cos \phi$
$y$	$= \rho \sin \phi$	$= r \sin \theta \sin \phi$
$z$	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{x}$	$= \cos \phi \hat{p} - \sin \phi \hat{\theta}$	$= \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi}$
$\hat{y}$	$= \sin \phi \hat{p} + \cos \phi \hat{\theta}$	$= \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi}$
$\hat{z}$	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
CILINDRICAS	CARTESIANAS	ESFERICAS
$\rho$	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r \sin \theta$
$\phi$	$= \tan^{-1}(y/x)$	$= \phi$
$z$	$= z$	$= r \cos \theta$
$\hat{p}$	$= \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$	$= \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}$
$\hat{\theta}$	$= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$
$\hat{z}$	$= \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$
ESFERICAS	CARTESIANAS	CILINDRICAS
$r$	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$
$\theta$	$= \cos^{-1}(z/r)$	$= \cos^{-1}(z/r)$
$\phi$	$= \cot^{-1}(x/y)$	$= \phi$
$\hat{r}$	$= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$	$= \sin \theta \hat{p} + \cos \theta \hat{z}$
$\hat{\theta}$	$= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$	$= \cos \theta \hat{p} - \sin \theta \hat{z}$
$\hat{\phi}$	$= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$	$= \hat{\phi}$

## Análisis vectorial

### Gradiente

Definición: Sea  $f(\mathbf{r})$  un campo escalar diferenciable. El **gradiente** de  $f(\mathbf{r})$  es un campo vectorial que se define a través del cambio de la función en un desplazamiento diferencial:

$$f(r) \Rightarrow df = \mathbf{grad}(f) \bullet d\mathbf{r} = grad(f)_x dx + grad(f)_y dy + grad(f)_z dz$$

**El producto escalar entre el vector gradiente de una función escalar y el diferencial de arco es igual al diferencial de la función escalar de la que se calcula el gradiente.**

El operador gradiente se puede escribir usando el operador vectorial **nabla** o **del**:

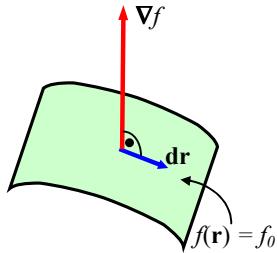
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \Rightarrow \mathbf{grad}(f) = \nabla f \Rightarrow df = \nabla f \bullet d\mathbf{r}$$

Las expresiones del gradiente en los sistemas básicos de coordenadas se muestran en la tabla de la derecha:

CARTESIANAS	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
CILINDRICAS	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$
ESFERICAS	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$

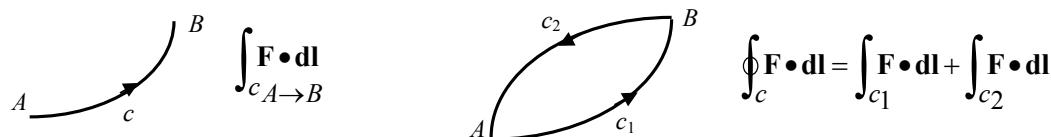
### Propiedades del campo gradiente

Una **equipotencial** del campo escalar  $f(\mathbf{r})$  es una superficie espacial tal que para todos sus puntos:  $f(\mathbf{r}) = f_0$  (constante). Si el vector elemental  $d\mathbf{r}$  pertenece a una superficie equipotencial,  $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$  y se deduce que el vector gradiente es normal a  $d\mathbf{r}$ . Como  $d\mathbf{r}$  es cualquiera, el gradiente es normal a la superficie misma.



**El gradiente del campo escalar  $f(\mathbf{r})$  es un campo vectorial normal a las superficies equipotenciales de  $f(\mathbf{r})$  en todo punto.**

La **circulación de un campo vectorial** a lo largo de una curva  $c$  (abierta o cerrada) en el espacio es una **integral de línea** cuyo integrando es la proyección del campo vectorial sobre el elemento de arco punto a punto a lo largo de la línea. En la figura se ilustran dos circulaciones, una sobre una curva abierta y otra sobre una curva cerrada, que puede interpretarse como la suma de dos circulaciones sobre dos curvas sucesivas.



Cuando el campo que circula es un **gradiente**, por definición:  $\int_{c_1 \rightarrow 2} \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 df = f_2 - f_1$

y la circulación del gradiente depende **exclusivamente** de los valores del campo escalar origen en los **extremos** del intervalo. En particular:

$$\oint_c \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0$$

**Campos conservativos:** Un campo vectorial se dice conservativo si su circulación entre dos puntos no depende del camino que se use:

$$\int_{c_1 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{c_2 A \rightarrow B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por lo tanto **el gradiente es un campo conservativo**.

En resumen:

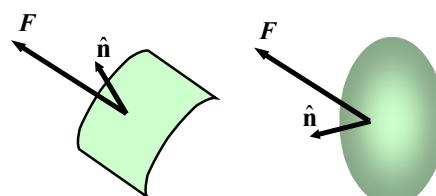
#### Gradiente:

- **campo vectorial normal en todo punto a las superficies equipotenciales de la función escalar origen.**
- **campo vectorial conservativo.**

### Flujo y divergencia

**Flujo de un campo vectorial:**

$$\Phi_F = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

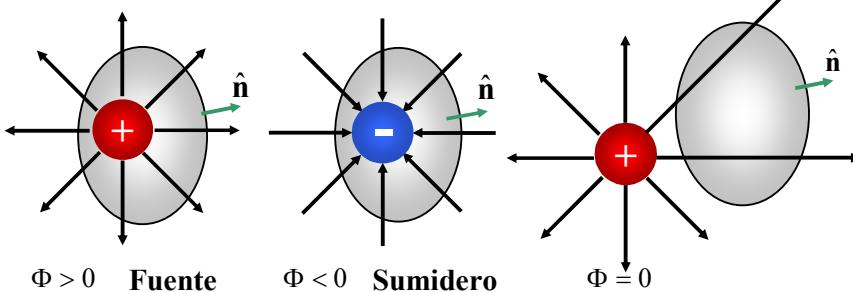


El **flujo de un campo vectorial** a través de una superficie (abierta o cerrada) se define como la integral donde el integrando es la proyección del campo vectorial sobre la normal a la superficie punto a punto de la misma. La propiedad matemática más importante del flujo de un campo vectorial es el

**Teorema de Gauss:**  $\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

Este teorema lleva a la definición de la **divergencia** de un campo vectorial cuando  $V \rightarrow 0$ .

**Interpretación física:**



Una carga eléctrica produce un campo eléctrico. A su vez, las líneas de campo producen flujo a través de una superficie cerrada. Si la superficie encierra carga, el flujo es no nulo, y su signo coincide con el signo de la carga encerrada. Si la superficie no encierra carga, el flujo es cero.

Por lo tanto el flujo (y la divergencia) está asociado a existencia de carga o fuente de campo. En general podemos demostrar que:

$$\boxed{\text{Fuentes escalares del campo: } \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho_F(\mathbf{r})}$$

que significa que la divergencia del campo es proporcional a la **densidad de fuentes escalares** de campo punto a punto. La siguiente tabla presenta las expresiones de la divergencia en los distintos sistemas coordenados básicos:

**CARTESIANAS**

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

**CILINDRICAS**

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

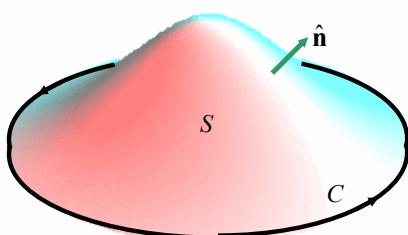
**ESFERICAS**

$$\nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Decimos que un campo es **solenoidal** si su divergencia es nula:  $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$ . En este caso **no existen fuentes escalares del campo**, y como las líneas de campo no tienen fuentes o sumideros, **deben ser cerradas**. Un ejemplo de campo solenoidal es el campo magnético.

**Rotor**

$$\boxed{\text{Teorema de Stokes: } \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} dS = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} dS}$$



El teorema de Stokes lleva a la definición del **rotor** de un campo vectorial cuando  $S \rightarrow 0$ . En esta expresión es importante notar que:

- La superficie  $S$  es abierta. Se “apoya” en la curva  $C$
- El sentido de circulación y el sentido de la normal están ligados entre sí por la regla de la mano derecha.

**Interpretación física**

Así como la divergencia está asociada a las fuentes escalares del campo, el rotor está asociado a sus **fuentes vectoriales**:

$$\boxed{\text{Fuentes vectoriales del campo: } \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_F(\mathbf{r})}$$

En la siguiente tabla se presentan las expresiones del rotor en los sistemas coordenados básicos:

**CARTESIANAS**

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

**CILINDRICAS**

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

**ESFERICAS**

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

Decimos que un campo es **irrotacional** cuando su rotor se anula:  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . En este caso **no existen fuentes vectoriales del campo**. Un ejemplo de campo irrotacional es el campo eléctrico. Por el teorema de Stokes un campo irrotacional da circulación nula sobre una curva cerrada. Entonces decir que un campo es irrotacional es lo mismo que decir que es **conservativo**.

**Laplaciano**

El **laplaciano** es el operador que resulta de tomar la divergencia del gradiente. Opera sobre un campo escalar:  $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \text{div}[\text{grad}(f(\mathbf{r}))] = \nabla \bullet [\nabla f(\mathbf{r})]$

El laplaciano es un operador fundamental de las ecuaciones del electromagnetismo.

La siguiente tabla presenta las expresiones del laplaciano en los sistemas de coordenadas básicos

:

$$\text{CARTESIANAS} \quad \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$\text{CILINDRICAS} \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$$\text{ESFERICAS} \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}$$

## Ecuaciones de Poisson y Laplace

La ley de Gauss de la electrostática y la relación entre el campo y el potencial electrostáticos lleva a la **ecuación de Poisson**:

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla \bullet [-\nabla \phi(\mathbf{r})] = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \Rightarrow \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

La ecuación de Poisson relaciona el potencial eléctrico con sus **fuentes escalares**.

Para puntos del espacio **sin fuentes**, se obtiene la **ecuación de Laplace**:  $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$

Desde el punto de vista matemático, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. Su **solución general** es la suma de la solución general de la ecuación homogénea (ecuación de Laplace) más una solución particular de la ecuación inhomogénea original:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \\ \nabla^2 \phi_h(\mathbf{r}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) = \phi_h(\mathbf{r}) + \phi_p(\mathbf{r})$$

La solución particular más usada es la llamada **integral de Poisson**:

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{R} dV \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

donde el recinto de integración debe contener por completo a las fuentes de campo cuya influencia se quiera determinar y se ha usado la notación de punto fuente (donde están distribuidas las fuentes) y punto campo (donde se desea calcular el efecto, o sea el potencial).

## Teorema de Green

Las llamadas **identidades de Green** son expresiones matemáticas derivadas del teorema de la divergencia que son de utilidad para analizar problemas de potencial y de radiación.

Sea  $V$  una región cerrada del espacio cuya frontera es  $S$ . Sean además  $\phi(\mathbf{r})$  y  $\psi(\mathbf{r})$  dos campos escalares que junto con sus derivadas primeras y segundas son funciones continuas dentro de  $V$ .

Consideremos el teorema de la divergencia aplicado al campo vectorial  $\psi \nabla \phi$ :

$$\int_V \nabla \bullet (\psi \nabla \phi) dV = \oint_S (\psi \nabla \phi) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

Como:  $\nabla \bullet (\psi \nabla \phi) = \nabla \psi \bullet \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi$  se obtiene la llamada **primera identidad de Green**:

$$\int_V \nabla \psi \bullet \nabla \phi dV + \int_V \psi \nabla^2 \phi dV = \oint_S (\psi \nabla \phi) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

donde  $\partial \psi / \partial n$  es la derivada direccional normal a la superficie.

Consideremos ahora en esta expresión que  $\psi = \phi$ , y que  $\phi$  sea solución de la ecuación de Laplace dentro de  $V$ , de manera que nos queda:

$$\int_V (\nabla \phi)^2 dV = \oint_S (\phi \nabla \phi) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

Intercambiamos los roles de los campos escalares, y escribimos ahora la primera identidad de Green al campo vectorial  $\phi \nabla \psi$ :

$$\int_V \nabla \phi \bullet \nabla \psi dV + \int_V \phi \nabla^2 \psi dV = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

Restamos las dos expresiones de la primera identidad para obtener la **segunda identidad o teorema de Green**:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

## Fuentes del campo y teorema de Helmholtz

El **teorema de Helmholtz**, que presentamos sin demostración<sup>16</sup>, relaciona a un campo vectorial con sus fuentes:

Si	$\nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r})$	y	$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r})$
Entonces	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r})$		
con	$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{R} dV'$	y	$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{k}(\mathbf{r}')}{R} dV'$
donde	$R =  \mathbf{r} - \mathbf{r}'  = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$		

**El teorema de Helmholtz muestra que todo campo vectorial está únicamente definido si se conocen su divergencia (fuentes escalares) y su rotor (fuentes vectoriales).**

## Identidades vectoriales

A continuación se presenta una tabla de identidades matemáticas que surgen de la aplicación de los operadores vectoriales vistos.

$\nabla \times (\nabla f) = 0$	$\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$		
$\nabla \bullet \mathbf{r} = 3$	$\nabla \times \mathbf{r} = 0$	$\nabla r = \mathbf{r}/r$	$\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$
$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$	$\nabla \bullet (\phi\mathbf{F}) = \phi\nabla \bullet \mathbf{F} + \mathbf{F} \bullet \nabla\phi$	$\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = \phi\nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla\phi$	
$\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$			
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \bullet \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla) \mathbf{G}$			
$\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \bullet \nabla) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \bullet \nabla) \mathbf{G}$			
$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ (Laplaciano vectorial)			

### Expresiones integrales:

<b>Gauss</b>	$\oint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \bullet \mathbf{F} dV$	$\oint_S f \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla f dV$
<b>Stokes</b>	$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$	$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) dS = \int_V \nabla \times \mathbf{F} dV$

<sup>16</sup> Ver, por ejemplo, W.K.H.Panofsky & M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2<sup>nd</sup>. Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachussets (1962), p.2-5.

## Sistemas lineales

Muchos fenómenos físicos pueden describirse matemáticamente mediante magnitudes funciones del espacio y del tiempo. En muchas situaciones podemos separar estas magnitudes como **estímulos** (causas) y **respuestas** (efectos). También en muchas situaciones de interés tecnológico la relación causal entre estímulos y respuestas es lineal, es decir, la respuesta a un conjunto de estímulos aplicados simultáneamente es la suma de las respuestas obtenidas si cada estímulo opera en solitario. Estas relaciones se pueden implementar matemáticamente mediante **mapeos lineales** entre el conjunto de funciones estímulo y el conjunto de funciones respuesta. Estos mapeos son la representación matemática del fenómeno y se conocen como **sistemas lineales**.

La posibilidad de describir fenómenos de la naturaleza mediante sistemas lineales es ventajosa porque existe una amplia y relativamente sencilla doctrina matemática para tratar a estos sistemas, fundamentalmente mediante la representación de las magnitudes como la suma de funciones elementales cuyas respuestas son bien conocidas o pueden ser estimadas con facilidad.

Las magnitudes que representan el fenómeno pueden ser magnitudes descriptas mediante funciones reales de sus argumentos o magnitudes descriptas mediante funciones complejas. En el primer caso podemos señalar la óptica de procesos incoherentes, y en el segundo la óptica de procesos coherentes, donde es necesario usar campos con módulo y fase. Como el tratamiento vectorial es más general, lo usaremos en nuestra introducción a los sistemas lineales.

Consideremos entonces un sistema definido por un mapeo  $S$  entre un conjunto de funciones estímulo<sup>17</sup>:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r},t) = [f_1(\mathbf{r},t), f_2(\mathbf{r},t), \dots, f_N(\mathbf{r},t)]^T$$

y un conjunto de funciones respuesta:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r},t) = [g_1(\mathbf{r},t), g_2(\mathbf{r},t), \dots, g_M(\mathbf{r},t)]^T$$

Todas estas funciones deben considerarse, en general, funciones complejas de sus argumentos reales.

Entonces, la relación causal se escribe:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r},t) = S \{ \mathbf{f}(\mathbf{r},t) \}$$

donde el **operador** matemático  $S \{ \cdot \}$  representa la relación. Esta relación entre ambos conjuntos de funciones es del tipo "muchas a una", es decir, diversos conjuntos estímulo pueden llevar al mismo conjunto respuesta.

En el caso de un sistema lineal:  $\mathbf{g}(\mathbf{r},t) = \mathcal{L} \{ \mathbf{f}(\mathbf{r},t) \}$

el operador lineal  $\mathcal{L} \{ \cdot \}$  satisface la propiedad básica:

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{\mathbf{f}_1\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{\mathbf{f}_2\}$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes (respecto de los argumentos de las funciones) generalmente complejas.

## Autovalores y autofunciones

Consideremos una función estímulo que depende de sus variables y de un cierto parámetro  $\alpha$ :  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t)$ . Decimos que esta función estímulo es una **autofunción** de un cierto operador lineal  $\mathcal{L}$  si:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t)\} = H(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t)$$

donde  $H(\alpha)$  es un valor complejo dependiente de  $\alpha$  pero independiente de las variables  $\mathbf{r}$  y  $t$ , llamado **autovalor** asociado con la autofunción.

Como el autovalor es una constante compleja, se puede escribir en forma polar:

$$H(\alpha) = A(\alpha) e^{-i\phi(\alpha)}$$

donde  $A(\alpha)$  es la amplitud y  $\phi(\alpha)$  es la fase del complejo  $H(\alpha)$ . Entonces:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t)\} = H(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t)\} = A(\alpha) \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{r},t) e^{-i\phi(\alpha)}$$

<sup>17</sup> Usamos la notación vectorial para los conjuntos de funciones estímulo y respuesta porque es la más natural.

y se observa que la aplicación de un operador lineal a una autofunción tiene como resultado una versión escalada y eventualmente desfasada de esta misma autofunción.

Otro aspecto fundamental de los sistemas lineales surge de la posibilidad de la representación de estímulos y respuestas mediante superposición de funciones más sencillas. Consideremos que podemos expresar el estímulo como una suma o superposición de funciones (ejemplificamos para una relación estímulo-respuesta escalar):

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_k \alpha_k h_k(\mathbf{r},t)$$

Si  $g(\mathbf{r},t) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r},t)\}$  representa un sistema lineal, entonces podemos escribir:

$$g(\mathbf{r},t) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r},t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_k \alpha_k h_k(\mathbf{r},t)\right\} = \sum_k \alpha_k \mathcal{L}\{h_k(\mathbf{r},t)\}$$

Se ve entonces que:

**La linealidad permite representar una función estímulo mediante una suma o superposición lineal de otras funciones elementales, calcular la respuesta para cada estímulo elemental y luego sumar los resultados para obtener la respuesta original.**

Esto es sumamente conveniente desde el punto de vista del cálculo ya que se puede elegir el conjunto de funciones elementales que representa a la función estímulo original de manera que sean sencillas las respuestas obtenidas al aplicar el operador.

### Representación de funciones por conjuntos completos de funciones ortogonales

Las representaciones más útiles son las que utilizan **conjuntos completos de funciones ortogonales**.

En general, existen representaciones en el **dominio del tiempo** y representaciones en el **dominio del espacio**. Habitualmente, las funciones matemáticas que se usan en la descripción de sistemas de ingeniería son separables, es decir, podemos escribir para cualquiera de ellas:

$$f(\mathbf{r},t) = f_s(\mathbf{r}) T(t)$$

donde el subíndice "s" indica que la función describe el comportamiento espacial, y entonces la representación de la función original como superposición de funciones elementales resulta en un producto de dos series que pueden considerarse por separado.

Dado que es común en los cursos de ingeniería la representación en el dominio del tiempo (representación de Fourier) ejemplificaremos esta sección con representaciones en el dominio del espacio, menos conocidas.

Así tenemos, entonces la representación:  $f_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(\mathbf{r})$  dentro de un recinto  $V$  del espacio,

donde todas las cantidades son generalmente complejas.

Decimos que dos funciones  $\phi_1(\mathbf{r})$  y  $\phi_2(\mathbf{r})$  son **ortogonales** en  $V$  si:

$$\int_V \phi_1(\mathbf{r}) \phi_2^*(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} = 0 & \text{si } \phi_1(\mathbf{r}) \neq \phi_2(\mathbf{r}) \text{ dentro de } V \\ \neq 0 & \text{si } \phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) \text{ dentro de } V \end{cases}$$

donde el asterisco simboliza el complejo conjugado.

Si además la integral vale 1 cuando las dos funciones coinciden, se dice que las funciones son **ortonormales**.

Suponemos en lo que sigue que el conjunto de funciones  $\{h_n(\mathbf{r})\}$  de la representación son ortogonales:

$$\int_V h_n(\mathbf{r}) h_m^*(\mathbf{r}) dV = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \Delta_n & \text{si } n = m \end{cases}$$

Entonces los coeficientes  $\alpha_n$  del desarrollo se pueden calcular sencillamente:

calculamos  $\int_V h_k(\mathbf{r}) f_s(\mathbf{r}) dV = \int_V h_k(\mathbf{r}) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(\mathbf{r}) \right] dV = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_V h_k(\mathbf{r}) h_n(\mathbf{r}) dV = \Delta_k \alpha_k$

de donde:

$$\alpha_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_V h_k(\mathbf{r}) f_s(\mathbf{r}) dV$$

Definimos el **error cuadrático medio** de la representación como:

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int_V \left[ f_s(\mathbf{r}) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n h_n(\mathbf{r}) \right]^2 dV$$

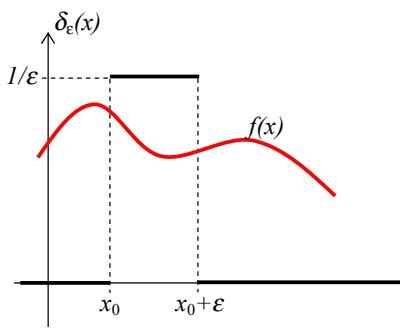
Si el conjunto de funciones  $\{h_n(\mathbf{r})\}$  es **completo**, entonces el error cuadrático medio **tiene a cero** para todo punto dentro de  $V$  para **cualquier** función  $f_s(\mathbf{r})$  a representar.

Tenemos entonces una prescripción de cómo representar la función estímulo dentro de un dado recinto con error mínimo, cualquiera sea la función. Existen múltiples conjuntos completos de funciones ortogonales. Cuál se elija para una aplicación específica depende del operador lineal que permite hallar la respuesta.

## Delta de Dirac

La **delta de Dirac** es una funcional, es decir, es un objeto matemático definido por un conjunto de propiedades. En el caso de la delta **espacial en una dimensión**  $\delta(x)$ , las propiedades son:

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0 && \text{para } x \neq x_0 \\ \int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx &= \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x_0 \notin [a, b] \end{cases} \end{aligned}$$



Por ejemplo, la función definida por intervalos:

$$\delta_\varepsilon(x - x_0) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_0, x_0 + \varepsilon] \end{cases}$$

se comporta como una delta de Dirac cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La primera propiedad se cumple ya que en el límite el único punto en que la función no es cero es  $x_0$ . La segunda propiedad se cumple por el teorema del valor medio del

cálculo integral:  $\int_a^b \phi(x) dx = \phi(\xi)(b - a)$  donde  $\xi \in (a, b)$ .

Luego:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{si el intervalo } [x_0, x_0 + \varepsilon] \in [a, b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Tomando el límite para  $\varepsilon \rightarrow 0$  se llega a las propiedades de la delta.

La definición de la delta ilustra la **propiedad de muestreo**: su aplicación permite tener una muestra de la función en el punto de definición de la delta.

**En tres dimensiones espaciales** se puede escribir:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \quad \text{para } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$$

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{si } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases}$$

donde la notación convencional de la delta significa, p.ej., en cartesianas:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz$$

Una operación que lleva a una delta de Dirac en tres dimensiones es:

$$\operatorname{div} \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = \nabla \bullet \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right]$$

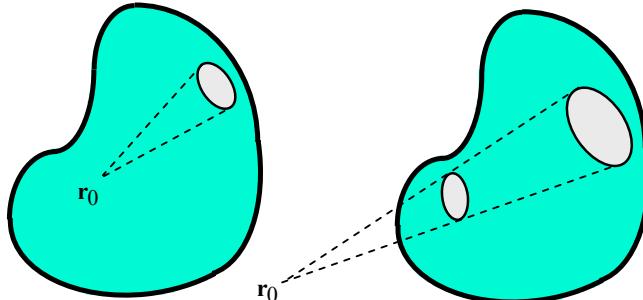
Demostramos esta propiedad usando por comodidad coordenadas cartesianas:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -\frac{(x - x_0)\hat{x} + (y - y_0)\hat{y} + (z - z_0)\hat{z}}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{3/2}} \\ \nabla \bullet \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = 0 \quad \text{si } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{cases}$$

Si  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  la operación no está definida. Luego se satisface la primera propiedad de la delta. Para probar la segunda, usamos el teorema de la divergencia:

$$\int_V \nabla \bullet \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] dV = \oint_S \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \bullet \hat{n} dS = -\oint_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \bullet \hat{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dS = -\int_{4\pi} d\Omega_{\mathbf{r}_0}$$

que indica que la integral es igual al ángulo sólido medido desde el punto  $\mathbf{r}_0$ .



- Si el recinto de integración **incluye** a este punto, el resultado de la última integral vale  $4\pi$  (figura de la izquierda).
- Si el recinto de integración **no incluye** a este punto, la integral es nula, lo que se ve a partir del flujo de la anteúltima integral (figura de la derecha).

Finalmente:

$$\nabla \bullet \left[ \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \right] = \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

En nuestro curso la funcional delta de Dirac se utiliza en la representación de objetos puntuales, lineales o superficiales como objetos tridimensionales en las integrales de los campos.

En otras aplicaciones la **funcional delta temporal**  $\delta(t - t_0)$  tiene mucha utilidad en el análisis de los circuitos y sistemas de control, como se muestra en la siguiente sección.

### Representación Delta

De las propiedades de la Delta de Dirac podemos escribir:

$$f(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t') \delta(t' - t) dt' \quad \text{en el dominio del tiempo dentro del intervalo } [t_1, t_2].$$

$$f(\mathbf{r}) = \int_V f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV \quad \text{en el dominio del espacio dentro del recinto } V.$$

Estas ecuaciones representan la función como una superposición de sus valores muestrados en los sucesivos puntos del recinto de integración. Aunque esta representación - la **representación delta** - parece trivial, vemos a continuación que su aplicación a sistemas lineales nos da un mecanismo de estudio de este tipo de problemas.

Supongamos que estas funciones son estímulo de un cierto sistema lineal simbolizado por el operador  $\mathcal{L}\{\cdot\}$ :  $g = \mathcal{L}\{f\}$ .

En el **dominio del tiempo**, la respuesta es:

$$g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(t') \delta(t', t) dt'\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t') \mathcal{L}\{\delta(t', t)\} dt'$$

Obsérvese que el operador  $\mathcal{L}$  actúa sobre el tiempo no primado.

Definimos la **respuesta impulsiva del sistema** como:  $h(t', t) = \mathcal{L}\{\delta(t', t)\}$

Y entonces la respuesta del sistema ante el estímulo  $f(t)$  será:  $g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t') h(t', t) dt'$

En el **dominio del espacio** nos queda:

$$g(\mathbf{r}) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = \int_V f(\mathbf{r}') h(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV \quad \text{con} \quad h(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \mathcal{L}\{\delta(\mathbf{r}', \mathbf{r})\}$$

Las integrales de las representaciones delta, llamadas **integrales de superposición**, definen completamente la respuesta del sistema en base a su respuesta impulsiva en todos los puntos del intervalo (recinto) de representación. En la óptica, la respuesta al impulso se conoce como **"point spread function"**.

**En el caso de un sistema físico la representación delta espacial tiene la interpretación de que la respuesta (habitualmente los campos) está completamente definida especificando la posición de puntos fuentes equivalentes a la distribución de fuentes. De esta forma utilizamos un método de superposición (válido porque las ecuaciones de Maxwell son lineales) para calcular los campos creados por distintas distribuciones de fuentes.**

Esta metodología de superposición de los efectos creados por fuentes elementales se usa a lo largo del texto en todas las aplicaciones.

En la teoría del potencial se conoce como **método de la función de Green**, ya que la respuesta impulsiva del sistema se conoce como función de Green del mismo.

Este esquema da lugar a distintos algoritmos numéricos de cálculo de campos en problemas del electromagnetismo.

### Sistemas lineales invariantes

Decimos que un sistema lineal es **invariante en el tiempo (en el espacio)**, si la respuesta al impulso en un instante  $t$  (en una posición  $\mathbf{r}$ ) para un impulso excitador aplicado en el instante  $\tau$  (en la posición  $\mathbf{r}'$ ) sólo depende del intervalo  $[t - \tau]$  (de la distancia vectorial  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ). Esto significa que distintos intervalos de tiempo (distintas regiones del espacio) llevan al mismo comportamiento siempre que los intervalos (distancias vectoriales) entre estímulo y respuesta sean iguales. El sistema no cambia a medida que pasa el tiempo o en distintas regiones del espacio.

Para sistemas lineales invariantes podemos entonces escribir:

$$h(t', t) = h(t' - t) = \mathcal{L}\{\delta(t' - t)\} \quad h(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \mathcal{L}\{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\}$$

y las integrales de superposición resultan así:

$$g(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t') h(t' - t) dt' = f \otimes h \quad g(\mathbf{r}) = \mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = \int_V f(\mathbf{r}') h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV = f \otimes h$$

que son **productos convolución** entre la función estímulo y la respuesta impulsiva. Como veremos en las siguientes secciones, utilizando la transformación de Fourier el producto convolución de dos funciones del tiempo (del espacio) se transforma al producto directo de las respectivas transformadas. Esto permite trabajar sencillamente en el campo transformado con los sistemas lineales invariantes.

**En el electromagnetismo la mayoría de los sistemas son invariantes en espacio y tiempo.**

### Resumen de la representación de Fourier en una dimensión

En el electromagnetismo la representación más usada es la de Fourier, por lo que centraremos nuestro análisis en su uso. En esta sección hacemos un breve resumen de las propiedades básicas de la representación de Fourier en una dimensión, tomando como ejemplo funciones del tiempo.

La **transformada de Fourier** de una función  $g(t)$  es:

$$G(f) = \Im[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

y es una función generalmente compleja de la **frecuencia**  $f$ . También definimos la **transformada inversa de Fourier** de una función de la frecuencia como:

$$g(t) = \Im^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$g(t)$  y  $G(f)$  forman un par de transformación según Fourier:  $g(t) \leftrightarrow G(f)$ .

$g(t)$  se conoce como **representación en el dominio del tiempo** y  $G(f)$  se conoce como **representación en el dominio de la frecuencia**.

Existen reglas matemáticas de existencia de esta transformación que pueden consultarse en cualquier texto matemático dedicado a estos temas. En nuestro contexto basta decir que la función  $g(t)$  debe cumplir las siguientes propiedades para que exista su transformada:

- ser absolutamente integrable sobre su dominio:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < M$ ,
- sólo se admite un número finito de discontinuidades finitas y extremos en cualquier intervalo finito del dominio,
- no debe tener discontinuidades infinitas.

### Propiedades básicas

La transformada de Fourier es una representación lineal, de manera que cumple propiedades de los sistemas lineales. Las siguientes son las propiedades básicas más importantes:

- **Linealidad.**  $\Im[\alpha g_1(t) + \beta g_2(t)] = \alpha \Im[g_1(t)] + \beta \Im[g_2(t)]$   
donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes cualesquiera.

- **Similaridad.**  $\Im[g(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} G(f/\alpha)$

donde  $\alpha$  es una constante cualquiera. Un “estiramiento” en la escala del tiempo implica una “compresión” en la escala de frecuencias y viceversa, además de un cambio global en la amplitud del espectro.

- **Corrimiento.** Si  $G(f) = \Im[g(t)]$  entonces:  $\Im[g(t - \tau)] = G(f)e^{-j2\pi f\tau}$   
donde  $\tau$  es un real. Un corrimiento en el dominio del tiempo implica un cambio de fase en el dominio de la frecuencia.

- **Teorema de Rayleigh-Parseval.** Si  $G(f) = \Im[g(t)]$  entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

estas integrales se interpretan como el **contenido energético** de la “señal”.

- **Convolución.** Si  $G_1(f) = \Im[g_1(t)]$  y  $G_2(f) = \Im[g_2(t)]$  entonces:

$$\Im \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) g_2(t-\tau) d\tau \right] = \Im[g_1(t) \otimes g_2(t)] = G_1(f) G_2(f)$$

es decir que la transformada de la convolución en el dominio del tiempo es igual al producto de las transformadas individuales.

- **Autocorrelación.** Si tomamos en la convolución:  $g_1(t) = g(t), g_2(t) = g^*(-t)$

$$\Im \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t-\tau) d\tau \right] = \Im[g(t) \otimes g^*(t)] = |G(f)|^2$$

y en forma similar:  $\Im[g(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) G^*(\xi-f) d\xi$

Las propiedades de singularidad y corrimiento son fundamentales en el tratamiento de funciones por tramos, donde se utilizan "transformadas parciales" que representan a las funciones por partes, ya sea en el dominio temporal o el dominio espacial.

## RESUMEN

En este Capítulo se han presentado los modelos básicos de los fenómenos electromagnéticos y la notación y las herramientas matemáticas fundamentales que se requieren a lo largo del texto.

### Ecuaciones de Maxwell

$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$ $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	<b>(ley de Gauss eléctrica)</b> <b>(ley de Gauss magnética)</b> <b>(ley de Faraday)</b> <b>(ley de Maxwell-Ampère)</b>
<b>Campos</b>	<b>Fuentes</b>

Los campos pueden expresarse a partir de los **potenciales electrodinámicos** vectorial  $\mathbf{A}$  y escalar  $\Phi$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

que están ligados entre sí por la llamada **calibración de Lorentz**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$$

En el vacío, con el uso de estos potenciales, las ecuaciones de Maxwell llevan a **ecuaciones de onda inhomogéneas**:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

con soluciones ( $c = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ):

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV'$$

Hay un **retardo entre causa y efecto** ( $t' = t - R/c$ ), por lo que estos potenciales se llaman **potenciales retardados**.

Los campos pueden representarse en el **dominio del tiempo**:

**En la representación en el dominio del tiempo campos y fuentes dependen de la posición y del tiempo:**  $F = F(\mathbf{r}, t) = F(x, y, z, t)$

o en el **dominio de la frecuencia** utilizando la transformación de Fourier:

$F(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) \Rightarrow F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$	$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega)$ $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, \omega)$
---	--

que son las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia.

En esta representación, es posible establecer otras relaciones entre los campos que simplifican la resolución. Estas relaciones se denominan leyes o **relaciones constitutivas** y dependen de la frecuencia:

$D(r, \omega) = \epsilon_0 E(r, \omega)$	$\epsilon$ : <b>permitividad (dieléctrica)</b>
$j(r, \omega) = \sigma_0 E(r, \omega)$	$\sigma$ : <b>conductividad</b>
$B(r, \omega) = \mu_0 H(r, \omega)$	$\mu$ : <b>permeabilidad (magnética)</b>

### Tres entornos

Existen tres entornos de modelación diferentes en el dominio de la frecuencia:

- Las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. Este es el caso de la aproximación cuasi-estática. Vale la teoría de circuitos y se modeliza el sistema mediante elementos de **parámetros concentrados** (resistores, capacitores, inductores, etc.).
- Dos de las tres dimensiones del sistema fuente de campo son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de la fuente. En este caso se modela al sistema como una cascada de elementos de longitud infinitesimal a lo largo de la dimensión que no cumple la condición cuasi-estática. Como cada elemento infinitesimal de la cascada cumple esta condición, se lo modela mediante un circuito equivalente. Se tiene entonces un modelo de **parámetros distribuidos**. El caso típico es el de las líneas de transmisión.
- Al menos dos de las tres dimensiones no cumplen la condición cuasi-estática. Se requiere usar el **modelo de campo** en toda su generalidad. Esto ocurre por ejemplo en antenas y circuitos de microondas.

## PROBLEMAS

1.1) Expresar los siguientes vectores en coordenadas cilíndricas y esféricas:

$$\mathbf{F} = 3x \hat{\mathbf{x}} + 2z^2 \hat{\mathbf{y}} \quad \mathbf{G} = 2xy \hat{\mathbf{z}} + x^2 \hat{\mathbf{y}}$$

1.2) Calcular la masa de un cubo de arista  $a = 10 \text{ cm}$  cuya densidad es:  $\rho = 3(\text{Kg}/\text{cm}^3) x y^2 z^{1/2}$ .

1.3) Calcule la masa de una esfera de radio  $a = 5 \text{ cm}$  cuya densidad es:  $\rho = 3 (\text{Kg}/\text{m}^3) r^2$ .

1.4) Calcule la carga de los siguientes sistemas:

- a) dos esferas concéntricas de densidades  $\rho = \text{cte}$  para  $r < a$  y  $\rho = A r^2$  para  $a < b < r < c$ .
- b) dos cilindros coaxiales de densidad:  $\rho = \lambda$  para  $r < a$  y  $\rho = -A r^2 z$  para  $a < b < r < c$ .

Nota:  $[\lambda] = [\text{g}/\text{cm}]$

1.5) Dados los tres vectores:  $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}$      $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$      $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$

- a) Calcular  $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \pm \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A} \pm \mathbf{C}$
- b) Calcular  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \bullet \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}$
- c) Calcular  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$
- d) Verificar que  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$
- e) Verificar que  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})$
- f) Calcular el ángulo entre los tres pares de vectores.

1.6) Hallar el gradiente de los siguientes campos escalares:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = 10x & \text{b)} g(x,y,z) = 10x + 15xy + 20xz^2 \\ \text{c)} f(r) = 25/r & \text{d)} g(\rho, \phi, z) = 10 \cos \phi - 5 \rho z \sin \phi \end{array}$$

1.7) Calcular la circulación de los campos  $\mathbf{F}_1 = xyz \hat{\mathbf{x}} + x^2 \hat{\mathbf{y}}$  y  $\mathbf{F}_2 = y \hat{\mathbf{x}} - x \hat{\mathbf{y}}$  a lo largo del camino rectangular desde  $(0,1)$  a  $(1,1)$  a  $(1,2)$  a  $(0,2)$  y vuelta a  $(0,1)$ . Repetir para el camino triangular dado por  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ . ¿Son los campos conservativos?

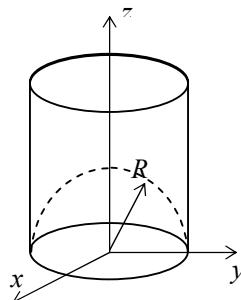
1.8) Calcule el flujo de los vectores del problema 1.1) a través de un paralelepípedo de lados 2, 3 y 5 con un vértice en el origen de coordenadas.

1.9) Calcule el flujo del campo  $\mathbf{F} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + \rho^2 \cos^2 \phi \hat{\mathbf{z}}$  a través de un cilindro de altura 4, radio de la base 3, centrado en el origen de coordenadas.

1.10) Calcular la divergencia y el rotor de los campos:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \mathbf{F} = x \hat{\mathbf{x}} + y^2 \hat{\mathbf{y}} + xz \hat{\mathbf{z}} & \text{b)} \mathbf{F} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \phi \cos \phi \hat{\phi} + \rho^2 \cos^2 \phi \hat{\mathbf{z}} \\ \text{c)} \mathbf{F} = r^2 \sin \theta \cos \phi (\hat{r} + \hat{\theta} + \hat{\phi}) & \end{array}$$

1.11) Comprobar el teorema de Stokes para el contorno frontera en el plano  $xy$  que se muestra en la figura con un campo vectorial  $\mathbf{A} = r \hat{\phi} - z \hat{\mathbf{z}}$ . Comprobar el resultado para a) la superficie circular plana en el plano  $xy$ ; b) para la superficie hemisférica limitada por el contorno y c) para una superficie cilíndrica de altura  $h$  limitada por el contorno.



1.12) Calcular el laplaciano de las funciones del problema 1.6.

1.13) Demostrar que la expresión:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}$

se convierte en una delta de Dirac para  $a \rightarrow 0$ .

1.14) Demostrar que:  $\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{|a|} \delta(x - x_0)$

1.15) Demostrar que la exponencial compleja  $e^{i2\pi\tilde{\xi}t}$  es una autofunción de cualquier sistema lineal invariante que opera sobre funciones del tiempo.

## 2 - Campos Cuasi-Estáticos 1

### Campo Electrostático en el vacío

En este Capítulo veremos características y aplicaciones de campos electrostáticos **en el vacío**.

En el **caso estático** los campos y sus fuentes **no dependen del tiempo**. Se trata de distribuciones de cargas en reposo<sup>1</sup> y corrientes **estacionarias** o continuas.

Los campos eléctrico y magnético están **desacoplados**. El campo eléctrico (**electrostático**) depende solamente de la distribución de cargas:

$$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

### Electrostática en el vacío

En el vacío, los campos **D** y **E** están ligados a través de la **constante del vacío**:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

y entonces las ecuaciones del campo electrostático en el vacío son:

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

De acuerdo al teorema de Helmholtz si se conocen la divergencia y el rotor de un campo vectorial el campo queda únicamente determinado. El campo electrostático en el vacío tiene únicamente **fuentes escalares** (la distribución de carga eléctrica). El teorema de Helmholtz lleva también al **potencial electrostático** en el vacío, que cumple la ecuación diferencial de **Poisson**, cuya solución particular es la llamada **integral de Poisson**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

En sitios del espacio donde no existen fuentes de campo [ $\rho(\mathbf{r}) = 0$ ] se cumple la **ecuación de Laplace**:  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$

Las técnicas para resolver la ecuación de Poisson o de Laplace se conocen como **teoría del potencial**. Veremos algunas de ellas en el Capítulo siguiente y métodos numéricos en el Capítulo 7.

Carga eléctrica. Cuerpos cargados. Inducción electrostática.

La **carga eléctrica** es una propiedad fundamental de la materia. Todos los cuerpos materiales están formados por partículas cargadas, que interaccionan entre sí produciendo fuerzas de cohesión. Esta interacción eléctrica entre partículas cargadas puede ser de atracción (como en el caso de la interacción gravitatoria) o de repulsión. Este hecho lleva a la clasificación de la carga eléctrica en dos variantes, que se identifican mediante la convención de un **signo**: partículas cargadas con carga de igual signo se repelen, partículas cargadas con cargas de distinto signo se atraen. Por este motivo la interacción eléctrica es de mayor complejidad que la interacción gravitatoria, que siempre es de atracción. Convencionalmente se asigna el signo positivo a la carga de los protones, partículas elementales del núcleo atómico, y el signo negativo a los electrones, partículas que se hallan fuera del núcleo. Surge también que, en valor absoluto, la cantidad de carga de estas partículas es la misma:  $|e| \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Las interacciones eléctricas entre átomos son la base de las reacciones químicas y las que llevan a la constitución de los cuerpos materiales extensos.

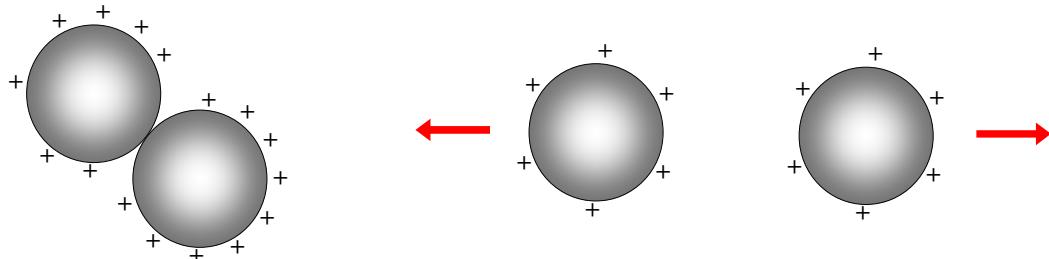
<sup>1</sup> En reposo en un sistema de referencia inercial.

En muchos casos los cuerpos extensos son **neutros** por la presencia de igual cantidad de partículas cargadas negativas y positivas. Desde antiguo se conoce que existen manipulaciones que permiten “cargar” un cuerpo, originalmente neutro. Estas manipulaciones producen la transferencia de carga por contacto (fundamentalmente electrones) desde o hacia el cuerpo. Un cuerpo cargado interacciona con otro cuerpo, cargado o no. Si el otro cuerpo está cargado, se producen fuerzas de atracción o repulsión según el signo de la carga neta de cada cuerpo. Si el otro cuerpo no está cargado, igual se produce una redistribución espacial de las partículas cargadas que contiene, lo que eventualmente da lugar también a fuerzas eléctricas. El efecto de redistribuir y/o transferir carga a un cuerpo se conoce como **inducción electrostática**.

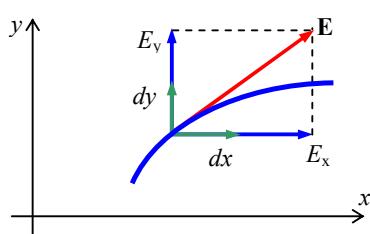
En la figura de la derecha, un cuerpo cargado (izquierda) se acerca a un cuerpo neutro (derecha). Se observa la redistribución de carga (**inducción**) en el cuerpo neutro. Esta redistribución se produce por las fuerzas entre las cargas del cuerpo cargado y las cargas del cuerpo neutro.



Si se permite el contacto entre los dos cuerpos, la carga negativa del cuerpo originalmente neutro se combina o elimina con parte de la carga positiva del cuerpo originalmente cargado. Como ahora ambos cuerpos están cargados con cargas de igual signo, se repelen.



### Líneas de campo



Si dibujamos punto a punto los vectores campo generados por una distribución de carga cualquiera, resulta que los sucesivos vectores campo son tangentes a líneas en el espacio que llamamos **líneas de campo** (o **líneas de fuerza**, en la visión de Faraday).

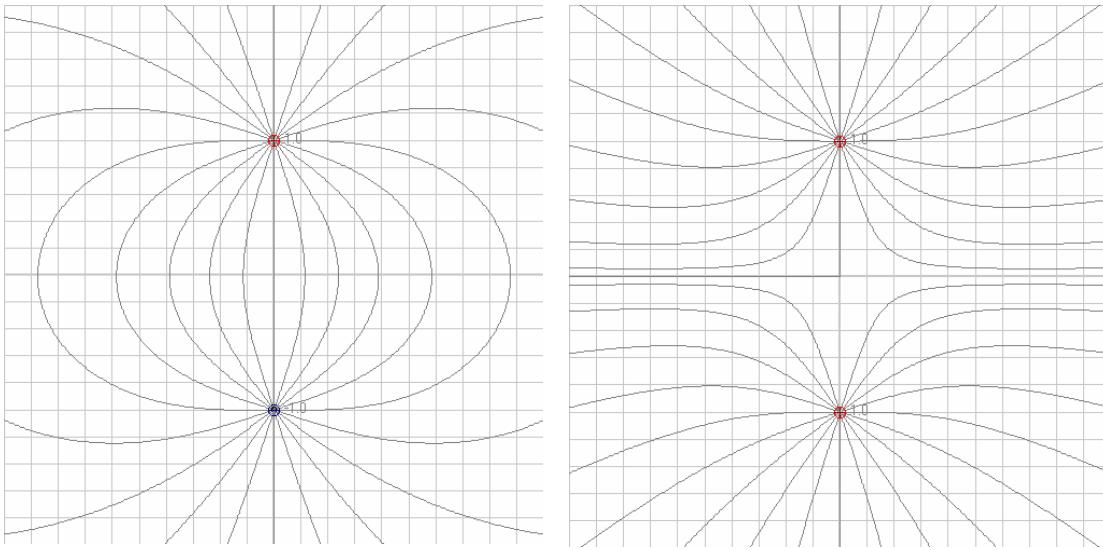
**Las líneas de campo son las trayectorias que seguiría una partícula cargada en el campo.**

En la figura superior se ve un tramo de línea de campo. Como el campo es tangente a la línea, se

debe cumplir que:  $\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ E_x & E_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = 0$

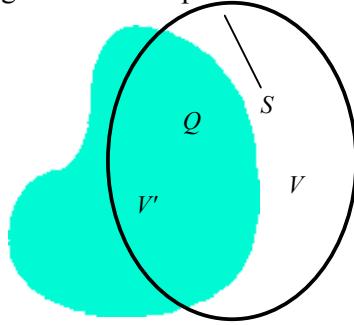
de donde se obtiene:  $\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$  que es la **ecuación diferencial** de las líneas de campo.

Hay programas educacionales y comerciales que permiten trazar las líneas de campo de configuraciones de cargas puntuales, como por ejemplo Coulomb<sup>2</sup>, que se ha usado para trazar las líneas de campo en distribuciones de cargas puntuales en este Capítulo. Los siguientes gráficos realizados con este programa indican las líneas de campo de dos cargas: a la izquierda de igual valor y signo opuesto (dipolo) y a la derecha dos cargas de igual valor e igual signo.



### Ley de Gauss

Para distribuciones de carga de alta simetría, la forma matemáticamente más sencilla de calcular el campo es usar la llamada **ley de Gauss**, que puede deducirse de la ecuación que da la divergencia del campo.



Consideremos una distribución cualquiera de carga  $Q$  contenida en un recinto  $V'$ , con una densidad de carga  $\rho(\mathbf{r})$ . Entonces:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}) \neq 0 & \text{para } \mathbf{r} \in V' \\ \rho(\mathbf{r}) = 0 & \text{para } \mathbf{r} \notin V' \end{cases}$$

En todo punto del espacio se cumple la ecuación de Maxwell:  $\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ . Integraremos esta ecuación sobre un recinto  $V$  del espacio, en general diferente de  $V'$ :

$$\int_V \nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

Aplicamos ahora el teorema de la divergencia en la integral del primer miembro:

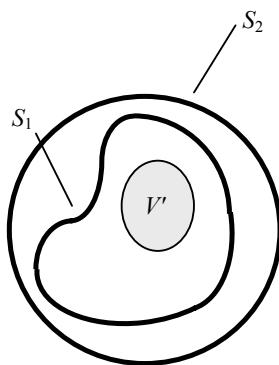
$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

La integral del segundo miembro es la **carga neta encerrada en  $V$** :

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = Q_V$$

y esta expresión se conoce como **ley de Gauss** de la electrostática. Obsérvese que esta carga **no** es la carga encerrada en  $V'$ , sino solamente la parte de ella contenida en  $V$ . Por ello es importante en el uso práctico del teorema de Gauss determinar claramente cuál es la carga encerrada en el

<sup>2</sup> Coulomb v1.0 es un programa que permite simular el comportamiento de distribuciones discretas de cargas y dipolos eléctricos en dos dimensiones. Este programa de simulación forma parte del proyecto “Elaboración de Material Informático para la Enseñanza de las Interacciones Fundamentales en Electromagnetismo”, financiado por la Junta de Castilla y León en su programa de Elaboración de Recursos de Apoyo a la Enseñanza Universitaria del curso 1998-99, y realizado por los profesores del Grupo de Magnetismo del Departamento de Electricidad y Electrónica de la Universidad de Valladolid: Carlos de Francisco Garrido, José María Muñoz Muñoz, Pablo Hernández Gómez, Oscar Alejos Ducal y Carlos Torres Cabrera.



recinto de integración.

**La ley de Gauss es totalmente general en el caso electrostático.**

Para el vacío esta ley se particulariza como:

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_V / \epsilon_0$$

La superficie de integración para la aplicación práctica de la ley de Gauss puede elegirse de manera de simplificar el cálculo. Por ejemplo, en la figura de la izquierda sólo hay carga en el recinto  $V'$ . Puede elegirse como superficie de integración a  $S_1$  o a  $S_2$ , que contienen a  $V'$ . Ambas superficies darán el mismo resultado, ya que el espacio entre ellas no contiene carga, pero en general parece más simple la integración sobre la esfera  $S_2$  que la integración sobre  $S_1$ .



**Johann Carl Friedrich Gauss** nació en Brunswick, Alemania en 1777. Sus dotes matemáticas fueron evidentes desde su infancia. Descubrió en forma independiente importantes teoremas cuando aún no había comenzado estudios universitarios. Sus contribuciones en todos los terrenos de la matemática, algunos de los cuales él creó, son innumerables. Sin embargo, también son muy importantes sus contribuciones a la astronomía (desde 1807 hasta su muerte trabajó en el Observatorio de la Universidad de Gottinga), la física y la ingeniería, ya que muchos de sus logros más notables surgieron a partir de la necesidad de resolver problemas prácticos. Por ejemplo, en el área del electromagnetismo, Gauss creó gran parte de las bases matemáticas de la **teoría del potencial**, que describimos brevemente más abajo, aunque el teorema que lleva su nombre - publicado por Gauss en 1813 - había sido ya descubierto por **Joseph Louis Lagrange** en 1764. La motivación para el desarrollo de estos trabajos fue un pedido del estado de Hanover para realizar una campaña geodésica. Gauss estudió las nociones de mapeo de una superficie 3D sobre otra 2D, inventó en este contexto el método de cuadrados mínimos y desarrolló poderosos métodos estadísticos para



analizar los problemas de medición y representación. Junto con **Wilhelm Weber** desarrolló la teoría del potencial para aplicaciones magnéticas. Estos trabajos utilizaron ideas y trabajos previos de los matemáticos franceses Laplace y Poisson.

Gauss falleció en Gottinga, Alemania en 1855.



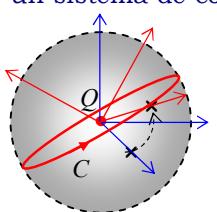
## Campo de cargas puntuales

La redistribución de carga en objetos extensos cargados debido a la presencia de otros objetos cercanos genera dificultades en el cálculo del campo electrostático generado. Por ello comenzaremos con los casos más simples de campo creado por cargas puntuales.

**Una carga puntual** es una simplificación que desprecia la estructura interna de la distribución de carga en el cuerpo, que queda solamente caracterizado por su carga neta. Es posible usar esta simplificación para los casos donde se desea calcular el **campo lejano** creado por la distribución, es decir, donde la distancia a la cual se quiere calcular el campo es mucho mayor que el tamaño de la distribución. Esto se puede probar rigurosamente mediante el desarrollo multipolar del campo (o el potencial) electrostático que describimos más abajo (**Ejemplo 2-18**). La forma más simple de calcular el campo para distribuciones de carga de alta simetría es usar la ley de Gauss y como una carga puntual tiene simetría esférica usamos en el siguiente ejemplo la ley de Gauss para calcular el campo de una carga puntual.

**Ejemplo 2-1:** Calcular el campo electrostático creado por una carga puntual de valor  $Q$  en el vacío.

Como dijimos, una carga puntual es un modelo ideal de cuerpo cargado que consideramos de extensión nula, como un punto matemático, y está caracterizada solamente por su carga neta  $Q$ . Esta "distribución" de carga tiene simetría esférica. Para demostrarlo, consideramos un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con la posición de la carga, y tomamos un



punto de observación, digamos, sobre el eje  $x$  a una distancia  $a$ . El campo tendrá un cierto valor. Si ahora giramos el sistema de coordenadas alrededor del origen, el punto de observación pasará a otra posición, fuera del eje  $x$ , sobre la esfera de radio  $a$  centrada en la carga. Como el valor del campo debe ser siempre el mismo independientemente del sistema de coordenadas elegido, se concluye que el campo debe tener igual valor en todo punto de la superficie esférica de radio  $a$  ya que estos puntos se pueden obtener a partir del punto original sólo girando el sistema de coordenadas. Por lo tanto, la descripción matemática del campo sólo puede depender de la distancia del punto de observación a la posición de la carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}(r) \quad (\text{simetría esférica}).$$

Por otra parte podemos demostrar que el campo tiene solamente componente radial. Para ello tomamos una circunferencia con centro en la carga y realizamos la circulación del campo eléctrico a lo largo de ella. Como el campo electrostático es conservativo:  $\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 0$

Sobre la trayectoria elegida sólo la componente tangencial (no radial) del campo produce un producto escalar no nulo, y por otra parte, como el campo debe ser constante sobre la esfera que contiene a la trayectoria por las consideraciones previas, se tiene:

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C E_t(\mathbf{r}) dl = \oint_C E_t dl = 2\pi a E_t = 0$$

donde  $a$  es el radio de la curva  $C$ . Como  $a$  es cualquiera, debe ser  $E_t = 0$ , y entonces el campo eléctrico sólo puede tener componente radial:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}(r) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$

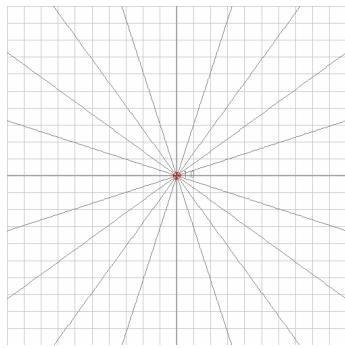
A partir de estos resultados podemos aplicar la ley de Gauss. Debido a la forma matemática que tiene el campo, nos conviene tomar una superficie de integración esférica centrada en la carga, sobre la cual el valor del campo es constante y el campo es además normal.

Con estas consideraciones tenemos entonces:

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{n} dS = Q_V / \epsilon_0 \Rightarrow \oint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = Q / \epsilon_0 \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

E introduciendo la característica vectorial:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$



Debemos observar que esta expresión es válida en todo el espacio, **salvo en la posición de la carga puntual ( $\mathbf{r} = 0$ )**, donde la expresión presenta una singularidad. Como se argumenta en el APENDICE 2, el campo creado por una carga es una perturbación del espacio que **actúa sobre otras cargas** produciendo sobre ellas una acción observable (una fuerza - la fuerza coulombiana). Por lo tanto conceptualmente no existe campo de una carga puntual que actúe sobre sí misma, por lo que esta singularidad no tiene significado físico.

Las líneas de campo se presentan en la gráfica de la izquierda. Son rectas radiales que parten de la carga puntual para carga positiva y llegan a la carga para carga negativa.

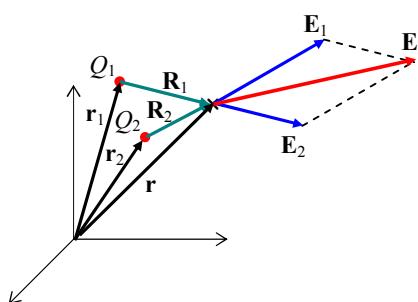
Desde el punto de vista matemático, el objeto ideal carga puntual puede representarse como una densidad de carga mediante el uso de la delta de Dirac:  $Q(\mathbf{r}) \rightarrow \rho(\mathbf{r}) = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

ya que:

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = \int_V Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} Q & \text{si } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases}$$

### Principio de superposición

Los cuerpos cargados generan campo eléctrico. Cuando hay más de un cuerpo cargado presente en forma simultánea la experiencia indica que vale el **principio de superposición**. Según este



principio el efecto obtenido por la presencia simultánea de varias causas es la superposición de los efectos causados por cada causa actuando individualmente. En el ejemplo de dos cargas puntuales  $Q_1$  y  $Q_2$  presentes simultáneamente en posiciones estáticas<sup>3</sup>, el campo creado por la distribución de carga es la superposición (suma vectorial) de los campos creados individualmente por cada carga puntual tomada como única en el universo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{Q_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}, \quad R_i = |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

Se ha usado la expresión del campo hallada en el ejemplo previo para una carga puntual situada en el origen de coordenadas. Como ahora las cargas se hallan desplazadas desde el origen de coordenadas es necesario pasar de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{R}$ .

Nuevamente, esta expresión es válida en todo el espacio, salvo en las posiciones donde se hallan las cargas puntuales. Por ejemplo, en la posición de la carga  $Q_2$  el campo que existe es únicamente el creado por la carga  $Q_1$ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{Q_1 \mathbf{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$  y en la posición de la carga  $Q_1$  el campo

que existe es únicamente el creado por la carga  $Q_2$ :  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{Q_2 \mathbf{R}_{21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^3}$

(obsérvese que:  $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -\mathbf{R}_{12}$ ).

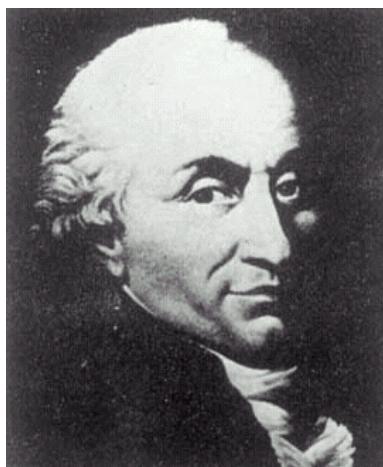
De acuerdo a la interpretación moderna del concepto de campo<sup>4</sup> las **fuerzas electrostáticas** que actúan sobre cada carga son:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2) = Q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) = Q_1 \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{Q_1 Q_2 \mathbf{R}_{21}}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^3} = -\frac{Q_1 Q_2 \mathbf{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_2)$$

Se ve que las fuerzas que mutuamente se ejercen las cargas en el caso estático componen un par de acción-reacción. Las expresiones de las fuerzas se conocen como **ley de Coulomb**.

<sup>3</sup> Respecto de un referencial inercial.

<sup>4</sup> APENDICE 2

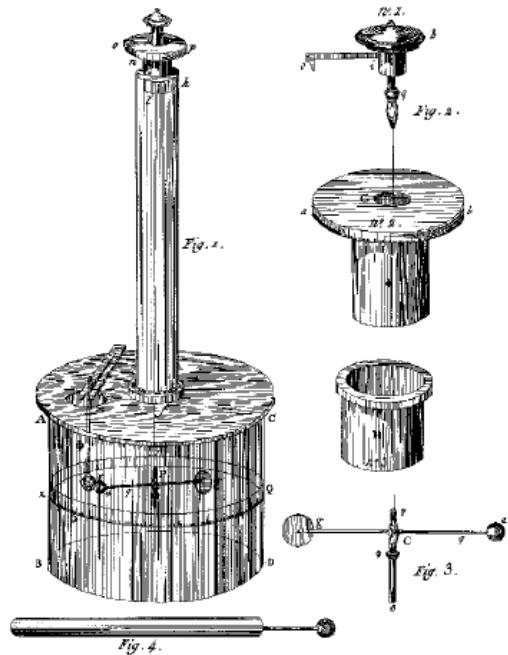


**Charles Augustin de Coulomb** nació en Angoulême, al suroeste de Francia, en 1736. Se recibió de ingeniero militar y durante unos veinte años se dedicó a esta profesión. Desde 1774 hasta 1762 fue enviado a la isla caribeña de la Martinica donde sufrió varias enfermedades tropicales que le dejaron secuelas por el resto de su vida.

Al volver a Francia comenzó a realizar trabajos científicos en el área de la ingeniería civil y mecánica, utilizando herramientas matemáticas no habituales en la práctica de la ingeniería de esos tiempos.

En particular, desarrolló la teoría de las fuerzas y deformaciones de cilindros por torsión. Estos trabajos lo llevaron a idear su famosa **balanza de torsión** que permitiría medir fuerzas muy pequeñas.

En 1785 envió a la Académie des Sciences francesa una memoria: "*Construction et usage d'un balance électrique...*" donde perfecciona la teoría de la balanza de torsión y presenta las primeras mediciones experimentales de la fuerza de repulsión eléctrica entre cuerpos cargados. Entre 1785 y 1791 Coulomb envía nuevos trabajos en los cuales no sólo descubre que su famosa ley es válida en muchas circunstancias sino que encuentra nuevos resultados sobre la distribución de carga eléctrica en cuerpos extensos, predice que no existen aislantes perfectos, sino que toda sustancia tiene un límite por encima del cual conduce corriente eléctrica, analiza la ley de inversa del cuadrado de la distancia para polos magnéticos, etc. Introduce el concepto del plano de prueba y de densidad de carga. Coulomb adhiere a la teoría de los dos fluidos para explicar las interacciones eléctricas



Además de estos trabajos, equivalentes a los de Newton sobre la atracción gravitatoria, Coulomb presidía diversas comisiones técnicas de la Académie des Sciences y realizaba trabajos de consultoría en ingeniería civil y militar. Luego de la Revolución Francesa, fue designado inspector general de la instrucción pública y miembro del Instituto de Francia, que reemplazó a la Academia en el rol de determinar el rumbo científico del país. Coulomb falleció en París el 23 de agosto de 1806.

Entre 1796 y 1798 el físico inglés Henry Cavendish utilizó el método de la balanza de torsión de Coulomb para medir la constante gravitatoria G, a sugerencia de John Mitchell, otro físico inglés que había estudiado los trabajos de Coulomb. Con este valor y el valor de la aceleración de la gravedad al nivel del mar estimó la densidad de la Tierra como 5.448. El valor estimado actual es 5.5. Estos resultados permiten apreciar la precisión de los resultados que el instrumento diseñado por Coulomb puede obtener.

**Ejemplo 2-2:** Las fuerzas eléctricas son de mucha mayor intensidad que las fuerzas gravitatorias. Halle la relación entre la fuerza de repulsión coulombiana y la fuerza de atracción gravitatoria entre dos electrones separados en  $10^{-10} m$  (el tamaño medio de un átomo).

$$\text{La fuerza eléctrica es, en valor absoluto: } |\mathbf{F}_e| = F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

y la fuerza gravitatoria:

$$|\mathbf{F}_g| = F_g = \frac{G m^2}{d^2}$$

de donde:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m^2} = 4.17 \times 10^{42}$$

con:  $e \approx 1.60218 \times 10^{-19} C$      $m \approx 9.11 \times 10^{-31} Kg$      $G \approx 6.673 \times 10^{-11} Nm^2 / Kg^2$

Se ve que la relación es muy grande. Por lo tanto, en la materia agregada las interacciones eléctricas son de mucha mayor importancia que las gravitatorias. Las fuerzas gravitatorias sólo son de importancia cuando se trata de cuerpos muy masivos (como los planetas) que son prácticamente neutros.

La técnica de superposición para el cálculo del campo se puede extender al caso de más de dos cargas simultáneamente presentes, aplicando sucesivamente la superposición del campo calculado en la operación previa con el campo de cada carga. Así, si existe un conjunto de  $N$  cargas puntuales de valor  $Q_i$ , situados en posiciones  $\mathbf{r}_i$ , el campo en un punto arbitrario del espacio será:

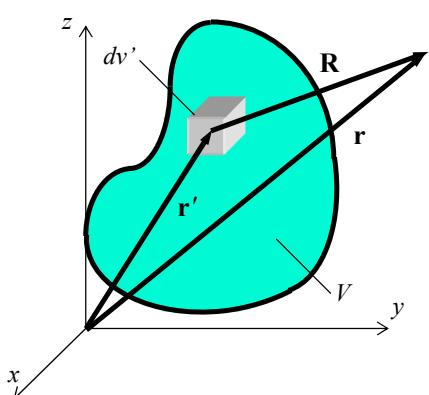
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i \mathbf{R}_i}{R_i^3}, \quad R_i = |\mathbf{R}_i| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

El principio de superposición, que hemos planteado desde el punto de vista físico, está implícito desde el punto de vista matemático en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell.

### Campo de distribuciones de carga

Las cargas puntuales son objetos ideales que no existen en la realidad. Todo cuerpo cargado tiene una extensión espacial y, en la práctica, la mayoría de los objetos de interés tecnológico tiene dimensiones macroscópicas por lo que están formados por gran cantidad de átomos, lo que implica una distribución de las partículas elementales cargadas en todo el volumen del objeto.

Desde el punto de vista macroscópico podemos modelizar el cuerpo extenso cargado como una **distribución continua** de carga, dada la pequeñez de las partículas cargadas frente a las dimensiones de los objetos. En tal caso definimos una **densidad de carga** dentro del cuerpo:



$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{dq}{dv'} \Big|_{\mathbf{r}'}, \quad \forall \mathbf{r}' \in V$$

Usamos coordenadas primadas (de punto fuente).

Para calcular el campo creado por un cuerpo extenso lo dividimos en diferenciales de volumen  $dv'$ . Cada uno de ellos se comporta como una carga puntual y, por ejemplo,

$$\text{el campo: } d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\mathbf{r}')}{R^2} \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^2} \hat{\mathbf{R}} dV'$$

con  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

Ahora aplicamos **superposición**, y sumamos las contribuciones de todos los elementos de volumen que forman el cuerpo extenso. Esta suma es una integral y tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Esta expresión nos permite calcular el campo creado por una distribución de carga dentro del volumen (**distribución volumétrica**) de un cuerpo extenso<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> El volumen  $V$  debe contener toda la carga cuyo campo quiere calcularse. Esto significa que:

- a) el volumen puede ser mayor que el recinto donde existe la carga, sin alterar el resultado.
- b) el volumen puede encerrar sólo parte de toda la carga, pero en este caso el campo calculado se debe solamente a esa parte de la carga.

En la práctica es útil considerar otras distribuciones de carga: **distribuciones superficiales** (sobre una superficie - esto ocurre en cuerpos conductores, como veremos luego) y **distribuciones lineales** (a lo largo de una línea - esto es útil para cables donde la longitud es mucho mayor que las dimensiones transversales). Tenemos entonces en estos casos:

$$\text{densidad superficial de carga: } \rho(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \rho_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'$$

$$\text{densidad lineal de carga: } \rho(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \rho_l(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl'$$

Estas expresiones nos dan una forma de cálculo del campo electrostático creado por distribuciones de carga, especialmente para cargas no puntuales, diferente de la ley de Gauss. La ley de Gauss es útil para distribuciones de alta simetría. En los siguientes ejemplos mostramos el uso de estas expresiones para algunas distribuciones de carga de interés conceptual.

**Ejemplo 2.3:** Carga puntual en el origen de coordenadas: (recordamos:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ )

Para usar la metodología expuesta en esta sección, usamos la representación de la carga puntual como asociada a una densidad de carga descripta por una delta de Dirac:

$$\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r})$$

La delta está centrada en el origen de coordenadas. Entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q\delta(\mathbf{r}')\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{Q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Por otra parte, se puede demostrar que a **muy grandes distancias** de cualquier distribución de carga **de extensión acotada**, el campo tiene aproximadamente simetría esférica, como si estuviera generado por la carga neta de la distribución, concentrada en el origen de coordenadas. Para demostrar esto, vemos que para puntos lejanos de la distribución podemos despreciar las posiciones fuente frente a la magnitud del vector posición del punto campo ( $r \gg r' \Rightarrow r' \rightarrow 0$ ) y tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde  $Q$  es la carga total de la distribución.

En este cálculo hemos despreciado  $r'$  frente a  $r$ . Una aproximación mejor es desarrollar en serie de Taylor el integrando, con lo que aparecen términos de orden superior (**multipolares** - ver el **Ejemplo 2-16**). En tal caso, aún cuando la carga neta sea nula, existirá campo eléctrico debido a la inhomogeneidad en la distribución.

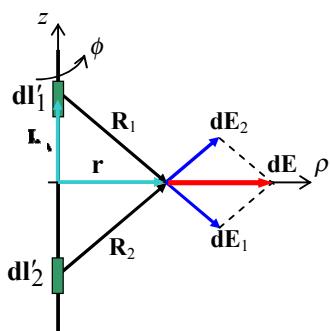
**Ejemplo 2-4:** Calcular el campo electrostático creado por una línea cargada infinita con densidad de carga lineal  $\lambda_0$  constante.

Se trata de una línea recta de espesor idealmente nulo.

Para simplificar el cálculo usamos consideraciones derivadas de la **simetría** que presenta la distribución de carga:

- Como existe simetría de revolución alrededor de la línea elegimos un sistema de coordenadas cilíndrico, con el eje  $z$  sobre la línea.
- El campo no puede depender de  $\phi$  por la simetría de revolución, y tampoco puede depender de  $z$  porque la linea es infinita y todos los planos de  $z$  constante son físicamente equivalentes. El campo entonces sólo depende de la distancia  $\rho$  desde la línea al punto de observación:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\rho)$ .

Por comodidad elegimos el plano de  $z = 0$  de nuestro sistema de coordenadas de modo que contenga al punto de observación donde deseamos calcular el campo.



Por otra parte, como se observa en la figura, el campo  $\mathbf{dE}_1$  creado por un elemento de longitud  $dl'_1$  está en el plano formado por  $z$  y  $\rho$ , de modo que no tiene componente sobre  $\hat{\phi}$ . Además se ve que, si consideramos el par de elementos  $dl'_1$  y  $dl'_2$ , simétricos respecto del origen de coordenadas, las componentes verticales de los campos generados se anulan entre sí y queda solamente la suma de las componentes según  $\hat{\rho}$ . Entonces el campo presenta solamente componente radial:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \hat{\rho}$ .

Luego podemos escribir para la componente radial del campo creado por la línea infinita:

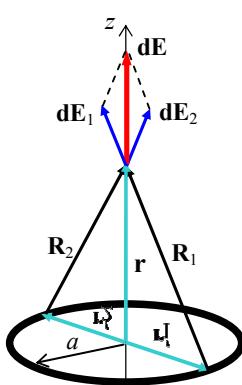
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \lambda(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \hat{\rho} dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = 2 \frac{\lambda_0 \rho \hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}}$$

ya que:  $\mathbf{r} = \rho \hat{\rho}$  y  $\mathbf{r}' = z' \hat{z}$  y el integrando es par. La integral se puede evaluar de tablas o mediante programas matemáticos para obtener:

$$\int_0^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_0 \hat{\rho}}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

El campo creado por la línea infinita cargada sólo tiene componente radial saliendo de ella (para  $\lambda_0$  positiva) y su amplitud es inversamente proporcional a la distancia a la línea. Como la línea no tiene espesor, se produce una singularidad cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Esta singularidad se resuelve porque no existen en la práctica líneas sin espesor.

### Ejemplo 2-5: Campo sobre el eje de un anillo uniformemente cargado de radio $a$ .

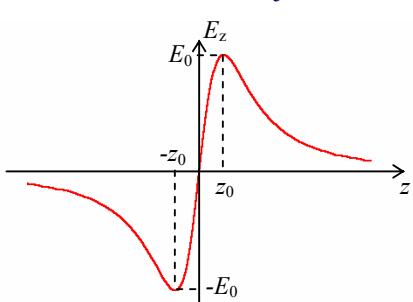


Este caso es similar al anterior. Por la simetría se elige el eje  $z$  del sistema de coordenadas coincidente con el eje del anillo para tener simetría cilíndrica. Se toma por comodidad el origen en su centro. El campo creado sobre un punto del eje sólo depende de  $z$  y además sólo tiene componente  $z$  porque las componentes transversales (radiales) se anulan al considerar pares de elementos del anillo simétricos respecto del eje como se muestra en la figura.

Con:  $\mathbf{r} = z \hat{z}$ ,  $\mathbf{r}' = a \hat{\rho}$  y  $dl' = a d\phi'$  y tomando nuevamente una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda_0$  tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \lambda(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' = \frac{\lambda_0 z \hat{z}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 z a \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi'$$

y entonces:



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda_0 a z \hat{z}}{2\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q z \hat{z}}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde hemos usado la carga total del anillo:  $Q = \lambda_0 2\pi a$ .

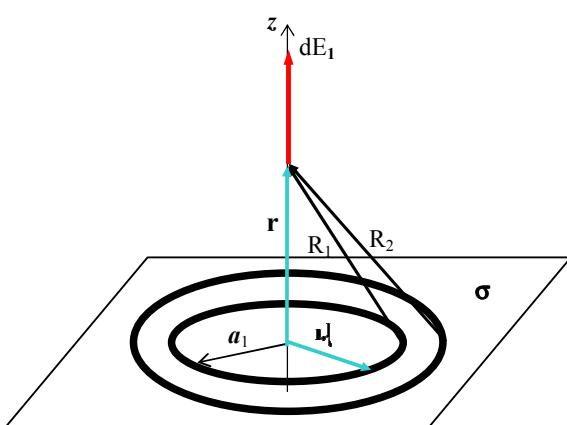
En la figura se observa una gráfica del campo del anillo sobre su eje. Se ve que el campo apunta siempre hacia fuera del anillo (es positivo para  $+z$  y negativo para  $-z$ ). Se puede verificar fácilmente que los máximos se dan para:

$$z_0 = a/\sqrt{2} \Rightarrow E_0 = \frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2}$$

Esta es una distribución de carga de extensión acotada, de modo que podemos estudiar el comportamiento del campo para  $z \rightarrow \infty$ . Para ello tenemos que ver cómo se comporta la

función  $z/(z^2 + a^2)^{3/2}$  para  $z \rightarrow \infty$ . Desarrollando en serie de Taylor tenemos:

$$\frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \rightarrow \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{a^2}{z^2} + \frac{15}{8} \frac{a^4}{z^4} + \dots \right)$$

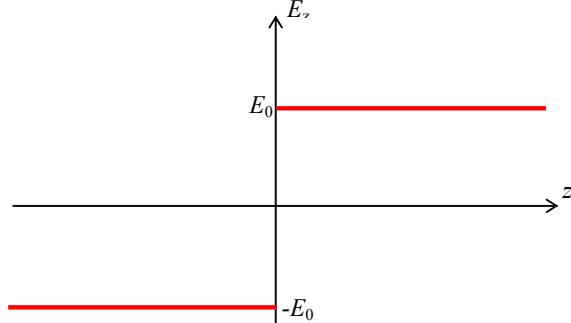


Se ve que los sucesivos términos son proporcionales a  $a^{2n}/z^{2n}$  con  $n$  creciente, y por lo tanto cada vez son más pequeños para  $z \rightarrow \infty$ . Tomando sólo el primer término de la serie

$$\text{quedá: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{Q\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 z^2} \text{ para } z \rightarrow \infty$$

que tiene la forma funcional del campo de una carga puntual (inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y proporcional a la carga total). Los siguientes términos del desarrollo en serie, que se han despreciado, constituyen correcciones a este comportamiento que cobran más relevancia a medida que nos acercamos al anillo.

**Ejemplo 2-6:** Calcular el campo a una distancia  $d$  de un plano infinito cargado con densidad superficial  $\sigma$



Este problema se puede resolver de varias formas. Nosotros utilizaremos el resultado del ejemplo previo. Podemos dividir el plano en anillos concéntricos de radio variable  $a$  y espesores  $da$ .

Cada anillo crea un campo sobre su eje que es normal al plano del anillo y depende sólo de la distancia al plano. Por lo tanto el campo creado por el plano completo será normal al mismo y dependerá solamente de la distancia del punto de observación al plano.

Cada anillo tiene un área  $ds' = 2\pi a da$  y su carga es:  $Q = \sigma ds' = 2\pi\sigma a da$ .

El campo creado por ese anillo sobre el semieje  $+z$  es, como hemos visto en el ejemplo previo:

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Qz\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma a da z\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Integrando sobre el radio  $a$  tenemos:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma z\hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{a da}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$  (para  $z \geq 0$ ).

La integral vale  $1/z$  y finalmente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0\hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma\hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0} \quad (\text{para } z \geq 0).$$

Para  $z \leq 0$  obtenemos el mismo campo, pero cambiado de signo porque las líneas de campo son salientes del plano cargado.

**Este problema también se puede resolver construyendo el plano mediante superposición de fajas rectas infinitas. Inténtelo.**

Hemos visto en esta sección ejemplos de campos eléctricos creados por distribuciones de carga de alta simetría:

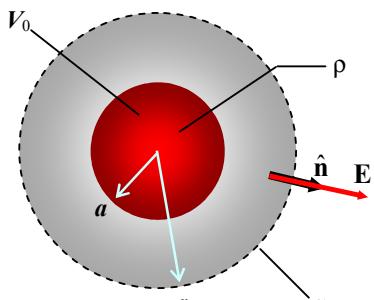
- **esférica:** **Campo radial. Depende como  $1/r^2$ .**
- **cilíndrica:** **Campo radial (coordenadas cilíndricas). Depende como  $1/r$ .**
- **plana:** **Campo constante.**

Estas dependencias son usadas en la práctica para modelizar aproximadamente los campos de distribuciones de carga más complejas

Podemos usar también la ley de Gauss en casos de alta simetría, como en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2-7:** Una esfera de radio  $a$  contiene una distribución de carga dada por:

$$\rho(r') = \rho_0 (r/a). \text{ Hallar el campo eléctrico que crea en todo el espacio.}$$



$$\text{ga): } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$$

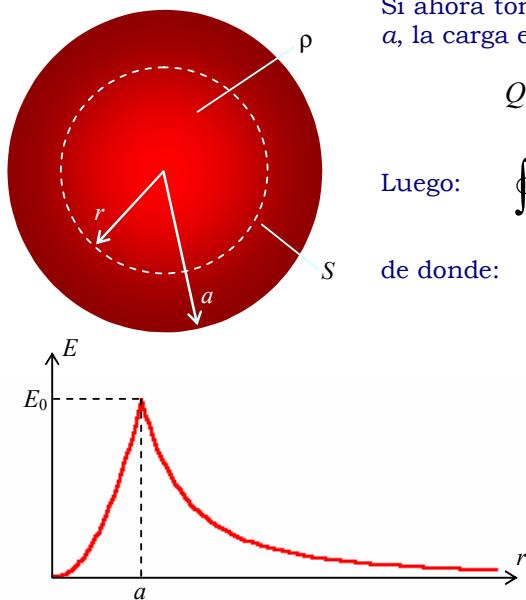
Para aplicar la ley de Gauss debemos elegir una superficie cerrada cualquiera y hallar el flujo de  $\mathbf{E}$  a través de ella. Debido a la simetría del problema lo más sencillo es elegir una superficie esférica concéntrica con la distribución. Primero elegimos una superficie  $S$  de radio  $r > a$ . Esta superficie encierra a toda la carga, que vale:

$$Q = \int_{V_0} \rho(r') dV' = 4\pi \frac{\rho_0}{a} \int_0^a r'^3 dr' = \pi \rho_0 a^3$$

El campo eléctrico generado por la distribución es paralelo a la normal a la superficie de integración y es constante sobre ella, porque sólo depende de  $r$ , con lo que nos queda:

$$\oint_S \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{\pi \rho_0 a^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

**Observamos que el campo fuera de la distribución es igual al que se obtendría con una carga puntual  $Q$  en el origen de coordenadas.**



Si ahora tomamos una superficie esférica gaussiana de radio  $r < a$ , la carga encerrada no es la total:

$$Q' = \int_{V(r)} \rho(r') dV' = 4\pi \frac{\rho_0}{a} \int_0^r r'^3 dr' = \pi \frac{\rho_0 r^4}{a}$$

Luego:  $\oint_S \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{Q'}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{\pi \rho_0 r^4}{\epsilon_0 a}$

de donde:  $E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 a}$  para  $r < a$ .

Si tomamos:  $E_0 = \frac{\rho_0 a}{4\epsilon_0}$  queda:

$$E(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_0 \hat{\mathbf{r}}(r/a)^2 & \text{para } r < a \\ E_0 \hat{\mathbf{r}}(a/r)^2 & \text{para } r > a \end{cases}$$

Hemos graficado a la izquierda la variación del campo con la distancia al centro de la distribución. Se ve que ambas expresiones coinciden sobre el borde de la esfera.

## Potencial electrostático y trabajo

Así como la expresión de la divergencia del campo electrostático lleva a la ley de Gauss, el valor nulo del rotor lleva a una propiedad fundamental: **el campo electrostático es conservativo**.

Como el rotor de todo gradiente es nulo, es entonces posible expresar el campo electrostático como el rotor de un cierto campo escalar  $\Phi(\mathbf{r})$  que se denomina **potencial electrostático**<sup>6</sup>:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$$

La expresión del potencial electrostático creado por una distribución de carga se puede obtener a

partir de la correspondiente al campo eléctrico:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$ ,

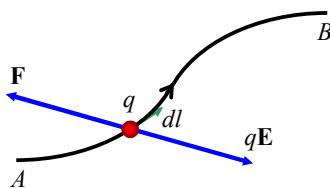
observando que:  $\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$  de modo que podemos escribir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

Pero el gradiente opera sobre las coordenadas de punto campo (no primadas), que son constantes en la operación de integración. Entonces es posible sacar el operador gradiente fuera de la integral. Esto equivale a invertir el orden de operación: primero se integra y después se calcula el gradiente. Si las operaciones son independientes el orden es irrelevante:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] \quad \text{o sea que entonces podemos escribir:}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'}$$



Para dar un significado físico a este nuevo campo, supongamos que trasladamos una carga puntual **a velocidad constante** a lo largo de un camino en una región donde existe un campo electrostático. El traslado a velocidad constante requiere del aporte de una fuerza  $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$  por nuestra parte para contrarrestar la acción del campo sobre la carga puntual. Por otra parte el traslado a velocidad constante implica que la energía cinética de la carga permanece constante, de modo que el balance de energía nos lleva a que el trabajo que realizamos en el traslado es igual y de signo opuesto al trabajo  $W_E$  que el campo electrostático realiza sobre la carga:

$$W_E = q \int_{C_A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = -q(\Phi_B - \Phi_A)$$

**Por lo tanto el trabajo realizado por el campo sobre la carga es igual al producto del valor de la carga por la diferencia de potencial entre los extremos del camino, cambiado de signo.**

Se ve que este trabajo no depende del camino particular  $C$  que se haya elegido. Esta es una característica, naturalmente, de los campos conservativos.

**En un camino cerrado, el trabajo realizado por el campo sobre la carga es cero.**

<sup>6</sup> Estas ecuaciones también surgen del teorema de Helmholtz, como se señaló en la pág. 2-1.

Sólo se pueden definir **diferencias de potencial** entre dos puntos del espacio. Para asignar un valor de potencial a un punto es necesario definir arbitrariamente un punto de **referencia de potencial**. En el caso de distribuciones de carga de extensión acotada, el punto de referencia convencional es el infinito, según veremos al analizar la energía del campo electrostático. En general:

$$\Phi_B - \Phi_A = - \int_{C_A \rightarrow B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

donde el camino  $C$  es cualquiera, y entonces, para distribuciones

de carga acotadas:

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{C_\infty \rightarrow \mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

donde hemos omitido la referencia al camino porque es irrelevante.

Esta convención para definir el potencial de un punto (lo que significa definir el potencial como un campo escalar) no es válida cuando se estudia una distribución de carga **no acotada** en el espacio (p.ej., la línea o el plano infinitos). En tales casos hay que tomar el punto de referencia en otro sitio, que dependerá de las condiciones del problema.

En resumen:

- **El campo electrostático es conservativo e irrotacional:**  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$
- **El campo electrostático es el gradiente del potencial electrostático:**  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$
- **La diferencia de potencial entre dos puntos del espacio es el trabajo por unidad de carga, cambiado de signo, que realiza el campo para trasladar a velocidad constante una carga de un punto a otro, independientemente del camino utilizado**
- **En distribuciones de carga de extensión acotada, se toma la referencia de potencial en el infinito:**

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

**Ejemplo 2-8:** Calcular el potencial electrostático creado por una carga puntual en el origen de coordenadas.

Como se trata de una distribución de extensión acotada:  $\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{l}}{r^2}$

donde se ha usado el resultado del **Ejemplo 2-1**. Como el camino es irrelevante y el campo tiene simetría esférica, tomaremos una recta radial desde  $\infty$  hasta el punto  $\mathbf{r}$ :

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

**Ejemplo 2-9:** Calcular el potencial electrostático creado por una línea infinita cargada uniformemente.

Como ahora la distribución no es acotada, tenemos:  $\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\hat{\rho} \cdot d\mathbf{l}}{\rho}$  don-

de  $\mathbf{r}_0$  es un punto de referencia arbitrario. Como el campo tiene simetría cilíndrica, nos conviene tomar un camino radial (en cilíndricas):

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = - \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

donde  $\rho_0$  es ahora un radio arbitrario. El potencial electrostático de una linea infinita se conoce como **potencial logarítmico**.

**Ejemplo 2-10:** Hallar el potencial electrostático creado por la esfera cargada del **Ejemplo 2-7**.

En este caso existe expresiones diferentes del campo dentro y fuera de la esfera. En ambas

situaciones el campo es radial, con simetría esférica y la distribución es acotada. Tomamos

$$\text{entonces: } \Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^r E dr$$

$$\text{Para } r > a: \Phi_{ext}(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^r E_{ext} dr = -E_0 a^2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{E_0 a^2}{r} = \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r}$$

$$\text{Para } r < a: \Phi_{int}(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^a E_{ext} dr - \int_a^r E_{int} dr = E_0 a - \frac{E_0}{a^2} \int_a^r r^2 dr = E_0 a - \frac{E_0}{3a^2} (r^3 - a^3)$$

$$\text{y finalmente: } \Phi_{int}(\mathbf{r}) = \frac{E_0 a}{3} \left( 4 - \frac{r^3}{a^3} \right) = \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \left( 4 - \frac{r^3}{a^3} \right)$$

Para  $r = a$ :  $\Phi_{int}(\mathbf{r}) = \Phi_{ext}(\mathbf{r}) = E_0 a$  y se ve que el potencial es continuo al cruzar el borde de la esfera.

Finalmente:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^3}{4\epsilon_0 r} & \text{para } r > a \\ \frac{\rho_0 a^2}{12\epsilon_0} \left( 4 - \frac{r^3}{a^3} \right) & \text{para } r < a \end{cases}$$

**La condición de continuidad del potencial es general.** En la inmensa mayoría de las situaciones el potencial electrostático es una función continua, ya que está relacionada con el trabajo realizado por el campo para transportar una carga desde el infinito hasta la posición en estudio, y el trabajo - o energía intercambiada entre el campo y la carga - es una función continua del desplazamiento.

## Conductores y dieléctricos. Introducción.

Desde el punto de vista eléctrico, los materiales pueden clasificarse en dos categorías extremas:

- **conductores**, donde existen portadores de carga libres que se mueven sin esfuerzo ante cualquier campo eléctrico aplicado y
- **díeléctricos** o **aisladores**, cuyas partículas cargadas están fuertemente unidas entre sí y un campo aplicado sólo puede desplazarlas levemente de sus posiciones de equilibrio (sin campo).

Los conductores se caracterizan por transportar corriente eléctrica, proceso que describiremos más abajo (Capítulo 3). Los casos tecnológicamente más importantes de materiales conductores son los metales y las soluciones iónicas.

En la práctica, los conductores no poseen carga completamente libre, es decir, existe siempre una interacción entre los portadores de carga “cuasi-libres” y el conjunto del material. Estas interacciones dan lugar a la **resistencia eléctrica** al paso a la corriente, que analizaremos en una sección posterior. Por otra parte, tales interacciones se hacen muy débiles y despreciables a fines prácticos en los materiales **superconductores** (Capítulo 5).

Análogamente, los díeléctricos no tienen carga libre sólo hasta cierto valor máximo de campo que se conoce como **campo de ruptura díeléctrica**. Para campos superiores a este valor, los átomos del material se ionizan y se produce carga “cuasi-libre” que se mueve como por un conductor. Este fenómeno es responsable de las fallas en capacitores, la caída de rayos y el llamado **efecto corona** de las líneas de alta tensión. Estos dos últimos casos se dan cuando se ionizan las moléculas del aire por acción de un campo eléctrico mayor que el de ruptura ( $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ). Veremos más sobre estos temas más abajo.

Entre estos extremos de comportamiento eléctrico hay toda una gama de posibilidades, entre las que son de interés tecnológico los **semiconductores**, materiales del grupo IV de la tabla periódica (silicio, germanio, etc.) y compuestos de propiedades similares que se utilizan en circuitos electrónicos de estado sólido.

Veamos un resumen de las características esenciales del campo electrostático en los materiales:

### Campo en conductores:

- **El campo electrostático es nulo dentro del conductor.** Como dentro del conductor hay partículas cargadas libres, si hubiera campo estas partículas se moverían y la situación no sería electrostática.
- **No existe densidad de carga volumétrica en el interior de un conductor.** Como el campo dentro del conductor es cero:

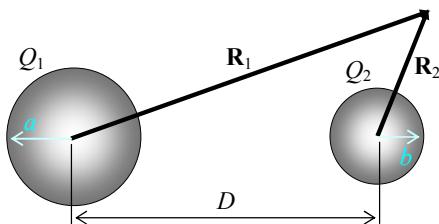
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0 = 0 \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = 0$$

Estas dos propiedades llevan a que la presencia de un campo en la región donde se halla un cuerpo conductor haga que rápidamente las partículas cargadas de su interior se redistribuyan en su superficie para anular el campo en su interior. Si el cuerpo está cargado, la carga neta se distribuye sobre la superficie.

- **Las líneas de campo electrostático exteriores son normales a las superficies conductoras.** En general, el campo exterior sobre la superficie del conductor se puede descomponer en una componente normal y otra tangencial a la superficie. La componente tangencial produciría fuerzas y movimiento en las partículas cargadas en la superficie del conductor. Como esto no es posible en una situación electrostática, **la componente tangencial debe ser nula**. No hay restricción sobre la componente normal debido a que las partículas cargadas no pueden atravesar la superficie (para campos no demasiado intensos) por la existencia de una barrera de potencial entre el sólido y su ambiente.
- Como las líneas de campo son perpendiculares a la superficie del conductor en todo punto, **la superficie de un cuerpo conductor es una equipotencial**.
- Como además en todo el interior del conductor no hay campo, no hay diferencia de potencial entre dos pares de puntos cualesquiera del conductor. Entonces, **todo el cuerpo conductor es un volumen equipotencial**.
- **Carga inducida.** La redistribución de las partículas cargadas en un conductor frente a un campo aplicado es un caso de inducción electrostática. La carga inducida está ligada con la *capacidad* del conductor, que veremos más abajo.

El campo sobre la superficie de cuerpos conductores depende del radio de curvatura local, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2-11:** a) Dos esferas de radios  $a$  y  $b < a$  están separadas en  $D \gg a$  y tienen respectivamente cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ . Halle el potencial electrostático que crean.



Como las esferas están muy separadas, pueden despreciarse los efectos de redistribución de carga por inducción entre ellas, de modo que cada una genera un potencial con simetría esférica respecto de su centro:

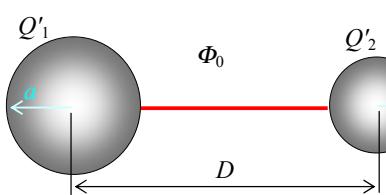
$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

El potencial sobre y dentro de cada esfera es constante y como los radios son distintos los potenciales son distintos. Despreciando la influencia de la otra esfera por su lejanía:

$$\Phi_1 \approx \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \Phi_2 \approx \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$$

b) Suponga ahora que las esferas están unidas por un hilo conductor muy fino. Determine la redistribución de carga que tiene lugar.

Al conectar las esferas por medio de un conductor se transfiere carga hasta que todo queda al mismo potencial. Tenemos entonces que:



$$\Phi_0 \approx \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 a} \approx \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 b}.$$

Por otra parte, la carga total del conjunto debe conservarse. Entonces:  $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2$ .

De estas dos ecuaciones podemos despejar las nuevas cargas sobre las esferas:

$$Q'_1 = \frac{a(Q_1 + Q_2)}{a+b} \quad Q'_2 = \frac{b(Q_1 + Q_2)}{a+b}$$

Aunque el potencial es el mismo, el campo sobre las superficies de las esferas es diferente:

$$E_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\Phi_0}{a} \quad E_2 = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\Phi_0}{b} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{a}{b}$$

Se ve que el campo sobre la superficie de la esfera menor es mayor que sobre la otra, y la relación entre campos es la relación entre los radios.

**De aquí se deduce que en un cuerpo conductor de forma variada el campo será más intenso en las regiones de mayor curvatura (menor radio) y por lo tanto en puntas y esquinas, que deben evitarse en las instalaciones de alta tensión.**

### Campo en dieléctricos

- El campo en el interior y sobre la superficie de un cuerpo dieléctrico no tiene restricciones. A pesar de la fuerte ligazón entre las partículas cargadas que forman sus átomos, **se puede inducir carga por contacto y transferencia de carga**, ya que las fuerzas de cohesión en la superficie del material son menores que en su interior.
- El campo eléctrico produce redistribución de las cargas ligadas dentro de los materiales dieléctricos, que llamamos **polarización**. Esta redistribución genera un nuevo campo eléctrico, llamado **campo inducido**, que se superpone al campo original. Veremos en detalle el proceso de polarización y sus consecuencias más abajo.

## Problemas de potencial

En las secciones precedentes hemos visto métodos de cálculo del campo electrostático en el vacío que se basan en **ecuaciones integrales** que expresan el campo y el potencial electrostáticos en función de la distribución de cargas y la ley de Gauss. En esta sección introduciremos el análisis de métodos que se basan en las **ecuaciones diferenciales** del campo y el potencial electrostáticos. La forma diferencial de la ley de Gauss lleva a la **ecuación de Poisson**, que vincula directamente el potencial electrostático a las fuentes de campo, es decir, las cargas:

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \bullet [\nabla \Phi(\mathbf{r})] = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Para puntos del espacio donde no hay carga, vale la **ecuación de Laplace**:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$$

En la práctica se presentará un **problema de potencial**, que consiste en una determinada función potencial estática  $f(\mathbf{r})$  que está definida y cumple una ecuación diferencial de Poisson dentro de un recinto de integración  $V$  junto con **condiciones de contorno** definidas sobre la superficie  $S$  frontera del recinto de integración  $V$  y eventuales superficies internas ( $S_1, S_2$ , etc.) que separan

regiones de propiedades diferentes (permitividad, permeabilidad, conductividad, etc.). Las técnicas habituales de resolución llevan a postular una función potencial generalmente diferente en cada región, que sobre las superficies internas también cumplen condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno son, en general, definidas por el valor o la continuidad de la función potencial sobre una superficie (**condición de Dirichlet**) y/o el valor o la continuidad de la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie (**condición de Neumann**), o una mezcla de estas condiciones.

Existen distintos tipos de técnicas analíticas para la resolución de estas ecuaciones (método de inversión, transformación conforme, etc) que conforman una rama muy desarrollada de la física matemática conocida como **teoría del potencial**.

Presentamos primero las propiedades matemáticas básicas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la electrostática.

### Soluciones de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson es una ecuación diferencial lineal inhomogénea a derivadas parciales de segundo grado. Por lo tanto se le pueden aplicar las reglas generales de resolución de este tipo de ecuaciones.

**La solución general de una ecuación diferencial lineal inhomogénea** es la suma o superposición de la solución general de la **ecuación homogénea** (la ecuación de Laplace, en nuestro caso) y de una **solución particular** de la ecuación completa:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_h(\mathbf{r}) + \Phi_p(\mathbf{r})$$

La solución particular habitualmente usada es la **integral de Poisson**:

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{R} \quad \text{donde} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2}$$

y  $V$  es un recinto del espacio que contiene toda la carga.

### Soluciones de los problemas de potencial

Los problemas de potencial y las soluciones de la ecuación de Laplace tiene diversas propiedades matemáticas que facilitan su resolución. Las propiedades fundamentales son:

#### 1) Superposición

Si  $\Phi_1(\mathbf{r})$  y  $\Phi_2(\mathbf{r})$  satisfacen la ecuación de Laplace:  $\nabla^2\Phi_1(\mathbf{r}) = \nabla^2\Phi_2(\mathbf{r}) = 0$  en una determinada región del espacio, también la satisface cualquier combinación lineal:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \lambda_1\Phi_1(\mathbf{r}) + \lambda_2\Phi_2(\mathbf{r})$$

**Demostración:** Aplicar el laplaciano a la función combinación  $\Psi(\mathbf{r})$  y usar las propiedades de linealidad del operador laplaciano.

#### 2) Unicidad

La solución de un problema de potencial es única. Si  $\Phi_1(\mathbf{r})$  y  $\Phi_2(\mathbf{r})$  satisfacen la ecuación de Poisson dentro de un recinto  $V$  y cumplen las condiciones de borde del problema en estudio sobre el contorno del recinto (valor del potencial y/o su derivada normal), sólo pueden diferir en una constante aditiva:  $\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) + C$

**Demostración:** Sea  $\Psi(\mathbf{r})$  una función cualquiera diferenciable. Usamos el teorema de la divergencia para  $\Psi\vec{\nabla}\Psi$  dentro del recinto  $V$  del enunciado:

$$\oint_S (\Psi\vec{\nabla}\Psi) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \vec{\nabla} \bullet (\Psi\vec{\nabla}\Psi) dV = \int_V [(\vec{\nabla}\Psi)^2 + (\Psi\nabla^2\Psi)] dV$$

Tomamos ahora:  $\Psi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r})$ . Entonces:

$$\oint_S [(\Phi_1 - \Phi_2)\vec{\nabla}(\Phi_1 - \Phi_2)] \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V [\vec{\nabla}(\Phi_1 - \Phi_2)^2 + (\Phi_1 - \Phi_2)\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2)] dV$$

Pero la integral del primer miembro es cero porque  $\Phi_1(\mathbf{r})$  y  $\Phi_2(\mathbf{r})$  satisfacen las condiciones de borde sobre la superficie contorno  $S$  del recinto de integración. Entonces están fijos ya sea el valor del potencial (**condición de Dirichlet** - lo que anula el primer factor del integrando) o el valor de su derivada normal, asociada al gradiente (**condición de Neumann** - lo que anula el segundo factor del integrando). Además, la segunda integral del segundo miembro es también cero, porque  $\Phi_1(\mathbf{r})$  y  $\Phi_2(\mathbf{r})$  satisfacen la ecuación de Poisson, con lo cual:

$$\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2\Phi_1 - \nabla^2\Phi_2 = 0$$

Queda entonces:  $\int_V \vec{\nabla}(\Phi_1 - \Phi_2)^2 dV = 0$

y como el integrando es no negativo y el recinto de integración es arbitrario, es necesario que el integrando sea nulo, de donde:

$$\vec{\nabla}(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\Phi_1 = \vec{\nabla}\Phi_2 \Rightarrow \Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) + C$$

#### 3) Armonicidad (teorema de Earnshaw)

Si dentro de un recinto el potencial satisface la ecuación de Laplace este potencial no puede tener extremos dentro del recinto.

**Demostración:** Sea  $\Phi(\mathbf{r})$  una función diferenciable que cumple la ecuación de Laplace dentro de un recinto  $V$ :  $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0$ . Sea  $\mathbf{r}_0$  un punto cualquiera dentro de  $V$ . Si  $\Phi(\mathbf{r}_0)$  fuera un extremo de la función potencial, entonces tendríamos:

$$\text{Máximo: } \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{\mathbf{r}_0} < 0, \quad \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right|_{\mathbf{r}_0} < 0, \quad \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{r}_0} < 0 \Rightarrow \nabla^2\Phi(\mathbf{r}_0) < 0$$

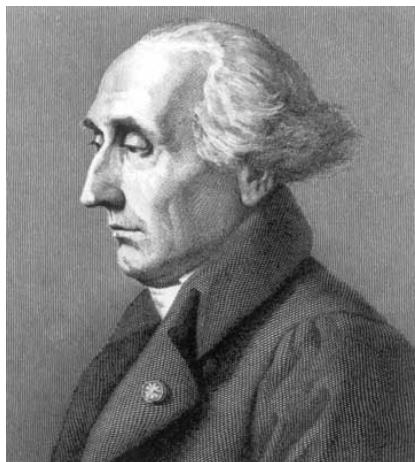
$$\text{Mínimo: } \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{\mathbf{r}_0} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \right|_{\mathbf{r}_0} > 0, \quad \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right|_{\mathbf{r}_0} > 0 \Rightarrow \nabla^2\Phi(\mathbf{r}_0) > 0$$

pero ninguna de estas situaciones es posible porque dentro del recinto  $\Phi(\mathbf{r})$  satisface la ecua-

ción de Laplace y entonces:  $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$ . Por lo tanto  $\mathbf{r}_0$  no puede ser un extremo, y como es un punto cualquiera del recinto, ningún punto puede ser extremo.

El teorema de Earnshaw dice que no existen mínimos ni máximos de potencial dentro de un recinto donde vale la ecuación de Laplace, es decir, donde no hay cargas. Los extremos sólo pueden darse en la frontera del recinto. Un extremo de potencial equivale a un punto donde el campo (el gradiente del potencial) es nulo. Por lo tanto, no puede haber puntos de campo nulo en un recinto donde se satisface la ecuación de Laplace. Los puntos de campo nulo corresponden a "puntos de equilibrio" del campo. En tales puntos una carga de prueba no sufre fuerza alguna y queda en equilibrio y, si lo estaba, en reposo. El teorema de Earnshaw dice que **en un campo laplaciano no hay puntos de equilibrio**, y las cargas de prueba sufren siempre fuerzas que las aceleran.

### El desarrollo de la teoría de potencial



La teoría del potencial fue desarrollada entre los siglos XVIII y XIX, fundamentalmente en la Europa continental. Esta teoría surge del modelo de interacción a distancia establecido por Newton para su teoría de la gravitación. En 1777 **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813 - izquierda) establece que las fuerzas gravitacionales pueden obtenerse a partir de una función que en cada punto del espacio es la suma de términos cuyo numerador es la masa gravitacional y el denominador la distancia al punto de observación. Se puede reconocer el potencial gravitatorio en esta función. Los experimentos de Coulomb, que extendieron el modelo de acción a distancia cuya intensidad depende de la inversa del cuadrado de la distancia entre los "centros de acción", llevó a muchos científicos a adoptar a este modelo y hallar sus consecuencias. En 1782 **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827 - izquierda) encuentra que esta función cumple una ecuación diferencial a derivadas parciales ya conocida, pero que a partir de sus trabajos pasó a llamarse ecuación de Laplace. Laplace demuestra en su *Mecanique Celeste* que las derivadas parciales de esta función respecto de las coordenadas son las componentes sobre dichas coordenadas de la fuerza gravitatoria. En 1812 **Simeon-Denis Poisson** (1781 - 1840 - derecha) generaliza la ecuación de Laplace para regiones donde existe masa o carga (fuentes de campo). Utilizando estos modelos matemáticos, en

1813 Laplace demuestra que la fuerza eléctrica sobre la superficie de un conductor es en todo punto perpendicular a la superficie y proporcional a la densidad de carga local. Esta propiedad sería redescubierta por Gauss en 1839. En 1824 Poisson introduce la noción de potencial escalar magnético (Capítulo 3) que permite generalizar la teoría del potencial al magnetismo. En 1828 aparece el tratado de **George Green** (1793 - 1841) *Essay of the application of mathematical analysis to the theory of electricity*, donde se establecen los principales resultados matemáticos de la teoría del potencial - algunos ya descubiertos independien-



temente antes - y donde se introduce el nombre de **potencial** para la función básica que describe las acciones a distancia. Este tratado no recibió el adecuado interés hasta 1846, donde aparece citado profusamente en el tratado de **William Thomson** (luego **Lord Kelvin**) y **Peter Guthrie Tait** *Natural Philosophy*, y muchos de sus resultados fueron redescubiertos por otros científicos. Para 1840 el cuerpo de la teoría del potencial estaba bien establecido con contribuciones de otros físicos y matemáticos como Wilhelm Weber, Carl Gauss, William Thomson, Carl Neumann y otros, y era el paradigma aceptado hasta el advenimiento de Faraday y sus ideas de campo. El descubrimiento de la inducción electromagnética por Faraday se publicó en 1831, y Maxwell completó en 1864 su modelo que llegaría a ser el actual, lo que da una idea del rápido avance de la teoría electromagnética en este periodo. Como veremos más adelante, estas ideas, puestas en forma matemática por Maxwell y otros, fueron la base de la explicación moderna de los fenómenos electromagnéticos no cuánticos, aunque en diversos campos especializados las ideas matemáticas de la teoría del potencial subsisten como la forma más poderosa de resolver problemas prácticos y expresar matemáticamente las propiedades.

En particular, el método de imágenes que describimos a continuación, ideado por William Thomson, surge de las ideas de la teoría del potencial y es una poderosa herramienta para resolver problemas estáticos, aunque también se aplica en problemas electrodinámicos.

## APLICACIÓN - Método de imágenes

Las propiedades de unicidad y superposición de las soluciones de un problema de potencial llevan al desarrollo del **método de imágenes** que se utiliza para resolver problemas de potencial con conductores extensos con condiciones de simetría.

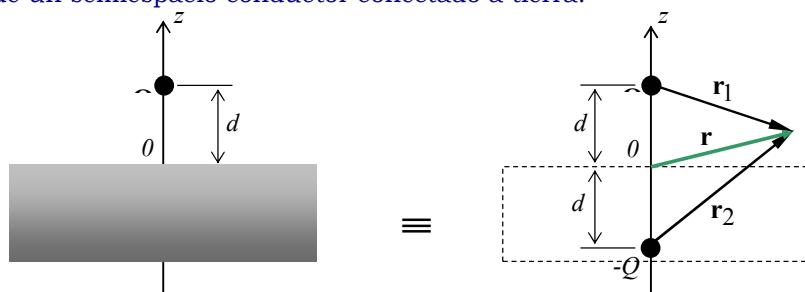
Cuando un cuerpo conductor extenso se encuentra en una región donde existe campo, su carga libre se redistribuye para anular el campo en su interior. Esto da origen a un nuevo campo (**campo inducido**) que altera las líneas de campo del campo original. Como sabemos, las líneas de campo deben ser perpendiculares a la superficie del cuerpo conductor, que es una equipotencial.

En general, la distribución de carga superficial sobre el conductor es de determinación muy difícil, lo que a su vez dificulta la resolución del problema<sup>7</sup> pero en ciertos casos con geometrías sencillas el potencial resultante fuera de los conductores se puede obtener reemplazando la/s superficie/s conductora/s por un conjunto de cargas ficticias (**cargas imagen**) que, junto con las cargas verdaderas, dan el mismo potencial en las regiones no conductoras que el correspondiente a la configuración original.

Tal método es posible porque la solución de un problema de potencial es única. Por lo tanto no importa el método usado para obtener tal solución, siempre que satisfaga la ecuación de Laplace para el potencial electrostático en todo punto del espacio donde no haya carga y cumpla las condiciones de borde sobre las superficies conductoras.

La técnica consiste en colocar las cargas imagen de valor y posición necesarias para reproducir las condiciones de contorno prescriptas sobre las superficies conductoras suponiendo que éstas no estuvieran. La ubicación de las cargas imagen es análoga a la posición de las imágenes correspondientes a las cargas verdaderas si las superficies conductoras fueran espejos y usáramos la óptica geométrica, de donde surge el nombre de la técnica<sup>8</sup>. Veremos a continuación varios ejemplos de esta técnica inventada por William Thomson, posteriormente Lord Kelvin, en 1845, cuando analizó el problema de una carga puntual y una esfera conductora conectada a tierra. Thomson reemplazó la esfera por una carga puntual imagen que, junto con la carga puntual original volvían equipotencial a la superficie de la esfera. El potencial fuera de la esfera es entonces calculado simplemente como debido a las dos cargas puntuales.

**Ejemplo 2-12:** Hallar el campo creado por una carga puntual de carga  $Q$  colocada a una distancia  $d$  de un semiespacio conductor conectado a tierra.



El potencial electrostático es variable en el semiespacio superior y es constante en el semiespacio inferior y en el plano interfase  $z = 0$ , donde es nulo porque el conductor está conectado a tierra. Para anular el campo creado por la carga puntual dentro del conductor, se induce una distribución de carga superficial sobre la superficie del conductor. Para resolver este problema con los métodos conocidos hasta ahora, deberíamos conocer previamente esta distribución de carga inducida, lo que es bastante difícil. Sin embargo, como se ilustra en la figura, el problema planteado es equivalente al problema de dos cargas puntuales: una es la

<sup>7</sup> Más abajo introduciremos la noción de coeficientes de potencial para tratar este problema con mayor generalidad.

<sup>8</sup> El método de imágenes puede demostrarse rigurosamente a partir de las propiedades de las funciones de Green de la electrostática. Ver, por ejemplo, *Linear Methods of Applied Mathematics: Orthogonal series, boundary-value problems, and integral operators*, Evans M. Harrell II and James V. Herod, <http://www.math.gatech.edu/~harrell/>.

real y la otra la "imagen" producida por el plano interfase que se puede pensar como un espejo. La carga imagen es igual y de signo opuesto a la carga real. Las dos cargas, la real y la imagen, producen un potencial para  $z>0$  que cumple la ecuación de Laplace y, como veremos a continuación, se anula sobre el plano interfase. Por lo tanto esta solución es solución del problema de potencial propuesto por el teorema de unicidad para puntos **por encima** del plano interfase.

Elegimos una terna cartesiana con su eje  $z$  normal al plano interfase. Con las cargas real e imagen el potencial en un punto cualquiera del espacio superior es simplemente:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad z \geq 0$$

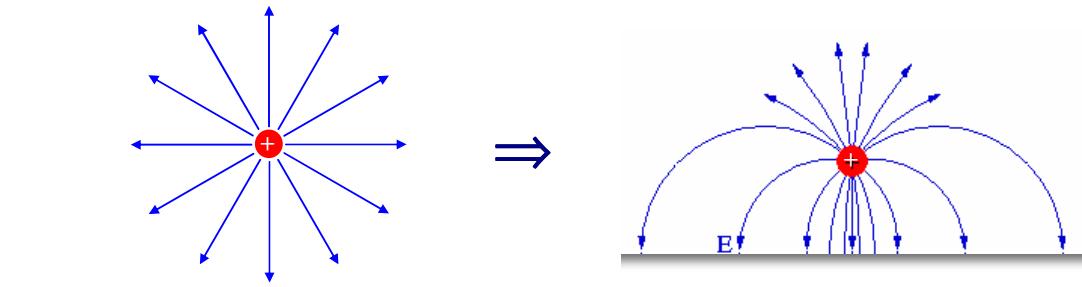
donde  $r_{1,2} = |\mathbf{r} \mp d \hat{\mathbf{z}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp d)^2}$ . **Esta expresión solamente vale para  $z \geq 0$ .**

Se ve que  $\Phi(z=0) = 0$ , lo que satisface la condición de borde del problema original.

Se puede obtener el campo calculando el gradiente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z-d)\hat{\mathbf{z}}}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} - \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z+d)\hat{\mathbf{z}}}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right) \quad z \geq 0$$

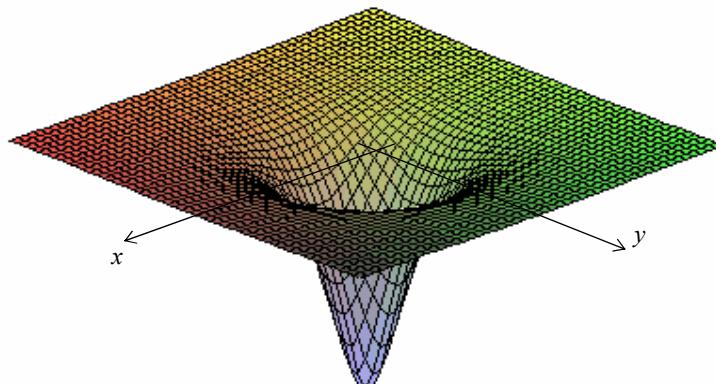
En la siguiente figura se esquematizan las líneas de campo para la carga original y para el conjunto de carga original+carga imagen. Las líneas de campo son perpendiculares a la superficie interfase, donde se induce una carga.



La carga inducida puede calcularse aplicando el teorema de Gauss a un cilindro recto de altura muy pequeña y bases paralelas a la interfase, una de cada lado. Se obtiene:

$$\sigma(x, y) = -\epsilon_0 |E(x, y, z=0)| = -\frac{Qd}{2\pi(d^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

con  $\rho^2 = x^2 + y^2$



La densidad de carga inducida es negativa porque el campo y la normal a la superficie gaussiana tienen sentidos opuestos, independientemente del "signo" del campo mismo (que en nuestro sistema de coordenadas es negativo porque apunta en el sentido de  $-z$ ). Tiene un valor máximo para  $\rho = 0$  (en el origen de coordenadas) igual a  $-Q/(2\pi d^2)$  y decrece a medida que nos alejamos del origen, como se muestra en la figura a la izquierda.

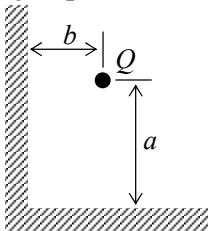
La carga total es:  $q = \int_S \sigma(x, y) dS$

donde la integral se extiende a toda la superficie del plano interfase. Como  $\sigma$  depende solamente de la distancia  $\rho$  desde el origen de coordenadas, se puede dividir el plano en anillos de radio  $\rho$  y espesor  $d\rho$  como en el **Ejemplo 2-6**. Obtenemos:

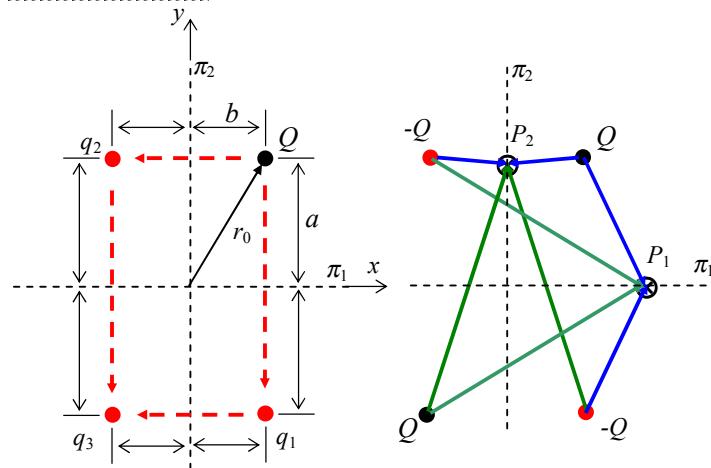
$$q = \int_S \sigma(x, y) dS = 2\pi \int_0^\infty \sigma(\rho) \rho d\rho = -Q d \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} = -Q \Rightarrow q = -Q$$

porque la integral vale  $1/d$ . Se ve que la carga total sobre el plano interfase es igual a la carga imagen, y su presencia lleva a la anulación del campo en el interior del conductor.

**Ejemplo 2-13:** Hallar el campo creado por una carga puntual de carga  $Q$  colocada en el ángulo recto entre dos conductores planos muy grandes conectados a tierra.



El sistema se esquematiza a la izquierda. Para tratarlo mediante el método de imágenes, se deben agregar cargas imagen de manera de que los planos interfase estén a potencial cero. Por ejemplo, la carga  $Q$  genera con el plano  $\pi_1$  la imagen  $q_1 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_1$ . Análogamente, la carga  $Q$  genera con el plano  $\pi_2$  la imagen  $q_2 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_2$ .



Sin embargo, la presencia de la carga real y las dos cargas imagen ahora **no satisfacen** la condición de contorno sobre los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , por lo que hay que agregar una nueva carga imagen  $q_3 = Q$  para los planos queden a tierra. Se llega así a la distribución de la figura a la izquierda.

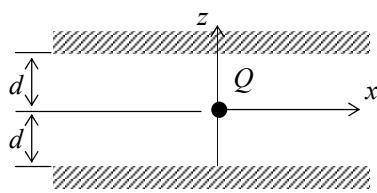
Para expresar el potencial usamos un sistema de coordenadas cartesiano centrado en el eje ( $z$ ) de intersección de los planos. Debido a que los planos son muy grandes, el potencial no depende de  $z$  y sólo se necesita la solución bidimensional sobre planos ( $x, y$ ). El po-

tencial creado por las cuatro cargas en el primer cuadrante donde el potencial es nulo es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} \right) \quad x, y \geq 0$$

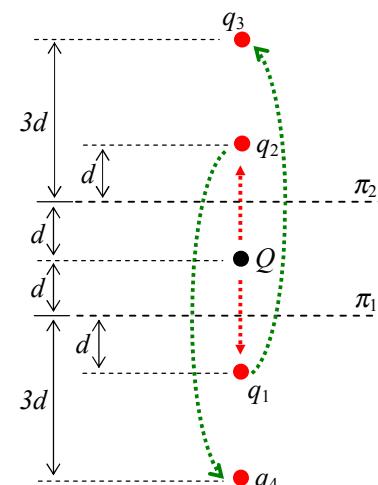
Se observa que puntos cualesquier sobre los planos interfase, como  $P_1$  y  $P_2$  en la figura de la derecha, tienen potenciales nulos porque pueden pensarse como la suma de potenciales de igual valor y signo opuesto, lo que se ha simbolizado con vectores de colores que forman el par que da potencial nulo. El campo se calcula tomando el gradiente de esta expresión. No lo haremos en forma explícita porque es análogo al ejemplo precedente.

**Ejemplo 2-14:** Hallar el potencial creado por una carga puntual de carga  $Q$  colocada entre dos planos conductores paralelos conectados a tierra.



El problema se esquematiza en la figura de la izquierda. Por comodidad suponemos que la carga se halla equidistante de ambas interfases.

Repetimos el procedimiento de colocación de cargas imagen para anular el potencial sobre las interfases. Este proceso se esquematiza en la figura de la derecha.  $Q$  genera con el plano  $\pi_1$  la imagen  $q_1 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_1$ . Análogamente,  $Q$  genera con el plano  $\pi_2$  la imagen  $q_2 = -Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_2$ . Sin embargo, la presencia de la carga real y las dos cargas imagen ahora **no satisfacen** la condición de contorno sobre los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , por lo que hay que agregar nuevas cargas. Por ejemplo,  $q_1$  genera



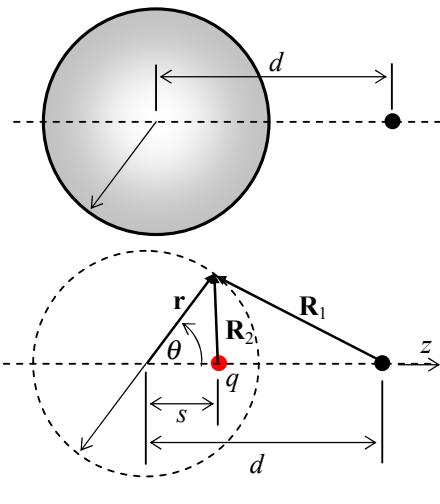
$q_3 = Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_1$  y  $q_2$  genera  $q_4 = Q$  para anular el potencial sobre  $\pi_2$ . Se observa que estas imágenes están más alejadas de los planos interfase. Nuevamente, estas imágenes de segunda generación generarán imágenes de tercera generación más alejadas aún. Se ve que este proceso es indefinido y se requieren infinitas imágenes para resolver el problema:

Cargas imagen	Valores	Distancia al plano más cercano	Cargas imagen	Valores	Distancia al plano más cercano
$q_1, q_2$	$-Q$	d	$q_7, q_8$	$+Q$	7d
$q_3, q_4$	$+Q$	3d	$q_9, q_{10}$	$-Q$	9d
$q_5, q_6$	$-Q$	5d	$q_{11}, q_{12}$	$+Q$	11d

Queda entonces la siguiente expresión para el potencial electrostático 2D en un sistema de coordenadas centrado en la carga real:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - 2nd\hat{\mathbf{z}}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} + 2nd\hat{\mathbf{z}}|} \right) \right]$$

**Ejemplo 2-15:** Hallar el potencial creado por una carga puntual de carga  $Q$  colocada a una distancia  $d$  del centro de una esfera conductora de radio  $a$  conectada a tierra.



La figura muestra la distribución de carga. La recta que pasa por el centro de la esfera y la carga es un eje de simetría del problema. El potencial debe tener simetría de revolución alrededor de este eje. Para que esto ocurra es necesario que la carga imagen se encuentre sobre este mismo eje, y como debe estar en el otro "semiespacio" que la carga real respecto de la superficie interfase, estará dentro de la esfera. La colocamos a una distancia  $s$  del centro. Tomamos ahora un sistema de coordenadas centrado en la esfera y con su eje  $z$  sobre el eje de simetría. Para determinar el valor de la carga imagen y su posición, imponemos la condición de contorno de que el potencial sea nulo sobre la superficie de la esfera. De acuerdo a la geometría de la figura, se ve que:

$$\Phi(r=a) = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} = 0$$

Podemos expresar  $R_1$  y  $R_2$  mediante el teorema del coseno aplicado a los triángulos formados por el vector  $\mathbf{r}$ , el eje  $z$  y los vectores  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  respectivamente:

$$R_1 = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta} \quad R_2 = \sqrt{a^2 + s^2 - 2as \cos\theta}$$

$$\text{Entonces: } \frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} = 0 \Rightarrow \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{Q^2}{q^2} \Rightarrow \frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta}{a^2 + s^2 - 2as \cos\theta} = \frac{Q^2}{q^2} = \alpha$$

$$\text{y podemos escribir: } \frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} = 0 \Rightarrow q = -\frac{R_2}{R_1} Q = -Q/\sqrt{\alpha}$$

El segundo miembro de la ecuación previa no depende de  $\theta$ , de manera que se debe eliminar la dependencia en el primer miembro, eligiendo valores adecuados para  $s$  y para  $\alpha$ :

$$\frac{a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta}{a^2 + s^2 - 2as \cos\theta} = \alpha \Rightarrow a^2 + d^2 - 2ad \cos\theta = \alpha(a^2 + s^2 - 2as \cos\theta)$$

$$\text{de donde: } a^2(1-\alpha) + d^2 - \alpha s^2 = 2a \cos\theta(d - \alpha s)$$

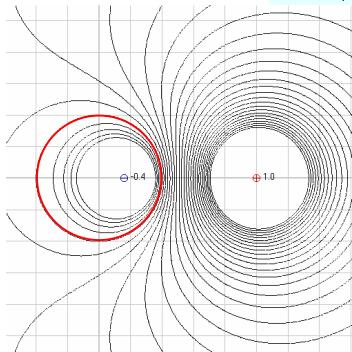
$$\text{Para eliminar la dependencia respecto de } \theta \text{ tomamos: } d - \alpha s = 0 \Rightarrow \alpha = d/s$$

$$\text{y entonces nos queda: } a^2(1 - d/s) + d^2 - ds = 0 \Rightarrow ds^2 - (a^2 + d^2)s - a^2d = 0$$

Esta ecuación cuadrática para  $s$  tiene las soluciones:

$$s = \frac{(a^2 + d^2) \pm \sqrt{(a^2 + d^2)^2 - 4a^2d^2}}{2d} = \frac{(a^2 + d^2) \pm (a^2 - d^2)}{2d} = \begin{cases} a^2/d \\ d \end{cases}$$

La segunda solución debe descartarse ya que la carga imagen debe hallarse dentro de la esfera. Entonces:  $s = a^2/d \Rightarrow \alpha = d/s = d^2/a^2$



$$\text{Y finalmente: } q = -Q/\sqrt{\alpha} = -a/Q$$

El potencial en cualquier punto del espacio será:

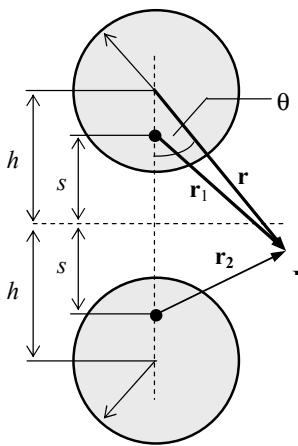
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{d}{aR_2} \right) \quad r \geq a \quad \text{con}$$

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{d}\hat{\mathbf{z}}| \quad R_2 = \left| \mathbf{r} - \left( a^2/d \right) \hat{\mathbf{z}} \right|$$

y el campo se calcula mediante el gradiente de esta expresión. En la figura se muestran las líneas equipotenciales calculados con  $Q = 1\mu\text{C}$ ,  $d = 5\text{ cm}$ ,  $a = 1\text{ cm}$ . La circunferencia en rojo indica la posición de la esfera.

En el siguiente ejemplo calculamos el campo creado por una línea de alta tensión teniendo en cuenta que el cable es un cilindro y no una línea sin espesor.

**Ejemplo 2-16:** Hallar el campo creado por una línea horizontal de alta tensión de  $512\text{ kV}$  colocada a una altura de  $12\text{ m}$  cuyo conductor tiene  $5\text{ cm}$  de radio.



La expresión del potencial es algo complicada ya que las condiciones de borde son que el potencial sea constante sobre el plano de tierra (donde también debe ser nulo) y sobre la superficie del cilindro conductor real, donde debe tener el valor de la tensión de la línea. Según el método de imágenes, la línea real, que consiste de un cilindro recto de eje horizontal a la altura  $h$ , da lugar a un cilindro imagen paralelo al real cuyo eje se halla a la altura  $(-h)$  respecto del plano de tierra. Se ve intuitivamente que, por simetría, esta elección dará potencial constante sobre el plano de simetría del sistema, que consiste con la interfase aire-tierra. Por otra parte, se puede demostrar que el sistema es equivalente a dos líneas rectas de espesor nulo colocadas sobre la recta que une los ejes de los cilindros real e imagen y separadas en una distancia  $2s$ , lo que asegura que la superficie del conductor real sea una equipotencial. Podemos hallar el valor de  $s$  mediante el siguiente razonamiento. El potencial en un punto cualquiera queda, como en el **Ejemplo 2-4**:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)$$

donde  $\lambda$  es la carga por unidad de longitud de la línea y  $r_{1,2}$  son las distancias desde las líneas imagen al punto  $P$  de observación. Para calcular la posición de las líneas ideales imagen se usa un método similar al del Ejemplo precedente. Aquí solamente demostraremos que el valor así hallado para  $s$  es el adecuado para que la superficie del cilindro conductor real sea una equipotencial. Tomamos por comodidad el origen de coordenadas O sobre el eje del cilindro real y, de los triángulos  $QOP$  y  $ROP$ , por el teorema del coseno:

$$r_1^2 = (h-s)^2 + r^2 - 2(h-s)r \cos\theta \quad r_2^2 = (h+s)^2 + r^2 - 2(h+s)r \cos\theta$$

$$\text{y entonces: } \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(h+s)^2 + r^2 - 2(h+s)r \cos\theta}{(h-s)^2 + r^2 - 2(h-s)r \cos\theta}\right)$$

Sobre la superficie del conductor (el cilindro superior),  $r = a$  y entonces:

$$\Phi_0 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(h+s)^2 + a^2 - 2(h+s)a \cos\theta}{(h-s)^2 + a^2 - 2(h-s)a \cos\theta}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{h^2 + s^2 + 2hs + a^2 - 2(h+s)a \cos\theta}{h^2 + s^2 - 2hs + a^2 - 2(h-s)a \cos\theta}\right)$$

$$\text{Si tomamos: } s = \sqrt{h^2 - a^2} \quad \text{nos queda:}$$

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{h^2 + s^2 + 2hs + a^2 - 2(h+s)a \cos \theta}{h^2 + s^2 - 2hs + a^2 - 2(h-s)a \cos \theta} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2h^2 + 2hs - 2(h+s)a \cos \theta}{2h^2 - 2hs - 2(h-s)a \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2h(h+s) - 2(h+s)a \cos \theta}{2h(h-s) - 2(h-s)a \cos \theta} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2(h+s)}{2(h-s)} \frac{h-a \cos \theta}{h-a \cos \theta} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{h+s}{h-s} \right)\end{aligned}$$

que es constante e independiente de  $\theta$ . Por lo tanto el valor elegido para  $s$  lleva a que **todos** los puntos del cilindro conductor pertenecen a la misma equipotencial. Entonces, el valor elegido de  $s$  satisface la condición de borde sobre la superficie del conductor y es la solución del problema para la elección de la posición de las rectas imagen.

Podemos ver que:  $s = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{12^2 - 0.05^2} \text{ m} \approx 11.9999 \text{ m}$  y entonces la posición de las rectas imagen coincide prácticamente con el eje de los cilindros real e imagen.

De la última ecuación se puede obtener el valor de  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln \left( \frac{h+s}{h-s} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln \left( \frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{h - \sqrt{h^2 - a^2}} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right)} \quad \text{con } x = \frac{a}{h} \ll 1$$

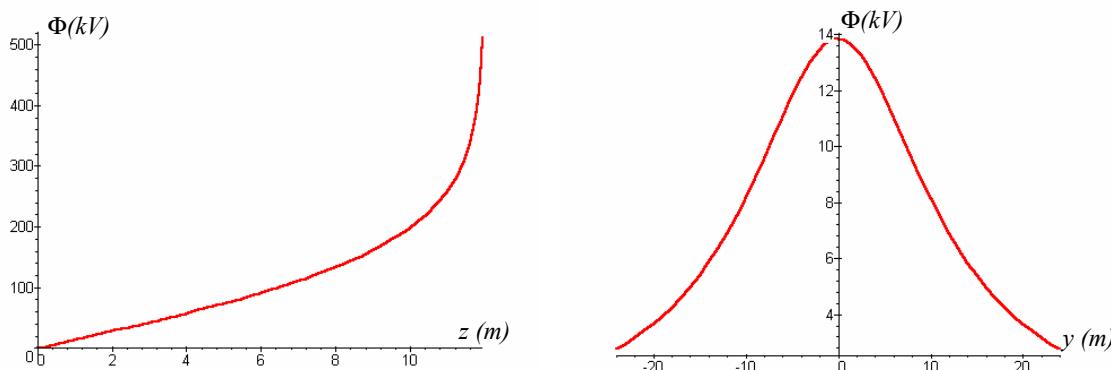
Debido a que  $x$  es pequeño, podemos desarrollar esta expresión en serie de Taylor y retener solamente el primer término, con lo que tenemos:

$$\lambda = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln(2/x)} = \frac{2\pi\epsilon_0 \Phi_0}{\ln(2h/a)} \approx 4.61 \mu C/m$$

Finalmente el potencial creado por la línea de alta tensión con tierra en el aire es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right) \approx \Phi_0 \frac{\ln(r_2/r_1)}{\ln(2h/a)} \quad \text{con } r_{1,2} = \sqrt{(z \mp s)^2 + y^2}$$

donde ahora hemos corrido el origen de coordenadas al punto  $X$  (ver figura en la página anterior) que se encuentra sobre el plano de tierra y en la vertical que une los ejes de los cilindros. Tomamos un eje  $z$  vertical, ejes horizontales  $x$  paralelo a la línea y eje  $y$  normal a ella. Graficamos el potencial a lo largo del eje  $z$  bajo la linea y luego sobre el eje transversal  $y$  a una altura de 1 m (valor especificado por las normas para medir campos creados por líneas de alta tensión).



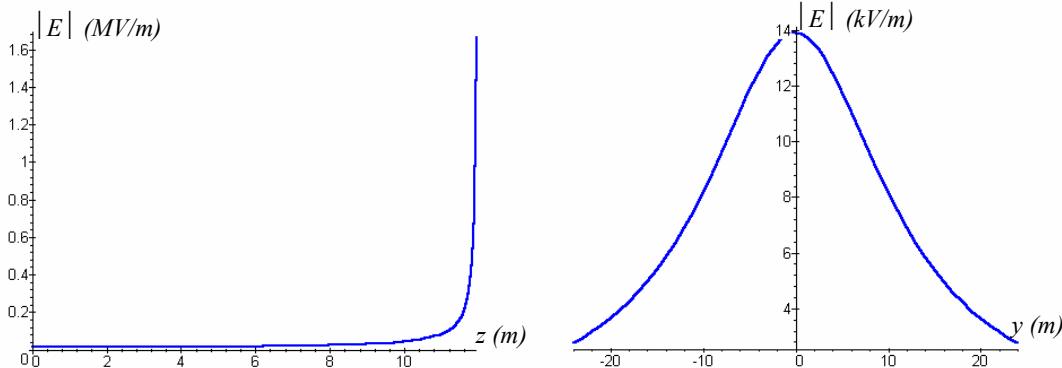
Se observa que el potencial justo debajo de la línea crece primero linealmente y muy cerca de la línea crece abruptamente. Por este motivo la ddp bajo la línea y hasta 2m de altura - la región donde puede haber humanos o animales - no es muy alta respecto a la tensión de la línea. Se ve además que el potencial a 1m de altura justo bajo la línea es de 13.8 kV y decae rápidamente a ambos lados de la línea. Estas gráficas permiten determinar el "pasillo" de seguridad (donde se prohíbe el acceso) que debe haber bajo las líneas de alta tensión.

El campo eléctrico es más significativo que el potencial cuando se trata de determinar la seguridad de las instalaciones de alta tensión. El campo se puede obtener a partir del potencial:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\Phi_0}{\ln(2h/a)} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right) \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_{1,2} = y\hat{\mathbf{y}} + (z \mp s)\hat{\mathbf{z}}$$

$$E_y = \frac{\Phi_0 y}{\ln(2h/a)} \left[ \frac{1}{y^2 + (z-s)^2} - \frac{1}{y^2 + (z+s)^2} \right] \quad E_z = \frac{\Phi_0}{\ln(2h/a)} \left[ \frac{z-s}{y^2 + (z-s)^2} - \frac{z+s}{y^2 + (z+s)^2} \right]$$

Para un eje vertical bajo la línea, el campo tiene solamente componente  $z$ , mientras que en la sección transversal existen las dos componentes. Graficamos el módulo del campo en ambos casos:



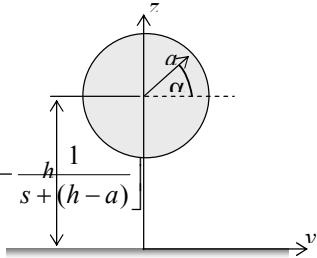
Se ve que el módulo del campo bajo la linea crece rápidamente cerca de ella. Justo bajo la linea se observa que, sobre la superficie del conductor se tiene  $1.67 \times 10^6$  V/m, aproximadamente la mitad del máximo campo para ruptura dieléctrica del aire, mientras que a 1m de altura se tiene aproximadamente 14 kV/m de campo.

Para analizar la posibilidad de que se produzca efecto corona, calculamos el campo sobre toda la circunferencia que define el conductor. De la figura a la derecha vemos que:

$y = a \cos \alpha \quad z = h + a \sin \alpha$  Graficamos el campo en función de  $\alpha$ . Se observa que el máxi-

mo campo sobre la superficie del conductor se da para  $\alpha = 3\pi/4$  o sea en el punto más bajo y su valor es:

$$|\mathbf{E}| = |E_z| = \frac{\Phi_0}{\ln(2h/a)} \left[ \frac{1}{s-(h-a)} - \frac{1}{s+(h-a)} \right]$$



Esta variación del campo sobre la superficie del conductor está ligada a la redistribución de carga generada por la carga inducida sobre el plano de tierra. Como  $a \ll h$  aproximamos a primer orden la expresión del campo máximo para obtener:

$$|\mathbf{E}| = |E_z| \approx \frac{\Phi_0}{a \ln(2h/a)}$$

Graficamos esta expresión a la izquierda en función de  $a$ . Se ve que el campo máximo aumenta cuanto menor es el radio del conductor, como se esperaba.

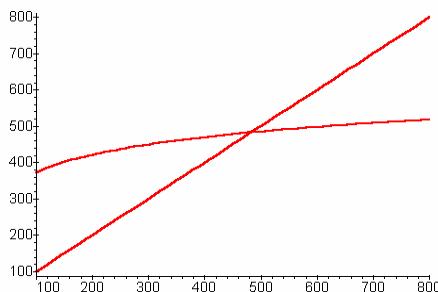
---

**Ejemplo 2-17:** Analizar el mínimo radio que puede tener la línea de alta tensión del Ejemplo previo para que no se produzca efecto corona.

Calculamos  $\alpha$  para que el campo máximo sea el campo de ruptura del aire ( $E_r \approx 3$  MV/m):

$$E_r \approx \frac{\Phi_0}{a \ln(2h/a)} \Rightarrow \ln\left(\frac{2h}{a}\right) = \frac{\Phi_0}{a E_r}$$

$$\text{de donde: } \ln(2x) = \frac{\Phi_0}{h E_r} x \text{ con } x = h/a$$



Para resolver esta ecuación trascendente graficamos ambos miembros a fin de hallar el punto de cruce entre ambas curvas para  $x > 1$ . Se obtiene:

$$x = h/a \approx 483.316 \Rightarrow a \approx 2.5 \text{ cm}$$

Se están utilizando líneas de tensión cada vez mayor. Así, para la misma potencia, disminuye la corriente (y por lo tanto las pérdidas por efecto Joule). Para evitar el efecto corona, la sección del alambre puede ser muy grande, con lo que el peso y el costo de los cables son impracticables. Se puede poner la línea más alta (aumenta  $h$ ), lo que implica postes o torres más costosas y mayores problemas estructurales.

Una de las soluciones prácticas para este problema es usar, en lugar de un único cable, un "manojo" o "haz" de cables. El manojo tiene un radio efectivo para el efecto corona mucho mayor que cada cable individual. Los cables se mantienen paralelos colocando cada tanto un separador conductor, que impide que disminuya el radio efectivo y que los cables se toquen por efecto del viento.

En la figura se muestra una torre de alta tensión en Alemania donde se observan dos ternas (una a cada lado de la torre) formadas por haces de 4 conductores por fase conectados por un separador. A la derecha se muestra un separador para un haz de dos conductores.



En el siguiente Capítulo damos más detalles del efecto corona y otros aspectos de la ionización de materiales producida por campos eléctricos intensos.

Obsérvese que en estos dos últimos ejemplos solamente hemos tenido en cuenta una línea monofásica. Las líneas de transmisión y distribución eléctricas son normalmente trifásicas, y presentan desfasajes temporales en sus tensiones y corrientes, lo que aumenta la dificultad de cálculo. Veremos algunos ejemplos en el Capítulo 5 de Electrodinámica.

## APLICACION – Descarga Electrostática (ESD)

Los fenómenos de descarga electrostática (**ElectroStatic Discharge - ESD**) no son estrictamente fenómenos estáticos, pero su existencia y prevención se pueden describir a partir de distribuciones de carga estáticas, por lo que incluimos este tema en el presente capítulo.

**La descarga electrostática es el fenómeno de transferencia de carga entre objetos a potenciales electrostáticos diferentes.**

La descarga electrostática se produce al poner en contacto cuerpos cargados. El desbalance de carga neta entre los cuerpos produce un flujo de carga (una corriente) que puede causar mal funcionamiento o destrucción de componentes y/o circuitos eléctricos. Por otra parte, los objetos cargados estáticamente pueden acumular contaminantes sobre su superficie, degradando su funcionamiento o utilidad.

Este proceso se puede analizar en tres etapas:

- Mecanismos de acumulación estática de carga en objetos.
- Mecanismos de descarga de la carga acumulada.
- Mecanismos de falla de dispositivos ante pulsos de carga.

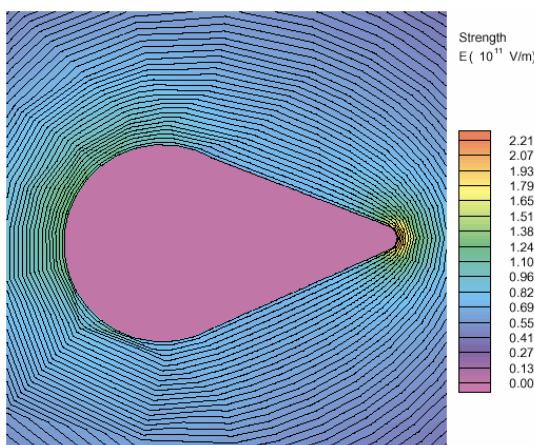
### Mecanismos de acumulación de carga estática

La carga estática en un objeto se produce por el desbalance entre electrones y protones del objeto. Este desbalance de carga puede ser global (existe una carga neta en el objeto) o local (la carga neta es nula pero cargas negativas y positivas no están distribuidas uniformemente). Las distribuciones de carga estática producen un campo electrostático que puede actuar sobre otros objetos. Existen dos mecanismos básicos para crear el desbalance de carga en un objeto:

- **Inducción electrostática.** En este mecanismo no hay contacto entre objetos. Un objeto cargado genera un campo eléctrico que induce el desbalance de carga sobre el objeto en estudio. La carga neta del objeto en estudio no se altera.
- **Triboelectricidad.** Se produce un desbalance de carga en un objeto por contacto con otro objeto. En este proceso puede haber transferencia de carga.

La forma que adopta el desbalance de carga depende del tipo de material:

- Los **conductores** tienen electrones de conducción cuasi-libres. En presencia de un campo eléctrico se redistribuyen para anular el campo dentro del objeto, con lo que se vuelve a la situación estática. En esta situación no existe campo ni densidad de carga neta **dentro** del conductor, que es un volumen equipotencial. El campo eléctrico inmediatamente **frente** del conductor es perpendicular a la superficie del mismo punto a punto, y se concentra en las puntas, donde la curvatura de la superficie conductora es mayor. En la figura se muestra el campo creado por un conductor cargado. Las líneas fuera del conductor son equipotenciales. El color indica la intensidad del campo eléctrico, que es máximo en la punta derecha. En resumen, **el desbalance de carga en un conductor se sitúa sobre su superficie y el campo máximo se da en las regiones de mayor curvatura**.



por contacto a otro objeto.

La carga localizada sobre la superficie de un conductor puede transferirse fácilmente

- Los **dieléctricos** tienen electrones fuertemente ligados a los núcleos atómicos. Para campos no demasiado intensos los electrones permanecen ligados pero el átomo se "deforma", creando el fenómeno de la **polarización dieléctrica**. Este fenómeno produce distribuciones locales de carga desbalanceada que dan lugar a campo eléctrico. Aunque es difícil extraer carga de un dieléctrico por contacto, cuando el campo eléctrico local supera el **campo de ruptura** del material, la fuerza que ejerce sobre los electrones ligados supera a la fuerza de ligadura y el electrón se libera, acelerándose de inmediato por la presencia del campo. En resumen, **el desbalance de carga en un dieléctrico puede situarse en cualquier sitio, aunque en fenómenos de ESD el rol fundamental es el exceso de carga sobre su superficie.**
- Hay materiales de comportamiento intermedio, llamados **materiales disipativo-estáticos**, por los que puede fluir una corriente eléctrica, pero que tienen alta resistividad, lo que limita la corriente de descarga, produce calor y permite disipar la energía de la carga inducida. Por este motivo, estos materiales son los elegidos para **mecanismos de protección** contra ESD.

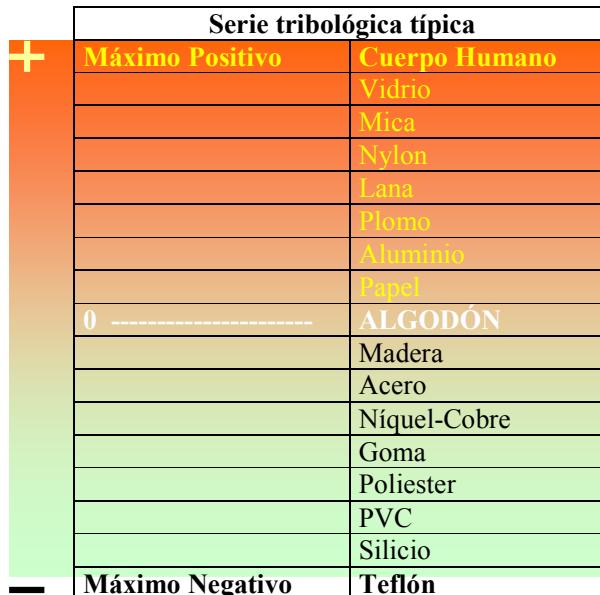
### Triboelectricidad

Se llama **carga triboeléctrica** a la carga obtenida por contacto y posterior separación, que involucra el intercambio de electrones. Prácticamente todos los materiales son triboeléctricos. Por ejemplo, las personas se cargan por roce y/o contacto en la mayoría de las situaciones. La carga de un cuerpo está asociada con un potencial electrostático respecto de tierra a través de la capacidad del cuerpo. La humedad del ambiente colabora a descargar los cuerpos cargados triboeléctricamente. Por ejemplo, valores típicos:

<i>Medio de generación de carga</i>	<b>Humedad del ambiente</b>	
	<b>10 - 25%</b>	<b>65 - 90%</b>
Caminar sobre carpeta	35000 V	1500 V
Caminar sobre piso de vinilo	12000 V	250 V
Trabajador en banco de trabajo	6000 V	100 V
Tomar bolsa de polietileno de banco de trabajo	20000 V	1200 V
Sentarse en silla con espuma de (poli)uretano	18000 V	1500 V

Pocas personas se dan cuenta de que se han cargado cuando su potencial respecto de tierra no supera los 2500 V.

**Serie tribológica:** Es una tabla de propiedades de carga de materiales por contacto. Este es un ejemplo parcial:



Si dos de estos materiales se ponen en contacto, el más alto en la serie cederá electrones al otro, cargándose positivamente (mientras que el otro material adquirirá una carga negativa). Cuanto más separados se hallen los materiales mayor es la transferencia de carga, y por lo tanto, se genera una diferencia de potencial mayor. Se observa que el cuerpo humano es el material más tribo-positivo de la serie.

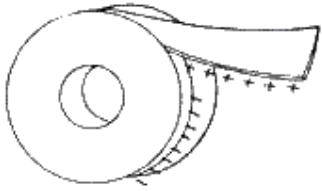
### Mecanismos de descarga de la carga acumulada.

Hay diversos mecanismos que contribuyen a la transferencia de carga generada en un fenómeno de ESD. Actualmente no se entiende aún en detalle el proceso, pero se piensa que hay cuatro mecanismos principales: efectos de contacto superficial, función trabajo, reflujo de carga y descarga gaseosa. La importancia relativa de cada uno de estos mecanismos no se conoce en detalle al presente.

Los **efectos de contacto superficial** involucran la rugosidad de las superficies, la fuerza de contacto y el calor causado por la fricción o frotamiento entre las superficies. Todos estos factores modifican la cantidad de área superficial de contacto durante el proceso. Cuanto mayor sea el área de la superficie de contacto generalmente mayor será la transferencia neta de carga triboeléctrica. El área efectiva de contacto es menor cuanto mayor sea la rugosidad de las superficies, pero aumenta al aumentar la fuerza o presión del contacto. La fricción también aumenta el área efectiva, al generar calor y deformar las superficies.

El calor debido a la fricción puede aumentar la formación de enlaces químicos entre especies de ambas superficies, lo que produce un fenómeno de adherencia. Al separar las superficies algunos de estos enlaces químicos se rompen, y otros permanecen. En ambos casos puede haber una transferencia neta de carga. La probabilidad de ruptura de un enlace químico depende de su función trabajo.

La transferencia triboeléctrica de carga por adherencia se puede ejemplificar con una cinta adhesiva común de base a celulosa, que tiene una fuerte adherencia superficial y una gran superficie de contacto, por lo que se carga considerablemente al desplegarla o al quitarla. Durante el desplegado el elemento fundamental es la diferencia entre el material base, que es celulosa y el adhesivo, que habitualmente está basado en goma. La separación de estos elementos en la serie tribológica indica que habrá una transferencia de carga. Se obtienen diferencias de potencial de 20 KV o más en este tipo de cinta. Este efecto es de importancia práctica en el empaque



de chips sensibles y circuitos impresos. También la adherencia de partículas de polvo a cintas adhesivas cargadas puede crear contaminación en ambientes limpios, por ejemplo, en la industria de circuitos integrados. Se fabrican actualmente cintas antiestáticas para evitar estos problemas. La transferencia de carga al quitar una cinta adherida a una superficie es un fenómeno complejo, que se halla aún en estudio para entender sus propiedades.

La **función trabajo** es una propiedad que mide la habilidad de un material de mantener sus electrones. Cuanto mayor es la función trabajo, más difícil es que el material ceda electrones durante el contacto.

La transferencia de carga realizada durante el contacto por los mecanismos descriptos puede revertirse en parte durante la separación. Este proceso se conoce como **reflujo de carga**, y reduce la transferencia neta de carga triboeléctrica.

Durante la separación puede ocurrir una **ruptura gaseosa**, porque la rugosidad de la superficie se traduce en valles y picos a escala microscópica. En los picos el campo eléctrico puede ser lo suficientemente intenso para producir efecto corona y eventualmente la ruptura de las moléculas del aire durante la separación. Este proceso puede producir una transferencia neta de carga de

una superficie a la otra mediante el plasma formado en el aire. La cantidad de carga transferida depende de la distancia de separación entre las superficies y las presiones parciales de las distintas especies en el gas. Hay cuatro tipos de descarga gaseosa: **arcos**, **chispas**, **descarga luminiscente** y **corona**, que se describen más abajo. Estas descargas se dan tanto en CC como en CA.

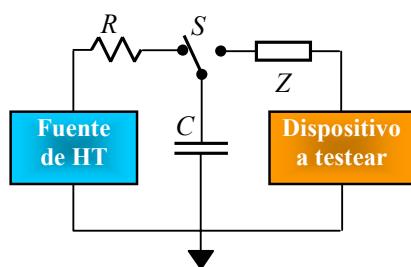
En la práctica, vale la llamada **regla de Cohen**: cuando se frotan dos materiales entre sí, el que tiene la permitividad más elevada se carga positivamente. La **ecuación de Beach**, da la carga superficial adquirida por frotamiento:

$$\rho_s = 15 \times 10^{-6} (\epsilon_{r_1} - \epsilon_{r_2}) C/m$$

en función de la diferencia entre las permitividades relativas de los objetos que se frotan.

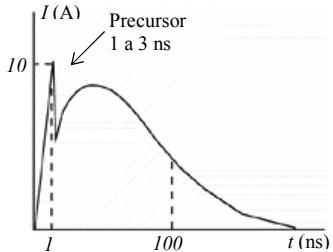
### Modelos de Descarga en ESD

Para chequear la susceptibilidad de dispositivos a la ESD se han desarrollado varios modelos y normas de procedimiento. Los más comunes son el Modelo de Cuerpo Humano (**HBM – Human Body Model**), el Modelo de Máquina (**MM – Machine Model**) y el Modelo de Dispositivo Cargado (**CDM - Charged Device Model**).



Todos los métodos de prueba incorporan un circuito para determinar el voltaje máximo que puede soportar el dispositivo a testear ante un evento de ESD. Este circuito consiste de una fuente de alta tensión de salida variable que carga el capacitor  $C$  a través de una resistencia de valor alto  $R$ . Cambiando de posición la llave  $S$ , el capacitor se descarga a través de la impedancia  $Z$  sobre el circuito a testear. Los valores de  $R$ ,  $C$  y  $Z$  dependen del modelo usado.

La forma de onda de la corriente de descarga es habitualmente una caída precedida de algunas oscilaciones. El tiempo de caída y la amplitud de las oscilaciones dependen de la impedancia de descarga. En la figura se muestra una forma de onda típica. Existe habitualmente un pico precursor (y a veces varios, formando una oscilación inicial) que depende de la parte capacitiva en la impedancia de la fuente de ESD. Esta forma de onda da un espectro de frecuencias de hasta 300 MHz, lo que requiere técnicas de desacople en alta frecuencia además de la protección estática o de baja frecuencia.



El testeo debe hacerse sobre todos los pinos o conectores del dispositivo o circuito a probar que se verán ante una posible descarga del tipo testeado durante su montaje y/o uso, inclusive conectando el dispositivo a través de cables y conectores si el uso o montaje así lo requieren, variando la tensión de la fuente desde cero hasta el valor que presenta falla. El mínimo valor de tensión de falla entre todas las configuraciones de conexión probadas determina la **clase** del dispositivo **bajo el particular modelo de prueba** usado.

### HBM

El modelo más antiguo y más común es el Modelo de Cuerpo Humano, que simula la carga que adquiere un cuerpo humano por contacto. En este modelo  $R = 1 - 10 M\Omega$ ,  $C = 100 pF$ , y la impedancia de descarga en serie con el dispositivo a testear es puramente resistiva:  $Z = 1.5 K\Omega$ . El tiempo de caída al 36.8% de la corriente pico ( $I_p \approx V_{HT}/Z$ ) es del orden de  $150 ns$  y las oscilaciones son habitualmente menores del 10% del valor pico. Este modelo proviene del siglo XIX, cuando fue desarrollado para investigar el comportamiento de mezclas de gases explosivos en minas. Luego fue adoptado por normas militares y civiles dado que la situación más común de ESD se da en la manipulación humana de objetos.

Del ensayo con este modelo se clasifica la susceptibilidad del dispositivo en testeo. Por ejemplo, en la norma británica **HBM - ESD STM5.1-1998** de la ESD Association:

Clase	Rango de voltaje aceptable	Clase	Rango de voltaje aceptable
Clase 0	< 250 V	Clase 2	2000 V a 4000 V
Clase 1 <sup>a</sup>	250 V a 500 V	Clase 3A	4000 V a 8000 V
Clase 1B	500 V a 1000 V	Clase 3B	≥ 8000 V
Clase 1C	1000 V a 2000 V		

Una variante del HBM es el modelo creado por la IEC (International Electrotechnical Commission) **IEC 1000-4-2**. En este modelo se simula la descarga producida por un operador que lleva una herramienta metálica en la mano, por lo que los efectos son más severos. La capacidad es mayor:  $C = 150 \text{ pF}$ , y la resistencia de descarga en serie con el dispositivo a testear es menor:  $R = 300 \Omega$ . La forma de onda presenta un pico inicial del orden de cinco veces el del HBM, sin oscilaciones importantes, y el tiempo característico de la descarga decrece a alrededor de  $150 \text{ ns}$ .

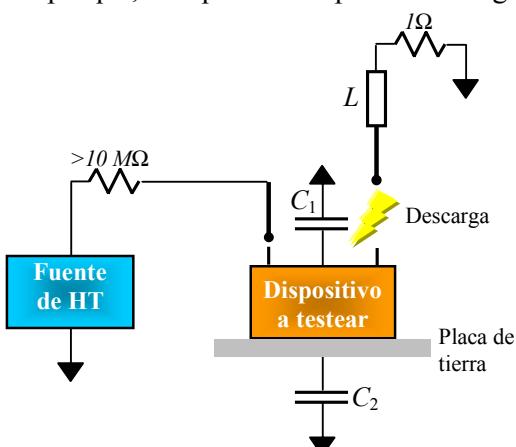
### MM

En el Modelo de Máquina se simula la descarga desde un objeto conductor, como una herramienta o dispositivo de anclaje metálico. Este modelo se originó en el Japón como modelo de peor caso en la manipulación de dispositivos. En este modelo  $R > 10 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 200 \text{ pF}$ , y la impedancia de descarga en serie con el dispositivo a testear es nula o se usa un inductor de  $L = 0.5 \mu\text{H}$ , que limita la amplitud del pico precursor inicial de corriente. La siguiente tabla, de la norma **ANSI/ESD-S5.2-1994** da la clasificación de acuerdo al Modelo de Máquina:

Clase	Rango de voltaje aceptable	Clase	Rango de voltaje aceptable
Clase M0	< 25 V	Clase M3	200 V a 400 V
Clase M1	25 V a 100 V	Clase M4	400 V a 800 V
Clase M2	100 V a 200 V	Clase M5	≥ 800 V

### CDM

El modelo de dispositivo cargado simula la descarga generada por el propio dispositivo cuando se ha cargado previamente. Esta carga puede generarse, por ejemplo, en el deslizamiento en una línea de producción automática. El posterior contacto con alguna herramienta o sujetador metálicos produce la descarga. Este evento puede ser más destructivo que la descarga desde un operador porque, aunque el tiempo de descarga es muy corto (del orden de  $1 \text{ ns}$ ), la corriente pico puede ser de  $10 \text{ A}$  o más, concentrada sobre conectores muy delgados, lo que da densidades de corriente muy altas. Este modelo es mucho más complejo que los anteriores y los métodos de testeo son entonces más elaborados. Un método actualmente en uso involucra colocar el dispositivo sobre una placa metálica con sus pines hacia arriba, cargarlo y finalmente descargarlo, como se ilustra en la figura.  $C_1$  es la capacidad parásita del dispositivo a tierra,  $C_2$  la capacidad distribuida entre el dispositivo y la placa de tierra,  $L$  es la inductancia parásita del dispositivo y sus elementos de conexión, y la resistencia de  $1\Omega$  es la del medidor de corriente.



Otro método de testeo es el llamado **CDM** (Charged Device Model). En este modelo se simula la descarga generada por el dispositivo cuando se ha cargado previamente. La figura muestra el circuito equivalente para este modelo. Una fuente de alta tensión ( $\text{Fuente de HT}$ ) está conectada a un dispositivo a testear ( $\text{Dispositivo a testear}$ ) a través de una resistencia de más de  $10 \text{ M}\Omega$ . El dispositivo tiene una capacidad parásita  $C_1$  con respecto a la tierra. El dispositivo también tiene una capacidad distribuida  $C_2$  con respecto a la placa de tierra. Una inductancia  $L$  se encuentra en serie con el dispositivo. Una resistencia de  $1\Omega$  se conecta entre el dispositivo y la placa de tierra para medir la corriente de descarga. Una descarga eléctrica (simbolizada por un trueno) se aplica entre el dispositivo y la placa de tierra.

Otros métodos de testeo están en estudio y normalización. La siguiente tabla, de la norma **EOS/ESD-DS5.3-1993** da la clasificación de acuerdo al Modelo de Dispositivo cargado:

Clase	Rango de voltaje aceptable	Clase	Rango de voltaje aceptable
Clase C0	< 125 V	Clase C3	500 V a 1000 V
Clase C1	125 V a 250 V	Clase C4	1000 V a 2000 V
Clase C2	250 V a 500 V	Clase C5	≥ 2000 V

Un componente está adecuadamente caracterizado si se ha clasificado según estos tres modelos (u otros equivalentes). Por ejemplo, un dado dispositivo puede tener los siguientes datos: Clase 1B (500 – 1000V, **HBM**), clase M1 (25 – 100V, **MM**), clase C3 (500 – 1000V, **CDM**). Esto debería alertar a un potencial usuario acerca de la necesidad de un ambiente controlado tanto en el ensamblado como en el uso de los equipos donde se involucre el dispositivo.

Estas clasificaciones se deben tomar como guía de acción, no como valores absolutos, dado que los eventos ESD son mucho más complejos que los modelos utilizados para describirlos, y constituyen solamente una parte de los **programas de control y protección** contra ESD. Además, estos modelos sólo analizan la descarga. Los programas preventivos deben tener en cuenta además mecanismos para evitar la carga triboeléctrica de operadores, herramientas, dispositivos y objetos auxiliares.

### Mecanismos de falla de dispositivos ante pulsos de carga.

#### *¿Cómo se produce daño a un circuito por ESD?*

El daño electrostático a dispositivos o equipos eléctricos pueden ocurrir en cualquier punto desde la fabricación a la reparación. El daño resulta de manejar los dispositivos o equipos en medios no controlados o donde no se usan adecuadas prácticas de control de ESD.

En general el daño se clasifica como una falla catastrófica o un defecto latente.

- **Falla catastrófica:** Cuando un dispositivo o equipo eléctrico se expone a un evento ESD puede dejar de funcionar. El evento ESD puede haber causado una fusión metálica, una ruptura de juntura o una falla de capa/s de óxido. El circuito del dispositivo se daña permanentemente causando que el dispositivo falle.
- **Defecto latente:** Es mucho más difícil de identificar. El dispositivo pudo haberse degradado parcialmente, pero puede continuar realizando su función. Sin embargo, la vida útil del dispositivo pudo haberse reducido drásticamente. Un producto o sistema que incorpore dispositivos con defectos latentes puede experimentar fallas prematuras al ponerlos en servicio. Tales fallas son difíciles de hallar y costosas para reparar y en algunas aplicaciones pueden crear riesgos de salud.

Los daños por ESD son causados usualmente por uno de tres eventos: descarga electrostática directa al dispositivo, descarga electrostática directa desde el dispositivo y descargas inducidas por campo.

- **Descarga al/desde el dispositivo:** Un evento ESD puede ocurrir cuando un conductor cargado (incluyendo el cuerpo humano) u otro dispositivo se descarga sobre un dispositivo sensible a ESD (ESDS). La causa más común de daño electrostático es la transferencia directa de carga a través de una corriente que aumenta quizás catastróficamente la temperatura en su camino, ya sea en el dispositivo que recibe la carga o el que la envía. Aunque la duración de la descarga es muy corta (del orden de los nanosegundos) la corriente pico puede alcanzar varias decenas de amperes. Habitualmente la descarga desde el dispositivo es más destructiva que hacia él, porque el sistema externo que produce la descarga suele limitar la corriente.
- **Descarga inducida por campo:** Se produce sin contacto, por la inducción electrostática que produce un campo sobre el dispositivo. Esta redistribución de carga puede producir flujo de corriente cuando el dispositivo es momentáneamente puesto a tierra o en contacto con un conductor.

#### *¿Cuán susceptibles son los sistemas electrónicos a la ESD?*

La posibilidad de daño de un evento ESD sobre un dispositivo sensible está determinada por la habilidad del dispositivo para disparar la energía de la descarga o soportar los niveles de voltaje involucrados. Esta característica se conoce como susceptibilidad del dispositivo a la ESD.

Procedimientos de chequeo basados en los diversos modelos de descarga ayudan a definir este parámetro. Es necesario determinar las circunstancias en las que el dispositivo es más sensible para usar el modelo adecuado y diseñar las formas de protección convenientes.

La siguiente tabla indica la susceptibilidad de varios tipos de componentes a ESD:

<b>Susceptibilidad de componentes electrónicos a ESD</b>	
<i>Tipo de dispositivo</i>	<i>Susceptibilidad a ESD (V)</i>
VMOS	30 – 1200
Mosfet, GaAsfet, EPROM	100 - 300
JFET	150 - 7000
OP-AMP	190 - 2500
Diodos Schottky	300 - 2500
Resistores de película	300 - 3000
TTL Schottky	1000 - 2500

### Técnicas de protección

Existen diversas técnicas de prevención de los daños causados por fenómenos ESD. En general, debemos distinguir dos entornos diferentes: el **entorno de producción**, donde se emplean dispositivos susceptibles a ESD para fabricar aparatos y equipos, y el **entorno de uso**, donde se usan los aparatos y equipos que contienen dispositivos susceptibles.

### Protección en un ambiente de producción

La figura de la página siguiente muestra un esquema de área de trabajo donde se ensamblan equipos, protegida contra ESD, tomada de la norma EN 100015-1: Basic Specification: Protection of Electrostatic Sensitive Devices Part 1: General Requirements del Reino Unido.

La figura presenta una amplia variedad de medidas de seguridad posibles, que quizás no sean todas necesarias, en función de las circunstancias particulares. El principio básico empleado es el **enlace equipotencial**, es decir, el conectar juntas todas las superficies para prevenir una diferencia de potencial entre distintos objetos.



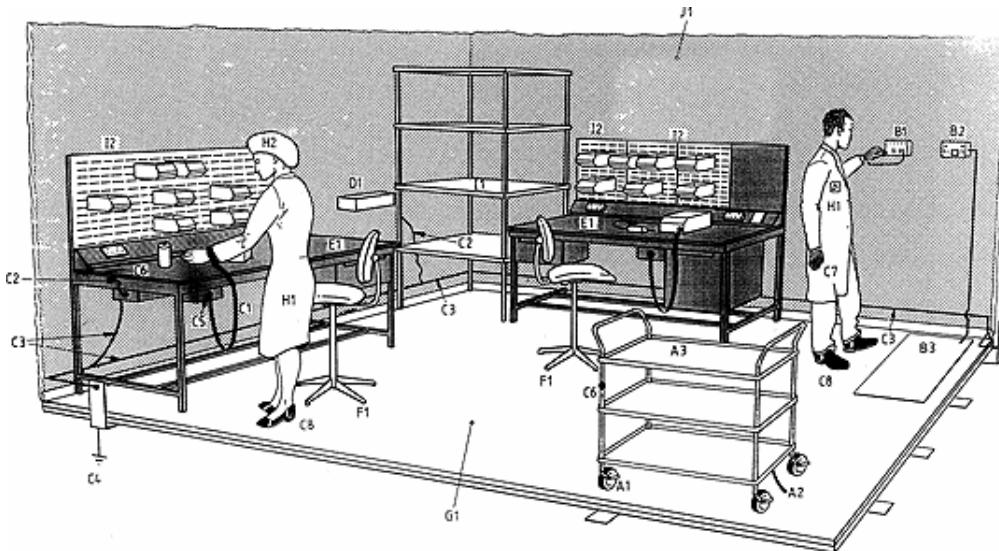
Las **superficies de trabajo** [E1] deben ser **dissipativo-estáticas**, y deben estar conectadas a tierra [C4] a través de una instalación de tierra para ESD [C3]. Las conexiones a tierra deben señalarse adecuadamente con el símbolo de la izquierda.

Los **operadores** en los puestos de trabajo estarán al potencial de tierra a través de un cable a una pulsera conductora [C1], mientras que para personal que requiere mayor movilidad es más apropiado la puesta a tierra mediante bandas en la suela y dedos del calzado [C8] sobre un piso dissipativo-estático [G1]. Los cables de conexión de las pulseras se conectan a puntos de conexión a tierra [C5]. La ropa protectora usada por el personal [H1, H2] deben ser de material dissipativo-estático y cubrir completamente las ropas del individuo en lugares donde haya riesgo de ESD. Cualesquiera guantes usados [C7] deben ser de material volumétricamente conductor.

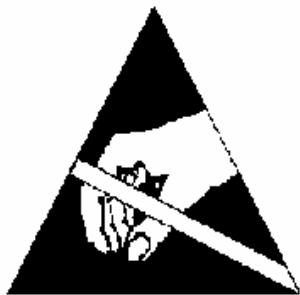
El **asiento** [F1] no debe ser el medio primario de conexión a tierra del operador, pero debe ser cubierto con material antiestático, con un camino conductor desde el asiento, el respaldo y los brazos al piso.

Los **componentes** deben almacenarse en cajones con superficies conductoras [I1], o estanterías puestas a tierra [I2]. Estas, y los bancos de trabajo, deben estar conectadas a la instalación de tierra para ESD vía cables de tierra [C2]. En sitios en que componentes o equipos medio ensamblados se transportan en mesas rodantes, éstas deben tener superficies [A3] de conductividad similar a la de las superficies de trabajo, y un marco conductor. Si las ruedas [A1] son volumétricamente conductoras, y están en contacto eléctrico con el marco de la mesa, el uso de una cinta de puesta a tierra [A2] no es necesario. Si el piso del área protegida no es conexión a tierra, la

mesa debe conectarse desde su punto de tierra [C6] a un punto de conexión de tierra [C5] cuando se halle detenido para carga y/o descarga.



La eficacia de las medidas de resguardo deben ser evaluadas por el personal usando un voltímetro electrostático para medir los potenciales y campos remanentes durante el trabajo normal. Medidas adicionales incluyen el control de la humedad a no menos del 20%, o el uso de ionizadores [D1]. Estos últimos tienen solamente efectos locales.



Deben usarse **señales** [J1] en el interior y en la entrada/salida del área protegida para recordar al personal sus responsabilidades. Las pulseras y cables de conexión deben chequearse regularmente usando un tester de continuidad eléctrica [B1]. Las suelas y partes conductoras del calzado [B2, B3] se chequean en forma similar.

Los dispositivos, aparatos o sistemas sensibles a posibles daños por ESD deben señalizarse con el símbolo de la izquierda, donde el triángulo significa "precaución" y la barra sobre la mano que va a tomar el objeto significa "no tocar". Debido a su amplio uso, la mano dentro del triángulo se ha asociado con ESD y el símbolo literalmente podría traducirse: "**material sensible a ESD. No tocar**".



El **símbolo de protección** ante ESD es similar al anterior, pero la barra es reemplazada por un arco o "paraguas", que indica protección. Este símbolo señala material protector contra ESD, y se aplica a felpudos, sillas, muñequeras, vestidos, materiales de empaque y otros ítems que protegen frente a ESD.

**Los daños causados a equipos eléctricos por falta de prevención ante problemas de ESD se han estimado en varios cientos de millones de dólares en la década de 1980-1990, antes que hubiera normas adecuadas y experiencia en el manejo de estas situaciones.**

### Protección en un ambiente de uso

Se usan diversas técnicas de protección contra ESD durante el uso de dispositivos colocados en equipos electrónicos. Las técnicas más usadas son:

- **Protección dieléctrica (aislación)**

La aislación adecuada es el mejor método para prevenir fenómenos de ESD, evitando que se produzca la descarga sobre el circuito protegido. Sin embargo, todo ensamblaje aislador tiene juntas, agujeros, etc., por los que se pueden desarrollar descargas.

- **Blindaje (recintos o cajas metálicos)**

El blindaje evita que las corrientes de ESD ingresen al circuito protegido, aunque no evita la descarga. Por lo tanto puede haber fenómenos de interferencia o de elevación del nivel de potencial de tierra que alteren el funcionamiento del circuito sin producir destrucción.

- **Protección por filtrado en líneas de señal**

En este esquema se agrega un filtro pasabajos a la entrada de señal. Un caso simple es una impedancia en serie entre la entrada de señal y el circuito a proteger. Esta impedancia puede ser resistiva (limita la energía que llega al circuito) o inductiva (limita los picos de alta frecuencia). Un circuito capacitivo paralelo desvía los picos de alta frecuencia. Este esquema reduce el ancho de banda útil para las señales que ingresan al circuito.

- **Supresión de transitorios**

En este esquema se coloca TVS (Transient Voltage Suppresors), frecuentemente basados en diodos zener, que constituyen un paso de baja impedancia hacia el bus de tierra para picos de corriente de alta frecuencia y suficiente intensidad. La respuesta en frecuencia para señales de baja intensidad es mejor que en el caso previo.

- **Aislación galvánica**

Este esquema evita la conexión eléctrica (o galvánica) entre la entrada y el circuito a proteger. Los transformadores aisladores son el ejemplo más sencillo y común, pero tiene una mala respuesta en altas frecuencias. Los acoplamientos optoelectrónicos, en particular los enlaces de fibra óptica o infrarrojos, son las aislaciones galvánicas de mejor performance.

### Normas y Estándares

Existen diferentes regulaciones nacionales e internacionales para la prevención, testeo, clasificación y control de fenómenos ESD. En USA el uso de estándares es voluntario, aunque es común que se usen en contratos privados. En la mayoría del resto del mundo el uso es obligatorio y existen organismos oficiales que se ocupan de su control y cumplimiento.

Los estándares actuales se pueden dividir en tres grupos. Primero están aquellos que proveen guías o requerimientos de programas ESD. En este grupo se hallan, por ejemplo, documentos como *ANSI/ESD S8.1-ESD Awareness Symbols*, *ESD ADV2.0-ESD Handbook*, *EIA 625-Requirements for Handling Electrostatic Discharge Sensitive Devices*, *MIL-STD-1686-Electrostatic Discharge Control Program*, o *EN100015-Protection of Electrostatic Sensitive Devices*.

Un segundo grupo cubre los requerimientos para productos o procedimientos específicos tales como el empaque o puesta a tierra. Ejemplos típicos de este grupo son *ANSI/ESD S6.1-Grounding* o *EIA 541-Packaging of Electronic Products for Shipment*.

Un tercer grupo de documentos cubre los métodos de testeo para evaluar productos y/o materiales. Históricamente, la industria electrónica se ha basado en métodos de testeo desarrollados para otras industrias u otros materiales (por ejemplo *ASTM-257-DC Resistance or Conductance of Insulating Materials*). Hoy existen estándares desarrollados específicamente para productos electrónicos. Incluyen ejemplos como *ESD S5.1-Device Testing*, *Human Body Model* and *ANSI/ESD S7.1: Floor Materials -- Resistive Characterization*.

Tradicionalmente los estándares militares como *MIL-STD-1686 - Electrostatic Discharge Control Program* y *MIL-HDBK-263 - Electrostatic Discharge Control Handbook* (USA) se han usado como guías para la confección de documentos para uso comercial.

En Europa, CENELEC ha publicado un estándar europeo de ESD: *EN100015 - Protection of Electrostatic Sensitive Devices*. Actualmente la IEC está desarrollando una serie amplia de estándares que en el futuro reemplazará a este documento.

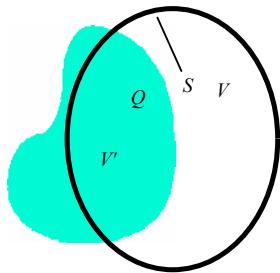
Japón ha publicado una propuesta de estándar sobre ESD, que reúne muchos aspectos de los documentos norteamericanos y europeos.

## RESUMEN

- Las ecuaciones del campo electrostático:  $\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$        $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

llevan a la ley de Gauss:  $\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \Rightarrow \oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = Q_V$

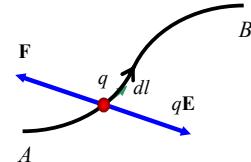
y al potencial electrostático:  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$  con  $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$



En la ley de Gauss la carga del segundo miembro es **sólo la carga encerrada** (correspondiente al volumen  $V'$  en la figura) en el recinto de integración.

El potencial electrostático está relacionado con el trabajo realizado por el campo electrostático en una trayectoria:

$$W_E = q \int_{C_{A \rightarrow B}} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -q (\Phi_B - \Phi_A)$$



Se observa que no interesa la trayectoria, ya que el campo es irrotacional, y por lo tanto **conservativo**.

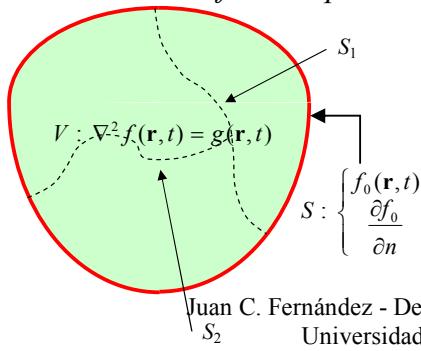
- El campo creado por una distribución de carga se puede calcular usando el **principio de superposición**, que dice que el campo resultante es la suma vectorial de los campos creados individualmente por cada carga de la distribución. Resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 V} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Se han encontrado así **tres métodos** para calcular el campo electrostático creado por una distribución estática de carga eléctrica:

- A partir de la ley de Gauss para distribuciones de carga de alta simetría.
- A partir de la expresión del campo de una distribución de carga.
- A partir de la expresión del potencial electrostático de una distribución de carga.

- De acuerdo a su comportamiento frente a un campo eléctrico, los materiales se dividen en conductores, semiconductores y aisladores. En el caso de cuerpos conductores, el campo electrostático y la densidad de carga se **anulan en su interior**, y la superficie del conductor es una **superficie equipotencial**, de forma que las líneas de campo exteriores llegan **perpendiculares** a ella.
- En cuerpos no conductores puede haber redistribución de carga local, al menos para campos no demasiado intensos, en presencia de campo eléctrico. Este es el proceso de **polarización**, que crea un **campo inducido** que se superpone al original.
- En este capítulo hemos introducido la **teoría del potencial**. Esta teoría trata problemas donde una función potencial estática  $f(\mathbf{r})$  está definida y cumple una ecuación diferencia de Poisson dentro de un recinto  $V$ , y además  $f(\mathbf{r})$  cumple **condiciones de contorno** definidas sobre la superficie  $S$  frontera del recinto de integración  $V$  y eventuales superficies internas ( $S_1, S_2$ , etc.) que separan regiones de propiedades diferentes. Las condiciones de contorno son, en general, definidas por el valor o la continuidad



de la función potencial en la superficie  $S$ :  $f_0(\mathbf{r}, t)$  y  $\frac{\partial f_0}{\partial n}$

de la función potencial sobre una superficie (**condición de Dirichlet**) y/o el valor o la continuidad de la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie (**condición de Neumann**), o una mezcla de estas condiciones.

- La **ecuación de Poisson** es una ecuación diferencial lineal inhomogénea:

*La solución general de una ecuación diferencial inhomogénea es la suma o superposición de la solución general de la ecuación homogénea (la ecuación de Laplace, en nuestro caso) y de una solución particular de la ecuación completa:*

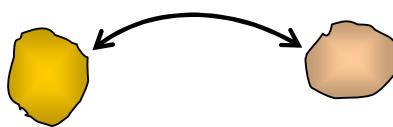
$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_h(\mathbf{r}) + \Phi_p(\mathbf{r})$$

*La solución particular habitualmente usada en la electrostática es la integral de Poisson:*

$$\Phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

- Se presentó una breve introducción a las **propiedades básicas** de las soluciones de un problema de potencial (**linealidad, superposición y armonicidad**) y se introdujo un método práctico que se basa en estas propiedades: **el método de imágenes**.
  - El contacto o cercanía de cuerpos con cargas eléctricas (no necesariamente con carga total neta) produce una redistribución de carga en esos cuerpos que crea campo eléctrico. Este proceso se denomina **inducción electrostática**.
  - La inducción electrostática por contacto produce la **carga triboeléctrica**. Diversos mecanismos, como: efectos de contacto superficial, función trabajo, reflujo de carga y descarga gaseosa contribuyen a la transferencia de carga generada por el proceso triboeléctrico.
  - El contacto de un dispositivo con una fuente de carga eléctrica produce una **descarga electrostática (ESD)** que puede causar destrucción o mal funcionamiento en circuitos electrónicos.
    - Existen distintos **modelos** para la descripción de fenómenos y el testeo y la clasificación de dispositivos. Los más usados son el *Modelo de Cuerpo Humano (HBM)*, el *Modelo de Máquina (MM)* y el *Modelo de Dispositivo Cargado (CDM)*. En todos estos modelos existe un posible precursor en forma de pico u oscilaciones de alta intensidad, y un pulso que cae con un tiempo característico del orden de los nanosegundos. Las corrientes pico involucradas son del orden de las decenas de amperes.
    - La **prevención** contra fenómenos ESD se da en dos entornos: el entorno de producción, donde se manipulan los dispositivos susceptibles para ensamblar equipos, y el entorno de uso, donde el dispositivo forma parte de un circuito en operación.
- En el entorno de producción deben tomarse múltiples precauciones para que la manipulación de los dispositivos no cause fenómenos de ESD.*
- En el entorno de uso se usan medidas de protección como aislación, blindaje, filtrado o acople óptico.*

## APENDICE 2 - Modelo de campo y de acción a distancia



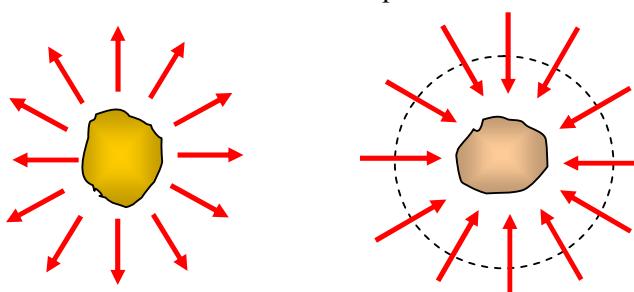
La descripción de la interacción electrostática de la ley de Coulomb es un caso de **acción a distancia**.

Esta expresión significa que la interacción se produce **directamente** entre los objetos interactuantes (los cuerpos cargados) sin presencia de un agente intermedio. Como se ilustra en la figura, la interacción tiene las propiedades :

### Acción a distancia

- interacción directa (sin agente intermedio)
- interacción instantánea (depende sólo de las posiciones de los objetos)

Esta descripción tiene varios problemas de consistencia interna, siendo el más importante la imposibilidad de tener cambios **instantáneos** en el valor de las interacciones cuando, p.ej., se modifica la carga de uno de los cuerpos interactuantes. Esto está en contra del principio de una máxima velocidad de propagación de las interacciones que surge como postulado de la teoría de la relatividad. Si tomamos como válida la teoría de la relatividad entonces la descripción por acción a distancia no es físicamente aceptable.



En la descripción o **modelo de campo** uno de los cuerpos crea una perturbación del espacio, que llamamos campo. Esta perturbación actúa sobre el otro cuerpo produciendo la acción (fuerza) sobre él. Es importante ver que la intensidad de la acción sobre el segundo cuerpo depende del valor del campo **local**, es decir, en un entorno alrededor del segundo cuerpo.

La descripción de campo es entonces una teoría local: **los efectos dependen de los valores locales de las magnitudes físicas**.

A diferencia de los modelos globales (no locales – como la ley de acción a distancia), los modelos locales se pueden representar mediante ecuaciones diferenciales, ya que los efectos observables dependen de valores locales, es decir, en puntos cercanos dentro de un entorno tan pequeño como se pueda definir compatible con el fenómeno descripto. En el caso del campo electrostático creado y actuante sobre objetos macroscópicos, que es el caso generalmente de interés en la tecnología, la pequeñez de las partículas y la carga que tienen hace posible una descripción de magnitudes físicas (distribución de carga, campos) que adoptan la forma de funciones continuas de las coordenadas espaciales y el modelo local es válido.



En la descripción de campo aparece entonces un **agente intermedio** de la interacción, que es el campo mismo. En la teoría moderna el campo es una propiedad del espacio, y surge por la presencia de sus **fuentes**, que en el caso del campo eléctrico son los cuerpos con carga eléctrica neta.

Por otra parte, como las ecuaciones que describen el modelo de campo son locales, la introducción de las variaciones con el tiempo lleva, como veremos más adelante, a ecuaciones de propagación ondulatoria que describen interacciones que se propagan a velocidad finita, cumpliendo con los límites fijados por la teoría de la relatividad. En resumen:

### Modelo de campo

- interacción indirecta (el campo es el agente intermedio)
- interacción retardada (propagación a velocidad finita de las acciones)
- acción local

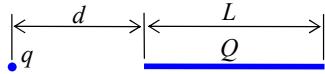
## PROBLEMAS

- 2.1) Un electroscopio mide la carga a partir de la desviación angular de dos esferas conductoras idénticas muy pequeñas de masa  $M$  suspendidas por cuerdas aislantes de pesos despreciables de longitud  $L$ . Se deposita una carga total  $Q$  sobre las esferas del electroscopio. El ángulo  $\theta$ , medido desde la vertical obedece una relación de la forma  $\tan \theta \sin^2 \theta = K$

¿Cuál es el valor de la constante  $K$ ?

[Respuesta:  $Q^2 / 64\pi\epsilon_0 MgL^2$ ]

- 2.2) Una línea de longitud  $L$  uniformemente cargada con  $Q$  está ubicada a una distancia  $d$  de otra carga puntual  $q$  como se indica en la figura. Hallar la fuerza que la carga ejerce sobre la línea.



$$[\text{Respuesta: } F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L} \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{d+L} \right)]$$

- 2.3) Un disco circular tiene una densidad superficial de carga constante  $\sigma_0$ . El radio del disco es  $R$ . Hallar el campo eléctrico sobre el eje del disco a una distancia  $z$ . Graficar  $\mathbf{E}$  en función de  $z$  y observar donde es discontinuo. ¿Cómo se modifica la expresión de  $\mathbf{E}$  si el disco está centrado en  $z_0 \hat{z}$ ?

$$[\text{Respuesta: } \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)]$$

- 2.4) Repetir el problema 2.3) cuando la densidad superficial es  $\sigma = \alpha r^2$  donde  $\alpha$  es una constante y  $r$  es la distancia al centro del disco. El radio del disco es  $R$ . Hallar el campo eléctrico sobre el eje del disco a una distancia  $z$ . Graficar  $\mathbf{E}$  en función de  $z$ .

$$[\text{Respuesta: } \mathbf{E} = \frac{\sigma z^2}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \left( \sqrt{1 + R^2/z^2} - 1 \right) \quad (z \geq 0)]$$

- 2.5) Un cilindro metálico muy largo, hueco de radio  $R$  está conectado a tierra. Sobre el eje del cilindro hay una distribución de carga lineal  $\lambda$ . a) Calcular y graficar el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio. b) Hallar la densidad de carga superficial inducida sobre la superficie del cilindro.

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad \Phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) \quad (\rho \leq R) \\ \text{[Respuesta:}] \quad & \\ b) \quad & \sigma = -\epsilon_0 E(\rho = R) = -\frac{\lambda}{2\pi R} \end{aligned}$$

- 2.6) Un precipitador electrostático está formado por un cilindro metálico hueco de radio  $R_p = 100 \text{ cm}$  conectado a tierra, en cuyo eje se encuentra un conductor recto de radio  $R_c = 0.25 \text{ cm}$ , llamado *de efecto corona*, conectado a un potencial  $V_0$ . ¿Qué diferencia de potencial se debe aplicar para alcanzar un campo eléctrico que ionice el aire en la superficie del alambre de corona?. Explique el funcionamiento de un precipitador electrostático de humo y el principio del pintado electrostático.

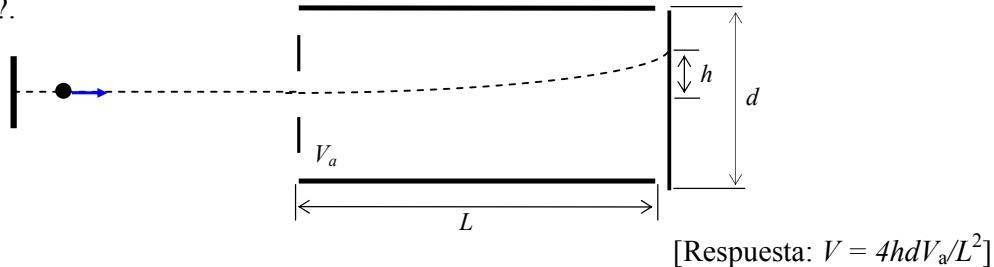
(Nota: El campo de ruptura dieléctrica del aire es  $E_r \approx 3MV/m$ )

[Respuesta:  $V_0 \approx 45KV$ ]

- 2.7) Se tiene una esfera no conductora de radio  $a$  cargada con una densidad volumétrica  $\rho$ . La esfera está adentro de otra esfera metálica hueca de radio  $b > a$  conectada a un potencial  $V_0$ . Halle: a) el campo eléctrico en todo punto, b) la carga inducida en la esfera metálica y c) el potencial en todo punto.

$$[\text{Respuesta: } Q_{\text{ind}} = 4\pi\epsilon_0 b V - (4/3)\rho\pi a^3]$$

- 2.8) En un tubo de rayos catódicos, tal como el de un televisor o un osciloscopio, se utiliza un campo eléctrico para la deflexión de un haz de electrones. Los electrones son emitidos por un cátodo caliente y acelerados en un potencial  $V_a$ . Si la velocidad inicial de los electrones es cero, determinar que tensión se debe aplicar a las placas horizontales para que los electrones se desvíen una distancia  $h$  del centro. Desprecie los efectos de borde. Los datos se indican en la figura. ¿Cómo puede relacionar este ejemplo con el funcionamiento de las impresoras de chorro de tinta?



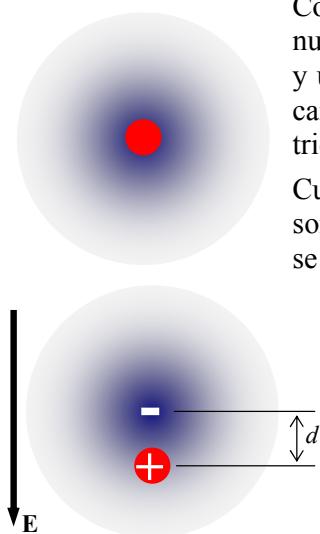
$$[\text{Respuesta: } V = 4hdV_a/L^2]$$

## 2 - Campos Cuasi-Estáticos 1 (cont.)

### Campo Electrostático en medios materiales.

#### Polarización

Hasta aquí hemos analizado el campo electrostático creado por distribuciones de cargas puntuales o en conductores. Estas cargas son **libres** ya que en presencia de un campo se pueden mover prácticamente sin restricciones. Sin embargo, en los dieléctricos existe carga **ligada**, que está sujeta por importantes fuerzas de cohesión a la red cristalina y frente a un campo eléctrico su movilidad es muy limitada.



Consideremos el caso más simple de un átomo hidrogenoide que, desde nuestro punto de vista, puede representarse como un núcleo de carga +e y un electrón de carga -e. En estado normal, los centros de masa de las cargas positiva y negativa coinciden, y el átomo no genera campo eléctrico apreciable.

Cuando se coloca el átomo en presencia de un campo externo sus cargas son atraídas en sentidos opuestos y tienden a separarse. Esta separación se ve contrarrestada por las fuerzas de cohesión atómica y finalmente se llega a una situación de equilibrio con una distancia  $d$  entre los centros de masa de ambas cargas. El átomo ahora produce un campo eléctrico, que se denomina **inducido**. El fenómeno de la separación (limitada) de carga se denomina **polarización** del material y el átomo se convierte en un **dipolo**. La polarización aumenta (en general no proporcionalmente) con la intensidad del campo exterior. Si el campo sigue aumentando, llega un momento en que las fuerzas de cohesión no pueden mantener juntas las cargas y el átomo se ioniza por desprendimiento de electrones. Estos

electrones "cuasi-libres" se aceleran en presencia del campo, constituyendo una corriente eléctrica. Esta corriente puede ser muy intensa y destructiva, ya que en presencia de campos intensos los electrones se aceleran a energías muy altas y pueden experimental una colisión con un elemento neutro, arrancando más electrones, lo que lleva a un **efecto de avalancha**. Este fenómeno se conoce como **ruptura dieléctrica**, y depende fundamentalmente del tipo y estado del material, que tolera un campo máximo antes de la ruptura. Ya hemos visto el caso del aire, donde los campos de las líneas de alta tensión pueden producir ruptura dieléctrica. Las nubes cargadas eléctricamente producen ruptura dieléctrica en el aire cuyos efectos visibles son los rayos.

#### Ruptura dieléctrica

El **campo de ruptura**  $E_r$  es la intensidad de campo eléctrico que hace que un material aislador (o dieléctrico) se convierta en conductor. A menudo la ruptura dieléctrica es seguida por la circulación de una corriente eléctrica (de miliamperes a millones de amperes, según las circunstancias) a través de la recientemente formada región conductora. Si la conducción se produce en un gas ionizado (**plasma**) esta conducción posterior a la ruptura se conoce como **arco** o **chispa**.

A continuación se presentan algunas características de la ruptura dieléctrica en distintos casos de interés en la ingeniería de alta tensión.

**Gases** ( $E_r < 25 \text{ MV/m}$ ) El aire atmosférico es el material gaseoso dieléctrico más usado. Otros gases de uso común en ingeniería de alta tensión son el dióxido de carbono, el nitrógeno y el hexafloruro de azufre. El oxígeno en el aire y el fluor en el azufre del hexafloruro son importantes porque atrapan fácilmente electrones libres, que son los agentes que inician una ruptura

dieléctrica. Los materiales gaseosos pueden repararse por sí mismos luego de un evento de ruptura dieléctrica. Esto significa que el material puede recuperar sus propiedades aislantes. Esta habilidad se ve disminuida por la presencia de contaminantes, que pudieron haberse formado en un evento previo de ruptura o por exposición a humedad u otras sustancias.

**Líquidos** ( $E_r < 100 \text{ MV/m}$ ) Los líquidos proveen refrigeración además de aislación eléctrica, como en el caso del aceite de los transformadores de potencia. Como los gases, los líquidos se pueden recuperar pero la influencia de los contaminantes es en ellos generalmente mayor que en los gases. Se ha usado agua deionizada y una gran variedad de aceites orgánicos y minerales como dieléctricos líquidos en sistemas de alta tensión. También se usan las propiedades dieléctricas de alimentos líquidos en la pasteurización por campos pulsados y en los hornos de microondas. El agua deionizada se usa por su gran permitividad (alrededor de 80) mientras que los aceites tienen permitividades menores (alrededor de 3). El aceite de castor es un aceite dieléctrico muy popular. En el pasado se usaron aceite con compuestos de la familia de los bifenilos policlorados (polychlorinated biphenyls - PCB's), por su propiedad de líquido resistente al fuego, pero se ha encontrado que son muy tóxicos y no biodegradables, por lo que existen regulaciones muy estrictas que prohíben el uso de PCB en instalaciones eléctricas.

**Sólidos** ( $E_r < 200 \text{ MV/m}$ ) Las rupturas superficiales pueden ser autorrecuperables, pero en muchas ocasiones se produce un daño permanente en forma de carbonización u oxidación de canales en la superficie que constituyen caminos de baja impedancia. La ruptura en el seno de un material sólido es habitualmente destructiva. Un dieléctrico sólido muy usado es resina epoxi depositada en estado líquido bajo condiciones de vacío para impedir la formación de burbujas (donde el campo eléctrico es mayor que en el dieléctrico, facilitando la ruptura), que se deja endurecer antes de someterse a tensión.

La ruptura dieléctrica es generalmente una situación no deseada que puede generar daños y problemas de inmensa magnitud económica. Por ello es de máxima importancia el correcto diseño de los aisladores, separadores y sistemas de descarga a tierra en las instalaciones eléctricas, dado que, además del peligro de destrucción de la instalación y/o dispositivos y aparatos conectados a ella existe el peligro de incendio y la formación de reacciones químicas tóxicas o contaminantes.

La siguiente tabla presenta los campos de ruptura de algunas sustancias:

Sustancia	$E_r (\text{MV/m})$	Sustancia	$E_r (\text{MV/m})$
Aire (a presión atmosférica)	3	vidrio (placa)	30
aceite mineral	15	Parafina	30
papel impregnado	15	cuarzo fundido	30
Poliestireno	20	mica	200
Bakelita	25		

El archivo **INSULATE.PDF** presenta una lista de dieléctricos usados en la ingeniería eléctrica.

### Efecto Corona

Muchos efectos de interés tecnológico están ligados a la ruptura dieléctrica del aire u otros gases debido a campos entre cuerpos conductores. Hay cuatro tipos de descarga gaseosa: descarga luminescente, corona, chispas y arcos. Estas descargas se dan tanto en CC como en CA.

Un **arco** se produce a bajas tensiones y altas corrientes (la soldadura de arco emplea fuentes de alrededor de 10 V y 10 kA) generando un alto calentamiento. La **chispa** ocurre en el caso inverso, es decir, altas tensiones y bajas corrientes, como en algunos casos de ESD. Un caso que no cae fácilmente dentro de esta clasificación es el rayo, donde la tensión y la corriente son ambas grandes. La **descarga luminiscente** se produce en situaciones de alta presión (o muy alto campo) cuando los electrones reciben suficiente energía para emitir radiación luminosa en sus choques con átomos o moléculas del gas en el que se hallan.

La **corona** es una descarga incipiente, que se produce cuando hay una ruptura dieléctrica localizada debido a un campo que supera sólo **localmente** al campo de ruptura del gas. El resto de la

región presenta campos que no superan el valor crítico y no se produce entonces un arco o chispa. En la literatura se habla de **descargas parciales**. La **descarga** y la **luminiscencia** son variantes inestables, y tienen forma de corona (de donde quizás surgió el nombre del efecto) cuando el fenómeno se produce en una punta. El valor del campo al cual comienza a observarse el fenómeno (luminiscencia, interferencia de RF, ruido audible) se denomina **campo de incepción**. La presencia sobre la superficie de los conductores de pequeñas protuberancias, como gotas de agua, copos de nieve, insectos o los bordes levantados de los hilos o hebras en un cable multifilar producen fuertes campos locales que pueden superar el campo de incepción aún cuando en la mayor parte de la superficie del conductor el campo sea menor.

En el aire este campo depende de la rugosidad de la superficie conductora y de las condiciones de presión y temperatura del aire:

- Para alambres o cables debe multiplicarse por un **factor de rugosidad**:
  - = 1 para alambres pulidos;
  - = 0.98 a 0.93 para alambres rugosos, sucios o gastados;
  - = 0.87 a 0.83 para cables.
- El valor del campo debe multiplicarse por el **factor de densidad del aire**:  
 $\delta \approx 3.92 p/T$  donde  $p$  es la presión en  $cm\ Hg$  y  $T$  la temperatura en  $K$ .

El efecto corona en sistemas de potencia produce **pérdidas de energía** debido a la energía que el



campo cede a los iones y electrones en movimiento, genera **ruido audible** e **interferencia**, especialmente en señales de radios de AM y TV de aire. En la figura se muestran algunos puntos de corona luminiscente sobre los cables de un haz de alta tensión. Las pérdidas aumentan con la frecuencia del campo, de manera que son mayores para armónicas o transitorios en la línea.

Cuando el campo aumenta lo suficiente para producir el salto de la chispa o el arco,

habitualmente la corona precede a la chispa. Esto también ocurre en la caída de rayos. El efecto corona también crea iones en las cercanías de las instalaciones y estos iones tienen efectos **térmicos**, **corrosivos** y **oxidativos** sobre los materiales de las instalaciones, efectos que pueden llegar a deteriorar la capacidad de aislación de los materiales produciendo defectos más importantes.

Por otra parte, el efecto corona tiene aplicaciones industriales:

- Dispositivos generadores de ozono utilizados por sus efectos bactericida, fungicida y oxidativo en limpieza de aire, agua, instrumentos quirúrgicos, preservación de alimentos, etc.
- Precipitadores electrostáticos (ESP) para remover partículas de polvo o materiales no deseados del ambiente en sistemas de control de polución, etc.
- Tratamiento de recubrimientos plásticos o de papel para modificar las propiedades de rugosidad y triboeléctricas, tratamientos para impresión, mejora de adherencia de polímeros, etc.
- Se han publicado trabajos donde imágenes de la luminiscencia se usan para medir voltajes en dispositivos de alta tensión<sup>1</sup>.

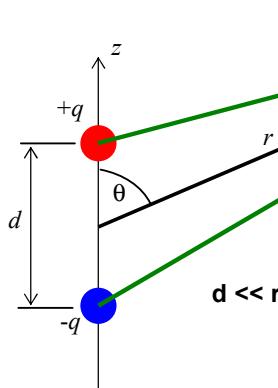
<sup>1</sup> "Developments in High Voltage Measurement Techniques and a Novel Corona Assessment Method", D.L.Hickery & P.J.Moore, 35th Universities Power Engineering Conference, 2000.

"HVAC Measurements by Corona Analysis", D.L.Hickery & P.J.Moore, 36th Universities Power Engineering Conference, 2001.

"High-speed Imaging of AC Corona for Voltage Measurement", D.L.Hickery & P.J.Moore, International Symposium of High Voltage Engineering, 2001.

### Dipolo eléctrico. Potencial y campo lejanos

Antes de llegar a estas situaciones a veces catastróficas, los materiales dieléctricos se polarizan. Un material polarizado genera un campo eléctrico inducido. Vamos a analizar brevemente la descripción de este fenómeno. Para ello vamos a usar un modelo en donde las unidades elementales polarizables del material (átomos, moléculas, etc.) se consideran **dipolos**, es decir, una dupla de cargas puntuales de igual magnitud de carga pero signo opuesto, separadas en una distancia que en la práctica es muy pequeña frente a la distancia al punto de observación.



El potencial creado en un punto  $\mathbf{r}$  lejano ( $r \gg d$ ) por el dipolo de la figura es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_-} \quad \text{con:}$$

$$R_+ \approx r - \frac{d}{2} \cos\theta \quad R_- \approx r + \frac{d}{2} \cos\theta$$

Desarrollando por Taylor:

$$\frac{1}{R_{\pm}} \approx \frac{1}{r \mp \frac{d}{2} \cos\theta} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 \pm \frac{d \cos\theta}{2r} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right) \right]$$

de donde:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{d \cos\theta}{2r} - 1 + \frac{d \cos\theta}{2r} \right] = \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

y finalmente:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

donde:  $\mathbf{p} = qd \hat{\mathbf{z}}$  es el llamado **momento dipolar** del dipolo, un vector que va desde la carga negativa a la positiva.

El siguiente ejemplo presenta el llamado **desarrollo multipolar** del potencial, que muestra que una distribución arbitraria de carga se puede pensar como la superposición de una carga puntual (la carga neta), un dipolo elemental, un cuadrupolo elemental, etc., situados en el origen de coordenadas.

**Ejemplo 2-18:** Analizar el potencial creado por una distribución arbitraria de carga a grandes distancias.

Supongamos una distribución arbitraria de carga  $\rho(\mathbf{r})$  en un recinto  $V$ . El potencial electrostático que genera es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad \text{con} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}}$$

Para  $r \gg r'$  es posible desarrollar en serie de Taylor el factor  $1/R$  del integrando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{1+x}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots \right] \quad \text{con} \quad x = -2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2}$$

Luego, manteniendo hasta el término cuadrático solamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{r\sqrt{1+x}} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left( -2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^2 - \dots \right] \\ &\approx \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} - \frac{r'^2}{2r^2} + \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{2r^2} + \dots \right] = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

y entonces:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[ 1 + \frac{\hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) + \dots \right] dV' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\mathbf{p} \bullet \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots\end{aligned}$$

con:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad \text{la \b{carga total o carga neta} de la distribución}$$

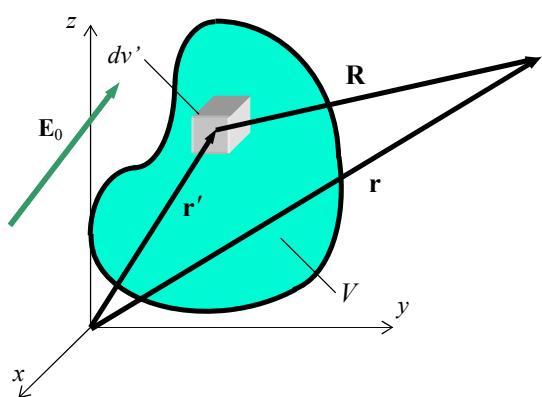
$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' \quad \text{el \b{momento dipolar} de la distribución}$$

$$\tau = \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2} \left( \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \bullet \mathbf{r}')^2}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right) dV' \quad \text{el \b{momento cuadrupolar} de la distribución}$$

y hay más términos de orden superior. Se ve entonces que el potencial se puede expresar como la suma de los llamados términos multipolares, cada uno de los sucesivos con menos peso en la suma. Sin embargo, si el cuerpo es neutro ( $Q = 0$ ) comienzan a tener relevancia los sucesivos términos de este desarrollo multipolar.

---

### Potencial inducido. Vector Polarización



Cuando un cuerpo dieléctrico se coloca en una región del espacio donde haya campo eléctrico, sus unidades elementales (átomos moléculas, etc.) se polarizan, generando un campo inducido. Podemos analizar este fenómeno dividiendo el cuerpo en elementos de volumen infinitesimales y adjudicando a cada uno un momento dipolar elemental  $dV' \rightarrow d\mathbf{p}$ .

Este momento dipolar crea un potencial lejano:

$$d\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} dV' \quad \text{donde:}$$

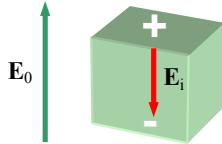
$$\mathbf{R} = R \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad \text{y hemos definido el vector polarización: } \mathbf{P}(\mathbf{r}') = \left. \frac{d\mathbf{p}}{dV'} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}$$

Ahora aplicamos superposición para sumar los potenciales creados por todos los elementos de volumen del cuerpo:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV'$$

Este es el potencial inducido creado por el cuerpo polarizado. A partir de él podemos calcular el campo inducido  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi_i(\mathbf{r})$  y el campo total:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_0(\mathbf{r}).$$



Como se ilustra en la figura, la polarización crea un campo inducido que se opone al campo original, de modo que dentro del material el proceso lleva a que el campo total es **menor** que el original. La expresión del potencial inducido puede reescribirse viendo que:

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) \Rightarrow \Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) dV'$$

Además:  $\mathbf{F} \bullet \nabla f = \nabla \bullet (\mathbf{fF}) - f \nabla \bullet \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}') \bullet \nabla'(1/R) = \nabla' \bullet [\mathbf{P}(\mathbf{r}')/R] - \nabla' \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r}')/R$

(las derivadas se realizan sobre las coordenadas primadas). Tenemos así:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ \nabla' \bullet \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para reescribir la primera integral.

Esta última expresión es equivalente a:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

que es el potencial que crearía una hipotética distribución de carga **libre** con densidades volumétrica  $\rho_P(\mathbf{r}')$  y superficial  $\sigma_P(\mathbf{r}')$ .

**Por lo tanto podemos resolver el problema del potencial inducido por un cuerpo polarizado reemplazando al cuerpo por una distribución equivalente de carga libre, para la cual valen las consecuencias de la ley de Coulomb y la electrostática de cargas libres.**

Por otra parte, se observa que la llamada **densidad de carga equivalente de polarización superficial**  $\sigma_P(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}$  es la proyección del vector polarización sobre la superficie frontera del cuerpo polarizado y la **densidad de carga equivalente de polarización volumétrica**

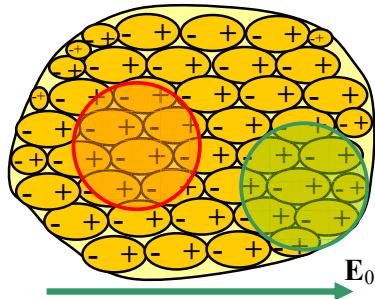
$\rho_P(\mathbf{r}') = -\nabla' \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r}')$  está ligada con las inhomogeneidades en la polarización en el seno del material, representada por la divergencia del vector de polarización.

### ¿Cuál es la realidad de estas cargas?

Desde un punto de vista formal, podemos considerar a las cargas de polarización como un conveniente artificio destinado al cálculo: se reemplaza el cuerpo polarizado por una distribución de carga real que da el mismo campo.

En la figura ilustramos la polarización de un cuerpo dieléctrico. Se forman (u orientan) dipolos en la dirección del campo aplicado. Se observa que se produce un exceso de carga negativa sobre el lado izquierdo y un exceso de carga positiva sobre el lado derecho. Esta redistribución de la

carga ligada está asociada a las cargas superficiales de polarización. Por otra parte, si elegimos un recinto en el seno del material, podemos ver que en casos (el círculo rojo) la densidad neta de carga encerrada es cero, mientras que en otros casos (el círculo verde) la densidad neta de carga encerrada no es cero porque hay inhomogeneidades, simbolizadas por dipolos de menor tamaño. Esta densidad de carga está asociada a las cargas volumétricas de polarización, y la no homogeneidad en la distribución de carga genera líneas de campo.



### Forma general de la ley de Gauss. Vector desplazamiento

La ley de Gauss proporciona la relación local entre el campo eléctrico y sus fuentes. Hasta el momento, las únicas fuentes de campo eléctrico eran las distribuciones de carga libre, pero ahora hemos agregado la contribución del campo inducido por material polarizado, que podemos representar por las cargas equivalentes de polarización. Tenemos entonces que debemos agregar a las fuentes del campo descriptas por la ley de Gauss esta contribución:

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Pero como:  $\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r})$  podemos escribir:  $\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l(\mathbf{r}) - \nabla \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

y entonces:  $\nabla \bullet [\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})] = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \oint_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$

que es la **forma general de la ley de Gauss**, donde:  $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$

es el llamado **vector desplazamiento**. Se observa que **las fuentes del vector desplazamiento son las cargas libres**. Esto facilita el cálculo del campo en situaciones donde hay simultáneamente distribuciones de carga libre y dieléctricos polarizados.

La polarización de un material depende del campo exterior, y a su vez crea un campo inducido que se superpone al campo exterior. Existe entonces una ligazón entre estos campos, y en particular entre el vector polarización y el campo total (que es la cantidad mensurable).

En **dielecrticos lineales** (que son los materiales de mayor interés tecnológico) vale la relación:  $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0(1+\chi) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$  donde la cantidad  $\chi$  es la llamada **susceptibilidad dieléctrica** del material. La cantidad  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon_0(1+\chi)$  se denomina **permittividad o constante dieléctrica** del material, y el parámetro adimensional  $\epsilon_r$  es la **permittividad relativa**.

Cuanto mayor es la permitividad del material, más fuertemente se polariza y son mayores los efectos eléctricos. Presentamos a continuación una tabla de permitividades relativas de distintas sustancias de uso en la técnica:

Sustancia	$\epsilon_r$	Sustancia	$\epsilon_r$
Aire (a presión atmosférica)	1.0006	vidrio con borosilicato	4
PVC expandido	1.1	Cuarzo	5
polifoam	1.1	bakelita	5
n-hexano	1.9	mica rubí	5.4
parafina	2.1	PVC sólido	6.1
tetracloruro de carbono	2.2	neoprene	7
teflón	2.1	mármol	8
polietileno	2.2	silicio	12
madera prensada	2.2	etanol (alcohol etílico)	24
madera seca	2.4	metanol (alcohol metílico)	33
poliestireno	2.7	nitrobenceno	35
plexiglas	3.4	glicerina	50
suelo arenoso seco	3.4	hielo	75
sílice (dióxido de silicio)	3.8	agua pura	80

Existen materiales que presentan **polarización espontánea**, en ausencia de campo eléctrico exterior. Estos materiales se caracterizan por su red cristalina que presenta enlaces fuertemente iónicos. En estos materiales existen regiones permanentemente polarizadas (dominios eléctricos) que pueden orientarse mediante un campo aplicado y luego permanecer en esa orientación por la interacción con otros dominios adyacentes. Se trata de materiales ferroeléctricos. Su comportamiento es similar al de los imanes y tienen permitividades muy elevadas (por ejemplo, el titanato de bario es una sal natural con  $\epsilon_r \geq 2100$ . Hay cerámicos artificiales de desarrollo reciente con permitividades aún más altas).y presentan histéresis entre el vector polarización y el campo aplicado. Algunos materiales, llamados **electretos**, presentan una polarización permanente desde su fabricación, a partir de ceras o resinas que se colocan líquidas en un campo eléctrico logrando la orientación de las moléculas. Al enfriar el material queda polarizado en forma más o menos permanente. Se utilizan para fabricar dispositivos con propiedades anisótropas o direccionales.

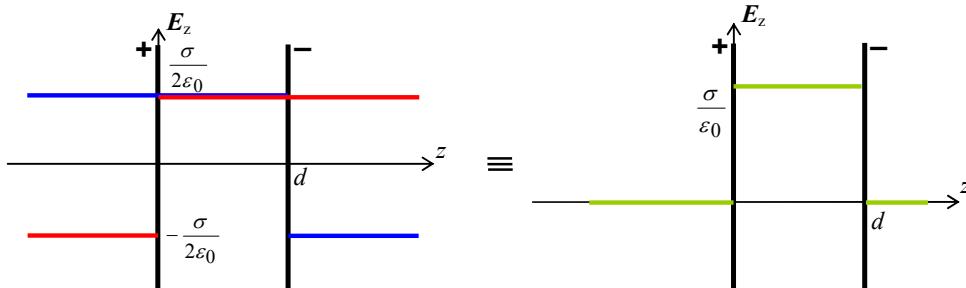
Otros efectos de polarización que se utilizan en la técnica son:

- **electrostricción**: cambio de tamaño del cuerpo debido a la fuerza entre los elementos polarizados,
- **piezoelectricidad**: efecto electrostrictivo reversible. Una modificación en las dimensiones del cuerpo produce un campo eléctrico y una ddp mensurables .
- **piroelectricidad**: polarización inducida por enfriamiento o calentamiento del cuerpo.

A continuación se presentan algunos simples ejemplos de cálculo del campo electrostático a partir de la ley de Gauss en sistemas con dieléctricos.

**Ejemplo 2-19:** Hallar el campo creado por dos planos conductores infinitos cargados respectivamente con densidades de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , paralelos entre sí y separados una distancia  $d$  si:  
a) hay aire b) hay un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r = 16$  entre ellos.

a) Usamos el resultado del **Ejemplo 2-6**, donde se halló el campo creado por un único plano cargado, y aplicamos superposición:



Se ve que el campo se anula fuera de la estructura y es uniforme dentro de ella.

b) Cuando se coloca un dieléctrico entre los planos conductores, cambia el campo dentro del material, pero no el vector desplazamiento porque está ligado únicamente a las cargas li-

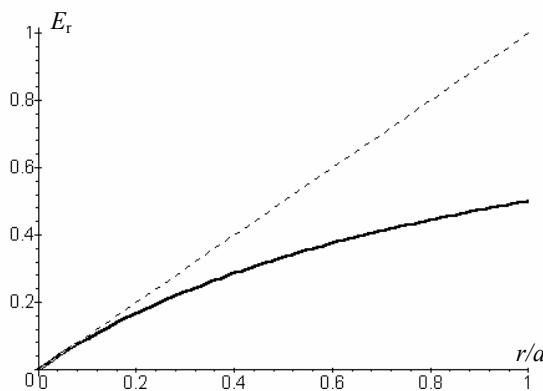
bres. Aplicando la ley de Gauss a un cilindro con tapas paralelas a los planos, una tapa en la región donde no hay campo y la otra donde sí lo hay, se halla que:  $D_z = \sigma \Rightarrow E_z = \sigma / \epsilon_0$ . El campo dentro del material es ahora 16 veces **menor** que en el caso en que no había dieléctrico.

**Ejemplo 2-20:** Una esfera está cargada uniformemente y tiene una permitividad variable con el radio:  $\epsilon_r = 1 + r/a$  donde  $a$  es el radio de la esfera. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio y las cargas equivalentes de polarización.

Este problema es similar al del **Ejemplo 2-7**. Fuera de la esfera el campo sólo depende de la carga total:  $E(r) = Q/4\pi\epsilon_0 r^2 \quad r \geq a$

Dentro de la esfera, aplicando en la misma forma la ley de Gauss, tenemos que:

$$D(r)4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \Rightarrow D(r) = \frac{\rho_0 r}{3} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0(1+r/a)} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3 (1+r/a)} \quad r \geq a$$



En la gráfica se muestra el campo en el interior de la esfera cuando hay vacío (línea de rayas) y cuando el material es el dieléctrico del enunciado (línea llena). Se ve nuevamente que la presencia del dieléctrico disminuye el campo en su interior.

Para calcular las cargas de polarización hallamos el vector  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{de donde:}$$

$$P_r = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} = \frac{\rho_0 r^2}{3(a+r)}$$

Sobre la superficie de la esfera se induce una **carga superficial equivalente de polarización**:

$$\boxed{\sigma_p = \mathbf{P} \bullet \hat{\mathbf{n}} = P_r|_{r=a} = \frac{\rho_0 a}{6} \Rightarrow Q_{p_s} = 4\pi a^2 \sigma_p = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{6} \Rightarrow Q_{p_s} = \frac{Q}{2}}$$

Se ve además que la presencia de la carga superficial de polarización está asociada a un salto en el campo eléctrico al atravesar la superficie de la esfera:

$$\Delta E = E_e|_{r=a} - E_i|_{r=a} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2} = \epsilon_0 \sigma_p$$

Es posible que exista densidad volumétrica de carga equivalente de polarización porque la polarización no es homogénea (esta es condición necesaria, pero no suficiente):

$$\rho_p = -\nabla \bullet \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho_0 r^4}{3(a+r)} \right) = -\frac{\rho_0}{3r^2} \frac{r^3(4a+3r)}{(a+r)^2} = -\frac{\rho_0}{3} \frac{r(4a+3r)}{(a+r)^2}$$

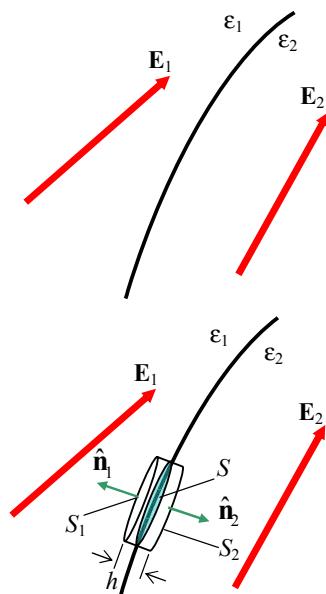
La carga total de polarización en el volumen de la esfera es:

$$\boxed{Q_{p_v} = \int_V \rho_p dV = -\frac{\rho_0}{3} 4\pi \int_0^a \frac{r(4a+3r)}{(a+r)^2} r^2 dr = -\frac{\rho_0}{3} 4\pi \frac{a^3}{2} \Rightarrow Q_{p_v} = -\frac{Q}{2}}$$

Se ve que las cargas de polarización se equilibran dentro de la esfera.

### Condiciones de frontera del campo eléctrico

Cuando existe una superficie interfase entre dos regiones de propiedades dieléctricas diferentes, la aplicación de las leyes del campo eléctrico llevan a que se establezcan relaciones entre las componentes de los campos a través de la interfase. Estas relaciones surgen de las propiedades fundamentales del campo electrostático.



En la figura se esquematiza la situación. Una superficie interfase separa dos medios de permitividades diferentes. En cada medio hay un campo eléctrico, y en general son diferentes. Para obtener la relación entre ambos campos eléctricos aplicamos las propiedades del campo.

Primero usamos la divergencia de  $\mathbf{E}$  a través de la ley de Gauss:

$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$  donde  $S$  es la superficie del cilindro de la figura de la derecha y  $Q_l$  es la carga libre encerrada por el cilindro. Este cilindro tiene una altura  $h$  muy pequeña, y una de sus tapas está en el medio 1 y la otra en el medio 2. Suponemos además que la superficie de las tapas es lo suficientemente pequeña para que el tramo de superficie interfase encerrada por el cilindro ( $S$ ) se pueda suponer plana. La integral de superficie puede escribirse entonces como:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS + \int_{S_{lat}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l$$

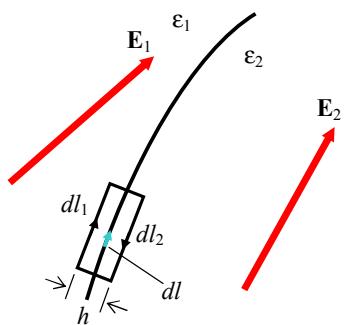
Si ahora tomamos el límite de esta expresión para  $h \rightarrow 0$ , la integral sobre la superficie lateral se anula porque la superficie misma se anula, las dos superficies tapas tienden a la superficie encerrada  $S$  y, tomando convencionalmente el versor normal a la interfase desde el medio 1 al medio 2, tenemos que:  $\mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$   $\mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n}$  y queda:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS + \int_{S_{lat}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \rightarrow - \int_S \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_S \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

de donde:  $\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \rightarrow \int_S (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l = \int_S \rho_s dS \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_s$

donde  $\rho_s$  es la **densidad de carga libre superficial** que existe en la interfase. La relación obtenida vale punto a punto sobre la interfase e involucra las componentes **normales** a la interfase de los vectores desplazamiento. Si no hay carga libre superficial sobre la interfase, las componentes normales del vector desplazamiento se conservan al cruzar la interfase (en general no se conservan las componentes normales del campo eléctrico, ya que las permitividades de los medios son diferentes).

Ahora utilizamos el rotor de  $\mathbf{E}$ . Sabemos que el campo es irrotacional y entonces:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .



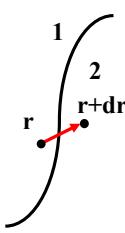
En la figura de la izquierda se toma una curva de circulación que es un rectángulo de altura  $h$ , una de cuyas bases está en el medio 1 y la otra en el medio 2. Tenemos entonces:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_{lat}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

donde la última integral se extiende a los dos lados laterales (cortos) del rectángulo. Si ahora nuevamente tomamos  $h \rightarrow 0$ , la tercera integral se anula porque el intervalo de integración se anula y además:  $d\mathbf{l}_1 \rightarrow -d\mathbf{l}$   $d\mathbf{l}_2 \rightarrow d\mathbf{l}$ .

Entonces:  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow - \int_{l_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \int_l (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{l} = 0$

La relación obtenida vale punto a punto sobre la interfase e implica que las componentes **tangenciales** a la interfase del vector campo eléctrico se conservan. Podemos escribir las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$  en la forma:  $(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}}$ .



El potencial electrostático cumple también una condición de frontera sobre la interfase. Como  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ , la circulación a lo largo de un camino infinitesimal que une dos puntos a ambos lados de la interfase es proporcional al trabajo de transportar una carga de prueba a través de la interfase. Como este trabajo es infinitesimal, el potencial electrostático es continuo al cruzar la interfase<sup>2</sup>:

$$\int_r^{r+dr} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Phi_1 - \Phi_2 \rightarrow 0 \quad \text{para } dr \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{\Phi_1 = \Phi_2}$$

Finalmente, podemos decir que las propiedades matemáticas del campo electrostático llevan a las siguientes condiciones de borde o condiciones de contorno al cruzar la interfase entre dos medios de permitividades diferentes:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} = Q &\Rightarrow (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 &\Rightarrow (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \end{aligned}$$

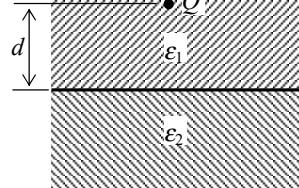
**Al cruzar la superficie que separa dos medios de propiedades distintas:**

- **se conserva el potencial electrostático**
- **se conserva la componente tangencial del campo electrostático (siempre)**
- **se conserva la componente normal del vector desplazamiento, salvo que exista una distribución superficial de carga libre sobre la interfase.**

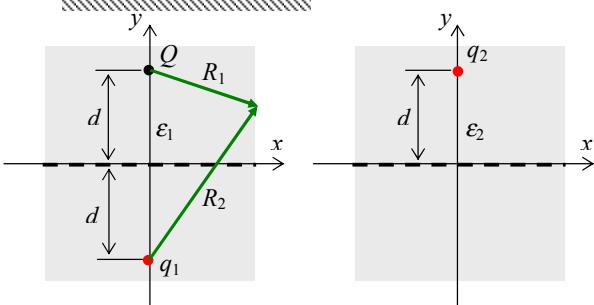
### Imágenes dieléctricas

El método de imágenes puede utilizarse en el caso de superficies de separación entre dieléctricos de alta simetría, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2-21:** Una carga puntual de valor  $Q$  se halla frente a una interfase plana entre dos dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , como se indica en la figura. Hallar el campo y el potencial en todo el espacio.



Para aplicar el método de imágenes debemos encontrar el conjunto de cargas que generen **las mismas condiciones de contorno que el problema original**. En este caso, las condiciones de contorno sobre la interfase entre los dos dieléctricos son la continuidad de la componente tangencial del vector  $\mathbf{E}$  y de la componente normal del vector  $\mathbf{D}$  al cruzar la interfase. Surge que se puede cumplir estas dos condiciones reemplazando el problema por la superposición de dos configuraciones:



a) dos cargas, la real  $Q$  y una imagen  $q_1$  sumergidas en un medio de permitividad  $\epsilon_1$  que da el campo en el medio superior, y

b) una carga imagen  $q_2$  situada en la posición de la carga real, sumergida en un medio de permitividad  $\epsilon_2$  que da el campo en

<sup>2</sup> Salvo cuando existe una doble capa o capa de dipolos sobre la interfase, caso en el cual el potencial tiene un salto de  $\tau/\epsilon_0$ , donde  $\tau$  es el momento dipolar por unidad de área sobre la interfase. Ver, por ejemplo, "Electromagnetic Theory", J.A. Stratton, McGraw-Hill, New York, 1941, pp.188-192.

el medio inferior:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q}{R_1} + \frac{q_1}{R_2} \right) & z \geq 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2}{R_1} & z \leq 0 \end{cases}$$

donde  $R_{1,2} = |\mathbf{R}_{1,2}| = |x\hat{\mathbf{x}} + (y \mp d)\hat{\mathbf{y}}|$

de donde tenemos el campo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q\mathbf{R}_1}{R_1^3} + \frac{q_1\mathbf{R}_2}{R_2^3} \right) \quad z \geq 0$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2\mathbf{R}_1}{R_1^3} \quad z \leq 0$$

Las condiciones de contorno nos permiten calcular los valores de las cargas  $q_1$  y  $q_2$ :

$$y = 0 \Rightarrow R_{1,2} = |\mathbf{R}_{1,2}| = |x\hat{\mathbf{x}} \mp d\hat{\mathbf{y}}| \Rightarrow R_{1,2} = R = \sqrt{x^2 + d^2}$$

$$E_{1x} = E_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Qx}{R^3} + \frac{q_1x}{R^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_2x}{R^3} \Rightarrow Q + q_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q_2$$

$$D_{1x} = D_{2x} \Rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{Qd}{R^3} + \frac{q_1d}{R^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{q_2d}{R^3} \Rightarrow -Q + q_1 = -q_2$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: 
$$q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q \quad q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q$$

Se observa que si  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  (único medio),  $q_1 = 0$  y  $q_2 = Q$ , con lo que el potencial y el campo tienen una única expresión en todo el espacio. También se observa que el signo de la carga  $q_1$  depende de la relación de permitividades entre los medios.

---

## Capacidad de conductores

La capacidad de un cuerpo conductor es una medida de la facilidad que tiene para acumular carga eléctrica.

**La capacidad se define como el cociente entre la carga neta acumulada en el conductor y el potencial al que se halla:**  $C = Q/\Phi$

La capacidad de algunos cuerpos de geometrías simples es:

$$\text{Esfera: } \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\text{Cilindro: } \Phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) \Rightarrow \Phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln(a) \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(a)}$$

Muchas veces se tiene más de un conductor. Como las distribuciones de carga sobre un conductor ejercen influencia sobre los otros, es necesario considerar esta influencia mutua para hallar los potenciales y campos en todo el espacio. Un caso particular de interés es el **capacitor**, que es un sistema de dos conductores cargados con  $Q$  y  $(-Q)$ . Definimos la **capacidad de un capacitor** como:  $C = Q/\Delta\Phi$  donde  $\Delta\Phi$  es la ddp entre los dos conductores.

$$\text{En general, la capacidad entre dos cuerpos cargados es: } C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}}$$

donde  $S$  es la superficie de uno cualquiera de los cuerpos que se suponen cargados con cargas iguales y de signo opuesto.

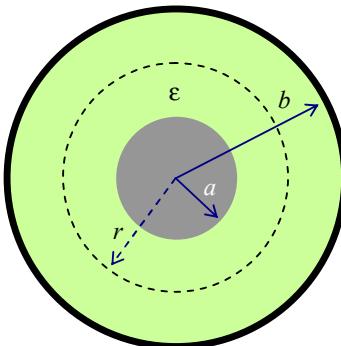
**La capacidad depende únicamente de la geometría de los conductores.**

**Ejemplo 2-21:** Capacitor plano. La configuración del **Ejemplo 2-19**, consistente de dos planos conductores cargados con  $+\sigma$  y  $-\sigma$  respectivamente, es un capacitor plano. Como se trata de distribuciones de carga no acotadas en el espacio, vamos a calcular la capacidad por área  $A$  de los planos. Como el campo es:  $E = \sigma/\epsilon$  (uniforme), las integrales que definen la capacidad son:

$$\int_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \sigma A \quad \int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \frac{\sigma d}{\epsilon} \Rightarrow C = \frac{\int_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}} = \frac{\epsilon A}{d}$$

Se observa que la capacidad es proporcional a la permittividad del dieléctrico. **Este es un resultado general.**

**Ejemplo 2-22:** Calcular la capacidad de un cable coaxial



Consideremos que el conductor interior, de radio  $a$ , se halla cargado con una densidad lineal uniforme  $\lambda$  y el conductor exterior, de radio  $b$ , se halla cargado con  $-\lambda$ . Entre ambos conductores hay un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ .

Para calcular el campo, dada la simetría cilíndrica del problema, podemos tomar superficies gaussianas cilíndricas coaxiales con el cable de longitud  $l$ . Para un radio  $\rho$  intermedio:

$$\int_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \lambda l \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda \hat{\rho}}{2\pi\epsilon\rho}$$

Para aplicar la definición de capacidad debemos calcular la circulación del campo entre ambos conductores:

$$\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{\lambda \hat{\rho} \bullet d\mathbf{r}}{2\pi\epsilon\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Luego:

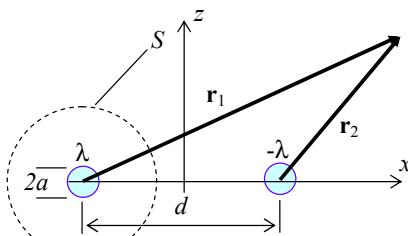
$$C = \frac{\oint_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_l \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$$

La **capacidad por unidad de longitud** del cable coaxil es entonces:

$$\boxed{\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}}$$

### Ejemplo 2-23: Calcular la capacidad de un cable bifilar.

Esta es una configuración de dos hilos conductores rectos y paralelos. Si suponemos que el radio de los cables es mucho menor que su separación, podemos despreciar la influencia mutua entre los conductores y considerar que la distribución de carga en ellos es uniforme. El campo creado por los dos conductores es el mismo del **Ejemplo 2-16**:



mutua entre los conductores y considerar que la distribución de carga en ellos es uniforme. El campo creado por los dos conductores es el mismo del **Ejemplo 2-16**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right)$$

El flujo a través de la superficie cilíndrica  $S$  cualquiera que rodea al alambre izquierdo es  $\lambda L$ . La circulación del campo es más sencilla sobre la recta que une ambos conductores. Tomando el sistema de coordenadas de la figura tenemos:

$$\Delta\Phi = \int_{-d/2+a}^{d/2-a} E_x dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{-d/2+a}^{d/2-a} \left( \frac{1}{x+d/2} - \frac{1}{x-d/2} \right) dx = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon} \int_{-d/2+a}^{d/2-a} \frac{dx}{x-d^2/4} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

y finalmente:

$$C = \frac{\lambda l}{\Delta\Phi} \frac{\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln(d/a)} \Rightarrow \boxed{\frac{C}{l} \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)}}$$

donde hemos simplificado porque  $d \gg a$ .

### Coeficientes de potencial y de capacidad.

Cuando existe un conjunto de conductores cargados a distancias no muy grandes entre sí, la distribución de carga y el potencial de cada uno depende de todos los otros debido a la redistribución de carga producida por la inducción electrostática. No es posible entonces usar la superposición de los potenciales creados por cada conductor individual sino que para analizar esta situación se deben utilizar los llamados **coeficientes de potencial**, que vamos a introducir.

Sean  $N$  conductores,  $i = 1, 2, \dots, N$ . El potencial electrostático que crean en un punto cualquiera del espacio es:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_i} dS' \quad \text{donde} \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_i$$

En particular, el potencial del conductor  $j$ -ésimo del conjunto será:

$$\Phi_j = \Phi(\mathbf{r}_j) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_{ij}} dS'$$

Supongamos inicialmente que todos los conductores están descargados, salvo el  $i$ -ésimo. Entonces:

$$\Phi_j^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{r}')}{R_{ij}} dS' \quad \text{es el potencial del conductor } j\text{-ésimo debido}$$

**únicamente** a la carga en el  $i$ -ésimo conductor.

Si modificamos ahora la carga de este conductor  $Q_j \rightarrow \lambda Q_j$  ( $\sigma_i \rightarrow \lambda \sigma_i$ ) se observa de la correspondiente ecuación que  $\Phi_j^{(i)} \rightarrow \lambda \Phi_j^{(i)}$ , es decir, hay una relación lineal entre la carga y el potencial que esa carga crea. Podemos escribir entonces:  $\Phi_j^{(i)} = P_{ij} Q_i$  donde  $P_{ij}$  es un factor de pro-

ductividad que depende de las dimensiones y posiciones de los conductores.

porcionalidad que depende de la geometría de la disposición de los dos conductores.

Si ahora damos carga a los otros conductores, podemos calcular el potencial del  $j$ -ésimo por superposición:

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i$$

Los coeficientes  $\{P_{ij}\}$  de esta suma son los llamados **coeficientes de potencial** del conjunto de conductores.

Este es un sistema de ecuaciones lineales que puede expresarse en forma matricial:

$\Phi = [P] Q$  donde  $\Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_N]^T$  y  $Q = [Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_N]^T$  son los vectores de potenciales y cargas sobre los conductores y  $[P]$  es la matriz de los coeficientes  $P_{ij}$ .

**Los coeficientes de potencial satisfacen varias propiedades:**

1.  $P_{ij} > 0$  (todos los coeficientes son positivos)
2.  $P_{ij} = P_{ji}$  (la matriz  $P$  es simétrica);
3.  $P_{ii} > P_{ij}$  (la matriz  $P$  es diagonal-dominante);

Estas propiedades se demuestran en el **Apéndice 3**.

La ecuación matricial  $\Phi = [P]Q$  puede invertirse para expresar las cargas de los conductores en función de sus potenciales:

$$Q = [P]^{-1} \Phi = [C] \Phi$$

donde los coeficientes diagonales  $C_{ii}$  de la matriz  $[C]$  se conocen como **coeficientes de capacidad** y los no diagonales  $C_{ij}$  ( $i \neq j$ ) **coeficientes de inducción**. Todos estos coeficientes tienen dimensiones de capacidad.

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j$$

**Los coeficientes de capacidad tienen propiedades que se deducen de las de los coeficientes de potencial:**

1.  $C_{ii} > 0$  (los coeficientes de capacidad son positivos);
2.  $C_{ii} \leq 0$  (los coeficientes de inducción son no positivos);
3.  $C_{ij} = C_{ji}$  (la matriz  $C$  es simétrica).

En términos de los coeficientes de capacidad y/o potencial, la capacidad entre dos conductores puede hallarse a partir de las ecuaciones lineales con  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = -Q$ :

$$\Phi_1 = P_{11} Q_1 + P_{12} Q_2 = (P_{11} - P_{12}) Q$$

$$\Phi_2 = P_{21} Q_1 + P_{22} Q_2 = (P_{21} - P_{22}) Q$$

de donde:  $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = (P_{11} - P_{12} - P_{21} + P_{22}) Q = Q / C$

y finalmente:  $C = (P_{11} - 2P_{12} + P_{22})^{-1}$

Como:  $[P] = [C]^{-1}$

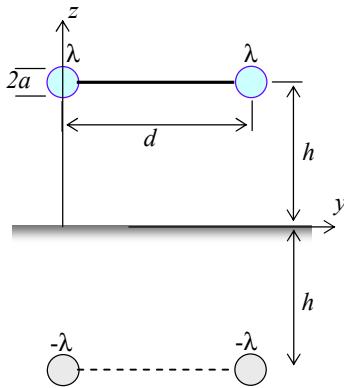
$$P_{11} = \frac{C_{22}}{\Delta} \quad P_{12} = -\frac{C_{12}}{\Delta} \quad P_{22} = \frac{C_{11}}{\Delta} \quad \text{con} \quad \Delta = C_{11} C_{22} - C_{12}^2$$

$$\text{y se tiene: } C = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

Los coeficientes de capacidad se utilizan para determinar la capacidad de cada par en sistemas de múltiples conductores y para hallar capacidades parásitas.

**Ejemplo 2-24:** Determinar el potencial creado por dos líneas horizontales de radio  $a$ , paralelas y conectadas entre sí que se encuentran a una altura  $h$  sobre tierra y separadas en  $d$ .

Cada línea tendrá una imagen especular respecto del plano de tierra. Como la distancia  $d$  entre conductores puede ser pequeña y dar lugar a redistribución de carga, debemos aplicar la noción de coeficientes de potencial. Para calcularlos cargamos sucesivamente cada línea por separado. Si cargamos solamente la primera línea (la de la izquierda), el potencial que crea es, a partir del resultado del **Ejemplo 2-16**:



$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \quad \text{con} \quad r_{11,12} = \sqrt{y^2 + (z \mp h)^2}$$

donde hemos tomado  $s \approx h$  (ya que  $h \gg a$ ) y el origen de coordenadas sobre el plano de tierra justo bajo la línea. El potencial sobre la línea  $y = 0, z = h - a$  es:

$$\Phi_{11} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h-a}{a}\right) \approx \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right) \Rightarrow P_{11} = \frac{\Phi_{11}}{\lambda_1} \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right)$$

El potencial sobre la otra línea  $y = d, z = h - a$  es:

$$\Phi_{21} = \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + (2h-a)^2}{d^2 + a^2}\right) \approx \frac{\lambda_1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right) \quad \text{de donde:} \quad P_{21} = \frac{\Phi_{21}}{\lambda_1} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right)$$

Análogamente:  $P_{22} = P_{11}$  y además  $P_{12} = P_{21}$ .

Con esto podemos escribir el sistema lineal:

$$\begin{cases} \Phi_1 = P_{11}\lambda_1 + P_{12}\lambda_2 \\ \Phi_2 = P_{21}\lambda_1 + P_{22}\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{P_{22}\Phi_1 - P_{12}\Phi_2}{\Delta} \\ \lambda_2 = \frac{-P_{21}\Phi_1 + P_{11}\Phi_2}{\Delta} \end{cases} \quad \text{con} \quad \Delta = P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}$$

y entonces, como  $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ :

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{P_{11} - P_{12}}{P_{11}^2 - P_{12}^2} \Phi = \frac{\Phi}{P_{11} + P_{12}} \approx \frac{\Phi}{\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h}{a}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{d^2 + 4h^2}{d^2}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 \Phi}{\ln\left(\frac{4h^2(d^2 + 4h^2)}{a^2 d^2}\right)}$$

Realizamos el cálculo para la línea del **Ejemplo 2-16** ( $\Phi_0 = 512 \text{ kV}$ ,  $h = 12 \text{ m}$ ) y tomamos  $d = 20 \text{ cm}$ , con lo que se obtiene  $\lambda \approx 2.6 \mu\text{C}/\text{m}$ , valor que podemos comparar con la densidad de carga con un solo conductor, hallada en el **Ejemplo 2-16**:  $\lambda_0 \approx 4.61 \mu\text{C}/\text{m}$ . **Vemos que la densidad de carga se ha reducido en más del 40%**. Esto lleva a un menor valor de campo sobre la superficie de los conductores. El campo creado por los dos conductores es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r}_{11}}{r_{11}^2} - \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^2} + \frac{\mathbf{r}_{22}}{r_{22}^2} - \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^2} \right) \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{11,12} = y\hat{\mathbf{y}} + (z \mp h)\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{r}_{22,21} = (y-d)\hat{\mathbf{y}} + (z \mp h)\hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

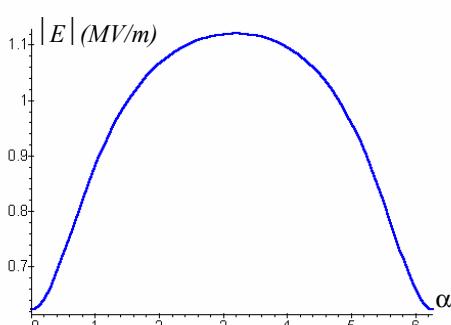
El primer subíndice indica el par línea-imagen (1 = izquierda, 2 = derecha) y el segundo el conductor dentro del par (1 = línea real, 2 = línea imagen). Sobre la superficie del conductor de la izquierda, por ejemplo:  $y = a \cos \alpha$   $z = h + a \sin \alpha$ .

Ploteamos el módulo del campo. Se observa que el máximo se da para  $\alpha = \pi$ , y el cálculo da el valor máximo:  $|E|_{max} \approx 1.12 \times 10^6 \text{ V/m}$

que debemos comparar con el obtenido para un único conductor (**Ejemplo 2-16**):

$$|E|_{max} \approx 1.67 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Disminuye aún más el campo máximo superficial si se conectan más conductores. Es común tener tres o cuatro en línea horizontal o en forma de cuadro, como en la foto del **Ejemplo 2-17**.

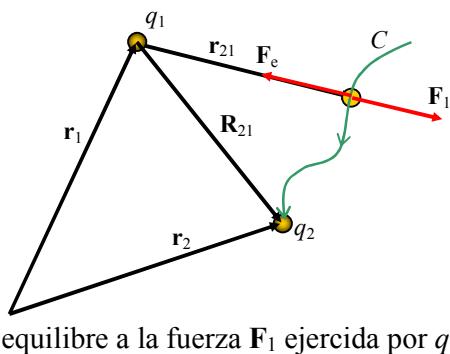


## Energía electrostática

Si colocamos una carga de prueba en una región del espacio donde exista campo eléctrico, aparece sobre ella una fuerza que hará que adquiera una aceleración, lo que implica el incremento de la energía cinética de la carga. Si extrapolamos la **conservación de la energía mecánica** a interacciones no mecánicas como las eléctricas, es necesario que la energía que recibió la carga haya sido cedida por otro sistema físico. En la situación que estamos describiendo el otro sistema físico existente es el conjunto de cargas que crea el campo eléctrico o el campo mismo.

Se puede analizar el campo eléctrico desde el punto de vista energético considerando que, debido a las fuerzas de repulsión entre cargas de igual signo, es necesario realizar un trabajo exterior para "construir" un sistema físico formado por un conjunto de cargas separadas por distancias finitas. Este trabajo realizado sobre el sistema "permanece" en él como energía potencial. Si se deja libradas a sí mismas a las cargas del sistema, se alejarán unas de otras adquiriendo energía cinética hasta separarse indefinidamente. Toda la energía potencial del sistema se ha convertido entonces en energía de movimiento.

El trabajo necesario para crear un sistema de cargas se calcula trayendo una a una desde el infinito hasta su posición final en forma "cuasi-estática", es decir, a velocidad constante. Consideremos un sistema de  $N$  cargas puntuales  $q_i$  situadas en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ . Originalmente consideramos a las cargas situadas en el infinito y separadas entre sí distancias infinitas. No hay entonces interacciones eléctricas mensurables entre las cargas. Este es el estado de energía nula. Construimos ahora el sistema trayendo a las cargas una a una desde el infinito a su posición final.



Primero traemos la carga  $q_1$ . Como las otras cargas están infinitamente alejadas, no ejercen fuerzas de interacción sobre  $q_1$  y no se requiere trabajo alguno para llevarla a su posición final:  $q_1 : \infty \rightarrow \mathbf{r}_1 \Rightarrow L_1 = 0$

Ahora traemos a  $q_2$  desde el infinito hasta su posición final  $\mathbf{r}_2$  a lo largo de la curva  $C$ . Como ahora aparece sobre  $q_2$  la fuerza ejercida por  $q_1$ , para que el traslado sea "cuasi-estático" (a velocidad constante), debemos agregar punto a punto de la trayectoria una fuerza exterior  $\mathbf{F}_e$  que equilibre a la fuerza  $\mathbf{F}_1$  ejercida por  $q_1$ . Por lo tanto realizamos un trabajo:

$$L_2 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_e \bullet d\mathbf{r}_2 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_1 \bullet d\mathbf{r}_2 = -q_2 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}_1 \bullet d\mathbf{r}_2 = -q_2 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \right] \bullet d\mathbf{r}_2 = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \bullet d\mathbf{r}_2$$

donde  $\mathbf{r}_{21}$  es el vector distancia entre una posición intermedia cualquiera sobre  $C$  de  $q_2$  y la posición de  $q_1$ .

Pero:  $\int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \bullet d\mathbf{r}_2 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \nabla \left( \frac{1}{r_{21}} \right) \bullet d\mathbf{r}_2 = -\frac{1}{R_{21}} = -\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$

en función de las posiciones finales de las cargas. Entonces:

$$L_2 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_e \bullet d\mathbf{r}_2 = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \bullet d\mathbf{r}_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{21}}$$

Cuando traemos la tercera carga  $q_3$  debemos realizar trabajo en contra de las fuerzas eléctricas ejercidas por  $q_1$  y  $q_2$ :

$$L_3 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \mathbf{F}_e \bullet d\mathbf{r}_3 = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \bullet d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \bullet d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \right] \bullet d\mathbf{r}_3$$

y finalmente:  $L_3 = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \mathbf{F}_e \bullet d\mathbf{r}_3 = -q_3 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_3} \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \right] \bullet d\mathbf{r}_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{31}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{32}}$

En general, cuando traemos la carga  $i$ -ésima, debemos realizar trabajo en contra de las fuerzas

eléctricas ejercidas por las (i-1) cargas anteriores:

$$L_i = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_i} \mathbf{F}_e \bullet d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

Una vez construido el sistema, su energía es la suma de todos los trabajos parciales realizados en la operación de construcción:

$$U = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

Esta doble sumatoria puede reescribirse notando que los elementos  $u_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$  cumplen que

$j < i$ . Así, por ejemplo, tenemos  $u_{31}$  pero no tenemos  $u_{13}$ . Sin embargo, si existiera, se ve que sería  $u_{13} = u_{31}$ . Entonces podemos escribir la segunda sumatoria entre  $j = 1$  y  $j = N$ , lo que implica tomar dos veces el elemento  $u_{ij}$ , por lo que debemos dividir por dos, con lo que queda:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}}$$

donde se ha cuidado de no tomar el elemento  $u_{ii}$ , que no existe. Operando:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

donde  $\Phi_i$  es el potencial electrostático en el punto  $\mathbf{r}_i$  donde se halla la carga  $q_i$ .

Se puede extender esta definición a una distribución continua de carga. Para ello se "construye" la distribución trayendo desde el infinito a cada elemento de volumen (o de superficie, o de línea) la porción de carga que hay en él, o, alternativamente, aumentando paulatinamente la carga desde cero a su valor final en cada elemento en forma simultánea.

En cualquiera de ambos casos, el resultado es<sup>3</sup>:  $U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV$

donde  $\rho(\mathbf{r})$  es la densidad de carga y  $\Phi(\mathbf{r})$  el potencial en puntos del interior del cuerpo cargado (habrá expresiones equivalentes para superficies o líneas cargadas). Si tenemos un **conjunto** de  $N$  *cuerpos* cargados podemos extender la expresión de la energía por superposición:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i(\mathbf{r}) \Phi_i(\mathbf{r}) dV$$

**Cuerpos conductores:** Si los cuerpos son conductores, el campo electrostático en su interior es cero, y el potencial sobre su superficie es constante, con lo que se llega a la misma expresión que en el caso de las cargas puntuales:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

pero ahora el significado de los símbolos es diferente:

- $q_i$  es la carga acumulada en cada cuerpo conductor,
- $\Phi_i$  es el potencial de cada cuerpo conductor.

<sup>3</sup> La demostración de esta expresión puede verse en "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Edición, J.R.Reitz, F.J.Milford, R.W.Christy. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996, pág.143 y siguientes.

**Ejemplo 2-25:** Hallar la energía electrostática de una esfera de radio  $a$  cargada con carga  $Q$  distribuida uniformemente si a) es una esfera conductora (distribución superficial de carga), b) es una esfera dieléctrica de permitividad  $\epsilon$  (distribución volumétrica de carga).

a) Si la esfera es conductora, la energía almacenada es:  $U = Q\Phi/2$  donde  $Q$  es la carga almacenada y  $\Phi$  el potencial del conductor. Para una esfera conductora el campo y el potencial fuera de ella equivalen a los creados por una carga puntual en el centro de la esfera

$$\text{(ver Ejemplo 2-7. Por lo tanto: } \Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{2C}$$

donde  $C$  es la capacidad de la esfera conductora.

b) Si la esfera es dieléctrica, la carga está distribuida en todo su volumen, suponemos que uniformemente, y tenemos que (verificarlo):

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{4\pi a^3} \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{8\pi\epsilon a} \left[ \frac{2\epsilon}{\epsilon_0} + 1 - \frac{r^2}{a^2} \right] & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q r \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon a^3} \quad r \leq a \\ \Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq a \end{cases}$$

En este cálculo sólo nos interesa el potencial interior porque fuera de la esfera no hay carga y no hay contribución a la energía. Entonces:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV = \frac{Q}{8\pi a} \int_0^a \frac{3Q}{4\pi a^3} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] 4\pi r^2 dr \\ U &= \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \int_0^a \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] r^2 dr = \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \left[ \frac{a^3}{3\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5} \right) \right] \\ \text{y finalmente: } U &= \frac{3Q^2}{8\pi a^4} \left[ \frac{a^3}{3\epsilon_0} + \frac{a^3}{15\epsilon} \right] = \frac{Q^2}{8\pi a} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right] \end{aligned}$$

Se ve que la energía almacenada en la esfera dieléctrica es mayor que para la esfera conductora.

## Energía y Campo

Podemos reescribir la expresión de la energía electrostática de un conjunto de cuerpos conductores en términos del campo electrostático de una forma conceptualmente conveniente aplicando la ley de Gauss:  $\rho_i(\mathbf{r}) = \nabla \bullet \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \Rightarrow U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \vec{\nabla} \bullet \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) V_i(\mathbf{r}) dV$

Pero:  $\Phi_i \vec{\nabla} \bullet \mathbf{D}_i = \vec{\nabla} \bullet (\Phi_i \mathbf{D}_i) - \mathbf{D}_i \bullet \vec{\nabla} \Phi_i = \vec{\nabla} \bullet (\Phi_i \mathbf{D}_i) + \mathbf{D}_i \bullet \mathbf{E}_i$  y entonces:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} [\vec{\nabla} \bullet (\Phi_i \mathbf{D}_i) + \mathbf{D}_i \bullet \mathbf{E}_i] dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \int_{V_i} \vec{\nabla} \bullet (\Phi_i \mathbf{D}_i) dV + \int_{V_i} \mathbf{D}_i \bullet \mathbf{E}_i dV \right)$$

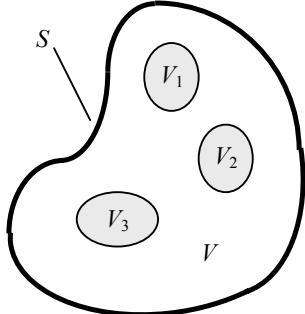
La primera integral se puede transformar mediante el teorema de la divergencia. Queda:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \int_{S_i} \Phi_i(\mathbf{r}) \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_i} \mathbf{D}_i(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) dV \right)$$

La primera integral ahora se extiende sobre la superficie de los cuerpos cargados y la segunda a sus volúmenes.

La ecuación hallada expresa la energía del sistema de cargas **sólo en función del campo**. Aún más, la ecuación original  $U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i(\mathbf{r}) \Phi_i(\mathbf{r}) dV$  se puede escribir como:

$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV$  donde  $V$  es un recinto **cualquiera** que incluye a todos los conductores (ver la figura). Estas expresiones son idénticas porque no existe densidad de carga fuera de los cuerpos cargados.



Por lo tanto podemos escribir, en forma general:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

donde  $S$  es la superficie frontera de  $V$ .

Consideraremos ahora que  $S \rightarrow \infty$ , o sea que  $V$  abarca todo el espacio. Como el potencial y el campo electrostáticos decrecen, respectivamente, como  $1/r$  y  $1/r^2$  para distancias lejanas, el integrando de la integral de superficie tiene a cero como  $1/r^3$  para  $r \rightarrow \infty$ , mientras que la superficie tiende a  $\infty$  como  $r^2$ . Por lo tanto en el límite esta primera integral se anula y tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

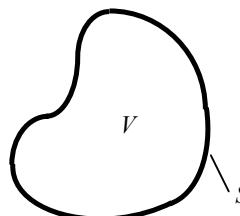
Este resultado es importante porque la energía se puede escribir como la suma de "energías" asociadas a cada elemento de volumen del espacio donde haya campo:

$$U = \int_{\text{todo el espacio}} u(\mathbf{r}) dV \quad \text{con} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$u(\mathbf{r})$  es entonces una **densidad de energía** electrostática.

**En esta visión la energía está distribuida en todo el espacio, mientras que en la ecuación original estaba concentrada en el sistema de cargas. Siguiendo entonces con el modelo local de campos que hemos introducido, vamos a asignarle al campo electrostático una energía, distribuida en todo el espacio donde exista campo, que puede intercambiarse localmente con otro sistema físico.**

Volvamos ahora a la expresión original:



$$U = \frac{1}{2} \int_S \Phi(\mathbf{r}) \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV$$

levantando la condición de  $S \rightarrow \infty$ . Sabemos ya que la integral de volumen representa la energía asociada al campo **dentro** del recinto de integración  $V$ . Como hay campo fuera de  $V$ , entonces la integral de superficie representa la energía asociada al campo **frente** de  $V$ . Es importante señalar que la influencia del campo exterior a  $V$  se puede expresar como una integral de superficie sobre la frontera de  $V$ . Este es un caso particular de una propiedad más general de los campos que veremos en diversos casos.

**Ejemplo 2-26:** Repetir los cálculos del **Ejemplo 2-25** usando campos.

- a) Esfera conductora. El campo es:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$   $r \geq a$        $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$   $r < a$  Luego:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty E^2 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

igual que antes.

- b) Esfera dieléctrica. El campo es:

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad r \geq a \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon a^3} \quad r \leq a$$

Entonces:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a E_i^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty E_e^2 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \frac{Q^2 r^2}{16\pi^2 \epsilon^2 a^6} 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^\infty \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon a^6} \int_0^a r^4 dr + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon a} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi a} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right]
 \end{aligned}$$

y nuevamente tenemos el mismo resultado.

**Ejemplo 2-27:** Calcular la energía electrostática almacenada por unidad de longitud en un cable coaxil.

Usamos el campo calculado en el **Ejemplo 2-22**:

$$\mathbf{E(r)} = \frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\epsilon\rho} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D(r)} \cdot \mathbf{E(r)} dV = \frac{\epsilon}{2} \int_{\text{todo el espacio}} E^2(\mathbf{r}) dV$$

Pero fuera del coaxil no hay campo, de modo que tenemos:

$$U = \frac{\epsilon}{2} \int_a^b \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon^2 \rho^2} 2\pi L \rho d\rho = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{y la energía almacenada por unidad de longitud es: } \boxed{U = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

## Energía y capacidad de un conductor

Un conductor cargado tiene la energía  $U = \frac{1}{2} Q \Phi$  donde  $Q$  es su carga y  $\Phi$  su potencial. Pero su capacidad es:  $C = Q/\Phi$  y se tiene:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} Q\Phi = \frac{1}{2} C\Phi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

(ver el **Ejemplo 2-25a**). Esta expresión también es válida para calcular la energía de un capacitor, siempre que el campo esté confinado a la región dentro del capacitor (es decir, que no exista campo disperso).

**Ejemplo 2-28:** Calcular la energía almacenada en:

- a) un capacitor plano de separación entre placas  $d$ ,
  - b) un cable coaxil de radios interior  $a$  y exterior  $b$ ,
  - c) un capacitor esférico de radios interior  $a$  y exterior  $b$ ,
- todos con dieléctrico de aire, a partir del campo y de la capacidad.

a) A partir del campo (ver **Ejemplo 2-19**):

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} dV = \frac{\sigma^2 V}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}$$

donde  $A$  es el área de las placas. A partir de la capacidad (ver **Ejemplo 2-21**):

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2[\epsilon_0 A/d]} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A}$$

b) A partir del campo (ver **Ejemplo 2-22**):

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_c} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_c} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 \rho^2} 2\pi L \rho d\rho = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A partir de la capacidad:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\lambda^2 L^2}{2[2\pi\epsilon L]} = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) A partir del campo:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{int}}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{\text{int}}} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0} 2\pi \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

A partir de la capacidad:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \left[ \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b} \right]} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

En estos ejemplos se calcula la energía asociada al campo confinado dentro del capacitor. En ambos casos habrá líneas de campo disperso en los bordes. Este campo tiene energía que no se considera en los cálculos precedentes. El error cometido depende fundamentalmente de la separación entre electrodos.

### Energía y coeficientes de potencial

Cuando existen diversos conductores en el sistema (no necesariamente capacitores), la energía puede asociarse a los coeficientes de potencial o los coeficientes de capacidad/inducción del sistema que fueron definidos previamente.

Como:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$  y:  $\Phi_i = \sum_{j=1}^N P_{ji} q_j$  tenemos:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ji} q_i q_j$

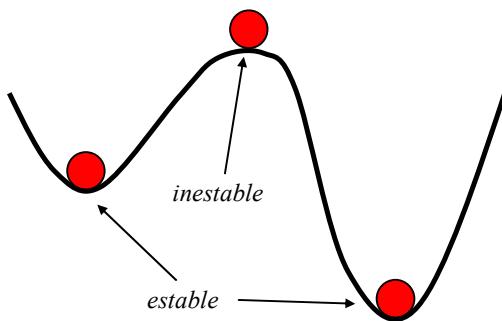
en términos de los **coeficientes de potencial** del conjunto de conductores (nótese que  $P_{ij} = P_{ji}$ ).

Como también:  $q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j$  tenemos:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j$

a partir de los **coeficientes de inducción/capacidad**.

### Energía y fuerzas

Un sistema físico lineal, librado a sí mismo, evoluciona hacia un estado de equilibrio. Este estado puede ser estable o inestable, según que el sistema vuelva o no a la posición estacionaria si sufre pequeñas desviaciones desde el extremo. Un móvil sobre la trayectoria de la izquierda, sometido únicamente a la gravedad, presenta tres puntos de equilibrio. Dos son mínimos (estables) y el tercero es un máximo (inestable).



Cuando el sistema evoluciona de un estado a otro, varía su energía, de manera que, por el principio de conservación, es necesario que se ejerza un trabajo sobre él.

Consideremos un desplazamiento elemental  $d\mathbf{r}$  en un sistema físico conservativo. Habrá en general un cambio de energía  $dU$ , asociado al trabajo de una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada al sistema:  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ .

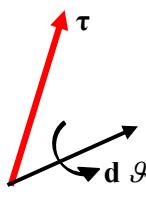
El signo menos indica que, si el trabajo de la fuerza es positivo, la energía del sistema disminuye, como se observa en la trayectoria de la figura con el trabajo de la fuerza peso, por ejemplo, al apartar al móvil desde su posición inestable. Supongamos que el desplazamiento está definido por la dirección del espacio  $\hat{\zeta}$ :  $d\mathbf{r} = d\zeta \hat{\zeta}$

Entonces:  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_\zeta d\zeta$  donde  $F_\zeta$  es la proyección de la fuerza  $\mathbf{F}$  sobre la dirección

$\zeta$ , y podemos escribir:  $F_\zeta = -\frac{dU}{d\zeta}$

Esta es la expresión de proyección de la fuerza que actúa sobre un sistema a lo largo de una dirección dada, en función de su variación de energía. Podemos ver que esta es una expresión general, siempre que el sistema sea conservativo (de otra manera, la expresión debería depender del camino).

Existen situaciones donde condiciones de vínculo sólo permiten giros alrededor de ejes. En tales casos existe una cupla de movimiento de modo que:



$$dU = -\tau \cdot d\theta$$

donde  $\tau$  es el vector cupla y  $d\theta$  el vector de rotación, como se indica en la figura. Si se expresa a estos vectores en términos de sus componentes, tenemos:

$$\tau_i = -\frac{\partial U}{\partial \theta_i}$$

En el caso de un sistema de cuerpos conductores cargados, su energía depende de la distribución de carga y los potenciales de los cuerpos y además se trata de un sistema conservativo. Un desplazamiento (o desplazamientos) en las posiciones de los cuerpos modificará la energía, pero se dan dos situaciones diferentes:

- Se mantiene la carga total del sistema (sistema aislado)
- Se mantienen los potenciales de los cuerpos (en este caso los cuerpos deben estar conectados a baterías externas, que proveen los cambios de energía).

En el primer caso las ecuaciones halladas son aplicables directamente:

$$F_\zeta = -\left(\frac{dU}{d\zeta}\right)_Q \quad \tau_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_i}\right)_Q$$

donde el subíndice  $Q$  indica un sistema aislado (que evoluciona a carga constante).

En el segundo caso hay un intercambio de energía con las baterías que mantienen constantes los potenciales. El trabajo realizado por las fuerzas debe ser igual a la variación de energía electrostática menos la energía cedida por las baterías. Un cálculo sencillo<sup>4</sup> lleva a:

$$F_\zeta = \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)_\Phi \quad \tau_i = \left(\frac{dU}{d\theta_i}\right)_\Phi$$

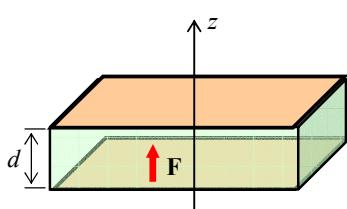
Veamos unos ejemplos de aplicación de estos resultados.

**Ejemplo 2-29:** Calcular la fuerza entre las placas de un capacitor plano, de área  $A$ , separadas en una distancia  $d$  y a una ddp  $V$ , cuando el dieléctrico es un material de permitividad  $\epsilon$ . Realizar el cálculo: a) a  $Q$  constante, y b) a  $V$  constante.

a) La energía almacenada en el capacitor es:  $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon A}$

La fuerza entre las placas tiene solamente componente  $z$ , y vale:  $F_z = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A}$  a  $Q$

constante. El signo negativo indica que las placas tienden a juntarse (la energía disminuye al acercar las placas a  $Q$  constante). Desde otro punto de vista, esta fuerza surge debido a la atracción coulombiana entre las cargas de las placas y se podría calcular en forma directa. El método de cálculo a partir de la energía permite obviar el conocimiento de la distribución detallada de carga en los electrodos.



b) A  $V$  constante:  $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon A V^2}{2d}$  y entonces tenemos:

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{\epsilon A V^2}{2d^2}$$

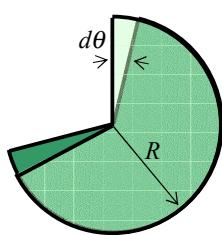
<sup>4</sup> La demostración de estas expresiones puede verse en "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Ed., J.R.Reitz, F.J.Milford, R.W.Christy. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1996, pág.135 y siguientes.

$$\text{a } V \text{ constante. Como } V = Q/C, \text{ tenemos: } F_z = -\frac{\epsilon A Q^2}{2d^2 C^2} = -\frac{\epsilon A Q^2}{2d^2} \frac{d^2}{\epsilon^2 A^2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon A}$$

que es el mismo resultado que en el caso anterior. Podemos entender este comportamiento considerando que, desde el punto de vista coulombiano la fuerza entre las cargas acumuladas en las placas es independiente de que el capacitor esté o no conectado a una fuente externa, sino solamente de la distribución de carga y de la separación entre placas. En el esquema de cálculo a través de la energía el cambio de energía en el campo debido al movimiento infinitesimal (movimiento virtual) de las placas del capacitor no depende de las condiciones externas.

**Ejemplo 2-30:** Calcular la cupla entre las placas de un capacitor cuyas placas son sectores circulares de radio  $R$  y ángulo  $\theta_0$  separadas en una distancia  $d$  y que pueden girar alrededor de su centro. El capacitor está conectado a una ddp  $V$ , y el dieléctrico es un material de permitividad  $\epsilon$ . Realizar el cálculo: a) a  $Q$  constante, y b) a  $V$  constante.

Despreciando los efectos de borde, podemos considerar a este capacitor como un capacitor plano, de donde la capacidad es:



$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{\theta}{\theta_0} \quad \text{con } \theta \leq \theta_0 .$$

Frente a un giro virtual  $d\theta$  el ángulo en que se enfrentan las placas es  $\theta - 2d\theta$ , como se ve en la figura, y entonces:

$$dC = -2 \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{d\theta}{\theta_0} = -2 \left( \frac{\epsilon}{d} \pi R^2 \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \right) \frac{d\theta}{\theta} = -2C \frac{d\theta}{\theta}$$

$$\text{a) A } Q \text{ constante tenemos: } \tau = -\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C^2} dC = -\frac{Q^2}{2C^2} 2C \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{Q^2}{C\theta} d\theta$$

$$\text{b) A } V \text{ constante: } \tau = \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{CV^2}{2} = \frac{V^2}{2} dC = -\frac{V^2}{2} 2C \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{CV^2}{\theta} d\theta = -\frac{Q^2}{C\theta} d\theta$$

y nuevamente ambos resultados coinciden como en el ejemplo previo.

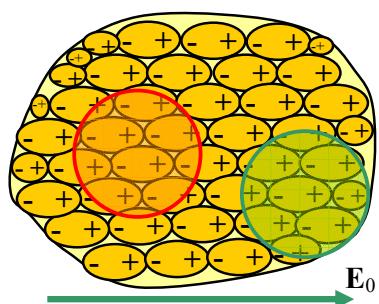
En general, las fuerzas que se desarrollan en un sistema electrostático deben derivarse de consideraciones termodinámicas generales que son bastante complejas en casos más complicados que sistemas formados únicamente por conductores.

## RESUMEN

- Se presentó el **modelo de dipolo** de cuerpos extensos **dieléctricos** y una breve introducción al fenómeno de ruptura dieléctrica en materiales gaseosos, líquidos y sólidos de interés tecnológico. El modelo de dipolo lleva a expresiones para el potencial y el campo **inducidos**:

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dV' \quad \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_i(\mathbf{r})$$

- En un punto cualquiera del espacio el potencial (o el campo) será la superposición del potencial original (el campo original) y el potencial inducido (el campo inducido).



- El modelo introduce las **cargas equivalentes de polarización**, que refleja la redistribución de carga ligada que se produce dentro del dieléctrico por el proceso de polarización:

$$\sigma_P(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}} \quad \rho_P(\mathbf{r}') = -\nabla' \bullet \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

- Los distintos tipos de fuentes (cargas reales o libres y cargas de polarización o ligadas) aportan al campo eléctrico. Sin embargo, es posible definir un nuevo campo vectorial, llamado **campo de desplazamiento** siguiendo a Maxwell, que sólo está ligado a las cargas reales o cargas libres:

$$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho_l(\mathbf{r}) \quad \oint_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = Q_l \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

- En **dieléctricos lineales** el campo de polarización es proporcional al campo eléctrico punto a punto. Esta relación define la **permitividad** del dieléctrico:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

- Se presentaron las **condiciones de frontera** que cumple el campo electrostático sobre la interfase entre dos medios de propiedades diferentes:

$$\oint_S \mathbf{D} \bullet \hat{\mathbf{n}} = Q_l \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \sigma_l \quad \oint_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

- La noción de **capacidad** cuantifica la posibilidad de acumular carga eléctrica de un conductor:

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\oint_S \epsilon \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS}{\int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}}$$

- Cuando hay más de dos cuerpos es conveniente introducir los **coeficientes de potencial o de capacidad**, que ligan en forma de un sistema lineal cargas y potenciales en los diferentes cuerpos del sistema:

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} Q_i \quad Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \Phi_j$$

- La noción de trabajo sobre una carga en movimiento lleva a la noción de **energía de un conjunto de cuerpos cargados**, y por extensión, al concepto clave de la **energía del campo electrostático**.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV$$

- La energía electrostática se puede asociar a la capacidad o a los coeficientes de potencial/capacidad en el caso de un conjunto de conductores:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ij} q_i q_j \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N C_{ij} \Phi_i \Phi_j$$

tencial/capacidad en el caso de un conjunto de conductores:

### APENDICE 3 - Propiedades de los coeficientes de potencial

Para demostrar las propiedades de los coeficientes de potencial partimos de la expresión de la energía de un sistema de conductores:  $U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ij} q_i q_j$

#### 1) Simetría de la matriz

Si producimos un cambio en las cargas de los conductores habrá una variación de la energía del sistema:  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_N) \Rightarrow dU = \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k$

Pero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{i=1}^N P_{ij} q_i q_j \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N q_i \left( \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{j=1}^N P_{ij} q_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_{kj} q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N P_{ik} q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{ik} + P_{ki}) q_i \end{aligned}$$

y entonces:  $dU = \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{ik} + P_{ki}) q_i dq_k$

Supongamos ahora que todos los conductores, salvo uno (digamos, el  $n$ -ésimo) estaban descargados y mantienen esta condición:

$$dq_n \neq 0 \quad \text{y} \quad dq_i = 0 \quad \forall i \neq n$$

Entonces, de la expresión hallada:  $dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{in} + P_{ni}) q_i dq_n$

Desde otro punto de vista, la energía cuando sólo el conductor  $n$ -ésimo está cargado es:

$$U = \Phi_n q_n \Rightarrow dU = \Phi_n dq_n = \sum_{i=1}^N p_{ni} q_i dq_n$$

e igualando ambas expresiones de  $dU$  se tiene:

$$\sum_{i=1}^N P_{ni} q_i dq_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (P_{in} + P_{ni}) q_i dq_n \Rightarrow P_{ni} = \frac{1}{2} (P_{in} + P_{ni}) \Rightarrow P_{ni} = P_{in}$$

## 2) Elementos diagonales positivos

La expresión de la energía:  $U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^N P_{ij} q_i q_j$  es una forma definida positiva. La energía

debe ser una cantidad positiva. Supongamos que sólo dejamos un conductor, digamos, el  $n$ -ésimo del conjunto:  $U = \frac{1}{2} p_{nn} q_n^2 \Rightarrow p_{nn} > 0$

Como esta conclusión no depende del valor de  $n$ , se deduce que todos los elementos diagonales son positivos:  $p_{nn} > 0 \quad \forall n$

## 3) Diagonal principal dominante

Consideremos ahora que tenemos sólo dos conductores, el  $n$ -ésimo y el  $m$ -ésimo del conjunto:  $U = \frac{1}{2} [p_{nn} q_n^2 + p_{mm} q_m^2 + 2 p_{nm} q_n q_m]$

Supongamos que las cargas de los conductores son iguales y de signo opuesto:

$$q_n = -q_m = Q \Rightarrow U = \frac{1}{2} [2 p_{nn} Q^2 - 2 p_{nm} Q^2] = [p_{nn} - p_{nm}] Q^2 > 0 \Rightarrow p_{nn} > p_{nm}$$

de donde se ve que la matriz de coeficientes de potencial es diagonal dominante.

De las propiedades de los coeficientes de potencial se deducen las propiedades de los coeficientes de capacidad/inducción, que constituyen la matriz inversa.

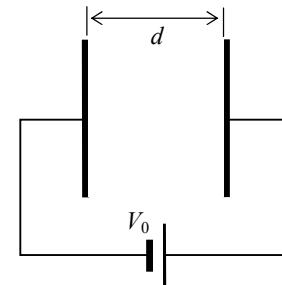
## PROBLEMAS

- 2.8) Hallar el campo de una línea bifilar cuando el sistema se coloca a una altura  $H$  de tierra, considerada plana y perfectamente conductora.
- 2.9) Para un capacitor de placas paralelas de área  $A$  y separadas por una distancia  $d$ , hallar  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  en las siguientes situaciones: a) voltaje constante  $V$  con y sin dieléctrico, y b) carga constante  $Q$  con y sin dieléctrico.
- 2.10) Calcule la capacidad de:
  - a) Dos esferas conductoras concéntricas de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ )
  - b) Dos láminas planas conductoras de área  $A$  separadas por una distancia  $d$
  - c) Dos conductores cilíndricos concéntricos de radios  $a$  y  $b$  ( $b > a$ )
  - d) Dos conductores cilíndricos paralelos de radio  $R$  y con sus ejes separados por una distancia  $D$ .
- 2.11) Cuando se usa un cable coaxil para transmitir energía eléctrica, el radio del conductor interior está determinado por la corriente de carga, y el tamaño total por el voltaje y el tipo de material aislante que se utilice. Suponga que el radio del conductor interno es  $r_i = 2 \text{ mm}$  y que el material aislante es poliestireno. a) Determine el radio exterior  $r_o$  del conductor exterior para que el cable funcione con especificación de voltaje máximo de  $10 \text{ KV}$ . Para evitar la ruptura debido a los picos de voltaje ocasionados por relámpagos y otras condiciones anómalas externas, la intensidad máxima de campo eléctrico en el material aislante no debe exceder el 25% de su rigidez dieléctrica. b) ¿Qué sucede si, bajo idénticas condiciones de operación, se reemplaza el poliestireno por aire? ¿Qué conclusión se puede extraer? Nota:

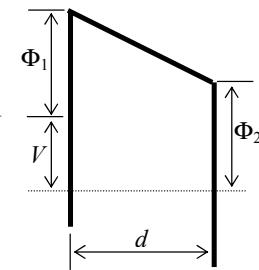
para el poliestireno la constante dieléctrica relativa es de 2.6 y la rigidez dieléctrica es de  $20 \times 10^6 \text{ V/m}$ , y para el aire valen respectivamente 1 y  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .

[Respuesta: a) 5.4 mm, b) 1.5 kV]

- 2.12) Un tubo diodo se puede aproximar por un par de electrodos metálicos planos y paralelos separados por una distancia  $d$ . Los electrones son emitidos por un cátodo caliente, originándose una distribución de carga espacial entre las placas. Se puede demostrar que el potencial en esa región está dado por:  $V(x) = V_0(x/d)^{4/3}$   
Calcular el campo eléctrico, la distribución de carga espacial, la carga total entre los electrodos y la energía almacenada por unidad de área. ¿Cuál es la fuerza entre placas?



- 2.13) El óxido de puerta en una estructura MOS (Metal-Oxido-Semiconductor) puede, bajo ciertas condiciones de inyección, atrapar carga eléctrica. Un modelo sencillo del diagrama energético de una estructura MOS polarizada se muestra en la figura, donde  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  y  $V$  son la altura de la barrera catódica, la altura de la barrera anódica y la tensión aplicada entre los electrodos, respectivamente. Considere una distribución de carga atrapada constante  $\rho$  dentro del aislante de espesor  $d$ . Halle, a partir de la ecuación de Poisson, el potencial eléctrico dentro del aislante y el campo eléctrico catódico.



- 2.14) La densidad de carga en la zona desierta de una juntura pn en la que las impurezas donantes y aceptoras han sido difundidas térmicamente, se puede representar matemáticamente

según:

$$\rho = \begin{cases} e a x & -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{afuera} \end{cases}$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $a$  es un parámetro de la distribución,  $W$  el ancho de la zona desierta (que es una función del voltaje aplicado a la estructura) y  $x$  la posición. Determine el campo eléctrico y el potencial en la zona desierta de la estructura.

- 2.15) Determinar los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{P}$  que produce una carga puntual  $q$  centrada en una esfera dieléctrica de radio  $R$  y permitividad  $\epsilon$ . La esfera está rodeada por el espacio libre. Calcule las cargas equivalentes de polarización.

- 2.16) Un condensador cilíndrico con radios  $r_1 < r_2$  se sumerge perpendicularmente en un líquido dieléctrico de densidad  $\delta$  y permitividad  $\epsilon$ . El extremo inferior está sumergido y el superior emerge en el aire. Verifique que la altura  $h$  a la que se eleva el líquido cuando se aplica un

voltaje  $V$  entre las placas es: 
$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)V^2}{g\delta(r_2^2 - r_1^2)\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

- 2.17) Hallar las cargas de polarización, el campo eléctrico y el desplazamiento en el eje de un cilindro dieléctrico de radio  $a$  y altura  $2L$  orientado según el eje  $z$  con una polarización  $\mathbf{P} = (P_0 z / L)\hat{z}$ .

- 2.18) Hallar el campo eléctrico en todo punto del espacio creado por una esfera dieléctrica de radio  $R$  con una polarización  $\mathbf{P} = (P_0 r / R)\hat{r}$

## 3 - Campos Cuasi-Estáticos 2

### Corrientes Estacionarias y Campo Magnetostático.

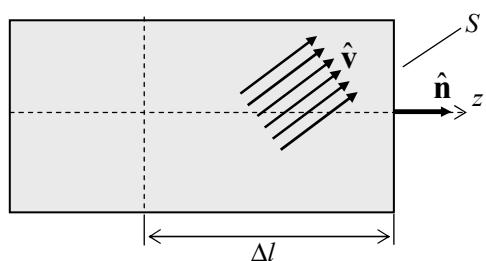
#### Corriente eléctrica

Los conductores se caracterizan por poseer carga libre. En una situación **electrostática** no puede haber movimiento de cargas y los portadores se distribuyen en la superficie del cuerpo para anular el campo en el interior. Sin embargo conocemos por experiencia que la imposición de un campo eléctrico a un cuerpo conductor puede establecer una **corriente eléctrica**, es decir, un **movimiento ordenado de los portadores de carga**. Este fenómeno **ya no es electrostático** y entonces existe campo en el interior de los conductores cuando circula una corriente.

- **Llamamos corriente eléctrica a un movimiento colectivo ordenado de portadores de carga en un conductor.**
- **Existe campo eléctrico dentro del conductor cuando existe una corriente**

En presencia de un campo eléctrico los portadores de carga se aceleran, pero sólo pueden viajar un corto trecho hasta que experimentan una "**colisión**" con la red cristalina u otros iones. En esta colisión hay una transferencia de energía desde el portador de carga móvil, que se ve frenado, al conjunto del cuerpo material. El portador de carga se vuelve a acelerar por acción del campo y se vuelve a frenar. Esta situación continúa a lo largo del tiempo y se refleja en que el conjunto de portadores de carga viaja por el conductor a una **velocidad media  $v$** . En ausencia de campo los portadores de carga se mueven por su energía térmica (sólo a  $0K$  – valor inalcanzable - una partícula estaría en reposo), pero sus movimientos son al azar y el conjunto tiene una velocidad promedio nula. Sin embargo, estos movimientos al azar generan **fluctuaciones de corriente** de muy bajo valor, pero que son importantes en aplicaciones electrónicas donde se manejan intensidades de corriente bajas.

Consideremos un conductor donde existe una corriente eléctrica. Los portadores de carga se mueven con una velocidad media  $v$ . Deseamos calcular la cantidad de carga que atraviesa una sección del conductor por unidad de tiempo.



La cantidad de carga que atraviesa una sección  $S$  en un intervalo  $\Delta t$  es la asociada a todos los portadores que se encuentren en un intervalo  $\Delta l = \hat{v} \cdot \hat{n} \Delta t$  que son los que en ese intervalo pueden llegar a la sección. Si  $\rho$  es la densidad de portadores de carga, la cantidad de carga que atraviesa la sección elemental  $dS$  es:  $\Delta Q = \rho \Delta t \hat{v} \cdot \hat{n} dS$ .

Llamamos **corriente** a la **cantidad de carga por unidad de tiempo** que atraviesa la sección:

$$dI = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \hat{v} \cdot \hat{n} dS \quad \Rightarrow \quad I = \int_S \rho \hat{v} \cdot \hat{n} dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS$$

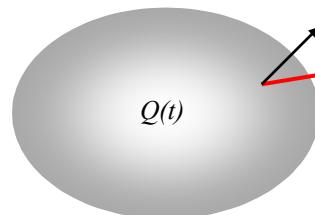
donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}$  es la llamada **densidad de corriente**. La densidad de corriente es un campo vectorial porque la magnitud corriente debe definirse por su módulo, dirección y sentido.

**La corriente que atraviesa una sección del conductor es el flujo de la densidad de corriente a través de su área.**

### Conservación de la carga. Ecuación de continuidad

El **principio de conservación de la carga eléctrica** es un principio general de la física, y estipula que la carga no se crea ni se destruye, de manera que la variación de carga dentro de un recinto cerrado implica que hay un flujo de carga (una corriente) a través de la superficie frontera.

Para hallar una expresión matemática de este principio consideremos un cuerpo conductor donde



exista una carga dependiente del tiempo  $Q(t)$ . Si la carga depende del tiempo es necesario que exista un flujo de carga (una corriente) a través de la superficie frontera  $S$ . Tenemos entonces:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

Si el recinto de integración es invariante en el tiempo, podemos introducir la derivada respecto del tiempo dentro de la integral de volumen. Además, por el teorema de la divergencia:  $\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \bullet \mathbf{j} dv$

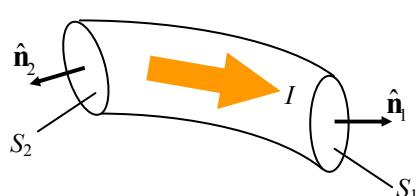
$$\text{y tenemos: } \int_V \nabla \bullet \mathbf{j} dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \Rightarrow \int_V \left( \nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Esta es la llamada **ecuación de continuidad**. Describe la conservación de la carga, y establece que las variaciones en el tiempo de la densidad de carga son las fuentes de la corriente eléctrica, considerada como campo vectorial

### Corrientes estacionarias

Cuando la densidad de carga **no depende del tiempo**, el vector densidad de corriente tampoco depende del tiempo, y la ecuación de continuidad lleva a:  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$  es decir que el vector densidad de corriente no tiene fuentes ni sumideros en el recinto en consideración. Hablamos entonces de una **corriente estacionaria o continua**:

Consideremos el caso en que tal corriente circula por un alambre conductor, que puede ser parte de un circuito. Un trozo de este alambre, entre las secciones  $S_1$  y  $S_2$  se muestra en la figura. Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de este trozo de alambre:

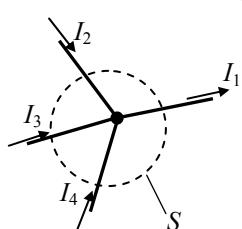


$$\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \bullet \mathbf{j} dv = \oint_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

por el teorema de la divergencia. Pero sólo hay flujo de corriente sobre las secciones extremas del alambre:

$$\oint_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} ds = \int_{S_1} \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}}_1 ds + \int_{S_2} \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}}_2 ds = I_1 - I_2 = 0$$

donde  $I_1$  e  $I_2$  son las corrientes que atraviesan la sección  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente. Se ve que en el caso de corriente estacionaria toda la corriente que entra por un extremo del alambre sale por el otro, es decir, **no hay acumulación de carga** en el trozo de material. Como las secciones elegidas son cualesquiera, se concluye que la **corriente es la misma en todas las secciones del alambre**, o sea que es constante a lo largo del circuito, y en ningún punto del conductor hay una acumulación de carga.



En un circuito eléctrico hay **nodos** donde confluyen distintas **ramas** que llevan corriente. Si las corrientes son estacionarias, el flujo de  $\mathbf{j}$  a través de una superficie cerrada  $S$  que encierra al nodo es nulo. Pero  $\mathbf{j}$  es no nula sólo en los alambres que conducen corriente, de forma que podemos escribir, en forma similar al caso anterior:  $\sum I_i = 0$  que es la **primera ley de Kirchhoff**.

En resumen:

### Corrientes estacionarias o continuas:

- La densidad de corriente y la corriente son independientes del tiempo:  
 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = j(\mathbf{r})$   
 $I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r})$
- $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$
- La corriente es independiente de la posición ( $I(r) = I_0 = cte.$ )
- Se cumple la 1ra. ley de Kirchhoff

### Caso cuasi-estacionario (o cuasi-estático)

En situaciones de interés tecnológico las corrientes varían en el tiempo pero muy lentamente. Como cualquier variación en el tiempo físicamente significativa se puede expresar como una superposición de funciones armónicas mediante una integral de Fourier, analizaremos el caso de una variación armónica pura, del tipo:  $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\rho(\mathbf{r})e^{i\omega t}\}$  donde  $\omega=2\pi f$  y  $f$  es la frecuencia en Hz de la corriente. De la ecuación de continuidad:

$$\nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{j} + \text{Re}\{i\omega\rho\} = 0$$

y se ve que si la frecuencia es baja el segundo sumando es de poca importancia. Para frecuencias bajas entonces podemos escribir  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) \approx 0$  y las corrientes son **cuasi-estacionarias**, es decir, no son estrictamente hablando corriente continua (dependen del tiempo) pero aproximadamente se comportan como tales.

**El caso cuasi-estacionario es de mucha importancia porque es el límite de las ecuaciones del electromagnetismo para bajas frecuencias, que lleva a la teoría de circuitos.**

### Ley de Ohm. Conductividad y Resistividad. Movilidad

La ecuación de continuidad establece propiedades del vector densidad de corriente que surgen de la conservación de la carga eléctrica. Pero la existencia de una corriente depende de la presencia de un campo eléctrico que produzca el movimiento de las cargas. Debe existir entonces una relación entre el campo eléctrico y la corriente. Esa relación fue hallada por **Georg Simon Ohm** (1789-1854, figura). Sus experimentos pueden resumirse en que el vector densidad de corriente es proporcional al campo aplicado:



$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{donde } \sigma \text{ es la conductividad del material}$$

Esta es la llamada forma microscópica de la **ley de Ohm**. Para muchos materiales de importancia tecnológica (para corrientes continuas y cuasi-estacionarias)  $\sigma$  es una constante que depende únicamente del material en cuestión. En la literatura técnica suele usarse con más frecuencia la **resistividad**  $\rho = 1/\sigma$ . La unidad de resistividad es *ohm/m* y la de conductividad *mho/m* = *siemens/m* siendo el ohm la unidad de resistencia eléctrica que definimos

más abajo.

Como la densidad de corriente depende de la velocidad media del conjunto de portadores (llamada también **velocidad de arrastre** en la literatura de física de sólidos), podemos vincular esta velocidad con el campo eléctrico aplicado usando la ley de Ohm:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v} = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{v} = \sigma \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})} = \mu \mathbf{E}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mu = \frac{\sigma}{\rho(\mathbf{r})}$$

donde  $\mu$  es la llamada **movilidad** de los portadores.

En la mayoría de los casos de interés, los portadores son partículas discretas, de manera que, si  $n(\mathbf{r})$  es el número de portadores por unidad de volumen y  $q$  es la carga de cada portador individual:  $\rho(\mathbf{r}) = q n(\mathbf{r}) \Rightarrow \mu = \sigma/q n(\mathbf{r})$

De esta ecuación se puede expresar la conductividad del material en función de la movilidad de sus portadores:  $\sigma = q n(\mathbf{r}) \mu$

Desde el punto de vista microscópico, se puede asociar la movilidad de los portadores de carga en un conductor con la dinámica del movimiento estadístico de los portadores. La teoría de Drude vincula a la movilidad con el **tiempo medio entre colisiones**  $\tau$  y la **masa efectiva**  $m^*$  de los portadores de carga en el material<sup>1</sup>:  $\mu = q \tau / m^*$

Por lo tanto, relacionando ambas descripciones, tenemos: 
$$\sigma = \frac{q^2 \tau}{m^*} n(\mathbf{r})$$

de donde se pueden expresar los parámetros microscópicos en función de los macroscópicos y viceversa.

De acuerdo a la facilidad con que se establece una corriente eléctrica en un material, éstos se clasifican en:

- **conductores:** existe gran cantidad de portadores de carga, lo que hace posible obtener corrientes elevadas. Ejemplos: metales, soluciones iónicas.
- **aisladores:** existen muy pocos portadores de carga. Las corrientes que se pueden establecer son prácticamente inexistentes (para campos eléctricos no demasiado intensos, que lleven a ruptura dieléctrica). Ejemplos: agua destilada, aire.
- **semiconductores:** la disponibilidad de portadores de carga es intermedia entre los casos anteriores, y depende fuertemente de la temperatura y de la existencia de impurezas (dopantes). Ejemplos: silicio, germanio, AsGa.
- **superconductores:** por debajo de cierta temperatura crítica  $T_C$ , los electrones libres de un material se juntan de a pares llevando a un gas de bosones que disminuye la resistividad del material a valores prácticamente despreciables. Ejemplos: a temperaturas de helio líquido Al ( $T_C = 1.18K$ ), In ( $T_C = 3.41K$ ), V ( $T_C = 5.4K$ ), Pb-Bi ( $T_C = 8.3K$ ), etc., y a temperaturas de nitrógeno líquido diversos compuestos cerámicos de la familia de las **perovskitas**, como  $Y_2Ba_4Cu_8O_{16}$  ( $T_C = 81K$ ),  $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$  ( $T_C = 108K$ ) y  $Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$  ( $T_C = 125K$ )<sup>2</sup>.

### Coeficiente térmico

Dado que la resistividad eléctrica de un conductor depende de procesos de colisión que experimentan sus portadores de carga, es lógico que dependa de la temperatura. Como al aumentar la temperatura aumenta la energía y la velocidad media de los portadores de carga, aumenta también la probabilidad de colisiones, con lo que la resistividad debe aumentar.

Se encuentra que para muchos conductores se puede establecer una ley sencilla de variación lineal de la resistividad con la temperatura para temperaturas no muy bajas (donde comienzan a

<sup>1</sup> En la teoría de Drude, los portadores de carga se ven acelerados por el campo eléctrico aplicado, con aceleración  $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m^*$ , donde  $m^*$  es la masa efectiva del portador, que tiene en cuenta las interacciones entre el portador y los iones de la red cristalina. Pero luego de un tiempo  $\tau$  (en promedio) los portadores experimentan una colisión con la red cristalina cediendo toda su energía. La velocidad media del conjunto de portadores de carga es  $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a} \tau = q\tau\mathbf{E}/m^*$  de donde puede obtenerse la movilidad  $\mu = q\tau/m^*$ . Más detalles sobre la teoría de Drude se pueden encontrar en libros de física de sólidos o semiconductores.

<sup>2</sup> Se da una breve introducción al comportamiento y aplicaciones de materiales superconductores en el Capítulo 5 de electrodinámica.

predominar los efectos cuánticos en el comportamiento de los electrones) ni muy altas donde el material se funde.

Sea  $\rho_0$  la resistividad a la temperatura  $T_0$ . Entonces:  $\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$

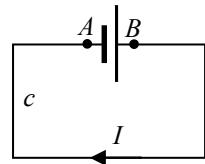
donde  $\alpha$  es el **coeficiente térmico** ( $1/^\circ\text{C}$ ) de la resistividad del material.

En la siguiente tabla se presenta la resistividad y el coeficiente térmico de diversos materiales (tomada de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/resis.html>):

	Material	Resistividad ( $\Omega \text{ m}$ )	Coeficiente Térmico ( $1/^\circ\text{C}$ )
Conductores	Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	0.0061
	Cobre	$1.68 \times 10^{-8}$	0.0068
	Aluminio	$2.65 \times 10^{-8}$	0.00429
	Tungsteno	$5.6 \times 10^{-8}$	0.0045
	Hierro	$9.71 \times 10^{-8}$	0.00651
	Platino	$10.6 \times 10^{-8}$	0.003927
	Manganina	$48.2 \times 10^{-8}$	0.000002
	Mercurio	$98 \times 10^{-8}$	0.0009
	Nichrome (aleación Ni,Fe,Cr)	$100 \times 10^{-8}$	0.0004
Semicongductores	Carbono (grafito)*	$3 \times 10^5 - 60 \times 10^5$	...
	Germanio*	$1 \times 10^3 - 0.5$	...
	Silicio*	0.1-60	...
Aisladores	Vidrio	$1 \times 10^9 - 1 \times 10^{12}$	...
	Mica	$9 \times 10^{13}$	...
	Goma dura	$1 \times 10^{13} - 1 \times 10^{15}$	...
	Cuarzo fundido	$5 \times 10^{16}$	...

\* - El rango de valores de la resistividad depende fuertemente de la temperatura.

### Fem. Resistencia



En un circuito eléctrico donde circula una corriente estacionaria el campo eléctrico deja de ser conservativo.

En el circuito filiforme cerrado  $c$  de la figura donde circula una corriente estacionaria  $I$  podemos escribir:  $\oint_c \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \oint_c \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \bullet d\mathbf{l}$

Como en un circuito filiforme  $\mathbf{j} \bullet d\mathbf{l} = j dl \neq 0$ , se ve que la integral debe ser mayor que cero y por lo tanto el campo  $\mathbf{E}$  no es conservativo:  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \neq 0 \Rightarrow fem = \oint_c \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \neq 0$

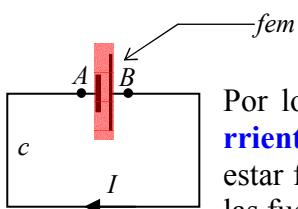
La circulación del campo a lo largo del circuito, que **físicamente es el trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga positiva a lo largo del circuito completo**, se conoce como **fuerza electromotriz** o  $fem$ .

Esta es una diferencia fundamental entre el campo electrostático y el campo asociado a una corriente estacionaria en un conductor. Debe entonces observarse que el campo eléctrico que produce circulación de corriente estacionaria en conductores **no es un campo electrostático**.

En general, podemos decir que el campo eléctrico dentro de un circuito que transporta una corriente estacionaria es la suma de un campo conservativo, generado por distribuciones estáticas

de carga y un campo no conservativo:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \neq 0 \end{cases}$

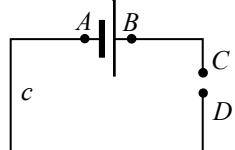
Sin embargo, dentro del material conductor valen las ecuaciones de Maxwell, en particular, la ley de Faraday, que en el caso de corrientes estacionarias se puede escribir:



$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Por lo tanto, el campo eléctrico dentro del conductor que transporta corriente estacionaria es conservativo, y la componente no conservativa debe estar fuera del conductor. Se encuentra en el tramo del circuito donde se hallan las fuentes de *fem* (baterías, generadores, pilas solares, etc.):

$$fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_c^B (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} + \int_A^A \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_B^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \cancel{\int_c^A \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}} \Rightarrow fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$



La *fem* tiene unidades de diferencia de potencial. Para demostrarlo, interrumpimos el circuito ejemplo mediante un corte, ya no circula corriente y estamos en un caso estático. Por lo tanto, dentro del conductor:

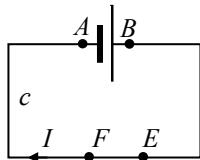
$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}') = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 = -\mathbf{E}'$$

En el caso estático:  $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_c^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$

El campo dentro del conductor es cero, lo que anula las integrales entre *B* y *C* y entre *D* y *A*. El campo en el tramo *AB* es el campo no conservativo de la batería y el campo en el corte es electrostático, debido a las cargas acumuladas sobre cada extremo del conductor. Estas cargas surgen para anular el campo creado por la batería dentro del conductor en la situación electrostática.

Queda entonces:  $\int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem = \int_A^B \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -\int_A^D \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \Phi_D - \Phi_C$

y se ve que en condiciones de no circulación de corriente la *fem* aplicada al circuito coincide con la diferencia de potencial electrostático entre los extremos de la interrupción ("bornes") del circuito. Esta diferencia de potencial está asociada a un campo electrostático en el medio donde se halla el circuito que es creado por acumulación de carga estática en los bornes del circuito.



En condiciones de circulación de corriente el campo sigue siendo conservativo dentro del conductor. Entonces la circulación del campo eléctrico entre dos puntos cualesquiera del circuito (que no incluyan las fuentes de *fem*) es igual a la diferencia de potencial entre los puntos:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_E^F \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \Phi_E - \Phi_F$$

Como la integral a lo largo del circuito puede expresarse como la suma de circulaciones entre puntos intermedios sucesivos, tenemos que:

$$fem - \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem - \int_c^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \dots - \int_Z^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow fem + \sum_i \Delta \Phi_i = 0$$

que es la **segunda ley de Kirchhoff**.

Si usamos la ley de Ohm podemos escribir:  $fem = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \frac{j}{\sigma} dl$

porque el vector densidad de corriente y el elemento de arco son colineales a lo largo de todo el camino. Si el circuito tiene sección *S* y suponemos que la densidad de corriente es uniforme sobre toda la sección:  $fem = \oint_c \frac{j}{\sigma} dl = \oint_c \frac{I}{\sigma S} dl$

Como se trata de **corrientes estacionarias** la corriente es la misma a lo largo de todo el circuito y puede salir de la integral:  $fem = I \oint_c \frac{dl}{\sigma S} = I R$  donde  $R = \oint_c \frac{dl}{\sigma S} = \oint_c \frac{\rho dl}{S}$

es la **resistencia** del circuito, un parámetro que depende del material a través de la conductividad (o resistividad) y de la geometría del circuito. La resistencia se mide en *ohm* ( $\Omega$ ) y de esta magnitud se determinan las unidades de la resistividad o conductividad de los materiales.

La expresión  $fem = I R$  se conoce como **ley de Ohm macroscópica** para diferenciarla de su versión microscópica que vimos más arriba.

En general, la resistencia entre dos conductores (**electrodos**) sumergidos en un medio de conductividad  $\sigma$  se puede calcular mediante la expresión:

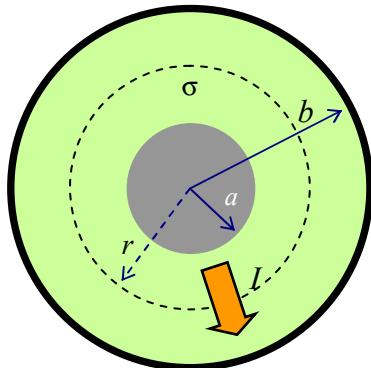
$$R = \frac{fem}{I} = \int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} / \int_S \sigma \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} ds$$

que podemos comparar con la expresión general de la capacidad del Capítulo 2:

$$C = \int_S \epsilon \mathbf{E} \bullet \mathbf{n} ds / \int_1^2 \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}$$

Observamos que ambas fórmulas son recíprocas y aparecen los parámetros  $\epsilon$  y  $\sigma$  respectivamente. Esto hace que los métodos matemáticos y numéricos para hallar la capacidad y la resistencia entre un par de electrodos sean los mismos. Si además la permitividad y la conductividad del material son constantes a lo largo del circuito, se tiene que:  $RC = \epsilon/\sigma$ .

**Ejemplo 3-1:** Calcular la resistencia por unidad de longitud de un coaxil de radios  $a$  y  $b$  con relleno de conductividad  $\sigma$  donde se establece un flujo de corriente continua  $I$  entre el alambre interior y la malla.



Como la corriente es estacionaria, debe ser la misma para toda sección transversal al flujo. En este caso las secciones transversales al flujo son cilindros coaxiles. Además, por la simetría del problema, la densidad de corriente debe ser radial y uniforme sobre estas secciones, de manera que podemos escribir:

$$I = \int_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = j 2\pi r l \Rightarrow \mathbf{j} = I \hat{r} / 2\pi r l$$

donde  $l$  es una longitud genérica de cable. Como dentro del relleno conductor  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , podemos expresar el campo asociado a la corriente:  $E = I \hat{r} / 2\pi \sigma r l$ . Este campo dará lugar a una fem entre

$$\text{los electrodos: } fem = \int_a^b \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \int_a^b E dr = \frac{I}{2\pi \sigma l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi \sigma l} \ln(b/a) \Rightarrow \frac{R}{l} = \frac{fem}{Il} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sigma}$$

Debemos observar que hemos calculado el campo a partir de la corriente que circula por el resistor y **no mediante la ley de Gauss**. La ley de Gauss vale para campos electrostáticos y surgen por la eventual presencia de carga neta sobre los electrodos. Pero en un circuito de corriente continua no hay acumulación de carga y por lo tanto no hay campos electrostáticos, de manera que la ley de Gauss es conceptualmente inaplicable.

**Ejemplo 3-2:** Comparar el resultado del Ejemplo precedente con la capacidad por unidad de longitud del cable coaxil hallada previamente.

$$\text{La capacidad se calculó en el Ejemplo 2-22: } \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)}$$

$$\text{de manera que tenemos: } \frac{R}{l} \frac{C}{l} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \sigma} \frac{2\pi \epsilon}{\ln(b/a)} \Rightarrow \frac{R}{l} \frac{C}{l} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

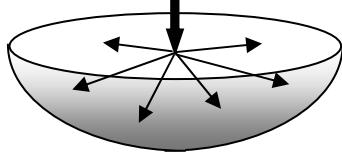
**Ejemplo 3-3:** Análisis elemental de los efectos de la caída de un rayo sobre tierra.

Un rayo que cae sobre tierra produce una corriente que fluye radialmente desde el punto de caída hacia toda dirección. Podemos modelizar (muy groseramente) este fenómeno suponiendo que la tierra es un conductor homogéneo de conductividad  $\sigma$  y que el rayo es una línea de corriente vertical  $I_0$ . Esta corriente se distribuye uniformemente en el semiespacio inferior de tierra, de modo que sobre una semiesfera de radio  $R$  el flujo de corriente es:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j 2\pi r^2 = I_0 \Rightarrow j = \frac{I_0}{2\pi r^2} = \sigma E$$

El campo  $E$  es radial y entonces la ddp entre dos puntos sobre la superficie de la tierra sobre un radio a distancias  $r_1$  y  $r_2$  del punto de caída es:

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} E dr = - \frac{I_0}{2\pi\sigma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I_0}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



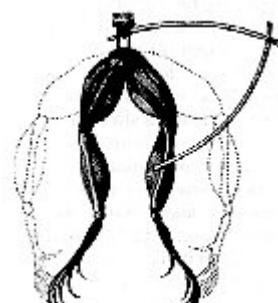
Supongamos que tenemos dos PCs a 1 Km. del punto de caída del rayo y separadas 2m entre sí, conectadas a una supuesta tierra común. Pero la ddp  $\Delta V$  para un rayo típico ( $I_0 = 100 KA$  y  $\sigma = 10^{-3} \Omega^{-1} m^{-1}$ ) es de unos 32V. Esta ddp es más de dos veces mayor que el salto entre valores lógicos de los dispositivos CMOS comunes. Además, el rayo crea interferencia de banda ancha que puede confundirse, a estos niveles de tensión, por señales.

### Alessandro Volta y la noción de fem<sup>3</sup>



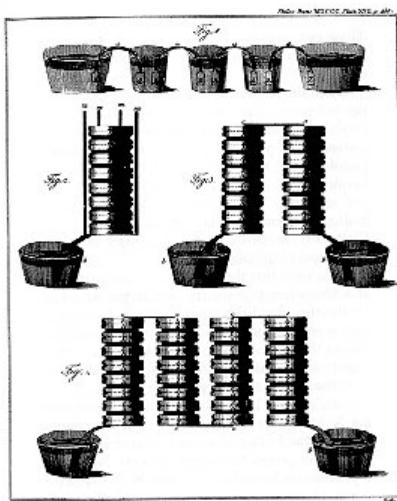
Las nociones de interacción electrostática y de fuerza electromotriz - que involucra campos no electrostáticos - se desarrollaron simultáneamente. Así en 1785 Coulomb culmina sus famosos experimentos, y en 1792 **Alessandro Volta** (1745-1827, figura) descubre la producción de "tensión eléctrica" por el contacto entre metales diferentes. Volta también trabajó extensamente en temas electrostáticos. En 1745 el experimentador alemán **Ewald G. von Kleist** había inventado el frasco de Leyden, un primer capacitor que podía almacenar carga eléctrica, generada habitualmente por frotamiento, llevando a realizar experiencias dramáticas que atrajeron la atención de investigadores y el público en general sobre los fenómenos electrostáticos<sup>4</sup>. Volta experimentó con este aparato e inventó otros propios, como el electrómetro de condensador, donde por vez primera Volta introduce la idea de la capacidad de un aparato para

"condensar" o retener carga eléctrica. Posteriormente, y a partir del descubrimiento de **Luigi Galvani** (1737-1798) de la estimulación eléctrica de los músculos de una rana. Volta descubrió que la causa de esta estimulación residía en la presencia de un par bimetálico, independientemente de que estuvieran conectados a una fuente eléctrica. Continuando los experimentos en esta dirección, Volta construyó discos metálicos de alrededor de 10 cm de diámetro, bien pulidos, con asas de vidrio aislador, que eran colocados sobre una base plana de plata con tornillos también de plata sobre los que apoyaba la otra placa y que podían variar la separación entre ambas placas metálicas. Volta observó que con esta disposición las placas de metales diferentes adquirían cargas de signos opuestos. La cantidad de carga adquirida era inversamente proporcional a la separación entre las placas, como podía observarse mediante el electrómetro.



<sup>3</sup> Partes de esta sección se han tomado de: Bern Dibner, "Alessandro Volta and the Electric Battery", Burndy Library/Dibner Institute for the History of Science and Technology, 2001.

<sup>4</sup> Para demostrar el poder de los frascos de Leyden el abad francés Jean Antoine Nollet realizó una experiencia en el palacio de Versalles en presencia del rey francés. Nollet cargó un frasco de Leyden y lo descargó a través de una compañía de 180 soldados de la guardia real que ante el choque eléctrico saltaron en grupo. Tan impresionado quedó el rey que hizo repetir el experimento posteriormente en París con un grupo de 800 monjes Cartujos que también saltaron al unísono al producirse la descarga.



Volta investigó qué pares de metales producían mayor "condensación" de carga de acuerdo a la lectura de su electrómetro. Encontró que el efecto también se producía con metales en contacto con agua y que entonces el efecto producido por pares de discos diferentes en contacto aumentaba si separaba a los discos metálicos por cartón húmedo, y que podía construir una "pila" de estos pares para sumar sus potencias eléctricas. En 1796 la pila de Volta estaba ya en uso y Volta la perfeccionó hasta que publicó sus resultados en una carta que envió en 1800 al presidente de la Royal Society de Londres, donde se puede ver la figura de varias implementaciones de la "pila", algunas de las cuales no son pilas en absoluto, sino jarras con líquido unidas por los pares bimetálicos. Desde el punto de vista de la experimentación eléctrica, la invención de Volta fue revolucionaria,

porque era una fuente de corriente eléctrica de larga duración frente a las fuentes electrostáticas cuya descarga era prácticamente instantánea. Volta se dio cuenta que el mecanismo de separación de cargas que surgía de su invento era diferente de la situación electrostática, e inventó en 1801 el término **fuerza electromotriz** para describirlo. La pila de Volta fue esencial en el descubrimiento de las acciones magnéticas creadas por corrientes, que describimos más abajo. En 1807 Humphry Davy (1778-1829), nombrado poco antes Director de la Royal Institution de Londres, descubrió los nuevos elementos potasio y sodio mediante la descomposición electrolítica de potasa cáustica y soda cáustica. Otros elementos, como el calcio, el magnesio, el bario y el estroncio se encontraron en forma similar más adelante. La Royal Institution se constituyó en uno de los laboratorios más importantes de estudios electroquímicos y cuando Faraday entró a trabajar allí gran parte de sus hallazgos fueron sobre este tema. Los experimentos de Oersted, Ampère, Biot y Savart que describimos más abajo y llevaron a descubrir la relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos se realizaron usando pilas de Volta.

### Tiempo de relajación

La ecuación de continuidad permite analizar el periodo **transitorio** en que se crea una perturbación en la distribución de carga en un conductor por inducción o la presencia de un campo eléctrico. Para ello usamos también la ley de Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  y la ley de Ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

Queda entonces una ecuación diferencial para las variaciones en el tiempo de la densidad de carga. Esta ecuación diferencial tiene la solución:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t=0) e^{-t/\tau}$$

donde  $\tau = \epsilon / \sigma$  es el llamado **tiempo de relajación** del material.

Para analizar el significado de esta ecuación, consideremos que por algún mecanismo se ha creado una distribución de carga  $\rho(\mathbf{r}, t=0)$  en el seno de un conductor. Esta ecuación dice que la densidad de carga decae exponencialmente en el tiempo, con un tiempo característico que es  $\tau$ . Como se ve en el siguiente ejemplo,  $\tau$  suele ser muy pequeño para un conductor real.

---

#### Ejemplo 3-4: Calcular el tiempo de relajación para cobre.

Para el cobre:  $\rho \approx 1.68 \times 10^{-8} \Omega m$  y  $\epsilon \approx \epsilon_0$  ya que no hay procesos de polarización en un conductor. Tenemos entonces:

$$\tau = \epsilon / \sigma = \epsilon \rho \approx 8.85 \times 10^{-12} F/m \times 1.68 \times 10^{-8} \Omega m \approx 1.5 \times 10^{-19} s$$

Se ve que al crear una inhomogeneidad de carga en el seno del conductor la redistribución de carga que lleva a anular el campo en su interior es prácticamente instantánea.

### Ecuación diferencial de las corrientes estacionarias

En el caso de la circulación de corriente estacionaria (corriente continua) dentro de un conductor vale la ley de Ohm:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Pero como en este caso:  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \nabla \bullet [\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})] = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

Y dado que el campo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$  dentro del conductor es conservativo:

**Se tiene finalmente que el potencial eléctrico dentro de un conductor por el que circula una corriente estacionaria cumple la ecuación de Laplace:**

$$\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$$

Por lo tanto la circulación de corrientes estacionarias se puede analizar con las mismas herramientas matemáticas que la electrostática del vacío.

### Energía y potencia en corrientes estacionarias

El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre las cargas en movimiento que constituyen una corriente eléctrica implica una cesión de energía del campo hacia las cargas móviles. Por otra parte, estas cargas móviles experimentan procesos de “colisión” con la red cristalina del cuerpo conductor transfiriendo al conjunto del cuerpo parte de la energía. El cuerpo almacena esta energía en forma de vibraciones de la red que se observan macroscópicamente como energía térmica (la absorción de esta energía implica un aumento de temperatura del cuerpo). Esta situación se conoce como **efecto Joule** y consiste en la transformación de la energía eléctrica del campo en energía térmica y es utilizada en la técnica en calefacción eléctrica y radiación para iluminación, pero produce efectos no deseados de pérdidas de energía, calentamiento y deterioro de materiales en muchas aplicaciones.

Vamos a calcular la potencia que el campo cede a una corriente eléctrica. Supongamos que en el seno del conductor existe una densidad de carga  $\rho(\mathbf{r})$ . El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre un elemento de volumen  $dv$  del conductor será:

$$dL = \mathbf{F} \bullet d\mathbf{l} \Rightarrow dL = \rho(\mathbf{r}) dv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{l} \Rightarrow \frac{dL}{dv} = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{v} dt = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dt$$

donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad media de los portadores de carga en el conductor y hemos usado la expresión del vector densidad de corriente  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}$ . Operando algebraicamente e integrando sobre todo el volumen del conductor tenemos:

$$dW = \frac{dL}{dt} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv \quad \Rightarrow \quad W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$$

que es la potencia “disipada” en el conductor.

**Ejemplo 3-5:** Calcule la potencia disipada en un resistor cilíndrico de conductividad  $\sigma$ .

Suponemos que circula una corriente estacionaria (CC)  $I_0$  a lo largo del cilindro. Si el resistor tiene longitud  $L$  y sección  $S$   $j = I_0/S$ . Luego:

$$W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{\sigma} \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{\sigma} \int_V j^2(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{\sigma} \frac{I_0^2}{S^2} \int_V dv = \frac{I_0^2 L}{\sigma S} \Rightarrow W = I_0^2 R$$

pero como  $fem = I_0 R$  también podemos escribir:  $W = fem I_0$ .

### Condiciones de frontera del vector densidad de corriente

Cuando existe una superficie interfase entre dos regiones de propiedades conductores diferentes, la aplicación de las leyes del campo eléctrico llevan a que se establecen relaciones entre las componentes del vector densidad de corriente a través de la interfase:

$$\nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} = \frac{dQ_l}{dt} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\sigma_l}{dt}$$

Estas relaciones se pueden demostrar de la misma forma que hemos hallado la conservación de las componentes normales del desplazamiento al cruzar una interfase entre dos dieléctricos.

**Al cruzar la superficie interfase que separa dos medios de propiedades distintas, se conserva la componente normal del vector densidad de corriente, salvo que exista una distribución superficial de carga libre variable en el tiempo sobre la interfase.**

**Ejemplo 3-6:** Cuando existe una interfase entre dos medios con permitividades y conductividades distintas, se deben cumplir simultáneamente las condiciones de borde:

$$D_{2_n} - D_{1_n} = \sigma_l \quad j_{1_n} - j_{2_n} = \frac{\partial \sigma_l}{\partial t} \quad E_{1_t} - E_{2_t} = 0$$

La presencia de conductividad no altera el comportamiento de las componentes tangenciales del campo. Derivando la primera ecuación respecto del tiempo e igualando a la segunda tenemos, para las componentes normales:

$$j_{1_n} + \frac{\partial D_{1_n}}{\partial t} = j_{2_n} + \frac{\partial D_{2_n}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \left( \sigma_1 + \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{1_n} = \left( \sigma_2 + \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) E_{2_n}$$

son las nuevas condiciones para las componentes normales.

Supongamos que los campos son cuasi-estáticos alternos, del tipo descripto por un fasor:

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ . Se ve que  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} = i\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y entonces la condición de contorno puede escribirse:

$$(\sigma_1 + \epsilon_1 \partial / \partial t) E_{1_n} = (\sigma_2 + \epsilon_2 \partial / \partial t) E_{2_n} \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1 + i\omega \epsilon_1) E_{1_n} = (\sigma_2 + i\omega \epsilon_2) E_{2_n}$$

Esta condición puede asimilarse a la de conservación de la componente normal del vector densidad de corriente cuando no hay carga variable en la interfase siempre que definamos una conductividad equivalente compleja:  $\sigma_{eq} = \sigma + i\omega \epsilon$  dependiente de la frecuencia para cada medio.

Dividiendo la igualdad por  $i\omega$  tenemos:  $(\epsilon_1 - i\sigma_1/\omega) E_{1_n} = (\epsilon_2 - i\sigma_2/\omega) E_{2_n}$

Análogamente esta condición es equivalente a la conservación de la componente normal del vector desplazamiento cuando no hay carga libre en la interfase siempre que definamos una permitividad equivalente compleja:  $\epsilon_{eq} = \epsilon - i\sigma/\omega$  dependiente de la frecuencia para cada medio.

El uso de parámetros equivalentes simplifica el análisis de las condiciones de borde para campos armónicos y es de uso común en la técnica, como veremos en el capítulo de propagación de ondas en medios.

**Ejemplo 3-7:** Determinar la conductividad y permitividad equivalentes de un suelo típico de permitividad relativa  $\epsilon_r = 4$  y resistividad entre  $\rho = 10 \Omega m$  y  $\rho = 1000 \Omega m$  a las frecuencias de 50 Hz (industrial), 1 MHz (radio AM), 1 GHz (telefonía celular).

La conductividad equivalente puede escribirse:  $\sigma_{eq} = \sigma + i\omega \epsilon = \sigma + i\omega \epsilon_r \epsilon_0$

La permitividad equivalente puede escribirse:  $\epsilon_{eq} = \epsilon - i\sigma/\omega = \epsilon_0 (\epsilon_r - i/(\omega \epsilon_0 \rho))$

Reemplazando valores nos queda las siguientes tablas para  $\sigma_{eq}$  y  $\epsilon_{eq}/\epsilon_0$ :

$\rho_{eq} = 1/\sigma_{eq}$		$\epsilon_{eq}/\epsilon_0$		
$f$ (Hz)	$\rho = 10 \Omega m$	$\rho = 1000 \Omega m$	$f$ (Hz)	$\rho = 10 \Omega m$
50	$10 - i 1.1 \times 10^{-5}$	$10^3 - i 0.01$	50	$4 - i 3.6 \times 10^7$

$10^6$	$10 - i 0.02$	$952 - i 212$	$10^6$	$4 - i 1.8 \times 10^3$	$4 - i 18$
$10^9$	$1.7 - i 3.74$	$0.02 - i 4.5$	$10^9$	$4 - i 1.8$	$4 - i 1.8 \times 10^{-2}$

Se ve que la resistividad equivalente es prácticamente real y la permitividad equivalente imaginaria para  $50\text{ Hz}$  y  $1\text{ MHz}$ , indicando que el comportamiento es fundamentalmente conductor. Para microondas, en el terreno de menor resistividad (generalmente el más húmedo) ambos efectos (conductivo y de polarización) son de igual magnitud y en el caso del terreno de mayor resistividad (generalmente el más seco o arenoso) predomina el efecto de polarización.

---

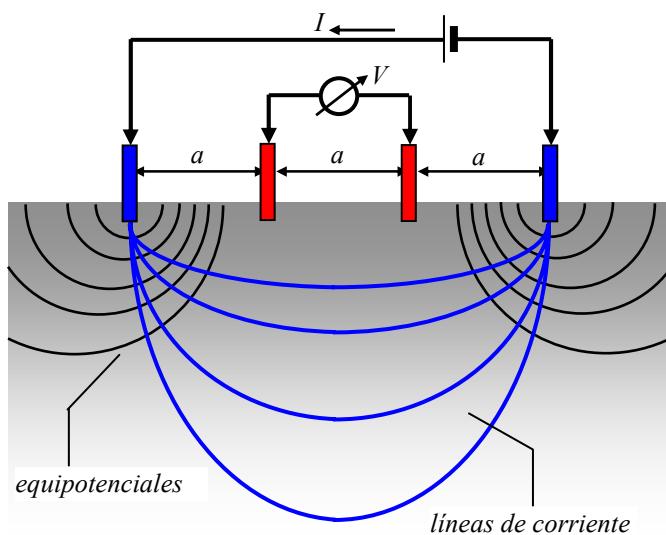
## APLICACION - Mediciones de Resistividad

### Aplicaciones Geofísicas

El conocimiento detallado del subsuelo es de primordial importancia en la exploración petrolera, búsqueda de fuentes de agua subterránea, prospección minera, arqueología, etc. Desde hace muchos años se han utilizado diversos métodos para obtener información del subsuelo a partir de mediciones realizadas en la superficie.

Uno de los métodos más antiguos es el de la medición de la **resistividad** del suelo.

Las propiedades más importantes que afectan las mediciones de resistividad del suelo incluyen la porosidad, contenido de agua, composición mineral (contenido de arcilla y metales, por ejemplo), salinidad del agua en los poros y distribución de tamaño de grano. Por lo tanto, la medición de resistividad eléctrica permite obtener información de importancia en búsqueda de fuentes de agua, determinación de la composición de suelos, delineado de plumas de contaminación, delineado de fallas, estratigrafía y topografía del manto rocoso, etc.



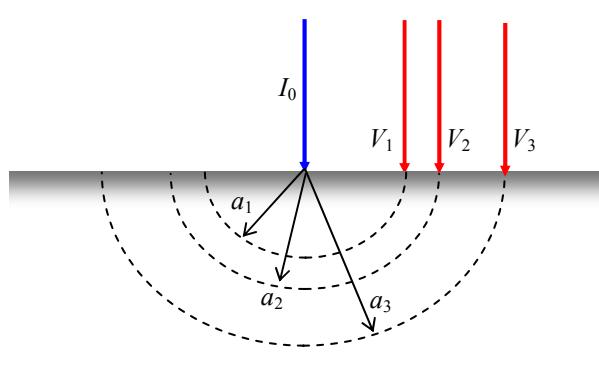
La técnica básica para la medición de la resistividad del suelo es el llamado **método de los cuatro puntos**, donde se colocan cuatro electrodos equidistantes en línea y se introducen ligeramente en el terreno. Se inyecta una corriente conocida entre los electrodos externos y se mide la ddp entre los conductores internos. Esto permite calcular la resistividad promedio a una profundidad  $a$  igual a la separación entre electrodos, y se puede trazar un perfil de la resistividad en función de la profundidad variando el parámetro  $a$ .

A partir de este perfil se utilizan diversas **técnicas de inversión** para deducir las

propiedades eléctricas y geológicas del terreno. El método de los cuatro puntos es la base del estándar IEEE 81-1983 de medición de resistividad terrestre. En la jerga de las actividades geológicas, el método de los cuatro electrodos en línea (no necesariamente equiespaciados) se conoce como **arreglo de Wenner**.

**Ejemplo 3-8:** Hallar la resistividad de un semiespacio isótropo y homogéneo a partir de mediciones realizadas por un arreglo de Wenner.

Podemos analizar la inyección de corriente por un electrodo colocado sobre la superficie de un semiespacio conductor isótropo y homogéneo a partir de los resultados del **Ejemplo 3-3** del rayo, que es equivalente. Allí hallamos que la densidad de corriente que existe dentro del



$$\text{semiespacio es: } j = \frac{I_0}{2\pi r^2} = \frac{E}{\rho}$$

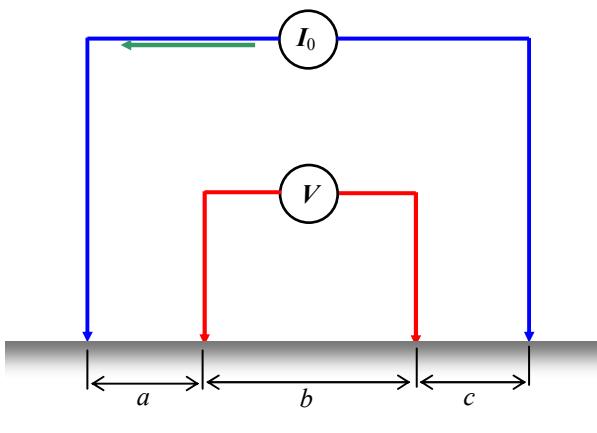
mientras que la ddp entre dos puntos distantes  $r_1$  y  $r_2$  del punto de inyección de corriente es:

$$\Delta V = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Si tomamos uno de los puntos en el infinito, el potencial sobre el otro debido al electrodo que

$$\text{inyecta corriente es: } V = \frac{\rho I_0}{2\pi r_1}.$$

Como se ve en la figura, a medida que se separa el electrodo de tensión del electrodo de corriente, la semiesfera que mide el flujo de corriente sobre el punto donde se halla el electrodo de tensión es más grande, incorporando el comportamiento de capas más profundas. Así es posible explorar el comportamiento eléctrico del terreno en profundidad moviendo el electrodo de tensión.



El potencial de los electrodos de tensión del arreglo de Wenner de la figura será, incluyendo las dos fuentes de corriente y usando superposición:

$$V_1 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \text{ (izquierdo)}$$

$$V_2 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c} \right) \text{ (derecho)}$$

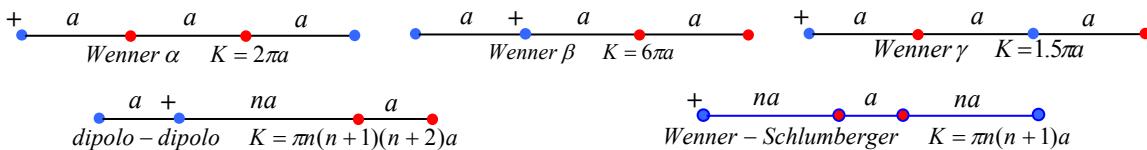
Por lo tanto, la ddp entre ambos electrodos de tensión, que es lo que medimos es:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c} \right)$$

Si todos los espaciamientos entre electrodos son iguales ( $b = c = a$ ):

$$V = \frac{\rho I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\rho I_0}{2\pi a} \Rightarrow \rho = \frac{2\pi a V}{I_0} = K \frac{V}{I_0} \quad \text{con} \quad K = 2\pi a$$

El factor  $K$  que relaciona la resistividad del terreno con la relación  $V/I_0$  se conoce como **factor de forma** y depende de la ubicación de los electrodos. En la siguiente figura se esquematizan algunas disposiciones comunes y se dan sus factores  $K$ :



Los valores de  $K$  que surgen en este Ejemplo se calculan suponiendo que el terreno es un semi-espacio isótropo y homogéneo. En terrenos reales ninguna de estas hipótesis se cumple, y la resistividad es una complicada (y desconocida) función de la posición en el terreno y la dirección de flujo de la corriente. Por lo tanto, las fórmulas de los diferentes arreglos nos dan la llamada **resistividad aparente**. Para realizar un modelo de terreno, se realizan diversas mediciones cambiando la separación entre electrodos, lo que produce resultados vinculados con capas de distinta profundidad. Hay dos procedimientos básicos de exploración:

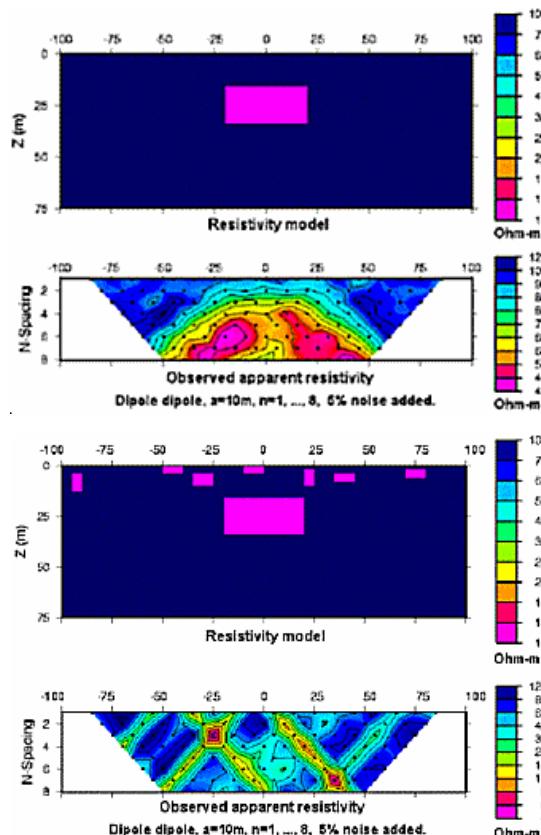
- **Sondeo**, donde la disposición de electrodos se varía simétricamente alrededor de una posición fija y el espacio entre electrodos se aumenta en incrementos fijos, lo que lleva a un mapeo 1D en profundidad o vertical. Esta técnica se usa para determinar la profundidad de una fuente de agua, el espesor de capas de arena, grava o roca y, en general, la estratigrafía en profundidad del terreno.
- **Perfilado**, donde la separación entre electrodos permanece constante y el conjunto se traslada por el terreno. Esta técnica produce un mapa 2D a profundidad constante y se usa cuando se desea una rápida exploración de un área. Es apropiada para buscar depósitos subterráneos de minerales o para detectar zonas de falla geológica o las fronteras entre capas de materiales diferentes.
- Los arreglos más comunes para trabajos de exploración de minerales son los dipolo-dipolo, mientras que para relevamiento de agua subterránea y estudios ambientales se usan el arreglo Wenner  $\alpha$  o el Schlumberger.

La exploración mineral y las exploraciones asociadas a estudios de agrimensura, ingeniería o ambientales difieren debido a la escala de los problemas. El sondeo, que se usa en la industria petrolera y en la determinación de napas de agua o perfiles de roca, lleva a ploteos de resistividad versus profundidad (modelos 1D) mientras que el perfilado permite obtener modelos de terreno 2D o 3D que actualmente se resuelven por técnicas numéricas de inversión.

Además de las mediciones de resistividad, que están ligadas al flujo de corrientes eléctricas en el terreno, la presencia de elementos con características polares (como el agua) lleva a que se den fenómenos de polarización que implica la creación de **carga inducida** en las superficies de separación entre capas de distintas propiedades y carga inducida volumétrica debida a la inhomogeneidad del terreno. Las propiedades de la carga inducida se observan con mayor precisión con corrientes variables en el tiempo que con corriente continua. Por otra parte, el uso de corriente continua en cualquier tipo de medición eléctrica en terrenos, produce fenómenos de corrosión

electrolítica en los electrodos, inducción de cargas en su entorno que alteran los valores medidos y otros artefactos que se pueden eliminar usando corriente alterna de baja frecuencia.

Cuando se miden los efectos de la resistividad y de carga inducida simultáneamente, se suelen usar ondas cuadradas de baja frecuencia. El comportamiento transitorio da información sobre la carga inducida (efecto capacitivo o reactivo) mientras que el comportamiento permanente da el comportamiento resistivo del terreno (efecto activo). En la figura se muestra una forma de onda cuadrada de corriente inyectada y la resultante forma de onda de tensión donde se observan (exagerados) los efectos reactivos.



Realizadas las mediciones, se tiene una tabla de valores de resistividad aparente en función de la posición de los electrodos. Como mayor separación de electrodos involucra mediciones asociadas a mayor profundidad, se puede obtener un perfil de resistividad aparente como el de la figura, asociada a un sondeo<sup>5</sup>. El eje horizontal mide la distancia en  $m$  desde la posición del electrodo de corriente central (fijo), mientras que el eje vertical mide la separación entre electrodos. Los puntos de igual resistividad se unen formando un diagrama de contornos de resistividades. La interpretación de estos diagramas, llamados **seudo-secciones**, es difícil y requiere experiencia. En la figura se ve la simulación de un bloque subterráneo de resistividad diferente del medio, ambos de propiedades homogéneas. Por ejemplo, si se agrega "ruido", en forma de pequeñas incrustaciones de resistividad diferente, se obtiene un perfil completamente distinto.

Por estos motivos se han desarrollado métodos numéricos de **inversión**. En la jerga matemática, se habla de problemas directos y problemas inversos. El problema directo en este contexto sería tener la

geometría detallada del subsuelo y las propiedades resistivas de cada región. A partir de las

<sup>5</sup> Las figuras de esta sección están tomadas de D.Oldenburg y F.Jones, "Basic Concepts of Resistivity and Induced Polarization Profiling", The UBC Geophysical Inversion Facility, 1998.

ecuaciones del electromagnetismo se obtiene el perfil de resistividades. El problema inverso, que es el que se tiene en la práctica, implica tener las mediciones y alguna estimación de sus incertezas, y deducir a partir de ellas mediante una teoría la geometría de la distribución de la resistividad de un modelo  $M$  de terreno. El objetivo es hallar el modelo  $M$  que da lugar a las mediciones. El problema fundamental es que este proceso no es único, es decir, se pueden obtener varios modelos diferentes que dan lugar al mismo conjunto de observaciones, ya que se trata de un problema donde hay menos ecuaciones que incógnitas. La idea es diseñar un modelo definido por una función objetiva, que refleje adecuadamente las propiedades del terreno y permita una interpretación más o menos sencilla de los resultados. El método de inversión consiste en optimizar la función objetiva de acuerdo a estos criterios. Una posibilidad es usar modelos de referencia de situaciones estándar a los cuales se agregan términos “perturbativos” (supuestamente pequeños) para tener en cuenta las diferencias del terreno real respecto del terreno de referencia.

Para resolver el problema numéricamente, se divide el terreno en celdas cuboidales dentro de las cuales se asume resistividad constante. Las celdas son suficientemente pequeñas como para que esta hipótesis no introduzca errores muy grandes y suficientemente grandes como para que el volumen y tiempo de cálculo no sean inmanejables. El modelo se convierte en un arreglo de valores (un “vector”) y el problema se resuelve minimizando la función objetiva del modelo sujeta a las condiciones impuestas por las observaciones. Las incertezas de las mediciones requieren un estudio estadístico para incluirlas en el modelo. Si la relación entre los parámetros del modelo y los datos es lineal, la solución es (conceptualmente) invertir la matriz del modelo, mientras que si la relación es no lineal, se requieren procedimientos iterativos, como el método de gradientes conjugados o de descenso más rápido.

## Puesta a Tierra

La puesta a tierra de instalaciones eléctricas o electrónicas es de primordial importancia para evitar fenómenos de ESD o para proteger los sistemas de caída de rayos o impulsos provenientes de líneas alimentadoras o instalaciones cercanas.

El objetivo de la puesta a tierra es proveer un punto común de referencia de potencial para diversos equipos eléctricos que trabajan conjuntamente. Este objetivo es necesario cuando se opera con fuentes de energía diferentes, como por ejemplo:

- Diferentes fuentes de energía (sistema público, generadores locales, baterías).
- Diferentes valores de tensión simultáneamente presentes.

También este objetivo es de importancia para la protección de operadores y de los equipos ante sobretensiones y/o para disminuir las fuentes de interferencia en sistemas que procesan señales.

Normalmente la Tierra (el planeta) se considera como una fuente infinita de carga o un conductor de capacidad infinita (y por lo tanto de potencial constante) para la mayoría de las situaciones, pero las características conductivo/dieléctricas de la tierra (suelo) determinan que estas consideraciones sean válidas. Estas características dependen del contenido de humedad, metales y electrolitos que contenga el suelo y de las variaciones climáticas.

Las técnicas de puesta a tierra involucran la colocación de jaulas, mallas o placas metálicas enterradas junto con vainas de concreto conductor para proteger los elementos metálicos de la corrosión. El diseño de un sistema de puesta a tierra involucra tres etapas:

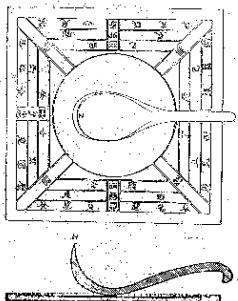
- Medición de la resistividad del suelo para seleccionar el sitio más adecuado para la implantación del sistema de protección. Habitualmente se considera que el mejor sistema de puesta a tierra se consigue con un suelo de baja resistividad. Si este no es el caso deben usarse placas o mallas conductoras subterráneas y/o jaulas con núcleo electrolítico para mejorar la conductividad de la instalación.
- Diseño del sistema de electrodos de acuerdo a las características del suelo y la resistencia deseada para el sistema de protección de acuerdo a la instalación a proteger. La distancia entre electrodos debe ser tal que no se superpongan las esferas de influencia de cada electrodo de acuerdo a su profundidad, como se describe en la sección precedente.
- Chequeo del sistema para asegurar que cumple las especificaciones.

El primer punto utiliza técnicas similares a las descriptas para la prospección geofísica. En el archivo **SOLID.PDF** se da una breve introducción al diseño de una sistema de puesta a tierra para telecomunicaciones.

## Magnetismo. Breve introducción histórica<sup>6</sup>

En la electrostática hemos visto interacciones entre cargas **en reposo** entre sí. Cuando las cargas tienen movimiento relativo aparece un nuevo tipo de interacción que se denomina **magnética**.

La interacción magnética es conocida desde muy antiguo a partir de las propiedades de los óxidos de hierro, en particular la llamada **magnetita** ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Ya los griegos comprobaron el poder

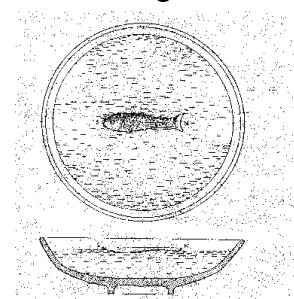


de atracción de las piedras de magnetita sobre pequeños trozos de hierro. Aparentemente los primeros en darse cuenta de la propiedad de brújula de trozos de esta sustancia fueron los chinos. A partir de alrededor del año 100 hay referencias en textos chinos respecto de un "puntero al sur", que se piensa podría ser una cuchara de magnetita montada sobre una placa plana de baja rugosidad, como se muestra en la figura. La forma de la cuchara permite que gire fácilmente en respuesta a la cupla magnética generada por el campo terrestre. De acuerdo a los historiadores su uso en esta época sería ritual o religioso más que una ayuda a la navegación.

Parece que el uso de agujas imantadas como brújulas también se descubrió en China. En un libro chino sobre forja de hierro alrededor de 1040 aparece la primera brújula conocida: un trozo de magnetita en forma de pez flotando en un tazón de agua. Este libro describe cómo el hierro puede calentarse y templarse para producir imanes permanentes. La pri-



mera descripción clara de una brújula magnética suspendida fue hecha por Shen Kua en 1088. Las brújulas fueron usadas como ayuda y guía por navegantes chinos y portugueses al menos desde el siglo XIV. Cristóbal Colón llevó una brújula en su viaje de descubrimiento de América, instrumento que cita repetidas veces en su libro de bitácora. Quizás fuera un modelo similar al de la figura., usado por navegantes portugueses en el siglo XVI.



El primer texto europeo que menciona la aguja imanada es del siglo XIII, escrito en París por el monje inglés Alexander Neckham. El primer tratado sobre las propiedades de los imanes parece ser el escrito por **Petrus Peregrinus** en 1269: "Epistolia de Magnete". En esta obra describe experimentos realizados con una esfera de magnetita, que llama "terella". Quizás lo más interesante es una serie de dispositivos que Peregrinus inventó para hacer uso de las nuevas fuerzas, en particular un *perpetuum mobile* destinado al fracaso, en caso de haber sido construido.



En 1600, el clérigo inglés **William Gilbert** (1540-1603, figura) publicó su libro **De Magnete** donde, a partir de experimentos con una esfera magnetizada (la "terella" de Peregrinus) postula que la Tierra es un *immenso imán* (*Magnus magnes ipse est globus terrestris*), y ese es el motivo del comportamiento de la aguja magnética. Gilbert asocia el magnetismo terrestre con su rotación<sup>7</sup>, y esto explica que la brújula apunte al norte. El



<sup>6</sup> Parte del material presentado en esta sección proviene de la serie "Magnetism through the ages", del Magnetism Group, Physics Department, Trinity College, Dublin (<http://www.tcd.ie/Physics/Schools/what/materials/magnetism/one.html>)

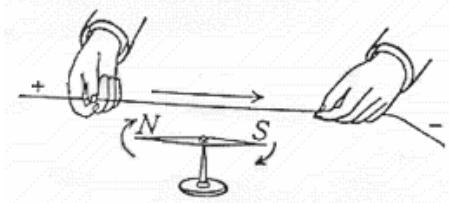
<sup>7</sup> En 1600 la teoría oficial negaba el movimiento de la Tierra. En este mismo año Giordano Bruno fue quemado en la hoguera por sus escritos sobre el movimiento de la Tierra y la existencia de "infinitos mundos", relativizando la posición y status de la Tierra en el universo.

hecho ya observado en esa época de que hay una ligera desviación entre la dirección del norte geográfico y el norte magnético (la declinación magnética) llevó a Gilbert a teorizar que la Tierra no era una esfera perfecta.

En 1635 **Henry Gellibrand** descubrió que el ángulo de declinación varía lentamente con el tiempo. Una explicación de estas observaciones se deben a **Edmond Halley**, famoso luego por aplicar las leyes de Newton a la predicción de la aparición del cometa que lleva su nombre. En 1692 Halley supuso que la Tierra está formada por capas de diferentes propiedades magnéticas, en lenta rotación unas respecto las otras.

A pesar de ser el primer tratado científico en el sentido que damos a esta palabra en la época moderna, *De Magnete* está plagado de ideas animistas que asignan un "alma" al imán. Recién un siglo después **René Descartes** publicó una teoría no animista de los fenómenos magnéticos introduciendo una primera versión de la idea de influencia sobre el medio ambiente que luego se convertiría en la moderna idea de campo.

La existencia de una conexión entre la electricidad y el magnetismo surge con los trabajos del físico danés **Hans Christian Oersted** (1777-1851, figura). Se había observado desde hacía tiempo que la caída de rayos hacía mover las agujas magnéticas usadas como brújulas en la navegación. En cuanto Oersted se enteró de la pila eléctrica creada por Volta, comenzó una serie de observaciones sobre el efecto de una "corriente galvánica" sobre una aguja magnética. Los resultados de estos experimentos (contrarios a lo que creía Oersted, es decir, que la electricidad no ejercía influencia alguna sobre una aguja imanada), fueron publicados en julio de 1820 (**Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam**), y mostraban que una corriente eléctrica que circula cerca de una aguja imanada



produce su movimiento, hallando por vez primera una relación entre la electricidad y el magnetismo.

El 11 de setiembre de 1820 **Dominique Francois Jean Arago** (1786-1853), que era el secretario de la Academia de Ciencias francesa, hizo una presentación en París de los resultados de Oersted y algunos otros propios. En el auditorio se hallaba **Andre-Marie Ampère** (1775-1836, figura),



quien en sólo una semana desarrolló una teoría completa de la interacción magnética y obtuvo una descripción matemática general. Su punto de partida fue que, si una corriente actuaba sobre un imán, dos corrientes interactuarían entre sí. Profundizó y perfeccionó su teoría en los siguientes años. Al contrario que otro contemporáneo ilustre, **Simeon Denis Poisson** (1781-1840) Ampère pensaba que los fenómenos eléctricos y los magnéticos estaban relacionados íntimamente entre sí. Por ejemplo describió el magnetismo material postulando la existencia de pequeños circuitos de corriente dentro del material magnetizado.

En 1826 Ampère reunió sus experimentos y deducciones y los publicó en las memorias de la Académie Royale des Sciences su **"Théorie Mathématique des Phénomènes Électro-dynamiques, uniquement déduite de l'Expérience"**, donde deduce la ley de la acción electrodinámica.

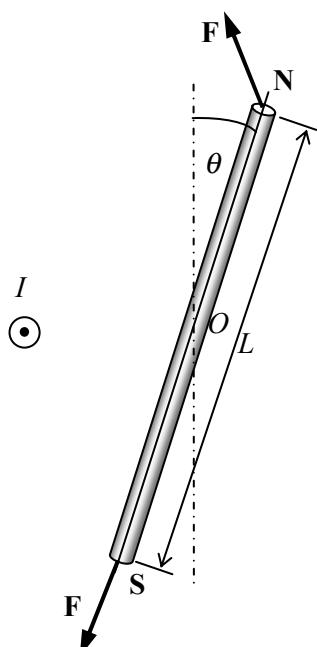
Ampère siguió el ejemplo de la teoría de Newton de la acción a distancia para sus desarrollos. Dice en la presentación: "**Observar a partir de los hechos, variar las circunstancias en tanto**

que sea posible, acompañar este primer trabajo con mediciones precisas para deducir leyes generales, únicamente fundadas sobre la experiencia, y deducir de estas leyes, independientemente de toda hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas que producen los fenómenos, el valor matemático de estas fuerzas, es decir, la fórmula que las representa, tal es el camino que ha seguido Newton... y es el que me ha servido de guía en todas mis investigaciones sobre los fenómenos electrodinámicos. He consultado únicamente a la experiencia para establecer las leyes de estos fenómenos, y de ellas he deducido la única fórmula que puede representar las fuerzas a las cuales se deben; no he hecho investigación alguna sobre la causa misma que puede adjudicarse a estas fuerzas, bien convencido de que toda investigación de este género debe ser precedida del conocimiento puramente experimental de las leyes, y de la determinación, únicamente deducida a partir de estas leyes, de los valores de las fuerzas elementales cuya dirección es necesariamente la de la línea recta trazada a través de los puntos materiales entre los cuales se ejercen."

La obra de Ampère se basa en experimentos que muestran que dos conductores paralelos que transportan corriente en el mismo sentido se atraen, mientras que si las corrientes son de sentidos opuestos se rechazan. A partir de los experimentos Ampère llegó a una expresión matemática de la fuerza entre pequeños elementos de corriente, que luego extendió a circuitos completos. Otras conclusiones novedosas que encuentra Ampère son:

- fuera de su cuerpo material, un imán permanente es equivalente en su acción magnética a una bobina de alambre que transporta una corriente (que llamó "solenoide");
- cada molécula de un imán permanente tiene una espira de corriente asociada;
- la magnetización es el alineamiento de las moléculas con un campo exterior (Ampère utilizó otro nombre, ya que la idea de campo magnético no existía en esa época).

Por otra parte, a partir de la noticia traída por Arago de las observaciones de Oersted, en pocas semanas **Jean-Baptiste Biot** (1744-1862) y **Felix Savart** (1791-1841) realizaron experimentos usando las oscilaciones de la aguja magnetizada cerca de un hilo que transportaba una corriente, que les llevaron a señalar que la fuerza sobre la aguja es inversamente proporcional a la distancia perpendicular al hilo de corriente desde el punto de observación.



### Ejemplo 3-9: Las ecuaciones de los experimentos de Biot y Savart<sup>8</sup>

**Primer experimento:** En el primer experimento Biot y Savart demostraron que la fuerza producida por la circulación de una corriente sobre una aguja magnética es inversamente proporcional a la distancia entre el hilo y la aguja.

Consideremos una aguja magnética de longitud  $L$  libre de rotar en el plano de la figura. Un hilo recto de corriente  $I$  muy largo es perpendicular a la figura. La corriente crea fuerzas  $\mathbf{F}$  sobre los polos de la aguja magnética, cuyas componentes normales al eje de la aguja crean una pareja de rotación. La ecuación de Newton para el giro se

$$\text{puede escribir: } J \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \sin \theta L$$

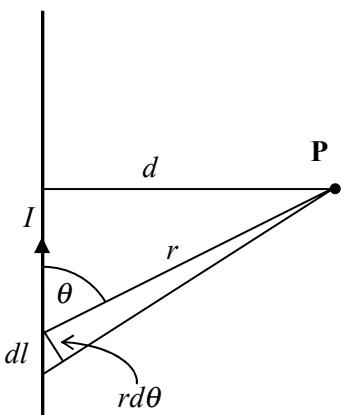
donde  $J$  es el momento de inercia de la aguja. Esta ecuación predice oscilaciones de la aguja alrededor de la posición vertical de equilibrio. Para pequeñas oscilaciones podemos aproximar:  $\sin \theta \approx \theta$  y entonces nos queda la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{FL}{J} \theta \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{FL}{J}}$$

$$\text{El periodo de estas pequeñas oscilaciones es: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{FL}} \quad \Rightarrow \quad F \propto 1/T^2$$

<sup>8</sup> El material de este ejemplo ha sido adaptado de: H.Erliehson, "The experiments of Biot and Savart concerning the force exerted by a current on a magnetic needle", Am.J.Phys., 66 (5), p. 385, Mayo 1998.

En el primer experimento de Biot y Savart se halla que la fuerza es proporcional al cuadrado del periodo de pequeñas oscilaciones de la aguja. La constante de proporcionalidad no depende de la distancia entre el hilo de corriente y la aguja, de forma que puede medirse la variación de la fuerza magnética sobre la aguja con la distancia de separación midiendo cómo cambia el periodo de las oscilaciones con la distancia. El resultado es que la fuerza varía inversamente proporcional a la distancia entre el hilo de corriente y la aguja, resultado obtenido también por Ampère.

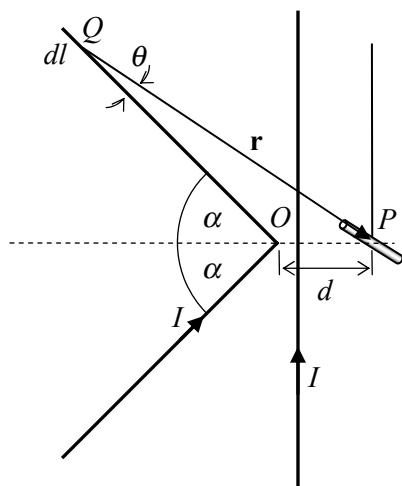


**Segundo experimento:** En el primer experimento se halla la dependencia de la fuerza con la inversa de la distancia, pero no se puede determinar la forma matemática precisa de esa dependencia. Consideremos nuevamente la acción entre un hilo de corriente y un polo magnético, situado en el punto **P**, como indica la figura. Suponemos, siguiendo a Newton, que la fuerza causada por un elemento del hilo de longitud  $dl$  sobre **P** es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$ , proporcional al valor de la corriente  $I$  y a la extensión del elemento:  $dF = \frac{k I f(\theta) dl}{r^2}$

La función  $f(\theta)$  introduce la desconocida dependencia de la fuerza con el ángulo entre el vector posición  $\mathbf{r}$  y la dirección de la corriente y  $k$  es una constante de proporcionalidad.

$$\text{De la figura se ve que: } dl \sin(\theta) = rd\theta \quad \text{y entonces:} \quad dF = \frac{k I f(\theta) dl}{r \sin(\theta)} = \frac{k I}{d} f(\theta) d\theta$$

$$\text{La fuerza total creada por el hilo indefinido será la integral:} \quad F = \frac{k I}{d} \int_0^\pi f(\theta) d\theta$$



Se ve que cualquier función  $f(\theta)$  es compatible con la dependencia  $1/d$  que se encontró en el primer experimento. Biot y Savart diseñaron un segundo experimento para hallar esta dependencia. Para ello colocaron, además del hilo de corriente recto, un hilo de corriente en ángulo para analizar la diferencia introducida por el ángulo en la fuerza sobre la aguja magnetizada. Las mediciones revelaron que la fuerza es proporcional a  $\tan(\alpha)$ . Ahora hay que encontrar la función  $f(\theta)$  cuya integral lleva a este resultado. Biot y Savart encontraron que  $f(\theta) = \sin(\theta)$ , lo que puede corroborarse fácilmente. La fuerza ejercida sobre la aguja magnética por un elemento de corriente  $I dl$  es, como antes:

$$dF = \frac{k I f(\theta) dl}{r^2} = \frac{k I \sin(\theta) dl}{r^2}$$

$$\text{Nuevamente: } dl \sin(\theta) = rd\theta \quad \text{y entonces:} \quad dF = \frac{k I d\theta}{r}$$

Integraremos sobre todo el hilo el ángulo, utilizando la simetría del hilo respecto de la horizontal:

$$F = 2k I \int_0^\alpha \frac{d\theta}{r} \quad \text{Además, por el teorema del seno en el triángulo OPQ:} \quad \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{d}{r} \quad \text{y}$$

entonces tenemos:

$$F = 2k I \int_0^\alpha \frac{d\theta}{r} = \frac{2k I}{d \sin \alpha} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = \frac{2k I (1 - \cos \alpha)}{d \sin \alpha} \Rightarrow F = \frac{2k I}{d} \tan(\alpha/2)$$

Por lo tanto, la fuerza magnética sobre una aguja magnetizada creada por un elemento de corriente es:  $dF = \frac{k I \sin(\theta) dl}{r^2} = k I \frac{dl \times \hat{r}}{r^2}$  expresión de la llamada **ley de Biot-Savart**.

Esta expresión, que lleva naturalmente a la idea de campo, reemplazó a la hallada por Ampère a partir del modelo newtoniano de acción a distancia.

## Campo Magnetostático

En el resto del Capítulo veremos características y aplicaciones de los campos magnetostáticos. En el **caso estático** los campos y sus fuentes **no dependen del tiempo**. Las fuentes son corrientes **estacionarias** o continuas.

Los campos eléctrico y magnético están **desacoplados**. El campo magnético (**magnetostático**) depende solamente de la distribución de corrientes:

$$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

**B** se conoce como **campo de inducción magnética** y **H** como **campo magnético**.

## Magnetostática en el vacío

En el vacío, los campos **B** y **H** están ligados a través de la **constante magnética del vacío**:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

y entonces las ecuaciones del campo magnetostático en el vacío son:

$$\nabla \bullet \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

De acuerdo al teorema de Helmholtz si se conocen la divergencia y el rotor de un campo vectorial el campo queda únicamente determinado. El campo magnetostático en el vacío tiene únicamente **fuentes vectoriales** (la distribución de corriente eléctrica). El teorema de Helmholtz lleva también al **potencial magnetostático** en el vacío, que cumple la ecuación diferencial vectorial de **Poisson**, cuya solución particular es la llamada **integral de Poisson**:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

En sitios del espacio donde no existen fuentes de campo [ $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ ] se cumple la **ecuación de Laplace**:  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$

Analizaremos primero los efectos ponderomotrices (fuerzas) creados por el campo magnético sobre cargas en movimiento.

## Fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento.

Una carga  $q$  en movimiento en una región donde existe un campo magnético experimenta una fuerza diferente de las eventuales fuerzas eléctricas. Esta fuerza se denomina **magnética** y, para **velocidades constantes**<sup>9</sup> **pequeñas frente a la velocidad de la luz**, se puede escribir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Así, en general, si en una región del espacio existen simultáneamente un campo eléctrico **E** y un campo de inducción magnética **B**, la fuerza sobre una carga (móvil) de prueba  $q$  en la posición **r** será, por superposición:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

Esta es la llamada **fuerza de Lorentz**. Obsérvese que sólo hay fuerza magnética si la carga se mueve. Sin embargo, hay fuerza eléctrica siempre que exista campo eléctrico.

## Fuerza y cupla sobre una corriente

Una corriente es un flujo ordenado de cargas, de modo que en presencia de un campo magnético existe una fuerza magnética sobre el conjunto de cargas en movimiento. Resulta así una fuerza neta sobre el conductor que transporta la corriente.

Podemos medir esta acción considerando que cada elemento de volumen del conductor contiene una carga  $dq(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dv$  y se mueve con velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ . Si este campo de velocidades es

<sup>9</sup> Respecto de un referencial inercial.

**constante en el tiempo**, la fuerza magnética sobre este elemento es:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = dq(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv$$

donde hemos usado la definición de la densidad de corriente. La fuerza sobre todo el cuerpo conductor es, por superposición:  $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') dv$

En el caso de mucho interés de un **conductor filiforme**, podemos escribir, en general:

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv = \int_C \left[ \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) ds \right] dl = \mathbf{I} \int_C dl = I \int_C dl$$

donde  $S$  es la sección y  $C$  la curva que define el conductor. Este pasaje de una integral de volumen a una integral de línea (y viceversa) para un circuito filiforme es de uso común.

Entonces:

$$\mathbf{F} = I \int_C dl \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Nótese que todos estos resultados son válidos solamente para **corrientes estacionarias**, que son las que surgen del flujo de cargas a velocidad constante.

**Momento magnético de una espira:**  $\mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}}$

donde:

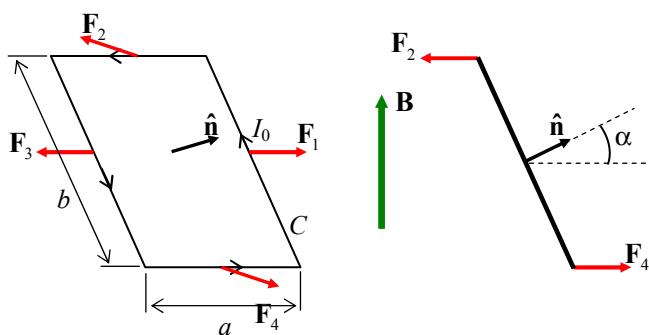
- $I_0$  es la **corriente** (continua) que circula por la espira,
- $S$  es el **área** de la espira,
- $\hat{\mathbf{n}}$  es la **normal** a la espira.

En el caso de un **círculo cerrado**, si además el campo  $\mathbf{B}$  es **uniforme** sobre todo el circuito:

$$\mathbf{F} = I \oint_C dl \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = I \left[ \oint_C dl \right] \times \mathbf{B} = 0$$

porque la integral del vector diferencial de arco, sobre un camino **cerrado**, es cero.

**La fuerza ejercida por un campo magnético uniforme sobre un circuito cerrado es cero.**

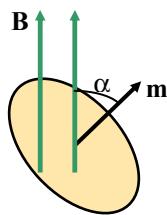


Aunque un campo uniforme no ejerce fuerza sobre un circuito cerrado, sí produce una **cupla**. Analizamos el caso (sencillo desde el punto de vista matemático) de una espira rectangular plana por la que circula una corriente continua  $I_0$ . En la figura se muestra la situación. La normal al plano de la espira forma un ángulo  $\alpha$  con el campo aplicado  $\mathbf{B}$  (nótese que se ha aplicado la regla de la mano derecha para determinar el sentido de la normal a partir del sentido de circulación de la corriente). La fuerza total sobre la espira es cero, dado que sobre cada tramo recto se ejercen fuerzas que se anulan de a pares. En particular, las fuerzas del par  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$  son colineales, pero las fuerzas del par  $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_4$  no lo son, sino que forman una **cupla**, como se ve en la vista lateral. La magnitud de estas fuerzas es:  $F_2 = F_4 = I_0 a B$  de modo que la cupla vale:

$$T = F_2 b \sin \alpha = I_0 ab B \sin \alpha = I_0 S B \sin \alpha \Rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}}$  es el llamado **momento magnético** de la espira.

La expresión de la cupla se puede generalizar a espiras de cualquier forma<sup>10</sup>. El momento magnético es una propiedad importante de la espira, como el momento dipolar en el campo eléctrico.



La existencia de la cupla lleva a que la espira tienda a rotar de manera que el momento magnético se coloque paralelo al campo aplicado. En esta situación el producto vectorial es nulo (porque lo es el seno del ángulo entre  $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{B}$ ) y se anula la cupla. Podemos asociar una **energía potencial** a la posición angular del momento magnético respecto del campo aplicado, energía que se hace mínima en la posición de equilibrio. Una rotación infinitesimal produce una variación de esta energía potencial que podemos escribir:

$$dU_m = T d\alpha = mB \sin \alpha d\alpha$$

Integrando:  $U_m = \int mB \sin \alpha d\alpha = -mB \cos \alpha = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B} \Rightarrow U_m = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B}$

es la **energía potencial de rotación** asociada a la posición angular de la espira en el campo magnético.

**Ejemplo 3-10:** Hallar la cupla máxima que ejerce el campo magnético terrestre a latitud media y a nivel del mar sobre una espira circular de 10 cm de radio por la que circula una corriente de 1A.

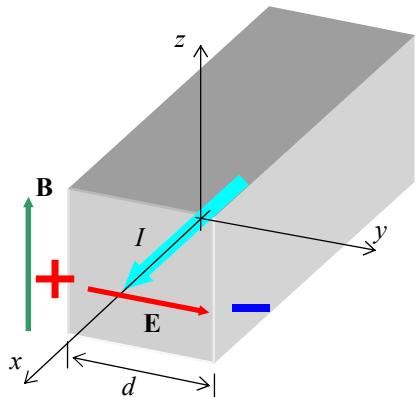
El campo magnético terrestre a latitud media y al nivel del mar es aproximadamente de  $6 \times 10^{-5}$  T. El momento magnético de la espira es  $m = I_0 S \approx 3.14 \times 10^{-2}$  Am<sup>2</sup>. La cupla máxima será entonces:  $\tau_M = mB \approx 1.9 \times 10^{-6}$  Nm. Como se ve, una cupla muy perqueña

<sup>10</sup> La espira no necesariamente debe ser una curva plana. En general, el vector momento magnético para una curva cualquiera se puede escribir:  $\mathbf{m} = I(S_{yz}\hat{\mathbf{x}} + S_{zx}\hat{\mathbf{y}} + S_{xy}\hat{\mathbf{z}})$  donde  $S_{yz}$ ,  $S_{zx}$  y  $S_{xy}$  son las proyecciones de la superficie alabeada sobre los planos subíndices (ver J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Cristy, "Fundamentos de la teoría electromagnética", 4ta. Ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 1996, Sección 8.2, para más detalles).

## Efecto Hall

Si se coloca un conductor en forma de paralelepípedo que transporta corriente en presencia de un campo magnético, se genera una fuerza magnética sobre los portadores de carga:

$$\mathbf{F}_m = q \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} = q \langle v \rangle \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \hat{\mathbf{z}} = -q \langle v \rangle B \hat{\mathbf{y}}$$



donde  $\langle \mathbf{v} \rangle$  es la velocidad media del conjunto de portadores. Debido a esta fuerza, se produce una acumulación de carga positiva sobre una cara lateral (la izquierda en el ejemplo de la figura) del conductor, y una acumulación de carga negativa sobre la otra cara. Esto da lugar a un campo eléctrico, que se opone a la redistribución de carga inducida por el campo magnético. Se llega a una situación de equilibrio cuando:

$$F_e = qE = F_m \Rightarrow E = \langle v \rangle B$$

Podemos relacionar la velocidad media de los portadores de carga con la corriente ya que:

$$\mathbf{j} = \rho \langle \mathbf{v} \rangle = q n \langle \mathbf{v} \rangle \Rightarrow E = j B / q n = R_H j B$$

donde  $R_H = 1/qn$  es el llamado **coeficiente de Hall**<sup>11</sup> del material. Otro parámetro usado en la literatura es la **movilidad de Hall**, definida como el producto del coeficiente de Hall y la conductividad del material:  $\mu_H = R_H \sigma$ . En términos de la descripción microscópica de la corriente (pág. 3-4) podemos escribir:  $\mu_H = R_H \sigma = \frac{\sigma}{qn} = \mu$  y se ve que la movilidad de Hall coincide con

la movilidad de los portadores en el caso simple cuando hay un único tipo de portadores.

El campo de Hall da lugar a una ddp entre las caras laterales del conductor que vale:  $\Delta V = Ed = \langle v \rangle Bd \propto B$  y es proporcional al valor de la inducción magnética. En la figura se muestra la polaridad de esta ddp para portadores de carga positiva.

Entre otras aplicaciones se usa este efecto para medir campos magnéticos o para determinar el signo y la movilidad de los portadores de carga en un material. Se ve que el signo de la ddp de Hall está relacionado con el signo de los portadores de carga. En un experimento se conoce la corriente aplicada y entonces la densidad  $j$ , el campo magnético aplicado, las dimensiones y se mide la ddp. De estos valores se puede obtener la movilidad de los portadores y a partir de ella la concentración de portadores (número por unidad de volumen).

**Ejemplo 3-11:** Halle la ddp de Hall para una cinta de cobre de sección cuadrada de  $1\text{mm}^2$  que lleva una corriente de  $25\text{ A}$ , cuando se aplica un campo  $\mathbf{B}$  de  $2\text{T}$ . Considere que los portadores de corriente son electrones y que su concentración es  $n = 8.4 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}$ .

La densidad de corriente en la cinta es:  $j = I/S = 2.5 \times 10^7\text{ A/m}^2$

La velocidad media de los electrones es:  $\langle v \rangle = j/en \approx 1.86 \times 10^{-3}\text{ m/s}$

El campo eléctrico transversal de Hall es:  $E = \langle v \rangle B \approx 3.72\text{ mV/m}$

Y la ddp de Hall es:  $\Delta V = Ed \approx 3.72\text{ }\mu\text{V}$

La movilidad de los electrones y el coeficiente de Hall son:

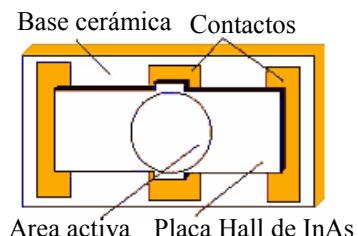
$$\mu = \langle v \rangle / E = 2\text{ m}^2/\text{Vs} \quad R_H = 1/qn \approx 7.43 \times 10^{-11}\text{ m}^3/\text{C}$$

de forma que la conductividad de la muestra es:  $\sigma = \mu / R_H \approx 2.7 \times 10^{10}(\Omega\text{m})^{-1}$

<sup>11</sup> En general, el coeficiente de Hall depende del tipo (o tipos) de colisión que da lugar a la resistividad del material, las movilidades y tipos de portadores del material. Esto es particularmente aplicable al importante caso de la aplicación del efecto Hall a la caracterización de semiconductores. Para más detalles ver, por ejemplo, S.M. Sze, "Physics of Semiconductor Devices", Wiley-Interscience, New York, 1969.

## Sensores Hall

Este efecto fue descubierto en 1879 por el físico norteamericano Edwin Hall sobre hojas de oro. Todos los conductores presentan efecto Hall, pero los valores de tensión medidos son muy pequeños, de modo que sólo se logró utilizar este fenómeno para aplicaciones industriales recientemente, cuando se desarrollaron semiconductores de GaAs o InAs, que dan tensiones de Hall relativamente grandes. Prácticamente todos los sensores modernos se basan en estos materiales.



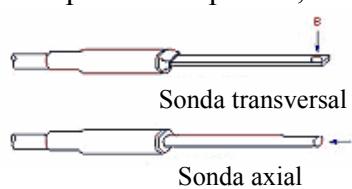
En la figura se muestra un esquema de un sensor Hall. Sobre un sustrato cerámico se crece una capa de InAs a la que se fijan contactos metálicos. El área activa es el centro de la capa, donde los efectos de los bordes y contactos no introducen deformaciones en las líneas de corriente. Con las técnicas actuales se logran áreas activas de diámetros del orden de  $0.13\text{mm}$  y espesores de  $0.25\text{mm}$ , lo que lleva a dispositivos muy pequeños.

En la siguiente tabla se dan las especificaciones de algunos dispositivos fabricados por Honeywell Inc.

TIPO	Tensión Alimentación (V)	Rango de uso (G)	Sensibilidad (mV/G)
SS94A1	6.6 - 12.6	$\pm 500$	5
SS94A1F	6.6 - 12.6	$\pm 100$	25
SS94A2C	6.6 - 12.6	$\pm 1000$	2.5
SS94A2D	6.6 - 12.6	$\pm 2500$	1

Las ventajas principales en el uso de sensores basados en el efecto Hall son:

- dispositivos de estado sólido, fácilmente incorporable a circuitos integrados;
- sin partes móviles ni frágiles;
- fácilmente encapsulables para protección en ambientes hostiles;
- larga vida (del orden de 30 millones de operaciones);
- alta velocidad de respuesta (por encima de 100 kHz);
- compatible con niveles de lógica integrada;
- amplio rango de temperaturas de operación (-40°C a 150°C);
- operación repetible;



Una de las aplicaciones más comunes de los sensores Hall son los medidores de campo magnético o **gaussímetros**. En estos aparatos se tiene una sonda con el sensor y circuitería electrónica de procesamiento, amplificación y presentación. Hay fundamentalmente dos tipos de sondas: la **sonda transversal**, que mide la componente del campo magnético perpendicular a ella, y la **sonda axial**, que mide la componente del campo magnético a lo largo de ella.

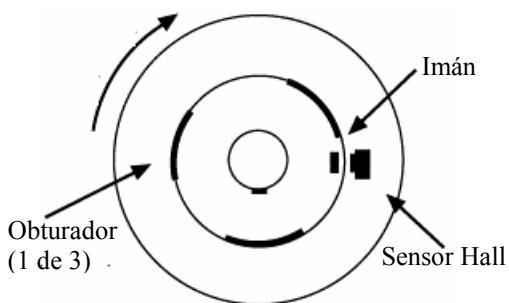
El límite inferior de campo que los gaussímetros de efecto Hall puede medir es actualmente del orden de  $1\text{mG}$  (el campo magnético terrestre a nivel del mar es del orden de  $1\text{G}$ ). Por debajo de este valor, el nivel de ruido no permite obtener mediciones precisas.

En otra aplicación, se puede usar el sensor de Hall para medir la corriente que circula por un circuito. Esta corriente se hace pasar por una bobina que crea el campo magnético que actúa sobre el sensor propiamente dicho.

Otras aplicaciones comunes de sensores Hall son sensores de posición y movimiento lineal o rotativo. Aparecen sensores Hall en múltiples sistemas de control de velocidad, frenado y torque en automóviles actuales. Chrysler comenzó a utilizar sensores de Hall para controlar el avance de encendido en el año 1978. La mayoría de los diseños utilizan un obturador que pasa frente a una abertura en el sensor, obstruyendo las líneas de campo magnético producidas por un imán per-

manente. Este tipo de sensor se conoce como **sensor de paleta** u obturador). Cuando el campo actúa sobre el sensor, se detecta un voltaje de Hall aproximadamente constante. En el momento en que el obturador corta las líneas de campo, el voltaje de Hall cae rápidamente, detectando el pasaje del obturador. Este sencillo esquema permite detectar el pasaje de un elemento frente a una posición fija. Si el elemento móvil gira, (el caso de mayor interés en aplicaciones a automóviles) se produce una señal periódica de la que se puede extraer fácilmente la velocidad de giro. Si el móvil se

mueve linealmente, se colocan varios sensores a lo largo de la línea de movimiento y las sucesivas señales dan información acerca de su posición y velocidad.

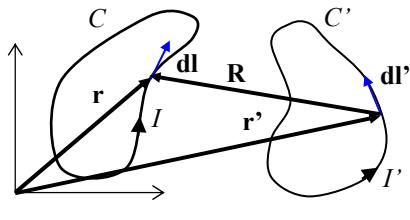


La señal Hall puede procesarse, de acuerdo a las necesidades, para dar una salida digital o analógica. En el primer caso el sistema habitualmente se usa para tomar decisiones a partir de la información, y se conocen como **interruptores Hall (Hall switches)**. En el segundo caso se requiere una salida aproximadamente proporcional a la señal medida, y se habla de **sensores de Hall lineales**. Un cuadro de algunas aplicaciones actuales de ambos tipos es el siguiente:

Aplicaciones en automotores	Aplicaciones industriales
<p><b>Hall switches</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• posición de árbol de levas</li> <li>• posición de cigüeñal</li> <li>• sensor de ignición</li> <li>• velocidad del motor</li> <li>• velocidad de las ruedas</li> <li>• control de tracción</li> <li>• sistemas de limpiavidrios</li> <li>• cerradura</li> <li>• seguridad central</li> <li>• ajuste de asientos</li> <li>• levantador de ventanilla</li> <li>• deslizador de techo</li> <li>• switch del cinturón de seguridad</li> <li>• switch de luz de frenos</li> <li>• ajuste de espejos</li> <li>• asistencia de frenos</li> <li>• posición de diferencial</li> </ul> <p><b>Sensores lineales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• dirección automática</li> <li>• frenos automáticos</li> <li>• sensor de posición del acelerador</li> <li>• control de suspensión activa</li> <li>• ángulo de la dirección</li> <li>• ajuste del alcance de luces</li> <li>• medición de corriente</li> <li>• mantenimiento de batería</li> <li>• sensor de nivel de líquido</li> <li>• dirección de potencia</li> </ul>	<p><b>Hall switches</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• commutación de motores CC sin escobillas</li> <li>• ventiladores de refrigeración</li> <li>• medición de RPM</li> <li>• sensores de velocidad de volantes</li> <li>• switch de posición</li> <li>• switch sin contacto</li> <li>• nivel de líquidos</li> <li>• flujo de líquidos</li> <li>• switch de presión</li> <li>• switch rotativo</li> </ul> <p><b>Sensores lineales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• sensor de posición angular</li> <li>• medición de corriente</li> <li>• medición de posición</li> <li>• medición de distancia</li> <li>• medición de presión</li> <li>• medición de fuerza</li> <li>• medición de cupla o torque</li> <li>• medición de campo magnético</li> </ul>

### El campo magnético de corrientes estacionarias. Ley de Biot-Savart

Las experiencias realizadas por Oersted señalaron la existencia de una acción magnética de una corriente sobre una aguja imanada. Las características de esta acción, descriptas en términos de una fuerza fueron descubiertas en experimentos realizados por Biot y Savart, como se describió en el Ejemplo 3.9.



En notación moderna, la fuerza que describe la acción magnética de la corriente **estacionaria**  $I'$  que circula a lo largo de un circuito  $C'$  sobre otro circuito  $C$  por el que circula la corriente **estacionaria**  $I$  se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_C = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I I' \frac{dl \times (dl' \times \mathbf{R})}{R^3} \quad \text{donde} \quad R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

Pero habíamos definido previamente la fuerza que un campo magnético ejerce sobre un circuito que transporta corriente como:  $\mathbf{F}_C = I \oint_C dl \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$

Nuevamente nos encontramos con una ecuación que describe la **acción directa**, en este caso magnética, entre dos circuitos que transportan corriente y de otra ecuación que introduce un campo mediador, en este caso el campo de inducción magnética. Por los mismos motivos que en el caso eléctrico, es conveniente utilizar el modelo de campo, donde una corriente crea la perturbación campo en el espacio, y este campo actúa sobre la otra corriente, en forma local, dando lugar a la acción ponderomotriz. De estas dos ecuaciones podemos expresar el campo de inducción magnética creado por la corriente que circula por un circuito:

$$\mathbf{F}_C = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I I' \frac{dl \times (dl' \times \mathbf{R})}{R^3} = \oint_C I dl \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} I' \frac{(dl' \times \mathbf{R})}{R^3} \right] \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{C'} \frac{dl' \times \mathbf{R}}{R^3}}$$

Esta expresión se conoce como **ley de Biot-Savart**.

Podemos reescribir esta expresión realizando el cambio ya introducido:  $I \oint_C dl = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$

con lo que obtenemos otra forma de la ley de Biot-Savart:  $\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'}$

**Ejemplo 3-12:** Hallar el campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  creado por un hilo de corriente recto de longitud infinita.

Debido a la simetría cilíndrica de la distribución de corriente, elegimos un sistema de coordenadas cilíndricas con su eje  $z$  coincidente con la línea de corriente. Para un diferencial de línea  $dl'$  la ley de Biot-Savart permite calcular el campo elemental creado en un punto cualquiera del espacio:

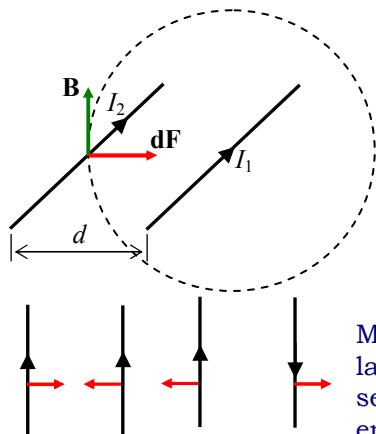
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz' \sin \alpha \hat{\phi}}{R^2}$$

ya que  $dl' = dz' \hat{z}$  y  $\alpha$  es el ángulo formado entre  $dl'$  y  $\mathbf{R}$ . Se ve que el campo tiene únicamente dirección según el versor  $\hat{\phi}$ . Como  $\sin \alpha = \rho/R$  tenemos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{R^2} dz' = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{R^3} = \frac{\mu_0 I \rho}{4\pi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[\rho^2 + z'^2]^{3/2}}$$

La integral vale  $2/\rho^2$  y entonces:  $\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}}$  y sólo es función de la distancia a la línea. Se ve además que las líneas de campo son cerradas.

**Ejemplo 3-13:** Hallar la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos de corriente rectos y paralelos, de longitud infinita separados en  $d$ .



Consideramos primero que las corrientes circulan en el mismo sentido. Podemos calcular la fuerza que el hilo 1 ejerce sobre un elemento del otro:  $dF_2 = I_2 dl_2 \times B_1$

Como el campo creado por el hilo 1 es perpendicular a la corriente de la figura observamos que la fuerza es de **atracción** y tenemos:

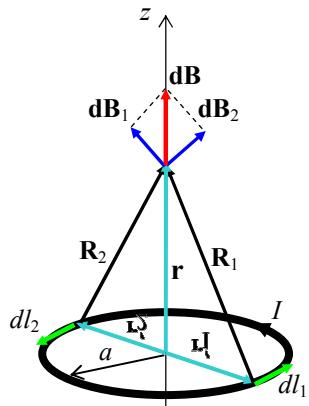
$$dF_2 = I_2 dl_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_2 \Rightarrow \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Mediante un razonamiento análogo, se obtiene el mismo valor para la fuerza que el hilo 2 ejerce sobre el hilo 1. Si las corrientes tienen sentidos opuestos, las fuerzas serán de repulsión, como se muestra en la figura.

Por otra parte, la fuerza entre dos hilos de corriente da el soporte para la definición de la unidad de corriente en el SI. De acuerdo a la definición oficial, que reproducimos del cuadro del Capítulo 1:

**Ampere:** Corriente eléctrica constante que, si se mantiene en dos conductores rectos paralelos de longitud infinita y despreciable sección circular recta, separados en 1 metro, produciría entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por unidad de longitud.

**Ejemplo 3-14:** Hallar el campo de inducción magnética creado por una espira de corriente sobre su eje.



Debido a la simetría cilíndrica del problema, elegimos un sistema de referencia con su eje  $z$  coincidente con el eje de la espira. Como se ve en la figura, dos elementos de arco de la espira ubicados simétricamente respecto de su centro producen campos cuyas componentes normales a  $z$  se anulan entre sí y sólo nos quedan las componentes según  $z$ .

$$\text{Entonces: } dB(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl' \times R}{R^3} \Big|_z \hat{z}$$

$$\text{Como: } \begin{cases} dl' = dl' \hat{\phi} \\ R = r - r' = z \hat{z} - a \hat{\rho} \end{cases} \Rightarrow dl' \times R = z dl' \hat{\rho} + a dl' \hat{z}$$

y siendo  $dl' = a d\phi'$  tenemos:

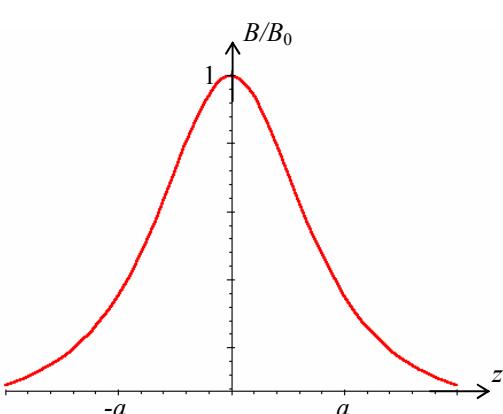
$$dB(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a^2 d\phi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi (z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Pero:  $\mathbf{m} = I a^2 \hat{z}$  es el **momento magnético** de la espira, y entonces:

$$B(r) = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mathbf{B}_0}{(1 + z^2/a^2)^{3/2}}$$

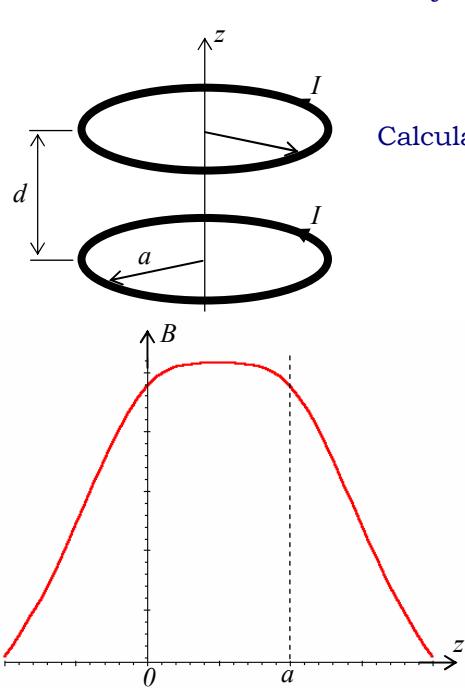
$$\text{con } \mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{z}$$

En la figura se muestra la variación del vector de inducción magnética sobre su eje con la distancia a la espira.



**Ejemplo 3-15:** Hallar el campo de inducción magnética creado por un par de espiras con eje común por las que circula la misma corriente (**bobinas de Helmholtz**)

De acuerdo al resultado del Ejemplo previo:



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \right]$$

Calculamos las primeras dos derivadas respecto de  $z$ :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dz} = -3\mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{z-d}{(a^2 + (z-d)^2)^{5/2}} \right]$$

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} = 3\mathbf{B}_0 a^3 \left[ \frac{4z^2 - 3a^2}{(a^2 + z^2)^{7/2}} + \frac{4(z-d)^2 - 3a^2}{(a^2 + (z-d)^2)^{7/2}} \right]$$

Se puede demostrar (hacerlo) que la primera derivada se anula para  $z = d/2$  y la segunda vale:

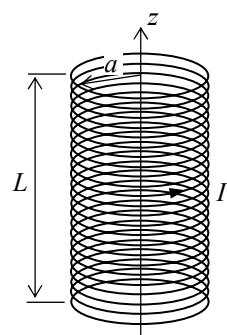
$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} = 768\mathbf{B}_0 a^3 \frac{d^2 - a^2}{(4a^2 + d^2)^{7/2}}$$

o sea que también se anula para  $d = a$ . En estas circunstancias el campo  $\mathbf{B}$  es casi constante sobre el eje de las espiras en el espacio entre ellas. Por ello esta disposición se utiliza (en lugar de las espiras únicas hay bobinas o solenoides de sección circular para aumentar el

campo) para lograr un **campo uniforme** en una región del espacio.

Una aplicación usual de las bobinas de Helmholtz es lograr una región libre de campo magnético (por ejemplo, contrarrestando el campo magnético terrestre) para la realización de experiencias donde no existan acciones magnéticas.

**Ejemplo 3-16:** Hallar el campo de inducción magnética creado por un **solenoide**.



Un solenoide es un conductor filiforme arrollado en forma helicoidal por el que circula una corriente. Esta estructura fue inventada por Ampère para realizar sus experimentos. Lo podemos modelizar por un conjunto de espiras adyacentes. Siguiendo la nomenclatura habitual, llamamos  $N$  a la cantidad de vueltas (o de espiras) y  $n = N/L$  al número de vueltas por unidad de longitud. Así, podemos calcular el campo  $B$  creado en el eje del solenoide superponiendo los campos creados por cada espira. Para facilitar esta superposición, consideramos que el solenoide se puede dividir en "rodajas" de espesor infinitesimal, cada una de las cuales tendrá  $n dz'$  espiras. De acuerdo a los resultados del **Ejemplo 3-14** un elemento situado a la altura  $z'$  creará un campo en  $z$  dado por:

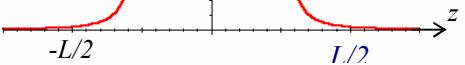
$$dB(z) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} n dz'}{2[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \quad \text{con} \quad \mathbf{m} = I a^2 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{e integrando a todo el solenoide:}$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 \mathbf{m} n}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \quad \text{de donde:}$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2 + a^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{(z-L/2)^2 + a^2}} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

El campo en el interior del solenoide es bastante uniforme hasta cerca de los extremos, con valores cercanos al del centro:  $B(z=0) = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}$

Cuando el solenoide es muy largo ( $L \gg a$ ) podemos usar la aproximación:  $\mathbf{B}(z) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}$



### Propiedades del campo de inducción magnética

Como todo campo vectorial, el campo  $\mathbf{B}$  creado por corrientes estacionarias queda unívocamente definido si se especifican su divergencia y su rotor. Ambas cantidades surgen de las ecuaciones de Maxwell. También se pueden obtener a partir de la ley de Biot-Savart que hallamos en la sección precedente, llegando a idénticos resultados. Estas demostraciones están en el Apéndice 4:

$$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Estas ecuaciones solamente se cumplen para el campo de inducción magnética creado por corrientes estacionarias.
- Se observa que el campo de inducción magnética no tiene fuentes escalares (es un campo solenoideal) y entonces sus líneas de campo son cerradas.
- Se observa que el campo de inducción magnética tiene fuentes vectoriales (la densidad de corriente eléctrica) y que, en general, no es conservativo.

Estas propiedades diferenciales del campo  $\mathbf{B}$  se pueden escribir como propiedades integrales:

$$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) dv = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} ds = 0$$

donde se ha utilizado el teorema de la divergencia. Esta es la "ley de Gauss" para el campo de inducción magnética.

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \bullet \mathbf{n} ds = \int_S \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{n} ds = \mu_0 I_s$$

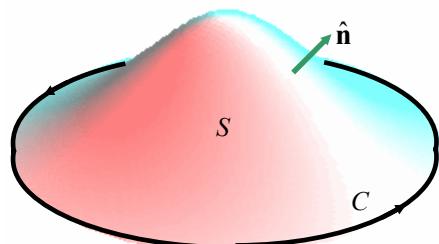
Usando el teorema de Stokes:

$$\int_S [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})] \bullet \mathbf{n} ds = \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{l} = \mu_0 I_s$$

y la circulación del vector  $\mathbf{B}$  a lo largo de una curva cerrada es igual a  $\mu_0$  multiplicado por la corriente eléctrica que fluye a través de una superficie abierta cualquiera cuya frontera es la curva. También se dice que la corriente es la "concatenada" o "encerrada" por la curva. En esta expresión el sentido de circulación a lo largo de la curva y la normal a la superficie abierta (que define el sentido positivo de la corriente concatenada) deben cumplir con la regla de la mano derecha que surge de aplicar el teorema de Stokes, como se indica en la figura.

Esta expresión se conoce como **ley de Ampère** para el campo de inducción magnética.

Por otra parte, las propiedades de  $\mathbf{B}$  dan origen a **potenciales magnéticos**, que tienen la misma utilidad para el cálculo del campo que el potencial electrostático para el campo eléctrico. Analizaremos los potenciales magnéticos en la siguiente sección.



### Potencial vectorial magnético

Como el campo de inducción magnética es solenoidal, se puede expresar como el rotor de otro campo vectorial, que llamamos **potencial vectorial magnético**, ya que la divergencia de un rotor siempre es cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})}$$

A partir de la expresión de la ley de Biot-Savart podemos hallar una expresión para  $\mathbf{A}$  en función

de las fuentes, ya que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV'$$

Como además:  $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \phi$  (Capítulo 1 – Identidades vectoriales), si consi-

deramos:

$$\begin{cases} \phi = 1/R \\ \mathbf{F} = \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \frac{\nabla \times \mathbf{j}}{R} - \mathbf{j} \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right)$$

Tenemos entonces:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) \right] dV'$$

La primera integral se anula porque  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no depende de las coordenadas de punto campo y entonces las derivadas implícitas en la operación rotor son nulas y en la segunda integral podemos sacar el operador rotor fuera de la integral porque opera sobre las coordenadas de punto campo mientras que la integración se realiza sobre las coordenadas de punto fuente. Tenemos así:

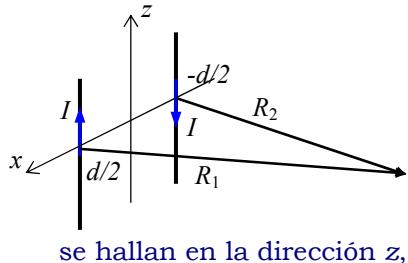
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \right] \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'}$$

La integral que define el potencial vectorial es en ocasiones de cálculo más sencillo que la integral que da el campo  $\mathbf{B}$ , aunque no lo es en los sistemas simples que hemos usado como ejemplo. Su mayor importancia radica en el análisis de la radiación electromagnética (emisión de ondas) creada por corrientes variables en el tiempo.

El potencial vectorial para **circuitos filiformes** es:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}}$$

**Ejemplo 3-17:** Hallar el potencial vectorial magnético creado por una línea bifilar recta de longitud infinita.



La línea bifilar consta de dos hilos que llevan corrientes de igual amplitud y sentidos opuestos, separados en  $d$ . Usamos por comodidad el sistema de coordenadas de la figura. Como los campos no pueden depender de  $z$ , por ser los hilos infinitos, calculamos sobre el plano  $z = 0$ . Para evitar indeterminaciones en el cálculo de las integrales, consideraremos primero que los hilos se extienden entre  $-L$  y  $L$ . Dado que las corrientes se hallan en la dirección  $z$ , el vector  $\mathbf{A}$  sólo tendrá componente  $z$ , y podemos escribir:

$$\begin{aligned} A_z(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{C_1} \frac{dl'_1}{R_1} - \int_{C_2} \frac{dl'_2}{R_2} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + z'^2}} - \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + z'^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + z'^2}} - \int_0^L \frac{dz'}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + z'^2}} \right] \end{aligned}$$

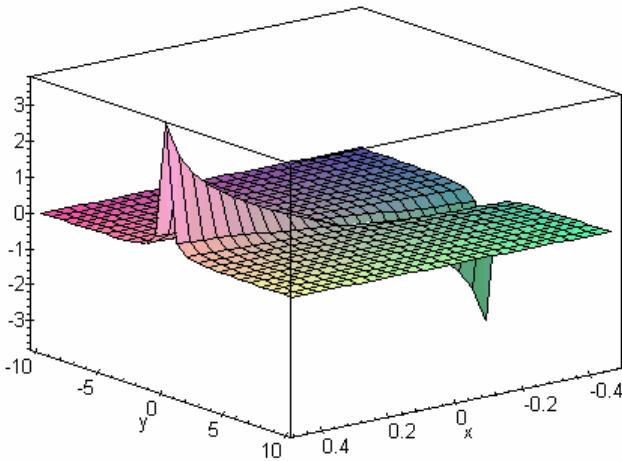
Estas integrales pueden calcularse para obtener:

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + L^2}}{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}} \right) - \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + L^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right) \right]$$

O sea:  $A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{L + \sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + L^2}}{L + \sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + L^2}} \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right)$

y, para  $L \rightarrow \infty$ , la primera fracción se simplifica, con lo que queda:

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{(x-d/2)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+d/2)^2 + y^2}} \right)$$



Se observa que con un solo hilo del par el potencial vectorial queda indefinido cuando  $L \rightarrow \infty$ .

En la figura se muestra la variación de  $A(x, y)$  para  $d = 1m$ . Se observa que  $A$  tiende rápidamente a  $\pm\infty$  cuando nos acercamos a los hilos.

Podemos calcular el campo de inducción magnética como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{y}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ -\left( \frac{y}{(x-d/2)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+d/2)^2 + y^2} \right) \hat{x} + \left( \frac{x-d/2}{(x-d/2)^2 + y^2} - \frac{x+d/2}{(x+d/2)^2 + y^2} \right) \hat{y} \right]$$

que puede escribirse:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \times \left( \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^2} - \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^2} \right)$$

Cada producto vectorial da un campo con líneas circulares alrededor de cada hilo.

## Ecuación diferencial para el potencial vectorial magnético

La ley de Ampère se puede escribir en función del potencial vectorial:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Pero:  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right] dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV'$

donde hemos usado la identidad vectorial (Capítulo 1):  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi$

y el hecho que la densidad de corriente  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no es función de las coordenadas de punto campo. Podemos reescribir esta ecuación usando la misma identidad vectorial como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV'$$

La integral del segundo término se anula porque tratamos con corrientes estacionarias  $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  y la integral del primer término se puede reescribir usando el teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} \right) dV' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \hat{n}}{R} ds' = 0$$

El recinto  $V$  es arbitrario, pero debe incluir todas las fuentes de campo (corrientes). Se puede elegir entonces una superficie frontera  $S$  alejada donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  es cero y la integral se anula.

De la ley de Ampère queda entonces la **ecuación vectorial de Poisson** para  $\mathbf{A}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

cuya solución particular es justamente la expresión de  $\mathbf{A}$  que hallamos previamente.

### Dipolo magnético

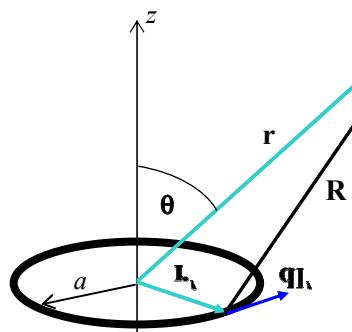
En el **Ejemplo 3-14** se halló el campo  $\mathbf{B}$  producido por una espira circular sobre su eje:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para grandes distancias podemos despreciar  $a^2$  frente a  $z^2$  y:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2z^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \hat{\mathbf{z}}$$

Este es el valor aproximado del campo lejano del llamado **dipolo magnético**. Se observa que es proporcional al momento magnético del dipolo e inversamente proporcional al **cubo** de la distancia.



Para obtener una expresión más precisa de la aproximación dipolar del campo creado por una espira usamos el potencial vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

Vamos a calcular el potencial magnético  $\mathbf{A}$  a distancias lejanas ( $r \gg a$ ) de manera que podemos escribir:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right)$$

y entonces, a primer orden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

donde se anula la integral del primer término. El integrando restante se puede escribir usando las siguientes identidades:

$$(\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}'$$

$$d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')]= (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}') \mathbf{r}' + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Sumando miembro a miembro tenemos:  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] \}$

e introduciendo este resultado en la integral previa nos queda:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0 I}{8\pi r^3} \oint_C \{ (\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}') \times \mathbf{r} + d[\mathbf{r}'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')] \}$$

El segundo término contiene una diferencial total exacta, que evaluada sobre una curva cerrada se anula. Queda entonces:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right] \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}}$$

porque la cantidad entre corchetes es el producto de la corriente  $I$  por el área (vectorial)  $S \hat{\mathbf{n}}$  de la superficie encerrada por la curva  $C$ . Este es el potencial vectorial magnético lejano creado por un

dipolo magnético<sup>12</sup>.

El campo lejano de inducción magnética que crea el dipolo magnético es:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right)$$

Usando la identidad vectorial (Capítulo 1):

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$$

tenemos:

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\nabla \times \left( \mathbf{m} \times \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right) = -\mathbf{m} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) + \nabla \left( \frac{1}{r} \right) (\nabla \bullet \mathbf{m}) - \left( \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \bullet \nabla \right) \mathbf{m} + (\mathbf{m} \bullet \nabla) \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

El primer término se anula porque es proporcional a la delta de Dirac centrada en cero, y aquí estamos calculando el campo lejano. El segundo y tercer términos se anulan porque el momento magnético es una constante. Queda entonces, operando:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \bullet \nabla) \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \bullet \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right]}$$

### Potencial escalar magnético

La ley de Ampère establece que para corrientes estacionarias el rotor del campo  $\mathbf{B}$  es proporcional a la densidad de corriente en todo punto del espacio. Si en un recinto del espacio no hay corrientes (las corrientes que crean el campo deben estar entonces **fueras** del recinto en consideración) el rotor de  $\mathbf{B}$  se anula en ese recinto y puede expresarse como un gradiente de una cierta función escalar que se conoce como **potencial escalar magnético**:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \text{si } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Psi_m(\mathbf{r})$$

El potencial escalar magnético es de interés en campos creados por material magnetizado, donde no existen corrientes eléctricas fuentes de campo. Por ello suele derivarse sus expresiones de cálculo a partir del campo de dipolos magnéticos, que se usan en la modelización del material magnetizado, como veremos más abajo. La ecuación del campo lejano de inducción magnética de un dipolo magnético puede escribirse como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \bullet \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right] = -\mu_0 \nabla \left( \frac{\mathbf{m} \bullet \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right)$$

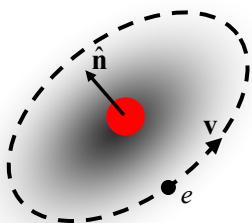
(como puede comprobarse realizando el cálculo en coordenadas esféricas) de manera que podemos definir el **potencial escalar magnético lejano** creado por un dipolo magnético:

$$\boxed{\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{m} \bullet \mathbf{r}}{4\pi r^3}}$$

<sup>12</sup> Obsérvese que en este desarrollo no se ha utilizado la forma circular de la espira. En realidad los resultados obtenidos son válidos para espiras de cualquier forma.

## Materiales magnetizados

Las corrientes eléctricas no son las únicas fuentes que generan interacciones magnéticas. Los materiales magnetizados han sido históricamente las primeras fuentes de interacciones magnéticas. Para describir el comportamiento de los materiales magnetizados usaremos un modelo similar al que utilizamos en el estudio de la polarización. Dado que los electrones pertenecientes a los átomos de un sólido se mueven en las cercanías del núcleo, un modelo ingenuo de un átomo hidrogenoide se puede representar como una carga positiva (el núcleo) alrededor del cual gira una carga negativa (el electrón). Esta carga móvil es efectivamente una corriente, de manera que podemos interpretar este modelo como una espira con un dado momento magnético<sup>13</sup>.

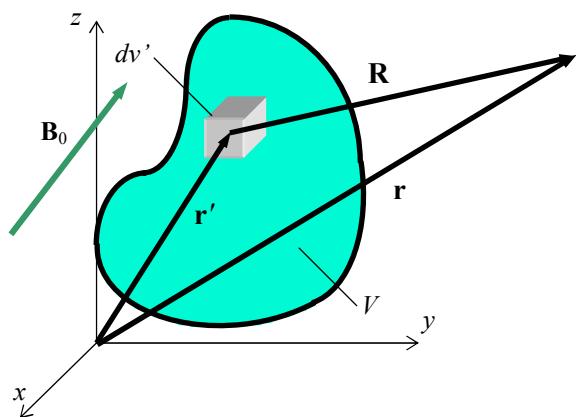


En el estado “normal” de un material no magnetizado, los momentos magnéticos de los átomos (o moléculas u otras unidades magnetizables del material) están orientados al azar y no existe un momento magnético neto en una región macroscópica cualquiera del material.

Al colocar el material en un campo de inducción magnética exterior, aparece una fuerza sobre las “espiras” atómicas que tiende a alinear los momentos magnéticos con el campo aplicado. De esta forma surge un momento magnético neto en regiones del cuerpo que crea un campo de inducción magnética **inducido**, que se superpone con el original.

## Potencial vectorial inducido

Podemos calcular este campo inducido dividiendo el cuerpo en elementos de volumen, cada uno de los cuales tiene asociado un momento magnético elemental  $\mathbf{dm}(\mathbf{r}')$ . Como se trata de un elemento de volumen infinitesimal, se puede modelizar como un **dipolo magnético**, y el potencial vectorial magnético lejano que genera es, de acuerdo a lo hallado en la sección precedente:



Definimos el **vector magnetización** como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \left. \frac{\mathbf{dm}}{dv'} \right|_{\mathbf{r}'} \Rightarrow \mathbf{dm}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv'$$

con lo que:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

e integrando a todo el volumen del cuerpo resulta:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dv'$$

Este es entonces el potencial vectorial magnético inducido creado por el cuerpo magnetizado. A partir de él se puede calcular el campo  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

<sup>13</sup> Este momento magnético se conoce como momento magnético **orbital** del electrón, porque en mecánica cuántica está asociado a su momento angular orbital. En la teoría del magnetismo se debe tener en cuenta además el momento magnético de **spin** que da origen a fenómenos como el ferromagnetismo y otros. En el próximo Capítulo presentamos una introducción fenomenológica a las propiedades de los materiales magnéticos.

### Corrientes equivalentes de magnetización

El cálculo del potencial vectorial inducido a partir de la magnetización del material puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dV'$$

Pero (Capítulo 1):  $\nabla \times (\phi \mathbf{F}) = \phi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \phi$

Entonces:  $\nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} - \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right)$

y tenemos:  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla' \times \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) \right] dV'$

La segunda integral se puede reescribir usando la identidad (Capítulo 1):

$$\int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) ds \text{ y queda: } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} dV' + \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' \right]$$

Si observamos la primera integral, vemos que **matemáticamente** es equivalente a la ecuación que da el potencial vectorial magnético creado por corrientes eléctricas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

siempre que se identifique:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$  como **una distribución volumétrica de corriente equivalente**. Análogamente, la segunda integral se puede interpretar como el potencial vectorial magnético creado por una **distribución superficial de corriente equivalente**:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$ . Por lo tanto:

**El potencial vectorial inducido creado por un material magnetizado puede calcularse reemplazando al material por una distribución de corriente volumétrica en el volumen del material más una distribución de corriente superficial sobre la superficie frontera de este volumen:**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{R} dV' + \int_S \frac{\mathbf{j}_{M_S}(\mathbf{r}')}{R} ds' \right]$$

con  $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$        $\mathbf{j}_{M_S}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$

### Potencial escalar magnético inducido

Así como un material magnetizado puede reemplazarse por un conjunto equivalente de corrientes para el cálculo del potencial vectorial magnético (y a partir de él calcular el campo de inducción magnética), el modelo de dipolos elementales nos lleva a una descripción alternativa usando el potencial escalar magnético, que puede utilizarse ya que no existen (en el recinto de integración, que ocupa el cuerpo magnetizado) corrientes verdaderas.

Recordamos que el potencial escalar magnético creado por un dipolo magnético elemental en el origen de coordenadas es:  $\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$ . Por lo tanto, si dividimos al cuerpo magnetizado en elementos de volumen como en la sección precedente tenemos que el potencial escalar magnéti-

co creado por uno de ellos es:

$$d\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \bullet \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \mathbf{R}}{4\pi R^3} dv'$$

e integrando a todo el volumen del cuerpo magnetizado:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \mathbf{R}}{4\pi R^3} dv'$$

### Cargas equivalentes de magnetización

Esta expresión puede reescribirse usando las mismas técnicas que nos llevaron a las cargas equivalentes de polarización en el caso de los cuerpos polarizados, ya que se trata de ecuaciones matemáticamente idénticas. Como:

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) \Rightarrow \Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dv'$$

y siendo:  $\mathbf{F} \bullet \nabla f = \nabla \bullet (\mathbf{f}\mathbf{F}) - f \nabla \bullet \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \nabla'(1/R) = \nabla' \bullet [\mathbf{M}(\mathbf{r}')/R] - \nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}')/R$  (observe que las derivadas se realizan sobre las coordenadas primadas), tenemos:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[ \nabla' \bullet \left( \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{\nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} \right] dv' = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}}{R} ds' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia para reescribir la primera integral. Esta última expresión es equivalente a:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

que equivale al **potencial electrostático** que crearía una **distribución de carga libre** con densidades volumétrica  $\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}')$  y superficial  $\sigma_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}$ .

Por lo tanto:

**Podemos calcular el potencial escalar magnético inducido creado por un cuerpo magnetizado reemplazando al cuerpo por una distribución equivalente de carga libre y hallando el potencial electrostático asociado:**

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

con  $\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad \sigma_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}$

A diferencia del uso del potencial vectorial magnético, que puede usarse cuando hay corrientes verdaderas o corrientes equivalentes de magnetización, el potencial escalar magnético **sólo** es utilizable cuando en el recinto de integración no hay corrientes verdaderas, y por lo tanto su mayor utilidad se da cuando se trabaja con imanes permanentes.

### Campo magnético. Forma general de la ley de Ampère

La ley de Ampère liga el rotor del campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  con las corrientes eléctricas, que son sus fuentes vectoriales. Cuando existen además materiales magnetizados éstos son también fuentes de campo, y pueden introducirse por superposición en la ley de Ampère a través de las corrientes equivalentes de magnetización:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r})]$$

de donde:  $\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} \right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\mu_0} \right) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$

Llamamos:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\mu_0}$   $[H] = \frac{A}{m}$ ,  $1 Oe = 79.6 A/m$

$\mathbf{H}$  es el vector **campo magnético**. Aunque en el **SI** la unidad es  $[A/m]$ , se usa también la unidad **Oersted**.

Finalmente:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{l} = I$$

es la nueva forma de la **ley de Ampère** donde se ve que **las fuentes vectoriales del campo magnético son las corrientes reales**.  $\mathbf{H}$  tiene el mismo sentido físico que el vector desplazamiento en la electrostática, es decir ligar al campo con sus fuentes de carga o corrientes **reales**. Como dijimos al comienzo de esta sección, en general el material se ve magnetizado por la alineación de sus elementos magnetizables (átomos, moléculas, etc.) con un campo aplicado<sup>14</sup>. Por lo tanto, la magnetización tiene que ser función del campo aplicado (y del campo total) y podemos escribir:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}[\mathbf{B}(\mathbf{r})] = \mathbf{M}[\mathbf{H}(\mathbf{r})]$$

En muchos materiales la magnetización es proporcional al campo magnético:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

donde  $\chi_m$  se conoce como **susceptibilidad magnética** del material, y que normalmente depende también del campo magnético, aunque en muchos materiales no fácilmente magnetizables es constante respecto del campo.

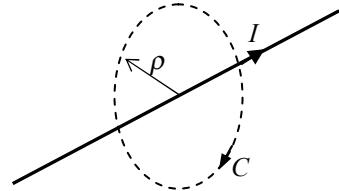
Además, como:  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})] \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [1 + \chi_m] \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$

$\mu$  se conoce como **permeabilidad** del material. También se puede escribir:  $\mu = \mu_r \mu_0$  donde  $\mu_r$  es la **permeabilidad relativa**.

En el Capítulo siguiente, donde estudiamos en mayor detalle las propiedades magnéticas de los materiales, presentamos varias tablas de propiedades magnéticas de materiales comúnmente usados en la ingeniería.

**Ejemplo 3-18:** Hallar el campo magnético creado por un hilo de corriente recto de longitud infinita.

Este problema fue resuelto en el **Ejemplo 3-12** usando la ley de Biot-Savart. Ahora vamos a usar la ley de Ampère.



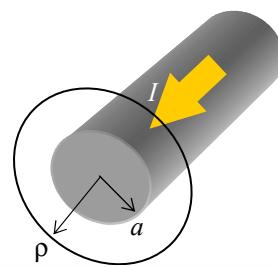
Tomamos un sistema de coordenadas cilíndricas con su eje  $z$  coincidente con el hilo. La simetría cilíndrica del problema hace que el campo magnético creado no puede depender del ángulo alrededor del eje ni de la posición a lo largo del mismo. Luego:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\rho)$ . Además, la ley de Biot-Savart nos permite deducir que sólo hay componente según  $\hat{\phi}$ . Con todo esto, las líneas de campo son circulares.

Tomamos entonces una curva para calcular la circulación de la ley de Ampere que es una circunferencia de radio  $\rho$  con su centro sobre el hilo. Tenemos así:

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{l} = I \Rightarrow H(\rho) 2\pi\rho = I \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

que es el mismo resultado obtenido en el **Ejemplo 3-12**.

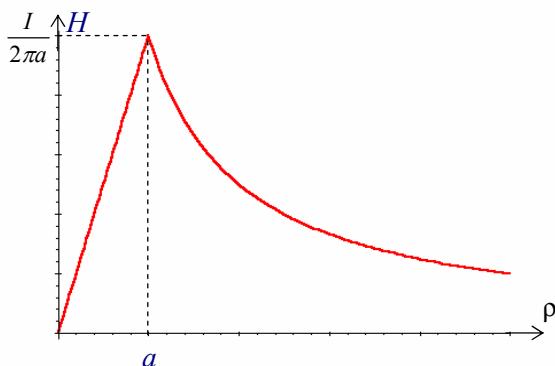
<sup>14</sup> En el próximo capítulo veremos el caso de los imanes que tienen una magnetización aún en ausencia de campo aplicado.



**Ejemplo 3-19:** Hallar el campo magnético creado por un conductor cilíndrico recto muy largo en todo el espacio.

Aplicando la ley de Ampère, el campo magnético fuera del conductor ( $\rho > a$ ) es igual al que se obtiene si toda la corriente está concentrada en un hilo de sección nula en el eje del conductor:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (\rho \geq a)$$



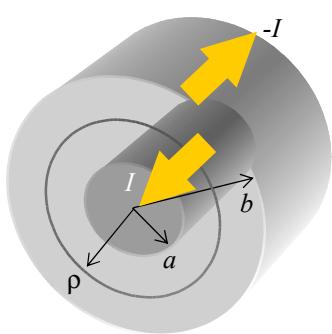
Para puntos interiores del conductor ( $\rho < a$ ) la expresión de  $\mathbf{H}$  es similar, pero sólo debe considerarse la corriente encerrada por la curva de circulación. Suponemos que la corriente está distribuida uniformemente en la sección:

$$I_\rho = \frac{I}{\pi a^2} \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I_\rho}{2\pi\rho} \hat{\phi} = \frac{I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a)$$

de modo que el campo crece linealmente con el radio dentro del conductor y luego decae inversamente proporcional al radio. Sobre el borde del conductor ambos valores son iguales.

**Ejemplo 3-20:** Hallar el campo magnético creado por un cable coaxil recto de longitud infinita.



Un coaxil transporta corrientes de igual magnitud y sentido opuesto en ambos conductores. Aplicamos el resultado del Ejemplo precedente. Entre los dos conductores sólo aparece el campo creado por el conductor interior, ya que la corriente que circula por el conductor exterior no es concatenada por la curva de circulación.

Además, como se trata de radios mayores que el radio del conductor interior, el campo es equivalente al de un hilo que transporta toda la corriente en el eje del coaxil:

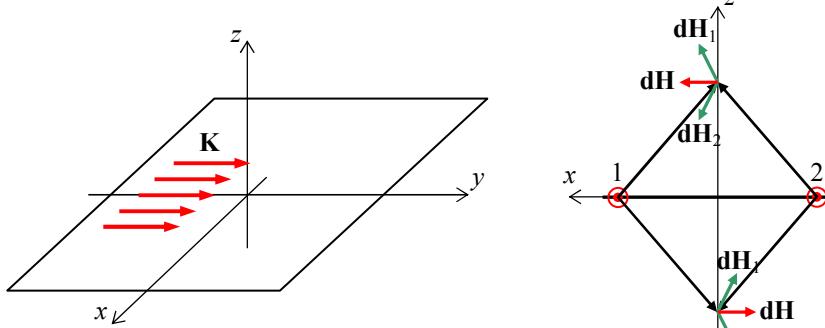
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (a \leq \rho \leq b)$$

Dentro del conductor interior, si la distribución de corriente es uniforme, el campo es el mismo que en el Ejemplo precedente:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a)$$

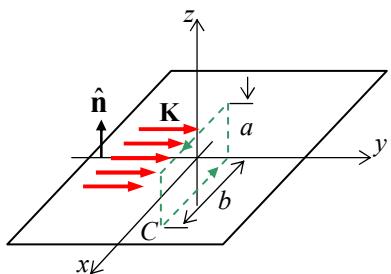
Finalmente, si aplicamos la ley de Ampère para una curva fuera del coaxil, como el campo magnético debe seguir manteniendo las mismas características de simetría que en el resto del espacio, y como la corriente concatenada es cero [ $I+(-I)$ ], el campo también debe ser cero. No existe así campo magnetostático fuera de un coaxil. Tampoco existe campo electrostático cuando los conductores del coaxil están cargados como un capacitor, lo que hace que a baja frecuencia un cable coaxil no genere interferencias.

**Ejemplo 3-21:** Hallar el campo magnético en el interior de una línea infinita de planos paralelos.



Primero analizamos el campo creado por un solo plano. Como se ve en la figura, circula una corriente uniforme sobre el plano de densidad  $\mathbf{K}$  ( $A/m$ ). Podemos dividir el plano en cintas a lo largo del eje  $y$  con espesor infinitesimal  $dx$ , hallar el campo que generan estas cintas, que se comportan como hilos con

ductores, y luego aplicar superposición. Nosotros vamos a usar la ley de Ampère, pero esta idea nos sirve para determinar las propiedades del campo creado por el plano total. De la figura de la derecha se ve que, por simetría, el campo  $\mathbf{H}$  debe ser horizontal (paralelo al plano) y tiene distintos sentidos al atravesar el plano, ya que todo el plano se puede modelizar como la superposición de pares de cintas como las indicadas con 1 y 2 en la figura.



Tomamos entonces la curva  $C$ , un rectángulo vertical de lados  $a$  y  $b$  para aplicar la ley de Ampère (obsérvese que hemos elegido el sentido de circulación para que el flujo de corriente sobre la superficie del rectángulo sea positivo). Sólo habrá contribución a la circulación sobre los lados horizontales, donde  $\mathbf{H}$  es paralelo a la curva  $y$  se tiene:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2H_0b = Kb \Rightarrow H_0 = K/2$$

Como  $\mathbf{H}$  tiene la dirección de  $x$  resulta:  $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{n}$

Resuelto el problema de un solo plano, para hallar el campo en el caso de la línea de planos paralelos aplicamos superposición, teniendo en cuenta que las corrientes en ambos planos tienen sentidos opuestos. Si un plano está en  $z = 0$  y el otro en  $z = d$ , queda entonces:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{para } z < 0 \\ \mathbf{K} \times \mathbf{n} & \text{para } 0 < z < d \\ 0 & \text{para } z > d \end{cases}$$

Nuevamente en este caso, como en el del coaxil, no hay campo fuera de la estructura.

### Condiciones de frontera del campo magnético.

Las propiedades de los vectores magnéticos (ley de Gauss y de Ampère) llevan a que se deben cumplir ciertas condiciones de frontera al cruzar la interfase entre dos medios de permeabilidades diferentes. Estas propiedades se deducen de la misma manera que las correspondientes al campo electrostático:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n_1} = B_{n_2} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad H_{t_1} - H_{t_2} = j_s \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s \end{aligned}$$

En esta última ecuación se conservan las componentes tangenciales del vector campo magnético al cruzar la interfase, salvo que exista sobre ella una **densidad superficial de corriente eléctrica**. En la práctica no existen corrientes superficiales, de manera que habitualmente la condición de borde es que se conservan las componentes tangenciales del vector campo magnético al cruzar la interfase.

### Flujo magnético

El flujo del campo de inducción magnética a través de una superficie, el llamado **flujo magnético**, es una cantidad que es de mucha utilidad. Podemos expresarla en términos del potencial vectorial magnético:

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Rightarrow \Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S (\vec{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \Rightarrow \Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

**El flujo magnético a través de una superficie abierta  $S$  es igual a la circulación del potencial vectorial magnético a lo largo de la curva borde de la superficie:**

$$\Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

## Autoinductancia e inductancia mutua

La acción de campos magnéticos sobre circuitos es de mucha importancia en la ingeniería eléctrica, especialmente cuando se trata de campos variables en el tiempo, que veremos en un Capítulo posterior.

Para describir esta acción se introducen los conceptos de:

**Inductancia:** *Flujo sobre un circuito producido por la propia corriente*

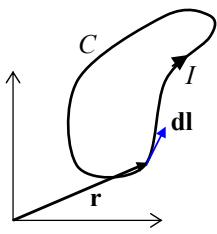
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d\Phi_m}{dI}$$

**Inductancia mutua:** *Flujo sobre un circuito producido por la corriente que circula en otro*

$$\Phi_{m_1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \bullet \hat{\mathbf{n}} dS_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \bullet d\mathbf{l}_1 \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2}$$

A partir de la expresión del potencial vectorial podemos obtener ecuaciones de cálculo de estos parámetros.

En el caso de la **autoinductancia** tenemos:



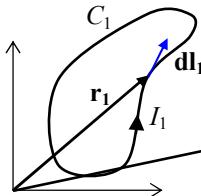
$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d\Phi_m}{dI} \quad \text{y como:}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R} \Rightarrow \Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = \oint_C \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{R} \right] \bullet d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \bullet d\mathbf{l}'}{R}$$

de donde:  $L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \bullet d\mathbf{l}'}{R} \quad \text{con: } \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

En este caso ambos vectores posición refieren a puntos sobre el mismo circuito  $C$ .

En el caso de la **inductancia mutua** tenemos:



$$\Phi_{m_1} = \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \bullet \hat{\mathbf{n}} dS_1 = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \bullet d\mathbf{l}_1 \quad \Rightarrow \quad M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2}$$

Dado que:  $\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{R_2}$

$$\Phi_{m_1} = \oint_{C_1} \mathbf{A}_2 \bullet d\mathbf{l}_1 = \oint_{C_1} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{R_{12}} \right] \bullet d\mathbf{l}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \bullet d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

de donde:

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \bullet d\mathbf{l}_2}{R_{12}} = M_{21} \quad \text{con: } \mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Se observa que la inductancia mutua entre dos circuitos es **simétrica**:  $M_{12} = M_{21}$

Estas fórmulas para  $L$  y  $M_{12}$  se conocen como **fórmulas de Neumann**, y de ellas se deduce que la autoinductancia (también llamada **inductancia propia** o **inductancia a secas**) y la inductancia mutua son propiedades que sólo dependen de la geometría de los circuitos.

Las fórmulas de Neumann se puede usar numéricamente sólo en pocos casos debido a la complejidad de los cálculos involucrados, de manera que es más común calcular inductancias propias y mutuas por sus definiciones a partir de los flujos magnéticos.

Cuando existen varios circuitos por los que circula corriente, el flujo magnético  $\Phi_{mi}$  concatenado por uno cualquiera de ellos está dado por la suma de los flujos creados por el campo de inducción magnética propio (descripto a través de la autoinductancia  $L_i$ ) y los campos de inducción magnética debidos a los otros circuitos (descriptos a través de las inductancias mutuas  $M_{ij}$ ):

$$\Phi_{mi} = L_i I_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_{ij} I_j = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j \quad \text{con} \quad L_{ii} = L_i \quad L_{ij} = M_{ij}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial:  $[\Phi_m] = [L][I]$

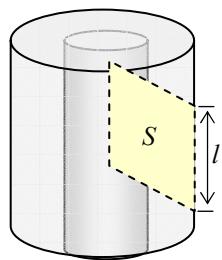
donde la matriz tiene coeficientes que son las inductancias propias y mutuas del sistema. Esta ecuación matricial es equivalente a la obtenida en el caso electrostático para los coeficientes de capacidad/inducción.

**Ejemplo 3-22:** Hallar las autoinductancias externa e interna de un cable coaxil.

En el **Ejemplo 3-20** hemos hallado el campo magnético producido por un coaxil:

$$\mathbf{H(r)} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad (\rho \leq a) \quad \mathbf{H(r)} = \frac{I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (a \leq \rho \leq b) \quad \mathbf{H(r)} = 0 \quad (\rho > b)$$

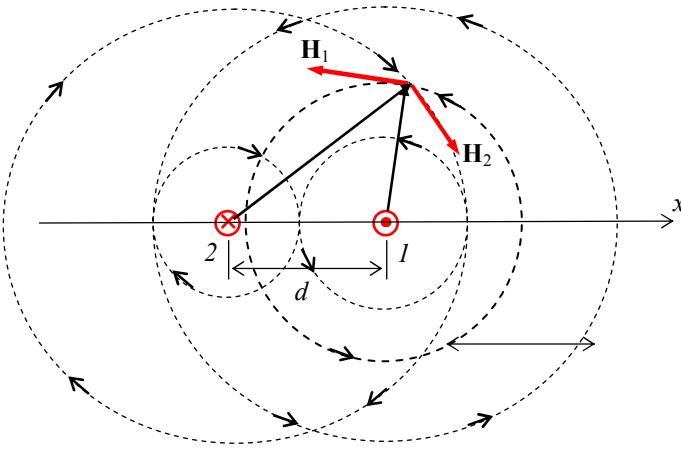
Si no existiera campo dentro del conductor interior, el flujo magnético sólo se debería al campo entre los conductores. Tomando como área de cálculo del flujo un rectángulo de longitud  $l$  y ancho ( $b-a$ ) tenemos:



$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_0^b \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Generalmente el radio del conductor interior es muy pequeño y el flujo aportado por el campo en el conductor interior es despreciable. Si no es así, se debe agregar a la autoinductancia un sumando  $\frac{\mu_0 l}{8\pi}$  que se conoce como **inductancia interna**. El valor que hemos calculado arriba se conoce como **inductancia externa**.

**Ejemplo 3-23:** Hallar la autoinductancia externa de una línea bifilar.

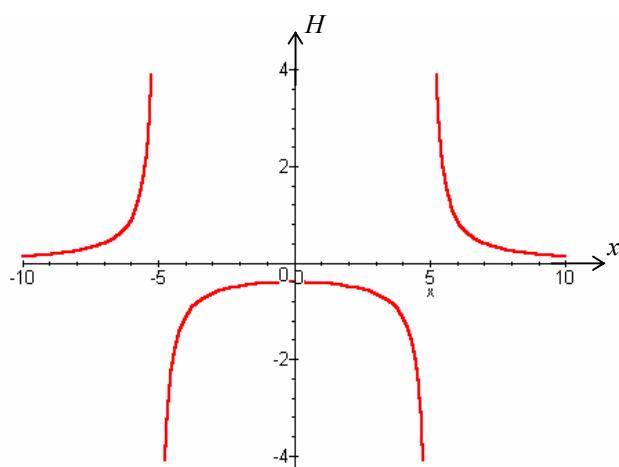


Vamos a considerar conductores de grosor despreciable. Cada conductor crea un campo magnético con líneas circulares centradas en el mismo. Se ve que hay puntos donde los campos se refuerzan y otros donde se oponen.

La forma matemática del campo en cualquier punto del espacio es un poco complicada, de manera que vamos a escribirla sobre un eje  $x$  perpendicular a los conductores y con origen equidistante a ellos. Para todo punto  $x$  sobre ese eje, los campos creados por cada conductor son verticales, y de valor:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi(x-d/2)} \quad x \neq d/2 \quad H_2 = -\frac{I}{2\pi(x+d/2)} \quad x \neq -d/2$$

Entonces, el campo para todo  $x$  será:  $H = \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{1}{x-d/2} - \frac{1}{x+d/2} \right] = \frac{I}{2\pi} \frac{d}{x^2 - d^2/4} \quad |x| \neq d/2$



Esta es la gráfica de  $H$  versus  $x$  para  $d = 5 \text{ m}$ .

Nótese que hay campo en el espacio entre los conductores y también fuera de ese espacio. A diferencia del coaxil, el campo creado por esta línea se extiende a todo el espacio, lo que disminuye la energía útil que propaga y genera problemas de interferencia con otros circuitos cercanos. Tomando el plano que contiene a los conductores como superficie de integración, podemos calcular la autoinductancia (aproximada) de la línea. Si  $a$  es el radio de los conductores, el flujo a través de un tramo de longitud  $l$  sobre este plano y entre los conductores es:

$$\Phi_m = \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} \int_{-(d/2-a)}^{d/2-a} \frac{dx}{x^2 - d^2/4}$$

Esta integral se puede escribir:

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I dl}{2\pi} 2 \int_0^{d/2-a} \frac{dx}{x^2 - d^2/4} = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \int_0^{d/2-a} \left[ \frac{1}{x+d/2} - \frac{1}{x-d/2} \right] dx = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \left[ \ln \frac{d-a}{d/2} - \ln \frac{a}{d/2} \right]$$

y finalmente se tiene:  $\frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right)$   $\Rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left( \frac{d-a}{a} \right)$

## MODELO ESTÁTICO

En la siguiente tabla se resumen las propiedades básicas de los campos estáticos.

	<b>Electrostática</b>	<b>Corriente Estacionaria</b>	<b>Magnetostática</b>
Ecuaciones básicas del campo	$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$
Relaciones constitutivas	$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$	$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$
Condiciones de borde	$(\mathbf{D}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{r})) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \sigma(\mathbf{r})$ $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{r})) = 0$	$(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{j}_2(\mathbf{r})) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \sigma(\mathbf{r})}{\partial t}$	$(\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{r})) \bullet \hat{\mathbf{n}} = 0$ $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) = \mathbf{j}_s(\mathbf{r})$
Potenciales	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi_m(\mathbf{r})$
Ecuaciones del potencial	$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon$	$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$	$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$ $\nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0$
Parámetros circuitales	<b>Capacidad</b> $[Q] = [C][\Phi]$	<b>Resistencia</b> $R = \Delta \Phi/I$	<b>Inductancia</b> $[\Phi_m] = [L][I]$

## RESUMEN

- Se introduce en este capítulo la noción de **corriente eléctrica** como un **transporte ordenado de carga** y se define la cantidad básica, el campo de densidad de corriente. El principio de conservación de la carga lleva a la **importante ecuación diferencial de continuidad**, de la cual se desprende el concepto de **corriente estacionaria**:

$$I = \oint_S \rho \mathbf{v} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS \quad \text{con} \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \mathbf{j} = 0 \quad (\text{CC})$$

- Es fundamental la noción de régimen **cuasi-estacionario** (o **cuasi-estático**), que se refiere a un transporte de corriente dependiente del tiempo, pero cuyo contenido espectral se limita a bajas frecuencias. En tal caso, es **aproximadamente válido** usar las ecuaciones (rigurosamente válidas sólo para CC) de la teoría de circuitos.
- En muchos materiales hay una relación de proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico dentro del conductor. Esta relación es la **ley de Ohm**. Las características de transporte de corriente del material se resumen en su **conductividad** (o la inversa, la **resistividad**) y la **movilidad** de los portadores de carga:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \mu = \frac{\sigma}{\rho(\mathbf{r})}$$

- El campo eléctrico dentro de un conductor no es conservativo. Su circulación a lo largo de un circuito cerrado es la **fem** (fuerza electromotriz) sobre el circuito. Se puede relacionar la fem con la corriente circulante a través de la **resistencia** del circuito (ley de Ohm macroscópica):

$$fem = \frac{L}{q} = \int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = \int_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \bullet d\mathbf{l} = \int_C \frac{j}{\sigma} dl \quad R = \int_C \frac{dl}{\sigma S} = \int_C \frac{\rho dl}{S}$$

- Existe una analogía matemática formal entre las expresiones que permiten calcular la capacidad y la resistencia entre dos conductores, lo que lleva a que los métodos de cálculo sean los mismos:

$$R = \frac{fem}{\int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}} \quad C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS}{\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t=0) e^{-t/\tau} \quad \tau = \epsilon / \sigma}$$

- A partir de la ecuación de continuidad es posible demostrar que una inhomogeneidad de carga dentro de un conductor decae rápidamente (en unos  $10^{-18}$ s). Este es el **tiempo de relajación** del conductor. El exceso de carga se distribuye sobre la superficie del conductor y se llega rápidamente a la situación electrostática:
- El trabajo cedido por el campo eléctrico a las cargas en movimiento que conforman una corriente eléctrica produce una transferencia de potencia del campo al conductor que se traduce macroscópicamente en un calentamiento del material (**efecto Joule**):

$$W = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$$

- Se han establecido las **condiciones de frontera** que cumple el campo de densidad de corriente sobre la interfase entre dos medios de propiedades diferentes:

$$(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\sigma_l}{dt}$$

En este capítulo también analizamos el campo magnético creado por corrientes estacionarias, llamado también campo magnetostático.

- Para corrientes estacionarias las ecuaciones de Maxwell llevan a las ecuaciones del campo magnetostático:  $\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$   $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$
- B** se conoce como **campo de inducción magnética** y **H** es el llamado **campo magnético**. En el vacío estos campos están relacionados:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

- Una carga móvil en la presencia de un campo eléctrico y un campo magnético experimenta la llamada fuerza de Lorentz:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$
- Consideramos la fuerza magnética sobre un circuito que transporta corriente.

$$\mathbf{F} = I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

Un campo magnético **uniforme** en una región del espacio donde se halle una **espira** (circuito cerrado) no genera fuerza neta sobre ella, pero genera una **cupla**, que tiende a hacer girar la espira de manera de alinear su normal con el campo aplicado:  $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$  donde  $\mathbf{m} = I_0 S \hat{\mathbf{n}}$  es el **momento magnético** de la espira.

Esto lleva a definir una **energía potencial de rotación** de una espira en un campo magnético:  $U_m = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B}$

- Se introduce el **efecto Hall**, asociado a la fuerza magnética sobre los portadores de carga en un conductor y se presentan algunas aplicaciones tecnológicas, como caracterización de semiconductores, medidores de campo magnético (gaussímetros) y dispositivos de sensado (Hall switches) que se utilizan en la industria.
- Se presenta la expresión clásica de **Biot-Savart**, que da el campo de inducción magnética creado por una distribución de corriente:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

Se dan ejemplos de cálculo del campo de inducción magnética creado por diversos circuitos: hilo infinito, espira circular, bobinas de Helmholtz, solenoide.

- El campo de inducción magnética puede determinarse a partir de sus fuentes, representadas por la divergencia y el rotor.

Se halla que la divergencia del campo de inducción magnética es nula, lo que indica que no hay fuentes escalares para este campo y que las líneas de campo son cerradas. Por otra parte, el rotor es proporcional a la densidad de corriente punto a punto, que es la fuente vectorial del campo. Esta relación es la llamada **ley de Ampère**:

$$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

y en forma integral:  $\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \bullet \hat{\mathbf{n}} ds = 0$   $\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{l} = \mu_0 I_s$

Como el campo **B** es solenoidal, siempre se puede expresar como el rotor de otro

campo vectorial que llamamos **potencial vectorial magnético**:  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Las ecuaciones que permiten calcular el potencial vectorial a partir de las fuentes son:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

El potencial vectorial magnético es de mayor utilidad cuando el efecto magnético es causado por corrientes eléctricas. Se demuestra que cumple una ecuación diferencial vectorial de Poisson:  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$  por lo que los métodos matemáticos y numéricos de la teoría del potencial son también aplicables al cálculo del potencial vectorial.

Para puntos de un recinto donde no hay corrientes, el rotor de  $\mathbf{B}$  se anula, y entonces se puede expresar al campo como el gradiente de un campo escalar que llamamos **potencial escalar magnético**:

$$\text{si } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \Psi_m(\mathbf{r})$$

El potencial escalar es de mayor utilidad cuando el efecto magnético es creado por cuerpos magnetizados.

- Así como el dipolo eléctrico modeliza la polarización de las unidades elementales que forman un cuerpo dieléctrico extenso, en el magnetismo de materiales es útil el **dipolo magnético**, que es una pequeña espira de corriente. Es de interés el campo lejano que crea este elemento.

Se realiza el cálculo a través del potencial vectorial:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

o a partir del potencial escalar:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

Estos cálculos dan dos modelos alternativos para el análisis de los **materiales magnetizados**. Para calcular el campo de inducción magnética creado por un material magnetizado se divide al material en elementos de volumen infinitesimales, a cada uno de los cuales se les adjudica un momento dipolar magnético. De aquí surge la

noción del **campo de magnetización** del material:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{m}}{dv'}|_{\mathbf{r}'}$$

Ahora se pueden seguir dos caminos alternativos: a partir del potencial vectorial o a partir del potencial escalar creado por cada elemento de volumen, para luego aplicar superposición.

- A partir del **potencial vectorial** se obtiene:
- $$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'$$

y se demuestra que el material magnetizado genera un campo idéntico al generado por distribuciones equivalentes de corrientes volumétricas y superficiales llamadas **corrientes de magnetización**:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_V \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{R} dV' + \int_S \frac{\mathbf{j}_{M_s}(\mathbf{r}')}{R} ds' \right]$$

con  $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$      $\mathbf{j}_{M_s}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}$

- A partir del **potencial escalar** se obtiene:
- $$\Psi_m(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \mathbf{R}}{4\pi R^3} dV'$$

y se encuentra que el material magnetizado genera un campo matemáticamente

idéntico al campo eléctrico generado por distribuciones equivalentes de cargas volumétricas y superficiales llamadas **cargas de magnetización**:

$$\Psi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dv'$$

con:  $\rho_m(\mathbf{r}') = -\epsilon_0 \nabla' \bullet \mathbf{M}(\mathbf{r}')$        $\sigma_m(\mathbf{r}') = \epsilon_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}}$

- En general, las fuentes del campo de inducción magnética son las corrientes eléctricas y los materiales magnetizados, que pueden representarse por las corrientes equivalentes de magnetización, de manera que aparecen corrientes de ambos tipos en la ley de Ampère:  $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 [\mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_m(\mathbf{r})]$

Es posible definir el **campo magnético**, cuyas fuentes son las corrientes reales. De aquí surge la forma general de la ley de Ampère:  $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$

donde:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})/\mu_0 - \mathbf{M}(\mathbf{r})$

Existe relación entre el campo magnético y el campo de magnetización dentro de un material. Esta relación lleva a definir la **susceptibilidad magnética** y la **permeabilidad** de un material magnético:  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$        $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$

con  $\mu = \mu_0 [1 + \chi_m]$

- El campo magnético cumple **condiciones de frontera** al cruzar la interfase entre dos medios de distintas permeabilidades:

$$\vec{\nabla} \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n_1} = B_{n_2} \quad \mathbf{n} \bullet (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad H_{t_1} - H_{t_2} = j_s \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s$$

- Las nociones de autoinductancia e inductancia mutua son esenciales en la utilización de los fenómenos magnéticos en circuitos. Se deducen las fórmulas de Neumann que dejan ver claramente la forma geométrica de estos parámetros.

$$L = \frac{d\Phi_m}{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \bullet d\mathbf{l}'}{R} \quad \text{con: } \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{m_1}}{dI_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \bullet d\mathbf{l}_2}{R_{12}} = M_{21} \quad \text{con: } \mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

## APENDICE 4 – Propiedades del campo B

A partir de la ley de Biot-Savart y propiedades del análisis vectorial podemos hallar la divergencia y el rotor de  $\mathbf{B}$  creado por corrientes estacionarias:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' \quad \nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

donde  $V$  es un recinto del espacio arbitrario pero que contiene a todas las fuentes de campo, es decir, las corrientes. Por lo tanto, se puede elegir un recinto donde  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  se anule sobre su superficie frontera  $S$ . Luego:

$$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \bullet \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \bullet \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{v}'$$

donde hemos usado el hecho de la independencia de las operaciones de divergencia (opera sobre coordenadas de punto campo) y de integración (opera sobre coordenadas de punto fuente).

Además (ver las identidades vectoriales del Capítulo 1):  $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

Tomando:  $\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{G} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla \left( \frac{1}{R} \right) \end{cases} \Rightarrow \nabla \bullet \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} \bullet (\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \left( \nabla \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \right) = 0$

El primer término es cero porque  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  no depende de las coordenadas campo y el segundo se anula por ser el rotor de un gradiente. Finalmente, entonces:

$$\boxed{\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0}$$

Procedemos de forma similar para calcular el rotor:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{v}'$$

Usamos la identidad vectorial:  $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$

Aquí, por ejemplo:  $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} = \left( G_x \frac{\partial}{\partial x} + G_y \frac{\partial}{\partial y} + G_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{F}$  es un campo vectorial.

Usando las mismas identificaciones que en el caso anterior nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{v}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ -\nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \bullet \nabla \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] d\mathbf{v}'$$

El segundo y tercer término del integrando se anulan porque implica derivar  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  respecto de coordenadas de punto campo. El primer término se puede escribir en función de la delta de Dirac (ver Capítulo 1):

$$\int_V \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}' = -4\pi \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

Nos queda así:  $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \nabla') \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{v}'$

donde hemos pasado de  $\nabla \rightarrow -\nabla'$  en el integrando. Para calcular esta integral observamos que, por ejemplo, la componente  $x$  del integrando:  $[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \nabla'] \frac{(x-x')}{R^3}$  se puede integrar por partes:

$$[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \nabla'] \frac{(x-x')}{R^3} = \nabla' \bullet \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x-x')}{R^3} \right] - \frac{(x-x')}{R^3} \nabla' \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \nabla' \bullet \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x-x')}{R^3} \right]$$

ya que  $\nabla' \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$  porque tratamos con corrientes estacionarias. La integral de esta componente queda así:

$$\int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \nabla') \frac{\mathbf{R}}{R^3} \Big|_x dv' = \int_V \nabla' \bullet \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{(x - x')}{R^3} \right] dv' = \oint_S \frac{(x - x')}{R^3} \mathbf{j}(\mathbf{r}') \bullet \hat{\mathbf{n}} ds' = 0$$

Esta integral se anula porque el vector densidad de corriente se anula por hipótesis sobre  $S$ . Lo mismo ocurre con las otras componentes de la integral original y finalmente nos queda:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})}$$

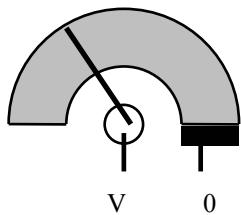
## PROBLEMAS

- 3.1) Un conductor de cobre AWG#12 tiene un diámetro de  $0.205\text{ cm}$ . Si su longitud es de  $15.24\text{ m}$  y conduce una corriente de  $20\text{ A}$ , determine:  
 a) la densidad de corriente que circula, b) el campo eléctrico en el cable, c) la caída de tensión entre sus extremos y d) la resistencia del mismo.  $\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^7\text{ S/m}$

[Respuesta:  $R \approx 7.95 \times 10^{-2}\text{ }\Omega$ ]

- 3.2) Determine la resistencia eléctrica asociada a las siguientes configuraciones sabiendo que el material entre los electrodos tiene una conductividad  $\sigma$ :  
 a) Resistor de placas paralelas de área  $A$  y separación  $d$ . b) Resistor cilíndrico de radio interno  $a$ , externo  $b$  y longitud  $L$ . Considere la resistencia “radial” y la “longitudinal”, c) Resistor esférico de radios interno  $a$  y externo  $b$ .

- 3.3) Se desea construir un potenciómetro de pista semicircular de carbón ( $\sigma = 7.14 \times 10^{-4}\text{ mho}^{-1}$ ) de  $1\text{ mm}$  de espesor según indica la figura. Calcule el potencial, el campo eléctrico y la densidad de corriente en todo punto de la pista. Determine que radios interno y externo debe tener dicha pista para que la resistencia máxima sea de  $1M\Omega$  con un área de  $60\text{ mm}^2$ .



Sugerencia: pruebe con un potencial de la forma  $V(\phi) = a\phi + b$ .

- 3.4) Para una espira circular de radio  $R$  orientada según el eje  $z$  por la que circula una corriente  $I$ , calcular: a) el campo de inducción  $\mathbf{B}$  en el eje de simetría. b) el potencial vectorial  $\mathbf{A}$  en dicho eje. ¿Puede obtener  $\mathbf{B}$  a partir de ese  $\mathbf{A}$ ?

- 3.5) En un conductor cilíndrico de  $1mm$  de diámetro fluye una corriente de  $2A$  uniformemente distribuida. Hallar y graficar el campo  $\mathbf{B}$  dentro y fuera del conductor. ¿Cómo se modifica el problema si ahora la misma corriente circula con una distribución del tipo  $A r^2$  ( $A$  es una constante que debe hallarse y  $r$  es la distancia al eje del cilindro)?

- 3.6) Un conductor rectilíneo de longitud muy grande lleva una corriente  $I$ . A una distancia  $d$  se coloca una pequeña espira de radio  $a$  ( $d \gg a$ ) por la que circula la corriente  $i$ . Si el plano de la espira forma un ángulo  $\theta$  con el conductor rectilíneo, determinar a) el flujo magnético concatenado por la espira y b) el par que actúa sobre ella.

- 3.7) Calcule el potencial vectorial magnético creado en todo el espacio por un solenoide muy largo de radio  $R$  por el que circula una corriente superficial  $K_0 \varphi$ .

- 3.8) Para una esfera de radio  $R$  magnetizada uniformemente según  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{z}$ , calcule las corrientes equivalentes de magnetización. En base a estas corrientes, ¿cómo imagina las líneas de campo  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  dentro y fuera de la esfera?

- 3.9) Determine el campo  $\mathbf{B}$  en el eje de un cilindro circular magnetizado uniformemente. El cilindro tiene radio  $R$ , longitud  $L$  y magnetización axial  $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{z}$ . Calcule el campo en el centro del imán para el caso  $R = 5\text{ cm}$ ,  $L = 12\text{ cm}$  y magnetización axial  $130\text{ A/cm z}$ .

[Rta:  $12.55\text{ mT z}$ ]

- 3.10) Calcular, a partir de la energía, la autoinductancia externa por unidad de longitud de una línea de transmisión coaxial de radios interno  $a$  y externo  $b$ .

[Rta:  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$ ]

3.11) Una bobina toroidal de  $N$  vueltas tiene un radio central igual a  $R$  y el radio de su sección circular es  $a$ . Demostrar que  $L = \mu_0 N^2 \left( R - \sqrt{R^2 - a^2} \right)$ .

3.12) Despreciando todo efecto de borde, determine cuantas vueltas se necesitan para que un solenoide de  $30\text{ cm}$  de longitud y  $4\text{ cm}$  de diámetro, tenga una inductancia de  $10\text{ mH}$ . El medio dentro del solenoide es aire.

[Rta: 1380 vueltas]

3.13) Considere un conjunto de  $N_a = 200$  espiras de radio  $R_a = 1\text{ cm}$  separadas de otro conjunto de espiras por una distancia  $d = 5\text{ cm}$  con  $N_b = 100$  espiras de radio  $R_b = 0.1\text{ cm}$ . El eje de las espiras es común. Calcule de manera aproximada el coeficiente de inducción mutua.

3.14) Se tiene una espira circular de radio  $a$ , resistencia  $R$  y coeficiente de autoinducción  $L$  perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el campo se apaga exponencialmente con un tiempo característico  $\tau$ , calcular la corriente  $I(t)$  inducida en la espira.

$$\boxed{\text{Rta : } I(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{R\tau - L} (e^{-t/\tau} - e^{-Rt/L})}$$

3.15) Determine los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  y las corrientes de magnetización para los siguientes casos: a) Una corriente volumétrica uniformemente distribuida  $J_0 \hat{z}$  en un cilindro de radio  $R$  y permeabilidad  $\mu$  limitada por el espacio libre. b) Una lámina de corriente  $K_0 \hat{z}$  ubicada entre dos placas de espesor  $d/2$ , permeabilidad  $\mu$  y rodeada por espacio libre.

## 4 - Materiales Magnéticos

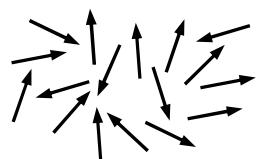
### Introducción

En este capítulo presentamos las características fundamentales y algunas aplicaciones de materiales magnéticos de interés tecnológico.

### Magnetismo en materiales

Las corrientes eléctricas crean campo magnético. Además, existen materiales naturales o sintéticos que crean campo magnético. Los campos creados por los materiales magnéticos surgen de dos fuentes atómicas: los momentos angulares orbitales y de espín de los electrones, que al estar en movimiento continuo en el material experimentan fuerzas ante un campo magnético aplicado. Por lo tanto, las características magnéticas de un material pueden cambiar por aleación con otros elementos, donde se modifican por las interacciones atómicas. Por ejemplo, un material no magnético como el aluminio puede comportarse como un material magnético en materiales como alnico (aluminio-níquel-cobalto) o manganeso-aluminio-carbono. También puede adquirir estas propiedades mediante trabajo mecánico u otra fuente de tensiones que modifique la geometría de la red cristalina.

- Todo material está compuesto por átomos que contienen electrones móviles. Un campo magnético aplicado actúa siempre sobre los electrones considerados individualmente. Esto da origen al efecto universal llamado **diamagnetismo**. Este es un efecto clásico y depende solamente del movimiento de los electrones.
- A nivel atómico, la superposición de los momentos magnéticos (**orbital**, debido al movimiento del electrón alrededor del núcleo, e intrínseco o de **espín**) aportados por los electrones al átomo o molécula del cual forman parte da un momento magnético resultante o neto al átomo o molécula. Cuando hay un momento neto atómico o molecular los momentos magnéticos tienden a alinearse con el campo aplicado (o con los campos creados por momentos magnéticos vecinos), dado lugar al efecto del **paramagnetismo**. Simultáneamente, la energía térmica omnipresente tiende a orientar al azar a los momentos magnéticos, de manera que la intensidad relativa de todos estos efectos determinará en definitiva el comportamiento del material. En la figura se esquematiza un material no magnetizado: los momentos magnéticos están orientados al azar.



Los materiales magnéticos se caracterizan por su **permeabilidad**  $\mu$ , que es la relación entre el campo de inducción magnética y el campo magnético dentro del material:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

donde  $\mu_r$  es la **permeabilidad relativa** y  $\chi_m$  la **susceptibilidad magnética** del material.

A continuación se presentan en más detalle las distintos comportamientos:

### Diamagnetismo

El diamagnetismo es un efecto universal porque se basa en la interacción entre el campo aplicado y los electrones móviles del material. El diamagnetismo queda habitualmente enmascarado por el paramagnetismo, salvo en elementos formados por átomos o iones que se disponen en “capas” electrónicas cerradas, ya que en estos casos la contribución paramagnética se anula. Las características esenciales del diamagnetismo son:

- Los materiales diamagnéticos se magnetizan débilmente en el sentido **opuesto** al del campo magnético aplicado. Resulta así que aparece una fuerza de repulsión sobre el cuerpo respecto del campo aplicado.

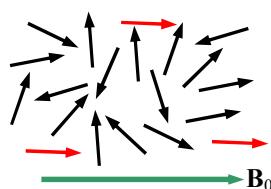
- La susceptibilidad magnética es negativa y pequeña y la permeabilidad relativa es entonces ligeramente menor que 1.
- La intensidad de la respuesta es muy pequeña.

Se puede modelar en forma sencilla el comportamiento diamagnético mediante la aplicación de la ley de Lenz al movimiento orbital de los electrones (Apéndice 5). El diamagnetismo fue descubierto por Faraday en 1846.

Ejemplos de materiales diamagnéticos son el cobre y el helio.

### Paramagnetismo

Los materiales paramagnéticos se caracterizan por átomos con un momento magnético neto, que tienden a alinearse paralelo a un campo aplicado. Las características esenciales del paramagnetismo son:



- Los materiales paramagnéticos se magnetizan débilmente en el **mismo** sentido que el campo magnético aplicado. Resulta así que aparece una fuerza de atracción sobre el cuerpo respecto del campo aplicado.
- La susceptibilidad magnética es positiva y pequeña y la permeabilidad relativa es entonces ligeramente mayor que 1.
- La intensidad de la respuesta es muy pequeña, y los efectos son prácticamente imposibles de detectar excepto a temperaturas extremadamente bajas o campos aplicados muy intensos.

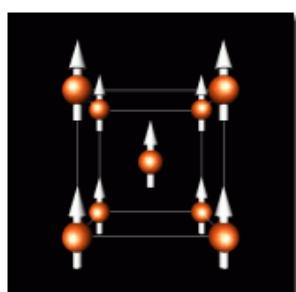
Debido a la debilidad de la respuesta, a menudo los materiales paramagnéticos se asimilan al aire ( $\mu = \mu_0$ ) en el diseño magnético. Ejemplos de materiales paramagnéticos son el aluminio y el sodio.

Distintas variantes del paramagnetismo se dan en función de la estructura cristalina del material, que induce interacciones magnéticas entre átomos vecinos.

**Ferromagnetismo:** En los materiales ferromagnéticos los momentos magnéticos individuales de grandes grupos de átomos o moléculas se mantienen lineados entre sí debido a un fuerte acoplamiento, aún en ausencia de campo exterior. Estos grupos se denominan **dominios**, y actúan como un pequeño imán permanente. Los dominios tienen tamaños entre  $10^{-12}$  y  $10^{-8} m^3$  y contienen entre  $10^{21}$  y  $10^{27}$  átomos. Los dominios se forman para minimizar la energía magnética entre ellos. En ausencia de campo aplicado, los dominios tienen sus momentos magnéticos netos distribuidos al azar.

Cuando se aplica un campo exterior, los dominios tienden a alinearse con el campo. Este alineamiento puede permanecer en algunos casos de muy fuerte acoplamiento cuando se retira el campo, creando un **imán permanente**. Las características esenciales del ferromagnetismo son:

- Los materiales ferromagnéticos se magnetizan fuertemente en el **mismo** sentido que el campo magnético aplicado. Resulta así que aparece una fuerza de atracción sobre el cuerpo respecto del campo aplicado.
- La susceptibilidad magnética es positiva y grande y la permeabilidad relativa es entonces mucho mayor que 1.



En la figura se observa un esquema de la estructura<sup>1</sup> del hierro (**BCC** - cúbica de cuerpo centrado). Los momentos magnéticos están alineados ya que existen fuertes interacciones entre ellos.

La agitación térmica tiende a desalinear los dominios. A temperatura

<sup>1</sup> Los esquemas de estructuras cristalinas que se muestran en esta capítulo están tomadas de <http://www.ill.fr/dif/3D-crystals> y fueron desarrolladas por Marcus Hewat.

normal, la energía térmica no es en general suficiente para desmagnetizar un material magnetizado. Sin embargo, por encima de una cierta temperatura, llamada **temperatura de Curie**, el material se vuelve paramagnético, debido a que los efectos térmicos de desorden son mayores que

Material	T <sub>C</sub> (K)	Material	T <sub>C</sub> (K)
Fe	1043	Cu <sub>2</sub> MnIn	500
Co	1388	EuO	77
Ni	627	EuS	16.5
Gd	293	MnAs	318
Dy	85	MnBi	670
CrBr <sub>3</sub>	37	GdCl <sub>3</sub>	2.2
Au <sub>2</sub> MnAl	200	Fe <sub>2</sub> B	1015
Cu <sub>2</sub> MnAl	630	MnB	578

los efectos de alineamiento de la interacción magnética entre dominios. Una forma de desmagnetizar un material ferromagnético es entonces calentarlo por encima de esta temperatura.

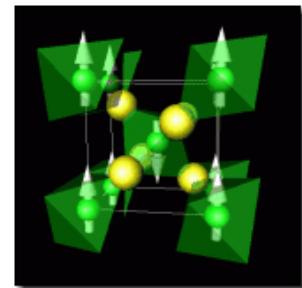
En la tabla<sup>2</sup> se presentan las temperaturas de Curie de algunos materiales ferromagnéticos elementales y aleaciones. Se ve que estas temperaturas son en casos muy altas y cercanas a la temperaturas de fusión del elemento, por lo que en la práctica la desmagnetización por temperatura es en general un proceso parcial.

Ejemplos de materiales ferromagnéticos son el hierro, el cobalto, el níquel y la mayoría de los aceros.

**Antiferromagnetismo:** Los materiales antiferromagnéticos tienen un estado natural en el cual los espines atómicos de átomos adyacentes son opuestos, de manera que el momento magnético neto es nulo. Este estado natural hace difícil que el material se magnetice, aunque de todas formas adopta una permeabilidad relativa ligeramente mayor que 1.

El fluoruro de manganeso (MnF), cuya estructura se esquematiza en la figura de la derecha, es un ejemplo simple. Los momentos de los átomos de Mn en las esquinas del cubo apuntan en una dirección, y los que se hallan en el centro del cubo apuntan en la dirección opuesta. Dado que hay igual número de cada uno, cuando muchas de estas **celdas unitarias** de agrupan juntas, los momentos magnéticos se cancelan exactamente.

Por encima de una temperatura crítica, llamada **temperatura de Neel**, un material antiferromagnético se vuelve paramagnético.



La tabla<sup>3</sup> muestra la temperatura de Neel de varios compuestos.

Otro ejemplo de material antiferromagnético es el cromo.

**Ferrimagnetismo:** Los materiales ferrimagnéticos son similares a los antiferromagnéticos, salvo que las especies de átomos alternados son diferentes (por ejemplo, por la existencia de dos subredes cristalinas entrelazadas) y tienen momentos magnéticos diferentes. Existe entonces una magnetización neta, que puede ser en casos muy intensa. La **magnetita** se conoce como imán desde la antigüedad. Es uno de los óxidos comunes del hierro ( $Fe_3O_4$ ) y también es cúbico. La figura ilustra la estructura. La fórmula podría ser escrita en forma muy simplista como  $FeO \cdot Fe_2O_3$  con  $Fe^{++}$  como  $FeO$  y  $Fe^{+++}$  como  $Fe_2O_3$ . El  $Fe^{+++}$  ocupa los huecos tetraédricos, y la mitad de los huecos octaédricos, y el  $Fe^{++}$  ocupa la otra mitad. Los momentos magnéticos

<sup>2</sup> Datos tomados de F. Keffer, Handbuch der Physik, 18, pt. 2, New York: Springer-Verlag, 1966 y P. Heller, Rep. Progr. Phys., 30, (pt II), 731 (1967).

<sup>3</sup> Tabla tomada de <http://www.physics.umn.edu/groups/mmc/gredig/neel.html>

en los sitios octaédricos son antiferromagnéticos y se cancelan (no se muestran), mientras que en los sitios tetraédricos están ferromagnéticamente alineados. Otros ejemplos de materiales ferrimagnéticos son las **ferritas**.

En la siguiente tabla se presentan valores de la susceptibilidad magnética para diversos materiales y sustancias paramagnéticos y diamagnéticos de interés:

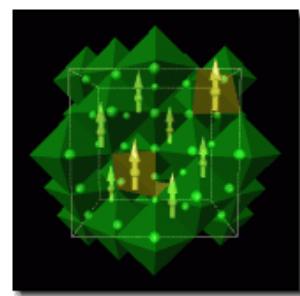


Tabla de susceptibilidades magnéticas $\chi_m$ a T ambiente y a 1 atmósfera			
Paramagnéticos (+)		Diamagnéticos (-)	
Oxígeno	$1.94 \times 10^{-6}$	Hidrógeno	$-2.08 \times 10^{-9}$
Sodio	$8.4 \times 10^{-6}$	Nitrógeno	$-6.7 \times 10^{-9}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$	$\text{CO}_2$	$-1.19 \times 10^{-8}$
Aluminio	$2.1 \times 10^{-5}$	Alcohol	$-0.75 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$7.6 \times 10^{-5}$	Agua	$-0.91 \times 10^{-5}$
Titánio	$1.8 \times 10^{-4}$	Cobre	$-0.98 \times 10^{-5}$
Platino	$2.93 \times 10^{-4}$	Plata	$-2.64 \times 10^{-5}$
		Oro	$-3.5 \times 10^{-5}$

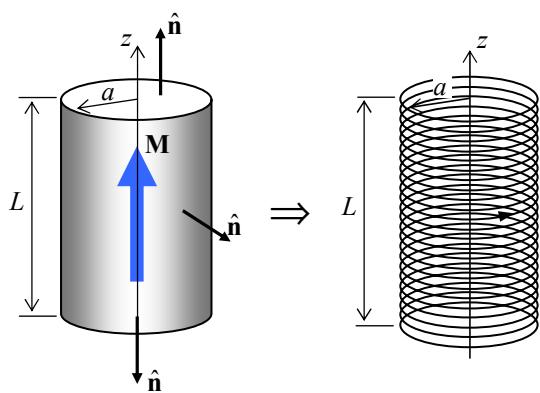
## Imanes

Suele llamarse **imán** a cualquier objeto que produce un campo magnético externo. Un **imán permanente** es un material que, cuando se lo coloca en un campo magnético suficientemente intenso, no sólo produce un campo magnético propio o inducido, sino que continúa produciendo campo inducido aún después de ser retirado del campo aplicado. Esta propiedad no se altera ni se debilita con el tiempo salvo cuando el imán se somete a cambios de temperatura, campos desmagnetizantes, tensiones mecánicas, etc. La habilidad del material para soportar sin cambios en sus propiedades magnéticas diversos tipos de ambientes y condiciones de trabajo define los tipos de aplicaciones en que se lo puede usar.

- Los materiales que pierden su magnetización cuando se retira el campo exterior que la produjo se llaman materiales magnéticos **blandos**. Estos materiales son útiles para transportar, concentrar o conformar campos magnéticos.
- Aquellos materiales que mantienen la magnetización al quitar el campo aplicado se denominan **duros**. Se utilizan para la fabricación de imanes permanentes.

Los imanes (en general, los materiales magnetizados) se pueden modelizar por corrientes equivalentes de magnetización, como describimos en el capítulo previo y se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4-1:** Determinar el campo magnético creado por un imán cilíndrico de radio  $a$  y altura  $L$  con una magnetización constante  $\mathbf{M}$  a lo largo de su eje.



Podemos resolver el problema a partir de las corrientes equivalentes de magnetización:

$$\mathbf{j}_M(\mathbf{r}') = \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}') = 0 \quad \text{porque } \mathbf{M} \text{ es constante}$$

$$\mathbf{j}_{M_s}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} 0 & \text{sobre las tapas} \\ M\hat{\phi} & \text{sobre la superficie lateral} \end{cases}$$

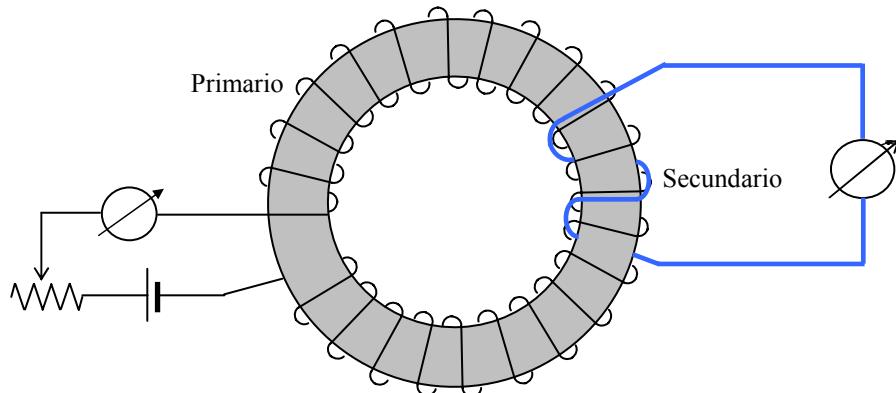
Se observa que se puede reemplazar al imán por un **solenoide** cuya densidad de corriente (corriente por unidad de longitud) es igual a  $M$ .

El campo de inducción magnética creado por el solenoide sobre su eje y en su interior se ha hallado en el **Ejemplo 3-16**.

## Histéresis

Cuando un material ferromagnético originalmente desmagnetizado se coloca en una región del espacio donde hay un campo magnético el material se magnetiza. Es de interés observar cómo cambia la magnetización cuando el campo aplicado varía.

Para ello se utiliza normalmente una disposición denominada **anillo de Rowland**. Consiste en un anillo o **toroide** del material a ensayar sobre el cual se devana un bobinado primario al que se conecta una fuente de corriente variable. La corriente que circula por este bobinado crea dentro del material un campo magnético  $\mathbf{H}$  (llamado



**fuerza magnetomotriz = fmm**). Otro bobinado secundario permite medir el **flujo magnético** dentro del anillo que es proporcional al campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$ .

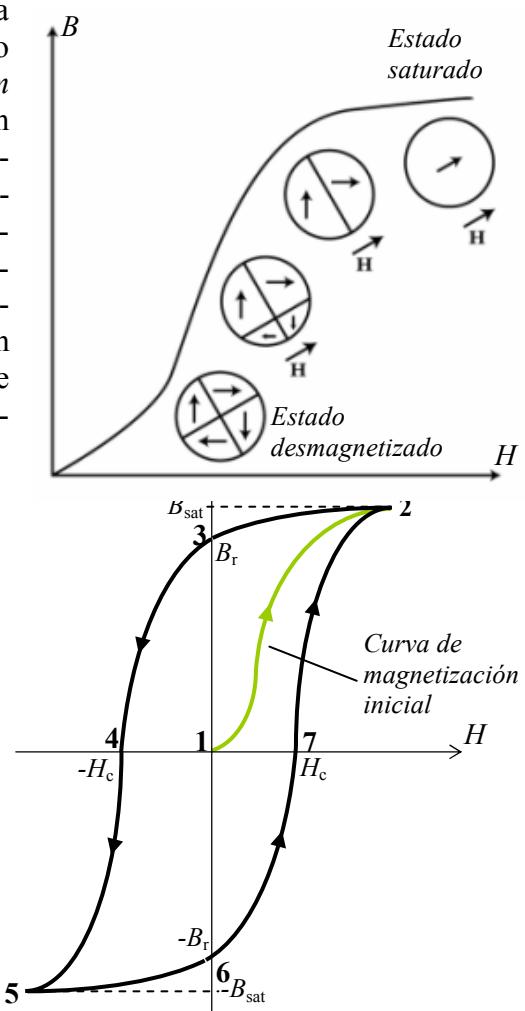
En el ensayo se va aumentando desde cero el valor de la corriente (y por consecuencia, de la fmm) y se mide el valor de la densidad de flujo de  $B$  a medida que ocurre el proceso de magnetización del material. Este proceso comienza con la rotación de los dominios magnéticos más pequeños o inestables alineándose (quizás no por completo) con el campo. A medida que giran, se produce coalescencia de dominios. Este proceso se lleva a cabo con poco cambio de energía y la curva  $M(H)$  o  $B(H)$  crece rápidamente. Si se sigue aumentando la fmm cuando la magnetización por coalescencia y absorción de dominios pequeños o inestables ha terminado, el siguiente mecanismo implica la orientación de los dominios que no están completamente alineados. Este proceso involucra un gran gasto de energía y entonces la curva crece cada vez más lentamente. Se llega a un momento donde ya todos los dominios del material se hallan alineados con el campo aplicado y la magnetización se **satura**. La **no linealidad** en esta curva se relaciona entonces con las características termodinámicas de la deformación de los dominios magnéticos y las interacciones entre dominios.

Esta curva se conoce como **curva de magnetización inicial**.

En la siguiente figura se esquematiza una manipulación más compleja. Desde el **estado desmagnetizado** (1), a medida que aumenta la fmm  $H$  más y más dominios se van agregando a la alineación paralela hasta que todos están alineados en el **estado de saturación** (2) donde hay un campo de inducción  $B_{\text{sat}}$ . Un aumento de la fmm no creará nuevas alineaciones.

Si, en cambio, desde el estado de saturación (2) se **disminuye** la intensidad de la fmm  $H$ , se observa que el sistema no sigue la trayectoria previa, dado que los

dominios que estaban completamente alineados comienzan a girar de nuevo, lo que resulta en una magnetización residual ( $B_r$ ) y una coercitividad ( $H_c$ ). La trayectoria de retroceso es la curva 2-3-4-5. Si se aplica un campo inverso suficiente (- $H_c$ ), se desalinea completamente el material (punto 6). Si se vuelve a aplicar un campo directo ( $H$ ), la trayectoria de magnetización es 6-7-2.



mecanismos de alineación de dominios, los movimientos de las fronteras de dominios y la agitación térmica (este último factor tiende al desalineamiento) son mecanismos altamente no lineales. Cuando la  $fmm$  llega a cero (3), el material queda magnetizado, creando un campo de inducción residual  $B_r$  (**remanencia**). Si se aumenta ahora la  $fmm$  en valores negativos (o sea en el sentido opuesto de circulación de corriente al de la magnetización inicial), el material queda efectivamente desmagnetizado al llegar al valor de **coercividad**  $-H_c$  (4). Si se continúa aumentando la intensidad de la  $fmm$ , se produce una nueva saturación en el sentido opuesto (5) y si desde allí se disminuye la intensidad de la  $fmm$ , las situaciones anteriores se repiten sobre una curva simétrica en los puntos (6) y (7).

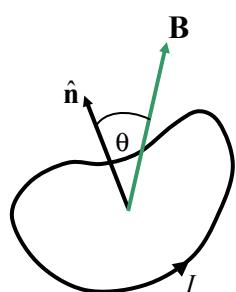
Si se repite esta operación, el sistema recorre siempre el mismo ciclo, conocido como **ciclo de histéresis**. La magnetización de un material que presenta histéresis se realiza a expensas de energía, que se disipa en forma de calor debido a las alteraciones en las fronteras de dominios. Se puede demostrar que al recorrer un ciclo de histéresis, se entrega al material una energía por unidad de volumen en forma de calor igual al área del ciclo de histéresis:

$$w_h = \oint_{\text{ciclo de histéresis}} \mathbf{H} \bullet d\mathbf{B}$$

Estas pérdidas de energía tienen múltiples influencias sobre los dispositivos que usan materiales ferromagnéticos.

En la siguiente sección vamos a analizar en forma elemental las propiedades de magnetización de los materiales ferromagnéticos a partir de la energía de alineamiento de los momentos magnéticos ante un campo aplicado. Este análisis nos permitirá entender las propiedades fundamentales y los parámetros que caracterizan a los distintos materiales y analizar sus posibles usos.

### Análisis energético elemental de la histéresis magnética



Como ya hemos visto, los átomos y moléculas de un material magnético pueden visualizarse como pequeñas espiras o dipolos magnéticos. Cuando una espira por la que circula una corriente eléctrica  $I$  se coloca en una región del espacio donde existe un campo magnético  $\mathbf{B}$ , se produce una cupla sobre la espira que tiende a alinear su momento magnético con el campo aplicado:

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \Rightarrow \tau = mB \sin \theta$$

Este alineamiento implica que el campo cede energía al dipolo magnético, a través del trabajo realizado por el campo exterior en la rotación:

$$U = \int T d\theta = m B \int \sin \theta d\theta = -m B \cos \theta = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B}$$

Dentro del material  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  y entonces:  $U = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{m} \bullet \mathbf{H} - \mu_0 \mathbf{m} \bullet \mathbf{M}$

Se ve que esta energía tiene dos términos:

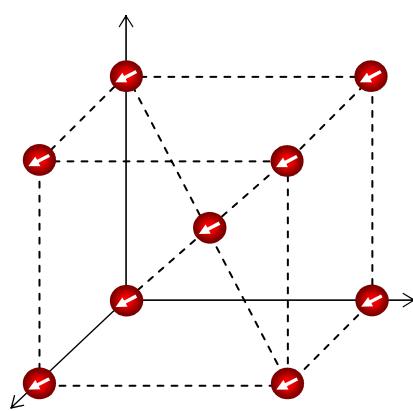
- $-\mu_0 \mathbf{m} \bullet \mathbf{M}$  la energía de alineamiento del dipolo con la **magnetización local**, que representa las interacciones del dipolo con los dipolos vecinos, y
- $-\mu_0 \mathbf{m} \bullet \mathbf{H}$  que representa la energía de alineamiento del dipolo con la *fmm* aplicada. Esta es una **acción global** o de largo alcance.

Estos alineamientos se producen simultáneamente, pero para un análisis más claro vamos a considerarlos en forma sucesiva. Primero suponemos que el momento magnético se alinea al campo local. El término asociado a la **energía de alineamiento local** es:

$$U = -\mu_0 \mathbf{m} \bullet \mathbf{M} = -\mu_0 m M \cos \theta = -\mu_0 m M \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

El primer término de esta expresión no depende de la rotación, mientras que el segundo término varía con la posición del dipolo, y se conoce, por razones que quedarán claras más abajo, como la **energía de anisotropía magnetocrystalina**  $U_k$ .

En una estructura cristalina real, la energía de alineamiento (y por ende  $U_k$ ) debe ser **mínima** en la situación de **equilibrio**, lo que define la dirección preferencial que adopta el momento magnético en la red. A la inversa, un **máximo** de energía indica que la orientación de un dipolo individual es **inestable** dentro de la estructura cristalina. En la expresión hallada para  $U_k$  el mínimo aparece para  $\theta = 0$  mientras que el máximo se halla para  $\theta = \pi$ . Los estados para  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  son también estables.



Las estructuras cristalinas reales llevan a expresiones mucho más complicadas para la energía  $U_k$ . Podemos seguir este análisis simplificado con el caso del **hierro**, que es uno de los materiales magnéticos más comunes. El hierro tiene una estructura cristalina cúbica de cuerpo centrado (BCC) donde los dipolos se hallan en los vértices y el centro de un cubo.

En este caso, las direcciones preferenciales de alineación espontánea (los estados estables) para un dipolo dado se encuentran cuando está alineado con cualquiera de las aristas del cubo (que se hallan cada  $\pi/2$ ), y la condición de inestabilidad ocurre sobre las diagonales principales (que ocurren cada  $\pi/4$ ).

Entonces en este caso la expresión de la energía de anisotropía magnetocrystalina debe modificarse en la forma:

$$U_k = 2\mu_0 m M \operatorname{sen}^2(2\theta) = \frac{1}{4} K_1 \operatorname{sen}^2(2\theta)$$

donde se ha introducido la **constante cristalográfica** del material:  $K_1 = 8\mu_0 m M$ .

Otras estructuras cristalinas tendrán expresiones diferentes de  $U_k$  que, como indica su nombre, refleja la influencia de la geometría cristalina - la disposición espacial de átomos y moléculas - en la definición de direcciones privilegiadas o "naturales" para la magnetización. En la mayoría de las estructuras existe uno o más "ejes fáciles" a lo largo de los cuales se produce la magnetización espontánea del material.

Para la minimización de la energía de anisotropía magnetocrystalina, todos los dipolos de un volumen del material deben alinearse con la dirección preferencial. Cuando todos los dipolos están alineados (sin tener en cuenta por el momento las fluctuaciones debidas a la agitación térmica)

contribuyen a una vector magnetización máximo que llamamos **magnetización de saturación**  $\mathbf{M}_{\text{sat}}$  y decimos que el material está saturado, ya que no es posible lograr una mayor magnetización.

A la **energía de alineamiento local**, que acabamos de describir, se debe agregar la **energía de alineamiento global**  $U_f$  correspondiente al trabajo realizado por el campo exterior  $\mathbf{H}$ , cuyo resultado será, en nuestro esquema de alineamiento sucesivo, tratar de alinear a los dipolos (y en consecuencia al vector magnetización  $\mathbf{M}_{\text{sat}}$ ) con  $\mathbf{H}$ :

$$U_f = -\mu_0 M_{\text{sat}} H \cos(\theta - \theta_0)$$

La **energía total** (sin tener en cuenta términos no dependientes de la rotación) es la suma de la energía de anisotropía magnetocrystalina  $U_k$  y su energía de alineación con el campo exterior  $U_f$ :

$$U = U_k + U_f = \frac{1}{4} K_1 \operatorname{sen}^2(2\theta) - \mu_0 M_{\text{sat}} H \cos(\theta - \theta_0)$$

En cualquier aplicación práctica, un imán permanente es de utilidad si se optimizan sus propiedades de forma de magnetizarlo en una dirección preferencial (por ejemplo, a lo largo del eje, en un imán cilíndrico) y si además su magnetización permanente no se ve afectada apreciablemente por un campo exterior aplicado.

La influencia desmagnetizadora de un campo aplicado  $\mathbf{H}$  es máxima cuando se lo coloca en "reversa" respecto de la magnetización permanente, ya que su acción será tratar de orientar a los dipolos en su propia dirección y sentido.

Para analizar esta influencia, determinaremos el valor de  $H$  necesario para que el mínimo de energía deje de ser un mínimo, es decir, **deje de ser un estado estable**. Para ello calculamos la derivada de  $U$  respecto de  $\theta$  y la anulamos para hallar el mínimo, y luego calculamos la segunda derivada de  $U$  respecto de  $\theta$  y la anulamos para hallar la condición de cambio de estabilidad:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{K_1}{4} \operatorname{sen}^2(2\theta) - \mu_0 M_{\text{sat}} H \cos(\theta_0 - \theta) \right) = \frac{K_1}{2} \operatorname{sen}(4\theta) - \mu_0 M_{\text{sat}} H \operatorname{sen}(\theta_0 - \theta) = 0$$

es la condición para energía mínima, y:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{K_1}{2} \operatorname{sen}(4\theta) - \mu_0 M_{\text{sat}} H \operatorname{sen}(\theta_0 - \theta) \right) = 2K_1 \cos(4\theta) + \mu_0 M_{\text{sat}} H \cos(\theta_0 - \theta) = 0$$

es la condición que describe el cambio de estabilidad (un mínimo pasa a ser un máximo a través de un punto de ensilladura).

Para  $\theta_0 = \theta + \pi$  ( $\mathbf{H}$  en "reversa" de  $\mathbf{M}_{\text{sat}}$ ):  $\frac{dU}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{K_1}{2} \operatorname{sen}(4\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow 2K_1 - \mu_0 M_{\text{sat}} H = 0 \Rightarrow H_{ci} = \frac{2K_1}{\mu_0 M_{\text{sat}}}$$

Este campo  $H_{ci}$  es el necesario para desestabilizar la magnetización del material. Con un campo de magnitud ligeramente superior, la magnetización cambia de sentido y los dipolos del material se orientan en el sentido inverso. Este campo crítico se denomina **coercividad intrínseca** y es una propiedad característica del material.

De la expresión obtenida puede verse que la coercividad intrínseca depende únicamente de la anisotropía magnetocrystalina y la magnetización de saturación, es decir, de propiedades geométrico-cristalinas y físicas de la distribución de momentos magnéticos atómicos.

La energía asociada con la anisotropía magnetocrystalina está presente en todas las estructuras cristalinas y es el factor preponderante para analizar el comportamiento de muchos materiales ferromagnéticos.

Podemos ilustrar gráficamente este comportamiento:

El imán permanente mantiene una magnetización  $+M_{sat}$  hasta que se le aplica un campo inverso de magnitud  $-H_{ci}$ , momento en el cual la magnetización se vuelve inestable y salta (idealmente) a  $-M_{sat}$ . Se requiere entonces aplicar un nuevo campo  $+H_{ci}$  para que la magnetización salte nuevamente a  $+M_{sat}$ . Resulta así una gráfica que es la **curva de magnetización intrínseca** del material.

En la práctica solamente nos interesa la parte superior de este diagrama. El primer cuadrante (arriba a la derecha) representa la región de magnetización inicial del material, y el segundo cuadrante (arriba a la izquierda) representa la región en que el imán realiza trabajo en contra de un campo aplicado reverso, pero de valor menor que  $-H_{ci}$ . Muchas aplicaciones se dan en el segundo cuadrante, que se conoce como **curva intrínseca de desmagnetización**.

Podemos transformar esta gráfica intrínseca  $M$  vs.  $H$  en una gráfica **normal**  $B$  vs.  $H$  usando la relación:

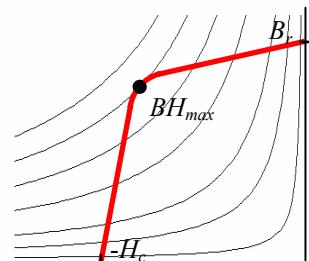
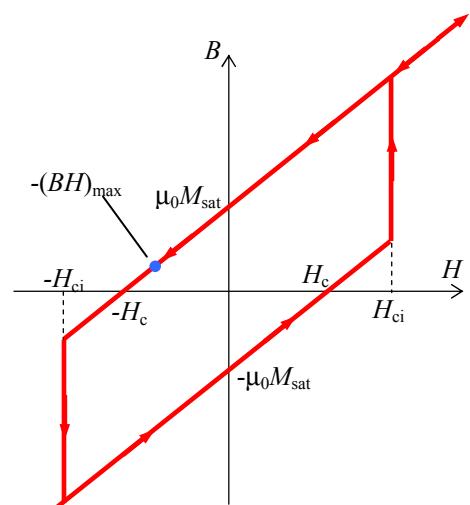
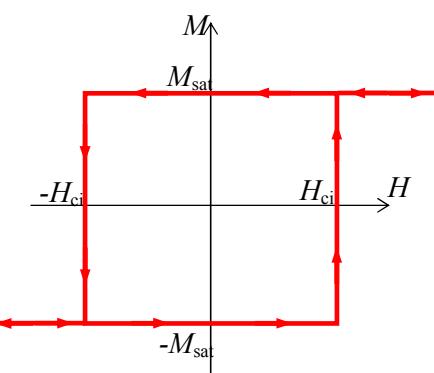
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

con lo que se obtiene la gráfica de la derecha. Esta gráfica es de mayor utilidad ya que  $\mathbf{M}$  existe solamente dentro del material magnético mientras que  $\mathbf{B}$  existe en todo el espacio.

Nótese que la pendiente de la curva  $B$  vs.  $H$  es:  $dB/dH = \mu_0$ , al menos para  $-H_c < H < +H_c$ . Pero  $\mu_0$  es la relación  $B/H$  en el vacío, de modo que en este caso **ideal** la magnetización del material no parece introducir diferencias con respecto al vacío. Veremos cómo se modifica esta situación en materiales reales.

Esta gráfica  $B$ - $H$  tiene tres puntos de importancia para el diseño de aplicaciones de interés tecnológico:

- **Remanencia** ( $B_r$ ) – Es la intersección de la curva con el eje  $+B$ . Para el material **ideal**  $B_r = \mu_0 M_{sat}$ , pero en el caso general  $B_r$  es el valor de la densidad de flujo magnético cuando el imán no tiene *fmm* ( $B_r \Rightarrow H = 0$ ). **La remanencia es un índice de la habilidad del material como imán permanente.**
- **Coercividad** ( $H_c$ ) - Es la intersección de la curva con el eje  $-H$ . Para el material **ideal**  $H_c = M_{sat}$ , pero en el caso general es la *fmm* requerida para anular el flujo magnético dentro del imán. Nótese que en los casos reales los valores de  $H_c$  y  $H_{ci}$  **no** son iguales, ya



que el valor de  $H$  necesario para anular a  $B$  dentro del material en general es menor que el requerido para revertir la dirección de la magnetización del material. **La coercividad es un índice de la habilidad del imán para soportar factores desmagnetizantes.**

- **Máximo producto de energía**  $(BH)_{\max}$  es el punto sobre el segundo cuadrante de la curva  $B$  vs.  $H$  en el que el producto  $BH$  es máximo. Sobre la curva **ideal**, está exactamente a mitad de camino sobre la recta del segundo cuadrante, con un valor  $-(BH)_{\max} = \mu_0(\frac{1}{2}M_{sat})^2$ . En la figura se muestran las hipérbolas que grafican la ecuación  $BH = cte$ . La hipérbola tangente a la curva B-H del material define  $(BH)_{\max}$  y el punto buscado. **El valor de  $(BH)_{\max}$  indica la máxima densidad de energía que puede almacenarse en el imán.**

Podemos describir ahora el comportamiento de un imán **real**, y nos restringiremos al segundo cuadrante de la curva  $B$  vs.  $H$ , región conocida como **curva de desmagnetización**. Como referencia, la curva **ideal** de la discusión previa se señala en azul.

En los materiales ferromagnéticos reales el alineamiento de los momentos magnéticos atómicos o moleculares depende de muchos más factores que los aquí señalados. El alineamiento es una manifestación de **orden**. La energía térmica introduce desorden. Ambos factores compiten entre sí y la frontera entre el comportamiento ordenado y el desordenado es la temperaturas de Curie. En realidad, en los materiales ferromagnéticos, parojojalmente las interacciones responsables de los alineamientos locales no son magnéticas sino electrostáticas. Estas interacciones son mucho más intensas que las magnéticas y tienden a acercar los electrones de los átomos. Pero, por el principio de exclusión, los electrones deben tener funciones de onda antisimétricas que definen así una "orientación" para sus momentos magnéticos de espín. Este ordenamiento es poco dependiente de la temperatura salvo a tan altas temperaturas donde los efectos de desorden debidos a la energía térmica superan a los efectos de ordenamiento. Se puede demostrar (**regla de Hund**) que los electrones se disponen en un orbital atómico maximizando el momento magnético compatible con el principio de exclusión, lo que lleva a que los espines se orienten paralelamente. En materiales donde sólo los orbitales electrónicos más externos, las capas de valencia, se hallan incompletas, los átomos se reúnen modificando las propiedades de esos orbitales externos lo que habitualmente lleva a anular el momento magnético atómico. Sólo en los llamados **elementos de transición**, como Fe, Ni, O y las tierras raras, existen orbitales profundos incompletos que no se ven afectados por las fuerzas de enlace cuando los átomos se reúnen para conformar un sólido. Los átomos retienen en momento magnético importante y esto da origen al fenómeno de ordenamiento que hemos mencionado.

Por otra parte, en materiales ferromagnéticos reales aparecen estructuras magnéticamente ordenadas multiatómicas que se denominan **dominios**, y que surgen para minimizar la energía magnética del trozo de material. Cada dominio tiene un alineamiento casi perfecto de sus átomos constituyentes. Entre uno y otro dominio hay una **pared de dominio** donde el alineamiento cambia de dirección en una muy corta distancia. Los dominios se forman de manera que el flujo magnético quede constreñido dentro del material, lo que causa una energía magnética menor que si las líneas de campo se cerraran fuera de él. Sin embargo, la generación de una pared de dominio eleva la energía total, de manera que se crea un número finito de dominios. Al colocar el material en un campo exterior, los dominios cuya magnetización se halla cercana a la posición paralela al campo aplicado crecen a expensas de los vecinos por el "movimiento" de las paredes de dominio. Este mecanismo se detiene cuando la energía del sistema vuelve a ser la mínima posible. Si se aumenta el campo aplicado los dominios dominantes siguen creciendo hasta que toda la muestra es (casi) un único dominio. De ahí en más sólo se puede tener mayor alineamiento girando los momentos magnéticos de los dominios, lo que es energéticamente más costoso.

En relación a la curva de histéresis para un caso real, ni el imán alcanza su coercividad intrínseca teórica  $-H_{ci}$  ni se produce la inversión completa de la magnetización cuando se llega a este valor. La curva intrínseca de desmagnetización real (que se muestra en línea de rayas) tiene una transición gradual en lugar del salto abrupto de la curva **ideal**. La curva de desmagnetización normal

( $B$  vs.  $H$ ) también presenta un codo gradual. Las coercividades  $-H_{ci}$  -  $H_c$  se definen ahora como las intersecciones de las curvas intrínseca y normal *reales* con el eje  $H$ .

La curva normal de magnetización determina la densidad de flujo magnético  $B$  que genera el imán de acuerdo al valor de la fuerza de desmagnetización  $H$ . A medida que  $H$  se acerca al valor de reversión  $-H_c$  la densidad de flujo disminuye hasta que cae rápidamente al pasar el codo de la curva. Esto significa que en las aplicaciones prácticas se debe mantener el imán por encima del codo para obtener un flujo magnético útil.

A partir de esta descripción introductoria del comportamiento de un material ferromagnético, podemos decir que las características importantes en la selección de un material para usar en imanes permanentes son:

- alta remanencia. Cuanto mayor es la remanencia mayor es el flujo magnético que puede crear un imán.
- alta coercividad. Cuanto mayor es la coercividad es más difícil que el imán se desmagnetice por acciones mecánicas o cambios de temperatura.
- alto producto  $(BH)_{max}$ . Cuanto mayor es este valor, se requerirá menos material para producir un dado flujo magnético en un circuito.

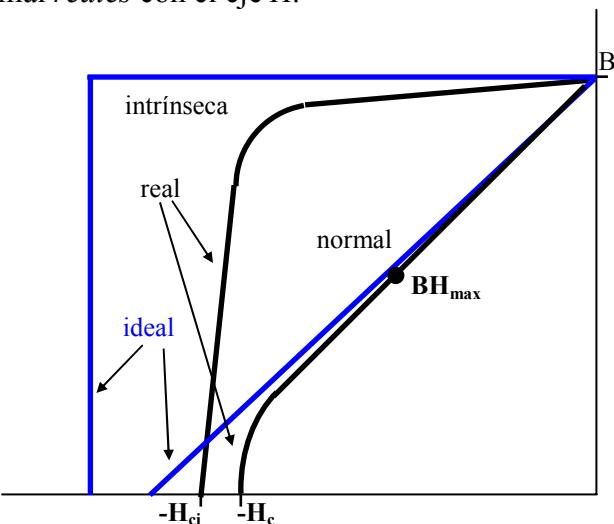
Generalmente no es posible alcanzar estas tres características simultáneamente. Un material **duro**, de alta remanencia y coercividad presenta un ciclo de histéresis de gran superficie, lo que implica altas pérdidas. Por este motivo en aplicaciones que usen corriente alterna se usan materiales **blandos**, de ciclo de histéresis angostos y pérdidas menores. Los materiales duros se usan para imanes permanentes en aplicaciones donde no están expuestos a ciclos de magnetización-desmagnetización. En la siguiente tabla se presentan propiedades de materiales magnéticos comunes:

Material	$BH_{max}$ (MGOe)	$B_r$ (G)	$H_c$ (Oe)
Acero Cromo <sup>4</sup>	0.20	10000	50.3
Oxido de Hierro-cobalto <sup>5</sup>	0.60	2000	905
Alnico 12 <sup>6</sup>	1.51	6000	955
Alnico 2 <sup>7</sup>	1.71	7000	563
Alnico 5 <sup>8</sup>	4.52	12500	553
Platino-Cobalto (77%Pt, 23%Co)	6.53	6000	3644

En esta tabla usamos unidades no **SI** para comparar valores con tablas de materiales comerciales modernos que presentaremos más abajo (recordar que  $1T = 10^4 G$  y  $1A/m = 4\pi \times 10^3 Oe$ ).

Se observa que en general, salvo el caso de Pt-Co, la coercividad de estos materiales es baja. El Pt-Co, por otra parte, es muy costoso. En una sección posterior se describen algunos desarrollos recientes que han logrado materiales magnéticos cerámicos (no naturales) de excelentes propiedades y de uso muy común.

En esta sección hemos encontrado que la anisotropía magnetocrystalina produce el comportamiento de histéresis típico de los materiales ferromagnéticos. En realidad cualquier causa de ani-



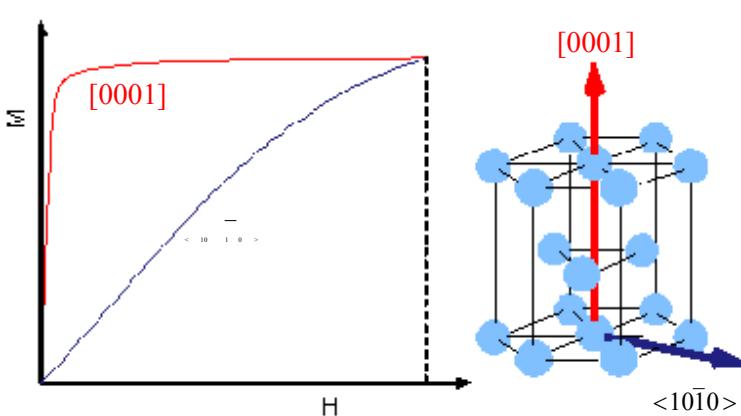
<sup>4</sup> 98% Fe, 0.9% Cr, 0.6% C, 0.4 Mn

<sup>5</sup> 57% Fe, 28% O, 15% Co

<sup>6</sup> 33% Fe, 35% Co, 18% Ni, 8% Ti, 5% Al

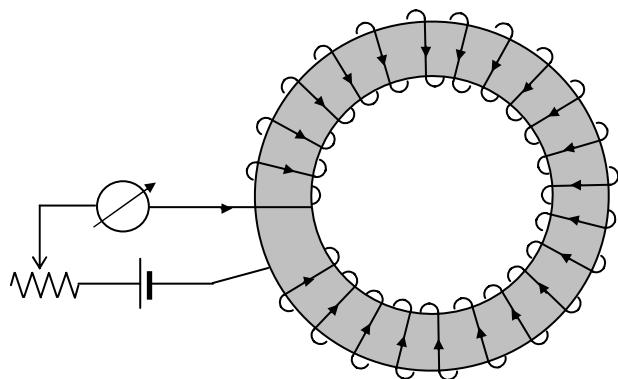
<sup>7</sup> 55% Fe, 12% Co, 17% Ni, 6% Cu, 10% Al

<sup>8</sup> 51% Fe, 24% Co, 14% Ni, 3% Cu, 8% Al

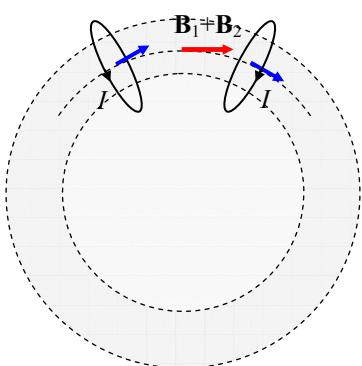


hexagonal que tiene la dirección fácil en la dirección  $[0001]$  (vertical). Se ve claramente cómo la magnetización de saturación se alcanza más rápidamente en la dirección fácil.

### Circuitos magnéticos



que circula una corriente  $I$ . Por el momento no consideramos el devanado secundario o suponemos que por el no circula corriente, de manera que no interviene en la generación de campo magnético. El devanado primario se puede suponer como la superposición de  $N_1$  espiras.



Existe una simetría cilíndrica alrededor del eje del anillo. El campo magnético creado por todas estas espiras tiene dirección circular. Esto se puede apreciar viendo que las espiras se pueden agrupar de a pares simétricos respecto de un eje cualquiera, como se indica en la figura. Aplicando entonces la ley de Ampère sobre una circunferencia de radio  $a < r < b$  intermedio a los radios interior y exterior del anillo:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI \Rightarrow H2\pi r = NI \Rightarrow \mathbf{H}(r) = \frac{NI}{2\pi r} \hat{\phi}$$

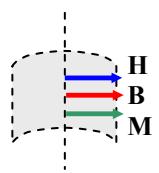
$NI$  es la corriente concatenada por la curva de circulación.

Si ahora realizamos el mismo procedimiento sobre una circunferencia interior ( $r < a$ ), la curva no concatena corriente, y el campo, que debe tener la misma simetría que en el caso anterior, es nulo. Lo mismo ocurre si tomamos una circulación con  $r > b$ , ya que la corriente **neta** concatenada es nuevamente cero, porque cada espira atraviesa dos veces la superficie de la curva. El campo magnético generado por el toroide es distinto de cero solamente dentro del mismo, y sus líneas de campo son circunferencias coaxiales con el eje del toroide.

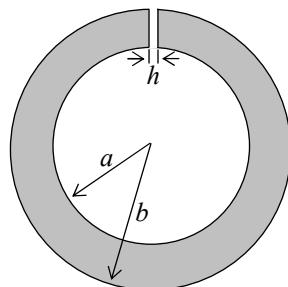
Conocido  $\mathbf{H}$  es posible calcular  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{M}$  dentro del toroide:  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$      $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$

sotropía lleva a estas propiedades, de manera que en la producción de imanes se utiliza la anisotropía para obtener imanes más potentes. La dirección de magnetización preferente se conoce como **dirección fácil**. En la figura se muestran las curvas  $M-H$  de una estructura

Las líneas de campo de  $\mathbf{B}$  y de  $\mathbf{M}$  son también circunferencias, y como  $\mu$  y  $\chi_m$  son positivas, todos los vectores son paralelos.



### Toroide con entrehierro



Consideramos ahora un anillo de Rowland al cual se le ha quitado una “rodaja” de espesor  $h$  muy pequeño ( $h \ll a$ ). Si el espesor es muy pequeño podemos mantener las consideraciones de simetría del caso previo y suponer que las líneas de campo son circulares. Entonces, tomando nuevamente una circulación sobre una circunferencia de radio  $a < r < b$ :

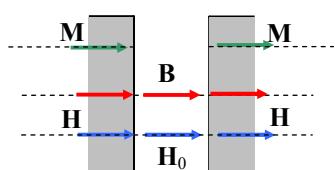
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

En esta integral debemos tener en cuenta que, por la existencia del entrehierro, **el campo  $\mathbf{H}$  no se conserva** al cruzar las interfaces entre el material y el aire. Lo que sí se conserva es el campo  $\mathbf{B}$ , ya que los campos son normales a las superficies interfaces. Podemos escribir entonces:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C H dl = \oint_C \frac{B}{\mu} dl = \frac{B}{\mu} (2\pi r - h) + \frac{B}{\mu_0} h = NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu_0 (2\pi r - h) + \mu h}$$

Los valores de  $\mathbf{H}$  en ambas regiones surgen de:

$$B = \mu_0 (H + M) \Rightarrow \begin{cases} H = B / \mu_0 & \text{en el entrehierro} \\ H = B / \mu & \text{en el material} \end{cases}$$



$$\text{y la magnetización en el material es: } M = \frac{B}{\mu_0} - H = B \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right).$$

Nuevamente se ve que todos los vectores son paralelos. Las líneas de campo de  $\mathbf{H}$  y de  $\mathbf{B}$  son cerradas, mientras que las de  $\mathbf{M}$  se encuentran solamente dentro del material.

Ambos casos son ejemplos de circuitos magnéticos. La ley de Ampère, que hemos utilizado para el cálculo de los campos, puede escribirse para un circuito magnético:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI = fmm \Rightarrow \oint_C H dl = fmm \Rightarrow \oint_C \frac{B}{\mu} dl = fmm \Rightarrow \oint_C \frac{\Phi_m}{\mu S} dl = fmm \Rightarrow \Phi_m \oint_C \frac{dl}{\mu S} = fmm$$

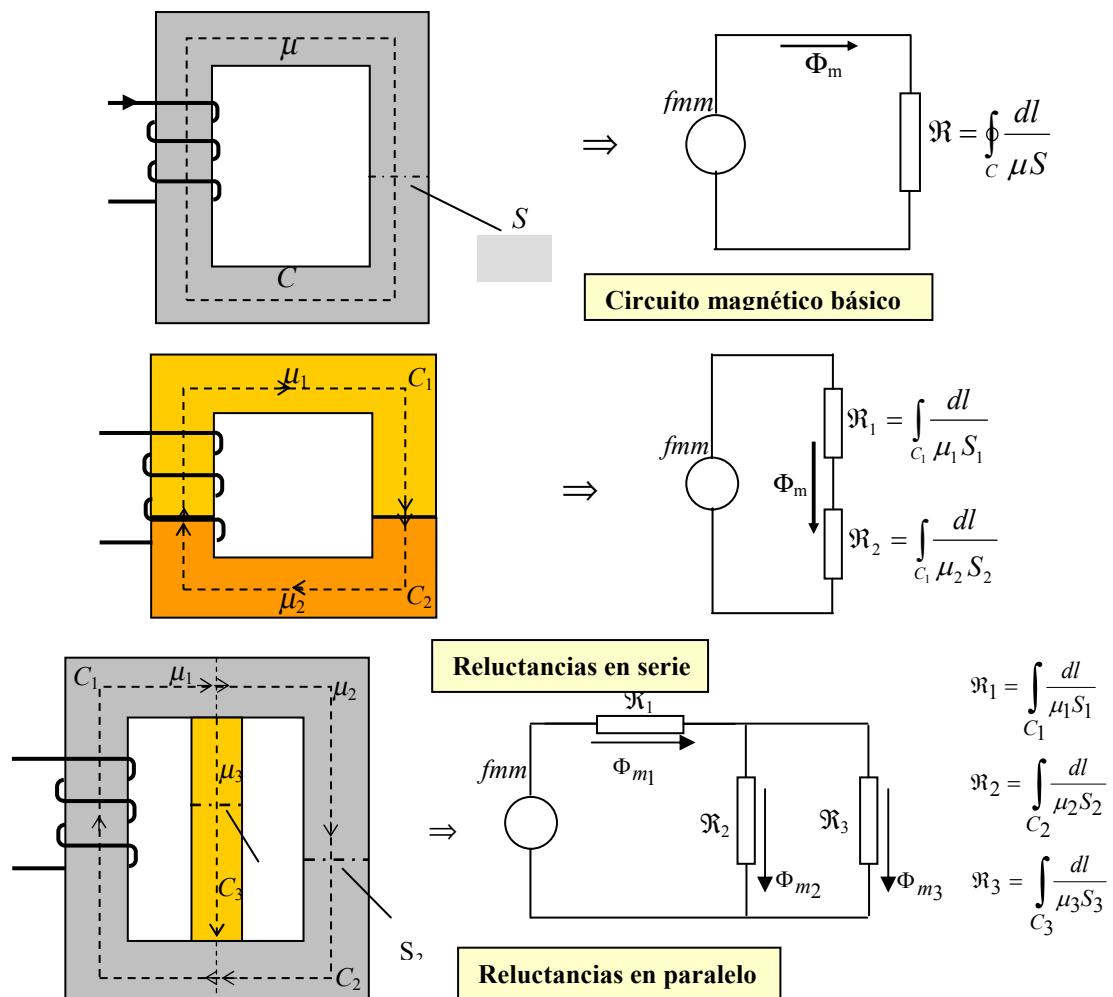
donde hemos supuesto que el flujo magnético es constante a lo largo del circuito magnético. Esta suposición es válida cuando el circuito magnético está formado por material ferromagnético, que tiene permeabilidad muy alta frente a los medios que lo rodean, y entonces el flujo magnético se concentra dentro del circuito. La última ecuación puede escribirse:

$$fmm = \mathfrak{R} \Phi_m \quad \text{con} \quad \mathfrak{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu S}$$

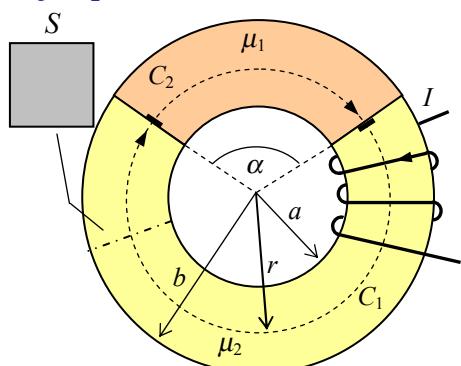
Esta ecuación es idéntica a la de la ley de Ohm para los circuitos eléctricos. El parámetro  $\mathfrak{R}$  se conoce como **reluctancia** del circuito magnético y es el equivalente de la resistencia de un circuito eléctrico. Se observa que **la reluctancia de un circuito magnético es inversamente proporcional a su permeabilidad**. Así como en el caso de los circuitos eléctricos, donde la corriente fluye con mayor facilidad por los caminos de menor resistencia, en los circuitos magnéticos el flujo magnético “fluye” con mayor facilidad por los caminos de menor reluctancia, de manera que las líneas de flujo se concentran en las partes del circuito de mayor permeabilidad.

Debido a esta analogía, es evidente que podemos describir un circuito magnético como un circuito eléctrico equivalente, y las ecuaciones que se usan en aquellos casos son aplicables a los casos magnéticos, como se ilustra en los siguientes gráficos y ejemplos.

Un circuito magnético básico consta de una fuente de *fmm* y un camino de baja reluctancia donde el flujo magnético es constante, como en la siguiente figura:



**Ejemplo 4-2:** Resolver el circuito magnético de la figura, donde hay dos materiales diferentes.



Se trata de un caso de reluctancias en serie, pero vamos a resolverlo aplicando la ley de Ampère para analizar algunas características del cálculo de reluctancias.

Suponemos que la presencia de dos materiales distintos no altera la simetría cilíndrica del problema (Esto es tanto más cierto cuanto mayores son las permeabilidades de los materiales respecto del medio que rodea al toroide. En tales circunstancias prácticamente todo el flujo magnético se halla encerrado en el material). En tal caso las líneas de campo serán circunferencias coaxiales con el toroide y tomando una de ellas como camino de circulación tenemos:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI \Rightarrow \frac{B}{\mu_1}(2\pi - \alpha)r + \frac{B}{\mu_2}\alpha r = NI$$

de donde:  $B = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1 \alpha} \frac{NI}{r}$

Podemos ahora calcular el flujo magnético dentro del toroide integrando sobre la sección (obsérvese que  $B$  varía con el radio):

$$\Phi_m = \int_S B ds = (b-a) \int_a^b B dr = (b-a) \int_a^b \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1 \alpha} \frac{NI}{r} dr = \frac{\mu_1 \mu_2 (b-a) NI \ln(b/a)}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1 \alpha}$$

y entonces la reluctancia del circuito es:

$$\mathfrak{R} = \frac{fmm}{\Phi_m} = \frac{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1\alpha}{\mu_1\mu_2(b-a)\ln(b/a)} = \frac{(2\pi - \alpha)}{\mu_1(b-a)\ln(b/a)} + \frac{\alpha}{\mu_2(b-a)\ln(b/a)} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$$

que es la suma de las reluctancias de cada parte homogénea del circuito.

En este caso no es aplicable la ecuación:  $\mathfrak{R} = \oint_C \frac{dl}{\mu S}$  que surge de suponer:  $\Phi_m = BS$  ya

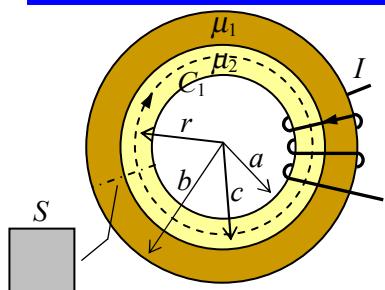
que  $B$  no es uniforme en la sección. Si ahora consideramos que el espesor del toroide es muy pequeño, digamos:  $b = a(1+\delta)$  con  $\delta \rightarrow 0$ , podemos calcular el flujo como si  $B$  fuera constante sobre la sección e igual a su valor para el llamado **radio medio**:  $r_m = (b+a)/2 = a(1+\delta/2) \approx a$ . En tal caso podemos escribir:

$$\Phi_m \approx B|_{r_m} S = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1\alpha} \frac{NI}{r_m} S = \frac{\mu_1\mu_2 NI S}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1\alpha a(1+\delta/2)} \approx \frac{\mu_1\mu_2 NI}{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1\alpha a} S$$

y entonces la reluctancia del circuito queda:

$$\mathfrak{R} = \frac{fmm}{\Phi_m} = \frac{\mu_2(2\pi - \alpha) + \mu_1\alpha a}{\mu_1\mu_2 S} = \frac{(2\pi - \alpha) a}{\mu_1 S} + \frac{\alpha a}{\mu_2 S} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$$

donde ahora cada reluctancia tiene la forma:  $\mathfrak{R} = L/(\mu S)$ .



**Ejemplo 4-3:** Resolver el circuito magnético de la figura.

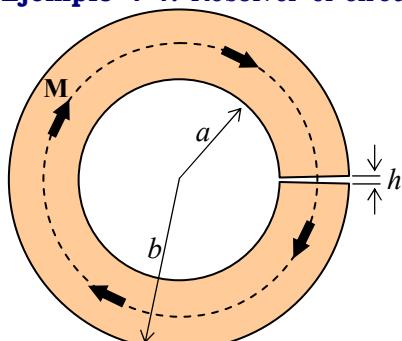
Este caso es similar al anterior, pero ahora se trata de reluctancias en paralelo. No hay en este caso duda de la simetría cilíndrica axial, y tomando una circulación sobre la curva  $C_1$  en el medio interior tenemos:  $H_1 = \frac{NI}{2\pi r}$

Si ahora tomamos una circulación sobre una curva  $C_2$  en el medio exterior tenemos nuevamente la misma expresión para  $H$ . Sobre la interfase entre ambos medios, los campos  $H$  deben ser iguales, porque son tangenciales a la interfase. Tenemos entonces, para cualquier punto dentro del toroide:  $H = \frac{NI}{2\pi r}$ . Pero  $B$  es diferente en cada medio porque la permeabilidad es diferente. Si calculamos el flujo tenemos:

$$\Phi_m = \int_S B ds = (b-a) \left( \int_a^c B_2 dr + \int_c^b B_1 dr \right) = (b-a) \left( \int_a^c \mu_2 \frac{NI}{2\pi r} dr + \int_c^b \mu_1 \frac{NI}{2\pi r} dr \right) = (b-a) \frac{NI}{2\pi} \left( \mu_2 \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \mu_1 \ln\left(\frac{b}{c}\right) \right)$$

Entonces la reluctancia es:  $\mathfrak{R} = \frac{fmm}{\Phi_m} = \frac{2\pi}{(b-a) \left( \mu_2 \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \mu_1 \ln\left(\frac{b}{c}\right) \right)} \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2}$

**Ejemplo 4-4:** Resolver el circuito magnético de la figura. Se trata de un imán uniformemente magnetizado con entrehierro.



En este caso no existe fuerza magnetomotriz, pero como dentro del material hay magnetización  $M$ , debe haber un  $B$ , que además es continuo al cruzar las interfaces entre el material y el aire. Entonces tenemos:

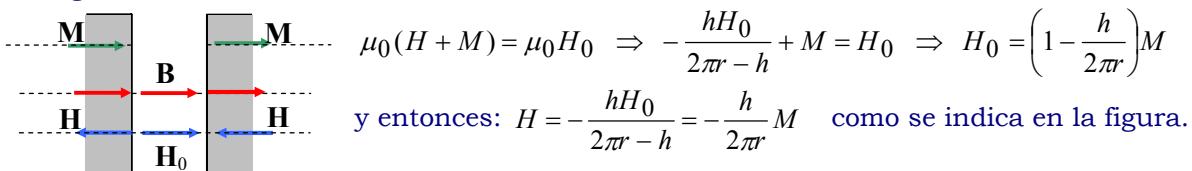
$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C H dl = 0 \Rightarrow H(2\pi r - h) + H_0 h = 0$$

donde  $H_0$  es el campo magnético en el entrehierro.

Como  $B = \mu_0 H_0$  en el vacío,  $B$  y  $H_0$  tienen igual sentido, que tomamos arbitrariamente como positivo. Entonces:

$$H = -\frac{hH_0}{2\pi r - h} \quad \text{y el campo magnético en el imán tiene sentido}$$

negativo. Además, como  $B$  debe conservarse en la interfase:

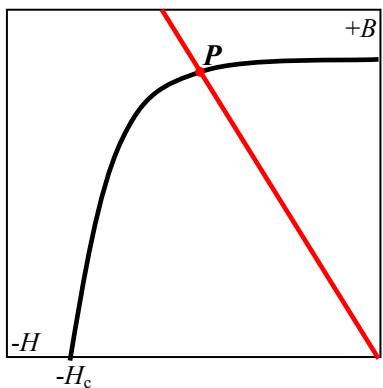


$$\mu_0(H + M) = \mu_0 H_0 \Rightarrow -\frac{hH_0}{2\pi r - h} + M = H_0 \Rightarrow H_0 = \left(1 - \frac{h}{2\pi r}\right)M$$

$$\text{y entonces: } H = -\frac{hH_0}{2\pi r - h} = -\frac{h}{2\pi r} M \quad \text{como se indica en la figura.}$$

$$\text{Además: } B = \mu_0(H + M) = \mu_0 \left(1 - \frac{2\pi r}{h}\right)H \Rightarrow B = -\mu_0 \frac{2\pi r - h}{h} H$$

y la relación entre **B** y **H** es una recta (llamada recta de trabajo o recta de carga) en el segundo cuadrante de la curva de histéresis (que como hemos visto se conoce como **curva de desmagnetización**). Si el imán está originalmente desmagnetizado y lo magnetizamos mediante una *fmm* hasta la saturación, cuando retiremos la *fmm* el imán volverá al valor de remanencia ( $+B_r$ ). Sin embargo, la presencia del entrehierro hace que el punto de equilibrio final sea *P*, en la intersección de la curva de histéresis y la recta recta de carga (sin entrehierro, el imán queda en el punto de remanencia).



La pendiente de la recta de carga (llamada **permeancia**) siempre es negativa porque **B** y **H** son vectores de sentidos opuestos dentro del imán, y su valor es proporcional a la relación de la longitud de material y la longitud de entrehierro, es decir, depende de factores puramente geométricos. Entrehierros muy pequeños dan una recta de carga muy vertical, con el imán cerca de la remanencia. Entrehierros grandes alejan al imán de la remanencia, disminuyendo el flujo magnético útil (existe gran cantidad de flujo disperso en el aire cerca de los polos del imán).

## Fuerzas

Muchas aplicaciones de imanes, electroimanes y otros dispositivos electromecánicos utilizan fuerzas magnéticas. Ya hemos establecido que existen fuerzas sobre conductores que transportan corriente en presencia de un campo **B**. Si el circuito es cerrado se produce además una cupla que tiende a alinear al momento magnético del circuito con el campo aplicado. Hemos usado este resultado para analizar la anisotropía de magnetización de materiales ferromagnéticos. La energía de un dipolo magnético en un campo exterior **B** es:

$$U = -m \cdot B \cos \theta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Esta energía tiende a un mínimo (estado de equilibrio) cuando el momento magnético del dipolo y el campo aplicado están alineados. En este caso la cupla  $\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$  sobre el dipolo es cero.

Para un dipolo en un campo exterior, podemos calcular la fuerza como:

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

donde se ha usado la identidad vectorial (Capítulo 1):

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$$

y el hecho de que el momento magnético **m** es constante.

Podemos suponer que un cuerpo magnetizado está formado por elementos de volumen a cada cual se le puede asignar un momento magnético relacionado con el vector magnetización del material:  $dv' \rightarrow d\mathbf{m}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}')dv'$ , de manera que la fuerza sobre el elemento de volumen está dada por:  $d\mathbf{F} = [\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B}]dv'$  donde todos los vectores deben evaluarse en  $\mathbf{r}'$ . A esta fuerza debe agregarse la fuerza magnética de Lorentz debida a la circulación de corrientes verdaderas  $\mathbf{j}$ :  $d\mathbf{F} = [\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}]dv'$

Operando con  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  y  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$ :

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= [\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}]dv' = [\mu_0 \mathbf{M} \times (\mathbf{j} + \nabla \times \mathbf{M}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{j} \times (\mathbf{H} + \mathbf{M})]dv' \\ &= [\mu_0 \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}]dv' = [\mu_0 \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla)(\mathbf{H} + \mathbf{M}) + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}]dv' \\ &= [\mu_0 \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}]dv' \end{aligned}$$

Además:  $\nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) = 2[\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M}] \Rightarrow \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) = 1/2 \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M}$

y queda:

$$d\mathbf{F} = [\mu_0 \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{M}) + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H}] dv' = \left[ \frac{\mu_0}{2} \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right] dv'$$

Integramos a todo el volumen del material:

$$\mathbf{F} = \int_V \left[ \frac{\mu_0}{2} \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{H} \right] dv' = \frac{\mu_0}{2} \oint_S M^2 \hat{\mathbf{n}} ds + \mu_0 \int_V [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}] dv'$$

donde se ha usado la identidad:  $\int_V \nabla f dv = \oint_S f \hat{\mathbf{n}} ds$  que surge del teorema de la divergencia. La primera integral se anula ya que la superficie  $S$ , que es frontera de  $V$ , puede tomarse de forma que sobre ella la magnetización sea nula (por ejemplo, tomando un recinto  $V$  que encierre a todo el material magnetizado pero sea externo a todos los cuerpos).

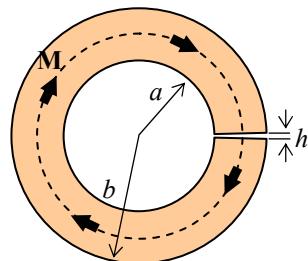
Finalmente la fuerza sobre un material magnetizado que además transporta corriente es:

$$\mathbf{F} = \mu_0 \int_V [(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{j} \times \mathbf{H}] dv'$$

El primer término representa la contribución de la energía de alineación de los momentos magnéticos elementales (la magnetización) del material y el segundo la fuerza de Lorentz sobre las corrientes libres. El primer término explica por qué un imán atrae a un trozo de hierro: el material es atraído hacia las regiones con los valores mayores de  $\mathbf{H}$ .

La expresión obtenida es general, pero tiene problemas de aplicación cuando se trata de analizar fuerzas en situaciones donde los campos tienen un salto discontinuo, como se analiza en el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo 4-5: Hallar la fuerza entre los polos del imán toroidal con entrehierro del Ejemplo 4-4.



Los campos hallados en el Ejemplo 4-4 son:

$$H = -\frac{h}{2\pi r} M \quad \text{dentro del imán}$$

$$H_0 = \left(1 - \frac{h}{2\pi r}\right) M \quad \text{en el entrehierro}$$

Si aplicamos la ecuación hallada para la fuerza magnética sobre el imán encontramos que el integrando se anula, ya que la acción de la fuerza está concentrada sobre las superficies interfases donde  $H$  experimenta un salto  $\Delta H = M$ .

Nótese que este salto es independiente del tamaño del entrehierro (siempre que sea pequeño como para despreciar el flujo disperso). Podemos calcular la fuerza que tiende a unir las superficies enfrentadas del entrehierro (los polos del imán) mediante un argumento general. Cada dipolo del material, alineado con el campo  $B$ , almacena una energía:  $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ . Como hemos hecho muchas veces, suponemos que el material está formado por dipolos magnéticos infinitesimales, de modo que cada cual almacena la energía:  $dU = -\mathbf{dm} \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} dv = -MB dv$  (ya que  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{B}$  son paralelos en todo el imán), y entonces la energía almacenada en todo el imán será:

$$U = -\int_V MB dv = -\mu_0 M^2 \int_V \left(1 - \frac{h}{2\pi r}\right) dv = -\mu_0 M^2 \left(V - \frac{h}{2\pi} \int_V \frac{dv}{r}\right)$$

Para simplificar los cálculos suponemos que el toroide es muy delgado y usamos el radio medio:  $U = -\mu_0 M^2 \left(V - \frac{h}{2\pi} \int_V \frac{dv}{r}\right) \approx -\mu_0 M^2 V \left(1 - \frac{h}{2\pi r_m}\right)$

dado que el volumen del imán es:  $V = (2\pi r_m - h)S$ .

Supongamos ahora que el imán está construido con un material elástico, de modo que puede deformarse con la fuerza entre los polos. Esto hará que la distancia del entrehierro disminuya  $h \rightarrow h - \Delta h$ . La energía almacenada en el imán cambiará en:

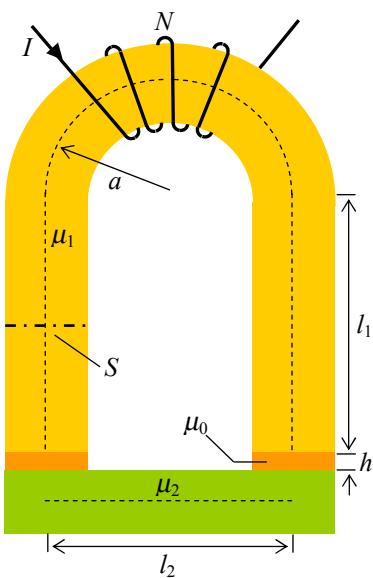
$$h \rightarrow h - \Delta h \Rightarrow U \rightarrow -\mu_0 M^2 V \left( 1 - \frac{h - \Delta h}{2\pi r_m} \right) = -\mu_0 M^2 V \left( 1 - \frac{h}{2\pi r_m} \right) - \frac{\mu_0 M^2 V \Delta h}{2\pi r_m} = U - \Delta U$$

donde se ha despreciado un término en  $\Delta h^2$ . Este cambio de energía se puede interpretar como el trabajo de la fuerza entre polos a lo largo de  $\Delta h$ :

$$\Delta U = \frac{\mu_0 M^2 V \Delta h}{2\pi r_m} = F \Delta h \Rightarrow F = \frac{\mu_0 M^2 V}{2\pi r_m} \approx \mu_0 M^2 S \approx \frac{B^2 S}{\mu_0}$$

Este es un cálculo aproximado, pero lo importante es la proporcionalidad con el cuadrado del campo  $B$  y la superficie de los polos. Por ejemplo, DexterMag Co. da la fórmula aproximada  $F \approx 0.577 B^2 S$  con  $B$  en Kgauss y  $S$  en pulgadas cuadradas.

**Ejemplo 4-6:** Hallar la corriente necesaria para que el electroimán de la figura en forma de herradura levante una barra de hierro de 1T de peso. Existen dos entrehierros de material paramagnético de espesor  $h$ .



Datos:  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $l_1 = 35 \text{ cm}$ ,  $l_2 = 25 \text{ cm}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ ,  $S = 100 \text{ cm}^2$ ,  $N = 100$ ,  $\mu_{1r} = 2500$ ,  $\mu_{2r} = 1200$ .

De acuerdo al ejemplo previo la fuerza en el entrehierro depende de la intensidad del campo  $B$ . Como hay dos entrehierros, la fuerza es doble:  $F = 2B^2 S / \mu_0 = P$

Para calcular  $B$  resolvemos el circuito magnético, tomando longitudes medias, como se indica en la figura:

$$NI = \Phi_m \mathfrak{R} \Rightarrow B = \frac{NI}{S \mathfrak{R}} \quad \text{con:} \quad \mathfrak{R} = \frac{\pi a + 2l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + \frac{2h}{\mu_0 S}$$

$$\text{Luego:} \quad B = \frac{NI}{S \mathfrak{R}} = \frac{NI}{\frac{\pi a + 2l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} + \frac{2h}{\mu_0}}$$

$$\text{y entonces:} \quad I = \sqrt{\frac{P}{2\mu_0 S N^2}} \left( \frac{\pi a + 2l_1}{\mu_{1r}} + \frac{l_2}{\mu_{2r}} + 2h \right) \approx 29.6 \text{ A}$$

## Materiales magnéticos modernos

En esta sección presentamos algunos materiales magnéticos de importancia tecnológica en la fabricación de imanes permanentes<sup>9</sup>.

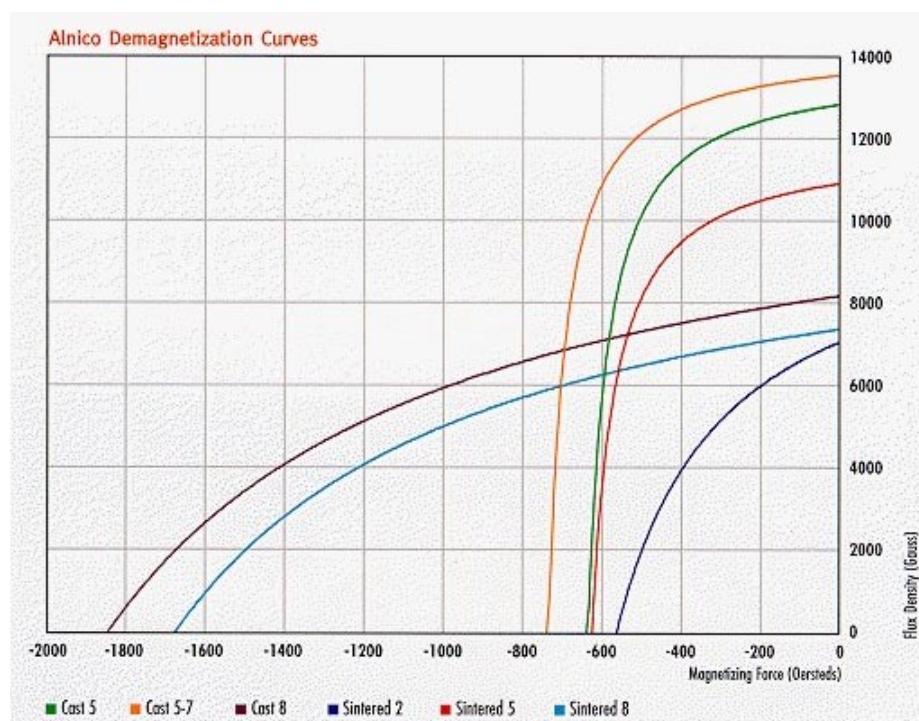
### Alnico

La aleación de aluminio, níquel, cobalto y hierro conocida como Alnico se desarrolló en la década de 1940 y representó el primer paso para crear imanes más potentes y de mejores propiedades metalúrgicas que el hierro y las variantes de aceros usadas hasta entonces. La proporción de sus elementos y el agregado de otros elementos para mejorar las propiedades magnéticas hacen que existan muchas variantes comerciales de Alnico. Los imanes de Alnico se fabrican habitualmente por conformado con moldes desde la aleación fundida o por técnicas metalúrgicas cerámicas que parten de la aleación en polvo fino y construyen la pieza por conformado a presión y sinterizado.

El producto de la energía para imanes de Alnico varía entre 1.5 y 7.5 MGOe.

Alnico tiene la menor resistencia a la desmagnetización de todos los materiales que presentamos en esta sección, pero tiene la mejor respuesta a efectos térmicos, lo que hace que pueda usarse en ambientes hasta 550°C y en aplicaciones donde se requiere estabilidad de las propiedades magnéticas sobre un amplio rango de temperatura.

La figura presenta cur-

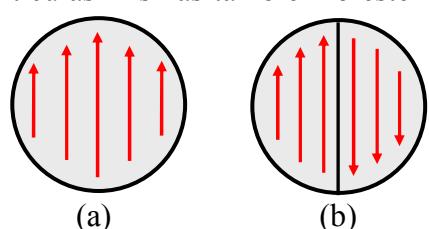


vas de desmagnetización de distintas variantes de Alnico.

### Ferritas cerámicas

Muchos imanes permanentes están hechos mediante técnicas metalúrgicas que muelen el material hasta convertirlo en un polvo de pequeñas partículas. Para maximizar la magnetización de saturación  $M_{sat}$  del conjunto del material es conveniente que los momentos magnéticos en cada partícula estén alineados y que los momentos magnéticos de las partículas mismas también lo estén. Esto último se consigue aplicando un **campo orientador** durante el proceso de consolidar el polvo en un aglomerado sólido.

Los momentos dentro de cada partícula se alinearán **espontáneamente** como se muestra en el diagrama (a) siempre que el polvo sea molido hasta un tamaño cercano al de un **único dominio magnético**. Si el tamaño de la partícula es mucho mayor, será energéticamente más favo-



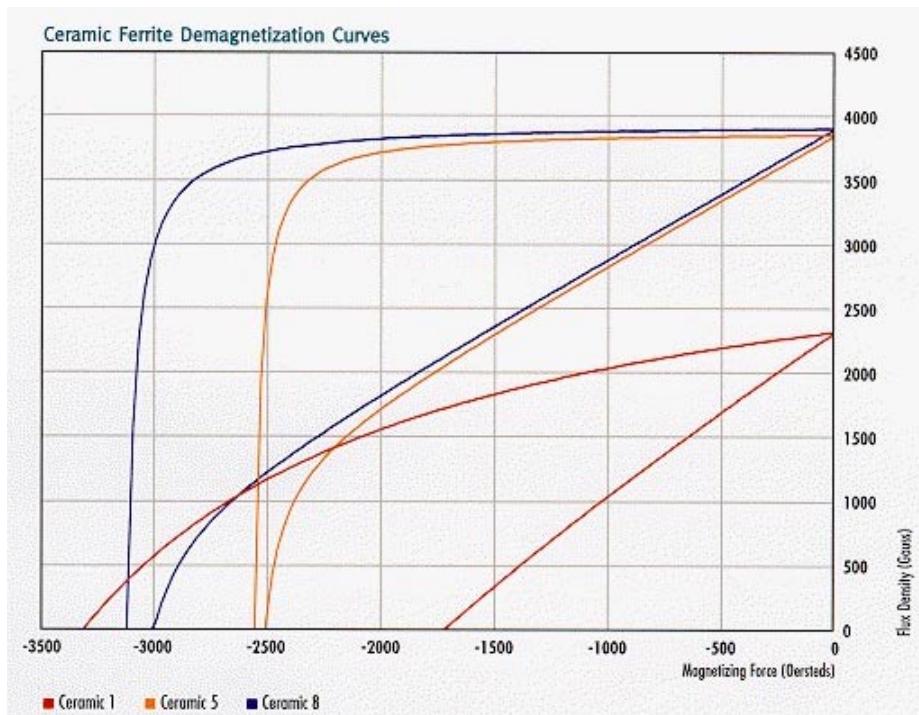
<sup>9</sup> Las gráficas y tablas de esta sección han sido tomadas de publicaciones de Dexter Magnetic Technologies.

rable la existencia de una **frontera de dominio** como se muestra en el diagrama (b), llevando a una magnetización nula para la partícula. Estos dominios se generan espontáneamente en el material. Se puede calcular por consideraciones energéticas el tamaño máximo de las partículas a obtener para lograr partículas mono-dominio. Este tamaño es alrededor de  $1\mu\text{m}$  para ferritas cerámicas.

Las ferritas cerámicas se fabrican usando polvo de óxido de hierro, al que se agrega bario o estroncio para mejorar el alineamiento de la estructura cristalina. La fórmula es  $X_n(\text{Fe}_2\text{O}_3)$  donde  $X = \text{Ba}$  ó  $\text{Sr}$  y  $5.8 < n < 6.0$ . Después del molido, el polvo se comprime en una matriz, con un campo magnético aplicado si así se desea. Si no se aplica campo en este proceso, se obtendrá un imán **isótropo** con iguales propiedades magnéticas en todas direcciones, mientras que si se aplica un campo exterior, se obtiene un imán **anisótropo** con propiedades magnéticas preferenciales sobre un cierto eje. El polvo compactado entonces se sinteriza a una temperatura de  $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$  -  $1300\text{ }^{\circ}\text{C}$  (de donde el nombre **cerámico**) para obtener un material compacto y se maquina hasta su forma y tamaño finales. Alternativamente, el polvo puede mezclarse con un aglutinante de polímeros y luego se extrusiona o conforma en una matriz por compresión o moldeo por inyección, produciendo un imán de ferrita moldeada (**bonded ferrite**) de forma cualquiera.

Pueden obtenerse propiedades anisótropas aplicando un campo de orientación durante el moldeo.

Como las ferritas cerámicas usan partículas mono-dominio, su magnetismo permanente se basa en la anisotropía magnetocrystalina. Como ejemplo, el diagrama muestra las curvas



características de desmagnetización de varios compuestos de ferrita cerámica.

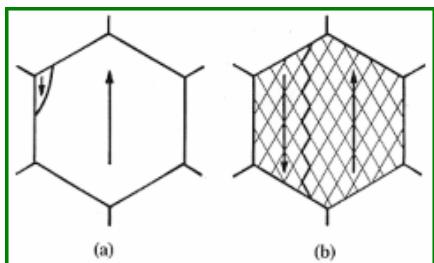
### Samario-Cobalto

Atomos de los elementos llamados **tierras raras** tienden a formar compuestos intermetálicos con metales de transición como Fe, Ni o Co, y en la primera época del desarrollo de los imanes de estos materiales la teoría predecía que los elementos más livianos – en particular el samario – se combinaría de la forma más favorable con el cobalto para producir una alta anisotropía cristalina. La experiencia confirmó la factibilidad de varios compuestos intermetálicos, y el primer imán práctico se construyó con el compuesto  $\text{SmCo}_5$ , seguido más tarde por  $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ .

Los imanes de samario-cobalto se fabrican según las mismas líneas que las ferritas. Dado que tanto el samario como el cobalto son elementos relativamente caros, se fabrican imanes anisótropos con propiedades preferenciales a lo largo de un eje.

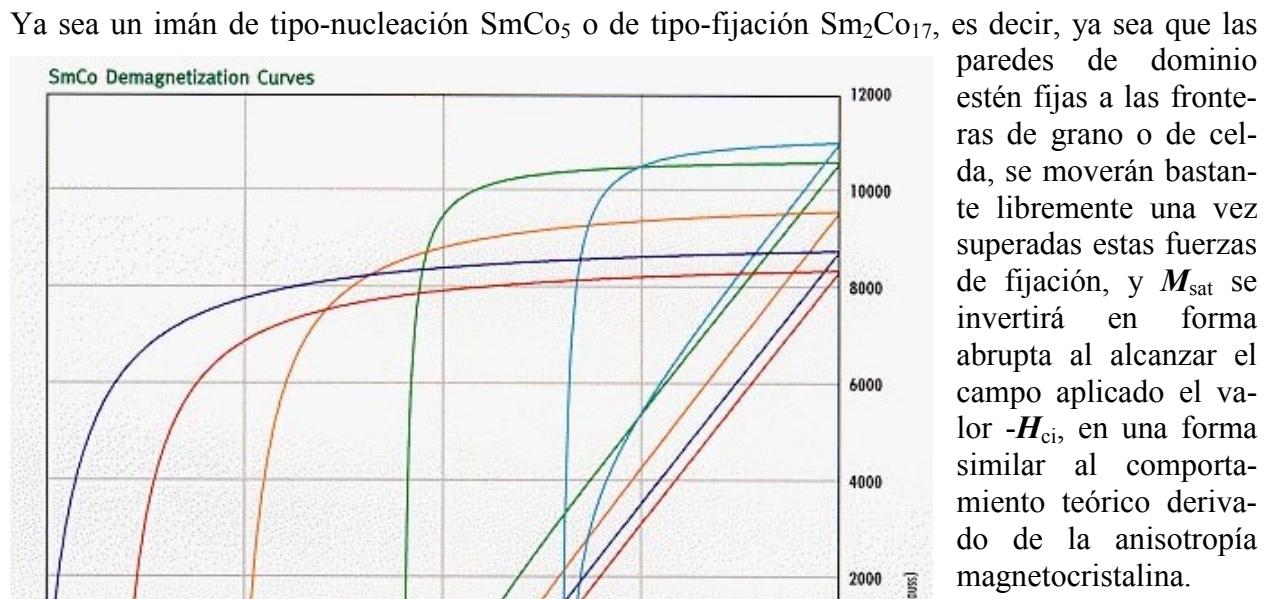
Los imanes de tierras raras tienen un mecanismo de fronteras de dominio mucho más complicado que el derivado de la pura anisotropía magnetocrystalina, lo que lleva a que las mejores propiedades magnéticas se obtienen con un tamaño de grano mayor que el correspondiente a parti-

culas mono-dominio. Esto significa que no sólo las fronteras de dominio pueden existir, sino que se mueven con relativa facilidad dentro del grano. Mientras que esta característica permite que se alcance la magnetización de saturación aún con un modesto campo aplicado, una alta coercividad intrínseca dependerá de la habilidad del grano para resistir la formación de un dominio invertido cuando se aplica un campo de desmagnetización. Esta propiedad vital se controla por las fronteras de grano, que están compuestas de desviaciones de la composición primaria del material que proveen una fuerte fijación de las fronteras de dominios en estos lugares. Este mecanismo, conocido como **nucleación**, se da en imanes de SmCo<sub>5</sub>. Un grano en proceso de nucleación se muestra en el diagrama (a) de la figura.



Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub> difiere de SmCo<sub>5</sub> en que sus granos contienen una estructura de pequeñas celdas como se ilustra en el diagrama (b). El tratamiento térmico de este compuesto promueve la formación de estas celdas de Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>, separadas por delgadas paredes de SmCo<sub>5</sub> que son las que proveen la fijación de las **paredes de dominio** (en lugar de las fronteras de grano). La **fijación**, en lugar de la nucleación, es entonces el mecanismo de control en imanes de Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>, y mientras que este mecanismo provee una mayor coercividad intrínseca, debe aplicarse un campo mucho mayor para llevar inicialmente este material a su magnetización de saturación.

Ya sea un imán de tipo-nucleación SmCo<sub>5</sub> o de tipo-fijación Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>, es decir, ya sea que las paredes de dominio estén fijas a las fronteras de grano o de celda, se moverán bastante libremente una vez superadas estas fuerzas de fijación, y  $M_{sat}$  se invertirá en forma abrupta al alcanzar el campo aplicado el valor  $-H_{ci}$ , en una forma similar al comportamiento teórico derivado de la anisotropía magnetocrystalina.



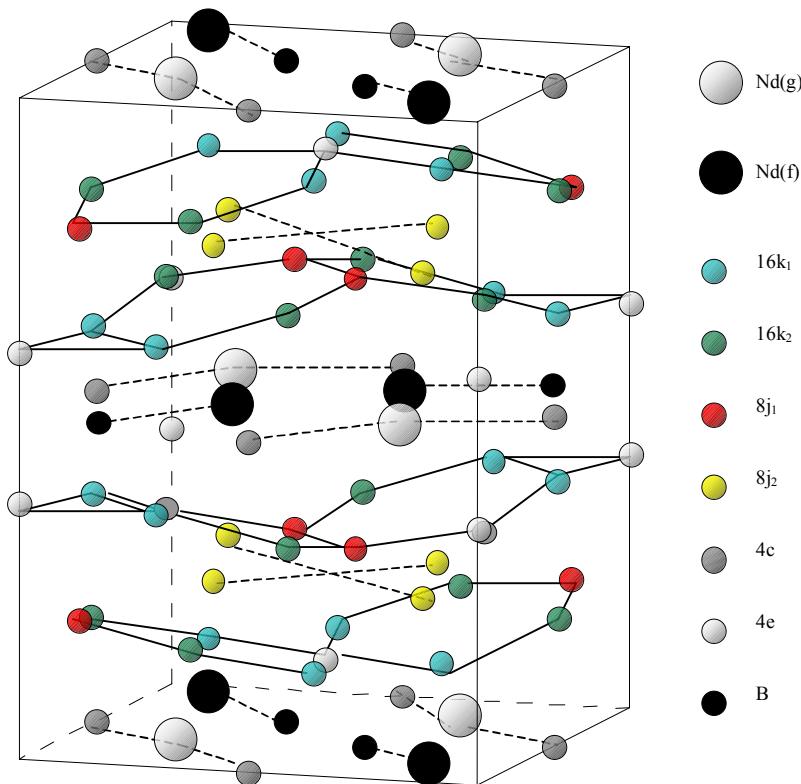
Los imanes de SmCo son generalmente muy caros para aplicaciones masivas. Se suelen utilizar en instrumental de laboratorio o especiales debido a sus excelentes propiedades de directividad.

### Neodimio-hierro-boro

Luego del exitoso desarrollo de imanes de samario-cobalto, se trató de desarrollar imanes de tierras raras de menor costo. El hierro es un metal de transición mucho más barato que el cobalto, y el neodimio es una tierra rara liviana mucho más abundante que el samario. Diversas tierras raras X se combinaron con hierro en compuestos X<sub>2</sub>Fe<sub>17</sub>, pero todos presentaron temperaturas de operación muy bajas para propósitos prácticos. Una mejora significativa ocurrió con el descubrimiento de que el agregado de boro formaba un compuesto ternario con fuerte anisotropía magnética.

tocrystalina uniaxial, y una mayor temperatura de operación.

Un compuesto de neodimio-hierro-boro de fórmula aproximada a  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$  presentó la mejor combinación de propiedades magnéticas y térmicas. La estructura de la celda unitaria de este material se muestra en la figura<sup>10</sup> y consiste de 68 átomos. 56 son de Fe, que ocupan sitios cristalográficamente no equivalentes denominados  $16k_1$ ,  $16k_2$ ,  $8j_1$ ,  $8j_2$ ,  $4e$  y  $4c$ .



Los imanes comerciales de Nd-Fe-B vienen en muchas combinaciones de proporciones de Nd y Fe, lo que produce un amplio rango de propiedades disponibles.

**Sinterizado:** Hay diferentes métodos de producción de imanes de Nd-Fe-B. El sinterizado es similar a los ya vistos. El polvo se moldea en una estructura compacta anisótropa mediante compactación y sinterizado en un campo orientador. Este proceso produce un imán de tipo-nucleación en el que las fronteras de grano se componen de desviaciones ricas en Nd de la composición primaria Nd<sub>2</sub>Fe<sub>14</sub>B, proveyendo la fijación de las fronteras de dominio. Uno de los problemas de este método es que los granos de Nd-Fe-B son muy susceptibles de oxidarse en su superficie, lo que limita seriamente el tamaño de grano que puede obtenerse y hace muy difícil obtener en la práctica imanes útiles.

La oxidación de un material comienza en su superficie, y si no se usa ningún recubrimiento de protección, el oxígeno del ambiente se difundirá hacia dentro del material produciendo reacciones químicas y alterando sus propiedades magnéticas. Este proceso de difusión aumenta fuertemente con la temperatura. Otros fenómenos de **corrosión** involucran otros agentes que se difunden y producen reacciones químicas destructivas dentro del material. Desde el comienzo de la utilización técnica de los imanes, cuando el hierro era el material fundamental, se ha utilizado la pintura como recubrimiento protector.

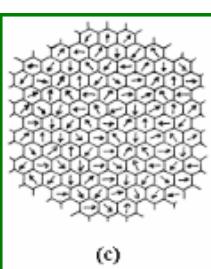
Se ha encontrado en los compuestos de Sa-Co que el cobalto dificulta el proceso de difusión del oxígeno y que el producto fundamental del proceso de oxidación es Sm<sub>3</sub>O<sub>3</sub>. Por lo tanto se suele

<sup>10</sup> Esta figura ha sido gentilmente aportada por el Dr. Fabio Saccone.

agregar cobalto en exceso de la cantidad estequiométrica del compuesto para mejorar el comportamiento frente a la oxidación.

En el caso de los imanes de Nd-Fe-B la oxidación progresó selectivamente a lo largo de las fronteras de grano ricas en Nd. El compuesto más importante de este proceso es  $\text{Nd}_2\text{O}_3$ . Se ha hallado que el agregado de Co al compuesto mejora la situación ya que el Co migra a las fronteras de grano y reduce la proporción de Nd pasible de oxidación.

**Templado rápido:** Un proceso completamente diferente involucra el templado rápido de la aleación fundida de Nd-Fe-B, usando una técnica de “**melt-spinning**” para producir una cinta que



luego es convertida en polvo. Mientras que una cinta obtenida por conformación mecánica produce partículas de polvo en forma de grandes placas, el templado rápido lleva a una microestructura extremadamente fina como la que se ilustra en la figura (c), nuevamente con fronteras de grano que se desvían de la composición primaria  $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ , aunque en mucha menor medida que en el proceso de sinterizado. Sin embargo, este no es un imán de tipo-nucleación, porque el polvo tiene una microestructura muy pequeña que se adapta al modelo de dominio único de las ferritas cerámicas. Este proceso de fabricación

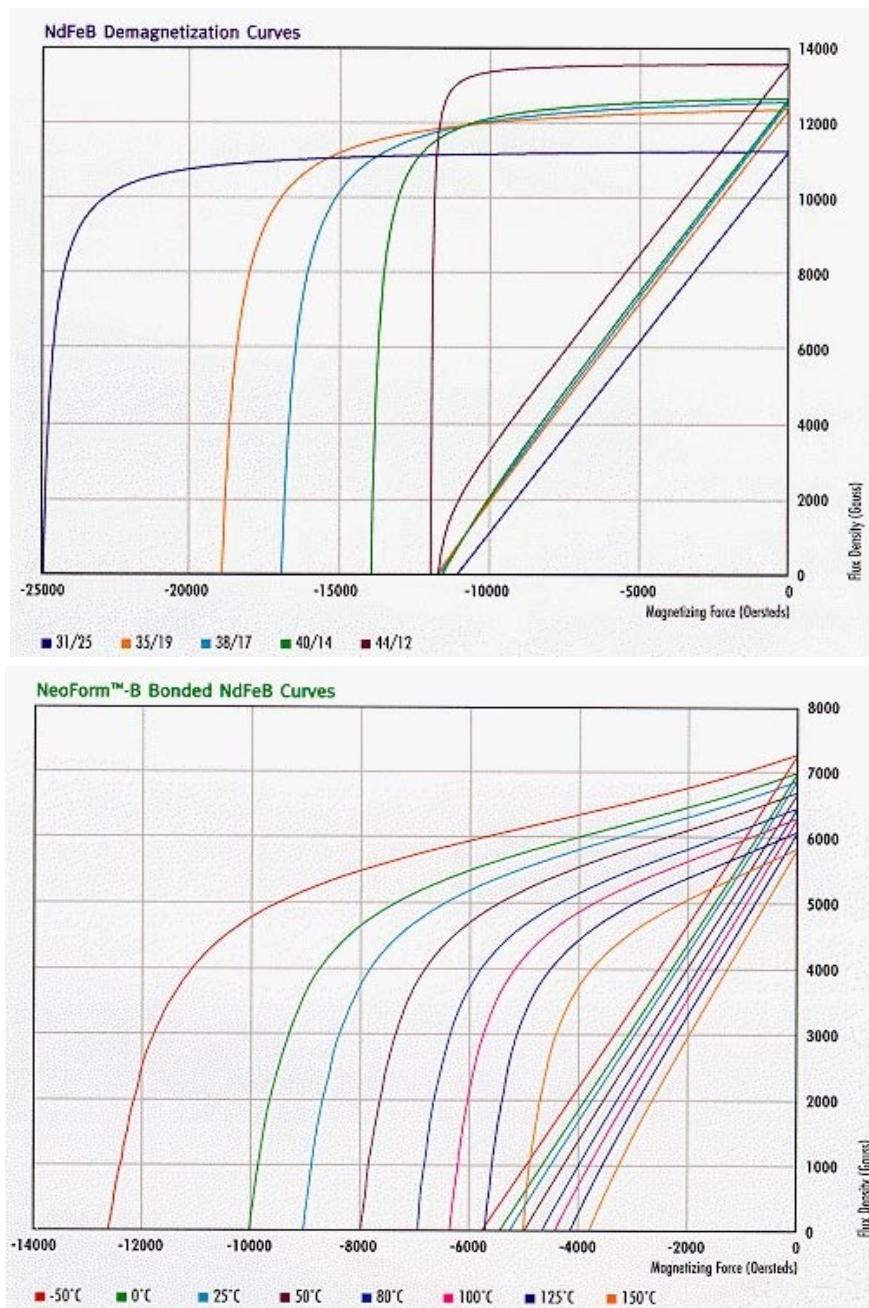
produce imanes cuyo magnetismo permanente se basa en la anisotropía magnetocristalina, y requieren un fuerte campo aplicado para llevar inicialmente los granos del material a la magnetización de saturación. Como sugiere el diagrama (c), no es práctico moler el material a tamaño de mono-dominio, de forma que el polvo es inherentemente isótropo. Sin embargo, puede consolidarse en un imán compacto y anisótropo por la deformación plástica que ocurre en la compactación en caliente. La protección natural que esta la microestructura aporta a las fronteras de grano por la disminución de la cantidad no estequiométrica de Nd hace que el polvo sea muy estable respecto de la oxidación, de manera que es fácil fabricar imanes de cualquier forma por moldeo.

**HDDR:** Hemos mencionado el problema de la oxidación en la preparación de polvo de Nd-Fe-B, de modo que también puede predecirse que absorbe hidrógeno con facilidad, lo que convierte al material en un polvo muy frágil y quebradizo. Esta característica facilita la conversión del material en polvo, y se ha convertido en la base del proceso llamado **HDDR** (por *Hidrogenación, Desproporcionación, Desorción y Recombinación*, un proceso metalúrgico muy complejo para detallar aquí). Este proceso también da al polvo de Nd-Fe-B una estructura ultrafina con granos de tamaño cercano al mono-dominio, y pueden obtenerse partículas de polvo de este tamaño. El polvo de Nd-Fe-B preparado con la técnica HDDR es inherentemente isótropo, pero los imanes fabricados por compactación en caliente o moldeo son generalmente anisótropos debido a las condiciones de procesamiento y el agregado de aditivos que inducen un mayor grado de textura en la aleación.

Los imanes de Nd-Fe-B fabricados con el proceso HDDR exhiben curvas características de desmagnetización con codos bien definidos de inversión de la magnetización.

En las figuras de la siguiente página se muestran curvas de desmagnetización para diversos compuestos de Nd-Fe-B.

El primer juego de curvas corresponde a imanes obtenidos por sinterizado, mientras que el segundo juego corresponde a imanes Neoform obtenidos por moldeo cerámico.



Finalmente, comparamos las propiedades de distintos compuestos comerciales de las distintas familias producidos por el mismo fabricante:

#### Comparación de Propiedades de Compuestos comerciales (DexterMag Co.)

Material	Temperatura Máxima de Operación	Máxima Energía Magnética	Costo Relativo	Resistencia a la Desmagnetización
<b>NdFeB</b>	150° C	48 MGOe	Alto	Alta
<b>SmCo</b>	300° C	32 MGOe	Muy Alto	Muy Alta
<b>NeoForm-B NdFeB moldeado</b>	150° C	10 MGOe	Alto	Alta
<b>Alnico</b>	550° C	7.5 MGOe	Moderado	Baja
<b>Ferrita Cerámica</b>	300° C	4 MGOe	Muy Bajo	Moderada

## Otras aplicaciones

En esta sección presentamos algunos desarrollos de interés tecnológico de aplicaciones del magnetismo.

### Magnetorresistencia

Los materiales magnetorresistivos (MR) son generalmente metales puros o aleaciones ferromagnéticas. **En estos materiales la magnitud de la resistividad eléctrica depende del ángulo entre las direcciones de la corriente y la magnetización y la intensidad de la magnetización.**

Este efecto fue descubierto en 1857 por William Thomson (después Lord Kelvin) en hierro y níquel, pero sólo ha tenido aplicación práctica en los últimos años, especialmente en la grabación y recuperación de datos.

En metales paramagnéticos el efecto es muy pequeño, salvo para campos magnéticos muy intensos. El cambio de resistividad  $\Delta\rho$  es positivo y depende del ángulo entre la corriente y el vector magnetización. Se tiene  $\Delta\rho_T > \Delta\rho_L$ , donde  $\Delta\rho_T$  corresponde al caso en que la magnetización es transversal respecto a la dirección de la corriente y  $\Delta\rho_L$  cuando la magnetización es paralela a la dirección de la corriente. El comportamiento magnetorresistivo depende de la estructura de los orbitales electrónicos sobre la superficie de Fermi y su descripción está fuera de los contenidos de este curso<sup>11</sup>.

Para metales paramagnéticos puros el efecto es isotropo, pero deja de serlo en materiales ferromagnéticos puros y aleaciones. La anisotropía se observa en que  $\Delta\rho_L$  aumenta con el campo mientras que  $\Delta\rho_T$  disminuye. En este caso, el origen del fenómeno es el acoplamiento spin-orbita. Este efecto se usa desde hace años en cabezas magnéticas lectoras y el material más utilizado es NiFe (permalloy), donde se han observado variaciones del orden de 20% para la variación relativa  $\Delta\rho/\rho$  para campos no muy intensos.

Hay distintos tipos de fenómenos magnetorresistivos que se deben a distintos mecanismos. La designación de **magnetorresistencia (MR)** a secas se aplica a los efectos isotropos, mientras que en los materiales anisótropos se habla de **magnetorresistencia de anisotropía (AMR)**. Posteriormente nuevos efectos fueron descubiertos: la **magnetorresistencia gigante (GMR)** y la **magnetorresistencia colosal (CMR)**, que se utilizan en aplicaciones técnicas, por lo que damos mayor información en secciones posteriores.

Otros nuevos efectos, aún no estudiados con precisión son la **magnetorresistencia de efecto túnel (TMR)**, la **magnetorresistencia extraordinaria (EMR)** y la **magnetorresistencia muy grande (VLMR)**. La TMR surge por la aplicación de un campo magnético a una estructura formada por dos capas de material magnético separadas por una delgada capa aislante. La EMR presenta un incremento en la magnetorresistencia del orden del 100% en semiconductores no magnéticos con inhomogeneidades metálicas embebidas, a temperatura ambiente y ante un campo aplicado de 500 G. El efecto de VLMR se ha observado en materiales homogéneos y es similar al efecto GMR que se describe más abajo.

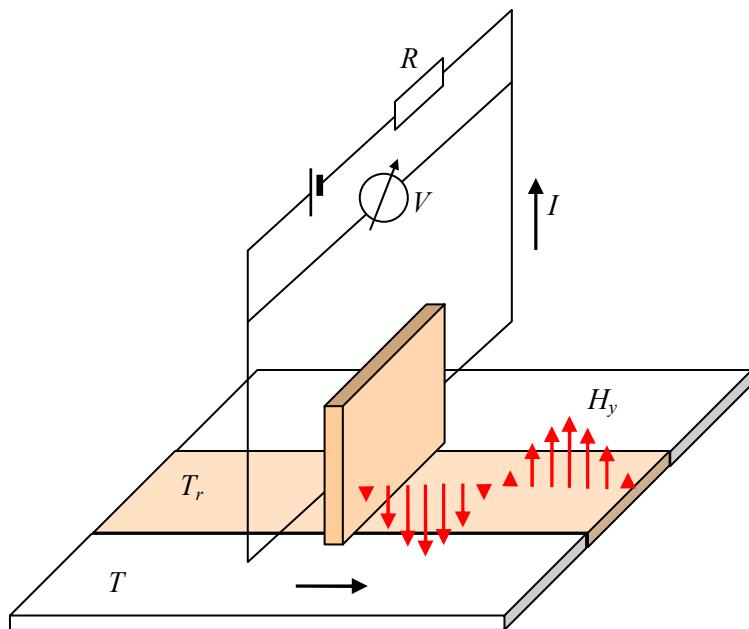
En la siguiente tabla se presenta el orden de magnitud de los cambios en magnetorresistencia que se producen en los distintos fenómenos de uso tecnológico:

Tipo de MR	% aumento en la resistencia
MR	1%
AMR	20%
GMR	200%
CMR	100,000%

<sup>11</sup> Ver, por ejemplo, J.Nickel, "Magnetoresistance Overview", HPL-95-60, Hewlett-Packard Co., Junio 1995.

### Aplicación a lectoras magnéticas

El principio de operación de una cabeza lectora de cinta basada en el efecto magnetoresistivo se esquematiza en la figura.



La información se almacena en una cinta magnética en forma de una magnetización cuya dirección y magnitud varían en función de la posición en la cinta. Esto produce un campo magnético en los alrededores de la cinta, cuya intensidad depende de la posición.

Sobre la pista  $T_r$  de la cinta  $T$  se coloca una tira de la aleación magnetoresistiva, cuya resistencia se mide continuamente con la ayuda de la corriente de medición  $I$ . Las variaciones en la componente vertical ( $H_y$ ) del campo magnético creado por la cinta grabada cambian la dirección de magnetización en la tira y producen entonces un cambio en su resistencia. Se obtiene así una señal de  $H_y$  en función del tiempo (una cabeza lectora convencional responde a la derivada temporal del flujo magnético, o sea proporcional a  $\partial H/\partial t$ ).

La performance de una cabeza magnetoresistiva es competitiva con la de una cabeza magnética convencional en términos de sensibilidad, inmunidad frente a ruido, diafonía (crosstalk), etc. El método magnetoresistivo tiene la ventaja de la miniaturización, dado que se trabaja con películas delgadas del orden de los micrones de espesor, mientras que en una cabeza convencional un menor tamaño implica una fem inducida menor, lo que pone un límite al mínimo tamaño que puede usarse para tener una relación señal/ruido aceptable. Por otra parte, como la cabeza convencional responde a cambios del flujo magnético en el tiempo, hay una velocidad mínima de movimiento de la cinta por debajo de la cual la señal recibida es muy baja.

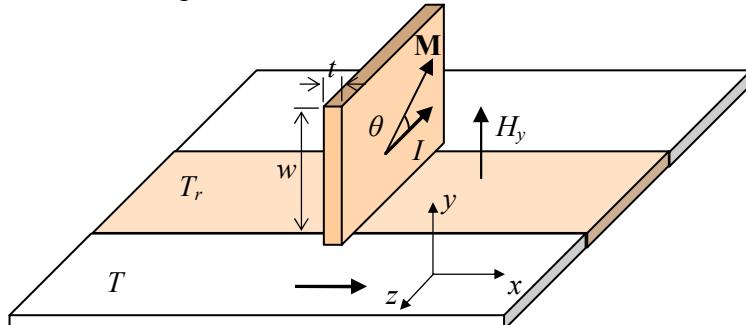
La ventaja de la cabeza convencional es que puede combinarse las funciones de lectura y escritura en una única cabeza. Sin embargo, la posibilidad de miniaturización ha convertido en los últimos años a las cabezas magnetoresistivas en el método habitual para discos duros y lectoras de cinta de walkmans.

La dependencia de la resistividad de un material magnetoresistivo con el ángulo  $\theta$  entre las direcciones de la corriente y la magnetización es:

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta \cos^2 \theta)$$

donde  $\rho$  es la resistividad y  $\theta$  el ángulo entre la corriente  $I$  y la magnetización  $M$ .  $\rho_0$  y  $\beta$  son constantes del material. La resistividad es extrema para  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$ , siendo mínima para  $\theta = 90^\circ$ . Obviamente, la aleación elegida para la tira ferromagnética debería tener el mayor valor posible de  $\beta$ .

Además, debería ser fácil rotar la magnetización con campos del orden de  $8000 \text{ A/m}$  (alrededor de  $100 \text{ Oe}$ ) como los que produce una cinta magnética típica. Aleaciones con alta permeabilidad, pequeña coercividad y un valor relativamente grande de  $\beta$  que son adecuadas para esta aplicación incluyen a  $\text{Ni}_{89}\text{Fe}_{11}$  o  $\text{Ni}_{70}\text{Co}_{30}$ . A baja temperatura  $\beta$  puede estar entre  $0.1$  y  $0.2$ , mientras que a temperatura ambiente es mucho más pequeña. Para la mayoría de las cintas usadas el efecto magnetoresistivo es menor que el 5%.

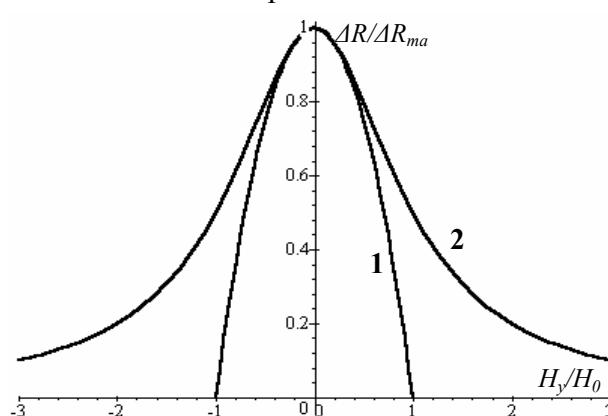


Puede demostrarse que la relación entre el campo externo vertical  $H_y$  y el ángulo  $\theta$  está determinada por las dimensiones geométricas de la tira magnetoresistiva y la anisotropía magnética del material, simbolizada por un campo de desmagnetización  $H_0 = (t / w)M_s$ , donde  $t$  es el espesor de la cinta,  $w$  su altura y  $M_s$  la magnetización de saturación del material. La relación buscada es:

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{H_y^2}{H_0^2} \quad \text{para } H_y \leq H_0$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 1 \quad \text{para } H_y \geq H_0$$

de donde se obtiene para la variación de resistencia:



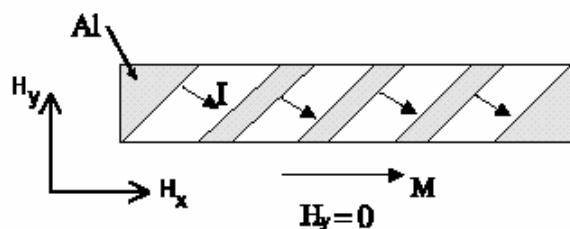
$$\Delta R/\Delta R_{max} = 1 - (H_y/H_0)^2 \quad \text{para } H_y < H_0$$

$$\Delta R/\Delta R_{max} = 0 \quad \text{para } H_y > H_0$$

que se grafica en la figura.

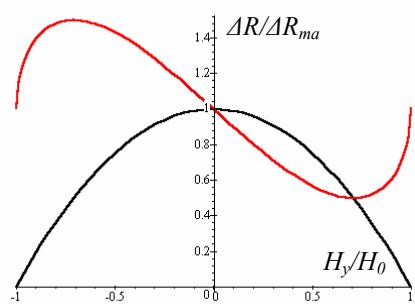
La curva 1 supone que el campo de desmagnetización es homogéneo, mientras que la curva 2 se corresponde mejor con la realidad de la cinta lectora. La respuesta es aproximadamente lineal en la región alrededor de los puntos de inflexión de la curva, donde  $H_y/H_0 \cong 0.9$  y  $\theta \cong 45^\circ$ .

Para medir pequeños campos magnéticos conviene que estas relaciones sean lineales. Para lograrlo se usan disposiciones geométricas llamadas "**barber pole**"<sup>12</sup> donde la cinta se divide en zonas oblicuas a  $45^\circ$  separadas por zonas de aluminio.



El aluminio tiene una resistividad mucho menor que el permalloy, de manera que la construcción causa un cambio en la dirección media de la corriente. Como resultado, la corriente queda a  $45^\circ$

<sup>12</sup> El nombre proviene del parecido de la estructura con el tradicional anuncio de las peluquerías.



de la magnetización, y la relación entre las variaciones de resistencia y el campo magnético externo vertical queda ahora:

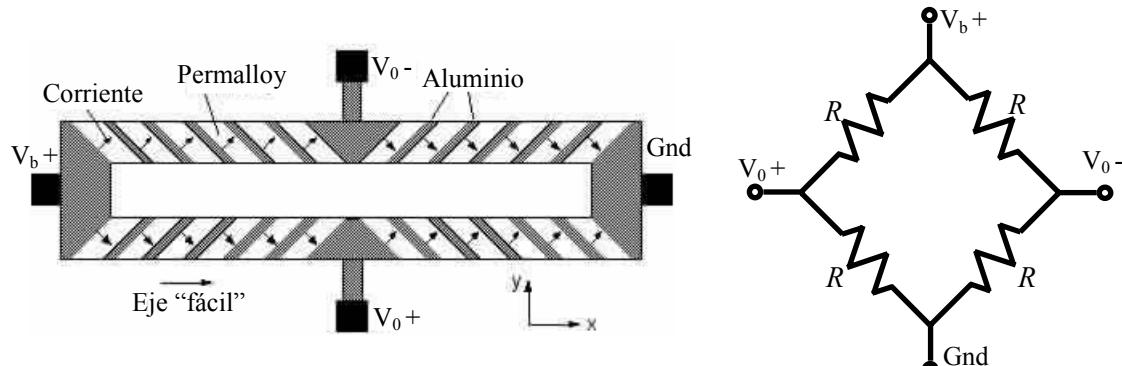
$$\Delta R / \Delta R_{max} = 1 - \frac{H_y}{H_0} \sqrt{1 - \left( \frac{H_y}{H_0} \right)^2}$$

que tiene la gráfica de la figura.

La curva en rojo es la respuesta de la configuración "barber pole" obtenida para magnetización uniforme. La curva en negro es la anterior, para comparación.

### Aplicación a sensores de campo magnético

Elementos sensores magnetoresistivos están hechos de películas delgadas de NiFe depositadas sobre un sustrato de silicio formando un puente de Wheatstone cuyas ramas son "barber poles",



como se indica en la figura. La resistencia de cada rama es la misma. La fuente del puente ( $V_b$ ) hace circular corriente por el circuito. Un campo aplicado transversalmente (según el eje  $y$ ) causa que la magnetización en un par de magnetoresistores conectados opuestos rote hacia la dirección de la corriente, lo que causa un aumento de la resistencia. En el otro par de magnetoresistores ocurre el fenómeno inverso y su resistencia disminuye. Dentro del rango lineal de operación la tensión de salida resulta proporcional al campo magnético aplicado. En los sensores comerciales disponibles el rango de linealidad es inversamente proporcional a la sensibilidad del sensor. Por ejemplo, los sensores de Honeywell tienen una sensibilidad típica de  $3 \text{ mV/V/Oe}$  y el rango de linealidad es de unos  $2\text{Oe}$ .

Debido a la técnica de fabricación integrada, es fácil agregar sistemas de compensación de campos magnéticos ambientales o de disminución de ruido.

## Magnetoresistencia Gigante

El efecto magnetoresistivo es habitualmente de poca intensidad, pero en 1988 se descubrió en Francia<sup>13</sup> un gran efecto magnetoresistivo en una estructura multicapa ferromagnética/paramagnética como se muestra en la figura, donde las orientaciones relativas de los momentos magnéticos en capas alternadas cambian en función del campo aplicado.



Estado de alta  
resistencia

Estado de baja  
resistencia

El principio físico de la **GMR** es la dependencia de la resistividad eléctrica de los electrones en un metal magnético respecto de la dirección del espín del electrón que puede ser paralelo o antiparalelo al momento magnético de las películas (indicado por las flechas en la figura). Los electrones que tienen un espín paralelo sufren menos procesos de dispersión y por lo tanto llevan a una resistencia menor. Cuando los momentos de las capas magnéticas (NiFe en la figura) son antiparalelos a campos bajos, los electrones no disminuyen la tasa de procesos de dispersión y la resistencia eléctrica aumenta. Para campos magnéticos aplicados que causen la alineación de las capas magnéticas, los electrones con espines paralelos a estos momentos magnéticos se mueve casi-libremente a través del sólido y se disminuye la resistencia eléctrica. Por lo tanto, la resistencia de la estructura es proporcional al coseno del ángulo entre los momentos magnéticos en capas magnéticas adyacentes.

La ocurrencia del efecto de **GMR** depende de que el campo magnético aplicado pueda cambiar la orientación relativa de los momentos magnéticos entre los estados paralelo y antiparalelo. En algunas estructuras multicapa un intercambio de acoplamiento intercapa mecano-cuántico a través del Cu u otro metal paramagnético causa un alineamiento antiparalelo a campo cero que puede eliminarse mediante un campo aplicado de gran intensidad.

La magnitud del efecto **GMR** puede ser sorprendentemente alto, hasta 80 veces la sensibilidad del efecto MR normal. Esto lleva a valores de  $\Delta\rho/\rho$  de hasta un 200%. Sin embargo, los campos necesarios para saturar multicapas Co/Cu son demasiado grandes para aplicaciones prácticas en el terreno de los sensores. Se han diseñado otras multicapas para alcanzar un estado antiparalelo en un rango limitado de campo aplicado alternando capas ferromagnéticas (capas de Co y Fe en lugar de dos capas de NiFe) con diferentes campos intrínsecos de switching.

Recientemente se han evaluado sensores **GMR** para uso en exploración geofísica y se ha hallado un piso de ruido de 0.1 - 1.0 nT en un sistema sin apantallado ni filtrado. Esta sensibilidad es comparable a un sistema de inducción electromagnética. Se está investigando la aplicación de GMR a obtener imágenes geofísicas por medición de campos magnéticos.

<sup>13</sup> M.Baibich *et al.*, Physical Review Letters, Vol.61, p.2472 (1988).

## Válvulas de espín y HD

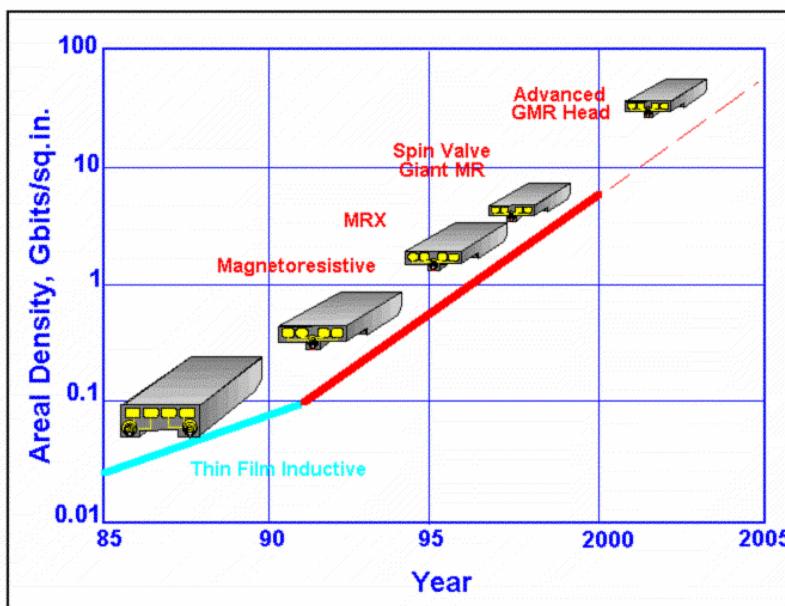
Una aplicación del efecto GMR es la construcción de dispositivos integrados de alta sensibilidad a los campos magnéticos, llamados **válvulas de espín (spin valves)**. Una estructura básica consiste de cuatro capas: una capa antiferromagnética de "fijación" (pinning) y dos películas delgadas magnéticas separadas por un espaciador no magnético. La película superior tiene su magnetización fija en una orientación (por el acople de intercambio con la capa de pinning), mientras que la película inferior (capa sensora) se deja libre para alinearse paralela o antiparalela en la presencia de campos magnéticos externos. La delgadez de la capa sensora la hace sensible a campos de valor muy bajo. Por otra parte, el espesor de la capa espaciadora no magnética es suficientemente grande para hacer despreciable el acoplamiento entre las dos películas magnéticas. El principio de la disminución de la resistencia de la estructura GMR (las dos películas magnéticas y el espaciador) es el mismo que en las estructuras clásicas multicapa: el estado de menor resistencia se da cuando las películas magnéticas están ferromagnéticamente alineadas y el estado de alta resistencia se obtiene en la configuración antiferromagnética.



Ta  
FeMn  
Co  
Cu  
NiFe  
Ta  
Si

En la figura se muestra una estructura práctica de válvula de espín desarrollada para miniaturización en circuitos integrados. Sobre un sustrato de silicio, de un espesor de  $1\text{ mm}$ , se monta la estructura GMR activa formada por las películas de Co (capa de magnetización fija – magnéticamente dura para evitar que su magnetización cambie por efectos del campo aplicado a sensar) y de NiFe (capa sensora – magnéticamente blanda para tener una buena respuesta al campo aplicado) separadas por la capa conductora de Cu. Esta estructura tiene un espesor del orden de  $100\text{ }\mu\text{m}$ . La capa de FeMn es la capa de pinning y se usan dos capas de Ta: la superior es de protección, para evitar la oxidación de las capas inferiores, y la inferior es un buffer que se usa para mejorar las condiciones para el crecimiento epitaxial de las capas activas sobre el sustrato. Toda la estructura tiene un espesor del orden de los  $300\text{ }\mu\text{m}$ . Este tipo de estructuras se usan en múltiples aplicaciones tecnológicas en la actualidad, en particular en cabezas de discos duros.

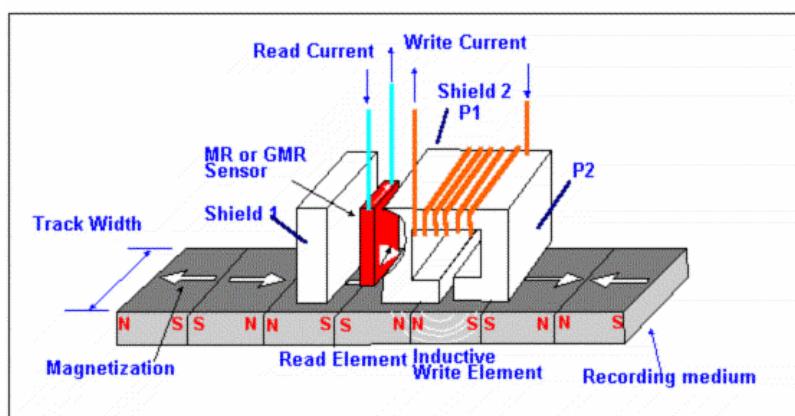
capa de FeMn es la capa de pinning y se usan dos capas de Ta: la superior es de protección, para evitar la oxidación de las capas inferiores, y la inferior es un buffer que se usa para mejorar las condiciones para el crecimiento epitaxial de las capas activas sobre el sustrato. Toda la estructura tiene un espesor del orden de los  $300\text{ }\mu\text{m}$ . Este tipo de estructuras se usan en múltiples aplicaciones tecnológicas en la actualidad, en particular en cabezas de discos duros.



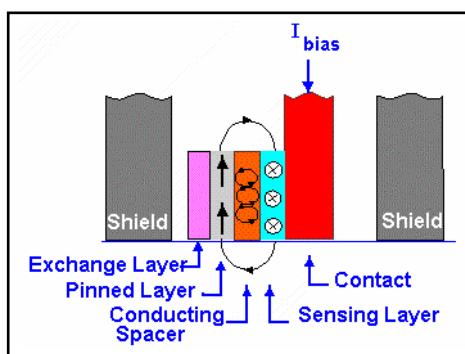
Existe una demanda siempre creciente de capacidad de almacenamiento y de disminución del costo por Mb para discos duros<sup>14</sup>. El parámetro significativo es la **densidad areal**, expresada en  $\text{Gb/mm}^2$ , y definida como el producto de la densidad lineal (bits de información por mm de pista) por la densidad de pistas (pistas por mm). La densidad areal varía con el radio, por lo que se usa para comparaciones el máximo valor. La densidad areal máxima ha crecido en forma casi lineal en los últi-

<sup>14</sup> La información para esta sección se ha tomado fundamentalmente de "The era of giant magnetoresistive heads", por J.Belleson, IBM Storage Systems Division y E.Grochowski, IBM Almaden Research Center.

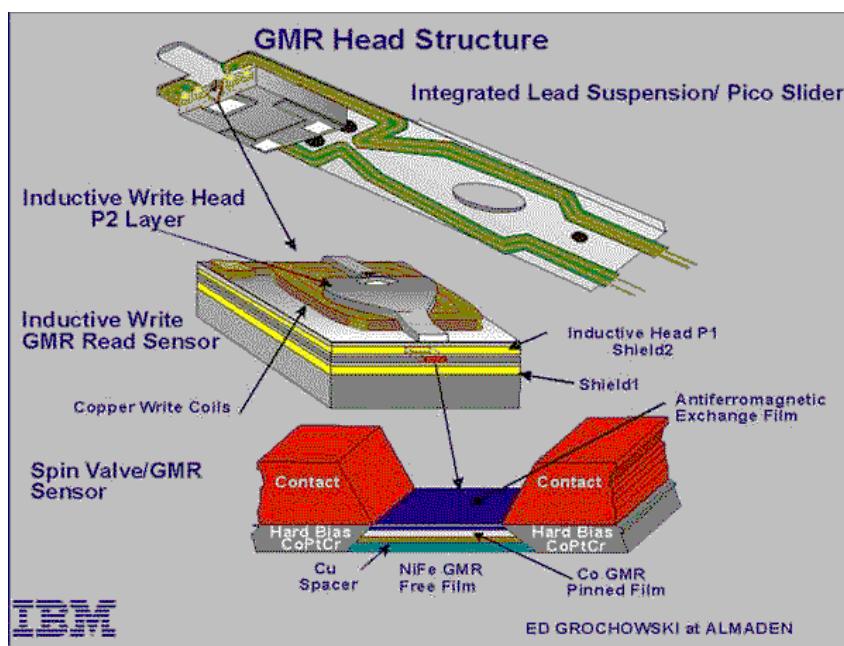
mos años y éste ha sido el factor principal de la reducción del precio por Mb. Este crecimiento se ha dado por la introducción de nuevas tecnologías, de las que las más significativas han sido el desarrollo de las cabezas magnetorresistivas (MR) y GMR. En la figura de la página anterior se muestra la evolución de la densidad areal en función de las distintas tecnologías de cabezas magnetorresistivas.



La ventaja principal de las cabezas GMR es su mayor sensibilidad a campos magnéticos, lo que permite operaciones de lectura más rápidas. Debe aclararse que las operaciones de escritura se realizan mediante electroimanes clásicos de película delgada. En la figura se muestra un esquema de la estructura de una cabeza lectora/escritora integrada.



La estructura de la cabeza sensora es la típica de las válvulas de espín: una película sensora, un espaciador conductor, una película de magnetización fija y una capa de pinning. Las primeras tres capas mencionadas son muy delgadas, lo que permite a los electrones de conducción moverse fácilmente entre las películas a través del espaciador conductor. Para densidades areales de  $10 \text{ Gb/in}^2$  y mayores, el tamaño de los sensores GMR debe ser del orden de  $0.03 \mu\text{m}$ , lo que es un formidable desafío tecnológico.



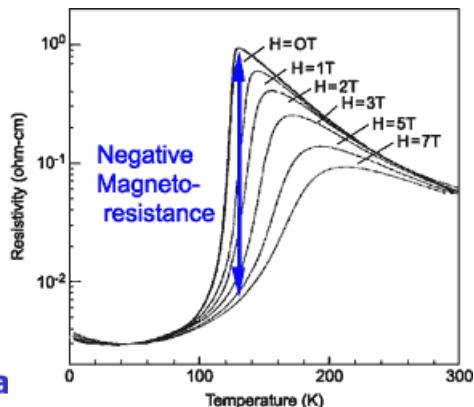
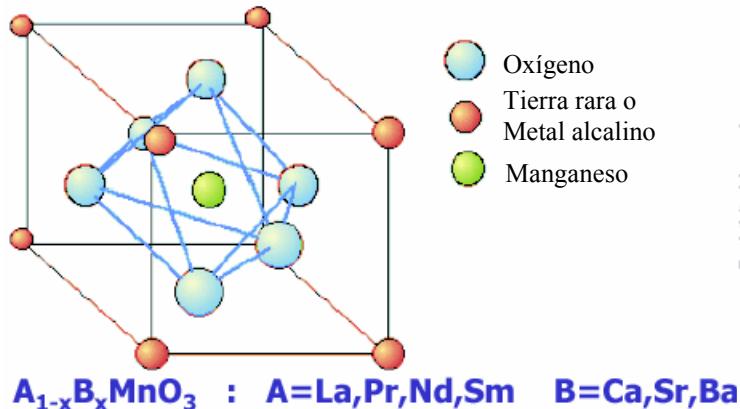
En 1991 IBM presentó un disco de 1Gb con cabeza MR y en 1997 un disco de 16.8 Gb con cabeza GMR (estructura de válvula de espín). En la figura se muestra un diagrama original de IBM de la unidad lectora/escritora detallando la construcción de la cabeza lectora GMR.<sup>15</sup>

A fines del año 2000, IBM - y otras empresas - habían logrado una densidad areal de  $35 \text{ Gbits/in}^2$ , lo que lleva a la posibilidad de construir discos rígidos de 200 Gb y más.

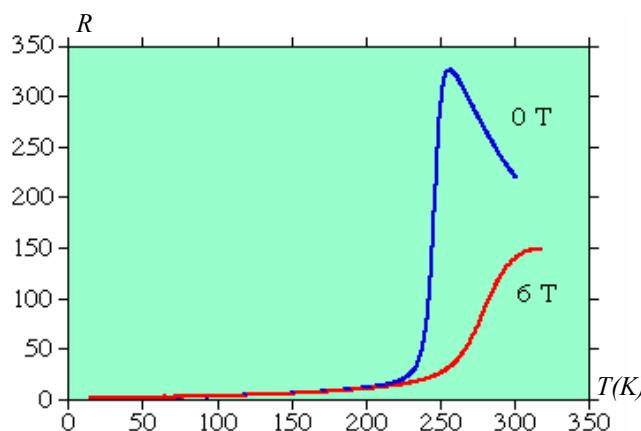
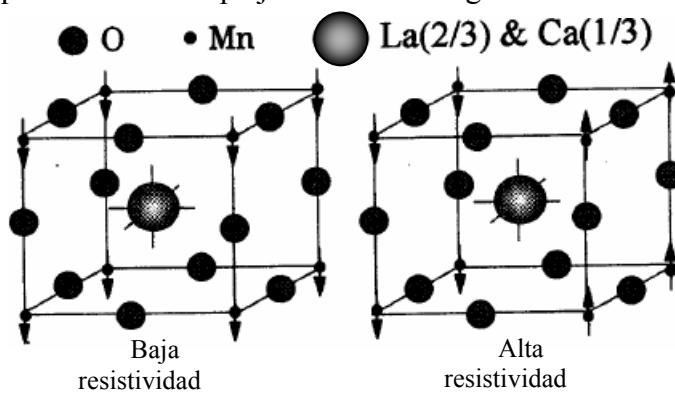
<sup>15</sup> Figura tomada de "The PC Guide", (<http://www.pcguide.com/ref/hdd/op/heads/techGMR-c.html>). Site Version: 2.2.0 - Version Date: April 17, 2001 © Copyright 1997-2001 Charles M. Kozierok. All Rights Reserved. La figura tiene Copyright original de Ibm corp.

### Magnetoresistencia Colosal

Recientemente se ha descubierto que ciertos materiales de estructura de tipo perovskita, como por ejemplo  $(La,Ca)MnO_3$ <sup>16</sup>, que se muestra en la figura, exhiben cambios extremos de resistencia eléctrica al aplicar un campo magnético de gran intensidad. Se llega a variaciones de  $\Delta\rho/\rho$  de hasta el 10<sup>5</sup>%.



La estructura de tipo perovskita de estos compuestos resulta sutilmente distorsionada por la temperatura. La compleja estructura magnética no se muestra, pero ella y las distorsiones estructurales son importantes para entender las propiedades únicas de estos materiales.



Debido a la complejidad de la estructura y de las interacciones magnéticas entre sus constituyentes, no existe todavía una teoría que describa satisfactoriamente el mecanismo que produce este efecto<sup>17</sup>. Para  $La_{0.67}Ca_{0.33}MnO_3$  un modelo simple asocia los estados de alta y baja resistividad a la magnetización de los átomos de manganeso, como se ilustra en la figura. Sin embargo este modelo no predice el comportamiento cuantitativo observado cuando se desarrolla matemáticamente. Por otra parte, la misma complejidad estructural cristalina de estos materiales da lugar a múltiples variaciones en la creación de cerámicos con respuestas cada vez más intensas. Hay problemas, debido a la fuerte variación del efecto con la temperatura y la necesidad de usar campos magnéticos muy grandes para lograr el efecto.

La resistencia de estos materiales depende fuertemente de la temperatura. En el ejemplo de la figura, correspondiente a una película epitaxial de  $La_{0.7}Ca_{0.3}MnO_3$ , la resistencia a campo cero (línea azul) cae abruptamente cuando la temperatura se reduce por debajo de la temperatura

<sup>16</sup> El símbolo (X,Y) indica un compuesto con  $X_{1-x}Y_x$ .

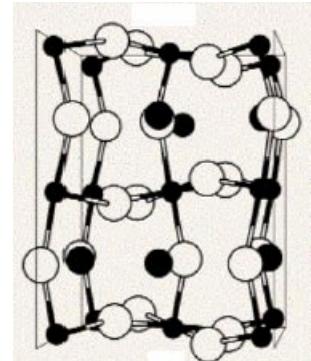
<sup>17</sup> En realidad, debemos hablar de varias teorías, ya que hay varias estructuras cristalográficamente diferentes que producen este efecto. Ver, por ejemplo, el trabajo realizado por el Dr. Mark Green en el Dept. of Chemistry, UCL.

de Curie del material ( $250K$ ). Cuando se coloca un campo magnético fuerte ( $6T$  - línea roja), se disminuye mucho la resistencia en la región de  $T_c$ .

La diferencia entre las curvas azul y roja es la magnetoresistencia. Una gran magnetoresistencia (llamada **magnetoresistencia colosal**) se observa en la región de  $T_c$  entre  $240K$  y  $260K$ .

Existen diversas teorías para explicar este fenómeno:

- **teoría del doble intercambio.** Si se reemplaza del 10% al 50% de los átomos de La (que se comportan como iones  $La^{3+}$ ) con iones divalentes como  $Sr^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$  o  $Ba^{2+}$ , la resistencia de la muestra cae dramáticamente y el material parece comportarse como ferromagnético. El efecto es forzar a un átomo vecino de Mn a cambiar de  $Mn^{3+}$  a  $Mn^{4+}$ . Existe una posibilidad de aumentar la conductividad mediante el salto de electrones desde el ión  $Mn^{3+}$  a un vecino  $Mn^{4+}$  a través del anión oxígeno  $O^{2-}$ . Para que esta corriente de saltos tenga una polarización de espín, es necesario este doble salto: de  $Mn^{3+}$  a  $O^{2-}$  y de  $O^{2-}$  a  $Mn^{4+}$ , intercambiando los iones manganeso de posición.
- **interacciones electrón-fonón.** En esta teoría se supone que la red se deforma (distorsión de Jahn Teller) como se esquematiza en la figura. Esta distorsión provee una fuerte interacción electrón-fonón, que modifica los orbitales electrónicos y por lo tanto los niveles de energía, sin modificar la energía orbital total del conjunto. Por otra parte, el cambio del ángulo de los enlaces Mn-O modifica la probabilidad de salto y la interacción de doble intercambio.
- **clusters magnéticos.** Hay evidencia experimental de la formación de grupos de 4-8 iones de manganeso (clusters) para valores altos del campo magnético aplicado. El efecto magnetoresistivo se puede asociar al comportamiento de estos clusters magnéticos (y metálicos). La conductividad entre clusters depende de la alineación relativa y el tamaño de los clusters.



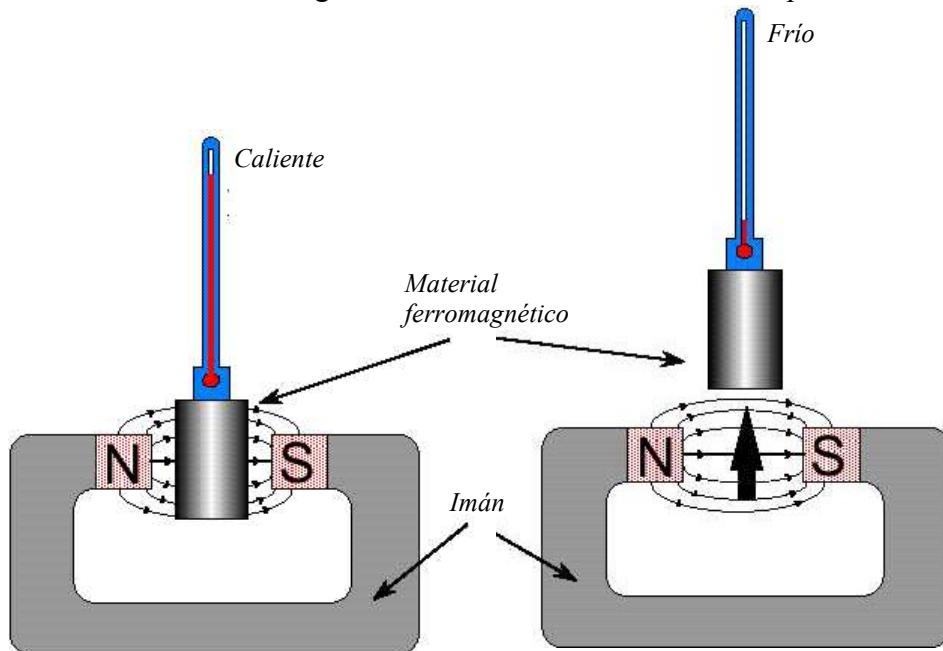
Se han observado efectos **CMR** en otras estructuras, además de las estructuras de perovskita de manganatos. Entre otros casos están las manganitas piroclóricas, espineles de cromo, compuestos y hexaboruros de europio y calcogenuros de plata.

Los materiales **CMR** tienen el potencial de usarse como sensores, memorias magnéticas RAM (MRAM), transistores magnéticos y para reemplazar las cabezas lectoras de los discos rígidos.

## Refrigeración magnética

Los materiales ferromagnéticos presentan el llamado **efecto magnetocalórico** que ocurre cuando un material blando se coloca en un campo exterior. Los espines tienden a alinearse paralelos al campo aplicado. Este **efecto de orden** tiende a disminuir la entropía del material. Si el material no puede intercambiar calor con el medio ambiente (**evolución adiabática**), la entropía debe permanecer constante, y como resultado se observa un calentamiento del mismo (que tiende a aumentar el desorden en la distribución de velocidades de los átomos y por lo tanto contrarresta la disminución de entropía causada por el ordenamiento magnético). Al retirar el material del campo se desmagnetiza. Esto ocurre porque la energía térmica tiende a desordenar la orientación de los espines. Este desorden tiende a aumentar la entropía y en una evolución adiabática debe disminuir la temperatura del material.

Un cambio reversible de temperatura debido al cambio adiabático del campo magnético aplicado está asociado al cambio de la magnetización de la muestra con la temperatura a través de un fac-



tor proporcional a la temperatura e inversamente proporcional al calor específico del material a  $H$  constante:

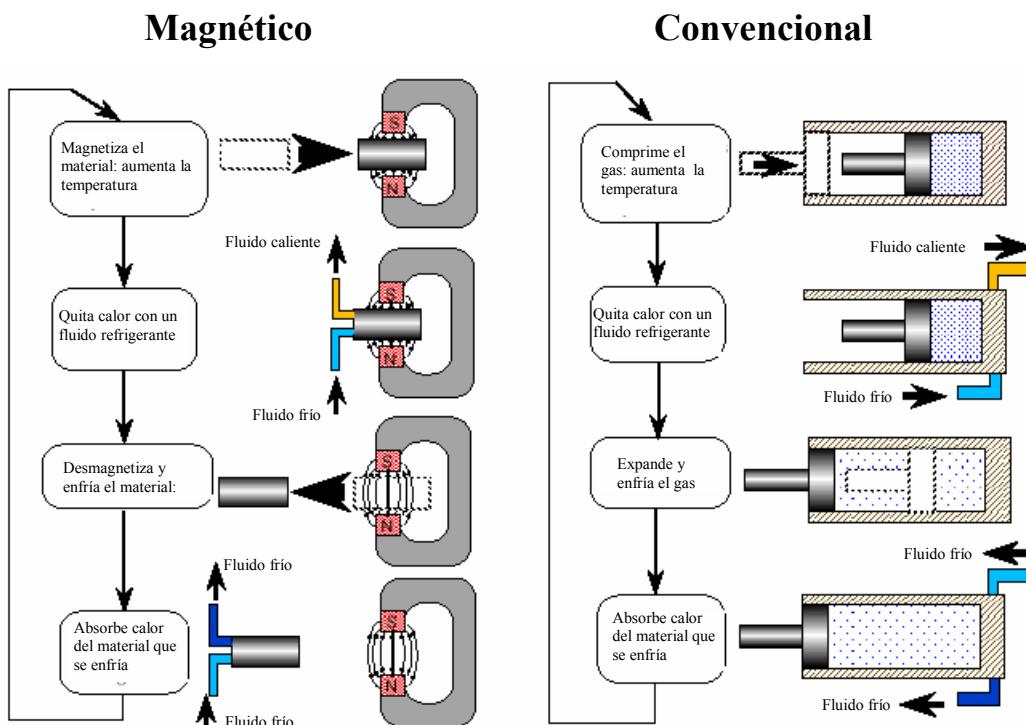
$$\frac{\Delta T}{\Delta H} = - \frac{T}{C_H} \frac{\partial M}{\partial T} \Big|_H$$

Este efecto fue descubierto en 1881 por Warburg y explicado teóricamente en 1918 por Weiss y Piccard. Se ha usado en laboratorio a partir de la década de 1920 (por sugerencia, entre otros, de Paul Debye) para lograr temperaturas por debajo de 1K, pero hasta el presente no se contaban con materiales suficientemente sensibles y campos suficientemente fuertes para producir resultados de interés técnico.

La refrigeración magnética es una tecnología que produce poco **impacto ambiental**. No usa compuestos químicos que ataquen la capa de ozono (como los fluorocarbonos que se usan como fluido refrigerante en muchas instalaciones frigoríficas), ni otros compuestos peligrosos (como el amoníaco) ni gases de invernadero (como hidroclorofluorocarbonos e hidrofluorocarbonos).

Otra importante diferencia entre los ciclos comunes de refrigeración y la refrigeración magnética es la **eficiencia del ciclo**. En el caso de los ciclos usuales que usan gas comprimido la eficiencia es a lo sumo del 40%, mientras que se ha demostrado que la eficiencia de ciclos que usan Gd

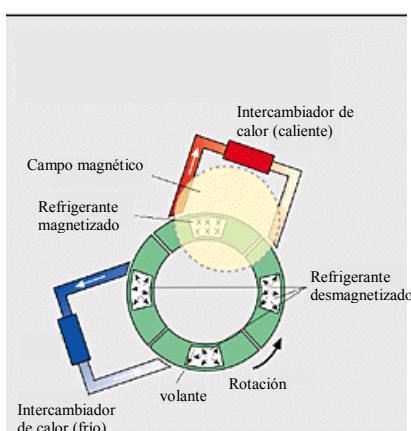
(gadolino) como material magnético llega al 60%<sup>18</sup>. En la figura se esquematizan un ciclo magnético y un ciclo convencional.



Se estima que el uso de refrigeradores magnéticos reducirá el consumo de combustibles fósiles, lo que contribuirá a reducir la liberación de dióxido de carbono a la atmósfera.

El calentamiento y enfriamiento que ocurren en un ciclo de refrigeración magnética son proporcionales al valor del momento magnético del material y a la intensidad del campo aplicado. Sólo un número limitado de materiales magnéticos producen un efecto magnetocalórico suficientemente intenso para su uso práctico. Actualmente las investigaciones se centran en compuestos de tierras raras (lantánidos). En particular, el **gadolino** es el elemento de mayor efecto magnetocalórico de los lantánidos a temperaturas cercanas a la temperatura ambiente, por lo que ha sido el foco de los ensayos experimentales recientes. En febrero de 1997 el Astronautics/Ames Laboratory anunció el funcionamiento durante dos meses de un sistema de refrigeración magnética a temperatura ambiente consistente en dos capas cada una de las cuales contenía 1.5 kg de esferas de gadolinio de pureza comercial. Estas capas se movían dentro y fuera de un campo magnético ajustable entre 0 y 5T provisto por un imán superconductor. También en 1997 científicos del mismo laboratorio hallaron una estructura ternaria ( $Gd_5Si_2Ge_2$ ) cuyo efecto magnetocalórico a temperatura ambiente es el doble del elemento gadolinio. Posteriores trabajos hallaron que este compuesto es uno de un conjunto de compuestos ternarios  $Gd_5(Si_xGe_{1-x})_4$  con  $0.2 \leq x \leq 0.5$  que exhiben el llamado **efecto magnetocalórico gigante (GME)** a temperaturas variables entre 30K y 290K según la proporción de germanio del compuesto. Estos compuestos permitieron construir prototipos de refrigeradores magnéticos con imanes no superconductores que podrían tener posibilidades industriales por usar materiales de pureza comercial. En la figura se muestra el esquema de un prototipo que está funcionando desde setiembre de 2001 en el Ames Laboratory, consiste en un volante que gira colocando el material magnetocalórico alternativamente dentro y fuera de un campo magnético producido por un imán de neodimio que opera a temperatura ambiente. El material magnetocalórico es la aleación ternaria de GdSiGe previamente descripta y su costo de fabricación se ha disminuido notablemente al estudiar con cuidado el proceso metalúrgico.

<sup>18</sup> Zimm, C. et al. "Description and performance of a near-room temperature magnetic refrigerator". Adv. Cryogen. Eng. 43, pp.1759-1766 (1998).



gico de obtención. Un sistema cíclico de este tipo se denoma **regenerador magnético activo** (**Active Magnetic Regenerator - AMR**).

Nuevos materiales se están desarrollando y probando continuamente. En el año 2000 se publicaron resultados para un compuesto donde se reemplaza el Gd con Fe<sup>19</sup>, lo que hace mucho menor el costo de la materia prima (aunque no necesariamente del proceso metalúrgico de fabricación de la aleación). Este compuesto da un efecto magnetocalórico gigante similar al del compuesto previamente descripto. En enero del 2002 se publicó un trabajo<sup>20</sup> analizando el compuesto MnFeP<sub>0.45</sub>As<sub>0.55</sub>, un material que incorpora el manganeso, que es un material muy abundante y que presenta compuestos con temperaturas de Curie cercanas a la temperatura ambiente. Este compuesto presenta también efecto magnetocalórico gigante y parece un candidato a ser usado en equipos de refrigeración magnética.

<sup>19</sup> M. Napoletano, F. Canepa, P. Manfrinetti and F. Merlo, "Magnetic properties and the magnetocaloric effect in the intermetallic compound GdFeSi", J. Mater. Chem., 2000, 10, pp. 1663-1665.

<sup>20</sup> O. Tegus, E. Brück, K.H.J. Buschow and F.R. de Boer, "Transition-metal-based magnetic refrigerants for room-temperature applications", Nature, 415, 10 January 2002, pp.150-151.

Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires – [www.fi.uba.ar](http://www.fi.uba.ar)

## Levitación diamagnética<sup>21</sup>

Salvo algunos pocos materiales, como el hierro o el níquel, que son fuertemente magnéticos, el resto son  $10^9$  veces menos magnéticos. Tan baja capacidad de interacción ha desalentado el estudio de la posibilidad de levantar objetos en contra de la gravedad (la **levitación**) usando interacciones magnéticas. Sin embargo en los últimos años se ha logrado levitar objetos diamagnéticos en laboratorio. Otra manera de levitar objetos pesados es utilizar las fuerzas magnéticas entre corrientes. Como en este caso se utilizan principios ligados a la inducción electromagnética que veremos en el siguiente Capítulo, diferiremos hasta entonces su descripción.

### Teoría

El teorema de Earnshaw, que presentamos entre las propiedades de las soluciones de la ecuación de Laplace, puede extenderse al análisis de todos los campos que deriven de un potencial. Este teorema dice que ninguna disposición estacionaria formada por cargas, imanes y masas puede permanecer en equilibrio estable mediante cualquier combinación de fuerzas eléctricas, magnéticas o gravitatorias, es decir, fuerzas derivables de potenciales que satisfacen la ecuación de Laplace.

Para analizar las ecuaciones de la levitación, supongamos un objeto de masa  $M$ , volumen  $V$  y susceptibilidad magnética  $\chi$  que se halla en una región del espacio donde hay un campo de inducción magnética  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ . Si el tamaño del objeto es pequeño frente a las variaciones espaciales de  $\mathbf{B}$ , podemos escribir para el momento magnético inducido en el objeto:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv' = \int_V \chi \mathbf{H}(\mathbf{r}') dv' \approx \chi \int_V \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{\mu_0} dv' \approx \frac{\chi \mathbf{B}(\mathbf{r}) V}{\mu_0}$$

Si aumentamos el campo magnético desde cero hasta su valor final, la energía de magnetización puede calcularse integrando la ecuación:

$$dE = -\mathbf{dm} \bullet \mathbf{B} \approx -\frac{\chi V}{\mu_0} \mathbf{dB}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Rightarrow E = -\frac{\chi V}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r})$$

A esta energía se debe sumar la energía potencial gravitatoria:  $E = Mgz - \frac{\chi V}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r})$

Para que el objeto flote en equilibrio, la fuerza vertical debe ser nula:

$$F_z = -\nabla_z E = -Mg + \frac{\chi V}{\mu_0} \nabla_z (B^2) = 0 \Rightarrow \nabla_z (B^2) = \frac{\mu_0 \rho g}{\chi}$$

donde  $\rho = M/V$  es la densidad del objeto. Para analizar la estabilidad de este punto de equilibrio, analizamos qué tipo de extremo de energía se trata. Para ello es conveniente tomar la divergencia de la fuerza, ya que un punto de equilibrio estable implica  $\nabla \bullet \mathbf{F} < 0$ . En esa situación al separar ligeramente al objeto de la posición de equilibrio  $\mathbf{F} = 0$ , el objeto vuelve a la posición de equilibrio.

Pero :  $\nabla \bullet \mathbf{F} = -\nabla \bullet (\nabla E) = -\nabla^2 E = -\nabla^2 \left[ Mgz - \frac{\chi V}{2\mu_0} B^2(\mathbf{r}) \right] = \frac{\chi V}{2\mu_0} \nabla^2 B^2$

Además:  $\nabla^2 B^2 = \nabla^2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = 2[B_x \nabla^2 B_x + (\nabla B_x)^2 + B_y \nabla^2 B_y + (\nabla B_y)^2 + B_z \nabla^2 B_z + (\nabla B_z)^2]$

En la región donde está el objeto a levitar no existen corrientes eléctricas, y el campo  $\mathbf{B}$  cumple las ecuaciones:  $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$      $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  de las que se deduce (demostrarlo) que los laplacianos de sus componentes son nulos.

<sup>21</sup> Esta sección se ha basado fundamentalmente en el artículo “Of flying frogs and levitrons”, por M.V.Berry y A.K.Geim, Eur. J. Phys. 18 (1997), 307-313, y “Everyone’s Magnetism”, A. Geim, Physics Today, Sept. 1998. En el Capítulo 5 presentamos una introducción a la levitación magnética superconductora.

Entonces:  $\nabla^2 B_x = \nabla^2 B_y = \nabla^2 B_z = 0 \Rightarrow \nabla^2 B^2 = 2[(\nabla B_x)^2 + (\nabla B_y)^2 + (\nabla B_z)^2] \geq 0$

Por lo tanto, para que  $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$  es necesario que  $\chi < 0$ . Por lo tanto sólo materiales diamagnéticos pueden “levitar”, es decir, hallarse en equilibrio estable en una combinación de campo magnético y gravitatorio.

La levitación diamagnética se produce porque la energía no depende de un potencial función de la posición, sino del cuadrado de la intensidad del campo B, que no es expresable mediante una función potencial (que cumple la ecuación de Laplace) y por lo tanto no se halla dentro de las hipótesis del teorema de Earnshaw. Es interesante ver que, aunque estas consideraciones también son válidas para materiales paramagnéticos ( $\chi > 0$ ) en este caso el equilibrio es inestable y entonces sus consecuencias prácticas son muy limitadas.

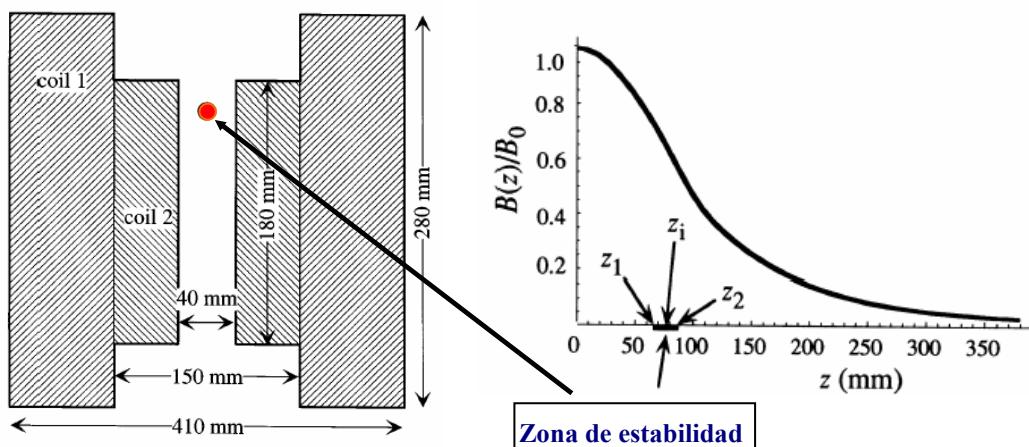
Los textos de magnetismo informan que para muchos materiales la relación  $\chi/\rho$  es del orden de  $10^{-5} \text{ cm}^3/\text{g}$ . De la ecuación del equilibrio, se ve que se requiere un gradiente de campo vertical del orden de  $30 \text{ T}^2/\text{cm}$ . Asumiendo una longitud típica de  $10\text{cm}$  para un solenoide y aproximando  $\nabla B^2 \approx B^2/l$ , se encuentra que campos de unos  $10\text{T}$  son suficientes para levantar prácticamente cualquier cosa alrededor. Estos campos se obtienen con cierta facilidad. Son alrededor de 10 veces el campo creado por imanes comunes de herradura y unas 100 veces mayor que el de los adhesivos que se ponen sobre la puerta de la heladera.

Por otra parte, que un objeto diamagnético pueda levitar no significa que lo haga. Las condiciones experimentales requieren bastante precisión ya que la región donde se cumplen las condiciones es pequeña.

En 1991, Eric Beugnon y Robert Tournier levantaron magnéticamente agua y un número de sustancias orgánicas. Pronto fueron seguidos por otros, que levitaron hidrógeno y helio líquido y huevos de rana. Al mismo tiempo, Jan Kees Maan y Andrey Geim redescubrieron la levitación diamagnética en la Universidad de Nijmegen, en colaboración con Humberto Carmona y Peter Main de la Universidad de Nottingham en Inglaterra. En sus experimentos, levitaron prácticamente todo lo que tenían a mano, desde trozos de queso y pizza hasta criaturas vivas incluyendo ranas y un ratón. Sorprendentemente, los campos magnéticos empleados habían estado disponibles por varias décadas y, quizás en una media docena de laboratorios en el mundo, habría tomado sólo una hora de trabajo implementar la levitación a temperatura ambiente. Sin embargo, aún físicos que usaban fuertes campos magnéticos en su trabajo cotidiano de investigación no reconocieron esta posibilidad. Por ejemplo, cuando el grupo de Nijmegen presentó fotos de ranas levitando muchos de sus colegas las tomaron como un truco, una broma de día de inocentes.

### Características experimentales

En las figuras se muestra un esquema del electroimán Bitter usado por Berry y Geim para realizar experimentos de levitación diamagnética. La marca roja indica la región de equilibrio estable.

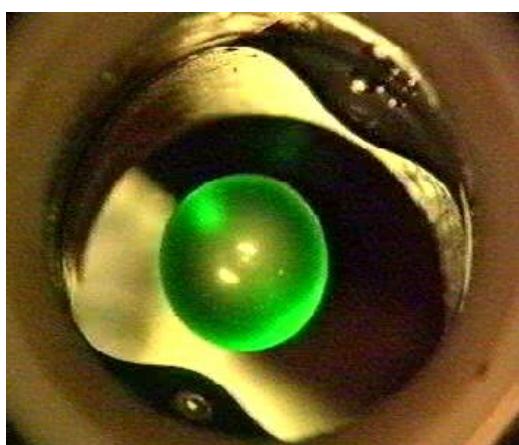


Aunque el electroimán requiere una potencia de 4 MW, muy poca de esta potencia es necesaria para levantar los objetos. Los cálculos llevan a que la intensidad de campo en la región de equilibrio estable es del orden de  $16T$ .

Uno de los puntos importantes de la teoría es que el gradiente de campo necesario es proporcional a la densidad y no a la masa del objeto a levitar, de manera que, si se dispone de imanes de tamaño adecuado, cualquier tamaño y peso de objeto es utilizable.

### Demostraciones

Las siguientes películas<sup>22</sup> demuestran la levitación diamagnética de objetos varios, orgánicos o agua. Están tomadas de <http://www.sci.kun.nl/hfml/levitation-movies.html>  
(Magnet Laboratory, Nijmegen University, Amsterdam)



### Aplicaciones

En relación a posibles aplicaciones, algunas características de la levitación diamagnética son únicas. Primero, la levitación provee una suspensión sin fricción cuyos parámetros (tales como la rigidez) pueden controlarse fácilmente ajustando el perfil del campo. Esta característica hace posible diseñar, por ejemplo, gravímetros ultrasensibles y otros equipos geofísicos donde se requiere sensibilidad a variaciones menores del campo gravitatorio.

Junto con la básica simplicidad y flexibilidad de tales instrumentos, la ausencia de saltos de flujo y la posibilidad de incorporar esquemas de detección óptica los hacen una alternativa atractiva a dispositivos basados en levitación superconductora. Sin embargo, la ventaja más importante de la levitación diamagnética a temperatura ambiente es que - a diferencia de cualquier otra técnica

<sup>22</sup> Los archivos GOTA.MPG, FRUTILLA.MPG, GRILLO:MPG y RANA.MPG deben estar en el mismo directorio que este documento. Se debe tener un reproductor multimedia que permita reproducir clips de video en formato MPEG, como por ejemplo el reproductor de Windows MPLAYER.EXE.

conocida o factible, incluyendo la levitación superconductora - es que la suspensión se distribuye uniformemente en el volumen del objeto. De hecho, para un material homogéneo en un campo con perfil  $B^2 \propto z$ , la gravedad se equilibra al nivel de los átomos y moléculas individuales, lo que hace posible simular condiciones de microgravedad aquí sobre la Tierra. Sin embargo, uno debe aceptar que esto aún no es la falta de peso ideal ya que existen desviaciones debido a varios factores. No obstante, para una multitud de aplicaciones, la simplicidad y accesibilidad de tal investigación "espacial" anclada en la Tierra pesan más que las posibles complicaciones asociadas con estas relativamente pequeñas correcciones.

Observando una gota de agua levitando, uno inevitablemente comienza a pensar en estudiar dinámica de fluidos sin peso, no en un transbordador espacial, sino simplemente en un laboratorio. El crecimiento de cristales sin contenedor, también un asunto frecuente de investigación espacial, es otra aplicación obvia a considerar. O también, por ejemplo, giróscopos suspendidos diamagnéticamente.

La microgravedad magnética parece trabajar bien aún para complejos sistemas biológicos. Varios grupos de biofísicos, tales como los dirigidos por James Valles de Brown University, Karl Hasenstein de la Universidad de Southwestern Louisiana y Markus Braun de la Universidad de Bonn, ya han comenzado estudios de respuestas animales y vegetales a la microgravedad simulada magnéticamente. Los sistemas biológicos son sorprendentemente uniformes en relación a la levitación diamagnética.

Compuestos tan diversos como agua, tejidos, huesos y sangre difieren menos del 10% en sus valores de  $\chi/\rho$ , lo que implica que la gravedad se halla compensada dentro de  $0.1g$  a través de un complejo organismo vivo. Además, aún si hay presentes moléculas paramagnéticas e iones, como en la sangre, sólo contribuyen a la susceptibilidad promedio, ya que su fuerte respuesta al campo magnético se halla disminuida por la temperatura ( $\mu_B B \ll kT$ ), el movimiento browniano y un mucho mayor acoplamiento a las moléculas diamagnéticas cercanas. Quizás el alineamiento de biomoléculas muy largas según la dirección del campo es el efecto magnético que con mayor probabilidad puede oscurecer los efectos de la microgravedad en sistemas complejos. Afortunadamente, siempre se puede controlar este y otros efectos no debidos a la microgravedad colocando un sistema en un gradiente de campo idéntico pero horizontal o en un campo inhomogéneo de la misma intensidad.

Un ejemplo interesante de cómo puede explotarse la fuerza diamagnética es la posibilidad de que en el espacio un campo magnético puede reemplazar a la gravedad como una guía para el crecimiento de plantas. Una semilla en germinación necesita saber en qué dirección crecer para emergir exitosamente del suelo antes de que sus limitados recursos se terminen. Los experimentos de Hasenstein indican que aún un pequeño imán puede proveer suficiente guía para hacer crecer una planta a bordo de una nave espacial.

Respecto a los posibles, y aún desconocidos, efectos desfavorables de fuertes campos magnéticos sobre organismos vivos (un asunto de interés en sí mismo), tales efectos son probablemente poco importantes. En investigaciones de aplicaciones médicas, voluntarios han pasado hasta 40 horas dentro de un imán de  $4T$  sin ningún efecto observable y otros experimentos similares actualmente en curso en la Ohio State University también indican que no hay peligro al menos hasta  $8T$ .

## Sistemas Magnéticos de Acondicionamiento de Fluidos

Los Sistemas Magnéticos de Acondicionamiento de Fluidos (**MFC - Magnetic Fluid Conditioning**) se basan en el diamagnetismo de los materiales. En 1945, el ingeniero belga Theo I. S. Vermeiren tuvo la idea de utilizar este fenómeno para tratamientos industriales del agua.

La operación de los sistemas MFC se basa en el hecho de que la mayoría de los sólidos causantes de depósitos en sistemas de fluidos - fundamentalmente agua o combustibles - son diamagnéticos. Las sustancias típicas responsables son el carbonato de calcio, el sulfato de calcio, yeso, sulfato de bario, cloruro de sodio, magnesio, sulfatos, parafina, aceites, ceras y grasas.

La mayoría de estos compuestos se ioniza en el agua y forma aglomerados en suspensión, que a medida que crecen se van depositando en los contenedores. La presencia de estas sustancias en suspensión causa la "dureza" del agua y, en ciertos casos, su contaminación e inutilización para su uso.

Hasta hace poco, los problemas de las aguas duras o con sustancias en suspensión, se trataban en las siguientes formas:

- **Proceso de intercambio de iones (ablandamiento del agua):** El agua se pasa sobre lechos de resinas regeneradoras. Los iones de los elementos que causan dureza (calcio y magnesio) se intercambian con los iones sodio de la resina.
- **Evitar que los sólidos entren al sistema:** Esto se logra en dos formas: 1) se filtra el agua que ingresa o 2) las partículas suspendidas de elementos que generan dureza se coagulan introduciendo aditivos químicos, de manera de luego filtrar el precipitado.
- **Osmosis inversa:** Se aplica presión al agua contaminada, forzándola a través de una membrana permeable sólo a las moléculas de tamaño de las de agua, separando así muchos - pero no todos - los contaminantes.
- **Evitar la formación de depósitos:** Esto se logra generalmente agregando "estabilizadores de dureza" químicos al agua. Estas sustancias favorecen la formación de fosfatos que no se adhieren a las cañerías.
- **Remoción de depósitos existentes:** Estos se logra de dos formas: 1) sustancias químicas solubilizadoras se agregan al agua para disolver los depósitos o 2) se cierra el sistema completa y se bombea ácidos para disolver los depósitos a través de las cañerías.

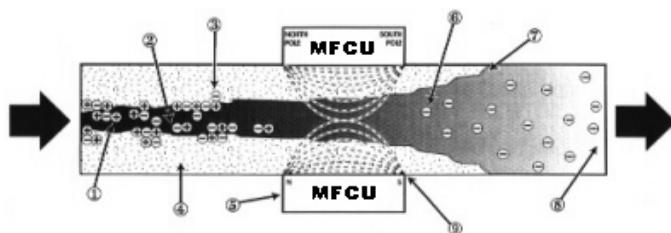
Todos estos métodos requieren un equipamiento costoso y tienen riesgos ambientales y sanitarios por la manipulación de sustancias químicas altamente corrosivas.

El sistema MFC produce campos que magnetizan las partículas diamagnéticas de las sustancias que forman los depósitos. Las partículas magnetizadas se repelen entre sí, llevando a la disolución de los depósitos. Las partículas quedan suspendidas en el sistema y se eliminan por el mismo flujo.

Este sistema no agrega sustancias químicas al fluido, puede estar en funcionamiento permanente con bajos costos operativos y permite mantener las cañerías del sistema en óptimas condiciones por tiempo indefinido.

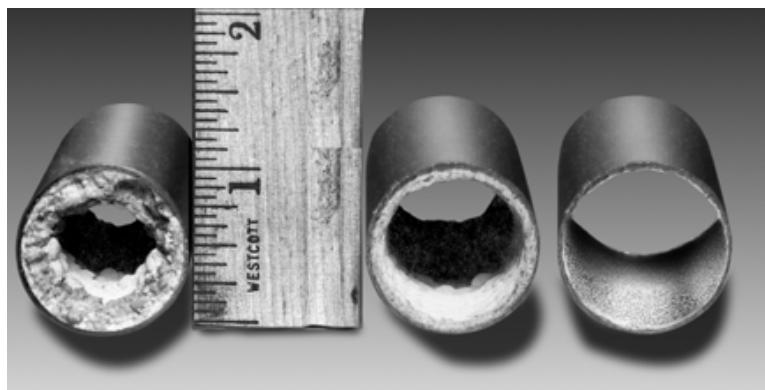
Los diseños de sistemas MFC utilizan imanes permanentes de ferritas cerámicas o neodimio, dado que son necesarios campos intensos. Esta razón hizo que sólo recientemente fue posible lograr sistemas con posibilidades comerciales.

### Esquema de una Unidad de MFC en operación



1. Los componentes disueltos de calcio y magnesio se aglomeran por cambios de temperatura y presión.
2. Estos aglomerados son transportados por el fluido.
3. Los aglomerados crecen, son demasiado pesados para permanecer en suspensión y se depositan sobre las superficies.
4. La unidad MFC disuelve y dispersa los aglomerados de  $\text{CaCO}_3$  y  $\text{MgCO}_3$ .
5. Los aglomerados fluyen más libremente luego de ser disueltos.
6. Depósitos preexistentes se disuelven y vuelven a suspensión.
7. No se vuelven a formar grandes aglomerados por 15 a 30 m (donde es posible que se requiera otra unidad MFC).

### Ejemplo de remoción de depósitos

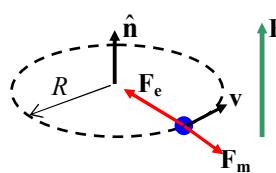


#### Secciones de cañería antes y después del tratamiento (0/3/6 meses)

La cañería de cobre original había estado en servicio 17 años. El tratamiento evitó el cambio de cañerías o el cierre por varios días del sistema de aprovisionamiento de agua del edificio necesario para un tratamiento químico convencional.

## APENDICE 5 – Teoría clásica del diamagnetismo

El diamagnetismo es un fenómeno universal. Un modelo clásico (no cuántico) sencillo permite obtener un valor aproximado de la susceptibilidad magnética de materiales diamagnéticos.



Consideramos un átomo hidrogenoide donde el electrón gira en una órbita circular alrededor del núcleo con una velocidad  $v$ . Por comodidad matemática suponemos que la órbita es horizontal. En general, tendremos órbitas con cualquier orientación, pero para comenzar supondremos el caso de la figura. Obsérvese que definimos la normal a la órbita para que cumpla la regla de la mano derecha con el sentido de giro del electrón. El electrón gira alrededor del núcleo debido a la existencia de una fuerza centrípeta electrostática:  $F_e = m\omega_0^2 R$  donde  $\omega_0$  es la frecuencia angular del giro y  $R$  el radio de la órbita.

Al colocar los átomos en un campo magnético exterior  $\mathbf{B}$ , que supondremos perpendicular a las órbitas, se produce una fuerza magnética:  $F_m = evB = e\omega RB$  que en este caso se opone a la fuerza electrostática. Como la fuerza centrípeta del movimiento circular cambia y el radio de la órbita se mantiene constante, debe cambiar la velocidad de giro, por lo que  $\omega_0$  se convierte en  $\omega$ . Tenemos entonces:

$$F_e - F_m = m\omega^2 R \Rightarrow m\omega_0^2 R - e\omega RB = m\omega^2 R \Rightarrow m(\omega^2 - \omega_0^2) = -e\omega B$$

Llamando:  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \Rightarrow \Delta\omega(\omega + \omega_0) = -\frac{e\omega}{m} B \Rightarrow \Delta\omega \approx -\frac{e}{2m} B$

ya que las frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega$  son muy similares aún para los mayores campos que pueden obtenerse. Este cambio en la frecuencia de giro se denomina **frecuencia de Larmor**. Se observa así que el campo magnético aplicado produce un frenado en el giro del electrón.

Un electrón que gira se puede asimilar a una espira por la que circula una corriente. Esta corriente se puede calcular como la carga por unidad de tiempo que atraviesa un plano perpendicular a la órbita:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$$

donde  $T$  es el periodo del giro del electrón y  $e$  su carga. El cambio en la velocidad de giro puede asociarse a un cambio en la corriente equivalente y en el momento magnético orbital del electrón:

$$\Delta\omega \rightarrow \Delta I = \frac{e\Delta\omega}{2\pi} \rightarrow \Delta m = \Delta I S = \frac{e\Delta\omega}{2\pi} \pi R^2 = -\frac{e^2 R^2}{4m} B \approx -\frac{e^2 R^2}{4m} \mu_0 H$$

dado que para un material diamagnético  $\mu \approx \mu_0$ . Si hay  $N$  átomos por unidad de volumen, el vector magnetización del material será:

$$\mathbf{M} = N\Delta \mathbf{m} \approx -\frac{Ne^2 R^2}{4m} \mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_0 R^2}{4m}$$

que, como puede verse, es negativa. En este planteo hemos supuesto que la órbita electrónica

tiene su normal paralela al campo aplicado. En realidad, las órbitas electrónicas estarán distribuidas en todas las direcciones del espacio. Para una órbita cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con el campo aplicado, la componente radial de fuerza magnética que genera un cambio en la frecuencia de giro introduce en las ecuaciones anteriores el factor  $\cos \theta$ . Además, la componente del momento magnético paralela al campo aplicado  $\Delta m_z$ , que es la que da origen a la susceptibilidad, también introduce el factor  $\cos \theta$ . En resumen, queda para una órbita inclinada:

$$\Delta m_z = -\frac{e^2 \mu_0 R^2}{4m} H \cos^2 \theta$$

Tomamos el promedio sobre todas las posibles direcciones  $\theta$ :

$$\langle \Delta m_z \rangle = -\frac{e^2 \mu_0 R^2}{4m} H \langle \cos^2 \theta \rangle$$

Pero:  $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{3}$

y finalmente tenemos:  $\langle \Delta m_z \rangle = -\frac{e^2 \mu_0 R^2}{12m} H \Rightarrow \chi_m = -\frac{Ne^2 \mu_0 R^2}{12m}$

Si reemplazamos los valores de las constantes, con un valor medio de  $R = 5 \times 10^{-10} \text{ m}$  tenemos  $\chi_m \approx 6.7 \times 10^{-33} \text{ N}$ . Para un material típico,  $N \approx 10^{25} - 10^{28}$ , lo que lleva a que el efecto diamagnético es muy pequeño.

De todas formas el diamagnetismo debe explicarse en forma cuántica, porque además de los efectos derivados del momento angular orbital (que se puede, en principio, asociar a una "giro" del electrón alrededor del núcleo), se deben agregar los efectos del spin, una propiedad de los electrones tan fundamental como su carga o su masa, que está asociado a otro momento angular.

## RESUMEN

En este Capítulo presentamos una descripción del magnetismo de los materiales con diversas aplicaciones de interés tecnológico.

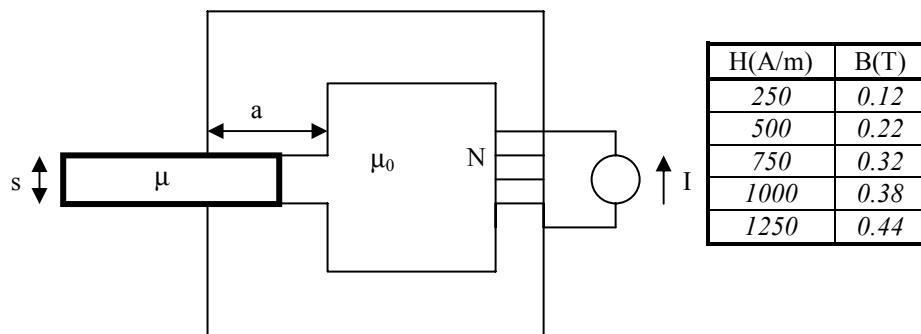
- Hay dos procesos básicos que determinan el comportamiento de los materiales cuando se ven sometidos a un campo magnético: el **diamagnetismo**, asociado a la interacción del campo con cada electrón individual del material, y el **paramagnetismo**, asociado a la interacción con los átomos, moléculas u otra unidad magnetizable. A su vez, el paramagnetismo se presenta en diversas variantes según la estructura geométrica cristalina y el tipo de átomo o molécula que forma el material. En todos los casos el fenómeno esencial es el alineamiento de los momentos magnéticos con el campo de inducción magnética local.

Se analizan brevemente las características de los distintos tipos de materiales magnéticos (**ferromagnéticos**, **antiferromagnéticos**, **ferrimagnéticos**, con diagramas de la estructura cristalina de varios ejemplos. Se encuentra que existe una competencia entre el proceso de orden que significa el alineamiento de los dipolos magnéticos y el proceso de desorden vinculado con la energía térmica del material. Para muchos tipos de materiales existe una temperatura crítica (de Curie en ferromagnéticos, de Neel en los antiferromagnéticos) por encima de la cual predomina el efecto de desorden y el material se desmagnetiza.

- Una de las aplicaciones de mayor interés tecnológico de los materiales magnéticos es la creación de imanes, permanentes o no. Analizamos en detalle el ciclo de histéresis de un material ferromagnético, deduciendo de primeros principios de energía la necesidad de la existencia del ciclo de histéresis en un caso ideal sencillo.
- Se definen las características esenciales del ciclo de histéresis de un material: la **remanencia**, la **coercividad** y el **máximo producto de energía BH**. Estos parámetros se utilizan en la selección del material adecuado a la aplicación deseada.
- Se introduce la noción de **circuito magnético** como una región cerrada del espacio donde se concentran las líneas de campo magnético, a partir de varios ejemplos.
- Se discute la noción de **fuerza magnética**, de mucha importancia en aplicaciones electromecánicas. Se presenta la formulación general y se dan algunos ejemplos de cálculo de fuerzas en electroimanes.
- Se presenta una sección de materiales magnéticos cerámicos modernos, de los que destacan las **ferritas**, el **samario-cobalto** y el **neodimio-hierro-boro**, de uso común en muchas aplicaciones eléctricas y electrónicas.
- Se presentan a continuación algunos desarrollos recientes no tradicionales de materiales magnéticos: la **magnetorresistencia**, ligada a las lectoras magnéticas, el **efecto magnetocalórico**, con aplicaciones a la refrigeración magnética, el fenómeno de la **levitación diamagnética**, que parecería contradecir al teorema de Earnshaw y **sistemas magnéticos de acondicionamiento de fluidos**, para evitar el depósito de sarro en cañerías.
- En el Apéndice 5 se presenta la **teoría clásica del diamagnetismo**.

## PROBLEMAS

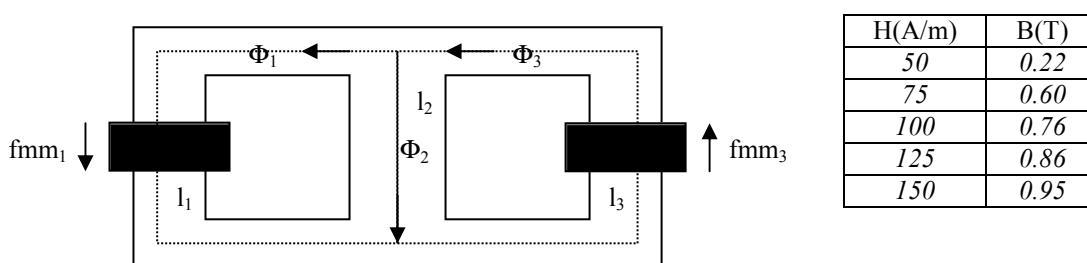
- 4.1) ¿Cuáles son los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{M}$  y las corrientes de magnetización para un cilindro muy largo de radio  $R$  y permeabilidad  $\mu$ , limitado por aire, y por el que circula una corriente axial  $J_o\mathbf{z}$  uniformemente distribuida.
- 4.2) Un placa material de permeabilidad  $\mu$  se introduce parcialmente dentro de un circuito magnético de alta permeabilidad tal como muestra la figura. Calcule la fuerza que el circuito ejerce sobre la placa.



- 4.3) El núcleo de una bobina circular de hierro colado con radios interno 7 cm y externo 9 cm, de sección cuadrada con lados de 2 cm, está bobinado con 500 vueltas. Calcule, aproximadamente, el flujo magnético concatenado si la corriente que circula es de 1 A. La tabla de la derecha da la curva B-H del material en la región de trabajo.

[Rta: 0.16 mWb]

- 4.4) El circuito magnético paralelo que muestra la figura es de una aleación de silicio-acero y tiene la misma sección transversal en toda su extensión,  $S = 1.3 \text{ cm}^2$ . Las longitudes medias son  $l_1 = l_3 = 25 \text{ cm}$  y  $l_2 = 5 \text{ cm}$ . Las bobinas tienen 50 vueltas cada una. a) Sabiendo que  $\Phi_1 = 90 \mu\text{Wb}$  y  $\Phi_3 = 120 \mu\text{Wb}$ , halle las corrientes en las bobinas. b) Obtenga el circuito magnético equivalente utilizando el concepto de reluctancia, y calcule el flujo en el núcleo sabiendo que  $fmm_1 = 19.3 \text{ A}$  y  $fmm_3 = 37.5 \text{ A}$ . La tabla describe la curva B-H del material en la región de trabajo.

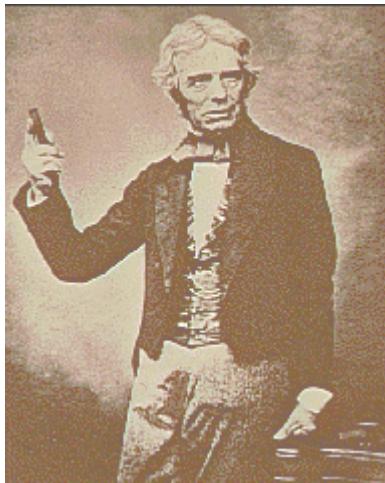


[Rta: a) 0.39 A, 0.75 A b) 89.7  $\mu\text{Wb}$ , 30.3  $\mu\text{Wb}$ , 120  $\mu\text{Wb}$ ]

## 5 - Electrodinámica

Este capítulo desarrolla temas de vital importancia en la modelación de los fenómenos electromagnéticos. Debido a la necesidad de introducir nuevas ideas se incluyen reseñas históricas del periodo que llevó a la síntesis de Maxwell de 1864, que reflejan cómo esas nuevas ideas se fueron introduciendo en la interpretación de las observaciones experimentales.

### Inducción electromagnética - Ley de Faraday



En 1831, luego de una larga serie de experimentos, **Michael Faraday** encontró una relación nueva entre efectos eléctricos y magnéticos. Se sabía, luego de los trabajos de Oersted y Ampère, entre otros, que una corriente eléctrica (un campo eléctrico) crea efectos magnéticos. Faraday estaba convencido de la simetría en las leyes de la naturaleza, y de la observación de la inducción electrostática y la "inducción" de efectos magnéticos por corrientes eléctricas creía que un campo magnético debía crear efectos eléctricos. Sin embargo, la relación era más sutil: **son las variaciones en el tiempo del campo magnético las que crean un campo eléctrico**. Citamos las propias palabras de Faraday<sup>1</sup>, en su presentación ante la Royal Institution, de Londres. En la introducción a la primera serie de experimentos, relacionados con la inducción electromagnética, Faraday presenta los objetivos y antecedentes de estas investigaciones:

- “1. El poder que posee la tensión eléctrica de producir un estado eléctrico opuesto en sus proximidades se ha expresado por el término general de Inducción, el cual tal como ha sido recibido en el lenguaje científico puede ser también utilizado adecuadamente, con el mismo sentido general, para expresar el poder que pueden poseer las corrientes eléctricas de inducir algún estado peculiar sobre la materia en su inmediata proximidad, que de otra manera permanecería indiferente. Es con este significado que propongo usarlo en este trabajo.”
- “2. Ciertos efectos de inducción de las corrientes eléctricas han sido ya reconocidos y descriptos, como los de magnetización; los experimentos de Ampère de la atracción de un disco de cobre por una espiral plana; su repetición con electroimanes de los extraordinarios experimentos de Arago y tal vez algunos otros. Sin embargo, parece improbable que éstos puedan ser todos los efectos que produce la inducción por corrientes; especialmente dado que, si se prescinde del hierro, casi todos ellos desaparecen, mientras que todavía una infinidad de cuerpos que muestran fenómenos definidos de inducción con electricidad de tensión, resultan además influidos por la inducción de la electricidad en movimiento.”
- “3. Más aún, ya sea se adopte la hermosa teoría de Ampère o alguna otra, o cualquiera sea la reserva mental que se haga, sigue resultando extraordinario que, como toda corriente eléctrica está acompañada por una correspondiente intensidad de acción magnética en ángulo recto con la corriente, buenos conductores de electricidad colocados dentro de la esfera de esta acción, no tengan alguna corriente inducida a través de ellos ni se produzca algún efecto sensible equivalente, en fuerza, a tal corriente.”
- “4. Estas consideraciones, con su consecuencia, la esperanza de obtener electricidad a partir del magnetismo ordinario, me estimularon en varias oportunidades a investigar experimentalmente el efecto de inducción de las corrientes eléctricas. Ultimamente llegué a resultados positivos y no sólo he satisfecho mis esperanzas, sino que obtuve una clave que a mi parecer ofrece una explicación completa de los fenómenos magnéticos de Arago y también el descubrimiento de un nuevo estado que probablemente puede tener gran influencia en algunos de los más importantes efectos de las corrientes eléctricas.”
- “5. Me propongo describir estos resultados, no como fueron obtenidos, sino en forma tal de dar la más concisa visión del conjunto.”

A continuación Faraday describe el montaje experimental que usará:

<sup>1</sup> “Investigaciones experimentales de electricidad”, Series I a V, M. Faraday. Eudeba, Bs. As. (1971). Serie I.

“6. Se arrollaron aproximadamente veintiséis pies de alambre de cobre de un vigésimo de pulgada de diámetro alrededor de un cilindro de madera, formando una hélice, intercalando un delgado hilo para impedir que las diferentes espiras se tocaran. Se cubrió esta hélice con tela de algodón y luego se aplicó un segundo alambre de la misma manera. En esta forma se superpusieron doce hélices conteniendo cada una una longitud promedio de alambre de veintisiete pies y todas en el mismo sentido. La primera, tercera, quinta, séptima, novena y undécima de estas hélices se unieron por sus terminaciones, extremo con extremo, de manera de formar una única hélice. Las otras se conectaron en forma análoga y así se obtuvieron dos hélices principales, estrechamente intercaladas, que tenían el mismo sentido, que no se tocaban en ninguna parte y que contenían cada una ciento cincuenta y cinco pies de longitud de alambre.”



“7. Una de estas hélices se conectó con un galvanómetro. La otra con una batería voltaica de diez pares de placas de cuatro pulgadas cuadradas, con chapas dobles y bien cargadas; sin embargo no pudo observarse la más ligera desviación de la aguja del galvanómetro.”

En la figura se muestra el anillo de inducción usado por Faraday en sus experimentos, conservado en la Royal Institution, Londres, donde Faraday trabajó toda su vida.

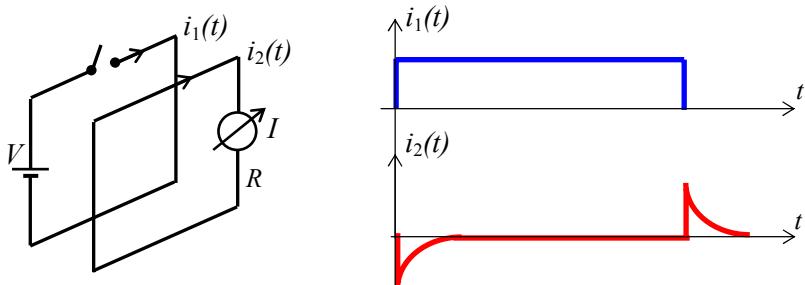
Describe a continuación otras variantes de conexión y materiales sin hallar resultados, pero luego presenta la

observación crucial:

“10. ...Al establecer el contacto se produjo un repentino y ligero efecto en el galvanómetro y también se produjo un ligero efecto similar cuando se interrumpió el contacto con la batería. Pero mientras la corriente volálica continuaba pasando a través de una de las hélices, no pudo percibirse ninguna desviación galvanométrica ni ningún otro efecto semejante a la inducción sobre la otra hélice, aunque se probó que el poder activo de la batería era grande por el calentamiento de la totalidad de su propia hélice y por el brillo de la descarga cuando se hacia a través de carbón.

El resto de la serie describe nuevos experimentos concebidos para corroborar la observación inicial y analizar la dependencia de los resultados de tomar diferentes circuitos, materiales y disposiciones geométricas. Entre otras cosas, Faraday describe el primer transformador y el primer generador/motor eléctrico.

Dado su interés histórico y científico desde el punto de vista de la física experimental, se ha incluido en el ftp de la materia la descripción de Faraday de su primera serie de experimentos que lo llevó a descubrir la inducción electrodinámica (**Faraday1.pdf**). Se recomienda enfáticamente su lectura.



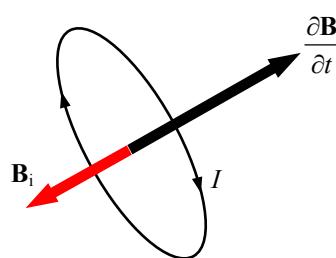
circula una corriente estacionaria por la primera espira el medidor de la segunda no registra corriente. Sin embargo al abrir o cerrar el interruptor se produce una corriente transitoria en la segunda espira como se indica en las gráficas. El sentido de circulación de esta corriente inducida es tal que el campo magnético creado por ella se opone al campo magnético creado por la corriente original en la primera espira.

Las experiencias de Faraday se pueden esquematizar considerando dos espiras conductoras cercanas. Por una de ellas puede circular una corriente controlada por un interruptor. La segunda es una espira cerrada con un medidor de corriente. Mientras

Podemos interpretar este resultado admitiendo que se produce una *fem* sobre un circuito **cerrado** que concatena o encierra un flujo magnético **variable en el tiempo**:

$$\text{Ley de Faraday-Lenz} \quad \text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde  $C$  es la curva que define el circuito y  $S$  una superficie cualquiera **abierta** que se apoya sobre  $C$ . El signo menos de esta expresión indica la polaridad de la *fem*, y está asociado a la llamada ley de Lenz, que indica que la corriente inducida crea un campo que se opone a las variaciones en el tiempo del campo original. Por ejemplo, la espira de la figura se halla en una región donde existe un campo magnético variable en el tiempo. La derivada de  $\mathbf{B}$  respecto del tiempo tiene la dirección indicada. Entonces la corriente inducida sobre la espira tiene el sentido indicado en la figura, que crea un campo inducido  $\mathbf{B}_i$  que se opone a los **cambios** en el campo original (el campo original en sí puede apuntar en cualquier dirección).



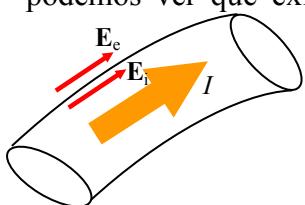
donde  $C$  es la curva que define el circuito y  $S$  una superficie cualquiera **abierta** que se apoya sobre  $C$ . El signo menos de esta expresión indica la polaridad de la *fem*, y está asociado a la llamada ley de Lenz, que indica que la corriente inducida crea un campo que se opone a las variaciones en el tiempo del campo original. Por ejemplo, la espira de la figura se halla en una región donde existe un campo magnético variable en el tiempo. La derivada de  $\mathbf{B}$  respecto del tiempo tiene la dirección indicada. Entonces la corriente inducida sobre la espira tiene el sentido indicado en la figura, que crea un campo inducido  $\mathbf{B}_i$  que se opone a los **cambios** en el campo original (el campo original en sí puede apuntar en cualquier dirección).

No es necesario que el campo magnético sea variable. Si un circuito, o parte de él, se mueve o se modifica su superficie en una región del espacio donde exista un campo magnético, se inducirán corrientes que tiendan a mantener constante el flujo magnético que encierra el circuito.

**En resumen, la variación en el tiempo del flujo magnético encerrado por un circuito produce sobre él una fuerza electromotriz, que tiende a hacer circular una corriente que, a su vez, genera un flujo magnético que se opone a los cambios del flujo original.**

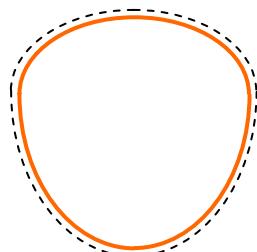
**El cambio temporal de flujo magnético se puede deber a que el campo de inducción magnética original cambia en el tiempo, o a que la geometría del circuito mismo cambia en el tiempo. En el primer caso se habla de un efecto de inducción electromagnética, siguiendo a Faraday, o efecto transformador, y en el segundo, de una fem de movimiento.**

Por la continuidad del vector eléctrico sobre la superficie del conductor que forma un circuito, podemos ver que existe un campo eléctrico exterior al conductor, y que la ley de Faraday:



$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS \text{ es también válida en una re-}$$

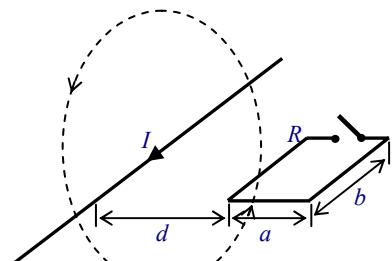
gión adyacente al circuito. En tal caso la ley establece una relación entre los campos, que podemos reescribir aplicando el teorema de Stokes a la primera integral y observando que la superficie de integración no depende del tiempo:



$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS \Rightarrow \int_S \left( \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

donde se ha tenido en cuenta que la superficie de integración es arbitraria. Esta forma diferencial de la ley de Faraday-Lenz liga entre sí los campos en cualquier punto del espacio, y no solamente dentro del circuito, por lo que la consideramos de mayor generalidad que la forma integral que se deduce de los experimentos de Faraday.

**Ejemplo 5-1:** Calcular la fem inducida por una corriente variable  $I(t)$  que fluye por un conductor filiforme recto muy largo sobre una espira rectangular de resistencia  $R$ .



Consideremos primero que la espira está a circuito abierto. Entonces no hay circulación de corriente sobre la espira. El hilo recto crea líneas de campo circulares con centro sobre el hilo. El campo  $H$  vale (**Ejemplo 3-17**):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I(t)}{2\pi\rho} \hat{\phi}$$

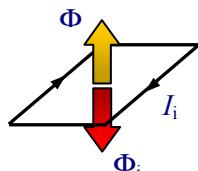
El flujo concatenado por la espira es:

$$\Phi_m = \int_d^{d+a} \mu_0 \frac{I(t)}{2\pi\rho} b d\rho = \mu_0 \frac{I(t)b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) = \mu_0 \frac{I(t)b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

y entonces la *fem* inducida sobre ella es, de acuerdo a la ley de Faraday:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \frac{dI}{dt} = -M \frac{dI}{dt}$$

donde  $M$  es la **inductancia mutua** entre el hilo y la espira. Esta *fem* se mide entre los terminales de la espira.



Consideremos ahora que se cierra el interruptor. La *fem* hallada hará circular una corriente  $I_i$ . Esta corriente tendrá el sentido para crear un flujo magnético que se oponga a los cambios del flujo original. Si  $d\Phi_m/dt$  tiene la dirección indicada en la figura, la corriente debe girar de manera que el flujo inducido tenga la dirección opuesta.

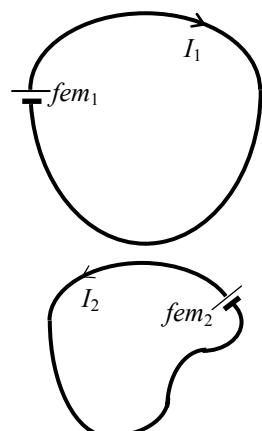
Cuando circula corriente, vale la ley de Ohm:  $\text{fem} = I_i R$  donde  $R$  es la resistencia de la espira. Pero esta corriente crea un flujo magnético inducido  $\Phi_i = L_i I_i$  donde  $L$  es la **autoinductancia** de la espira.

Finalmente, el flujo concatenado total es el generado por el campo exterior y el campo propio, y podemos escribir para la ley de Faraday:  $-L \frac{dI_i}{dt} - M \frac{dI}{dt} = I_i R$

## Aplicaciones del efecto transformador

### Transformador

Supongamos que tenemos dos circuitos acoplados entre sí. En general, cada uno de ellos tiene además fuentes independientes de *fem*, representadas en la figura por baterías. Las ecuaciones circuitales son, a partir del ejemplo precedente :



$$\text{fem}_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad \text{fem}_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

Estas ecuaciones permiten describir el efecto transformador. Si el segundo circuito está abierto:

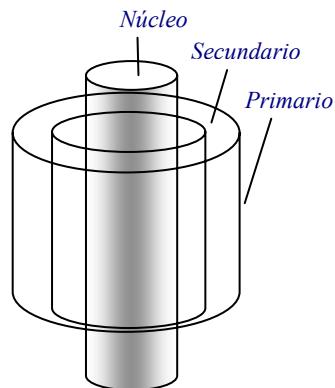
$$\text{fem}_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad \text{fem}_2 = M \frac{dI_1}{dt}$$

y si además suponemos que la resistencia del primer circuito es muy pequeña:

$$\text{fem}_1 \approx L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad \text{fem}_2 = M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{de donde} \quad \frac{\text{fem}_1}{\text{fem}_2} \approx \frac{L_1}{M}$$

Esta es la ecuación del efecto transformador. Si se coloca una  $\text{fem}_1$  en el primer circuito, o primario, se mide una  $\text{fem}_2$  sobre los bornes del segundo circuito o secundario. La relación entre ambas *fems* es la relación entre la autoinductancia del primario y la inductancia mutua.

**Ejemplo 5-2:** Hallar la relación de transformación entre dos solenoides concéntricos de  $N_1$  y  $N_2$  vueltas, respectivamente, devanados uno sobre el otro sobre un cilindro ferromagnético de permeabilidad  $\mu$ .



En la figura se muestra la disposición. El secundario se bobina por encima del primario para minimizar el flujo disperso. Aunque en el esquema se han dibujado de distinto radio por claridad, ambos bobinados tienen prácticamente la misma sección. Si los solenoides son largos, el campo de inducción magnética creado por el primario será:

$$B_1 = \frac{\mu N_1 I_1}{L} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = N_1 B_1 S = \frac{\mu N_1^2 I_1 S}{L} \\ \Phi_2 = N_2 B_1 S = \frac{\mu N_1 N_2 I_1 S}{L} \end{cases}$$

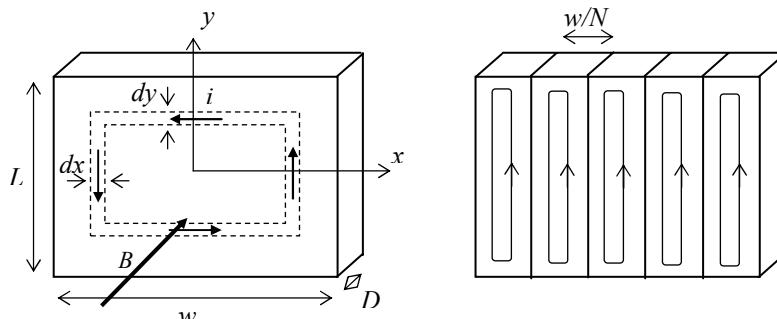
$$\text{de donde: } L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 S}{L} \quad M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 S}{L}$$

$$\text{Entonces: } \frac{fem_1}{fem_2} \approx \frac{L_1}{M} = \frac{\mu N_1^2 S / L}{\mu N_1 N_2 S / L} = \frac{N_1}{N_2}$$

y la relación de transformación se reduce a la relación entre el número de vueltas de los devanados. Se puede observar que esta relación no depende de la permeabilidad del núcleo, pero la presencia del material ferromagnético asegura que (casi) todas las líneas de flujo sean concatenadas por los solenoides.

Se observa también que:  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ . En general:  $M = k \sqrt{L_1 L_2}$  con  $0 < k < 1$ .  $k$  se llama **coeficiente de acoplamiento** y es generalmente menor que 1 debido a que existe flujo disperso.

## Corrientes parásitas o de Foucault



Cuando un material conductor se coloca en una región del espacio donde existe un campo  $\mathbf{B}(t)$ , se crean corrientes en el material que tratan de anular el flujo magnético dentro del mismo de acuerdo a la ley de Faraday-Lenz. Estas corrientes se llaman **corrientes parásitas** o **corrientes de Foucault**.

Las corrientes de Foucault generan pérdidas por efecto Joule. Podemos calcularlas dividiendo al conductor en “espiras” virtuales, de lados ( $2x, 2y$ ) y espesor ( $dx, dy$ ). Suponemos además por comodidad matemática que:  $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx} = \frac{L}{w}$ .

El flujo encerrado por esta espira es, con  $\mathbf{B}(t)$  uniforme:  $\Phi_m = -4xy B(t)$ . El signo menos surge de aplicar la regla de la mano derecha para la dirección supuesta de circulación de corriente. La *fem* sobre la “espira” es:

$$fem = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 4xy \frac{dB}{dt} = i R_e$$

donde la resistencia de la “espira” es:  $R_e = \frac{l}{\sigma S} = \frac{2}{\sigma} \left[ \frac{2x}{D dy} + \frac{2y}{D dx} \right] = \frac{4}{\sigma D} \left( \frac{x}{dy} + \frac{y}{dx} \right)$

$$\text{Y entonces: } i = \frac{4xy}{R_e} \frac{dB}{dt} = \sigma D \frac{xy}{x/dy + y/dx} \frac{dB}{dt} = \sigma D \frac{x dx}{1 + (w/L)^2} \frac{dB}{dt}$$

La potencia perdida por efecto Joule sobre la “espira” será:

$$dP = i^2 R_e = \frac{fem^2}{R_e} = \frac{16x^2y^2}{\frac{4}{\sigma D} \left( \frac{x}{dy} + \frac{y}{dx} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 = \frac{4\sigma DL x^3}{w \left( 1 + \frac{w^2}{L^2} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 dx$$

e integrando sobre todo el volumen:

$$P = \int_0^{w/2} \frac{4\sigma DL x^3}{w \left( 1 + \frac{w^2}{L^2} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 dx = \frac{4\sigma DL}{w \left( 1 + \frac{w^2}{L^2} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \int_0^{w/2} x^3 dx = \frac{\sigma DL w^3}{16 \left( 1 + \frac{w^2}{L^2} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2$$

Cuando el núcleo se divide en  $N$  láminas de espesor  $w/N$ , esta expresión sigue siendo válida para calcular las pérdidas dentro de cada lámina. La potencia total será:

$$P' = N \frac{\sigma DL (w/N)^3}{16 \left( 1 + \frac{w^2}{N^2 L^2} \right)} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \Rightarrow P' \approx P / N^2$$

para  $N$  grande. Se observa entonces que la laminación del material conductor reduce notablemente las pérdidas por corrientes de Foucault y esta es la razón por la cual muchos transformadores tienen sus núcleos construidos por láminas de hierro o acero separadas eléctricamente por el óxido que es dieléctrico

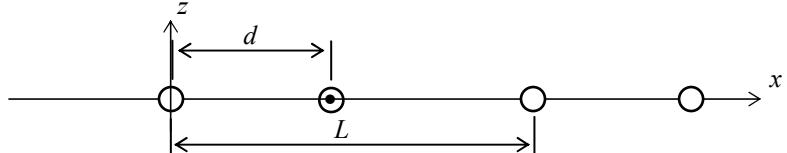
### Acoplamiento y diafonía (crosstalk)

Cuando hay varias líneas cercanas que llevan información se puede producir el fenómeno de **diafonía** o **crosstalk**, en el que la señal de una línea se acopla sobre la otra señal, produciendo interferencia y dificultades en la comunicación. Esto también ocurre cuando una de las líneas es de potencia, por lo que es de interés en este curso. Este efecto surge por la presencia de inductancia mutua o la capacidad mutua entre circuitos que llevan señales diferentes. Veremos en esta sección el efecto de la inductancia mutua.

En los siguientes casos analizamos la cercanía entre dos líneas bifilares en aire.

**Ejemplo 5-3:** Hallar la inductancia mutua entre las líneas bifilares según las siguientes disposiciones geométricas:

a) **Coplanares:** El campo **B** creado por la línea bifilar de la izquierda sobre el plano de la línea de la derecha es:



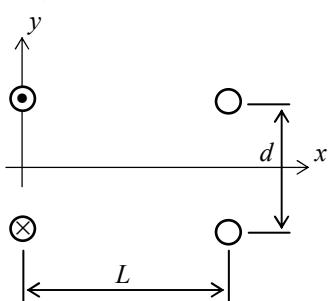
longitud de las líneas es:

$$\frac{\Phi_m}{l} = \int_L^{L+d} B_z dx = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_L^{L+d} \left( \frac{1}{x-d} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{L+d}{L} \right) \Rightarrow \frac{M}{l} = \frac{\Phi_m}{Il} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{L+d}{L} \right)$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{x-d} - \frac{1}{x} \right)$$

y el flujo concatenado por la segunda línea por unidad de

b) **Paralelas:** En este caso tenemos:



$$B_x(L, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{y+d/2}{L^2 + (y+d/2)^2} - \frac{y-d/2}{L^2 + (y-d/2)^2} \right)$$

de modo que:

$$\frac{\Phi_m}{l} = \int_{-d/2}^{d/2} B_z dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{y+d/2}{L^2 + (y+d/2)^2} - \frac{y-d/2}{L^2 + (y-d/2)^2} \right) dy$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{L^2 + d^2}{L^2}\right) \Rightarrow \frac{M}{l} = \frac{\Phi_m}{Il} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{L^2 + d^2}{L^2}\right)$$

c) **Perpendiculares:** En este caso tenemos:

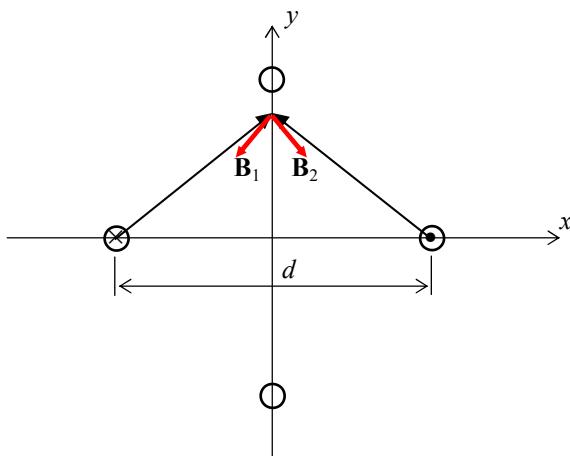
$$B_x(L, y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{y}{L^2 + y^2} - \frac{y}{(L-d)^2 + y^2} \right)$$

de modo que:

$$\frac{\Phi_m}{l} = \int_{-d/2}^{d/2} B_z dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-d/2}^{d/2} \left( \frac{y}{L^2 + y^2} - \frac{y}{(L-d)^2 + y^2} \right) dy = 0$$

de donde  $M = 0$

d) **Cruzadas:** En este caso vemos que sobre cualquier punto en el plano de la línea vertical, el campo **B** resultante tiene únicamente dirección y, ya que las componentes horizontales se anulan entre sí. Por lo tanto, el flujo concatenado por la línea vertical es cero y lo es también la inductancia mutua.



tensión para transmitir datos. Veremos este tema con mayor profundidad en el Capítulo de líneas de transmisión.

En resumen, se observa que en las disposiciones c) y d) la inductancia mutua se anula, lo que lleva a que no existe diafonía "inductiva" en estos casos. En los casos a) y b) la inductancia mutua es diferente de cero y existe la posibilidad de interferencias entre los campos generados en cada línea.

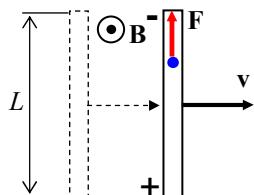
Se debe hacer un análisis similar con los **coeficientes de inducción** para determinar la posibilidad de diafonía "capacitiva" en las distintas configuraciones.

La diafonía es de especial importancia en la actualidad ya que se está ensayando la posibilidad de usar las líneas de alta, media y baja

## Fem de movimiento

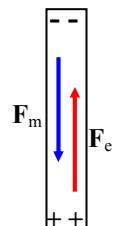
En la sección precedente hemos descripto algunos ejemplos de la inducción electromagnética debida a campos magnéticos variables en el tiempo. Sin embargo, no es ésta la única forma de obtener una *fem* sobre un circuito. El movimiento de cuerpos cargados en presencia de campos magnéticos, aún estacionarios, crea una *fem*, como se describe en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5-4:** Una barra conductora de conductividad  $\sigma$  se mueve a velocidad constante  $\mathbf{v}$  en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme y constante perpendicular a la barra. ¿Existe fem inducida sobre la barra por el movimiento?



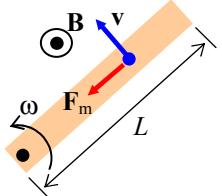
Para describir el problema debemos elegir un referencial. Tomamos un referencial "fijo al campo", donde el campo permanece uniforme y estacionario y la barra se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ .

Suponemos que la barra tiene carga neta nula, formada por electrones móviles e iones **fijos** a la red cristalina. Sobre estas cargas se ejerce una fuerza de Lorentz. Esta fuerza mueve únicamente a los electrones. Al comenzar el movimiento, sólo existe campo magnético dentro de la barra, y la fuerza es:  $\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Como en el caso del efecto Hall, la fuerza magnética tiende a agrupar a los electrones en el extremo superior de la barra, dejando así un exceso de carga positiva en el extremo inferior. Esta redistribución de carga crea un campo eléctrico que se opone al movimiento de electrones, y se llega al equilibrio cuando:  $eE = evB \Rightarrow E = vB$ . Este campo eléctrico uniforme genera una *fem* =  $E L = vBL$  con la polaridad indicada en la figura.



**Ejemplo 5-5:** Una barra conductora de conductividad  $\sigma$  gira a velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un extremo. Existe un campo magnético uniforme y constante perpendicular al plano de rotación. ¿Existe fem inducida sobre la barra por el movimiento?

De nuevo tomamos un referencial fijo al campo, en el cual la barra se observa girando. Sobre las cargas de la barra se produce una fuerza de Lorentz magnética que vale:



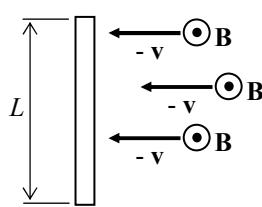
$F_m = evB = e\omega rB$  para una carga situada a la distancia  $r$  del centro de rotación. El campo eléctrico que surge de la redistribución de carga vale, para el equilibrio:  $E = \omega rB$  y por lo tanto la *fem* inducida entre los extremos de

$$\text{la barra es: } \text{fem} = \int_0^L E dr = \omega B \int_0^L r dr = \frac{1}{2} \omega B L^2$$

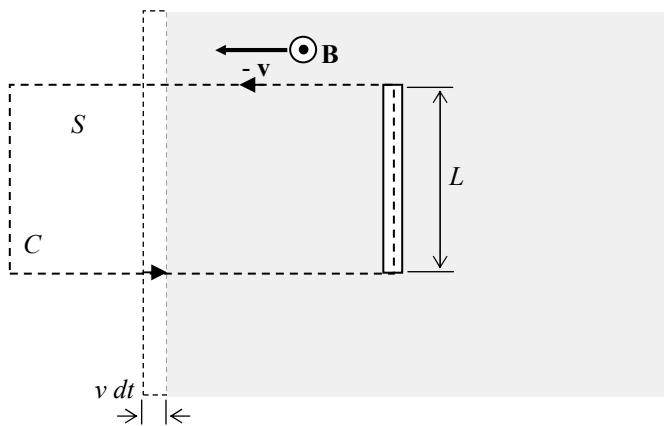
Se ve que esta *fem* es proporcional a la frecuencia angular de rotación.

Estos ejemplos muestran que el movimiento de cuerpos cargados en un campo magnético produce también una *fem*. Hemos hallado su valor describiendo el problema desde un sistema de referencia donde los cuerpos cargados se mueven y el campo magnético es estacionario y uniforme. Surge aquí la pregunta de si obtendríamos el mismo resultado a partir de otro referencial. Esta pregunta es difícil de contestar si no tenemos más precisiones acerca de las características de los referenciales. Hablamos de **referenciales inerciales** cuando se trata de referenciales donde son válidas las leyes de la mecánica de Newton. Si sabemos que un dado referencial es inercial, cualquier otro referencial que se mueva con velocidad constante respecto de él será también inercial. No será inercial un referencial que se mueva aceleradamente respecto de un referencial inercial. Si se aplican las leyes de Newton a sistemas observados desde referenciales no inerciales aparecen "fuerzas" que no corresponden a interacciones (y entonces no son fuerzas desde un punto de vista estricto).

Hemos admitido tácitamente en los ejemplos anteriores que los referenciales usados, "fijos al campo", eran inerciales, como se hace habitualmente por simplicidad. Entonces en el caso del Ejemplo 5.4 podemos tomar otro referencial inercial para el cálculo de la *fem*. Ese referencial puede estar fijo a la barra. Como se mueve a velocidad constante respecto de un referencial supuesto inercial (el referencial "fijo al campo") debe ser también inercial. Desde este referencial



no vemos cargas en movimiento, de manera que no existe, en nuestra descripción, fuerza de Lorentz, pero vemos líneas de campo magnético que se mueven con velocidad ( $-v$ ), como se ilustra en la figura. Estas líneas de campo magnético móviles darán lugar a un campo eléctrico, de acuerdo a la ley de Faraday, ya que en un punto del espacio cualquiera el campo magnético está cambiando en el tiempo. Este campo eléctrico a su vez generará



una fem sobre la barra. Para calcular esta fem nos valdremos del siguiente artificio que nos permite expresar matemáticamente los cambios en el tiempo del campo móvil. Suponemos que la región del campo uniforme es la señalada en sombreado, que va creciendo hacia la izquierda a medida que el campo se mueve. Podemos pensar, por ejemplo, que se trata del campo creado entre los polos de un imán, que se mueve hacia la izquierda con velocidad  $v$ . Tomamos un circuito  $C$  cualquiera, parte del cual

se halla entre los polos del imán y parte fuera, y aplicamos la ley de Faraday:

$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{BLvdt}{dt} = BLv$$

ya que en el intervalo  $dt$  el flujo magnético crece al moverse a la izquierda la frontera de la región de campo magnético uniforme.

Se observa que este resultado coincide con el del ejemplo previo. Desde el punto de vista físico, la diferencia entre ambas descripciones consiste únicamente **en el lugar donde se coloca el sistema de referencia** para describir los fenómenos:

- en la primera descripción, el sistema de referencia se halla fijo al campo magnético y la barra se mueve. El observador ve cargas en movimiento en un campo magnetostático y ve entonces fuerza de Lorentz sobre las cargas que llevan a producir la fem.
- en la segunda descripción, el sistema de referencia se halla fijo a la barra móvil. Por lo tanto, el observador no ve cargas en movimiento y no detecta la presencia de fuerza magnética. La fem se produce por la existencia de un campo eléctrico sobre la barra. El observador ve un campo magnético que se mueve respecto a su referencia.

Estas dos descripciones son equivalentes en cuanto al valor de la fem observada, ya que ésta se puede medir experimentalmente, pero se ve que **difieren en cuanto a las causas de la fem**.

Esta asimetría en la descripción de los fenómenos supuestamente responsables de un determinado efecto a partir de observaciones en referencias inerciales en movimiento relativo es citada por Einstein en la introducción a su trabajo de 1905 donde establece la teoría especial de la relatividad. En sus propias palabras<sup>2</sup>:

*“Es conocido que la electrodinámica de Maxwell – como se la entiende habitualmente en el presente – cuando se aplica a cuerpos en movimiento, lleva a asimetrías que no parecen ser inherentes a los fenómenos. Tómese, por ejemplo, la acción electrodinámica recíproca entre un imán y un conductor. El fenómeno observable aquí depende solamente del movimiento relativo entre el conductor y el imán, mientras que la visión usual traza una clara distinción entre los dos casos en que uno u otro de estos cuerpos está en movimiento. Porque si el imán está en movimiento y el conductor en reposo, surge en la vecindad del imán un campo eléctrico con una cierta energía definida, que produce una corriente en los lugares donde están situadas*

<sup>2</sup> Traducido de “On the electrodynamics of moving bodies”, The principle of relativity, Dover, New York (1952). El artículo original es “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, Annalen der Physik, 17, 1905.

partes del conductor. Pero si el imán está estacionario y el conductor en movimiento, no surge campo eléctrico alguno en la vecindad del imán. Sin embargo en el conductor encontramos una fuerza electromotriz, para la cual en sí no hay una energía correspondiente, pero que da lugar – asumiendo igualdad en el movimiento relativo en los dos casos discutidos – a corrientes eléctricas del mismo camino e intensidad que las producidas por las fuerzas eléctricas en el primer caso.”

“Ejemplos de este tipo, junto con los fallidos intentos de descubrir algún movimiento de la tierra relativo al ‘medio luminoso’, sugieren que los fenómenos de la electrodinámica así como los de la mecánica no poseen propiedades correspondientes a la idea del reposo absoluto. Más bien sugieren que, como ya se ha demostrado a primer orden de pequeñas cantidades, las mismas leyes de la electrodinámica y la óptica serán válidas para todos los sistemas de referencia para los cuales las ecuaciones de la mecánica se cumplen. Elevaremos esta conjetaura (cuyo sentido se llamará desde ahora ‘Principio de Relatividad’) al status de un postulado, y también introduciremos otro postulado, que sólo aparentemente es irreconciliable con el anterior, que la luz siempre se propaga en el espacio vacío con una velocidad definida  $c$  que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor. Estos dos postulados son suficientes para la obtención de una teoría simple y consistente de la electrodinámica de cuerpos en movimiento basada en la teoría de Maxwell para cuerpos estacionarios. La introducción de un ‘éter luminífero’ se revelará superflua ya que la visión a desarrollar aquí no requiere un ‘espacio absolutamente estacionario’ provisto con propiedades especiales, ni asignar un vector velocidad a puntos del espacio vacío donde tienen lugar los procesos electromagnéticos.”

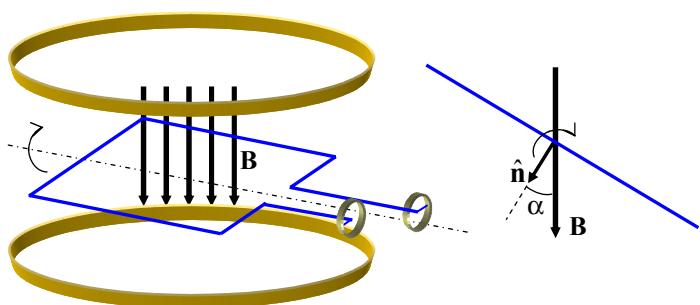
“La teoría a ser desarrollada se basa – como toda electrodinámica – en la cinemática del cuerpo rígido, dado que las afirmaciones de cualquier teoría tienen que ver con las relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. Una consideración insuficiente de esta circunstancia yace en la raíz de las dificultades que encuentra al presente la electrodinámica de cuerpos en movimiento.”

A continuación sigue una **parte cinemática**, donde el punto esencial es la definición de la simultaneidad de eventos que ocurren en lugares alejados y se deducen las ecuaciones de la transformación de Lorentz-Fitzgerald entre referenciales en movimiento relativo. La tercera y última parte, la **parte electrodinámica**, introduce la transformación de las ecuaciones de Maxwell para medios en movimiento y se analizan diversas consecuencias.

Aunque el elemento disparador de la teoría especial de la relatividad parece ser la necesidad de hallar una descripción adecuada de la forma de las ecuaciones de Maxwell cuando se analizan los fenómenos desde sistemas de referencia en movimiento relativo, la parte cinemática es totalmente general y crea una mecánica nueva, contradiciendo los postulados básicos de Newton acerca del espacio y el tiempo absolutos. Trabajos posteriores de Einstein y otros completaron esta mecánica y arrojaron nuevos resultados sobre los fenómenos electromagnéticos.

Dado su interés histórico y científico, y la relativa sencillez matemática de su formulación, se ha incluido en el ftp de la materia la traducción al inglés del artículo de Einstein de 1905 (**Einstein1905.pdf**), y se recomienda enfáticamente su lectura.

### Generador y motor ideales



La posibilidad de generar una *fem* por rotación permite construir un dispositivo **generador** de energía eléctrica<sup>3</sup>. En la figura se muestra el principio. Un par de bobinas de Helmholtz generan un campo de inducción magnética vertical. Una espira gira por acción de un mecanismo externo sobre un eje horizontal, de forma que la normal a su superficie forma un ángulo  $\alpha$  (variable con el tiempo) con el campo  $\mathbf{B}$ . La espira tiene contactos deslizantes sobre dos aros que permiten conectarla al resto del circuito. Supongamos que la espira gira con movimiento circular uniforme. Entonces:  $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t$  donde  $\omega$  es la frecuencia angular del movimiento. El flujo magnético concatenado por la espira es:  $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$  Supongamos que el campo es uniforme sobre la superficie de la espira para simplificar el análisis:

$$\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} S = BS \cos \alpha(t) = BS \cos(\alpha_0 + \omega t).$$

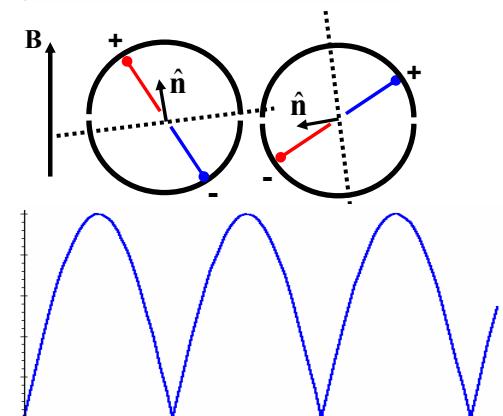
Como el flujo magnético concatenado por la espira depende del tiempo, por la ley de Faraday aparece una *fem* sobre los contactos deslizantes:  $fem(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$

Se ve así que la *fem* inducida sobre la espira es senoidal, y su amplitud depende de la amplitud de  $\mathbf{B}$ , el área de la espira y la velocidad de giro. Se trata de un **generador de corriente alterna**, que convierte la energía mecánica del giro en energía eléctrica.

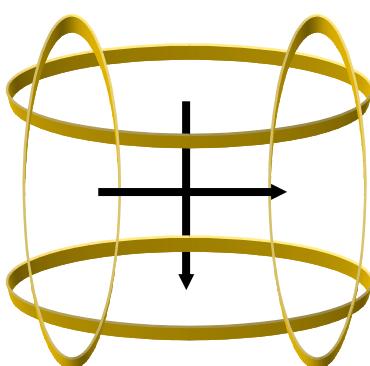
El sistema se hace más práctico colocando una bobina de  $N$  vueltas en lugar de una única espira, con lo que la amplitud de la *fem* inducida se multiplica por  $N$ .

Se puede obtener un generador de **corriente continua** si la espira se conecta a un único aro cortado por la mitad como se indica en la figura. La línea de puntos indica el plano de la espira. En la posición de la izquierda el flujo concatenado es positivo y supongamos que la polaridad de la *fem* sobre los semiaros es la indicada. Cuando la espira gira  $90^\circ$  el flujo es negativo y se invierte la polaridad de los contactos, pero ahora estos contactos tocan el otro semiaro. De esta forma, el semiaro superior es siempre positivo y el inferior es siempre negativo. La forma de onda se muestra en la figura inferior.

Consideremos ahora **dos** pares de bobinas de Helmholtz colocadas en planos **perpendiculares**. Los campos creados serán también perpendiculares entre sí, y si por ambos pares circula la misma corriente, serán de igual magnitud. El campo resultante estará entonces a  $45^\circ$ . Si ahora cada par es excitado con corrientes alternas de igual frecuencia, pero desfasadas en  $90^\circ$ :



lolaridad de la *fem* sobre los semiaros es la indicada. Cuando la espira gira  $90^\circ$  el flujo es negativo y se invierte la polaridad de los contactos, pero ahora estos contactos tocan el otro semiaro. De esta forma, el semiaro superior es siempre positivo y el inferior es siempre negativo. La forma de onda se muestra en la figura inferior.



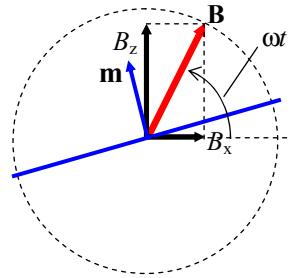
<sup>3</sup> En rigor, un dispositivo **conversor** de energía mecánica a energía eléctrica.

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t) \Rightarrow B_1 = B_0 \sin(\omega t)$$

$$I_2 = I_0 \cos(\omega t) \Rightarrow B_2 = B_0 \cos(\omega t)$$

El campo **B** total será:  $\mathbf{B}(t) = B_1 \hat{\mathbf{x}} + B_2 \hat{\mathbf{z}} = B_0 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}]$

y se observa que a medida que pasa el tiempo la punta del vector **B** total describe una circunferencia en el plano xz.



Se trata de un **campo rotante**. Si ahora colocamos la espira del ejemplo previo en esta región y hacemos circular por ella una corriente, la espira adquiere un momento magnético **m**. La presencia del campo exterior **B** crea sobre la espira una fuerza que la hace girar sobre su eje horizontal para llevar a **m** paralelo a **B**. Como **B** es un campo rotante, esta disposición hace que la espira rote constantemente a frecuencia angular  $\omega$ . Un objeto solidario al eje de la espira rotará también y esta configuración constituye un **motor elemental**<sup>4</sup>.

## Energía magnética

En función de la autoinductancia, la ley de Faraday-Lenz para un circuito cerrado por el que circula una corriente  $I$ , causante del flujo magnético, se escribe:

$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = RI = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow RI + L \frac{dI}{dt} = 0$$

En general, si hay una fuente independiente de *fem* en el circuito, podemos escribir:

$$\text{fem} = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Analicemos en este caso el balance de energía. La *fem* entrega una potencia:

$$P = \text{fem} \cdot I = RI^2 + LI \frac{dI}{dt} = RI^2 + \frac{1}{2} L \frac{dI^2}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LI^2 \right)$$

La potencia entregada por la *fem* al circuito tiene dos destinos:

- potencia disipada en la resistencia del circuito por efecto Joule,
- potencia almacenada en el campo magnético asociado a la autoinductancia.

Se observa que el primer sumando es la potencia perdida por efecto Joule en la componente resistiva del circuito, y entonces el segundo término es la variación en el tiempo de la energía almacenada en la autoinductancia, es decir, en el campo magnético. Por lo tanto, la energía almacenada en el campo magnético asociado a la autoinductancia es:

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Podemos reescribir esta expresión. Como:

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi_m}{I} I^2 = \frac{1}{2} \Phi_m I \quad \text{y dado que: } \Phi_m = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{tenemos:}$$

$$U_m = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} dl = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dv$$

donde hemos usado la transformación usual:  $\oint_C \mathbf{I} dl \rightarrow \int_V \mathbf{j} dv$ .

$$\text{Entonces, por la ley de Ampère: } U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dv = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} dv$$

<sup>4</sup> En la práctica las disposiciones de las bobinas son más complicadas para mejorar la eficiencia del dispositivo. Se usan electroimanes para aumentar el campo **B** y sistemas de bobinado que aseguran el máximo acoplamiento entre los circuitos magnéticos. Los ejemplos provistos sólo tienen objetivos didácticos.

Ahora usamos la identidad (página 12):  $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

Tenemos:  $\nabla \bullet (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) = \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A} \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \bullet (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{A})$   
y entonces:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \bullet \mathbf{A} dv = \frac{1}{2} \int_V [\nabla \bullet (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) + \mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{A})] dv = \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{A}) \bullet \hat{\mathbf{n}} ds + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \bullet \mathbf{B} dv$$

La primera integral se ha transformado usando el teorema de la divergencia y se ha usado la relación  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Finalmente, hacemos tender  $S \rightarrow \infty$ , con lo que  $V$  llena todo el espacio. En tal caso la primera integral se anula, porque el campo lejano de un circuito se ve a grandes distancias como el campo de una espira, que decae como  $1/r^3$ . Como  $\mathbf{A}$  decae como  $1/r^2$  el integrando tiende a  $1/r^5$  y la integral se anula.

Queda así:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{H} \bullet \mathbf{B} dv$$

Esta expresión es equivalente a la que obtuvimos para la energía electrostática. La energía magnética queda expresada en términos de los campos, y podemos asignar al campo esa energía. La energía está distribuida en todo el espacio donde haya campo, con una densidad de energía:

$$u_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

**Ejemplo 5-6:** Calcular, a partir de la energía almacenada, la inductancia **internal** de un cable cilíndrico de radio  $a$  y permeabilidad  $\mu$ .

El campo dentro de un conductor cilíndrico grueso muy largo se halló en el **Ejemplo 3-18**:

$$H(r) = \frac{I \rho \hat{\phi}}{2\pi a^2} \quad \rho \leq a \quad \text{La densidad de energía almacenada es entonces:}$$

$$u_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2} H^2(\mathbf{r}) = \frac{\mu I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \quad \text{y la energía almacenada por unidad de longitud del cable es:}$$

$$U_m = 2\pi \int_0^a \frac{\mu I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \rho d\rho = \frac{\mu I^2}{4\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu I^2}{16\pi}$$

Como además  $U_m = 1/2 L I^2$ , se tiene:  $L = \mu/8\pi$  que es la inductancia por unidad de longitud del conductor grueso (ver **Ejemplo 3-21**).

**Ejemplo 5-7:** Calcular, a partir de la energía almacenada, la inductancia **external** de un cable coaxial cilíndrico de radios  $a$  y  $b$ , lleno con un medio de permeabilidad  $\mu$ .

El campo creado entre el conductor interior y exterior del coaxial (nos piden calcular la inductancia externa) se calculó en el **Ejemplo 3-19** y vale :

$$H(r) = \frac{I \hat{\phi}}{2\pi \rho} \quad a \leq \rho \leq b$$

$$\text{La densidad de energía almacenada es entonces: } u_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2} H^2(\mathbf{r}) = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 \rho^2}$$

y entonces la energía total almacenada es, por unidad de longitud del cable:

$$U_m = 2\pi \int_a^b \frac{\mu I^2}{8\pi^2 \rho^2} \rho d\rho = \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Entonces, como  $U_m = 1/2 L I^2$ , se tiene:  $L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$  que es la inductancia por unidad de longitud del coaxial (ver **Ejemplo 3-19**).

## De Faraday a Maxwell

Además del descubrimiento de la inducción electromagnética, **Michael Faraday** aportó muchas importantes contribuciones a la teoría electromagnética. Una de las más fructíferas fue la noción de líneas de campo. Muchos habían observado antes la peculiar distribución de limaduras de hierro en presencia de un imán, pero fue Faraday quien primero pensó que esta distribución en “líneas de fuerza” reflejaba una característica profunda de la interacción magnética.

Sin embargo, en esa época la línea principal de desarrollo de la teoría de la electricidad y el magnetismo se basaba en el modelo de acción a distancia. Luego de los experimentos de Coulomb en 1788 y la asimilación de los fenómenos eléctricos al mismo modelo de la teoría gravitatoria de Newton, ampliamente respetada y considerada la forma paradigmática de las acciones físicas, diversos investigadores como **Pierre-Simon Laplace**, **Simeon Denis Poisson**, y **Joseph-Louis Lagrange**, franceses, **George Green**, inglés y **Carl Friedrich Gauss**, alemán, desarrollaron la teoría matemática del potencial. También la teoría magnética de **André-Marie Ampère** se basaba en la idea de acción a distancia.

Faraday no contaba con una formación matemática adecuada y seguía con dificultad estos desarrollos, pero en su pensamiento íntimo creía que debían encontrarse bases físicas de estas teorías matemáticas. Creyó encontrar estas bases en la noción de líneas de fuerza. En “**Experimental Researches in Electricity**”, Vol. III, Serie XXVIII (1852), Faraday escribe:

“A partir de mis primeros experimentos sobre la relación de la electricidad y el magnetismo, he tratado de pensar y hablar de las líneas de fuerza magnética como representaciones de la potencia magnética, no meramente en cuestiones de calidad y dirección, sino también en cantidad. La necesidad en que me hallé de un uso más frecuente del término en algunas investigaciones recientes me ha conducido a creer que ha llegado el momento en que la idea que imparte la frase debe ser enunciada muy claramente, y también debe ser examinada cuidadosamente, de manera que pueda averiguarse cuán lejos puede aplicarse en verdad en la representación de las condiciones y fenómenos magnéticos y cuán útil puede ser en su dilucidación, y también cuánto puede ayudar en dirigir correctamente la mente a nuevas concepciones de la naturaleza física de la fuerza y el reconocimiento de los posibles efectos, sea nuevos o conocidos, que pueden producirse por esta representación...”

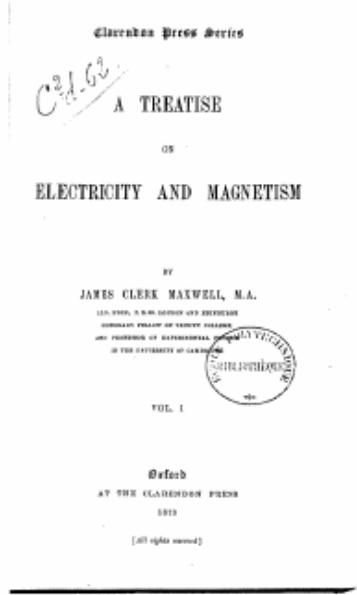
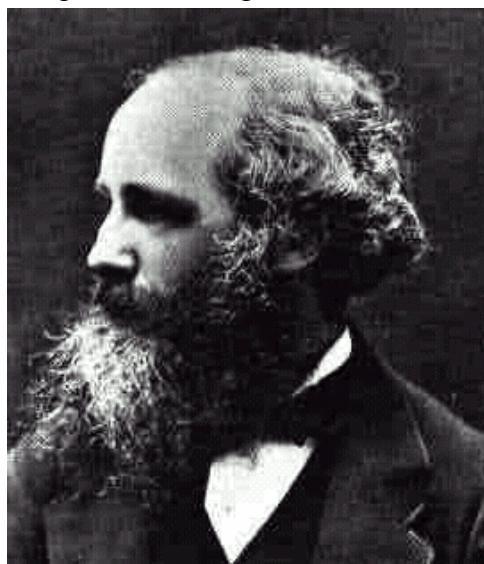
“... Ahora me parece que estas líneas pueden emplearse con grandes ventajas para representar la naturaleza, condición, dirección y cantidad comparativa de las fuerzas magnéticas, y que en muchos casos tienen, al menos al razonador físico, una superioridad sobre los métodos que representan las fuerzas como concentradas en centros de acción, tales como los polos de imanes y agujas, u otros métodos como, por ejemplo, el que considera los magnetismos norte y sur como fluidos que se difunden desde los extremos o entre las partículas de una barra...”

“... Cómo la fuerza magnética se transfiere a través de cuerpos o a través del espacio no lo sabemos: - si el resultado es meramente acción a distancia, como en el caso de la gravedad, o por algún agente intermedio, como en los casos de la luz, el calor, la corriente eléctrica y (como yo lo creo) la acción eléctrica estática. La idea de los fluidos magnéticos, aplicada por algunos, o la de los centros magnéticos de acción, no incluye la noción del último tipo de transmisión, pero la idea de las líneas de fuerza sí lo hace.”

“... por mi propia parte, considerando la relación del vacío a la fuerza magnética y el carácter general de los fenómenos magnéticos externos al imán, estoy más inclinado a la noción que en la transmisión de la fuerza existe una acción, externa al imán, que a la idea de que los efectos son meramente de atracción y repulsión a distancia. Tal acción puede ser una función del éter, porque no es nada improbable que, si existe un éter, debería tener otros usos que la simple transmisión de la radiación.”

En general, las ideas de Faraday, al no tener un soporte matemático que permitiera predecir efectos, tuvieron poco eco. Sin embargo, en 1842 **William Thomson** (después **lord Kelvin**) publicó el trabajo “**On the Uniform Motion of Heat in homogeneous solid bodies, and its connection with the Mathematical Theory of Electricity**”, donde demostraba que la noción de líneas de fuerza podía ser interpretada matemáticamente de manera que llevaba a ecuaciones similares a las ya entonces conocidas de teorías de la transmisión del calor y la mecánica. En 1847 Thomson

extendió estas ideas a una representación mecánica de las interacciones eléctricas y magnéticas en “**On a Mechanical representation of Electric, Magnetic, and Galvanic Forces**”. Estos trabajos de Thomson pueden considerarse como la base de la que se desarrolló la teoría de los campos electromagnéticos.



En su “**Treatise on Electricity and Magnetism**”, de 1873, **James Clerk Maxwell** plantea su deuda con Faraday y Thomson en el desarrollo de sus propias ideas sobre la teoría electromagnética, así como su deseo de fundir las nociones empíricas de Faraday con las nociones matemáticas de la línea continental:

“La apariencia general del tratado difiere considerablemente de la de varios trabajos eléctricos excelentes, publicados en su mayoría en Alemania, y puede parecer que se hace escasa justicia a las especulaciones de varios eminentes eléctricos y matemáticos. Una razón de esto es que antes de comenzar el estudio de la electricidad resolví no leer ninguna obra matemática sobre el tema antes de haber leído por completo las *Experimental Researches on Electricity* de Faraday. Yo era consciente de que se suponía que había diferencias entre la forma de concebir los fenómenos de Faraday y la de los matemáticos, de modo que ni él ni ellos estaban satisfechos con el lenguaje del otro. Tenía también la convicción de que esta discrepancia no surgía de que alguna de las partes estuviera equivocada. Fui convencido de esto primero por Sir William Thomson, a cuyo consejo y asistencia, así como a sus obras publicadas, debo la mayoría de lo que he aprendido sobre este tema.”

“...A medida de que avanzaba en el estudio de Faraday, percibía que su método de concebir los fenómenos era también un método matemático, aunque no exhibido en la forma convencional de símbolos matemáticos. También encontré que estos métodos eran capaces de ser expresados en formas matemáticas ordinarias, para así ser comparadas con las de los matemáticos.”

“...Por ejemplo, Faraday, en su mente, veía líneas de fuerza atravesando todo el espacio donde los matemáticos veían centros de fuerza que se atraen a la distancia. Faraday veía un medio donde ellos no veían nada salvo distancia. Faraday buscó el asiento de los fenómenos en acciones reales que tenían lugar en el medio. Ellos estaban satisfechos de haberlo hallado en una potencia de acción a distancia expresada sobre los fluidos eléctricos.”

“... Cuando había traducido lo que consideraba eran las ideas de Faraday a una forma matemática, encontré que en general los resultados de los dos métodos coincidían, de modo que los mismos fenómenos eran descriptos y las mismas leyes de acción se deducían mediante ambos métodos, pero los métodos de Faraday recordaban aquéllos en los que comenzamos con el todo y llegamos a las partes por análisis, mientras que los métodos matemáticos ordinarios se fundamentaban en el principio de comenzar por las partes y construir el todo mediante síntesis.”

En 1854, inmediatamente después de su graduación, Maxwell leyó las “*Experimental Researches...*” de Faraday. En 1855, a los 25 años, Maxwell publicó su primer trabajo sobre electricidad, titulado “**On Faraday's Lines of Force**”, donde establece analogías entre el comportamiento electrostático y el movimiento de los fluidos incompresibles, y entre las líneas de fuerza magnética y torbellinos en un fluido. Suponiendo a las cargas positivas y negativas como fuentes

y sumideros de un fluido, Maxwell encuentra que el flujo se realizaría siguiendo las "líneas de fuerza" de Faraday.

En 1861-62 Maxwell publica una serie de trabajos, "**On physical lines of force**", donde, a partir de sus resultados previos, desarrolla un modelo mecánico de las fuerzas electromagnéticas. En este modelo la acción a distancia se reemplaza por una descripción de campos en un medio especial, el éter, donde los campos producen tensiones asociadas con las líneas de fuerza de Faraday. Este éter, como soporte material de la propagación de las radiaciones, es una estructura común a todos los modelos mecanicistas de mediados del siglo XIX y sólo desaparecerá con la teoría de la relatividad. El modelo de Maxwell era notablemente complejo. Se basaba en una estructura de vórtices, unos eléctricos y otros magnéticos, cuyos ejes coincidían con las "líneas de fuerza" de Faraday. Al final de la serie Maxwell dice:

"Creo que tenemos buena evidencia para la opinión de que algún fenómeno de rotación tiene lugar en el campo magnético; que esta rotación se realiza por un gran número de porciones muy pequeñas de materia, cada una rotando sobre su propio eje, siendo este eje paralelo a la dirección de la fuerza magnética, y que las rotaciones de estos diferentes vórtices dependen unas de las otras mediante algún tipo de mecanismo que las conectan."

El intento que hice para imaginar un modelo que funcione de este mecanismo no debe tomarse de mayor valor que lo que realmente es, una demostración de que es posible imaginar un mecanismo capaz de producir una conexión mecánicamente equivalente a la real conexión de las partes del campo electromagnético. El problema de determinar el mecanismo requerido para establecer una especie dada de conexión entre los movimientos de las partes de un sistema siempre admite un número infinito de soluciones. De éstas algunas pueden ser más toscas o más complejas que otras, pero todas deben satisfacer las condiciones generales del mecanismo.

Los siguientes resultados de la teoría, sin embargo, son de mayor valor:

- (1) La fuerza magnética es el resultado de la fuerza centrífuga de los vórtices.
- (2) La inducción electromagnética de corrientes es el efecto de las fuerzas puestas en juego cuando la velocidad de los vórtices está cambiando.
- (3) La fuerza electromotriz surge de las tensiones [mecánicas] sobre el mecanismo de conexión.
- (4) El desplazamiento eléctrico surge de la respuesta elástica del mecanismo de conexión."

Esta última frase describe una novedad introducida por Maxwell. Así como un campo magnético variable en el tiempo daba lugar a un campo eléctrico, de acuerdo a los descubrimientos experimentales de Faraday, un campo eléctrico variable en el tiempo daría lugar a un campo magnético. Esta característica nueva, la "**corriente de desplazamiento**", que reemplazaba a la corriente real en la producción de un campo magnético en un medio dieléctrico, permite llegar a la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas.

Maxwell encuentra que la velocidad de propagación de estas ondas coincide numéricamente con el valor de la velocidad de la luz en el vacío:

"... la velocidad de propagación de vibraciones transversales a través del medio elástico del cual las celdas están compuestas ... coincide tan exactamente con la velocidad de la luz ... que apenas podemos evitar la inferencia que **la luz consiste en las vibraciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos.**"

El énfasis es original de Maxwell, que se daba cuenta de lo revolucionario de sus conclusiones. En una larga carta a Faraday en 1861, Maxwell afirma:

"...Pienso que ahora tenemos fuertes razones para creer, ya sea que mi teoría sea un hecho o no, que el medio luminífero y el medio electromagnético son uno solo..."

En 1864 Maxwell publica un tercer trabajo, titulado "**A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field**", donde abandona la interpretación mecanicista de sus trabajos previos y otorga una realidad a las cantidades vectoriales que definen el campo. En particular, introduce la "corriente de desplazamiento" mediante argumentos puramente eléctricos, mientras que en su modelo previo surge de consideraciones sobre la elasticidad del medio:

"En un dieléctrico bajo la acción de fuerza electromotriz, podemos concebir que la electricidad

en cada molécula está tan desplazada que un lado resulta eléctricamente positivo y el otro negativo, pero que la electricidad permanece enteramente conectada con la molécula, y no pasa de una molécula a otra. El efecto de esta acción sobre la masa dieléctrica total es producir un desplazamiento general de la electricidad en una cierta dirección. Este desplazamiento no constituye una corriente, porque cuando ha llegado a un cierto valor permanece constante, pero es el comienzo de una corriente, y sus variaciones [en el tiempo] constituyen corrientes en la dirección positiva o negativa de acuerdo a que el desplazamiento esté aumentando o disminuyendo."

Llega así a veinte ecuaciones sobre veinte cantidades variables:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ ,  $\rho$  y  $\Phi$ . (en notación vectorial moderna). Maxwell afirma que los fenómenos magnéticos se deben a la "corriente total", que es la suma de la corriente de conducción ( $\mathbf{J}$ ) y la "corriente de desplazamiento"  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ .

En este trabajo Maxwell ya va más allá de su afirmación de que la luz y las ondas electromagnéticas se propagan por el mismo medio. Ahora dice:

"... la luz misma (incluyendo el calor radiante y otras radiaciones) es una perturbación electromagnética en la forma de ondas que se propagan a través del campo electromagnético..."

El trabajo de 1864 no difiere conceptualmente del "Treatise" de 1873, donde Maxwell realiza una presentación enciclopédica del electromagnetismo que se conocía en la época, a la luz de su propia teoría. Esta obra, por su pretensión de abarcar todos los fenómenos electromagnéticos entonces conocidos desde el modelo de campo, y utilizando la nomenclatura matemática del cálculo vectorial pero sin la ayuda de la terminología simbólica introducida más tarde por **Oliver Heaviside**, **Heinrich Hertz** y otros, es notablemente difícil y, de igual forma que los trabajos previos de Maxwell, no causó mucho impacto. Los físicos británicos, liderados por lord Kelvin, mantenían su inclinación hacia una interpretación mecánica de los fenómenos físicos y los físicos continentales, con pocas excepciones, adherían a las teorías matemáticas basadas en la acción a distancia.

Maxwell entiende claramente que estas dos descripciones son complementarias, y aunque usa profusamente en el Treatise las herramientas matemáticas y los desarrollos previos de los "matemáticos continentales", siempre se apoya en la intuición física de Faraday de las líneas de fuerza que ahora constituyen líneas de campo. El rol del término de desplazamiento como fuente de campo magnético es subrayado:

"...Tenemos muy poca evidencia experimental relacionada a la acción electromagnética directa de corrientes debidas a la variación [temporal] del desplazamiento eléctrico en dieléctricos, pero la extrema dificultad de reconciliar las leyes del electromagnetismo con la existencia de corrientes eléctricas que no son cerradas es una razón entre muchas por la cual debemos admitir la existencia de corrientes transitorias debidas a la variación del desplazamiento. Su importancia se verá cuando lleguemos a la teoría electromagnética de la luz."

"...Una de las principales peculiaridades de este tratado es la doctrina que afirma que la verdadera corriente eléctrica, de la que dependen los fenómenos electromagnéticos, no es igual a la corriente de conducción, sino que debe tenerse en cuenta además la variación temporal del desplazamiento eléctrico para estimar el movimiento total de electricidad..."

Maxwell es consciente de la consecuencia de admitir la existencia del término de desplazamiento. Como veremos en el Capítulo 8, este término agregado a la ley de Ampère, lleva a predecir que la luz es un fenómeno electromagnético, de forma que el Capítulo XX de su Treatise se titula "Teoría electromagnética de la luz". Sin embargo, el desplazamiento sigue siendo introducido a partir de un medio físico formado por moléculas polarizables, un dieléctrico. Maxwell encuentra que la velocidad de propagación de "ondulaciones electromagnéticas" en el aire o en los "espacios planetarios" coincide con los valores medidos por Fizeau, Foucault y otros.

Maxwell murió en 1879. Aunque su trabajo en la física era ampliamente reconocido, su teoría electromagnética tuvo poca repercusión, quizás por la dificultad matemática de su tratamiento, el

enciclopedismo apabullante del Treatise y la poca fe de los físicos de su época en un modelo no mecanicista.



Algunos pocos autores, como **Oliver Lodge**, **George Francis Fitzgerald** y **Oliver Heaviside**, en Gran Bretaña, y **Hermann von Helmholtz** en Alemania trabajaron siguiendo las líneas del Treatise. En 1887-1888, **Heinrich Hertz** (foto), alumno de Helmholtz, publicó trabajos donde describe la producción y detección de ondas electromagnéticas y la medición de su velocidad de propagación que coincide con la predicción de Maxwell. Estos descubrimientos, junto con la simplificación de la teoría debido a la notación operacional vectorial introducida por Hertz y Heaviside, llevaron a la aceptación universal de la teoría de Maxwell.

Los trabajos de Maxwell han ejercido una inmensa influencia en el desarrollo de la teoría física y en la invención de aparatos que han forjado la industria moderna.

### Corriente de desplazamiento

Podemos entender la necesidad de agregar un término extra a la corriente de conducción como fuente del campo magnético a partir de la ecuación de continuidad, que es la expresión matemática del principio de conservación de la carga.

De acuerdo a la ley de Ampère:  $\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{j} = 0$  siempre, mientras que la ecuación de continuidad:  $\nabla \bullet \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0$  afirma que hay casos donde la divergencia del vector densidad de corriente no se anula.

La ecuación de continuidad es la representación matemática del principio de conservación de la carga eléctrica. La ley de Ampère surge como generalización se una serie de experiencias realizadas con campos magnéticos creados por corrientes estacionarias. Parece entonces que la ecuación de continuidad debe ser de una jerarquía superior. Partimos de ella y usamos la ley de

Gauss:  $\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$  con lo que tenemos:  $\nabla \bullet \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bullet \mathbf{D} = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \left[ \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0$

donde hemos invertido el orden de derivación en el segundo sumando. Se ve entonces que es el campo vectorial entre corchetes el que presenta una divergencia nula, en lugar del campo  $\mathbf{j}$ .

Maxwell propuso modificar la ecuación de la ley de Ampère para llegar a este resultado, sumando el término que aparece dentro del corchete:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

Ahora, cuando se toma el rotor de esta nueva ecuación, el resultado es compatible con la ecuación de continuidad. El nuevo término tiene dimensiones de densidad de corriente, y Maxwell lo llamó **densidad de corriente de desplazamiento**.

Por otra parte esta ecuación hace que la relación entre los campos sea más simétrica: debido a la ley de Faraday, hemos visto que un campo magnético variable en el tiempo genera (o es fuente) de un campo eléctrico. El término introducido por Maxwell resulta en que un campo eléctrico variable en el tiempo produce (es fuente) de un campo magnético. Los roles de los campos son así simétricos.

### Conservación de la Energía. Teorema de Poynting

En el caso de un campo electrostático hemos encontrado que se puede asociar una densidad de energía eléctrica:  $u_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$  mientras que en el caso de un campo magnetostático se asocia una densidad de energía magnética:  $u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ .

En general, como los campos eléctrico y magnético están ligados entre sí por las ecuaciones de Maxwell, es fácil ver que estas energías tienen que estar relacionadas. Para analizar el balance de energía en un campo electromagnético general, donde puede haber fuentes variables en el tiempo, analizamos una región acotada del espacio donde existen cargas y corrientes. Partimos de las ecuaciones de Maxwell donde aparecen los rotores de los campos, y multiplicamos escalarmente por el otro campo:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \bullet \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathbf{E} \bullet \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \bullet \mathbf{j}\end{aligned}$$

Ahora restamos miembro a miembro:  $\mathbf{E} \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \bullet \mathbf{j}$

Pero (Capítulo 1):  $\mathbf{H} \bullet (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \bullet (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$

y entonces queda:  $\nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} = 0$

Integramos esta ecuación sobre el volumen  $V$  de un recinto que contenga a la región del espacio que contiene las fuentes de campo:

$$\int_V \nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV + \int_V \left( \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV + \int_V \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} dV = 0$$

Aplicamos ahora el teorema de la divergencia a la primera integral:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} dV = - \int_V \left( \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

La segunda integral del primer miembro representa la pérdida de energía electromagnética dentro de la región  $V$  por **efecto Joule** y tiene dimensiones de potencia. Por lo tanto las otras cantidades también deben tener dimensiones de potencia.

Para comprender mejor el significado de esta ecuación, analizamos el caso en que  $S \rightarrow \infty$ . Como los campos provienen de una distribución acotada de fuentes, tanto  $E$  como  $H$  tienden a cero como  $1/r^2$  cuando la superficie se hace infinita. La superficie misma tiende a infinito como  $r^2$ . Por lo tanto, en el límite la integral de superficie se anula y nos queda:

$$-\int_{\text{todo el espacio}} \left( \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} dV$$

Cuando el recinto de integración es todo el espacio, no existe nada fuera de él. Todo lo existente es el campo electromagnético y el medio que disipa calor por efecto Joule. Como sabemos, el efecto Joule implica que el medio está tomando energía.

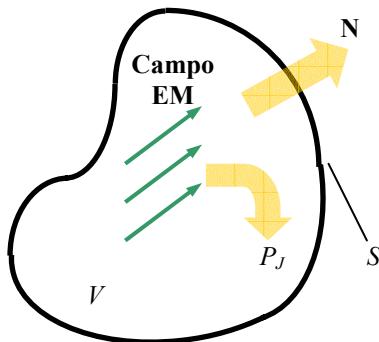
Si aceptamos el **principio de la conservación de la energía**, el medio sólo puede recibir energía del otro sistema existente (que la pierde) y este otro sistema es el campo electromagnético. Entonces esta es una ecuación de balance de energía donde el segundo miembro es la potencia disipada por efecto Joule y el primer miembro es entonces la potencia perdida por el campo electromagnético (de ahí el signo menos).

$$-\frac{dU_{em}}{dt} = \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV \quad \Rightarrow \quad \frac{dU_{em}}{dt} = \int_{\text{todo el espacio}} \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

Volvamos ahora a la ecuación cuando el recinto de integración es finito:

$$\left. -\frac{dU_{em}}{dt} \right|_V = - \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

El primer miembro sigue siendo la variación (cambiada de signo) de la energía electromagnética dentro del recinto de integración  $V$ . El primer sumando del segundo miembro sigue siendo la potencia disipada por efecto Joule dentro de  $V$ . El segundo sumando (la integral de superficie) es entonces potencia que fluye a través de la superficie  $S$ , frontera de  $V$  y que también contribuye a la disminución de la energía electromagnética dentro de  $V$ .



Por lo tanto, el balance de energía indica que la energía electromagnética puede variar dentro de un recinto del espacio porque hay transformación irreversible de energía electromagnética en calor (efecto Joule) o porque hay un flujo neto de energía electromagnética a través de la superficie frontera del recinto en cuestión. Este flujo de potencia electromagnética a través de una superficie está dada por el flujo del vector:  $\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  llamado **vector de Poynting**.

La expresión del balance de energía:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV = - \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

se conoce como **teorema de Poynting**<sup>5</sup>.

La ecuación hallada para el balance de energía es una ecuación integral. Podemos llevarla a una ecuación diferencial equivalente reconvirtiendo a una integral de volumen a la integral del flujo del vector de Poynting y reagrupando en una única integral de volumen:

$$\int_V \left[ \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] dV = 0$$

Como el recinto de integración es arbitrario, debe anularse el integrando, y tenemos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0$$

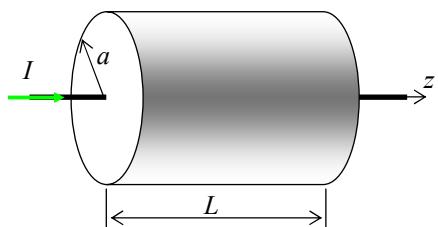
que podemos escribir:

$$\nabla \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Esta es una especie de ecuación de continuidad de la energía, y nos dice que las fuentes del vector de Poynting (que representa la densidad de flujo de la potencia electromagnética) son la densidad de potencia de pérdidas por efecto Joule y las variaciones en el tiempo de la densidad de energía electromagnética, cambiadas de signo, punto a punto.

<sup>5</sup> Debemos reconocer que esta presentación no se puede denominar “teorema” desde el punto de vista matemático, sino que es una interpretación física (como un balance de energía) de una consecuencia matemática de las ecuaciones de Maxwell.

**Ejemplo 5-8:** Analizar el balance de energía en un resistor cilíndrico de radio  $a$  y longitud  $L$  construido con un material de conductividad  $\sigma$  por el que circula una corriente alterna de valor eficaz  $I_{ef}$  y de frecuencia muy baja.



Desde el punto de vista circuital, la potencia que se disipa por efecto Joule en el resistor es:  $P_J = I_{ef}^2 R$  que equivale

a:  $P_J = \int_V \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \rangle dV$  donde la integración se realiza sobre el volumen del resistor. Como:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow P_J = \int_V \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} dV = \langle I^2 \rangle \int_V \frac{dV}{\sigma S^2} = I_{ef}^2 \int_L \frac{dl}{\sigma S} = I_{ef}^2 \frac{L}{\sigma S} = I_{ef}^2 R \quad \text{y obtenemos el mismo resultado que desde el punto de vista circuital.}$$

Por otra parte, podemos calcular el flujo del vector de Poynting sobre la superficie del resistor. El campo eléctrico es simplemente:  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{I}{\sigma S} \hat{\mathbf{z}}$  constante dentro del resistor. El campo magnético es:  $\mathbf{H} = \frac{I\rho}{2S} \hat{\phi}$  dentro del resistor. Entonces:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{I}{\sigma S} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{I\rho}{2S} \hat{\phi} = -\frac{I^2 \rho}{2\sigma S^2} \hat{\rho}$$

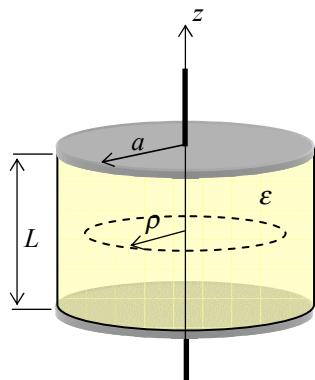
El vector de Poynting es radial y hacia adentro. El flujo sobre la superficie del resistor se reduce entonces al flujo sobre la superficie lateral, que vale:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} dS = -\frac{I^2 a}{2\sigma S^2} 2\pi a L = -I^2 \frac{L}{\sigma S} = -I^2 R \quad \text{y el flujo medio es: } -I_{ef}^2 R$$

nuevamente. El signo menos indica que la energía fluye **hacia dentro** del resistor.

Los términos de variación de los campos en el tiempo tienden a cero porque estamos trabajando a frecuencia muy baja (caso quasi-estacionario). Por lo tanto, el teorema de Poynting lleva al resultado conocido, que el flujo de energía que entra al resistor se convierte totalmente en energía disipada por efecto Joule dentro del mismo.

**Ejemplo 5-9:** Analizar el balance de energía en un capacitor plano, de placas circulares de radio  $a$  y altura  $L$  construido con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , cuando circula una corriente dependiente del tiempo.



Sean  $I(t)$  la corriente que circula por el capacitor y  $\Delta V(t)$  la tensión entre sus terminales.

**Desde el punto de vista circuital**, podemos representar al capacitor mediante la ecuación:

$$I = C \frac{d \Delta V}{dt} = \frac{\pi \epsilon a^2}{L} \frac{d \Delta V}{dt}$$

La potencia que entrega la fuente es:

$$P = -\Delta V I = -\frac{\pi \epsilon a^2}{2L} \frac{d(\Delta V)^2}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C \Delta V^2 \right)$$

donde el signo menos indica que es potencia que la fuente entrega al capacitor.

**Desde el punto de vista de los campos**, despreciando los efectos de borde y en la aproximación quasi-estática<sup>6</sup>, los campos creados dentro del capacitor son:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V}{L} \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{H} = \frac{i_\rho}{2\pi\rho} \hat{\phi} = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{\partial D}{\partial t} \pi \rho^2 \hat{\phi} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{L} \frac{d \Delta V}{dt} \rho \hat{\phi} = \frac{\epsilon \rho}{2L} \frac{d \Delta V}{dt} \hat{\phi} = \frac{I \rho}{2\pi a^4} \hat{\phi}$$

Estos campos surgen de aplicar las leyes quasi-estáticas de Gauss y Maxwell-Ampère. El campo magnético está creado por la "corriente de desplazamiento".  $i_\rho$  es la corriente ence-

<sup>6</sup> Ver el siguiente ejemplo.

rrada por una circunferencia de radio  $\rho$  centrada en el eje del capacitor. No hay en este problema potencia disipada por efecto Joule. El teorema de Poynting resulta entonces:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$

Calculamos ahora el vector de Poynting:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\Delta V}{L} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{I \rho}{2\pi a^2} \hat{\phi} = -\frac{\Delta V I \rho}{2\pi a^2 L} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{\Delta V I}{2\pi a^2 L} \oint_S \rho dS$$

La superficie  $S$  es la del cilindro que limita al capacitor ( $\rho = a$ ). Entonces:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{\Delta V I a}{2\pi a^2 L} 2\pi a L = -\Delta V I$$

que es la potencia suministrada por la fuente. Como antes, el signo menos indica que la potencia viaja hacia dentro del capacitor.

Falta determinar la integral que define la variación de energía electromagnética dentro del capacitor. Tenemos para el campo eléctrico:

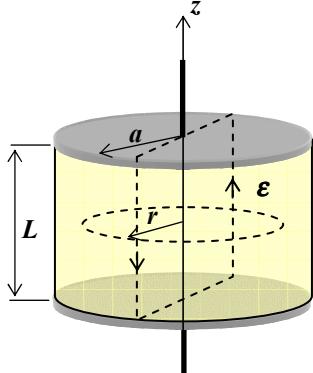
$$-\int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV = -\frac{\epsilon}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} E^2 dV = -\frac{\epsilon}{2} \int_V \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta V}{L} \right)^2 dV = -\frac{\epsilon v}{2L^2} \frac{d \Delta V^2}{dt} = -\frac{\epsilon \pi a^2}{2L} \frac{d \Delta V^2}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C \Delta V^2 \right)$$

donde la integral se extiende al volumen del capacitor. Pero este término es el necesario y suficiente para completar la igualdad de balance de energía. Esto significa que el término asociado al campo magnético es superfluo. Si lo calculamos tenemos:

$$-\int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV = -\frac{\mu \epsilon}{16} C \frac{d}{dt} \left( \frac{d \Delta V}{dt} \right)^2$$

que no es cero. Entonces no se cumple el teorema de Poynting, y la razón del no cumplimiento es que no hemos usado las expresiones correctas de los campos, ya que, por ejemplo, el campo eléctrico que usamos es el cuasi-estático. Vemos en el siguiente ejemplo qué ocurre si tenemos en cuenta las relaciones entre los campos dinámicos.

**Ejemplo 5-10:** Analizar los campos dentro del capacitor plano del ejemplo previo, suponiendo que la tensión aplicada es armónica.



En el ejemplo previo usamos la ley de Maxwell-Ampère para hallar el campo magnético dentro del capacitor. En ese procedimiento hemos considerado que un campo eléctrico variable en el tiempo crea un campo magnético asociado (a través de la “corriente de desplazamiento”). Sin embargo, para el cálculo del campo eléctrico usamos la ley de Gauss, que nos da el campo cuasi-estático, en lugar de la ley de Faraday, según la cual la presencia de un campo magnético variable en el tiempo da origen a un campo eléctrico.

Recalculamos los campos partiendo de sus expresiones cuasiestáticas, y agregamos en cada paso las contribuciones que surgen de las relaciones entre los campos dinámicos.

Los campos cuasiestáticos son:  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta V(t)}{L} \hat{\mathbf{z}}$        $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t) = 0$       con       $\Delta V(t) = V_0 e^{i\omega t}$

en notación fasorial. El campo eléctrico variable en el tiempo crea un campo magnético por la ley de Maxwell-Ampère, mientras que el campo magnético variable en el tiempo crea un campo eléctrico por la ley de Faraday. Operando en cilíndricas:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho H_{1_\phi})}{\partial \rho} - \frac{\partial H_{1_\phi}}{\partial \phi} \right) = i\omega \frac{\epsilon \Delta V(t)}{L} \Rightarrow H_{1_\phi} = i\omega \frac{\epsilon \rho \Delta V(t)}{2L}$$

donde hemos supuesto que no existe componente radial del campo magnético. Obsérvese que este es el mismo resultado del segundo término del campo magnético en el ejemplo previo. Si repetimos esta operación para obtener las siguientes correcciones, nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_{2z}}{\partial \rho} = -\omega^2 \frac{\mu \epsilon \rho \Delta V(t)}{2L} \Rightarrow E_{2z} = -\omega^2 \frac{\mu \epsilon \rho^2 \Delta V(t)}{4L}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_3 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}_3(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_3 = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_{3\phi})}{\partial \rho} = -i\omega^3 \frac{\mu \epsilon^2 \rho^2 \Delta V(t)}{4L} \Rightarrow H_{3\phi} = -i\omega^3 \frac{\mu \epsilon^2 \rho^3 \Delta V(t)}{16L}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_4 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_{2z}}{\partial \rho} = \omega^4 \frac{\mu^2 \epsilon^2 \rho^3 \Delta V(t)}{16L} \Rightarrow E_{2z} = \omega^4 \frac{\mu^2 \epsilon^2 \rho^4 \Delta V(t)}{64L}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_4 = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{H}_4(\mathbf{r}, t) = 0$$

Entonces, hasta el momento tenemos, sumando las sucesivas contribuciones:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_4(\mathbf{r}, t) + \dots = \left(1 - \frac{\omega^2 \mu \epsilon \rho^2}{4} + \omega^4 \frac{\mu^2 \epsilon^2 \rho^4}{64} + \dots\right) \frac{\Delta V(t)}{L} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_3(\mathbf{r}, t) + \dots = i\omega \epsilon \left(1 - \omega^2 \frac{\mu \epsilon \rho^2}{8} + \dots\right) \frac{\rho \Delta V(t)}{2L} \hat{\phi}$$

Si llamamos  $\zeta = k\rho$ , con  $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega / c$ , podemos escribir:

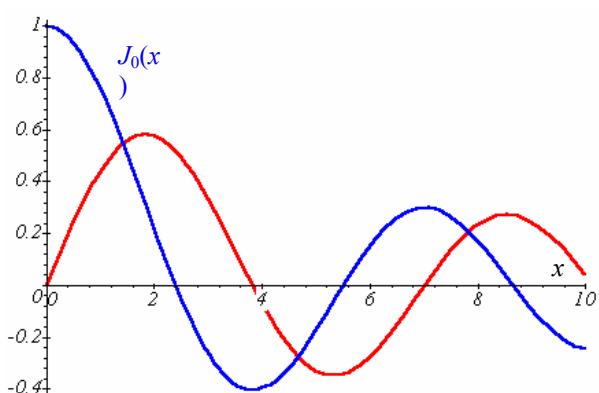
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left(1 - \frac{\zeta^2}{4} + \frac{\zeta^4}{64} + \dots\right) \frac{\Delta V(t)}{L} \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = i \frac{\zeta}{2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{8} + \dots\right) \frac{\Delta V(t)}{c L} \hat{\phi}$$

Pero las series que aparecen entre paréntesis son las representaciones en serie de potencias de las primeras funciones de Bessel:

$$J_n(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k!(n+k)!} \Rightarrow \begin{cases} J_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta^2/4)^k}{[k!]^2} = 1 - \frac{\zeta^2}{4} + \frac{\zeta^4}{64} + \dots \\ J_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta^2/4)^k}{k!(k+1)!} = \frac{\zeta}{2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{8} + \dots\right) \end{cases}$$

de manera que podemos escribir:

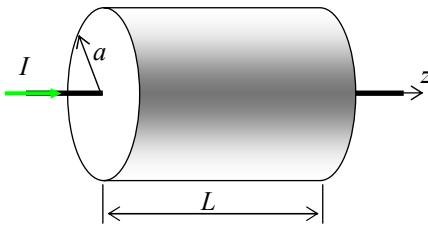
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta V(t)}{L} J_0(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \rho) \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{i \Delta V(t)}{c L} J_1(\omega \sqrt{\mu \epsilon} \rho) \hat{\phi}$$



Es posible demostrar que estos campos satisfacen el teorema de Poynting. Es de interés analizar el argumento (adimensional) de las funciones de Bessel  $\omega \sqrt{\mu \epsilon} \rho$  que involucra la frecuencia  $\omega$  de la tensión aplicada al capacitor y (como veremos en el siguiente capítulo) la velocidad de la luz en el medio que llena al capacitor.

Por otra parte, se ve que la distribución de campos no es uniforme dentro del capacitor, debido al comportamiento oscilatorio de las funciones de Bessel (figura), y los campos podrán cambiar de signo (o sea, de sentido) al aumentar la distancia del punto de observación al eje del capacitor, siempre que el radio  $a$  de las placas sea mayor que los primeros ceros de las funciones de Bessel involucradas.

**Ejemplo 5-11:** Analizar la distribución de corriente sobre el resistor del **Ejemplo 5-8** cuando la tensión aplicada es alterna de frecuencia cualquiera.



Utilizamos el mismo procedimiento del problema precedente, a partir de los campos cuasi-estáticos:

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{I(t)R}{d}\hat{\mathbf{z}} = \frac{I(t)}{\sigma A}\hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{H}^{(0)} = \frac{I(t)\rho}{2A}\hat{\phi}$$

$$\text{con } I(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad A = \pi a^2.$$

Luego:  $\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -i\omega\mu\mathbf{H}^{(0)} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho^{(1)} & \rho E_\phi^{(1)} & E_z^{(1)} \end{vmatrix} = -i\omega\mu H^{(0)}\hat{\phi}$

Sólo queda la componente  $\phi$  del rotor:  $\left( \frac{\partial E_\rho^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \rho} \right) = -i\omega\mu H^{(0)}$

Pero la componente radial del campo no existe (dado que implicaría un flujo de corriente radial en el resistor) y tenemos:

$$\frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial E_z^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{i\omega\mu I(t)\rho}{2A} \Rightarrow \mathbf{E}^{(1)} = \frac{i\omega\mu I(t)\rho^2}{4A}\hat{\mathbf{z}}$$

Esta ecuación es válida no sólo para  $\mathbf{E}^{(1)}$ , sino también para cualquier orden, siempre que  $H$  mantenga su dirección según  $\phi$ :  $\frac{\partial E_z^{(n)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H^{(n-1)}$ . Para el campo magnético:

$$\mathbf{H}^{(1)} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}^{(0)} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\cdot}{\rho}, \rho & \frac{\cdot}{\phi}, \phi & \frac{\cdot}{z}, z \\ H_\rho^{(1)} & \rho H_\phi^{(1)} & H_z^{(1)} \end{vmatrix} = (\sigma + i\omega\epsilon)E^{(0)}\hat{\mathbf{z}}$$

Sólo queda la componente  $z$  del rotor:  $\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho H_\phi^{(1)})}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho^{(1)}}{\partial \phi} \right) = (\sigma + i\omega\epsilon)E^{(0)}$

y nuevamente no puede existir una componente radial de  $H$ , que implicaría una corriente según  $\phi$  o según  $z$ :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho H_\phi^{(1)})}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho^{(1)}}{\partial \phi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^{(1)})}{\partial \rho} = (\sigma + i\omega\epsilon)E^{(0)} = (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{I(t)}{\sigma A}$$

de donde:  $\mathbf{H}^{(1)} = (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{I(t)\rho}{2\sigma A} \hat{\phi}$

Obsérvese que el primer sumando de  $\mathbf{H}^{(1)}$  es  $\mathbf{H}^{(0)}$ , que es el campo magnético cuasi-estático. Luego:  $\mathbf{H}^{(1)} = i\omega\epsilon \frac{I(t)\rho}{2\sigma A} \hat{\phi}$

Podemos escribir en general que:  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^{(n)})}{\partial \rho} = (\sigma + i\omega\epsilon)E^{(n-1)}$

Continuamos:

$$\frac{\partial E_z^{(2)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H^{(1)} = i\omega\mu i\omega\epsilon \frac{I(t)\rho}{2\sigma A} \Rightarrow \mathbf{E}^{(2)} = -\omega^2\mu\epsilon \frac{I(t)\rho^2}{4\sigma A}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi^{(2)})}{\partial \rho} = (\sigma + i\omega\epsilon)E^{(1)} = (\sigma + i\omega\epsilon) \frac{i\omega\mu I(t)\rho^2}{4A} \Rightarrow \mathbf{H}^{(2)} = -(\omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{I(t)\rho^3}{16A} \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial E_z^{(3)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H^{(2)} = -i\omega\mu(\omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{I(t)\rho^3}{16A} \Rightarrow \mathbf{E}^{(3)} = -i\omega\mu(\omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{I(t)\rho^4}{64A}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_{\phi}^{(3)})}{\partial \rho} = (\sigma + i\omega\epsilon) E^{(2)} = -(\sigma + i\omega\epsilon)\omega^2 \mu\epsilon \frac{I(t)\rho^2}{4\sigma A} \Rightarrow \mathbf{H}^{(3)} = -(\sigma + i\omega\epsilon)\omega^2 \mu\epsilon \frac{I(t)\rho^3}{16\sigma A} \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial E_z^{(4)}}{\partial \rho} = i\omega\mu H^{(3)} = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\omega^2 \mu\epsilon \frac{I(t)\rho^3}{16\sigma A} \Rightarrow \mathbf{E}^{(4)} = \omega^2 \mu\epsilon(\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{I(t)\rho^4}{64\sigma A}$$

Sumamos los resultados parciales para obtener el campo eléctrico total:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(3)} + \mathbf{E}^{(4)} + \dots = \left[ \frac{I(t)}{\sigma A} + \frac{i\omega\mu I(t)\rho^2}{4A} - \omega^2 \mu\epsilon \frac{I(t)\rho^2}{4\sigma A} \right. \\ &\quad \left. - (\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{i\omega\mu I(t)\rho^4}{64A} + \omega^2 \mu\epsilon(\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{I(t)\rho^4}{64\sigma A} + \dots \right] \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{I(t)}{\sigma A} \left[ 1 - (\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma) \frac{\rho^2}{4} + (\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma)^2 \frac{\rho^4}{64} + \dots \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

En general, podemos escribir para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{I(t)}{\sigma A} \hat{\mathbf{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi^2/4)^n}{(n!)^2} = \frac{I(t)}{\sigma A} J_0(\xi) \hat{\mathbf{z}} \quad \text{con} \quad \xi = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - i\omega\mu\sigma} \rho$$

que es la misma expresión hallada en el Ejemplo previo, salvo que ahora el argumento de las funciones de Bessel es **complejo y dependiente de la frecuencia**. La variación de las funciones de Bessel con el radio implica que la distribución de corriente **no es uniforme** sobre la sección del cilindro. Veremos más adelante que, en general, existe una concentración de corriente en la periferia del conductor. Esto implica que la sección eficaz para la circulación de corriente es menor que la sección geométrica y entonces la resistencia del resistor a corriente alterna depende de la frecuencia y es mayor que a corriente continua. Este fenómeno se conoce como **efecto pelicular**.

---

## Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial

Para campos armónicos, las ecuaciones de Maxwell resultan:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \bullet \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0 \\ &\quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0 \\ &\quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - i\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

## Teorema de Poynting en notación fasorial

En muchas situaciones, el campo electromagnético varía en forma armónica, o se puede representar como la superposición de funciones armónicas. En tal caso podemos expresar en forma sencilla el valor medio temporal de las magnitudes involucradas con el balance de energía que describe el teorema de Poynting.

En el Capítulo 1 se demuestra que, para dos funciones armónicas de igual frecuencia que se representan por fasores:

$$f(t) = \operatorname{Re}\{f_0 e^{i\omega t}\} \text{ y } g(t) = \operatorname{Re}\{g_0 e^{i\omega t}\}$$

el promedio temporal es:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0^* g_0\}$$

con  $T = 2\pi/\omega$ .

Consideremos un campo armónico, descripto por los fasores eléctrico y magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

y un medio donde se cumplan las relaciones materiales:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \epsilon \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

Si  $\epsilon$  y  $\mu$  son **reales**,

$$\left\langle \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle = \epsilon \left\langle \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\epsilon}{T} \int_0^T E(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) dt = -\frac{\omega \epsilon}{T} \int_0^T E(\mathbf{r}) \cos(\omega t) E(\mathbf{r}) \sin(\omega t) dt = 0$$

y análogamente:  $\left\langle \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \mu \left\langle \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right\rangle = 0$

Si  $\epsilon$  y  $\mu$  **no son reales**<sup>7</sup>:  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$      $\mu = \mu' - i\mu''$

$$\left\langle \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-i\omega \mathbf{E} \bullet \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-i\omega(\epsilon' - i\epsilon'')|E|^2) = \frac{1}{2} \omega \epsilon'' |E|^2 \quad \left\langle \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \omega \mu'' |H|^2$$

Los otros términos que aparecen en el teorema de Poynting se pueden escribir, en promedio:

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\} \quad \langle \mathbf{j} \bullet \mathbf{E} \rangle = \sigma \left\langle \mathbf{E}^2 \right\rangle = \frac{\sigma}{2} |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2$$

y entonces el teorema de Poynting queda, en notación fasorial:

$$\oint_S \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r})\} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \sigma |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 dV = -\omega \int_V (\epsilon'' |\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})|^2 + \mu'' |\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})|^2) dV$$

<sup>7</sup> Esta situación ocurre en medios con pérdidas, como veremos en el Capítulo 6.

**Ejemplo 5-12:** Analizar el balance de energía en el resistor cilíndrico del **Ejemplo 5-8**, por el que ahora circula una corriente alterna de frecuencia  $f$  y valor pico  $I$ .

Desde el punto de vista circuital, la potencia media que se disipa por efecto Joule en el resistor es:  $\langle P_J \rangle = \langle I^2 \rangle R$  que equivale a:  $\langle P_J \rangle = \int_V \langle \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} \rangle dV$  donde la integración se realiza

sobre el volumen del resistor. Como:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \Rightarrow \langle P_J \rangle = \int_V \frac{\langle j^2 \rangle}{\sigma} dV = \langle I^2 \rangle \int_V \frac{dV}{\sigma S^2} = \langle I^2 \rangle \int_L \frac{dl}{\sigma S} = \langle I^2 \rangle \frac{L}{\sigma S} = \langle I^2 \rangle R = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

ya que el valor medio del cuadrado de la corriente es el cuadrado de la corriente eficaz.

Como en el Ejemplo 5-8, calculamos el flujo del vector de Poynting sobre la superficie del resistor. Vamos a usar la aproximación quasi-estática. El campo eléctrico quasi-estático es simplemente:  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}(t)}{\sigma} = \frac{I(t)}{\sigma S} \hat{\mathbf{z}}$  constante dentro del resistor. El campo magnético quasi-estático es:  $\mathbf{H} = \frac{I(t)\rho}{2S} \hat{\phi}$  dentro del resistor. Entonces, usando la notación fasorial:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \Re e \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \Re e \left\{ \frac{I_0 e^{i\omega t}}{\sigma S} \hat{\mathbf{z}} \times \frac{I_0 e^{-i\omega t} \rho}{2S} \hat{\phi} \right\} = -\frac{I_0^2 \rho}{4\sigma S^2} \hat{\rho}$$

El vector de Poynting es radial y hacia adentro. El flujo sobre la superficie del resistor se reduce entonces al flujo sobre la superficie lateral, que vale:

$$\oint_S \langle \mathbf{N} \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{I_0^2 a}{4\sigma S^2} 2\pi a L = -I_0^2 \frac{L}{2\sigma S} = -\frac{1}{2} I_0^2 R$$

nuevamente. El signo menos indica que la energía fluye **hacia dentro** del resistor.

Los términos de variación de los campos en el tiempo son nulos porque estamos trabajando con parámetros  $\epsilon, \mu$  reales (ver la sección precedente). Por lo tanto, como en corriente continua, el teorema de Poynting lleva a que el flujo de energía que entra al resistor se convierte totalmente en energía disipada por efecto Joule dentro del mismo.

---

## Teoría de circuitos

En campos de baja frecuencia, donde es posible usar la **aproximación cuasi-estática**, se puede describir el comportamiento del sistema mediante la teoría de circuitos.

Las ecuaciones de Maxwell para **campos cuasi-estáticos** se escriben:

$$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \approx \rho(\mathbf{r}, t) \quad \nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

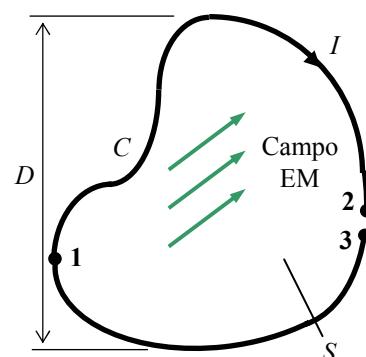
Los campos se pueden calcular a partir de **potenciales** y éstos a partir de las distribuciones de carga (estática) y de corrientes (estacionarias):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\approx -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) & \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &\approx \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \\ \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{R} dV' \end{aligned}$$

Los potenciales cumplen ecuaciones diferenciales de **Poisson** y son independientes entre sí. Las soluciones que se muestran son soluciones particulares de la ecuación inhomogénea. La solución general es la suma de esta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (ecuación de **Laplace**).

La mayoría de los modelos estáticos de campos se basa en técnicas de resolución de estas ecuaciones diferenciales.

## Circuitos de constantes concentradas



A partir de las ecuaciones de Maxwell es posible establecer las propiedades de los elementos concentrados de circuito.

Para ello consideramos primero un circuito formado por un material conductor de conductividad  $\sigma$ , supuestamente constante en todo el rango de frecuencia de interés. Suponemos que las dimensiones del circuito cumplen la condición cuasi-estática:  $D \ll \lambda_{\min}$

Este circuito se halla bajo la acción de un campo electromagnético variable en el tiempo, de modo que dentro del conductor se observa un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , que da origen a la circulación de una corriente  $I$ .

**Como estamos en un caso cuasi-estacionario, la corriente  $I$  es la misma a lo largo de todo el circuito.**

Si  $\mathbf{j}$  es el vector densidad de corriente, la ley de Ohm permite escribir:  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$ . Esta ecuación es válida para puntos interiores al conductor, como los tramos 1-2 y 3-1 en el circuito de la figura, pero también existe campo en el tramo 2-3, donde no hay conductor, creado por la distribución de cargas en el circuito, fundamentalmente en los extremos del conductor 2 y 3.

La circulación de la corriente variable en el tiempo generará un campo magnético también variable en el tiempo, que creará un campo eléctrico "inducido" sobre el conductor.

Por lo tanto, el campo en el interior del conductor se puede expresar como la suma de un campo "aplicado" y uno "inducido":  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$

El campo "inducido" se puede expresar en función de los potenciales electrodinámicos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - (\nabla \Phi - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \mathbf{j} / \sigma$$

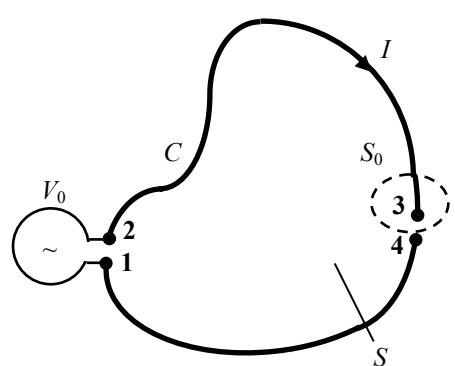
La circulación del campo a lo largo de todo el circuito es entonces:

$$\oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

En un circuito normal, el primer término es la **fem o "voltaje" aplicado**, el segundo término es un término **capacitivo**, el tercero un término **inductivo** y el cuarto el término **resistivo**. Analizamos cada término por separado.

### Voltaje aplicado

**El voltaje aplicado es la integral del campo aplicado a lo largo de todo el circuito:**



$$V_0 = \text{fem} = \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$$

En el caso en que este voltaje aplicado se deba a la presencia de un campo exterior, el efecto está **distribuido** a lo largo de todo el circuito, pero existen también fuentes de fem **localizadas**, como generadores de señales, que concentran la fem en determinado sector del circuito. En ese caso la integral se extiende solamente al tramo del circuito identificado con la fuente de fem, como se simboliza en la figura, aplicada entre los puntos **1** y **2**:

$$V_0 = \text{fem} = \oint_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$$

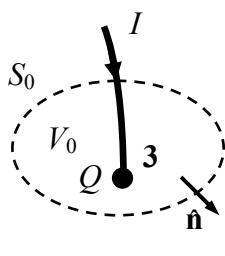
### Término capacitivo

El segundo término de la circulación corresponde a la circulación del gradiente del potencial escalar electrodinámico a lo largo de todo el circuito, pero este potencial está creado por la presencia de cargas de densidad variable en el tiempo. Si el conductor era neutro antes de que se estableciera la corriente, lo que es lo habitual, seguirá siendo neutro cuando circule una corriente quasi-estacionaria, ya que  $\partial\rho/\partial t \approx 0$ . Por lo tanto, el cuerpo del conductor no aporta contribuciones al potencial escalar. Sólo en las interrupciones del circuito, donde puede acumularse carga superficial, como los puntos **3** y **4** en la figura. Como el conductor debe ser globalmente neutro, se ve que la acumulación de carga en cada extremo de la interrupción debe ser de distinto signo e igual magnitud. Se forma así un **capacitor**.

La circulación del gradiente del potencial escalar a lo largo de todo el circuito se reduce así a la **circulación sobre el tramo de la interrupción**:

$$\oint_C \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_{3 \rightarrow 4}} \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \Phi_4 - \Phi_3 = Q/C$$

donde  $Q$  es la carga (en valor absoluto) almacenada en cada extremo de la interrupción (cada "placa" del capacitor) y  $C$  es la capacidad del capacitor.



Esta ecuación se puede reescribir ligando la carga acumulada  $Q$  con la corriente  $I$  que circula por el circuito, por medio de la **ecuación de continuidad**:  $\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t = 0$  que expresa la conservación de la carga. Integraremos al recinto cerrado de superficie  $S_0$  y volumen  $V_0$ , que encierra **sólo** al extremo **3**:  $\int_{V_0} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t) dV = 0$

Se puede dividir la integral en dos integrales. La primera se reescribe usando el teorema de Gauss de la divergencia:

$$\int_{V_0} (\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial\rho/\partial t) dV = \int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{j} dV + \int_{V_0} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = \oint_{S_0} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{V_0} \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = 0$$

Como el recinto no depende del tiempo, se puede extraer la derivada temporal de la segunda integral por el teorema de Leibniz:

$$\oint_{V_0} (\nabla \bullet \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t) dV = \oint_{S_0} \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = \oint_{S_0} \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{dQ}{dt} = 0$$

donde  $Q$  es la carga encerrada en  $V_0$ . Por otra parte, el flujo de la primera integral es la corriente saliente del recinto de integración, o sea:

$$\oint_{S_0} \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = -I \Rightarrow \int_{V_0} (\nabla \bullet \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t) dV = -I + \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q = \int I dt$$

Por lo tanto:

$$\oint_C \nabla \Phi \bullet d\mathbf{l} = \int_{C_{3 \rightarrow 4}} \nabla \Phi \bullet d\mathbf{l} = \Phi_4 - \Phi_3 = Q/C = \frac{1}{C} \int I dt$$

### Término inductivo

El tercer término de la circulación corresponde a la circulación de la derivada temporal del potencial vectorial:  $\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \bullet d\mathbf{l}$ . Como el circuito no depende del tiempo como en el caso precedente

se puede sacar la derivada temporal de la integral para tener:

$$\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \bullet d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \nabla \times \mathbf{A} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde se ha usado el teorema de Stokes del análisis vectorial y  $S$  es la superficie encerrada por la curva  $C$ . Como además  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , tenemos que:

$$\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \bullet d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \nabla \times \mathbf{A} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{d\Phi_m}{dt}$$

donde  $\Phi_m$  es el **flujo magnético** que atraviesa la superficie  $S$  o que es concatenado por la curva  $C$ . Se define la **autoinductancia** del circuito como:  $L = \Phi_m/I$ , donde la corriente  $I$  es la responsable de crear el campo magnético que produce el flujo  $\Phi_m$ .

Por lo tanto podemos escribir:

$$\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \bullet d\mathbf{l} = L \frac{dI}{dt}$$

### Término resistivo

El cuarto y último término de la circulación corresponde a la circulación del vector  $\mathbf{j}/\sigma$ :  $\oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \bullet d\mathbf{l}$

Si la sección del conductor es pequeña frente a la longitud de onda mínima, es decir, si se cumple la condición quasi-estática sobre la sección transversal  $\Sigma$  del conductor (lo que es lo habitual, ya que la sección del conductor es generalmente mucho menor que las dimensiones del circuito, que por hipótesis son pequeñas frente a la longitud de onda mínima), es posible suponer que la distribución de corriente es uniforme sobre la sección y que la dirección y sentido vectorial del vector densidad de corriente coincide con el elemento de longitud del circuito. Entonces:

$\mathbf{j} \bullet d\mathbf{l} = j dl = \frac{I}{\Sigma} dl \Rightarrow \oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \bullet d\mathbf{l} = \oint_C \frac{I}{\sigma \Sigma} dl = I \oint_C \frac{dl}{\sigma \Sigma}$ . La integral (donde  $\sigma$  y  $\Sigma$  pueden ser variables a lo largo del circuito) se denomina resistencia  $R$  del circuito.

Queda así:

$$\oint_C \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \bullet d\mathbf{l} = IR \quad \text{con} \quad R = \oint_C \frac{dl}{\sigma \Sigma}$$

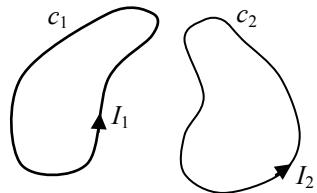
Finalmente, la ecuación completa del circuito en régimen quasi-estacionario puede escribirse:

$$V_0 - \frac{1}{C} \int I dt - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

que es la conocida ecuación de un circuito serie RLC. Los elementos de circuito quedan definidos por sus expresiones:

$$R = \oint_C \frac{dl}{\sigma \Sigma} \quad L = \frac{\Phi_m}{I} \quad C = \frac{Q}{\Delta \Phi}$$

El análisis se puede extender a circuitos con elementos en paralelo o combinaciones más complejas. En particular, es de interés el concepto de **inductancia mutua**, que surge cuando hay dos (o más) circuitos cercanos.



En la figura se muestra el caso de dos circuitos cercanos. La corriente  $I_1$ , que circula por el circuito  $c_1$ , crea un campo magnético en el espacio, que genera un flujo concatenado por el mismo circuito  $c_1$ , dando lugar a la aparición de un término autoinductivo. Pero la corriente  $I_2$ , que circula por el circuito  $c_2$ , también genera un flujo concatenado por el circuito  $c_1$ , dando lugar a la aparición de otro término inductivo, que se describe a través de la llamada **inductancia mutua**:  $M_{12} = \Phi_{m_1}/I_2$ .

La fem inducida sobre el circuito  $c_1$  por la corriente que circula sobre el circuito  $c_2$  es entonces:

$M_{12} \partial I_2 / \partial t$  de manera que la ecuación del circuito  $c_1$  será:

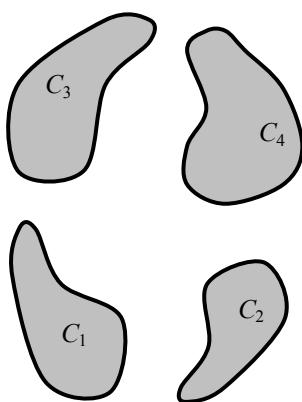
$$V_{10} - \frac{1}{C_1} \int I_1 dt - L_1 \frac{dI_1}{dt} - R_1 I_1 \mp M_{12} \frac{dI_2}{dt} = 0$$

Análogamente, sobre el circuito  $c_2$  se genera un término autoinductivo por la circulación de la corriente  $I_2$  y un término de inductancia mutua:  $M_{21} = \Phi_{m_2}/I_1$  y la ecuación del circuito  $c_2$  es:

$$V_{20} - \frac{1}{C_2} \int I_2 dt - L_2 \frac{dI_2}{dt} - R_2 I_2 \mp M_{21} \frac{dI_1}{dt} = 0$$

En estas ecuaciones los subíndices indican a qué circuito corresponde cada parámetro.

En el Capítulo 3 se ha demostrado que estos valores son iguales:  $M_{12} = M_{21}$ , porque la inductancia (propia y mutua) es una característica **puramente geométrica** que depende de la forma, tamaño y disposición espacial de los circuitos.



Cuando se tienen sistemas cercanos, en baja frecuencia se pueden modelar mediante parámetros circuitales. Supongamos un conjunto de  $N$  circuitos cercanos. Cada circuito puede tener una fem conectada que genera la circulación de una corriente y eventualmente una distribución de carga. El modelo circuital del sistema puede escribirse como una serie de ecuaciones:

$$\text{fem}_i = R_i I_i + L_{ii} \frac{dI_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad i = 1 \dots N$$

En el dominio de la frecuencia estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial como:  $[\text{fem}] = [Z][\mathbf{I}]$

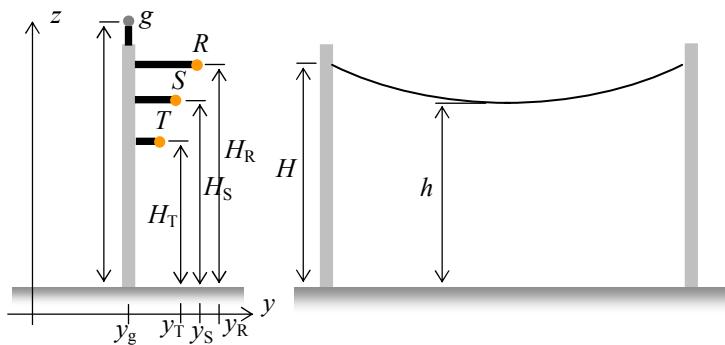
donde  $[\text{fem}]$  es el vector de fuentes de tensión conectadas a los circuitos,  $[\mathbf{I}]$  el vector de corrientes en ellos y  $[Z]$  la matriz de impedancias que puede escribirse como:

$$[Z] = \begin{bmatrix} R_1 + i\omega L_1 & i\omega M_{12} & \dots & i\omega M_{1N} \\ i\omega M_{21} & R_2 + i\omega L_2 & \dots & i\omega M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\omega M_{N1} & i\omega M_{N2} & \dots & R_N + i\omega L_N \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones son básicas para la modelación en baja frecuencia de sistemas complejos como circuitos impresos o circuitos integrados y para estudiar el crosstalk e interferencia.

En el siguiente ejemplo se usan la matriz de coeficientes de capacidad/inducción y de inductancias para analizar el campo cuasi-estático producido por una línea de alta tensión.

**Ejemplo 5-13:** Hallar el campo electromagnético creado por una línea trifásica de alta tensión.



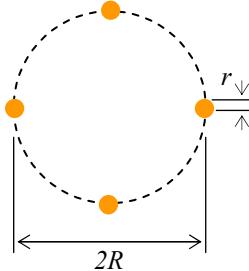
Se supone que la línea se halla sobre un suelo horizontal de propiedades  $\epsilon$  (permitividad) y  $\sigma$  (conductividad) conocidas.

Como nos encontramos en un **caso cuasiestático** (a 50 Hz la longitud de onda es de 6000 Km) los **campos eléctrico y magnético son independientes entre sí** y podemos calcularlos mediante las expresiones estáticas. Por lo tanto calculamos por separado cada campo.

#### CAMPO ELECTRICO

A 50 Hz aún el terreno más árido se comporta como un buen conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$  - ver el **Ejemplo 3.7**), de manera que podemos considerarlo como conductor perfecto y usar el método de imágenes conductoras. La altura variable de los conductores complica notablemente el cálculo por lo que se reemplaza las catenarias por líneas horizontales que se hallan a una altura efectiva:  $h_{\text{eff}} = H - 2/3 S = H - 2/3 (H - h)$

donde  $S$  es la flecha medida a mitad del vano.



En general, en líneas de alta tensión cada fase no es un único conductor, sino un haz de conductores, para disminuir el efecto corona. En la figura se muestra una sección de un haz de 4 conductores equiespaciados. En el caso de conductores equiespaciados (que es el más común) si  $r$  es el radio de cada conductor individual y  $R$  el radio del haz, se puede reemplazar al haz por un único conductor sólido de radio equivalente<sup>8</sup>:

$$r_{\text{eq}} = R \sqrt[n]{nr/R}$$

Habitualmente el hilo de guarda es un conductor único.

El sistema de cuatro conductores cilíndricos rectos equivalentes paralelos a tierra se reduce a un conjunto de hilos rectos a ambos lados del plano de tierra mediante el método de imágenes (ver **Ejemplo 2.16**). La altura efectiva de los hilos imagen será:

$$h'_{\text{eff}} = \sqrt{h_{\text{eff}}^3 - r_{\text{eq}}^2} \approx h_{\text{eff}}$$

La presencia de los hilos conductores imagen requiere el uso de los coeficientes de potencial para calcular las cargas inducidas en cada hilo. Procedemos como en el **Ejemplo 2.24**. Los coeficientes de potencial son:

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_{\text{eff}_i}}{r_{\text{eq}_i}}\right) \quad P_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(y_i - y_j)^2 + (h_{\text{eff}_i} + h_{\text{eff}_j})^2}{(y_i - y_j)^2 + (h_{\text{eff}_i} - h_{\text{eff}_j})^2}\right) \quad (i \neq j)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$ .

Conocida la matriz de coeficientes de potencial, la distribución de carga sobre cada hilo puede calcularse como:

$$[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_g]^T = [P]^{-1} [V_1 \ V_2 \ V_3 \ 0]^T$$

<sup>8</sup> "Transmission Line Reference Book. 345 bkV and above". 2<sup>nd</sup> Edition. EPRI, Palo Alto, 1982. Ec. (8.3.1)

donde el último término de los vectores corresponde al hilo de guarda que está a potencial cero (de tierra). Las tensiones de cada fase deben incorporar el tiempo y la fase relativa:

$$V_i = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i)$$

Arbitrariamente elegimos el origen de tiempos para que:

$$R \rightarrow \varphi = 0$$

$$S \rightarrow \varphi = 120^\circ = 2/3\pi$$

$$T \rightarrow \varphi = 240^\circ = 4/3\pi$$

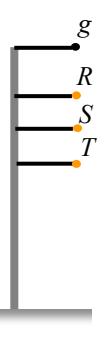
La ecuación matricial permite calcular las cargas en los conductores, que dependerán del tiempo y se hallarán desfasadas entre sí. Conocida esa distribución de carga puede calcularse el campo eléctrico producido por los hilos imagen, como en el **Ejemplo 2.16**.

Habitualmente se quiere calcular el campo eléctrico cerca del centro del vano, ya que en ese lugar es más intenso, de manera que se suele despreciar en primera aproximación los efectos de las torres y se considera que los hilos son indefinidamente largos. En esta aproximación el campo eléctrico no tiene componente a lo largo de los hilos (a lo largo de  $x$ , en nuestra geometría) y el vector campo se halla en planos  $yz$ . Las expresiones de cada componente del campo eléctrico en el espacio por encima del suelo son:

$$\mathbf{E} = E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}: \quad \begin{aligned} E_y(y, z, t) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(t) \left[ \frac{1}{(y - y_i)^2 + (z - h_{eff_i})^2} - \frac{1}{(y - y_i)^2 + (z + h_{eff_i})^2} \right] \\ E_z(y, z, t) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^4 \lambda_i(t) \left[ \frac{(z - h_{eff_i})}{(y - y_i)^2 + (z - h_{eff_i})^2} - \frac{(z + h_{eff_i})}{(y - y_i)^2 + (z + h_{eff_i})^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

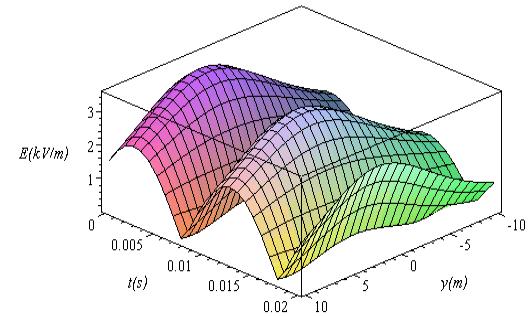
Como cada componente depende del tiempo y además están desfasadas entre sí, se puede demostrar (**Capítulo 8**) que la punta del campo eléctrico en un punto cualquiera describe una **elipse** a medida de que pasa el tiempo.

En el siguiente gráfico se muestra el módulo del campo eléctrico en  $V/m$  a mitad del vano y 1 m de altura sobre el suelo en función de la distancia desde el centro de la línea ( $y$ , en m) y para un periodo ( $T = 1/f_0 = 0.02$  s), para una línea trifásica tipo bandera de parámetros:

	$V_0$ (kV)	$W_0$ (MW)	$\epsilon_r$ suelo	$\sigma$ suelo ( $\Omega m$ ) $^{-1}$
	132	60	4	$10^{-5}$

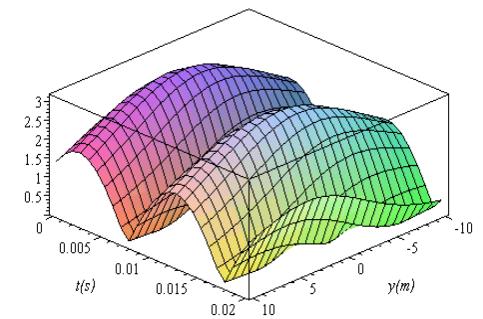
  

	$H$ (m)	$h$ (m)	$y_0$ (m)	$n$	$R$ (m)	$R$ (m)	$\rho$ ( $\Omega/km$ )
R	13.5	11.46	2.15	1	0.0122	----	0.095
S	13.5	11.46	2.15	1	0.0122	----	0.095
T	11.2	9.16	2.15	1	0.0122	----	0.095
g	18.0	16.41	1.10	1	0.008	----	95.0

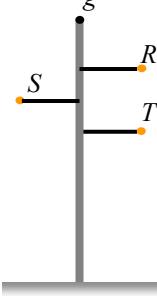


La misma línea en disposición horizontal:

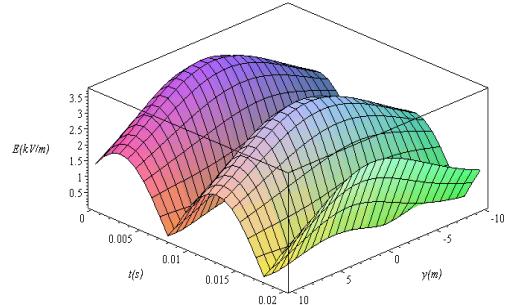
	$H$ (m)	$h$ (m)	$y_0$ (m)	$n$	$R$ (m)	$R$ (m)	$\rho$ ( $\Omega/km$ )
	13.5	11.46	-2.15	1	0.0122	----	0.095
R	13.5	11.46	0.0	1	0.0122	----	0.095
S	13.5	11.46	2.15	1	0.0122	----	0.095
T	13.5	11.46	0.0	1	0.008	----	95.0



La misma línea en disposición triangular:



	$H$ (m)	$h$ (m)	$y_0$ (m)	$n$	$R$ (m)	$R$ (m)	$\rho$ ( $\Omega/\text{km}$ )
R	15.8	13.76	2.15	1	0.0122	-----	0.095
S	13.5	11.46	-2.15	1	0.0122	-----	0.095
T	11.20	9.16	2.15	1	0.0122	-----	0.095
g	18.0	16.41	0.0	1	0.008	-----	95



Se observa que en este caso la distribución de campo es similar a la línea horizontal, aunque los valores de campo máximo son un poco más altos.

### CAMPO MAGNETICO

El cálculo del campo magnético creado por la línea es más difícil que el del campo eléctrico por dos motivos:

- a) El campo magnético creado por los conductores de la línea, variable en el tiempo, induce sobre los hilos de guarda corrientes que a su vez generan un campo magnético inducido;
- b) Las corrientes que circulan por los conductores (vivos o de guarda) de la línea, retornan por tierra.

Este segundo problema es el más complejo. El campo magnético creado por las corrientes reales induce corrientes en todo el semiespacio de tierra. Para ternas balanceadas estas corrientes sólo crean campos importantes muy cerca del suelo ya que la corriente total de retorno debe ser cero. En 1926 Carson<sup>9</sup> encontró un modelo que reemplaza la distribución de corriente en todo el semiespacio por medio de un término adicional en la matriz de impedancias (ver más abajo) del sistema. Por ejemplo, para un único conductor horizontal sobre tierra a altura  $h_{\text{eff}}$  el campo magnético creado por el conductor y su retorno de tierra puede escribirse como<sup>10</sup>:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{I(t)}{2\pi} \left\{ \hat{\phi} - \frac{\hat{\phi}'}{R'} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\gamma R'} \right)^4 \right] \right\} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} R &= [(y - y_0)^2 + (z - h_{\text{eff}})^2]^{1/2} \\ R' &= [(y - y_0)^2 + (z + h_{\text{eff}} + 2/\gamma)^2]^{1/2} \\ \hat{\phi} &= \frac{(z - h_{\text{eff}})\hat{\mathbf{y}} - (y - y_0)\hat{\mathbf{z}}}{R} \\ \hat{\phi}' &= -\frac{(z + h_{\text{eff}} + 2/\gamma)\hat{\mathbf{y}} - (y - y_0)\hat{\mathbf{z}}}{R'} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\epsilon$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son los parámetros del suelo. Habitualmente podemos tomar  $\mu = \mu_0$ . Como  $\gamma$  es complejo, la expresión de la contribución de las corrientes de retorno en tierra al campo magnético puede interpretarse como la existencia de un "conductor de retorno" o **línea imagen** situado a una profundidad compleja. Esto lleva a que esta contribución esté desfasada respecto del campo del conductor aéreo, lo que causa nuevamente que la punta del campo magnético describa una ellipse en el tiempo.

Obsérvese que los versores  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\phi}'$  son respectivamente perpendiculares a  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}'$ , y sus sentidos siguen la regla de la mano derecha en relación al sentido de circulación de las corrientes en el conductor real y en su imagen. La profundidad compleja depende de los parámetros del terreno a través del número complejo  $\gamma$  de propagación. Se observa que cuando el suelo se considera perfecto,  $|\gamma| \rightarrow \infty$  y el modelo es el modelo de imágenes perfectas que hemos analizado en previamente.

<sup>9</sup> J.R.Carson, "Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return", Bell Syst. Tech. Journal, 1926, Vol.5, pp. 539-554.

<sup>10</sup> "Transmission Line Reference Book. 345 bkV and above". 2<sup>nd</sup>. Edition. EPRI, Palo Alto, 1982. Ecs. (8.4.6-8.4.9)

La conductividad del suelo se halla entre  $0.1 \text{ } (\Omega m)^{-1}$  y  $0.001 \text{ } (\Omega m)^{-1}$ , lo que corresponde a resistividades entre  $10 \text{ } \Omega m$  y  $1000 \text{ } \Omega m$ . La permitividad relativa del suelo se halla entre 4 y 10, de manera que a  $50 \text{ Hz}$ , para una línea colocada a una altura  $H = 12m$ :

	$\gamma \text{ (m}^{-1}\text{)}$	$2/\gamma \text{ (m)}$
$\epsilon = 4\epsilon_0 \quad \sigma = 0.001 \text{ } (\Omega m)^{-1}$	$4.44 \times 10^{-4} (1+i)$	$2250(1-i)$
$\epsilon = 10\epsilon_0 \quad \sigma = 0.1 \text{ } (\Omega m)^{-1}$	$4.44 \times 10^{-3} (1+i)$	$225(1-i)$

Se observa que la línea imagen se halla a una "profundidad" de cientos a miles de metros. La corriente imagen será en estas condiciones (tomamos  $y_0 = 0$ ):

$$I' = I \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\gamma R'} \right) \right] = I \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\gamma |z - H'|} \right) \right] = I \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\gamma |z + H + 2/\gamma|} \right) \right]$$

y si el cálculo de los campos se realiza, como es habitual, en las cercanías de la línea, podemos aproximar el paréntesis a 1 y queda:  $I' \approx 4I/3$  o sea que la corriente imagen es un poco mayor que la corriente real y en fase. Es entonces posible despreciar el campo creado por esta corriente imagen frente al campo de la línea real, salvo muy cerca del suelo, debido a la profundidad a la que circula.

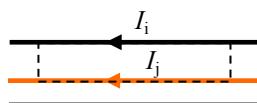
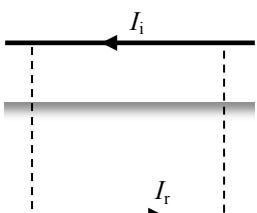
A partir del campo magnético podemos expresar las corrientes inducidas sobre los conductores de guarda. A semejanza del cálculo de los coeficientes de potencial para tener en cuenta las interacciones eléctricas entre los conductores de una línea multifilar, podemos suponer que en un tramo de línea de longitud unitaria existe una relación lineal entre las caídas de tensión y las corrientes que circulan por los conductores:

$$[\Delta V] = [\mathcal{Z}][I]$$

En esta ecuación los elementos de la matriz de impedancias son:

$$Z_{ii} = R_i + i\omega L_{ii} \quad Z_{ij} = i\omega L_{ij}$$

donde  $R_i$  es la resistencia por unidad de longitud del conductor (dato),  $L_{ii}$  la inductancia por unidad de longitud de la "espira" formada por el conductor y el retorno de tierra y  $L_{ij}$  la inductancia por unidad de longitud de la "espira" formada por los conductores  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo.



Para el cálculo de las inductancias se usa el campo magnético previamente introducido. Debido a que existen dos términos con un desfasaje, en el dominio de la frecuencia aparecerán inductancias complejas, que pueden interpretarse como la suma de una inductancia real, que da cuenta de los efectos magnéticos, y una resistencia que está ligada a las pérdidas óhmicas debidas a la conductividad del suelo.

El cálculo de la inductancia es similar al realizado en el **Ejemplo 3.22** para una línea bifilar. El resultado es:

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h_{eff_i} + 2/\gamma}{r_{eq_i}} \quad L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h_{eff_i} + 2/\gamma}{\sqrt{(y_i - y_j)^2 + (h_{eff_i} - h_{eff_j})^2}}$$

Si hay  $n_g$  hilos de guarda, sobre los cuales la caída de tensión es nula, la ecuación

$$[\Delta V] = [\mathcal{Z}][I] \text{ puede escribirse como: } \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & \dots & Z_{3N} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

Las filas asociadas a los hilos de guarda se pueden reescribir:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

de donde:

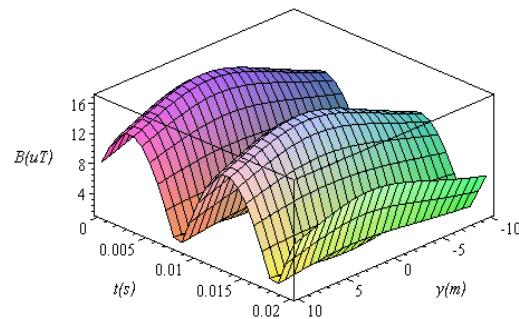
$$\begin{bmatrix} I_4 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{44} & \dots & Z_{4N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N4} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

y las corrientes en los hilos de guarda quedan expresadas en función de las corrientes en los conductores vivos.

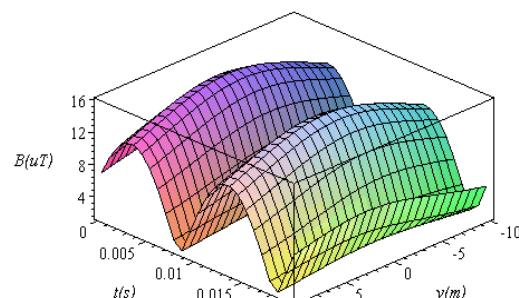
Calculadas las corrientes en los hilos de guarda, el campo magnético creado por la línea se calcula mediante superposición de los campos creados por cada conductor aéreo (vivos+hilo de guarda) y los correspondientes "retornos de tierra", de acuerdo a la expresión (2) de la página 6.61.

Con este algoritmo de cálculo se obtienen los siguientes gráficos para las líneas ejemplo:

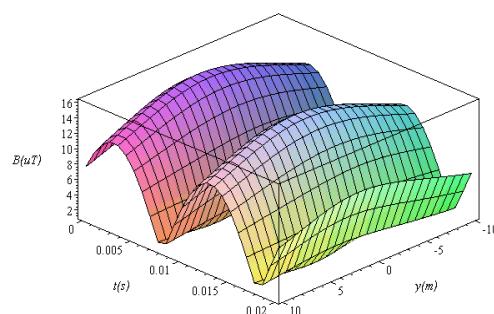
Línea Bandera



Línea Horizontal:



Línea Triangular:



Como se ve no hay mucha diferencia en el campo magnético creado por las tres estructuras.

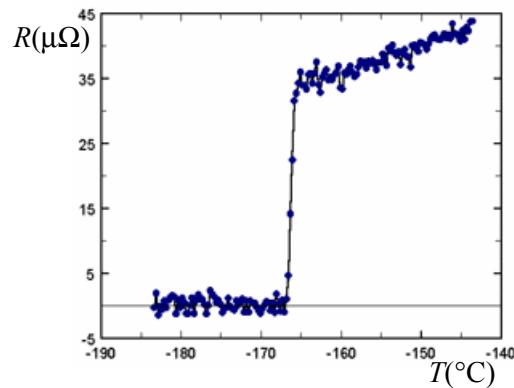
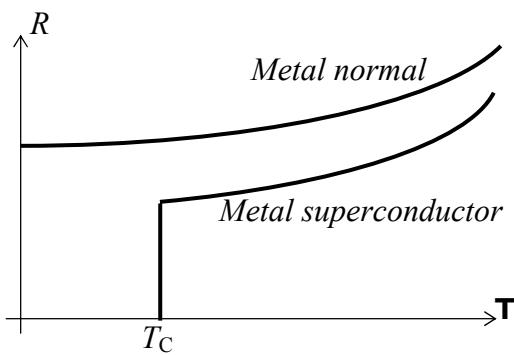
El archivo **3f.zip** contiene en formato HTML las gráficas de campo que aparecen en este ejemplo y animaciones de la variación temporal del módulo de los campos para las tres estructuras.

## Aplicaciones de la superconductividad



En 1911 el físico holandés H. Kammerlingh Onnes, de la Universidad de Leiden, observó por vez primera que cuando enfriaba mercurio por debajo de una temperatura muy baja, en el rango del helio líquido, la resistencia eléctrica desaparecía de forma brusca hasta valores indetectables. A partir de este experimento, realizó pruebas con muchos otros metales, encontrando un comportamiento similar. Kammerlingh Onnes recibió el premio Nobel de Física en 1913 por este descubrimiento.

En la figura de la izquierda se muestra esquemáticamente la diferencia en el comportamiento de la resistencia de un conductor “normal” y la de un superconductor, en función de la temperatura. Hay una transición abrupta a la **temperatura crítica**  $T_C$ , dependiente del material. La gráfica de la derecha recoge datos experimentales.

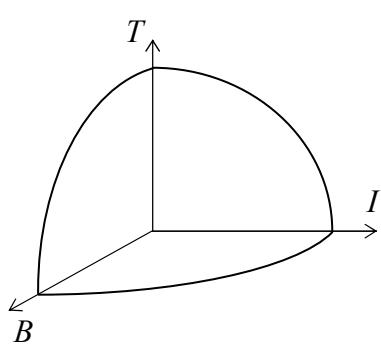


En la siguiente tabla se dan las temperaturas críticas en Kelvins de distintos elementos<sup>11</sup> a presión atmosférica. Son generalmente metales o tierras raras y las temperaturas críticas son muy bajas, cercanas al cero absoluto. Estos superconductores se denominan de **Tipo I**:

<b>Plomo</b>	7.2	<b>Torio</b>	1.38	<b>Rutenio</b>	0.49
<b>Lantano</b>	4.9	<b>Aluminio</b>	1.18	<b>Titanio</b>	0.4
<b>Tantalo</b>	4.47	<b>Galio</b>	1.1	<b>Uranio</b>	0.2
<b>Mercurio</b> <sup>12</sup>	4.15	<b>Gadolinio</b> <sup>13</sup>	1.08	<b>Hafnio</b>	0.13
<b>Estaño</b>	3.72	<b>Zinc</b>	0.85	<b>Iridio</b>	0.11
<b>Indio</b>	3.4	<b>Osmio</b>	0.66	<b>Lutecio</b>	0.1
<b>Renio</b>	1.7	<b>Zirconio</b>	0.61	<b>Berilio</b>	0.026
<b>Talio</b>	1.7	<b>Americio</b>	0.6	<b>Tungsteno</b>	0.015
<b>Protactino</b>	1.4	<b>Cadmio</b>	0.52	<b>Platino</b>	0.0019
				<b>Rodio</b>	0.000325

Otras elementos se pueden llevar al estado superconductor aplicando presión. Por ejemplo, el elemento de Tipo I con la mayor temperatura crítica es el azufre a 17 K, pero requiere una presión de 930000 atmósferas para convertirse en superconductor y 1.6 millones de atmósferas para

alcanzar la temperatura crítica de 17 K. Sin embargo, la temperatura crítica no es el único parámetro que lleva al estado superconductor. La corriente que circula por el material debe estar por debajo de una **corriente crítica** y el campo magnético que actúa sobre el material debe estar por debajo de un **campo crítico**.



El comportamiento superconductor se da entonces dentro del primer octante en el espacio de la figura. Se observa así que, aunque la resistividad del material se hace prácticamente nula, no puede

<sup>11</sup> Las  $T_C$  citadas corresponden a materiales en volumen, salvo en el caso del Pt, que es un polvo compactado.

<sup>12</sup> Primer superconductor descubierto, en 1911.

<sup>13</sup> Ferromagnético por encima de  $T_C$ ; diamagnético por debajo de  $T_C$ .

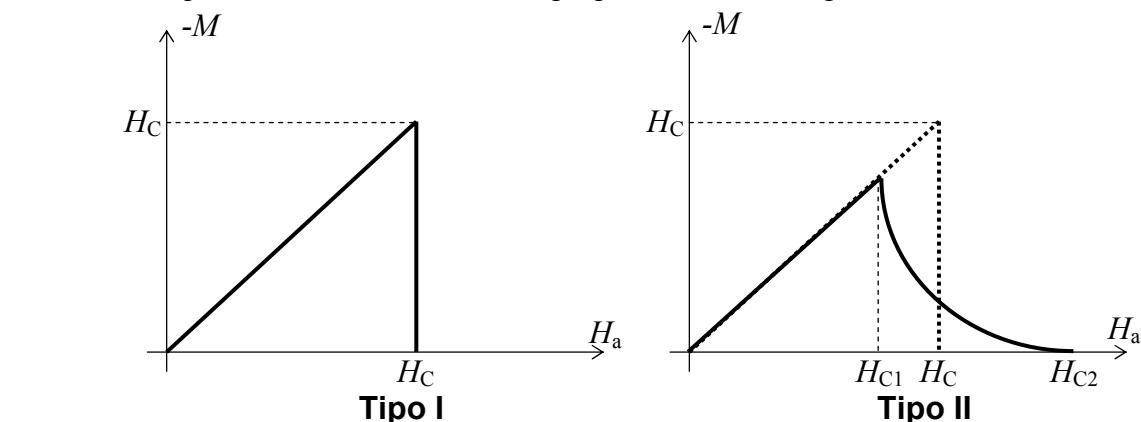
fluir una corriente de valor indefinido por el material, ya que por una parte se superaría la corriente crítica y por otra esta corriente crearía un campo magnético que superaría al valor crítico.

Además de los materiales superconductores del Tipo I existen materiales del **Tipo II**, que, aparte de los elementos vanadio, tecnecio y niobio, comprenden compuestos y aleaciones metálicas. La clasificación en uno de los dos tipos se basa en la respuesta del material a un campo magnético aplicado. Un material Tipo I exhibe una magnetización que crece linealmente con el campo aplicado hasta que éste alcanza el valor crítico  $H_C$  en que la superconductividad se destruye y la magnetización del material vuelve a su valor inicial. Un material Tipo II tiene una respuesta lineal hasta un cierto campo aplicado  $H_{C1}$ . Si se aumenta aún más el campo aplicado la magnetización decrece rápidamente al principio pero luego adopta una pendiente baja hasta llegar eventualmente a cero a un campo aplicado  $H_{C2}$ . Por comodidad se define el campo crítico  $H_C$  para un material de Tipo II como el campo crítico para un material de Tipo I que tenga la misma área bajo la curva de magnetización y la misma pendiente inicial que el material en estudio.

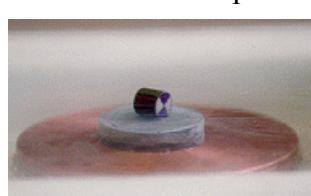
En la siguiente tabla se presentan las temperaturas críticas para los tres elementos y algunos compuestos de Tipo II:

<b>Niobio<sup>14</sup></b>	9.25	<b>Tecnecio</b>	7.8	<b>Vanadio</b>	5.4
<b>Nb<sub>3</sub>Ge</b>	23.2	<b>Nb<sub>3</sub>Si</b>	19	<b>Nb<sub>3</sub>Sn</b>	18.1
<b>Nb<sub>3</sub>Al</b>	18	<b>V<sub>3</sub>Si</b>	17.1	<b>Ta<sub>3</sub>Pb</b>	17
<b>V<sub>3</sub>Ga</b>	16.8	<b>Nb<sub>3</sub>Ga</b>	14.5	<b>V<sub>3</sub>In</b>	13.9

El primer compuesto superconductor de Tipo II, una aleación de plomo y bismuto, fue fabricado en 1930, aunque sólo se reconocieron sus propiedades años después del descubrimiento del efecto Meissner (ver más abajo). En años siguientes se descubrieron nuevos compuestos y aleaciones superconductores. En 1941 se halló que el nitruro de niobio se volvía superconductor a 16 K. En 1953 se encontró que la aleación vanadio-silicio se volvía superconductora a los 17.5 K. En 1962, científicos de Westinghouse desarrollaron el primer alambre superconductor comercial,  $Nb_{0.6}Ti_{0.4}$ , con temperatura crítica de 9.8 K. Sin embargo, recién se usó en 1987 en la construcción de electroimanes de alta potencia para el acelerador de partículas Tevatron del Fermilab.



Otro efecto extremadamente importante en el comportamiento de los superconductores fue descubierto en 1933 por Walter Meissner y Robert Ochsenfeld. Hallaron que un material superconductor repele el campo magnético. Un campo magnético exterior induce corrientes en el material que, de acuerdo a la ley de Lenz, crean un campo magnético inducido que anula al campo aplicado dentro del material. El **efecto Meissner** hace que el material superconductor se comporte como un material **diamagnético perfecto** ( $\chi_m = -I$ ). Si se coloca un imán cerca de un material superconductor, el campo magné-



to Meissner (ver más abajo). En años siguientes se descubrieron nuevos compuestos y aleaciones superconductores. En 1941 se halló que el nitruro de niobio se volvía superconductor a 16 K. En 1953 se encontró que la aleación vanadio-silicio se volvía superconductora a los 17.5 K. En 1962, científicos de Westinghouse desarrollaron el primer alambre superconductor comercial,  $Nb_{0.6}Ti_{0.4}$ , con temperatura crítica de 9.8 K. Sin embargo, recién se usó en 1987 en la construcción de electroimanes de alta potencia para el acelerador de partículas Tevatron del Fermilab.

Otro efecto extremadamente importante en el comportamiento de los superconductores fue descubierto en 1933 por Walter Meissner y Robert Ochsenfeld. Hallaron que un material superconductor repele el campo magnético. Un campo magnético exterior induce corrientes en el material que, de acuerdo a la ley de Lenz, crean un campo magnético inducido que anula al campo aplicado dentro del material. El **efecto Meissner** hace que el material superconductor se comporte como un material **diamagnético perfecto** ( $\chi_m = -I$ ). Si se coloca un imán cerca de un material superconductor, el campo magné-

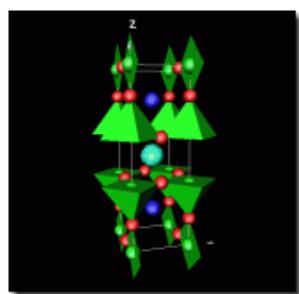
<sup>14</sup> A diferencia de la mayoría de los superconductores, la  $T_C$  del niobio decrece con la presión aplicada.

tico inducido por las corrientes que circulan por el material actúa sobre el imán y este efecto puede ser tan intenso que el imán levita sobre el material, como se muestra en la figura.

La primera teoría ampliamente aceptada que explica el fenómeno de la superconductividad es la **teoría BCS** (por las iniciales de sus autores, los físicos norteamericanos J. Bardeen, L. Cooper y J.R. Schrieffer, quienes recibieron por este trabajo el premio Nobel en 1972<sup>15</sup>). Esta teoría se basó en trabajos anteriores de Frölich y Cooper. Frölich mostró que bajo condiciones adecuadas los electrones de un sólido pueden experimentar una interacción de atracción mediada por los fones (cuantos de energía vibracional) de la estructura del sólido. Cooper demostró entonces que, si los electrones se hallan cerca de la superficie de Fermi y son dispersados por la estructura cristalina sin modificar demasiado su energía, es energéticamente preferible que esos electrones formen un par que se comporta como una única partícula. Tal par de electrones ligados se conoce como un **par de Cooper**. El momento total del par de Cooper es constante y los espines de los electrones son opuestos. La teoría BCS demostró que era posible que se creara un número de pares de Cooper por encima de la misma superficie de Fermi. Estos pares de Cooper forman un condensado homogéneo y sólo gastando energía puede quitarse un par del condensado disolviéndolo en sus electrones individuales. Por lo tanto, el condensado es de gran estabilidad. Cuando se coloca el material en un campo eléctrico, el condensado se mueve como una única partícula y no experimenta interacciones con la estructura cristalina, produciendo el fenómeno de la superconductividad. Esta teoría explica también por qué algunos de los mejores conductores, como el oro y el platino, no presentan comportamiento superconductor. En estos materiales la interacción electrón-fonón es muy débil, la interacción electrón-electrón es siempre repulsiva y no se pueden formar pares de Cooper.

La teoría BCS es matemáticamente compleja y puede explicar el comportamiento superconductor de elementos y aleaciones simples cerca del cero absoluto de temperaturas. Sin embargo, esta teoría no es aplicable a mayores temperaturas y/o otros sistemas superconductores.

En 1986, A. Müller y G. Bednorz, investigadores de IBM en Suiza, crearon un compuesto cerámico ( $La_{1.85}Ba_{0.15}CuO_4$ ) que presentaba propiedades superconductoras Tipo II a la más alta temperatura conocida hasta entonces:  $35\text{ K}$ <sup>16</sup>. Un aspecto significativo de este descubrimiento es que los cerámicos son normalmente aisladores. Este hallazgo inesperado produjo una furia de actividad en la fabricación de cerámicos superconductores, en la búsqueda de nuevos compuestos y mayores temperaturas críticas. En 1987 un equipo de la Universidad de Alabama reemplazó el lantano por ytrio en el compuesto mencionado para obtener una  $T_C$  de  $92\text{ K}$ . Este material, conocido como **YBCO**, fue el primer material superconductor a la temperatura del nitrógeno líquido ( $77\text{ K}$ ), lo que llevaba a la perspectiva de un uso comercial competitivo con otras tecnologías.



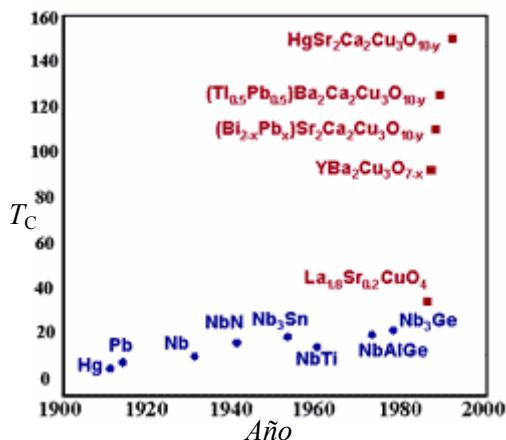
Estos compuestos presentan una estructura de **perovskita**, como por ejemplo el YBCO que se esquematiza en la figura<sup>17</sup>. En la figura los átomos verdes son de Cu, los de O rojos y los de Ba azules. Para dar una idea del ahorro, mencionamos que producir helio líquido cuesta unos U\$D 5 por litro, mientras que producir nitrógeno líquido cuesta U\$D 0.1 por litro. Ha habido en los últimos años gran cantidad de trabajo en el descubrimiento de compuestos de este tipo de superconductores de alta temperatura (HTS). El récord actual de temperatura crítica es el compuesto  $Hg_{0.8}Tl_{0.2}Ba_2Ca_2Cu_3O_{8.33}$ , con  $T_C = 138\text{ K}$  hallado en 1995. La evolución en el descubrimiento y desarrollo de materiales y compuestos con cada vez

<sup>15</sup> John Bardeen ya había recibido un premio Nobel en Física previamente, junto con W. Shockley y W. Brattain, en 1956 por sus estudios de semiconductores y la invención del transistor.

<sup>16</sup> En 1987 Müller y Bednorz recibieron el premio Nobel de Física por estos trabajos.

<sup>17</sup> Los esquemas de estructuras cristalinas que se muestran en esta capítulo están tomadas de <http://www.ill.fr/dif/3D-crystals> y fueron desarrolladas por Marcus Hewat.

mayor temperatura crítica se muestra en el diagrama. Sin embargo, hasta el presente los materiales son de fabricación costosa y frágiles. Un estudio reciente<sup>18</sup> analiza el desarrollo y la puesta en mercado de cinco tipos de equipos eléctricos básicos hechos en base a materiales superconductores de alta temperatura: motores, transformadores, generadores, cables subterráneos y limitadores de corrientes de falla, entre el presente y el año 2020. Se estima que los primeros equipos de este tipo a entrar al mercado, alrededor del 2003-2004 son los limitadores de corriente, probablemente primero en Japón o en Europa y luego en los Estados Unidos. Se proyecta que transformadores y cables entran al mercado en el 2005 seguidos por motores eléctricos en el 2006. El equipo más tardío serán los generadores, previstos para el 2011. Un punto de particular interés es el momento en que estos equipos capturarán el 50% del mercado. Las previsiones se dan en la siguiente tabla:



Equipo	Año de 50% de las ventas totales
Motores	2016
Transformadores	2015
Generadores	2021
Cable subterráneo	2013

Además de los beneficios económicos derivados de la menor potencia perdida por efecto Joule, estos equipos traen beneficios ambientales debido a los menores requerimientos de potencia generada, lo que reduce la emisión de gases de efecto invernadero y permiten mayor instalación de potencia sin degradar el medio ambiente.

La mayor parte de los esfuerzos se han concentrado en la producción de alambre superconductor, ya que constituye la pieza esencial de la mayoría de los dispositivos eléctricos. Actualmente los materiales usados son fundamentalmente aluminio y cobre. A partir de alambre de aluminio y cable de acero estructural se fabrican los cables de transmisión. El aluminio forma la base de los armazones de los motores de inducción. A partir de alambre de cobre se bobinan armaduras para motores eléctricos y arrollamientos para generadores, transformadores y relays. Cables de distribución de aluminio y cobre se han usado en todo tipo de sistemas de distribución de energía eléctrica.

El estudio que hemos mencionado presenta los distintos dispositivos que se hallan en desarrollo en la actualidad y da cifras de eficiencia y costo/beneficio para prototipos que ya se han construido, llegando a la conclusión de que en pocos años esta será la tecnología de uso habitual en las instalaciones eléctricas de potencia.

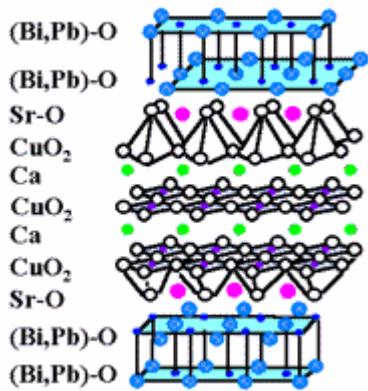
### Cables superconductores

Existe actualmente oferta de cables superconductores por varias compañías, entre ellas Pirelli y American Superconductors<sup>19</sup>, de donde hemos tomado la información de esta sección. El desarrollo de materiales que presentan superconductividad a alta temperatura (HTS), con la consiguiente disminución de los costos de enfriamiento, hacen esta técnica competitiva, debido a que los cables superconductores permiten mayor capacidad de transporte de corriente y menores pérdidas por efecto Joule que los cables convencionales. Se estima que cables de igual tamaño pue-

<sup>18</sup> L.R.Lawrence,Jr. et al., "High Temperature Superconductivity: the Products and their Benefits", 2000 Edition, U.S. Dept. of Energy, Superconductivity Program for Electric Systems, Oak Ridge National Laboratory. June 2000.

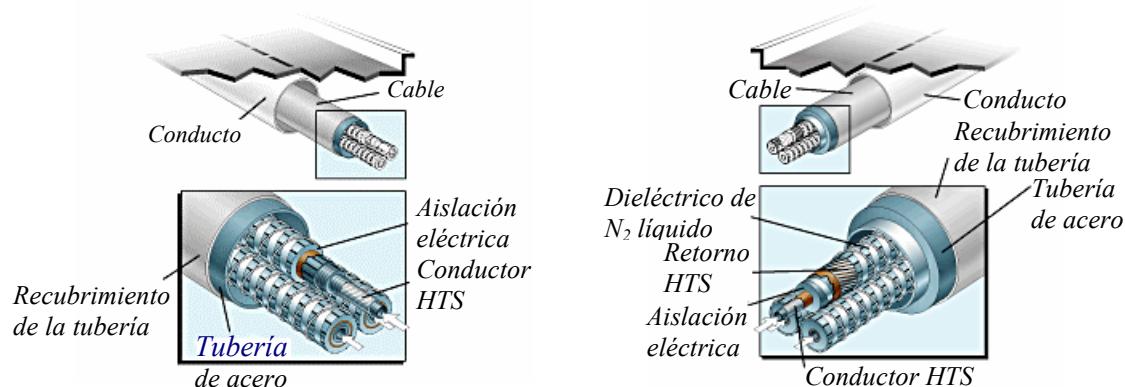
<sup>19</sup> [http://www.pirelli.com/en\\_42/cables\\_systems](http://www.pirelli.com/en_42/cables_systems) y <http://www.amsuper.com>

den transportar de 2 a 5 veces más potencia que cables convencionales y tienen (actualmente) menos de los 2/3 de las pérdidas. La mayor corriente permite también obtener campos magnéticos mayores en el diseño de electroimanes, motores, etc. En el campo de la transmisión de potencia, son ideales para incrementar la capacidad de líneas de transmisión existentes en instalaciones subterráneas<sup>20</sup>.



Los conductores de alta potencia fabricados por Pirelli están construidos con alambres y cintas de filamentos de  $(\text{Bi},\text{Pb})_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$  en una matriz metálica. El material se conoce como Bismuth-2223 y tiene una  $T_c$  de 110 K. Como todos los materiales HTS la estructura de la red consiste de capas de iones de dióxido de cobre mezcladas con capas de iones de aislación. Entonces la supercorriente está restringida a un flujo bidimensional perpendicular a las capas. En consecuencia, las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales HTS dependen generalmente de la orientación respecto a los campos electromagnéticos.

Existen actualmente dos tipos de cables superconductores comerciales de alta potencia, los llamados de **dieléctrico caliente** (warm dielectric) y de **dieléctrico frío** (cold dielectric).



En la figura de la izquierda se muestra la construcción de un cable de dieléctrico caliente. Consiste de un conductor (o conductores) hechos de alambres HTS arrollados alrededor de un núcleo flexible hueco. Nitrógeno líquido fluye por el hueco, enfriando el material HTS a temperatura superconductora. Los conductores están rodeados por aislación dieléctrica convencional para reducir pérdidas. En el cable de dieléctrico frío (figura a la derecha) existen dos conductores HTS por fase, formando el conductor vivo y el retorno. Toda la construcción se halla sumergida en nitrógeno líquido y el conjunto queda aislado mediante aislación dieléctrica convencional. Existen dos diseños básicos: conductores HTS paralelos (figura) o conductores HTS coaxiales. Este último diseño es el más eficaz desde el punto de vista del apantallamiento del campo magnético generado.

El diseño de dieléctrico caliente es generalmente adecuado para el reemplazo de instalaciones existentes (líneas aéreas o subterráneas) debido a la mayor sencillez de la construcción. Puede transportar hasta dos veces la potencia de una instalación convencional equivalente con aproxi-

<sup>20</sup> Debido a sus características constructivas, que describimos más abajo, la oferta actual de cables para transmisión de potencia sólo permite instalaciones de transmisión subterráneas.

madamente las mismas pérdidas, lo que hace este diseño particularmente promisorio en la mejora de instalaciones existentes por mayor demanda, aunque sus costos operativos son mayores que la instalación convencional por la necesidad de la refrigeración y que el diseño de dieléctrico frío por las mayores pérdidas.

El diseño de dieléctrico frío puede transportar hasta cinco veces la potencia de una instalación convencional equivalente con menos de 2/3 de las pérdidas. Pero los costos de instalación son más caros que el diseño de dieléctrico caliente y no es tan fácil reemplazar instalaciones subterráneas existentes. La aplicación más promisoria del diseño de dieléctrico frío es la creación de nuevas líneas subterráneas que, por sus menores pérdidas, permitirán llevar mayores corrientes en líneas de media tensión, eliminando así en parte las subestaciones, lo que es muy importante en áreas urbanas donde hay restricciones edilicias y de impacto ambiental.

La siguiente tabla<sup>21</sup> da los requerimientos mínimos de alambres HTS para distintas aplicaciones de potencia:

	<b>Motor 1000 hp</b>	<b>Gen. 300 MW</b>	<b>Cable transmisión</b>
$J_C$ ( $A/cm^2$ )	$10^5$	$5 \times 10^4$ (*)	$10^4 - 10^5$
$B$ ( $T$ )	4 – 5	5	< 0.2
$T_C$ ( $K$ )	0 – 77	20 – 50	77
$I_C$ ( $A$ )	500	1000	25 – 30 (**)
Longitud ( $m$ )	1000	2000	100
Costo ( $u\$s/kAm$ )	10	10	10 - 100

(\*) Mínimo para cada alambre HTS

(\*\*) Corriente por alambre individual, el cable requiere 5 kA.

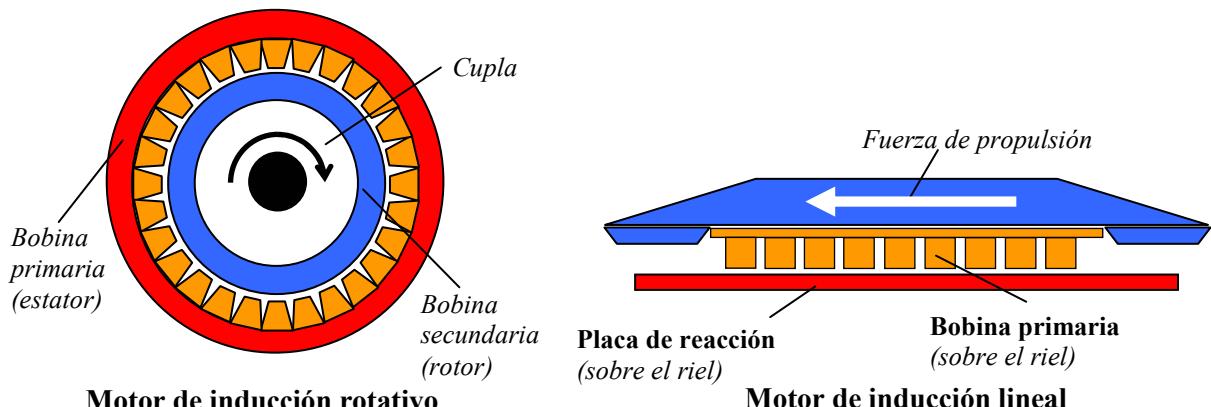
Uno de los factores, el costo por kA y por metro, debe compararse al costo actual de unos u\\$s 10 (estos son precios de 1994), de manera que debe hacerse el estudio costo-beneficio ya que las instalaciones HTS requieren una inversión inicial mayor pero sus costos operativos son menores y se deben comparar a lo largo de la vida útil de la instalación.

Las primeras instalaciones de potencia en base a cables HTS se están realizando en la actualidad (2000/2001) en EEUU y Europa.

## Trenes de levitación magnética

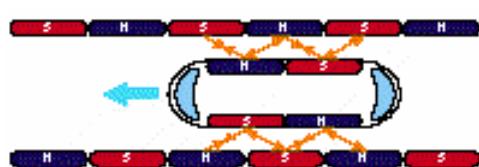
Otra de las aplicaciones tecnológicas de la superconductividad ha sido el desarrollo del transporte por levitación magnética, donde se usan las fuerzas magnéticas para compensar las fuerzas gravitatorias. Esto requiere campos magnéticos muy intensos que solamente se han logrado con las grandes corrientes que permiten los conductores superconductores.

### Propulsión



<sup>21</sup> U.S. Department of Energy. Superconductivity Program for Electric Power. Systems HTS Wire Development Workshop Proceeding, Conf-940278, February 1994

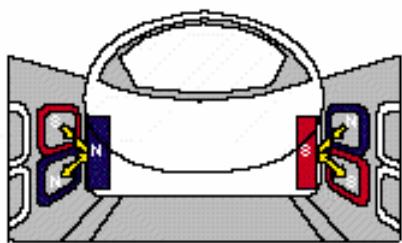
El principio de propulsión del transporte por levitación magnética (**Maglev** en la jerga) se basa en los **motores lineales**, que pueden pensarse como un motor normal rotativo que se extiende sobre una superficie plana, como se esquematiza en las figuras.



Las bobinas de propulsión localizadas en ambos costados del riel están alimentadas por un circuito de corriente alterna trifásica que crea un campo magnético de fase variable a lo largo de la guía. Los electroimanes superconductores son atraídos por las bobinas al frente del movimiento y rechazados por las bobinas detrás del movimiento, produciendo así un momento de propulsión que hace mover hacia delante al móvil.

## Levitación

Las bobinas de levitación en forma de "8" se instalan en los costados del riel. Cuando los electroimanes superconductores a bordo pasan a alta velocidad a pocos centímetros de estas bobinas, inducen en ellas corrientes eléctricas, que a su vez crean un campo magnético que actúan sobre los imanes superconductores empujándolos hacia arriba y produciendo la levitación.



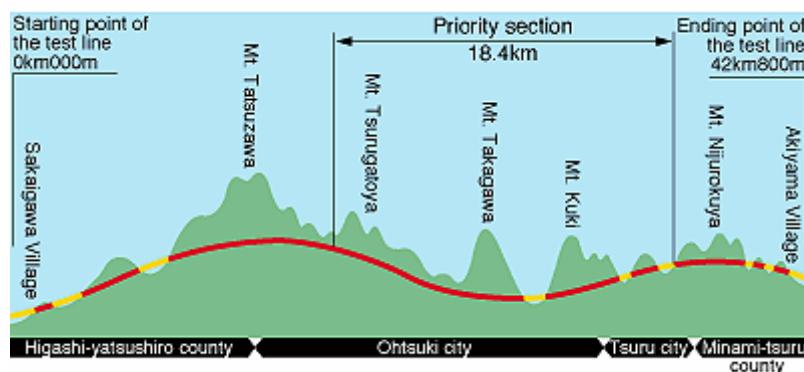
Otro efecto que contribuye a la levitación es el efecto Meissner sobre los electroimanes superconductores del móvil.

## Guiado lateral

Las bobinas de levitación enfrentadas están conectadas bajo el riel, constituyendo un circuito cerrado. Cuando un móvil Maglev, que es un imán superconductor, se desplaza lateralmente, se induce una corriente eléctrica sobre este circuito, lo que lleva a que se genere una fuerza repulsiva que actúa sobre las bobinas de levitación del lado más cercano del móvil y una fuerza atractiva sobre las bobinas de levitación del lado más lejano, corrigiendo así el desplazamiento lateral.

## La línea de pruebas de Yamanashi

El desarrollo del uso comercial de la tecnología Maglev tuvo una fuerte aceleración con la autorización del Ministerio de Transporte japonés, en 1990, para la construcción de la Línea de pruebas de Yamanashi, que se inauguró en abril de 1997. Se extiende por 42 Km entre los pueblos de Sakaigawa y Akiyama, al sur de Tokio. Como se esquematiza en la figura, la línea no es horizontal, aunque el tendido es aproximadamente recto, con curvas muy amplias.

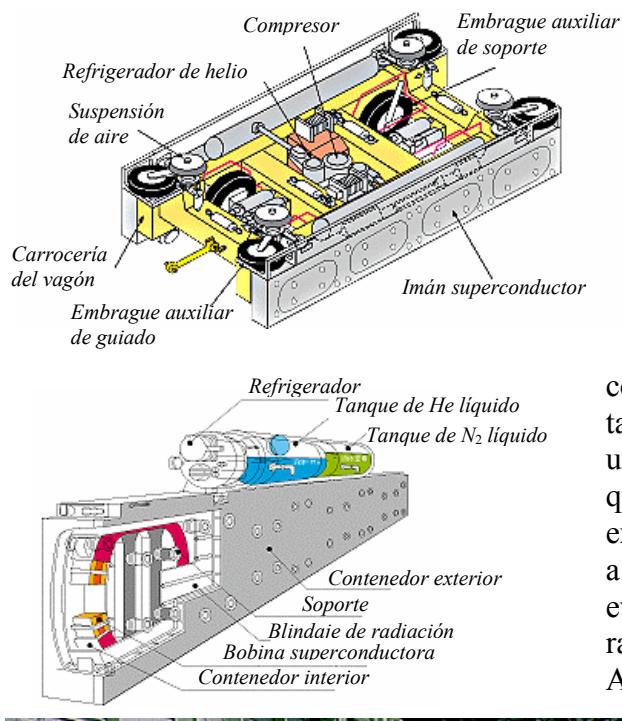


Los siguientes son los objetivos principales en las pruebas que se llevan a cabo:

- confirmación de las posibilidades de marcha segura, confortable y estable a 500 km/h;
- confirmación de la confiabilidad y durabilidad del vehículo, las instalaciones laterales y los equipos de control;
- confirmación de los estándares estructurales a respetar, incluyendo el mínimo radio de curvatura y el máximo gradiente vertical;

- confirmación de la mínima distancia entre vías para la seguridad de trenes que se sobreponen;
- confirmación de la performance del vehículo respecto del tamaño de la sección de túnel y las fluctuaciones de presión dentro de túneles;
- confirmación de la performance de los mecanismos de reversa de movimiento;
- confirmación del impacto ambiental;
- establecimiento de sistemas de control de operación de trenes múltiples;
- confirmación de la operación de los sistemas de seguridad y criterios de mantenimiento de vías;
- análisis de los costos de construcción, mantenimiento y operación bajo diversos climas

Dos años después de su inauguración, el 14 de abril de 1999, el vehículo de pruebas MLX01 (figura) llegó a la velocidad de 550 Km/h.



Los vehículos usados en la línea de pruebas Yamanashi se basan en unidades de propulsión de imanes superconductores (SCM). Cada vagón del tren incorpora dos SCM, uno de cada lado. A su vez, cada SCM consiste de cuatro bobinas superconductoras. En la figura se muestra un esquema del bogie del vagón con la unidad refrigeradora de helio incorporada. En la siguiente figura se detalla la construcción del imán superconductor. La unidad cilíndrica superior es un tanque que contiene helio y nitrógeno líquidos. La unidad inferior es una bobina superconductora que genera alternativamente polos N y S. En un extremo del tanque se encuentra el refrigerador de a bordo, que sirve para relicitar el helio que se ha evaporado por la normal absorción de calor durante el movimiento.

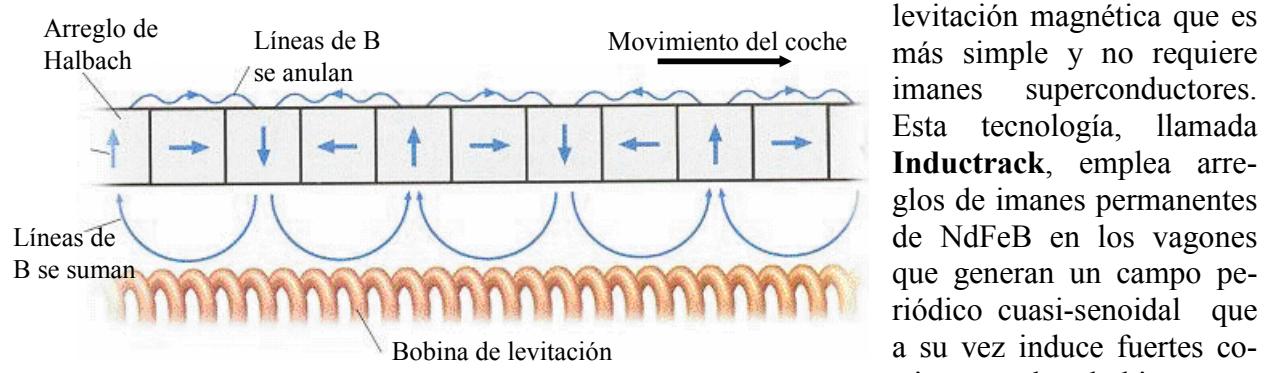
Aunque la tecnología ya está en condición operativa y los costos de explotación parecen competitivos, la instalación de trenes Maglev se ha demorado por razones políticas y de preocupación ambiental. El único tren comercial que adoptó la tecnología Maglev fue un corto tramo suburbano en Birmingham, Inglaterra, que fue cerrado en 1997 después de operar durante once años, con una tecnología actualmente obsoleta. El gobierno de los Estados Unidos ha destinado un fondo de

cerca de un billón de dólares para la construcción de una línea comercial Maglev en uno de siete sitios ya propuestos y estudiados por el organismo responsable. Alemania también está construyendo una línea comercial que supuestamente entrará en operaciones en el año 2006.

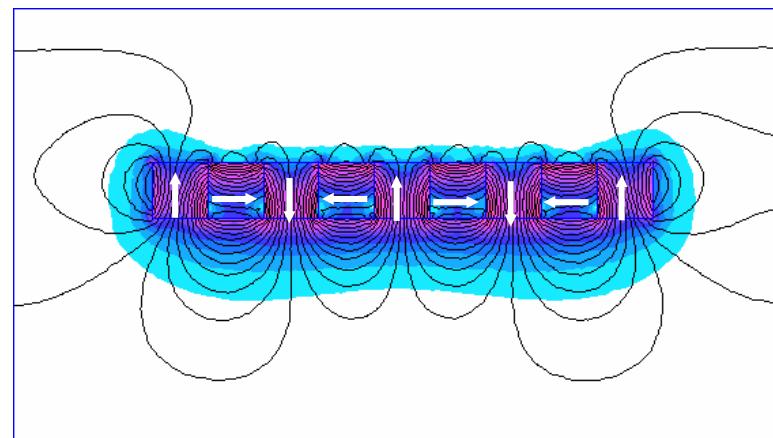
### Inductrack: Maglev sin superconductores

La tecnología Maglev descripta en la sección previa es costosa y compleja, debido a la necesidad de la refrigeración extrema para obtener imanes superconductores.

En el laboratorio de Lawrence Livermore se ha desarrollado desde 1998 un nuevo método de levitación magnética que es más simple y no requiere imanes superconductores.



Este sistema utiliza bobinas de levitación conectadas en paralelo a través de un circuito de alambre de cobre que se hallan en la vía, lo que permite la levitación por la intensas fuerzas de repulsión entre los imanes (el vagón) y las bobinas (vías).



Un análisis simplificado<sup>23</sup> del circuito de las bobinas lleva a que la corriente que circula por ellas satisface la ecuación:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI = \omega \Phi_0 \cos(\omega t)$$

donde  $V$  e  $I$  son la tensión y corriente inducidas,  $L$  y  $R$  son la inductancia y resistencia del circuito,  $\Phi_0$  es el flujo inducido pico y la frecuencia  $\omega = 2\pi\nu/\lambda$  depende de la velocidad  $v$  del tren y la longitud de onda  $\lambda$  del campo magnético creado por el arreglo de Halbach. La solución forzada a esta ecuación diferencial es:

$$I(t) = \frac{\Phi_0 / L}{1 + (R / \omega L)^2} \left[ \frac{R}{\omega L} \cos(\omega t) + \operatorname{sen}(\omega t) \right]$$

A partir de estas expresiones, las fuerzas promedio de levitación e impulsora se pueden escribir como:

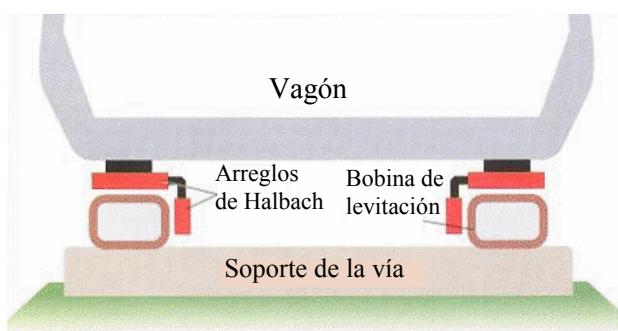
$$\langle F_{\uparrow} \rangle = \frac{B_0^2 w^2 e^{-2kh}}{2kL \left[ 1 + (R / \omega L)^2 \right]} \quad \langle F_{\rightarrow} \rangle = \frac{B_0^2 w^2 (R / \omega L) e^{-2kh}}{2kL \left[ 1 + (R / \omega L)^2 \right]}$$

con  $k = 2\pi/\lambda$ .

<sup>22</sup> Las figuras de esta sección fueron tomadas de Scientific American, Enero 2000.

El diagrama de campo magnético se ha calculado con el software FEMM 3.2.

<sup>23</sup> R.F. Post & D.D. Ryutov, "The Inductrack: a simpler approach to magnetic levitation", *Proceedings of the Sixteenth International Conference on Magnet Technology*, IEEE Trans. Appl. Superc., 10, 901-904, 2000



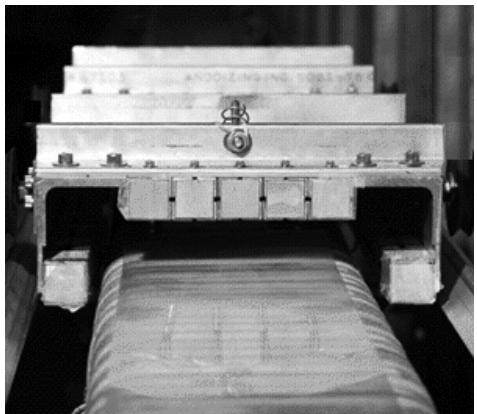
la suficiente repulsión para lograr la levitación.



El sistema se ha probado con éxito en un prototipo en escala 1:20 formado por una vía de 20 m de largo (imagen superior) con unas 1000 bobinas rectangulares de alrededor de 15 cm de ancho cada una. Los extremos de las bobinas se cortocircuitaron pero no se conectaron a fuente eléctrica alguna. A lo largo de la vía se acomodaron rieles de aluminio sobre los cuales se dispuso un carro de prueba (imagen inferior) de 22 Kg con imanes de Halbach en su piso. Otros imanes se colocaron lateralmente para dar estabilidad lateral al movimiento.

El carro se arrancó mecánicamente desde un extremo de la vía a velocidades superiores a 10 m/s. Fotografías de alta velocidad y cámaras de video revelaron que la estabilidad del carro era buena durante la levitación.

Estudios teóricos muestran que esta disposición puede levitar cargas 50 veces la masa de los imanes involucrados, llegando a levantar 50 toneladas por metro cuadrado de imán, cuando se usan imanes permanentes de NdFeB.



## RESUMEN

En este capítulo hemos presentado el comportamiento de los campos eléctrico y magnético variables en el tiempo.

- La **ley de Faraday** establece que en un circuito que encierra un flujo magnético variable en el tiempo se mide una **fem**: 
$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$
- Esta expresión se puede extender a una relación entre los campos: 
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$
- Aplicando el balance de energía a un circuito  $RL$  se encuentra que la **energía almacenada** en el campo magnético creado por la inductancia es: 
$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$
- que se puede reescribir en términos de los campos: 
$$U_m = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{H} \bullet \mathbf{B} dv$$
- La ley de Ampère y la ecuación de continuidad no son compatibles. Para que lo sean Maxwell introduce una “**densidad de corriente de desplazamiento**” en la ley de Ampère, lo que lleva a que las variaciones en el tiempo de campo eléctrico generen campo magnético: 
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Las leyes de Gauss sobre el campo eléctrico y el magnético, la ley de Faraday y la ley de Maxwell-Ampère constituyen las **ecuaciones de Maxwell**, que describen completamente los fenómenos electromagnéticos macroscópicos.

- El balance de energía en las interacciones electromagnéticas se describe en el teorema de Poynting: 
$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \bullet \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} dV = - \int_V \left( \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV$$
 y en forma diferencial: 
$$\nabla \bullet (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \bullet \mathbf{j} + \left( \mathbf{E} \bullet \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \bullet \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{N} = -\mathbf{E} \bullet \mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$
- Cualquier variación en el tiempo de los campos con sentido físico puede expresarse mediante una **integral de Fourier**, que conceptualmente es una superposición de señales **armónicas**: 
$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty F(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} dt$$

Ante un problema que involucra una señal electromagnética, y debido a la **linealidad** de las ecuaciones de Maxwell es posible descomponer la señal en sus componentes armónicas, analizar el comportamiento de cada una y luego reconstituir la señal resultante por superposición.

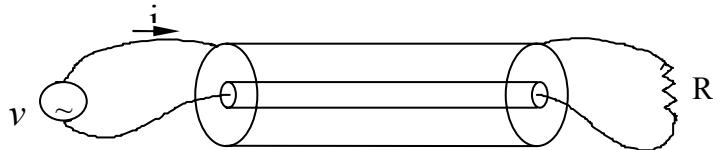
- Para variaciones armónicas los campos se expresan mediante **fasores**:  

$$\tilde{g}(t) = g_0 e^{i(\omega t + \theta_0)} \Rightarrow \begin{cases} \Re[\tilde{g}(t)] = g_0 \cos(\omega t + \theta_0) \\ \Im[\tilde{g}(t)] = g_0 \sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$
- Se describen las ecuaciones fundamentales en esta notación para uso futuro, en particular, las ecuaciones de Maxwell y el teorema de Poynting, a partir de la relación **válida solamente para funciones armónicas**:

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{4} [f_0 g_0^* + f_0^* g_0] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0 g_0^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{f_0^* g_0\}$$

## PROBLEMAS

- 5.1) Un generador eléctrico consiste en un bobinado de  $N$  espiras rectangulares de lados  $a$  y  $b$  y resistencia  $R$  que rotan con  $\omega = \omega_0 \hat{z}$  constante en presencia de una inducción magnética  $\mathbf{B} = B_0 \hat{x}$  constante. La normal a las espiras siempre está en el plano  $xy$ . Calcule la corriente inducida a partir de 1) la variación del flujo magnético y 2) el campo eléctrico de movimiento.
- 5.2) Un circuito circular formado por  $N$  vueltas de un alambre conductor está en el plano  $xy$  con el centro en el origen de un campo magnético especificado por
- $$\vec{B} = B_0 \cos(\pi r/2b) \sin(\omega t) \hat{z}$$
- donde  $b$  es el radio del circuito y  $\omega$  es la frecuencia angular. Determine la fuerza electromotriz inducida en el circuito.
- 5.3) Se dispone de un cable coaxil de longitud  $L = 5 \text{ cm}$ , de radio interior  $a = 1 \text{ mm}$  y exterior  $b = 5 \text{ mm}$  con vacío entre ambos. Se conecta el cable a un generador que produce una tensión  $V = V_0 \cos(\omega_0 t)$  con  $V_0 = 3 \text{ V}$  y  $\omega_0 = 2\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$ . Calcular el campo eléctrico dentro del cable utilizando la aproximación cuasiestática.
- 5.4) Considere un circuito RC serie formado por una resistencia  $R$  y un capacitor  $C$  de placas paralelas de radio  $a$  y separadas por una distancia  $d$ . En  $t = 0$  se cierra una llave que conecta una fuente  $V_0$  y el capacitor comienza a cargarse. Halle los campos eléctrico y magnético y la corriente de desplazamiento dentro del capacitor utilizando la aproximación cuasiestática (desprecie efectos de borde). Verifique que los campos obtenidos no satisfacen las ecuaciones de Maxwell.
- 5.5) Una fuente de voltaje  $v$  se conecta a una resistencia  $R$  mediante una extensión de cable coaxil ideal (resistencia muy baja) de radios interno  $a$  y externo  $b$ , como se muestra en la figura. Demuestre que utilizando el vector de Poynting en el aislante, se obtiene la misma potencia instantánea que se disipa en la resistencia. Suponga válida la aproximación cuasiestática.



- 5.6) Calcule, a partir de la energía, la autoinductancia de un solenoide de  $L = 20 \text{ cm}$  de largo, radio  $R = 3 \text{ cm}$ , bobinado con  $N = 1200$  vueltas. En la práctica, una expresión que introduce una corrección por efectos de borde y que se utiliza cuando  $L > 0.8R$  es  $L = \frac{\pi \mu R^2 N^2}{L + 0.9R} \text{ Hy}$ . ¿Cuál es el error cometido al usar la expresión hallada en a)?.
- 5.7) Por un cable muy largo circula una corriente de  $50 \text{ A}$  a  $50 \text{ Hz}$ . A  $50 \text{ cm}$  del cable se ha dispuesto una espira de  $1 \text{ m}$  de alto por  $10 \text{ cm}$  de ancho. El lado mayor es paralelo al cable. Se desea saber si la potencia extraída es suficiente para hacer funcionar una lámpara ( $65 \Omega$ ,  $220 \text{ V}$ ) conectada en serie con la espira.

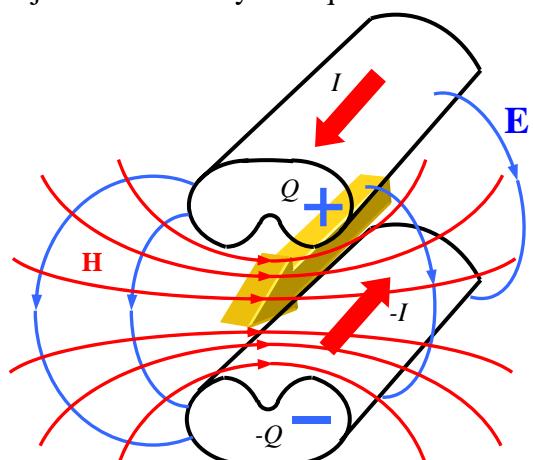
- 5.8) Un capacitor de placas paralelas de radio  $a$  separadas por una distancia  $d$ , en cuyo interior hay un dieléctrico con permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $\sigma$ , está alimentado con una tensión del tipo  $V(t)=V_0 e^{j\omega t}$ . Determinar, a partir de las ecuaciones de Maxwell, los campos en el interior del capacitor y la impedancia del sistema.
- 5.9) Se tiene una espira circular de radio  $a$ , resistencia  $R$  y coeficiente de autoinducción  $L$  perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el campo se apaga exponencialmente con un tiempo característico  $\tau$ , calcular la corriente  $I(t)$  inducida en la espira. ¿En qué condiciones continuará circulando corriente aún después de haberse apagado el campo exterior?

$$[\text{Rta: } I(t) = \frac{\pi a^2 B_0}{R\tau - L} (e^{-t/\tau} - e^{-Rt/L})]$$

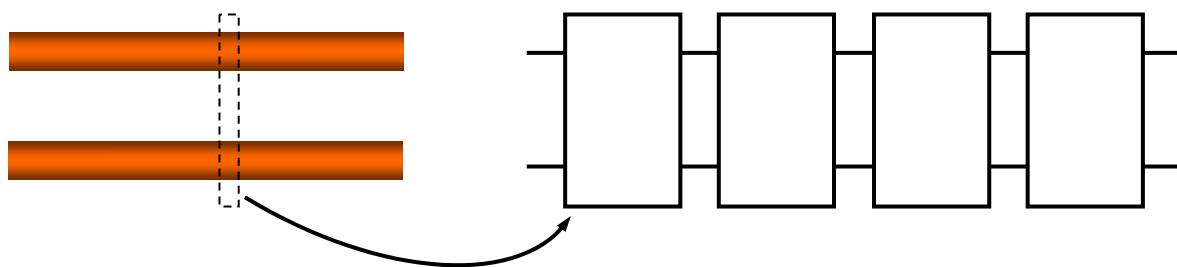
## 6 - Líneas de Transmisión

### Guías de ondas y líneas de transmisión

Una **guía de ondas** es un dispositivo que se usa para transportar energía electromagnética y/o información de un sitio a otro. Generalmente se usa el término **línea de transmisión** a la guía de ondas usada en el extremo de menor frecuencia del espectro. **A estas frecuencias es posible utilizar un análisis cuasiestático.** Para frecuencias más elevadas la aproximación cuasiestática deja de ser válida y se requiere un análisis en términos de campos, que es de mayor complejidad. Veremos este tratamiento en el Capítulo 9.



Podemos pensar a una línea de transmisión básica como un par de electrodos que se extienden paralelos por una longitud grande (en relación con la longitud de onda) en una dada dirección. El par de electrodos se hallan cargados con distribuciones de carga (variables a lo largo de la línea) iguales y opuestas, formando un capacitor distribuido. Al mismo tiempo circulan corrientes opuestas (variables a lo largo de la línea) de igual magnitud, creando campo magnético que puede expresarse a través de una inductancia distribuida. La potencia fluye a lo largo de la línea. Los ejemplos más importantes de líneas de transmisión son el par bifilar, el coaxil y la microcinta.



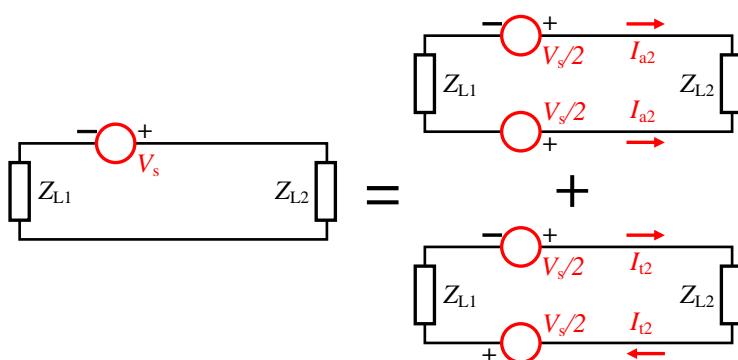
Para usar un modelo cuasiestático se representa a la línea como una cascada de cuadripolos. Cada cuadripolo representa un tramo de línea de pequeña longitud frente a la mínima longitud de onda de la señal. Por lo tanto cada tramo se puede modelizar como un circuito usando la aproximación cuasiestática, como veremos en la siguiente sección.

Este modelo se conoce como **modelo de constantes distribuidas**.

Esta descripción corresponde a una línea **bifilar**. En muchas aplicaciones es necesario considerar líneas **multifilares**, como por ejemplo en circuitos impresos e integrados. Para el análisis circuital es necesario usar coeficientes de capacidad/inducción e inductancias parciales.

La energía electromagnética puede ingresar a una línea de transmisión en forma de excitación **concentrada o distribuida**. Las fuentes concentradas se aplican en un punto determinado de la línea y la señal se propaga por la línea desde allí. Se simula este tipo de excitación mediante fuentes de tensión y/o corriente conectadas en el sitio de ingreso de la excitación (por ejemplo, la conexión de la línea a otro circuito).

En el caso de una fuente distribuida la excitación se distribuye a lo largo de la línea. Se simula esta situación mediante una onda, habitualmente plana, que ilumina a la línea en toda o parte de



su extensión.

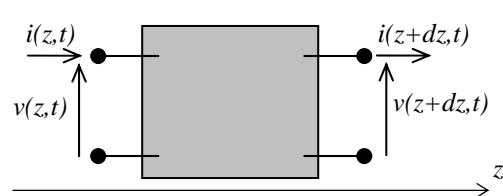
Una dada excitación puede generar distintas respuestas de la línea. En la figura se esquematiza una fuente concentrada en un punto de una línea cargada en ambos extremos. Esta fuente produce corrientes a lo largo de la línea que pueden representarse como la superposición de corrientes en modo común (**modo de antena**) y

corrientes en modo diferencial (**modo de línea de transmisión**).

La circulación de corrientes variables en el tiempo produce emisión de radiación electromagnética, como hemos visto en el Capítulo introductorio. En el modo de antena las corrientes circulan en el mismo sentido en ambos conductores, lo que refuerza los campos individuales radiados, mientras que en el modo de línea las corrientes tienen sentidos opuestos y la radiación neta es baja. Por este motivo es importante analizar el comportamiento de radiación de líneas para estimar la posible interferencia por radiación. Este fenómeno no se observa en los circuitos de parámetros concentrados ya que la eficiencia de radiación de tramos cortos de corriente (comparados con la longitud de onda de los campos) es muy baja, como veremos en el Capítulo 10.

### Modelo circuitual de la línea bifilar ideal

En una línea de transmisión hay dimensiones, las transversales, que cumplen la condición cuasiestática ( $D \ll \lambda$ ), pero la otra dimensión (longitudinal) habitualmente no la cumple. Sin embargo, podemos ver a la línea como una sucesión o **cascada** de cuadripolos de longitud infinitesimal y para cada uno de ellos usar un modelo circuital, cuyos parámetros descriptivos son las tensiones y corrientes a la entrada y salida, ya que las dimensiones del cuadripolo satisfacen la condición cuasiestática.



Elegimos la dirección del eje cartesiano  $z$  a lo largo de la línea. Cada tramo de longitud  $dz$  a lo largo de la dirección  $z$  puede asociarse a un cuadripolo, como se esquematiza en la figura.

Asumimos en esta sección que la línea no presenta pérdidas de energía (**línea ideal**). En tal caso los conductores de la línea serán perfectos ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) y el dieléctrico entre ellos tampoco tendrá pérdidas.

Las cargas y corrientes en los conductores crearán campos eléctricos y magnéticos cuya energía almacenada puede modelizarse por componentes reactivos puros: capacidad e inductancia. La capacidad está asociada al campo eléctrico creado por las cargas en los conductores de la línea y la inductancia al campo magnético generado por las corrientes que circulan por ella. Nos queda así el cuadripolo de la figura, donde  $Ldz$  es la inductancia del tramo y  $Cdz$  su capacidad.

Podemos aplicar ahora las leyes de Kirchhoff a este modelo cuasiestático. La primera ley, aplicada al nodo A lleva a:

$$i(z + dz) - i(z) + Cdz \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z = 0$$

donde el último término representa la corriente que sale de A por el capacitor. Pero, a primer orden:  $i(z + dz) - i(z) \approx \frac{\partial i}{\partial z} dz \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z \approx -C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z$

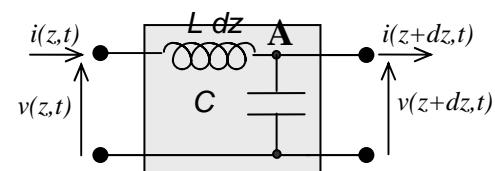
Análogamente, si aplicamos la segunda ley de Kirchhoff recorriendo la malla formada por el cuadripolo en sentido antihorario, tenemos:  $v(z + dz) + L dz \frac{\partial i}{\partial t} - v(z) \approx 0$

de donde se obtiene, nuevamente a primer orden:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z \approx -L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z$$

En resumen:

$$\frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z = -C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z \approx -L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z$$



Estas dos ecuaciones diferenciales ligadas para la tensión y la corriente a la entrada del cuadripolo son las llamadas **ecuaciones del telegrafista** para la línea ideal.

Con el fin de analizar el significado de estas ecuaciones nos conviene desacoplar las ecuaciones diferenciales, para lo cual derivamos la primera respecto del tiempo y la segunda respecto de  $z$ :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z}$$

donde se ha sobreentendido que las cantidades se calculan en  $z$ . Pero las derivadas cruzadas son iguales, de manera que nos queda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Esta ecuación diferencial para la tensión  $v(z,t)$  se denomina **ecuación de ondas** o **ecuación de**

**D'Alembert.** Es una ecuación diferencial lineal homogénea a derivadas parciales, cuya solución (**APENDICE 6**) es cualquier función del tipo:

$$v(z, t) = f(z \mp ct) \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esta función representa una onda que se propaga a lo largo del eje  $z$  con velocidad  $c$ , de comportamiento similar a las ondas en una cuerda vibrante.

Si se toma el signo (-) de la doble determinación, la onda se propaga en el sentido de  $+z$  (onda progresiva), mientras que si se toma el signo (+) la propagación es según  $-z$  (onda regresiva).

Se obtiene una ecuación idéntica para la corriente  $i(z, t)$  a lo largo de la línea.

**Se observa entonces que la solución a las ecuaciones del telegrafista en una línea ideal son ondas de tensión y corriente que se propagan a lo largo de la línea.**

Además las ondas de tensión y corriente están vinculadas entre sí.

Consideremos una onda progresiva con:  $v(z, t) = f(z - ct)$  y  $i(z, t) = g(z - ct)$ .

Entonces:  $\frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial g}{\partial u} \end{cases}$

Luego:  $\frac{\partial f}{\partial u} = Lc \frac{\partial g}{\partial u}$  e integrando:  $f(z - ct) = \sqrt{\frac{L}{C}} g(z - ct)$

de donde:  $v(z, t) = Z_0 i(z, t)$  con  $Z_0 = \sqrt{L/C}$

La cantidad  $Z_0$  tiene dimensiones de impedancia y se llama **impedancia característica** de la línea. Junto con la **velocidad de propagación** de las ondas  $c = 1/\sqrt{LC}$  son los parámetros fundamentales que describen el comportamiento de la línea como dispositivo transmisor de energía.

Si ahora tomamos el par de funciones correspondiente a una onda regresiva:

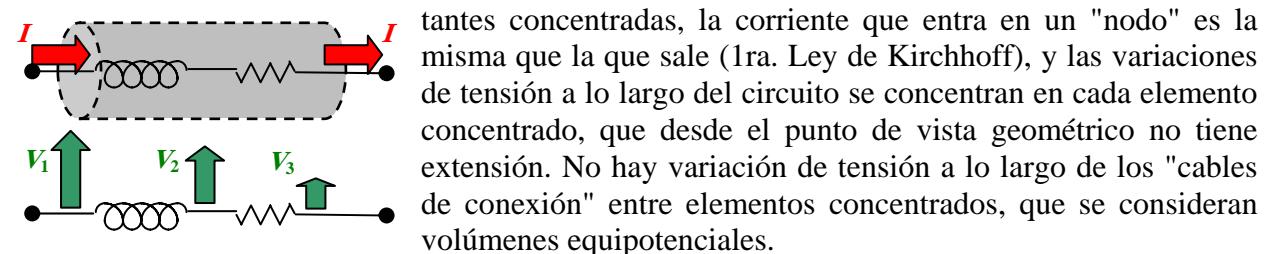
$$v(z, t) = f(z + ct) \quad \text{y} \quad i(z, t) = g(z + ct)$$

es fácil demostrar que:  $v(z, t) = -Z_0 i(z, t)$  de modo que en general:

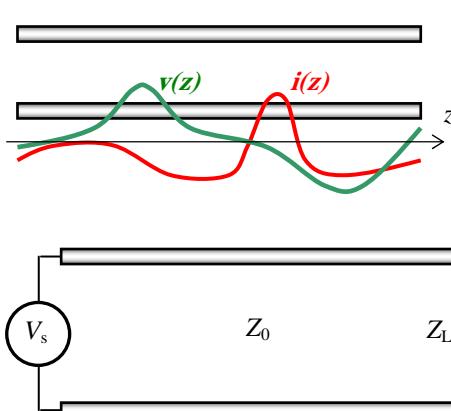
$$v_{\pm}(z, t) = \pm Z_0 i_{\pm}(z, t) \quad \text{con} \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

donde el signo + corresponde a la onda progresiva y el signo - a la regresiva.

Debemos señalar las diferencias de este modelo circuital de **constantes distribuidas** con el modelo de **constantes concentradas** que vimos en el Capítulo precedente. En un circuito de constantes concentradas, la corriente que entra en un "nodo" es la misma que la que sale (1ra. Ley de Kirchhoff), y las variaciones de tensión a lo largo del circuito se concentran en cada elemento concentrado, que desde el punto de vista geométrico no tiene extensión. No hay variación de tensión a lo largo de los "cables de conexión" entre elementos concentrados, que se consideran volúmenes equipotenciales.



En una línea de transmisión la situación es totalmente diferente. La corriente que cruza secciones transversales a la línea y la tensión entre los conductores medida sobre una sección transversal dependen de la posición. Así, no se cumplen las leyes de Kirchhoff. Hay acumulación de carga a lo largo de la línea. La tensión varía punto a punto a lo largo de la línea y no hay sitios (salvo que se conecte un elemento concentrado desde fuera de la línea) donde haya una "caída" abrupta de



tensión<sup>1</sup>.

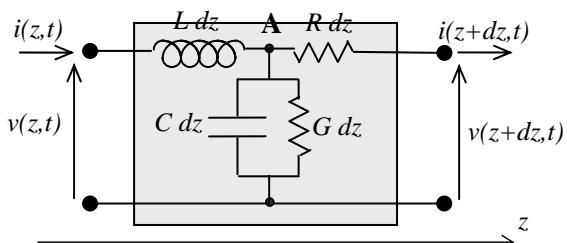
Por este motivo, la línea **no puede reemplazarse por una impedancia concentrada**, salvo en el caso particular en que su dimensión longitudinal sea despreciable frente a la mínima longitud de onda de la señal (condición cuasiestacionaria), donde habitualmente se la puede reemplazar

por un circuito equivalente de dos puertas como veremos más abajo, pero casi nunca por un par de "cables de conexión" equipotenciales.

## Líneas con pérdidas

El modelo que hemos visto es un modelo ideal, es decir, sin pérdidas de energía. Sin embargo, todos los sistemas reales tienen pérdidas. En una línea de transmisión las pérdidas se dan por:

- pérdidas por efecto Joule en los conductores;
- pérdidas dieléctricas.



El modelo circuital de cuadripolo de la sección precedente puede incorporar estas pérdidas mediante una **resistencia en serie**, que modela las pérdidas por efecto Joule debidas a la circulación de corriente en los conductores de la línea y una **conductancia en paralelo**, que modela las pérdidas dieléctricas mediante una conductividad equivalente del material, como se ilustra en la figura.

Para obtener las ecuaciones del telegrafista para este modelo de la línea con pérdidas, aplicamos nuevamente la primera ley de Kirchhoff al nodo A:

$$i(z + dz) - i(z) = -G dz v(z) - C dz \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z = -G v(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z$$

Recorriendo ahora la malla que forma el circuito, por la segunda ley de Kirchhoff:

$$v(z + dz) - v(z) = -R dz i(z) - L dz \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z = -R i(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z$$

Las ecuaciones diferenciales acopladas son las nuevas **ecuaciones del telegrafista**. Para resolverlas nuevamente se desacoplan las ecuaciones a través de las derivadas cruzadas para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_z &= -R i(z) - L \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -R \frac{\partial i}{\partial z} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = RGv + RC \frac{\partial v}{\partial t} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \\ \frac{\partial i}{\partial z} \Big|_z &= -Gv(z) - C \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_z \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -G \frac{\partial v}{\partial t} - C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

de donde:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= RGv + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} &= RGi + (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

<sup>1</sup> En la figura se puede ver que la relación entre tensión y corriente es variable a lo largo de la línea. Esto ocurre en general cuando la línea está conectada a una carga porque existen simultáneamente una onda progresiva y una onda regresiva y la relación entre tensión y corriente ya no es  $Z_0$ .

Estas son ecuaciones diferenciales de tipo ondulatorio modificado. Quedan ecuaciones de onda de D'Alembert si consideramos pérdidas nulas ( $R = G = 0$ ).

No existe solución general de estas ecuaciones como en el caso ideal. Sin embargo cualquier forma de onda físicamente realizable puede expresarse mediante una integral de Fourier<sup>2</sup> y la resolución es simple para **variaciones armónicas**:

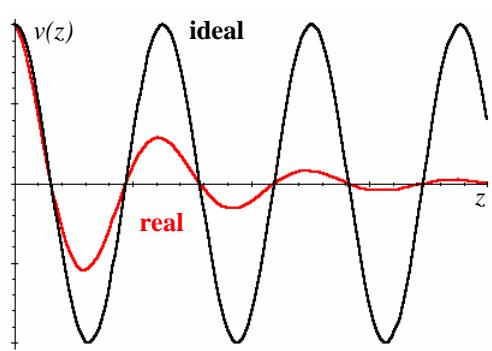
$$v(z, t) = v_s(z) e^{i \omega t} \quad i(z, t) = i_s(z) e^{i \omega t}$$

en notación fasorial. Con esta elección la ecuación diferencial para la tensión queda:

$$\frac{d^2 v_s}{dz^2} = [RG + i\omega(RC + LG) - \omega^2 LC] v_s \Rightarrow \frac{d^2 v_s}{dz^2} + \gamma^2 v_s = 0$$

con:  $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 LC - RG - i\omega(RC + LG)} = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)}$

y se obtiene una ecuación similar para la corriente. Estas ecuaciones son llamadas **ecuaciones de Helmholtz**, donde el **número de onda**  $\gamma = \beta - i\alpha$  es **complejo**, indicando una **propagación con atenuación**, causada por las pérdidas. Las ondas de tensión y corriente con número de onda complejo quedan:



$$v(z, t) = v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad i(z, t) = i_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

donde se ve que las amplitudes decrecen a medida que la onda se propaga por la atenuación producida por las pérdidas. En la figura se observan dos ondas armónicas de igual frecuencia, una en una línea ideal y la otra en una línea real con  $\alpha = \beta/5$ . La velocidad de propagación de las ondas es la velocidad de propagación de los planos de fase constante o velocidad de fase:

$$\omega t - \beta z = cte. \Rightarrow v_f = \omega/\beta$$

En general, la relación entre  $\omega$  y  $\beta$  es **no lineal** por la presencia de la raíz cuadrada en la expresión de  $\gamma$ . Esto lleva a que la velocidad de las ondas (la velocidad de fase, en rigor, como se verá en el Capítulo 8) dependa de la frecuencia, fenómeno conocido como **dispersión** de un paquete de ondas porque algunas componentes de Fourier viajan más rápido que otras.

Como  $\gamma = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \omega\sqrt{LC}\sqrt{(1 - iR/\omega L)(1 - iG/\omega C)}$

si  $R/\omega L = G/\omega C \Rightarrow \gamma = \beta - i\alpha = \omega\sqrt{LC}(1 - iR/\omega L)$  y se ve que en este caso la relación entre  $\omega$  y  $\beta$  es **lineal** por lo que no hay dispersión. Las líneas que cumplen esta condición son entonces **no dispersivas** o **no distorsivas**.

Si definimos:

$Z = R + i\omega L$  (**impedancia serie** por unidad de longitud)

$Y = G + i\omega C$  (**admitancia paralelo** por unidad de longitud)

tenemos:

$$\gamma = \sqrt{-ZY}$$

Si vinculamos nuevamente las ondas de tensión y de corriente mediante las ecuaciones del telegrafista podemos obtener la expresión de la impedancia característica de la línea con pérdidas:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = Z'_0 + iZ''_0$$

<sup>2</sup> Esto surge de que el cuadrado de cualquier onda de tensión y/o corriente, integrado en el tiempo es proporcional a la energía de la onda, que es acotada.

La impedancia característica compleja indica que hay un **desfasaje temporal** entre la onda de tensión y la onda de corriente para el mismo  $z$  en la línea.

Análogamente podemos demostrar que para una onda regresiva:

$$v(z, t) = v_0 e^{i(\omega t + k z)} \quad i(z, t) = i_0 e^{i(\omega t + k z)} \Rightarrow v_0 = -Z_0 i_0$$

- **La impedancia característica de una línea de transmisión es la impedancia (relación entre la tensión y la corriente) que se mediría en un plano de  $z = cte.$  sobre la línea infinita para una onda progresiva.**
- **En general  $Z_0$  es compleja, lo que señala un desfasaje entre las ondas de tensión y de corriente.**

## Líneas de bajas pérdidas

En los casos prácticos, las líneas se usan para transmitir energía por medio de ondas guiadas. Por lo tanto es esencial minimizar las pérdidas de propagación.

Hablamos de una línea de **bajas pérdidas** cuando:

$$R \ll \omega L \quad G \ll \omega C$$

lo que equivale a decir que la potencia de pérdidas es mucho menor que la potencia media almacenada en el campo electromagnético (que se propagará como una onda) en la línea.

Podemos aproximar en este caso las expresiones de  $\gamma$  y  $Z_0$ :

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} = \sqrt{-(R + i\omega L)(G + i\omega C)} = \sqrt{\omega^2 LC \left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 - i\frac{G}{\omega C}\right)}$$

Si despreciamos el término de orden superior  $RG/\omega^2 LC$  y luego desarrollamos en serie de Taylor para  $i(R/\omega L + G/\omega C) \rightarrow 0$  obtenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha \approx \omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - i\frac{R}{\omega L} - i\frac{G}{\omega C}} \approx \omega\sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{i}{2} \left( \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \right]$$

de donde:  $\beta \approx \omega\sqrt{LC}$        $\alpha \approx \frac{\beta}{2} \left( \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \ll \beta$

En esta aproximación la velocidad de las ondas será:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

y es la misma para cualquier frecuencia, de modo que para bajas pérdidas no hay dispersión.

Debido a la velocidad finita de propagación, existe un retardo de las señales al atravesar una línea. Este **retardo de propagación** se mide en s por m de línea y es la inversa de la velocidad en la línea:  $\tau_p = 1/v_f = \sqrt{LC}$ .

$\beta$  tiene unidad de  $rad/m$ , mientras que la unidad de  $\alpha$  son  $neper/m$ . Suele usarse la unidad  $dB/m$ , donde:  $\alpha(dB/m) = 20 \log_{10}(e) \alpha(neper/m) \approx 8.686 \alpha(neper/m)$ .

La impedancia característica es, con similares aproximaciones:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1 - iR/\omega L}{1 - iG/\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right) \left(1 + i\frac{G}{\omega C}\right)} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left[ 1 + \frac{i}{2} \left( \frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \right]$$

de donde:  $Z_0 = Z'_0 + iZ''_0$     con:     $Z'_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}$      $Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left( \frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \ll Z'_0$

**Ejemplo 6.1:** Calcular las constantes de propagación y de atenuación, la velocidad de fase y la impedancia característica a  $f = 10 \text{ MHz}$  de una línea con los siguientes parámetros:

- $L = 1.2 \mu\text{H}/m$ ,  $C = 30 \text{ pF}/m$ ,
- $L = 1.2 \mu\text{H}/m$ ,  $C = 30 \text{ pF}/m$ ,  $R = 0.1 \Omega/m$ ,
- $L = 1.2 \mu\text{H}/m$ ,  $C = 30 \text{ pF}/m$ ,  $R = 0.1 \Omega/m$ ,  $G = 10^{-6} \text{ S/m}$ .

En el caso a) se trata de una línea ideal:

$$\gamma = \beta = \omega\sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad v_f = 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55c \quad Z_0 = \sqrt{L/C} = 200 \Omega$$

en el caso b) hay pérdidas en los conductores, pero:  $R = 0.1 \Omega/m \ll \omega L \approx 75.4 \Omega \cdot \text{m}$  de modo que es una línea de bajas pérdidas, y tenemos:

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} \approx 0.377 \text{ m}^{-1} \quad \alpha \approx R\beta/2\omega L \approx 0.00025 \text{ m}^{-1} \quad v_f \approx 1/\sqrt{LC} \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.55c$$

$$Z'_0 \approx \sqrt{L/C} = 200 \Omega \quad Z''_0 \approx -RZ'_0/2\omega L \approx 0.13 \Omega$$

En el caso c) hay pérdidas conductoras y dieléctricas. Usamos las fórmulas generales:

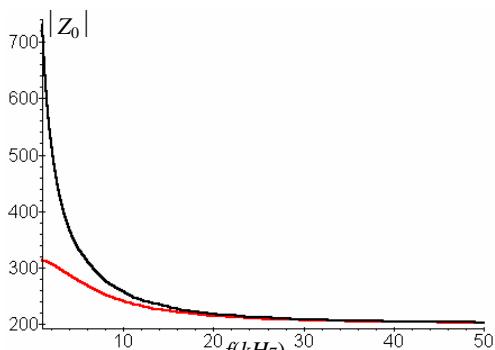
$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C$$

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{-ZY} \approx (0.377 - i3.5 \times 10^{-4}) \text{ m}^{-1} \Rightarrow v_f = \omega/\beta \approx 1.67 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.56c$$

$$Z_0 = \sqrt{Z/Y} \approx (200 - i0.08) \Omega$$

Se observa que las pérdidas en b) y c) no introducen diferencias significativas en los valores de los parámetros fundamentales de la línea respecto del caso ideal.

**Ejemplo 6.2:** Graficar la variación del módulo de la impedancia característica en función de la frecuencia para la línea c) del Ejemplo previo.



El módulo de la impedancia característica es:

$$|Z_0| = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

En el caso b) no hay pérdidas dieléctricas, de modo que la impedancia queda indefinida para  $\omega \rightarrow 0$ . Para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $Z_0 \rightarrow \sqrt{L/C} = 200 \Omega$ . En la gráfica de la izquierda se presenta en negro la variación de  $|Z_0|$  con la frecuencia. En el caso c), para  $\omega \rightarrow 0$ ,  $Z_0 \rightarrow \sqrt{R/G} \approx 316 \Omega$ .

La gráfica es el trazo en rojo. En alta frecuencia el valor es el mismo que en el caso b). En ambos casos  $|Z_0|$  decrece hacia el valor de alta frecuencia.

**En estos ejemplos se pone en evidencia la fuerte dependencia del valor y el comportamiento de los parámetros de una línea con la frecuencia.**

## Potencia

Las ondas electromagnéticas transportan energía, que puede describirse mediante el vector de Poynting:  $\mathbf{N}(z,t) = \mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{H}(z,t)$ . Dado que los campos pueden relacionarse con las ondas de tensión y corriente en la línea, es más sencillo derivar el transporte de energía usando el cuadripolo del modelo circuital de la línea. Podemos hallar un análogo del teorema de Poynting a partir de las ecuaciones del telegrafista:

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -Gv - C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

Multiplicamos la primera ecuación por  $v$  y la segunda por  $i$  y sumamos miembro a miembro para obtener:

$$v \frac{\partial i}{\partial z} = -Gv^2 - \frac{C}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad i \frac{\partial v}{\partial z} = -Ri^2 - \frac{L}{2} \frac{\partial i^2}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (vi) = -\left(Gv^2 + Ri^2\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} Cv^2 + \frac{1}{2} Li^2\right)$$

de donde se ve que el flujo de potencia  $vi$  se convierte en potencia disipada en los **elementos activos**  $G$  y  $R$  o se almacena en los **elementos reactivos**  $L$  y  $C$ .

Al igual que en el caso de los campos, podemos calcular la potencia media transportada por la onda utilizando la notación fasorial:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*)$$

Para una onda progresiva armónica en una línea sin pérdidas:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 e^{i(\omega t - kz)} i_0^* e^{-i(\omega t - kz)}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*}\right) = \frac{|v_0|^2 Z'_0}{2|v_0|^2}$$

En el caso de una línea **con pérdidas** la potencia va decayendo por la atenuación a medida que se propaga:

$$\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} i_0^* e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - \beta z)}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(v_0 \frac{v_0^*}{Z_0^*}\right) e^{-2\alpha z} = \frac{|v_0|^2 Z'_0}{2|v_0|^2} e^{-2\alpha z}$$

De aquí se observa que la relación entre la potencia que fluye en  $z$  y en  $(z+1m)$  es:

$$\frac{\langle vi \rangle_z}{\langle vi \rangle_{z+1}} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+1)}} = e^{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\langle vi \rangle_z}{\langle vi \rangle_{z+1}}\right)$$

La relación de potencias se puede expresar:

$$10 \log_{10} \left( \frac{\langle vi \rangle_z}{\langle vi \rangle_{z+1}} \right) = 10 \log_{10}(e^{2\alpha}) = 20 \log_{10}(e) \alpha$$

de donde surge la expresión de la atenuación en decibeles por metro.

**Ejemplo 6.3:** Calcular la potencia activa que viaja por las líneas del **Ejemplo 6.1** si se propaga una onda progresiva con  $v_0 = 10V$ .

Tenemos, en general:  $\langle vi \rangle = \frac{|v_0|^2 Z'_0}{2|Z_0|^2}$  Entonces:

a)  $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2}{2Z_0} \approx 0.25W$       b)  $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z'_0}{2|Z_0|^2} \approx 0.25W$       c)  $\langle vi \rangle = \frac{v_0^2 Z'_0}{2|Z_0|^2} \approx 0.447W$

## El primer cable submarino. Thomson y Heaviside.

En la década de 1830 Samuel Morse había establecido la posibilidad práctica de enviar mensajes mediante corrientes eléctricas a lo largo de hilos conductores, enviando un mensaje desde Baltimore a Washington. Poco a poco gran parte de los países europeos y Estados Unidos tendieron redes de telegrafía que comunicaron las grandes ciudades. El siguiente paso sería establecer una comunicación intercontinental, para lo cual se requería instalar un cable submarino. En 1851 se estableció una conexión entre Inglaterra y Francia.

En 1856 se creó la Atlantic Telegraph Company con un capital de £ 350.000 (entonces equivalentes a unos u\$s 1.400.000), presidida por el empresario norteamericano Cyrus Field, cuyo único propósito era tender el primer cable transatlántico. Uno de sus diecisiete directores era el profesor de filosofía natural de la Universidad de Glasgow, **William Thomson** (izquierda).



En 1854 Thomson había aplicado el método de Fourier - quien había resuelto el problema de la transmisión del calor - a la propagación de los impulsos eléctricos en un cable largo. El modelo de Thomson era equivalente al que hemos propuesto para una línea con pérdidas, pero sin considerar los efectos inductivos ( $L = 0$ ) ni pérdidas dieléctricas ( $G = 0$ ). Llegaba así a ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RG v + (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RC \frac{\partial v}{\partial t}$$

que es una ecuación de difusión del tipo de la transmisión del calor.

No existe para una perturbación que siga esta ecuación diferencial una velocidad definida. Ante un estímulo en forma de escalón la respuesta es una función error:

$$i(z, t) = \sqrt{C/\pi R t} \exp(-RCz^2/4t)$$

Para una línea de longitud  $L$ , el máximo de corriente se da para:  $t_{\max} = \frac{1}{2} RCL^2$

Esta es la famosa "ley de cuadrados" que encontró Thomson. Significa que, si se aplica un pulso telegráfico a la entrada de la línea, el tiempo que tarda en llegar al otro extremo es proporcional al cuadrado de la longitud de la línea.

La tarea de colocar el cable se dividió entre dos barcos, la fragata norteamericana Niagara y el buque de guerra británico Agamemnon. El plan era navegar hasta el punto medio del tendido y desde allí el Niagara colocaría el cable hacia Norteamérica y el Agamemnon colocaría el cable hacia Inglaterra. El tendido comenzó el 30 de julio de 1857. Luego de muchas rupturas, la colocación se completó finalmente en el quinto intento más de un año después, el 5 de agosto de 1858. Los dos puntos extremos del tendido eran Valentia Harbour, en Irlanda, y Trinity Bay en Newfoundland.

El 16 de agosto se estableció la primera comunicación, con el mensaje: "[Glory to God in the highest, and on earth, peace, good will to men](#)". Sin embargo, el cable dejó de funcionar tres semanas después. El "electricista" a cargo, un aficionado llamado O. E. W. Whitehouse, era en realidad un médico retirado que se había dedicado a la electricidad y la telegrafía y no tenía una comprensión acabada de los fenómenos involucrados. Por ejemplo, dijo sobre el modelo teórico de Thomson y su ley de cuadrados:

"Con toda honestidad, estoy obligado a responder que creo que la naturaleza no conoce tal aplicación de esa ley, y la puedo solamente considerar como una ficción de las escuelas, una forzada y violenta adaptación de un principio en Física, bueno y verdadero bajo otras circunstancias, pero mal aplicado aquí."<sup>3</sup>

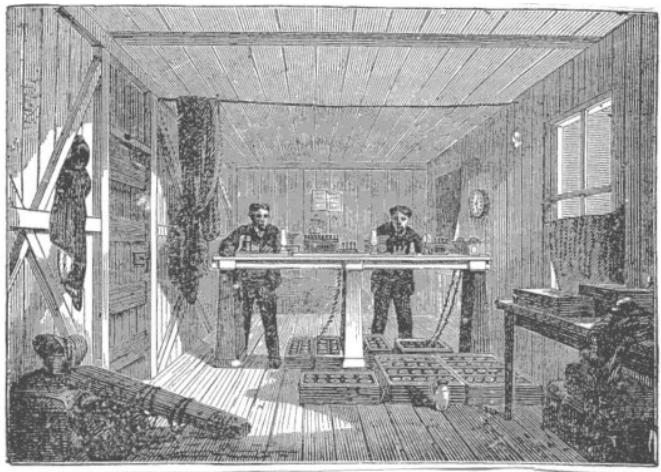
Para lograr detectar la muy débil señal telegráfica, en lugar de usar instrumentos más sensibles

<sup>3</sup> Paul J. Nahin, *Oliver Heaviside: The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age* (1988)

Whitehouse optó por aumentar la tensión aplicada al cable, lo que causó que el cable se cortocircuitara en puntos débiles del aislante de gutapercha. Luego de un estudio de las causas de la salida de funcionamiento del cable transatlántico, Whitehouse fue despedido.

En un segundo intento se tomaron en cuenta los estudios de Thomson. Se utilizó cable de cobre de la mejor calidad disponible y con una sección casi tres veces mayor del cable original, lo que

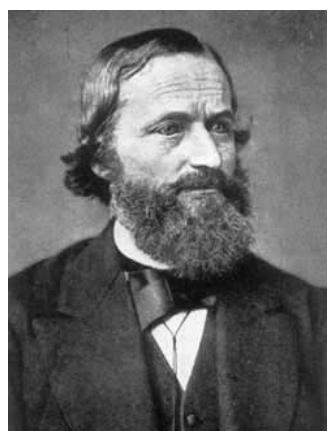
disminuía la resistencia por unidad de longitud, mejorando la performance. También Thomson insistió en lograr una mayor fortaleza y mejorar el aislamiento para evitar la acción del agua de mar, así como disminuir las tensiones de trabajo, para lo cual desarrolló un nuevo instrumento, el galvanómetro de espejo, que podía medir corrientes muy pequeñas. El segundo intento de colocar el cable submarino, realizado entre el 14 de julio de 1865 y el 28 de julio de 1866, fue exitoso y se pudieron establecer comunicaciones transatlánticas permanentes. En la figura se muestra la estación



de recepción del telégrafo transatlántico en Valentia, Irlanda<sup>4</sup>. El primer mensaje enviado fue: "A treaty of peace has been signed between Austria and Prussia". Relatos de la época hablan de la fascinación de los operadores porque los mensajes se recibían horas antes de que fueran enviados, debido a la diferencia de huso horario entre los extremos del cable).

Casi inmediatamente, el uso del cable fue abierto comercialmente pero sólo los muy ricos podían utilizarlo: las tarifas iniciales eran desde u\$s 1 por carta, pagables en oro, en una época en que el salario mensual de un trabajador era del orden de u\$s 20. El cable original colocado en 1866 dejó de operar en 1872, pero ya había otros cuatro cables transatlánticos en uso para esa fecha. Para valorar la importancia de este desarrollo de la ingeniería, debe señalarse que para 1890 había ya más de 150 mil kilómetros de cables submarinos comunicando todo el mundo, y que recién en la década de 1960 el lanzamiento de los primeros satélites de comunicaciones presentaron una alternativa a los cables submarinos.

En noviembre de 1866 Thomson fue elevado a la categoría de par del reino británico bajo el título de Lord Kelvin of Largs por sus logros en relación al cable submarino. El Kelvin es el río que atraviesa el terreno de la Universidad de Glasgow y Largs es el pueblo sobre la costa escocesa donde Thomson construyó su residencia.



Dentro de la investigación en el electromagnetismo, Thomson introdujo en 1850 las nociones de susceptibilidad y permeabilidad magnética, junto con los conceptos de **B**, **H** y **M**, en 1853 usó la teoría magnética de Poisson para encontrar las ecuaciones de la energía magnética en términos de los campos, por una parte, y de la corriente circulante y la inductancia, por otra. Ese mismo año halló la ecuación del circuito RLC, lo que dio una descripción matemática a observaciones experimentales de Henry y Savery. Ya hemos hablado de su modelo mecánico del electromagnetismo que inspiró los primeros modelos de Maxwell.

En 1857 **Gustav Kirchhoff** (izquierda) encontró las ecuaciones del telegrafista para una línea coaxil. También halló que, si la resistencia del cable es pequeña, estas ecuaciones llevan a la ecuación de ondas con una velocidad

<sup>4</sup> Figura tomada de D. Weaire, "The value of useless studies", Europhysics News, 33, No.5, 2002.

$v = 1/\sqrt{LC}$ , que para un cable coaxil da un valor muy cercano a la velocidad de la luz. Kirchhoff se da cuenta de esta coincidencia y es así el primero en hallar que las señales electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz.

Las ideas de la propagación de ondas en cables fueron retomadas y completadas, usando el método operacional que él mismo inventó, por **Oliver Heaviside** (izquierda).



Heaviside no tuvo educación formal, ya que abandonó sus estudios a los 16 años. Aprendió el código Morse y se dedicó a ser operador telegráfico. A pesar de su falta de rigor matemático, Heaviside estudió el Treatise de Maxwell y consiguió reducir las veinte ecuaciones (escalares) con veinte incógnitas halladas por Maxwell a sólo dos ecuaciones (vectoriales) con dos incógnitas en el vacío. Logró esta hazaña inventando el análisis vectorial<sup>5</sup>. Por este motivo las actuales ecuaciones de Maxwell deberían llamarse de Maxwell-Heaviside. Por su falta de rigor la idea revolucionaria de Heaviside tuvo pocos seguidores. Los físicos que trabajaban con las ecuaciones de Maxwell estaban influenciados por el modelo de quaterniones, desarrollado por el mismo

Maxwell y Tait. Sólo Heinrich Hertz, que iba a alcanzar fama mundial por su comprobación experimental de que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz, entendió la importancia de los trabajos de Heaviside y Gibbs y en 1892 publicó un trabajo riguroso donde llega a la notación actual de las ecuaciones del electromagnetismo.

Entre 1880 y 1887 Heaviside desarrolló el **cálculo operacional** para estudiar los circuitos eléctricos, que permite pasar de modelos basados en ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas. Este es el método de la transformada de Laplace que hoy en día es el método normal de análisis de circuitos. A pesar del evidente éxito de este método, la falta de rigor matemático de las presentaciones de Heaviside hizo que no tuviera aceptación amplia hasta 1906 en que su fundamentación rigurosa fue establecida por el matemático inglés **Thomas Bromwich**.

Heaviside también se dedicó a la propagación de ondas en las líneas telegráficas. Redescubrió las ecuaciones del telegrafista que ya había hallado Kirchhoff. Heaviside se dio cuenta que el efecto de la inductancia de la línea puede llevar a la condición de propagación sin distorsión (p.6.6) por lo que sugirió aumentar la inductancia agregando inductores a lo largo de la línea.

En 1883 comienza a analizar la propagación de ondas electromagnéticas en conductores. En forma independiente en 1885 Heaviside y el físico Horace Lamb describieron por primera vez el efecto pelicular en conductores, que hace que la distribución de corriente a altas frecuencias no sea uniforme y haya una concentración de corriente sobre la periferia del conductor, modificando así su resistencia, como veremos en el Capítulo 8.

En 1902 y en forma casi simultánea Heaviside y el ingeniero norteamericano Arthur Kennelly anunciaron la probable existencia de una capa atmosférica de gas ionizado que afectaría la propagación de las ondas electromagnéticas. La capa de Heaviside-Kennelly es una de las capas de la ionosfera, cuya existencia fue corroborada experimentalmente en 1923.

<sup>5</sup> En la misma época el físico norteamericano Joshua Willard Gibbs realizaba desarrollos similares.

## Parámetros circuitales de líneas básicas comunes

El uso del modelo cuasi-estático de cuadripolo para cada tramo  $dz$  de la línea permite calcular, como en la situación estática, los parámetros circuitales del modelo. Para muy altas frecuencias el modelo cuasi-estático deja de ser válido y se debe usar el modelo de campos de las guías de onda. Para frecuencias no tan altas se puede usar el modelo cuasi-estático pero se debe tener en cuenta, por ejemplo, la distribución no homogénea de corriente en los conductores para el cálculo de las pérdidas por efecto Joule.

En el siguiente cuadro resumimos las propiedades de las líneas de uso común:

	<b>Coaxil</b>	<b>Bifilar</b>	<b>Doble cinta</b>
$C (F/m)$	$\frac{2 \pi \epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi \epsilon}{\ln(d/a)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$
$L (Hy/m)$	$\frac{\mu}{2 \pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\mu a}{b}$
$G (\Omega m)^{-1}$	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(b/a)}$	$\frac{2 \pi \sigma_{eq}}{\ln(d/a)}$	$\frac{\sigma_{eq} b}{a}$
<b>Alta frecuencia</b>	$R (\Omega / m)$	$\frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$
	$Z_0 (\Omega)$	$\frac{\eta}{2 \pi} \ln(b/a)$	$\frac{\eta a}{b}$
<b>Baja frecuencia</b>	$R (\Omega / m)$	$\frac{\rho}{\pi} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2bt} \right)$	$\frac{2\rho}{\pi a^2}$
	$Z_0 (\Omega)$	$\sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$	

donde  $\epsilon, \mu$  son los parámetros del material dieléctrico,  $\sigma_{eq} = \omega \epsilon''$  es la conductividad equivalente del dieléctrico (que está asociada a las pérdidas dieléctricas),  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$   $\rho$  es la resistividad de baja frecuencia de los conductores (supuestos del mismo material) y  $R_s = \sqrt{\omega \mu / 2\sigma}$  es la resistencia superficial de los conductores a alta frecuencia. Este parámetro surge del efecto pelicular de distribución no homogénea de corriente en un conductor a alta frecuencia, que hemos visto superficialmente en el Ejemplo 6.3 y trataremos en más detalle en el Capítulo de propagación de ondas en medios materiales. A baja frecuencias suponemos que la distribución de corriente es uniforme en la sección de los conductores. La inductancia por unidad de longitud es la inductancia externa solamente. Las fórmulas de la capacidad e inductancia por unidad de longitud son las cuasi-estáticas y se han hallado en los Ejemplos del Capítulo 2.

La impedancia característica a baja frecuencia se debe calcular con la fórmula general para no introducir errores (ver el **Ejemplo 6.2**).

**Ejemplo 6.4:** De acuerdo a tablas, el cable coaxial RG59 tiene un radio de la malla de  $3.1 \text{ mm}$ , impedancia característica  $Z_0 = 75 \Omega$  y las ondas se propagan con velocidad  $v = 0.66 \text{ c}$ . A  $100 \text{ MHz}$  la atenuación es  $11.5 \text{ dB}$  cada  $100\text{m}$ . Hallar la permitividad del dieléctrico, el radio del conductor interior, la inductancia, capacidad y resistencia por unidad de longitud.

Como la velocidad de propagación en la línea es:  $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/\sqrt{\epsilon_r}$   
ya que  $\mu \approx \mu_0$ , tenemos:  $\epsilon_r = 1/(v/c)^2 \approx 2.3$

Además, a alta frecuencia:  $Z_0 = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = 2\pi\sqrt{\epsilon_r} \frac{Z_0}{\eta_0} \approx 1.895$

y como  $b = 3.1 \text{ mm}$   $\ln(b/a) \approx 1.895 \Rightarrow a \approx 0.46 \text{ mm}$

Con estos valores podemos calcular:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \approx 38 \text{ } \mu\text{Hy/m} \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \approx 67 \text{ } \text{pF/m}$$

La atenuación, suponiendo únicamente pérdidas conductoras o resistivas, es:

$$\alpha \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow R = 2\alpha Z_0$$

Pasamos  $\alpha$  de  $\text{dB/m}$  a  $\text{neper/m}$ :  $\alpha(\text{neper/m}) \approx \alpha(\text{dB/m}) / 8.686 \approx 13.2 \times 10^{-3} \text{ neper/m}$

y entonces:  $R = 2\alpha Z_0 \approx 2\Omega/\text{m}$

**Ejemplo 6.5:** Calcular la impedancia característica a alta frecuencia de las siguientes líneas:

- a) Bifilar con dieléctrico de aire.  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $a = 0.6 \text{ mm}$ .
- b) Idem b) pero con dieléctrico de polietileno ( $\epsilon_r = 2.2$ ).
- c) Doble cinta con dieléctrico de aire.  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ .
- d) Idem c) pero con dieléctrico de poliestireno ( $\epsilon_r = 2.7$ ).

Usamos las expresiones de la tabla anterior:

a) $Z_0 = \frac{\eta_0}{\pi} \ln(d/a) \approx 337.4 \Omega$	b) $Z_0 = \frac{\eta}{\pi} \ln(d/a) = \frac{\eta_0}{\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln(d/a) \approx 227.5 \Omega$
c) $Z_0 = \frac{\eta_0 a}{b} \approx 2260.4 \Omega$	d) $Z_0 = \frac{\eta a}{b} = \frac{\eta_0 a}{b\sqrt{\epsilon_r}} \approx 1375.6 \Omega$

La siguiente tabla presenta información sobre varios tipos de cables coaxiales<sup>6</sup> de uso común en la electrónica:

Tipo	Diámetro exterior	$Z_0$	$v_p/c$	Peso cada 100m	C	f(MHz) / Atenuación en dB cada 100 m												
						mm	ohm	kg	pF/m	10	14	28	50	100	144	435	1296	2300
Aircor Plus	10,8	50	0,80	15,0	84	0,9								3,3	4,5	8,2	14,5	21,5
H2000 Flex®	10,3	50	0,83	14,0	80	1,1	1,4		2	2,7			3,9	4,8	8,5	15,7	21,8	
H 100	9,8	50	0,84	11,0	79					2	2,8			4,9	8,8	16	22,4	
H 500	9,8	50	0,81	13,5	82	1,3					2,9	4,1		5,6	9,3	16,8	24,1	
RG 213 US100	10,3	50	0,66	15,5	101					2,4	3,2			5,9	10,1	21,1		
RG 213 U	10,3	50	0,66	15,5	101	2,2			3,1	4,4	6,2	7,9	14,8	27,5	41			
Aircell 7	7,3	50	0,83	7,2	74			3,4	3,7	4,8	6,6	7,9	14,1	26,1	37,9			
H 155	5,4	50	0,79	3,9	100				4,9	6,5	9,4	11,2	19,8	34,9	50			
RG 58 CU	5,0	50	0,66	4,0	101	4,6	6,2	8	11	15,6	17,8	33,2	64,5	110				
RG 55	5,4	53	0,66	6,0	94							16	29	52				
RG 62 A/U	6,2	93	0,85	1,73	40				5,0					22,0				
RG 223	5,4	50	0,66	6,0	101			6,1	7,9	11	15,4	17,6	30	57	85			
RG 174	2,6	50	0,66	1,1	101	13			18		30	34	60	110	175			
RG 142	4,95	50	0,635									15	28	49	72			
H 43	9,8	75	0,85	9,1	52	1,2				2,5	3,7		8	14,8				
RG 11	10,3	75	0,66	13,9	67					4,6	6,9		17,5					
RG 59	6,15	75	0,66	5,7	67						11,5	15	25	49	72			

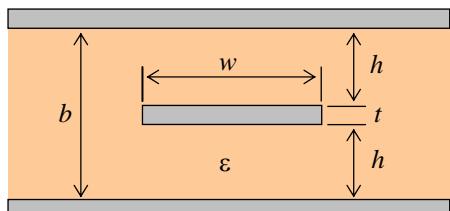
<sup>6</sup> Datos tomados de <http://www.xs4all.nl/~hanvu/coaxkabel.html>.

## Líneas de cinta

Las líneas de cinta se utilizan mucho en aplicaciones electrónicas. Se las usa por su facilidad de construcción en circuitos integrados y para crear componentes de circuitos como filtros, acopladore, resonadores, antenas y otros.

Hay diversas variantes de las líneas de cinta, de las que las más usadas son la línea de cinta propiamente dicha (stripline) y la línea de microcinta (microstrip).

### Stripline



Las striplines están formadas por dos cintas conductoras paralelas de tierra, y una cinta conductora interna de señal entre ellas. El ancho  $w$  de la cinta de señal es pequeño frente al ancho de las cintas de tierra, de manera que éstas pueden considerarse planos infinitos. El espesor de la cinta de señal es  $t$  y la separación entre las cintas de tierra, llena con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ , es  $b$ . Hay fórmulas aproximadas en la literatura para calcular la impedancia característica de una línea stripline.

Sea  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \approx \eta_0/\sqrt{\epsilon_r} \approx 120\pi/\sqrt{\epsilon_r}$  ( $\Omega$ ). La fórmula que da mayor precisión cuando puede despreciarse el espesor  $t$  de la cinta de señal es:  $Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})}$  donde  $k = 1/\cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right)$  y

$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}$  es la integral elíptica completa de primera especie. Para  $w/b > 0.56$

esta expresión se aproxima como:  $Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones:  $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$  y  $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$  donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío.

La atenuación debida a las pérdidas óhmicas en los conductores es aproximadamente (en  $dB/m$ ):

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[ \frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \quad (\text{para } w > 2b \text{ y } t < b/10)$$

donde  $R_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$ , mientras que la atenuación debida a las pérdidas dieléctricas es (también en  $dB/m$ ):  $\alpha_d \approx 8.686 \eta \sigma_{eq}$

donde  $\sigma_{eq} = \omega\epsilon''$  es la conductividad equivalente del dieléctrico.

**Ejemplo 6.6:** Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea stripline de parámetros:  $b = 1 mm$ ,  $w = 2mm$ ,  $t = 10\mu m$ ,  $\epsilon_r = 2.5$ ,  $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \eta &\approx 120\pi/\sqrt{\epsilon_r} \approx 238.43\Omega \\ k &= 1/\cosh\left(\frac{\pi w}{2b}\right) \approx 0.086 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} Z_{01} \approx \frac{\eta}{4} \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \approx 24.417\Omega \\ Z_{02} \approx \frac{\pi\eta}{8} \frac{1}{\ln(2e^{\pi w/2b})} \approx 24.417\Omega \end{cases}$$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

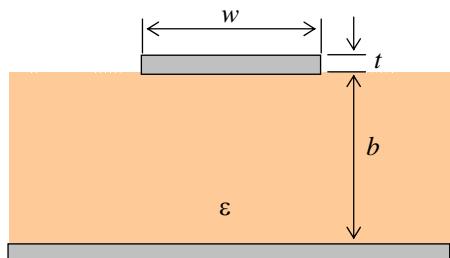
$$v = c/\sqrt{\epsilon_r} \approx 0.63 c \approx 1.9 \times 10^8 m/s \quad \lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r} = v/f \approx 1.9 m$$

El factor de atenuación por pérdidas conductoras es:

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{\eta b} \left[ \frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] = \frac{8.686}{b} \sqrt{\frac{\omega\epsilon''}{2\sigma}} \left[ \frac{\pi w/b + \ln(4b/\pi t)}{\ln 2 + \pi w/2b} \right] \approx 0.33 dB/m$$

## Microstrip

A diferencia de la stripline, las líneas microstrip son estructuras abiertas, de forma que las líneas de campo no están confinadas y la propagación debe analizarse en rigor con las técnicas de campos de las guías de onda. Sin embargo, a bajas frecuencias es posible un análisis cuasi-estático



con parámetros distribuidos como el que realizamos en este capítulo. Hay diversas variantes constructivas de estas líneas, y a modo de ejemplo presentamos la configuración clásica de la figura. Una cinta conductora muy ancha funciona como plano de tierra y sobre ella se coloca un sustrato dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y espesor  $b$ . Sobre el sustrato hay una cinta de señal de espesor  $t$  y ancho  $w$ .

La impedancia característica de la línea es de difícil cálculo debido al campo disperso fuera de la región entre los conductores. Las expresiones más conocidas son las halladas por Wheeler<sup>7</sup>. A partir de ellas se han realizado aproximaciones y mejoras para diversas situaciones. En esta sección solamente presentamos las fórmulas más sencillas<sup>8</sup> en las que se desprecia el espesor  $t$  de la cinta de señal.

Sea  $\epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b}\right)^2 \right]$  Entonces:

- Si  $w/b \leq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{eff}}} \ln\left(\frac{8b}{w} + \frac{w}{4b}\right)$
- Si  $w/b \geq 1 \Rightarrow Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{w/b + 1.393 + 0.667 \ln(w/b + 1.444)}$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea se obtienen de las expresiones:

$$v = c/\sqrt{\epsilon_{eff}} \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{eff}}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío.

Las atenuaciones debidas a las pérdidas óhmicas en los conductores y dieléctricas son (en dB/m):

$$\alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{wZ_0} \quad \alpha_d \approx 27.3 \frac{(\epsilon_{eff} - 1)\epsilon_r}{(\epsilon_r - 1)\epsilon_{eff}} \frac{\tan \theta}{\lambda}$$

donde  $\lambda = v/f$  es la longitud de onda en la línea y  $\tan \theta = \sigma/\omega\epsilon$  es la tangente de pérdidas del sustrato. La constante de atenuación total es la suma de  $\alpha_c + \alpha_d$ .

Otras ecuaciones de interés son las de **diseño** de líneas microstrip: dado el material del sustrato y la impedancia característica deseada, determinar  $w/b$ :

- $w/b \leq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad \text{con} \quad A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} (0.23 + 0.11/\epsilon_r)}$
- $w/b \geq 2 \Rightarrow \frac{w}{b} = \frac{2}{\pi} \left\{ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} [\ln(B - 1) + 0.39 - 0.61/\epsilon_r] \right\}$   
con  $B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$

<sup>7</sup> H.A. Wheeler, "Transmission-Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, MTT-3, No.3, marzo 1965, pp. 172-185.

<sup>8</sup> Tomadas de I.J.Bahl, D.K.Trivedi, "A Designer's Guide to Microstrip Line", Microwaves, Mayo 1977, p.174.

Fórmulas más complejas, para mayores anchos de banda y situaciones de geometrías variadas, pueden encontrarse en el documento RT 3.1.2 de la firma Rogers Corp. (<http://www.rogers-corp.com/mwu/litintbl.htm>).

**Ejemplo 6.7:** Hallar la impedancia característica, la velocidad de propagación, la longitud de onda y los factores de atenuación a 100 MHz de una línea microstrip de parámetros:  $b = 1\text{ mm}$ ,  $w = 2\text{ mm}$ ,  $t = 10\mu\text{m}$ ,  $\epsilon_r = 2.5$ ,  $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ .

$$\text{La permitividad efectiva es: } \epsilon_{eff} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{1+12b/w}} + 0.04 \left(1 - \frac{w}{b}\right)^2 \right] \approx 2.06$$

$$\text{Como } w = 2b : \quad Z_0 \approx \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_{eff}}} \frac{1}{\frac{w}{b} + 1.393 + 0.667 \ln\left(\frac{w}{b} + 1.444\right)} \approx 62.2\Omega$$

La velocidad de propagación y la longitud de onda en la línea son:

$$v = c/\sqrt{\epsilon_{eff}} \approx 0.7c \approx 2.09 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} = v/f \approx 2.09 \text{ m}$$

$$\text{La atenuación por pérdidas óhmicas es: } \alpha_c \approx 8.686 \frac{R_s}{wZ_0} = \frac{8.686}{wZ_0} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \approx 0.18 \text{ dB/m}$$

Hay otros tipos de líneas de cinta. El programa **TXLINE**, de Applied Wave Research Inc. permite calcular los parámetros de distintos tipos de líneas de cinta para análisis o síntesis. El programa **ULTRACLC**, de Ultracad Design Inc. también permite analizar líneas de cinta, aunque en menos tipos.

## Líneas de par trenzado



Una línea de par trenzado consiste en cables formados por hilos de cobre recubiertos de plata y rodeados por un aislador. Los cables se trenzan de a pares para disminuir la interferencia, y cada par forma un circuito que puede transmitir datos. La línea consiste en un grupo de uno o más pares. Esta línea se conoce

como **UTP (unshielded twisted pair)** y es el tipo más común de línea usada en redes de computadoras. Para mayor rechazo a interferencia (en particular el rechazo a modo común y la diafonía entre líneas) se rodean los pares con un aislador. Esta línea se conoce como **STP (shielded twisted pair)**. Tanto UTPs como STPs se usan en instrumentación electrónica, aviones y otras aplicaciones críticas de transmisión de datos.

De acuerdo a las características y calidad constructivas las líneas de par trenzado la **ANSI/EIA** (*American National Standards Institute/Electronic Industries Association*) las clasifica en las siguientes categorías:

Categoría	Máxima velocidad de datos	Aplicación usual
CAT 1	Hasta 1 Mbps	Voz análoga (telefonía tradicional) Portero eléctrico
CAT 2	Hasta 4 Mbps	Sistema de cableado de IBM para redes Token Ring
CAT 3	Hasta 16 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T Es el tipo de cable más común en instalaciones corporativas antiguas y contiene cuatro pares de cables
CAT 4	Hasta 20 Mbps	Solamente en Token Ring de 16 Mbps. Cuatro pares de cables
CAT 5	Hasta 100 Mbps	Transmisión de voz y datos sobre Ethernet 10BASE-T, 100BASE-T4 y 100BASE-TX. Es el tipo de cable más común en instalaciones nuevas y contiene cuatro pares de cables Está en proceso de testeo para la especificación Gigabit Ethernet para distancias cortas (para distancias largas debe usarse fibra óptica).

Las características de una línea de par trenzado no son fáciles de determinar. Sin embargo, debido a su popularidad se han hecho estudios semi-empíricos para determinarlas<sup>9</sup>, donde se modeliza cada par como una doble hélice. Sea un UTP con:

- $D$ : separación entre los conductores del par
- $d$ : diámetro de cada conductor del par
- $T$ : número de vueltas por unidad de longitud
- $l$ : longitud de la línea
- $\epsilon_r$ : permitividad relativa del dieléctrico entre pares
- $\sigma_1$ : conductividad del alma de cobre de cada hilo
- $\sigma_2$ : conductividad del recubrimiento de plata de cada hilo
- $\tan(\delta)$ : tangente de pérdidas del dieléctrico entre pares

Con estos datos se pueden determinar parámetros geométricos:

$$\vartheta = \tan^{-1}(T\pi D) \quad \text{ángulo de giro de la hélice}$$

$$l_0 = T l \pi D / \sin \vartheta \quad \text{longitud real de cable}$$

$$q = 0.45 + 10^{-3} \vartheta^2 \quad \text{factor de forma para el cálculo de la permitividad efectiva (\theta en rads)}$$

que permiten calcular los parámetros físicos para la línea ideal:

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 [1 + q(\epsilon_r - 1)] \quad \text{permitividad equivalente o efectiva}$$

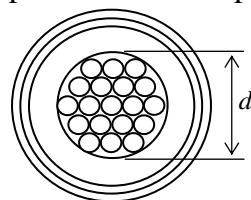
$$C = \frac{\pi \epsilon_{eff}}{\cosh^{-1}(D/d)} \quad \text{capacidad por unidad de longitud}$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}(D/d) \quad \text{inductancia por unidad de longitud}$$

$$v = c / \sqrt{\epsilon_{eff} / \epsilon_0} \quad \text{velocidad de propagación de las ondas}$$

$$Z_0 = \sqrt{L/C} = \frac{\cosh^{-1}(D/d)}{\pi} \sqrt{\mu / \epsilon_{eff}} \quad \text{impedancia característica}$$

Para determinar los parámetros ligados con las pérdidas se requiere considerar que cada cable del par está formado por hilos separados (ver figura), y que hay una redistribución de la corriente en



cada hilo debido al “efecto de proximidad” de los hilos y el comportamiento del conductor a alta frecuencia, que veremos en el Capítulo 8.

A baja frecuencia la resistencia por unidad de longitud que presenta cada cable del par es:  $R_{cc} = f_P N f_S \frac{2}{\pi(d^2/4)\sigma_2}$

donde  $f_P = 1.15$  es el factor de proximidad,  $N$  es el número de hilos en el cable (19 en el ejemplo),  $f_S = 1/25$  es el factor de relación entre la superficie del cable (que aparece en el denominador) y la superficie de cada hilo y  $\sigma_2$  es la conductividad del recubrimiento del hilo.

A alta frecuencia se debe tener en cuenta que los campos (y las líneas de corriente) se distribuyen fundamentalmente por la periferia del hilo conductor, debido al llamado efecto pelicular que veremos en el próximo capítulo. Con esta corrección se tiene:

$$R = R_{cc} \frac{d}{4} \sqrt{\pi f \mu \sigma_2}$$

La conductancia por unidad de longitud es:

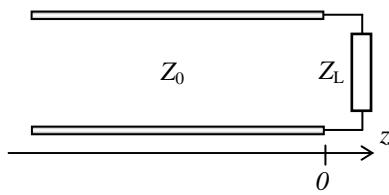
$$G = 2\pi \tan(\delta) C$$

<sup>9</sup> P. Lefferson, “Twisted Magnet Wire Transmission Lines”, IEEE Trans. Parts, Hybrids and Pack. PHP-7, No.4, diciembre 1971, pp. 148-154.

J.H. Broxon II y D.K. Linhart, “Twisted-Wire Transmission Lines”, RF Design, junio 1990, pp. 73-75.

## Línea cargada

Hasta el momento hemos analizado la modelización de líneas de transmisión y la propagación de ondas en líneas de longitud indefinida. En la práctica la línea termina en una impedancia de carga<sup>10</sup> y tiene generador/es conectados. En esta sección analizamos la influencia de la carga sobre la distribución de tensión y corriente a lo largo de una línea de impedancia característica  $Z_0$  se conecta a una carga  $Z_L$ , como se ve en la figura.



La solución general de la ecuación de ondas en la línea será la superposición de una onda progresiva y una regresiva:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

$$i(z, t) = I_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + I_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

(obsérvese que se coloca el cero de  $z$  en la posición de la carga).

Pero sabemos que:  $V_+ = Z_0 I_+$       y       $V_- = -Z_0 I_-$

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - \gamma z)} + V_- e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

Entonces:

$$i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - \gamma z)} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i(\omega t + \gamma z)}$$

**La carga impone la condición:**  $\left. \frac{v(z, t)}{i(z, t)} \right|_{z=0} = Z_L$ , de manera que:

$$v(0, t) = (V_+ + V_-) e^{i\omega t} = Z_L i(0, t) = \frac{Z_L}{Z_0} (V_+ - V_-) e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{(V_+ + V_-)}{(V_+ - V_-)} = \frac{Z_L}{Z_0}$$

y de esta ecuación se obtiene la relación entre las amplitudes de las ondas de tensión progresiva y regresiva:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Esta relación se conoce como coeficiente de reflexión de tensión sobre la carga o **coeficiente de reflexión**<sup>11</sup> a secas. En general podemos pensar en una onda que viaja hacia la carga y que se ve parcialmente “reflejada” en ella.

Se observa que  $\rho_L = 0$  si  $Z_L = Z_0$ . En este caso no existe onda regresiva (no existe reflexión). La carga está **adaptada** a la línea, y esto ocurre cuando la impedancia de carga es igual a la impedancia característica de la línea.

La tensión sobre la carga será:

$$V_L = V_+ + V_- = (1 + \rho_L) V_+ \Rightarrow \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2 Z_L}{Z_L + Z_0}$$

$\tau_L$  es el llamado coeficiente de transmisión de tensión sobre la carga o **coeficiente de transmisión** a secas, y relaciona la tensión sobre la carga con la tensión de la onda incidente, también medida sobre la carga.

Analizamos ahora la **propagación de la energía** en la línea. Consideramos  $Z_0$  real por simplicidad matemática. Usamos la expresión del valor medio de un producto de fasores del Capítulo 1:

**Potencia incidente:**  $\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_+ i_*) = \frac{|v_+|^2}{2 Z_0} = \frac{|V_+|^2}{2 Z_0}$

<sup>10</sup> Si hubiera múltiples cargas conectadas a la línea, cada tramo entre cargas se puede considerar como un tramo cargado en su extremo en cascada con otro, y así sucesivamente.

<sup>11</sup> En alguna literatura técnica el coeficiente de reflexión se denota con el símbolo  $\Gamma$ .

$$\text{Potencia reflejada: } \langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(v_- i_-^*) = \frac{|v_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|V_-|^2}{2 Z_0} = \frac{|\rho_L V_+|^2}{2 Z_0} = |\rho_L|^2 \langle P_i \rangle$$

$$\begin{aligned} \text{Potencia transmitida: } \langle P_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(V_L I_L^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(V_L \frac{V_L^*}{Z_L^*}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_L) \left| \frac{V_L}{Z_L} \right|^2 \\ &= \frac{R_L}{2 |Z_L|^2} |\tau_L V_+|^2 = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2 \langle P_i \rangle \end{aligned}$$

donde  $R_L$  es la resistencia de carga (parte real de la impedancia de carga). Estas relaciones nos permiten definir los **coeficientes de transmisión y reflexión de potencia**:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

### Ondas estacionarias

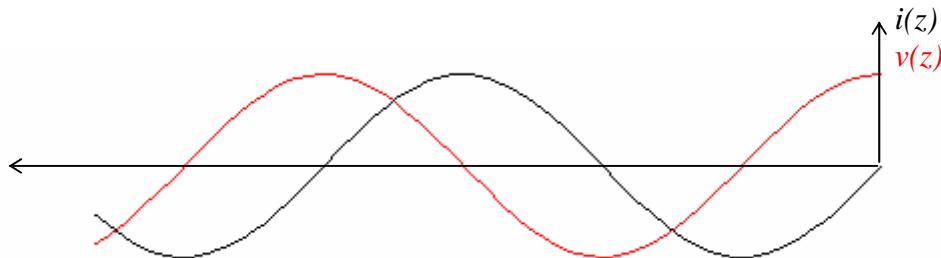
Si una línea **ideal** está abierta o cortocircuitada en el extremo de carga se producen ondas estacionarias. El coeficiente de reflexión vale:

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1 \quad Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$$

y la onda de tensión sobre la línea será:

$$\begin{aligned} v(z, t) &= V_+ e^{i(\omega t - kz)} + V_- e^{i(\omega t + kz)} = V_+ e^{i(\omega t - kz)} + \rho_L V_+ e^{i(\omega t + kz)} \\ Z_L = \infty \Rightarrow & \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2V_+ e^{i\omega t} \cos(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz) \end{cases} \\ Z_L = 0 \Rightarrow & \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2iV_+ e^{i\omega t} \sin(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \cos(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

que son **ondas estacionarias** ya que la onda deja de presentar la forma ondulatoria  $f(\omega t \pm kz)$  y aparecen puntos (**nodos**) donde la magnitud (tensión o corriente) es siempre cero. En el caso de la línea abierta, los nodos de las ondas estacionarias se dan para  $\cos(kz_n) = 0 \Rightarrow z_n = (2n+1)\pi/2$ . En el caso de la línea cortocircuitada los nodos están en:  $\sin(kz_m) = 0 \Rightarrow z_m = m\pi$



La gráfica muestra las ondas de tensión y corriente para  $t = 0$  con carga abierta.

**En general podemos decir que  $|\rho_L| \leq 1$**

Se observa que:

- para una **Línea adaptada**  $R = 0$  y  $T = 1$ .
- en el caso de **ondas estacionarias**,  $R = 1$  y  $T = 0$ .

Es común expresar la reflexión de potencia, que da idea de la adaptación entre línea en carga en

decibeles ( $dB$ ). Se define así la **pérdida de retorno (return loss)** - que es la misma idea de la pérdida de inserción en filtros que ya introducimos en el Capítulo 2 - en líneas como:

$$RL = -10 \log_{10}(R) = -20 \log_{10}(|\rho_L|)$$

### Impedancia y admitancia de onda. Impedancia de entrada. ROE

En general, la tensión y la corriente en un punto cualquiera de la línea son:

$$\begin{aligned} v(z, t) &= e^{i\omega t} [V_+ e^{-i\gamma z} + V_- e^{i\gamma z}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}] \\ i(z, t) &= e^{i\omega t} \left[ \frac{V_+}{Z_0} e^{-i\gamma z} - \frac{V_-}{Z_0} e^{i\gamma z} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}] \end{aligned}$$

de modo que podemos definir punto a punto una **impedancia de onda** como el cociente entre la tensión y la corriente:

$$Z(z) = \frac{v(z, t)}{i(z, t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}}$$

que podemos escribir en función de  $Z_L$  y  $Z_0$ :

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z})}{Z_L (e^{-i\gamma z} - e^{i\gamma z}) + Z_0 (e^{-i\gamma z} + e^{i\gamma z})}$$

y finalmente:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)}$$

Como se ve, la impedancia de onda varía a lo largo de la línea y en general adopta valores complejos.

Por ejemplo, analicemos los casos de terminación más simples:

- a) línea adaptada  $Z_L = Z_0 \Rightarrow Z(z) = Z_0$
- b) línea cortocircuitada  $Z_L = 0 \Rightarrow Z(z) = -i Z_0 \tan(\gamma z)$
- c) línea abierta  $Z_L = \infty \Rightarrow Z(z) = -i Z_0 \cot \operatorname{atan}(\gamma z)$

Se observa que si la línea no tiene pérdidas ( $Z_0$  y  $\gamma$  reales), la impedancia de onda resulta imaginaria pura.

En algunas circunstancias, especialmente cuando se trabaja con conexiones en paralelo, es conveniente trabajar con admitancias. Por ejemplo, es fácil demostrar que:

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L}$$

y la impedancia de onda puede escribirse:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{\frac{1}{Y_L} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_0} \sin(\gamma z)}{\frac{1}{Y_0} \cos(\gamma z) - i \frac{1}{Y_L} \sin(\gamma z)} = \frac{1}{Y_0} \frac{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}$$

de donde:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}$$

es la **admitancia de onda** en la línea.

Si la línea tiene una longitud  $d$ , la impedancia que se ve a la entrada es la **impedancia de entrada** de la línea:

$$Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma d) + i Z_0 \sin(\gamma d)}{Z_0 \cos(\gamma d) + i Z_L \sin(\gamma d)}$$

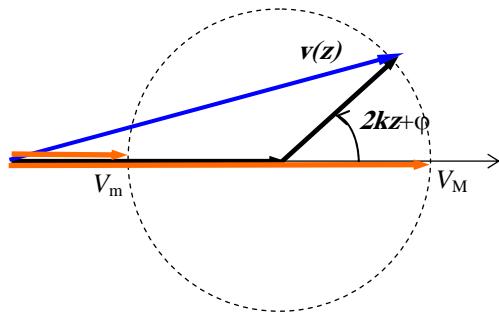
y la **admitancia de entrada**:

$$Y_{in} = Y(-d) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma d) + i Y_0 \sin(\gamma d)}{Y_0 \cos(\gamma d) + i Y_L \sin(\gamma d)}$$

Por otra parte, vemos que la tensión a lo largo de la línea **ideal** se puede escribir:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho_L e^{i2kz}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)}] e^{i(\omega t - kz)}$$

que puede interpretarse como una onda progresiva de tensión cuya amplitud depende de  $z$  como:



Podemos pensar esta amplitud como la suma de dos fasores: uno constante de valor 1 y otro de valor variable con  $z$ , de manera que se puede representar gráficamente como en la figura, la suma de un fasor constante y un fasor cuyo ángulo de fase crece con  $z$ . Se observa que el fasor suma tendrá un máximo  $V_M$  y un mínimo  $V_m$  cuando el fasor móvil se halle en fase o en contrafase, respectivamente, del fasor fijo.

$$2kz_M + \varphi = 2n\pi \Rightarrow V_M = V_+ (1 + |\rho_L|)$$

Estos valores son:

$$2kz_m + \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow V_m = V_+ (1 - |\rho_L|)$$

Definimos la **relación de onda estacionaria (ROE)**<sup>12</sup> como la relación entre el máximo valor y el mínimo valor de tensión sobre la línea:

$$ROE = \frac{V_M}{V_m} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$$

- En el caso de una onda puramente viajera,  $\rho_L = 0 \Rightarrow ROE = 1$
- En el caso de una onda estacionaria pura,  $|\rho_L| = 1 \Rightarrow ROE \rightarrow \infty$
- Como en general:  $|\rho_L| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq ROE < \infty$

El coeficiente de reflexión y la *ROE* son parámetros relacionados con la existencia de reflexión de energía en la interfase línea-carga. En muchas situaciones esta reflexión es inconveniente, por lo que la medición y control de estos parámetros es una tarea de mantenimiento de importancia.

**Ejemplo 6.8:** Calcular la impedancia de entrada de líneas ideales cortocircuitadas o abiertas en el extremo de carga.

Hemos hallado las ondas de tensión y corriente en líneas cortocircuitadas y abiertas:

$$\begin{aligned} Z_L = 0 &\Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = 2iV_+ e^{i\omega t} \sin(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2 \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \cos(kz) \end{cases} \\ Z_L = \infty &\Rightarrow \begin{cases} v(z, t) = V_+ e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2V_+ e^{i\omega t} \cos(kz) \\ i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) = -2i \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} \sin(kz) \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada es ( $z = -d$ ):

$$Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d, t)}{i(-d, t)} = -iZ_0 \tan(kd) \quad Z_L = \infty \Rightarrow Z_{in} = \frac{v(-d, t)}{i(-d, t)} = -iZ_0 \cotan(kd)$$

<sup>12</sup> En literatura inglesa **VSWR** (Voltage Standing Wave Ratio).

Se ve que la impedancia de entrada es puramente reactiva para líneas ideales. Para ciertos puntos (que corresponden a los nodos de la onda de tensión y a los antinodos de la onda de corriente) la impedancia es nula, mientras que para otros (nodos de corriente y antinodos de tensión) la impedancia es infinita. Para posiciones intermedias la impedancia recorre todos los valores intermedios.

De esta manera se pueden simular inductores y capacitores con líneas, lo que en ciertas circunstancias es más conveniente que usar los elementos concentrados normales.

**Ejemplo 6.9:** Se pueden determinar los parámetros fundamentales (la impedancia característica  $Z_0$  y el número de onda  $k$ ) de una línea a partir de la medición de la impedancia de entrada para un tramo de longitud  $d$ , en condiciones de circuito abierto  $Z_{in ca}$  y de cortocircuito  $Z_{in cc}$ . Para una línea de 3m de longitud se mide  $Z_{in ca} = (60.53 + i 55.97)\Omega$  y  $Z_{in cc} = (72.25 + i 53.45)\Omega$ . Hallar  $Z_0$  y  $k$ .

$$\text{La impedancia de entrada de la línea es: } Z_{in} = Z(-d) = Z_0 \frac{Z_L \cos(kd) + i Z_0 \sin(kd)}{Z_0 \cos(kd) + i Z_L \sin(kd)}$$

$$\text{En circuito abierto: } Z_L \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{in ca} = -i Z_0 \cotan(kd)$$

$$\text{En cortocircuito: } Z_L = 0 \Rightarrow Z_{in cc} = i Z_0 \tan(kd)$$

$$\text{Multiplicando miembro a miembro: } Z_{in ca} Z_{in cc} = Z_0^2 \Rightarrow Z_0 = \sqrt{Z_{in ca} Z_{in cc}}$$

$$\text{y dividiendo miembro a miembro: } Z_{in cc} / Z_{in ca} = -\tan^2(kd) \Rightarrow k = d^{-1} \tan^{-1}(\pm \sqrt{-Z_{in cc} / Z_{in ca}})$$

$$\text{La impedancia característica resulta: } Z_0 = \sqrt{Z_{in ca} Z_{in cc}} \approx (66.3 + i 54.9)\Omega$$

El problema de la última expresión es que la función arcotangente de argumento complejo es multivaluada, de forma que  $\tan(\alpha + n\pi) = \tan(\alpha)$  para  $n$  entero. Entonces:

$$k = d^{-1} [\tan^{-1}(\pm \sqrt{-Z_{in cc} / Z_{in ca}}) + n\pi]$$

Por ejemplo:

$\pm$	$N$	$k(m^{-1})$									
+	0	$0.37 + i 0.56$	+	-1	$-0.67 + i 0.56$	-	1	$0.67 - i 0.56$	-	1	$0.67 - i 0.56$
-	0	$-0.37 - i 0.56$	+	1	$1.42 + i 0.56$	-	-1	$-1.42 - i 0.56$	-	-1	$-1.42 - i 0.56$

Como  $k = \beta - i\alpha$  la parte real debe ser positiva y la parte imaginaria negativa, para que el valor de  $k$  calculado sea posible. Se observa que el primer valor que cumple esta propiedad se da para la determinación negativa del doble signo y  $n = 1$ .

## Valores máximo y mínimo de tensión y corriente sobre una línea

Para propósitos de diseño muchas veces es necesario saber cuáles son los valores máximos de tensión y corriente sobre la línea, de manera de no superar los valores admitidos por la construcción de la línea.

La onda de tensión en una línea **ideal** cargada puede escribirse, como hemos visto en la sección precedente:

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho_L e^{i2kz}] = V_+ [1 + |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)}] e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\text{y la onda de corriente: } i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho_L e^{i2kz}] = \frac{V_+}{Z_0} [1 - |\rho_L| e^{i(2kz + \varphi)}] e^{i(\omega t - kz)}$$

Los extremos de tensión/corriente en la línea tienen las propiedades:

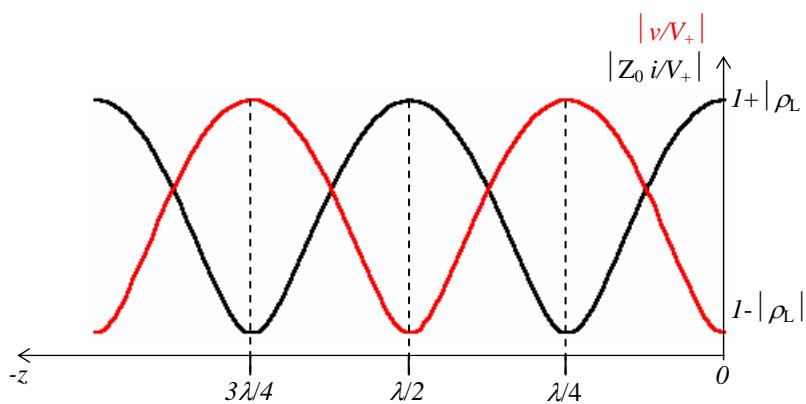
Tensión	Posición	Valor
Máximo	$z_{V_M} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$V_M = V_+ (1 +  \rho_L )$
Mínimo	$z_{V_m} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$V_m = V_+ (1 -  \rho_L )$

Corriente	Posición	Valor
Máximo	$z_{I_M} = \frac{(2n+1)\pi - \varphi}{2k}$	$I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 +  \rho_L )$
Mínimo	$z_{I_m} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k}$	$I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 -  \rho_L )$

En la posición en que se da el máximo de tensión se da el mínimo de corriente y viceversa. En estos extremos el fasor  $e^{i(2kz+\varphi)}$  pasa por valores reales. La impedancia de onda en estos extremos es:

$$\text{Máximo de tensión: } \begin{cases} V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \\ I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 - |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_M = Z_0 \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = Z_0 ROE$$

$$\text{Mínimo de tensión: } \begin{cases} V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \\ I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \end{cases} \Rightarrow Z_m = Z_0 \frac{1 - |\rho_L|}{1 + |\rho_L|} = \frac{Z_0}{ROE}$$



naria pura cuando  $|\rho_L| \rightarrow 1$ .

y la impedancia de onda adopta todos los valores entre estos dos extremos a lo largo de la línea.

En la figura se muestra los módulos de la tensión y la corriente a lo largo de la línea, que forman **ondas cuasi-estacionarias**. Nótese que estos módulos **no dependen del tiempo**. Las distribuciones se acercan a una onda estacio-

**Ejemplo 6.10:** Por una línea de  $Z_0 = 300 \Omega$ , y  $v_f = c/3$ , con una carga  $Z_L = (100 + i 15) \Omega$  viaja una onda de tensión pico  $V_+ = 10 V$  y frecuencia 10 MHz. Hallar los valores de los máximos de tensión, corriente y de impedancia a lo largo de la línea.

El coeficiente de reflexión es:  $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx -0.49 + i 0.056 \Rightarrow |\rho_L| \approx 0.5$

Los extremos de tensión son:

$$V_M = V_+ (1 + |\rho_L|) \approx 15V$$

$$V_m = V_+ (1 - |\rho_L|) \approx 5V$$

Se ve que el máximo de la onda de tensión es un 50 % mayor que la tensión pico de la onda incidente.

los extremos de corriente:  $I_M = V_M / Z_0 \approx 0.05 A = 50 mA$   
 $I_m = V_m / Z_0 \approx 0.017 A = 17 mA$

Para comparación calculamos la corriente sobre la carga:

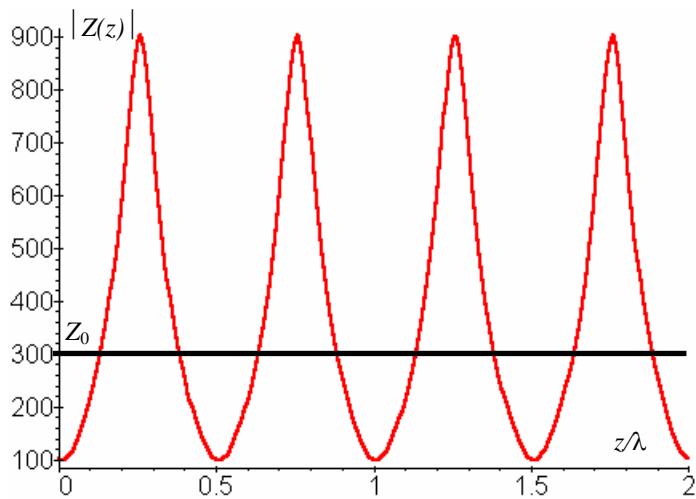
$$i_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{\tau_L v_+}{Z_L} = \frac{(1 + \rho_L) v_+}{Z_L} \Rightarrow I_L = \left| \frac{1 + \rho_L}{Z_L} \right| V_+ \approx 49.96 mA$$

de donde se observa que la corriente pico es similar a la corriente de carga.

y las impedancias extremas:  $Z_M = V_M / I_m \approx 902.53 \Omega$   
 $Z_m = V_m / I_M \approx 99.72 \Omega$

también:

$$ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = 3 \Rightarrow \begin{cases} Z_M = Z_0 \text{ } ROE = 900\Omega \\ Z_M = Z_0 / ROE = 100\Omega \end{cases}$$



Si graficamos la impedancia de onda a lo largo de la línea:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2kz}}{1 - \rho_L e^{i2kz}}$$

$$\text{con } k = \frac{\omega}{v_f} = \frac{2\pi f}{v_f} \approx 0.628 \text{ rad/m}$$

obtenemos la figura de la izquierda donde se observa la variación periódica del módulo de la impedancia de onda, entre los valores mínimo y máximo hallados.

## Coefficiente de reflexión generalizado

En las secciones precedentes hemos usado el coeficiente de reflexión definido como la relación entre la tensión reflejada y la tensión incidente, medidas sobre la carga ( $z = 0$ ). Podemos generalizar esta expresión definiendo un coeficiente de reflexión generalizado como la relación entre la onda de tensión reflejada y la incidente, medidas sobre cualquier punto de la línea:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

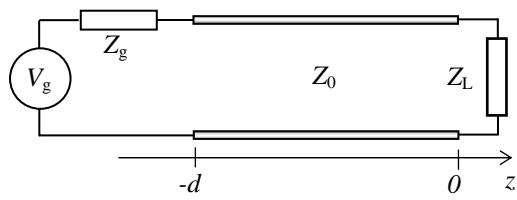
A partir de este coeficiente podemos expresar otros resultados como:

$$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{i2\gamma z}}{1 - \rho_L e^{i2\gamma z}} \Rightarrow Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)}$$

$$v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho_L e^{i2kz}] \Rightarrow v(z, t) = V_+ e^{i(\omega t - kz)} [1 + \rho(z)]$$

$$i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho_L e^{i2kz}] \Rightarrow i(z, t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - kz)} [1 - \rho(z)]$$

## Línea con generador y carga



En general, una línea conecta un generador a una carga. En la figura, una línea de impedancia característica  $Z_0$  y longitud  $d$  conecta un generador de impedancia  $Z_g$  a una carga  $Z_L$ .

Las ecuaciones de tensión y corriente sobre la línea son, como en el caso previo:

$$v(z, t) = e^{i\omega t} [V_+ e^{-ikz} + V_- e^{ikz}] = V_+ e^{i\omega t} [e^{-ikz} + \rho_L e^{ikz}]$$

$$i(z, t) = e^{i\omega t} \left[ \frac{V_+}{Z_0} e^{-ikz} - \frac{V_-}{Z_0} e^{ikz} \right] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{-ikz} - \rho_L e^{ikz}]$$

Estas ecuaciones satisfacen la condición de borde para  $z = 0$  (sobre la carga). Falta plantear la condición de borde sobre la entrada:

$$v(-d, t) = V_g e^{i\omega t} - i(-d, t) Z_g = V_+ e^{i\omega t} [e^{ikd} + \rho_L e^{-ikd}]$$

Luego:  $V_g e^{i\omega t} - \frac{V_+}{Z_0} e^{i\omega t} [e^{ikd} - \rho_L e^{-ikd}] Z_g = V_+ e^{i\omega t} [e^{ikd} + \rho_L e^{-ikd}]$

de donde:  $V_+ = \frac{Z_0}{(Z_g + Z_0) e^{ikd} + \rho_L (Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$

o también:  $V_+ = \frac{Z_0 (Z_L + Z_0)}{(Z_L + Z_0)(Z_g + Z_0) e^{ikd} + (Z_L - Z_0)(Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$

Así se conoce la distribución de corrientes y tensiones sobre toda la línea en función de la tensión pico del generador y de las impedancias involucradas.

**Ejemplo 6.11:** Un tramo de 3m de una línea coaxil de impedancia característica  $Z_0 = 75 \Omega$  conecta un generador de tensión pico 125 V, frecuencia 1 MHz y resistencia interna 19 Ω a una carga RL serie con  $R = 150 \Omega$  y  $L = 25 \mu H$ . Calcule la potencia media que se disipa en la carga y los máximos valores de tensión y corriente en la línea y su ubicación.

Para responder es necesario determinar la amplitud de las ondas de tensión y corriente en la línea. Para ello usamos la expresión de  $V_+$  que hallamos en esta sección:

$$V_+ = \frac{Z_0 (Z_L + Z_0)}{(Z_L + Z_0)(Z_g + Z_0) e^{ikd} + (Z_L - Z_0)(Z_0 - Z_g) e^{-ikd}} V_g$$

Como:  $V_g = 125 \text{ V}$      $Z_0 = 75 \Omega$      $Z_L = R_L + i X_L = R_L + i \omega L = (150 + i 157) \Omega$

$$Z_g = 19 \Omega \quad d = 3 \text{ m} \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \eta_0}{c Z_0} = 0.1 \text{ m}^{-1}$$

con estos datos tenemos:  $V_+ \approx (69.57 - i20.31) \text{ V}$

La potencia media que se disipa en la carga es:  $\langle P_L \rangle = T \langle P_i \rangle = (1 - |\rho_L|^2) |V_+|^2 / 2Z_0$

con:  $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx 0.55 + i0.31 \Rightarrow |\rho_L|^2 \approx 0.4$     de donde:  $\langle P_L \rangle = (1 - |\rho_L|^2) \frac{|V_+|^2}{2Z_0} \approx 20.93 \text{ W}$

Los valores máximos de tensión y de corriente son:

$$|V_{max}| = |V_+| (1 + |\rho_L|) \approx 118.45 \text{ V} \quad |I_{max}| = |V_+| (1 + |\rho_L|) / Z_0 \approx 1.58 \text{ A}$$

mientras que las posiciones donde los máximos de tensión se dan para:

$$z_{V_{max}} = \frac{2n\pi - \varphi}{2k} = \frac{\lambda}{2} \left( n - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \text{ con } n \text{ entero y } \varphi \text{ fase del coeficiente de reflexión.}$$

En nuestro caso:  $\varphi \approx 0.5159 \text{ (radianes)}$   $\Rightarrow z_n = \frac{c Z_0}{2\eta_0 f} \left( n - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \approx 29.84(n - 0.0821) \text{ m}$

Los máximos de la onda de corriente se dan para:

$$z_m = \frac{\lambda}{4} \left( 2m + 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \approx 14.29(2m + 0.836) \text{ m} \quad \text{con } m \text{ entero.}$$

## APENDICE 6 – Ondas elementales 1D

Sea una función  $f(z, t)$  que cumple la ecuación unidimensional de D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Vamos a utilizar las nuevas variables:  $u = z - ct$        $v = z + ct$ .

Entonces, calculando la derivada de una función de función:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} && \text{porque } \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial f}{\partial z} = \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \left( -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) && \text{porque } -\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = c \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} = c \left( -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) c \left( -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de D'Alembert se convierte en:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

Integramos sobre  $v$ :  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u)$

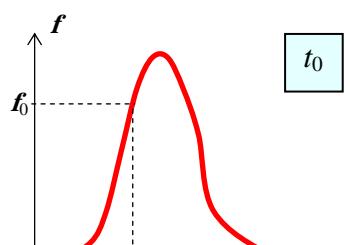
El resultado de la integración es una constante (respecto de  $v$ ), que en general es entonces una función de  $u$ . Si integramos de nuevo:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = C_1(u) \Rightarrow f(u, v) = \int C_1(u) du + f_2(v) = f_1(u) + f_2(v) = f_1(z - ct) + f_2(z + ct)$$

la nueva “constante” de integración depende sólo de  $v$  y finalmente queda demostrado que la solución es una superposición de una función de  $u$  y una función de  $v$ .

Luego:  $f(z, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(z, t) = f(z \mp ct)$

Analicemos el comportamiento de la solución  $f(z, t) = f(z - ct)$



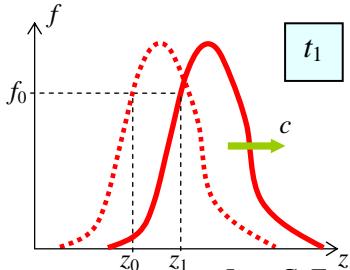
Como  $f$  es una función de dos variables para los gráficos es conveniente tomar “fotos” a  $t$  constante. Por ejemplo, para  $t = t_0$  se tiene la figura de la izquierda.

Para  $z = z_0$  la función vale  $f(z_0, t_0) = f_0$ .

Si ahora tomamos un instante posterior  $t_1 > t_0$ , existirá una posición  $z_1$  para la cual se vuelve a tener el mismo valor de la función  $f_0$ . Esto ocurre cuando coinciden los argumentos:  $f(z_0, t_0) = f(z_1, t_1) \Rightarrow z_0 - c t_0 = z_1 - c t_1$  de donde:  $z_1 = z_0 + c(t_1 - t_0) \Rightarrow z_1 > z_0$ .

Este razonamiento se puede hacer para cada posición original  $z_0$ , de manera que se observa que cada punto de la curva original se desplaza a la derecha una cantidad uniforme  $c(t_1 - t_0)$ .

Esto es equivalente a decir que la función misma se desplaza hacia la derecha con velocidad constante  $c$ . Una magnitud física cuya



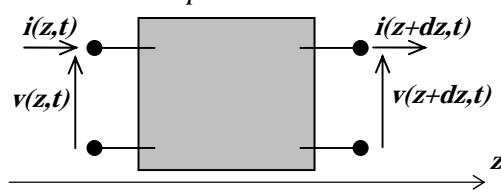
función representativa se “traslada” se denomina una **onda**.

En el caso de la solución  $f(z, t) = f(z + ct) = f[z - (-c)t]$  se ve fácilmente que el comportamiento es el mismo que el descripto, pero con una velocidad ( $-c$ ). Por lo tanto esta solución implica una onda que se propaga en el sentido decreciente de  $z$ .

Convencionalmente se denomina onda **progresiva** a la que se propaga en el sentido elegido como positivo o de crecimiento de las posiciones y **regresiva** a la que se propaga en el sentido opuesto.

## RESUMEN

- Las líneas de transmisión son guías de onda donde se puede aplicar la aproximación cuasi-estática de parámetros distribuidos. Se modelizan como cuadripolos en cascada de extensión infinitesimal. Las variables significativas son la tensión y corriente a lo largo de la línea.



corriente a lo largo de la línea:

Las líneas ideales no tienen pérdidas de energía y el cuadripolo exhibe solamente elementos reactivos. Resultan las ecuaciones del telegrafista para tensión y

$$\left. \frac{\partial i}{\partial z} \right|_z = -C \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_z \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_z \approx -L \left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_z$$

que llevan a las ecuaciones de onda:  $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$      $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$

- Estas ecuaciones tienen soluciones ondulatorias:

$$v(z, t) = f(z \mp ct) \quad i(z, t) = v(z, t) / Z_0 \quad \text{con} \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_0 = \sqrt{L/C}$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas y  $Z_0$  la impedancia característica de la línea.

- En el caso de las líneas reales se incorporan las pérdidas en los conductores y en el dieléctrico. Esto lleva a ecuaciones de propagación más complicadas:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} - RG v = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial i}{\partial t} - RG i = 0$$

En el caso de ondas armónicas es fácil resolver las ecuaciones de ondas. Se obtiene una constante de propagación compleja – que indica la propagación con atenuación – y una impedancia característica compleja:

$$Z = R + i\omega L \quad Y = G + i\omega C \Rightarrow \gamma = \beta + i\alpha = \sqrt{-ZY}, \quad Z_0 = \sqrt{Z/Y}$$

- La velocidad de propagación de la onda es la velocidad de fase:  $v_f = \omega/\beta$

Esta velocidad depende generalmente de la frecuencia, lo que produce el fenómeno de la dispersión, que implica la distorsión de pulsos o paquetes de onda que se propaguen por la línea.

- En la práctica son de interés las líneas de bajas pérdidas:  $R \ll \omega L$  y  $G \ll \omega C$  donde:

$$\beta \equiv \omega \sqrt{LC}, \quad \alpha \approx \frac{\beta}{2} \left( \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \ll \beta \quad \text{y se tiene:}$$

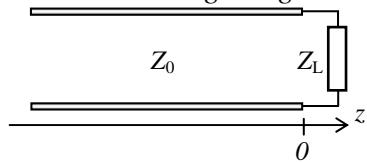
$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z_0 = Z'_0 + iZ''_0 \quad \text{con: } Z'_0 \equiv \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Z''_0 \approx \frac{Z'_0}{2} \left( \frac{G}{\omega C} - \frac{R}{\omega L} \right) \ll Z'_0$$

La potencia que viaja por la línea es:  $\langle vi \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(vi^*)$

Cuando hay pérdidas la potencia va decreciendo a medida de que se propaga. Se tiene en

$$\text{db/m: } 10 \log_{10} \left( \frac{\langle vi \rangle_z}{\langle vi \rangle_{z+1}} \right) = 10 \log_{10} (e^{2\alpha}) = 20 \log_{10} (e) \alpha$$

- Una línea cargada generalmente presenta reflexión de ondas. La relación entre las amplitudes de las ondas de tensión reflejada y la transmitida a la carga con la incidente son los coeficientes de reflexión y transmisión:



$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} \quad \tau_L = \frac{V_L}{V_+} = 1 + \rho_L = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0}$$

y los coeficientes de reflexión y transmisión de potencia:

$$R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho_L|^2 \quad T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{R_L Z_0}{|Z_L|^2} |\tau_L|^2$$

La reflexión de potencia se expresa normalmente en db mediante el coeficiente de pérdida de retorno:  $RL = -10 \log(R) = -20 \log(|\rho_L|)$

- La relación entre tensión y corriente en cualquier punto del circuito es la impedancia de onda o impedancia de campo:

$$Z(z) = \frac{v(z,t)}{i(z,t)} = Z_0 \frac{e^{-i\gamma z} + \rho_L e^{i\gamma z}}{e^{-i\gamma z} - \rho_L e^{i\gamma z}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\gamma z) - i Z_0 \sin(\gamma z)}{Z_0 \cos(\gamma z) - i Z_L \sin(\gamma z)}$$

y también la admitancia de onda o admitancia de campo:

$$Y(z) = Y_0 \frac{Y_L \cos(\gamma z) - i Y_0 \sin(\gamma z)}{Y_0 \cos(\gamma z) - i Y_L \sin(\gamma z)}$$

- Para líneas de transmisión de energía o información, la reflexión de potencia es habitualmente perjudicial, y está acompañada de sobretensiones y sobrecorrientes en la línea que pueden dañarla. El parámetro que define usualmente la importancia de la reflexión es la relación de onda estacionaria:  $ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|}$

que es la relación entre los valores máximo  $V_M = V_+ (1 + |\rho_L|)$  y mínimo  $V_m = V_+ (1 - |\rho_L|)$  de tensión a lo largo de la línea. Los correspondientes valores máximo y mínimo de corriente son:

$$I_M = \frac{V_+}{Z_0} (1 + |\rho_L|) \quad I_m = \frac{V_+}{Z_0} (1 - |\rho_L|).$$

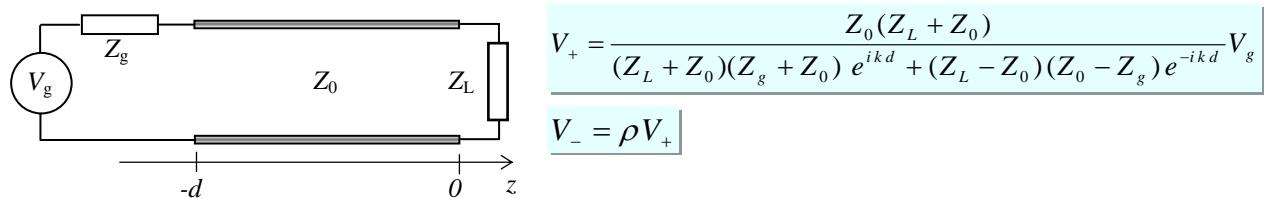
- Definimos el coeficiente de reflexión generalizado, dependiente de la posición como:

$$\rho(z) = \frac{V_- e^{i\gamma z}}{V_+ e^{-i\gamma z}} = \rho_L e^{i2\gamma z}$$

A partir de este coeficiente podemos escribir:

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad v(z,t) = V_+ e^{i(\omega t - k z)} [1 + \rho(z)] \quad i(z,t) = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t - k z)} [1 - \rho(z)]$$

- En una línea conectada a un generador y carga se tienen las dos condiciones de borde (sobre la carga y sobre la entrada) para determinar los coeficientes de las ondas:



## PROBLEMAS

- 6.1) Una línea coaxil ideal con conductores de radios  $a = 0.5 \text{ mm}$ ,  $b = 0.5 \text{ cm}$  y dieléctrico de  $\epsilon_r = 4$  lleva una onda de corriente progresiva de amplitud  $I_0 = 0.1A$  y frecuencia  $10\text{MHz}$ . Si la línea está terminada en su impedancia característica, calcular: a) la impedancia característica, b) la velocidad de propagación de las ondas, c) la onda de tensión en cada punto de la línea, d) los campos eléctrico y magnético, e) el valor medio del vector de Poynting y la potencia media transportada por la onda y f) recalcular la potencia media del punto e) a partir de la corriente y la tensión.

[Rta:  $69.03 \Omega$ ,  $1.5 \times 10^8 \text{ m/seg}$ ]

- 6.2) Se carga una línea ideal de impedancia característica  $Z_0 = 50\Omega$  con una impedancia  $Z_L = (100 + i100)\Omega$ . Calcular  $\rho$  en módulo y fase y la relación de onda estacionaria.

[Rta:  $0.62 e^{i0.52}$ , 4.26]

- 6.3) Una línea con  $R = 0.1\Omega/m$ ,  $G = 0$ ,  $C = 3 \text{ pF/m}$  y  $(L/C)^{1/2} = 300 \Omega$  tiene a su entrada una tensión  $V_0 = 10 e^{i\omega t} V$ ,  $f = 100 \text{ MHz}$ . Si la longitud de la línea es  $30 \text{ m}$  y  $Z_L = 100 \Omega$ ,  $300 \Omega$  y  $(0.4+i0.5)(L/C)^{1/2}$ , hallar la potencia media transmitida en los tres casos.

[Rta: 0.06 W, 0.168 W, 0.054 W]

- 6.4) La relación de onda estacionaria en una línea de transmisión sin pérdidas de  $50 \Omega$  terminada en una impedancia de carga desconocida es 3.0. La distancia entre dos mínimos consecutivos del voltaje es  $20 \text{ cm}$  y el primer mínimo se encuentra a  $5 \text{ cm}$  de la carga. Determine a) el coeficiente de reflexión y b) la impedancia de carga  $Z_L$ .

- 6.5) Una línea de transmisión sin pérdidas de longitud  $0.434 \lambda$  y cuya impedancia característica es de  $100 \Omega$  está terminada con una impedancia de  $(260 + i180) \Omega$ . Calcule a) el coeficiente de reflexión, b) la ROE, c) la impedancia de entrada y d) la posición del máximo de voltaje más cercano a la carga.

[Rta:  $\rho = 0.6/21.6^\circ$ ,  $S = 4$ ,  $Z_i = (69 + i120) \Omega$ , a  $0.03\lambda$  de la carga]

- 6.6) Considere una línea ideal de impedancia  $Z_0$  y longitud  $L$  abierta en los extremos y excitada en forma que la tensión en el centro de la línea es  $V(0, t) = V_0 e^{i\omega t}$ . a) Calcular las ondas de tensión y corriente en todo punto de la línea. b) Si  $L = 3 \text{ m}$  y la velocidad de las ondas en la línea es de  $2.7 \times 10^8 \text{ m/s}$ , ¿cuáles son las frecuencias permitidas de excitación?

[Rta:  $f_n = 90 n \text{ MHz}$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ ]

- 6.7) Una línea ideal de  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $v_f = c$  y  $L = 10 \text{ m}$  está excitada senoidalmente con una frecuencia de  $10 \text{ MHz}$  y conectada a una carga resistiva  $Z_L = 10 \Omega$ . a) Hallar la relación de onda estacionaria. b) Calcular el desfasaje entre tensión y corriente a la entrada de la línea. c) Diseñar un tramo de línea de adaptación (cuarto de onda) sabiendo que en esta  $v_f = 0.8 c$ . ¿Cuál es la impedancia que ve el generador?.

[Rta:  $-64^\circ 18'$ ,  $22.3 \Omega$  con  $6 \text{ m}$ ]

- 6.8) Una línea de microcinta tiene un dieléctrico de cuarzo fundido ( $\epsilon_r = 3.8$ ). Calcular  $\epsilon_{eff}$ ,  $Z_0$  y  $\lambda$  a  $10 \text{ GHz}$ , para: a)  $w/h = 4.5$  y b)  $w/h = 1.1$ .

[Rta: a)  $\epsilon_{eff} = 3.18$ ,  $Z_0 = 29.92 \Omega$ ,  $\lambda = 16.8 \text{ mm}$ , b)  $\epsilon_{eff} = 2.69$ ,  $Z_0 = 73.93 \Omega$ ,  $\lambda = 18.28 \text{ mm}$ ]

6.9) A  $10 \text{ GHz}$  una línea de microcinta tiene los siguientes parámetros:  $h = 0.8 \text{ mm}$ ,  $w = 1 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 6.6$ ,  $\tan \theta = 10^{-4}$  y  $\sigma_c = 5.8 \times 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ . Calcule la atenuación por pérdidas conductoras y por pérdidas dieléctricas.

[Rta:  $\alpha_c = 4.2 \text{ dB/m}$ ,  $\alpha_d = 0.177 \text{ dB/m}$ ]

6.10) Se desea construir una línea de microcinta de  $20 \Omega$  sobre zafiro ( $\epsilon_r = 10$ ). Calcule el valor requerido de  $w/h$ , la permitividad relativa efectiva y la velocidad de las ondas en la línea.

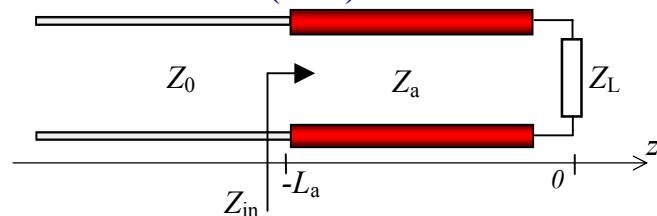
## 6 - Líneas de Transmisión (cont.)

### Adaptación de impedancias

Es común que se deba conectar una carga a una línea de impedancia característica diferente. En tal caso existirá una onda reflejada que disminuye la potencia entregada a la carga y puede tener efectos adversos en el generador, crear sobretensiones y sobrecorrientes sobre la línea capaces de causar daños, etc. Para evitar estas situaciones problemáticas existen distintos mecanismos de **adaptación** entre la línea y la carga. Veremos los más sencillos a continuación.

Como es lo habitual en las aplicaciones, supondremos que las líneas son ideales o de bajas pérdidas, por lo que tomamos reales a la impedancia característica y la constante de propagación. Por simplicidad en la introducción también supondremos que la carga es real

- **Transformador (línea) de cuarto de onda**



Se trata de un trozo de línea de longitud  $L_a$  y de impedancia característica  $Z_a$ . Para la adaptación, se requiere que la impedancia de entrada del conjunto carga + adaptador sea igual a la impedancia característica de la línea original  $Z_0$ :

$$Z_{in} = Z(-L_a) = Z_a \frac{Z_L \cos(k L_a) + i Z_a \sin(k L_a)}{Z_a \cos(k L_a) + i Z_L \sin(k L_a)} = Z_0$$

Luego:  $Z_a Z_L \cos(k L_a) + i Z_a^2 \sin(k L_a) = Z_a Z_0 \cos(k L_a) + i Z_L Z_0 \sin(k L_a)$

Para que se cumpla esta igualdad deben igualarse por separado las partes reales e imaginarias de ambos miembros:

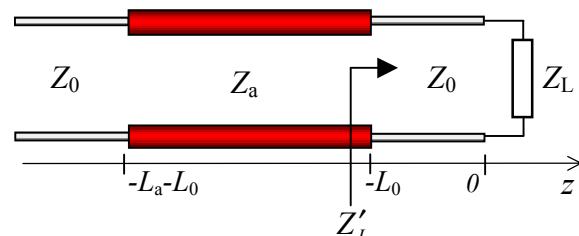
$$\begin{aligned} Z_a Z_L \cos(k L_a) &= Z_a Z_0 \cos(k L_a) \\ Z_a^2 \sin(k L_a) &= Z_L Z_0 \sin(k L_a) \end{aligned}$$

La primera ecuación, si el coseno es no nulo, requiere que  $Z_L = Z_0$ , pero esto no ocurre por hipótesis, ya que en tal caso no sería necesaria la adaptación. Entonces la igualdad sólo es válida si se

anula el coseno:  $\cos(k_a L_a) = 0 \Rightarrow k_a L_a = 2\pi \frac{L_a}{\lambda_a} = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow L_a = n \frac{\lambda_a}{4}$

Si  $n = 1 \Rightarrow L_a = \lambda_a / 4$  y esta es la longitud más corta de la línea adaptadora, que por tal motivo se llama **línea de cuarto de onda**. Con esta condición el seno en la segunda ecuación vale 1 y se satisface la igualdad si:  $Z_a^2 = Z_L Z_0 \Rightarrow Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L}$

que es la media geométrica de las impedancias que se quieren adaptar.

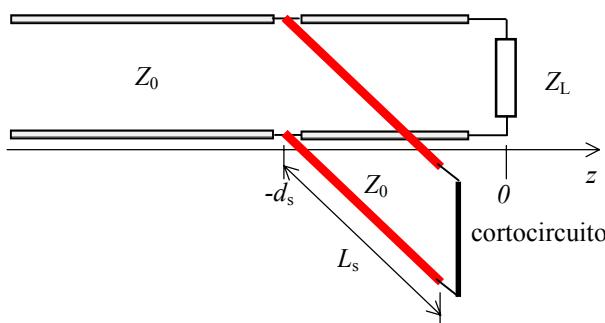


Consideremos ahora la adaptación cuando la carga es compleja. En este caso se coloca el adaptador a una distancia  $L_0$  de la carga para la cual la impedancia de entrada  $Z'_L$  es real y entonces:  $Z_a = \sqrt{Z'_L Z_0}$

La adaptación por este método se realiza en forma sencilla usando la carta de Smith que veremos más adelante.

**La adaptación de impedancias por línea de cuarto de onda se da para una única frecuencia, aquella en que  $L_a = \lambda_a / 4$**

- **Adaptador (stub)**



ca que podría causar interferencias.

El diseño del stub consiste en definir la longitud del stub  $L_s$  y la posición  $-d_s$  en la que debe ubicarse. En el punto de conexión la admitancia del conjunto es la suma de las admitancias del stub y la admitancia de entrada del conjunto línea+carga. Esa admitancia debe ser igual a  $1/Z_0$  para la adaptación.

Si la carga es resistiva quedan las ecuaciones para las admitancias de entrada:

$$\text{línea+carga: } Y(-d_s) = Y_0 \frac{Y_L \cos(kd) + iY_0 \sin(kd)}{Y_0 \cos(kd) + iY_L \sin(kd)} = Y_0 \frac{Y_L Y_0 + \frac{i}{2} (Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)}$$

$$\text{stub: } Y(-L_s) = -iY_0 \cot(kL_s)$$

de modo que para adaptación:

$$Y_0 = Y(-d_s) + Y(-L_s)$$

$$Y_L Y_0 + \frac{i}{2} (Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)$$

$$\text{Operando: } Y_0 = Y_0 \frac{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)} - iY_0 \cot(kL_s) \quad \text{de donde:}$$

$$\frac{Y_L Y_0}{Y_0^2 \cos^2(kd_s) + Y_L^2 \sin^2(kd_s)} = 1 \quad \Rightarrow \quad d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left( \sqrt{Z_L / Z_0} \right)$$

$$\frac{(Y_0^2 - Y_L^2) \sin(2kd)}{Y_0^2 \cos^2(kd) + Y_L^2 \sin^2(kd)} = 2 \cot(kL_s) \quad \Rightarrow \quad L_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right)$$

Estas ecuaciones permiten diseñar la adaptación. Son válidas únicamente para cargas resistivas.

En el caso general de cargas no resistivas es más fácil utilizar la carta de Smith para diseñar los adaptadores, cosa que veremos más adelante.

**Ejemplo 6.12:** Una línea de transmisión coaxil de tipo RG58 está terminada en una carga de valor  $Z_L = 175 \Omega$ . Se desea acoplarla por medio de un coaxil adaptador de  $\lambda/4$  a  $10MHz$ . Calcule la impedancia característica y la longitud del adaptador.

De la tabla de la p.6.10 tenemos que  $Z_0 = 50\Omega$ . La impedancia característica del adaptador debe ser:  $Z_a = \sqrt{Z_0 Z_L} \approx 93.5\Omega$

De la tabla de la p.6.10 se ve que el cable tipo RG62 A/U tiene la impedancia adecuada.

La velocidad de propagación es  $v_f = 0.85c$ . La longitud del adaptador entonces es:

$$L_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_a}{4f} \approx 6.38m$$

**Ejemplo 6.13:** Realice la adaptación del Ejemplo previo usando un stub cortocircuitado de la misma línea.

$$\text{Las ecuaciones de diseño son: } d_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left( \sqrt{Z_L / Z_0} \right) \quad L_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right)$$

De la tabla de la pág. 235 se tiene para el cable RG58:  $Z_0 = 50\Omega$ ,  $v_f = 0.66c$  y entonces:

$$d_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{Z_L}{Z_0}} \right) \approx 3.4m \quad L_s = \frac{v}{2\pi f} \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0} \right) \approx 3.09m$$


---

Nuevamente en este caso la adaptación funciona a una única frecuencia, porque los parámetros de diseño son proporcionales a la longitud de onda en la línea a la frecuencia de adaptación. Si se cambia esta frecuencia se debe cambiar la longitud del stub y su posición. La longitud se puede modificar con cierta facilidad, colocando un cortocircuito móvil en el extremo de carga, pero la posición es difícilmente variable. Sin embargo, si se usan **dos o más** stubs es posible variar la frecuencia de adaptación cambiando **únicamente sus longitudes**<sup>1</sup>.

## Carta de Smith

La impedancia de onda relativa a la impedancia característica puede escribirse:

$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{e^{-ikz} + \rho_L e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho_L e^{ikz}} = \frac{1 + \rho_L e^{i2kz}}{1 - \rho_L e^{i2kz}} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\varphi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\varphi)}}$$

Esta ecuación es del tipo:  $z = \frac{1+w}{1-w}$  donde  $z = r + i x$  y  $w = u + iv$ .

Tal ecuación se conoce como una **transformación bilineal** (se puede demostrar fácilmente que  $w = \frac{z-1}{z+1}$ ) y se caracteriza porque las líneas de  $r$  constante o las líneas de  $x$  constante resultan circunferencias en el plano  $w$ . Como  $|\rho_L| \leq 1$  el diagrama completo se halla dentro del círculo de radio unitario. Podemos demostrar que la forma de las curvas de  $r$  constante o  $x$  constante son circunferencias:

Partimos de:  $r + ix = \frac{1+u+iv}{1-u-iv} = \frac{(1+u+iv)(1-u+iv)}{(1-u)^2 + v^2} = \frac{1-u^2-v^2+i2v}{(1-u)^2+v^2}$

Luego:  $r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \quad x = \frac{2v}{(1-u)^2+v^2}$

de donde:  $r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2} \Rightarrow (1+r)u^2 - 2ru + (1+r)v^2 = 1-r$

completamos cuadrados:  $u^2 - 2\frac{r}{1+r}u + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \frac{1-r}{1+r} + \left(\frac{r}{1+r}\right)^2$

y finalmente:  $[u - r/(1+r)]^2 + v^2 = 1/(1+r)^2$

de donde se ve que las líneas de  $r$  constante son circunferencias de radio  $1/(1+r)$  y centradas en el punto  $r/(1+r)$ .

Se ve también que el círculo para  $r = 0$  tiene la ecuación  $u^2 + v^2 = 1$  y coincide con el círculo exterior de la carta y que el círculo para  $r \rightarrow \infty$  tiene la ecuación  $[u - 1]^2 + v^2 = 0$  y coincide con el punto  $(1,0)$ .

Análogamente, de la ecuación para  $x$ :

$$x = \frac{2v}{(1-u)^2 + v^2} \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} = 0 \Rightarrow (1-u)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

y finalmente:  $[u - 1]^2 + [v - 1/x]^2 = 1/x^2$

---

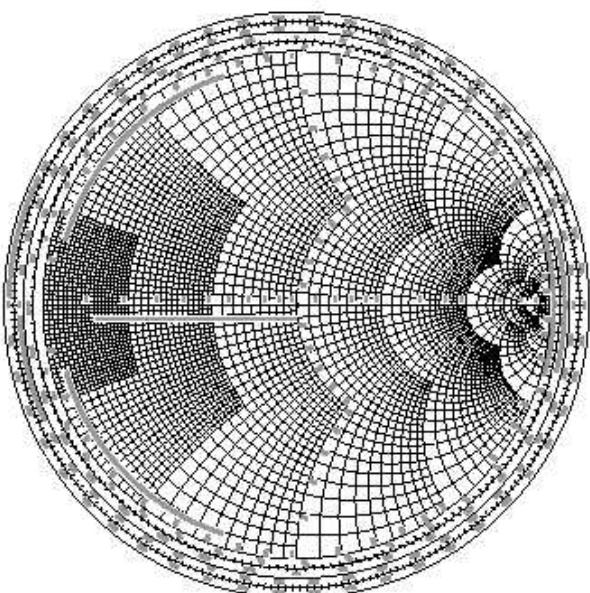
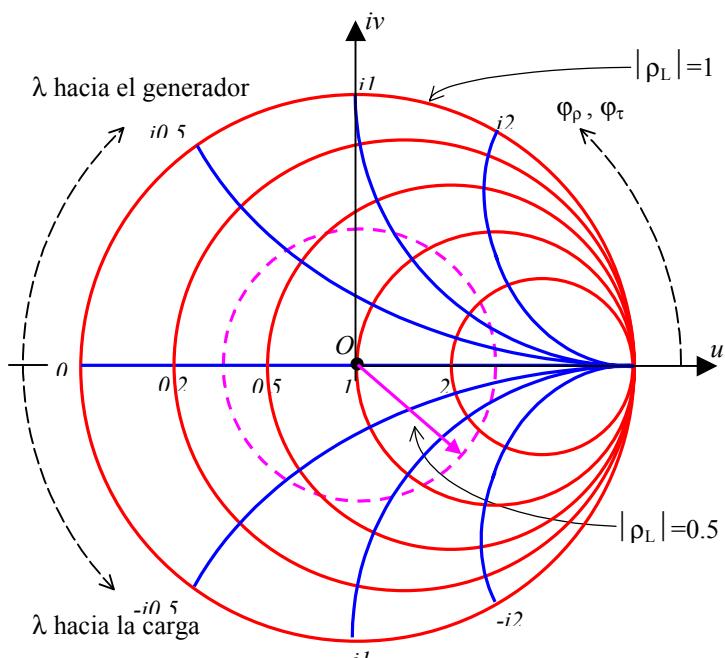
<sup>1</sup> Ver, por ejemplo, R. Neli Vera, "Líneas de Transmisión", McGraw-Hill Interamericana, México, 199, pp. 182 y posteriores.

de donde se ve que las líneas de  $x$  constante son circunferencias de radio  $1/x$  y centradas en el punto  $(1, 1/x)$ .

Para  $x = 0$  el radio se hace infinito y la curva coincide con el eje real. Para  $x \rightarrow \infty$  se tiene la ecuación  $[u - 1]^2 + v^2 = 0$ , que nuevamente coincide con el punto  $(1, 0)$ .

En este diagrama los ejes  $(u, v)$  representan las partes real e imaginaria del complejo  $|\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}$  mientras que  $r = \text{Re}[Z(z)/Z_0]$  (valores señalados sobre el eje horizontal) y  $x = \text{Im}[Z(z)/Z_0]$  (valores señalados sobre el círculo exterior) son los valores, normalizados a la impedancia característica de la línea, de la parte real e imaginaria de la impedancia de onda.

Por convención, el ángulo  $\phi$  del fasor  $\rho_L$  se mide desde el eje real positivo en sentido antihorario.



- Dada  $Z(z)$  obtener  $\rho(z)$   
Dada  $\rho(z)$  obtener  $Z(z)$
- Dados  $Z_L$  y  $\rho_L$  obtener  $Z(z)$  y  $\rho(z)$   
Dados  $Z(z)$  y  $\rho(z)$  obtener  $Z_L$  y  $\rho_L$
- Hallar posiciones y valores de máximos y mínimos de tensión sobre la línea.

Variar la posición sobre la línea implica cambiar el ángulo de fase del complejo  $(u, v)$ , lo que implica girar alrededor del centro del diagrama a  $|\rho_L|$  constante ( $\rho_L$  es constante porque depende de las impedancias característica y de carga, pero no de la posición en la línea).

Como los ángulos aumentan convencionalmente en el sentido antihorario, y el sentido positivo de la coordenada  $z$  es hacia la carga, **un giro antihorario representa un movimiento hacia la carga, y el giro horario un movimiento hacia el generador**. El círculo exterior del diagrama permite medir estos desplazamientos, calibrados en longitudes de onda. El cero de desplazamiento se coloca sobre el eje real negativo. Dado que se miden **diferencias** de longitud (la posición a lo largo de la línea respecto de la posición de la carga) no importa dónde se ponga el cero.

La carta de Smith se usa para calcular impedancias de entrada, ROE, coeficientes de reflexión y otros datos sólo con una regla y un compás, sin usar funciones trigonométricas o hiperbólicas, lo que facilita los cálculos. Aunque hemos deducido sus ecuaciones para líneas sin pérdidas ( $Z_0$  real), es posible extender su uso a líneas con bajas pérdidas. En la figura se muestra una carta estándar (archivo **SMITH.PDF**).

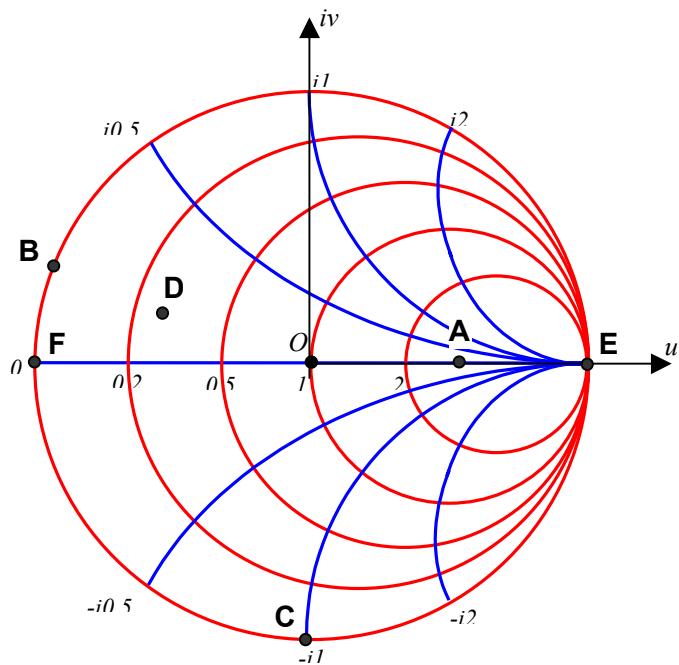
Las aplicaciones de cálculo básicas de la carta de Smith a líneas sin pérdidas son:

- Hallar la ROE.
- Dada  $Z(z)$  obtener  $Y(z)$
- Dada  $Y(z)$  obtener  $Z(z)$

### Ejemplos de uso de la carta de Smith

La operación básica con la carta de Smith consiste en ubicar una impedancia, como se explica en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 6.14:** Ubicar sobre la carta de Smith las siguientes impedancias:



entrada si la longitud de la línea es  $L = 0.1 \lambda$  y c) los valores de longitud de línea que llevan a una impedancia de entrada puramente resistiva y los valores de estas impedancias.

- a) Una resistencia  $R_A = 150\Omega$ . b) Una reactancia inductiva  $X_B = i10\Omega$ . c) Una reactancia capacitiva  $X_C = -i50\Omega$ . d) Una impedancia RL serie  $Z_D = (15 + i10)\Omega$ . e) Un circuito abierto  $Z_E = \infty$ . f) Un cortocircuito  $Z_F = 0$ . Usar como impedancia de normalización el valor  $Z_0 = 50\Omega$ .

- a)  $z_A = Z_A / Z_0 = R_A / Z_0 = 3$  (A)  
b)  $z_B = Z_B / Z_0 = X_B / Z_0 = i0.2$  (B)  
c)  $z_C = Z_C / Z_0 = X_c / Z_0 = -i1$  (C)  
d)  $z_D = Z_D / Z_0 = 0.3 + i0.2$  (D)  
e)  $z_E = Z_E / Z_0 \rightarrow \infty$  (E)  
f)  $z_F = Z_F / Z_0 = 0$  (F)

**Ejemplo 6.15:** Una línea de  $50\Omega$  está terminada por una resistencia de  $30\Omega$  en serie con una reactancia capacitativa de  $40\Omega$ . Hallar: a)  $\rho_L$  y ROE, b) la impedancia de

Para utilizar la carta de Smith primero expresamos la impedancia de carga normalizada a la impedancia característica:

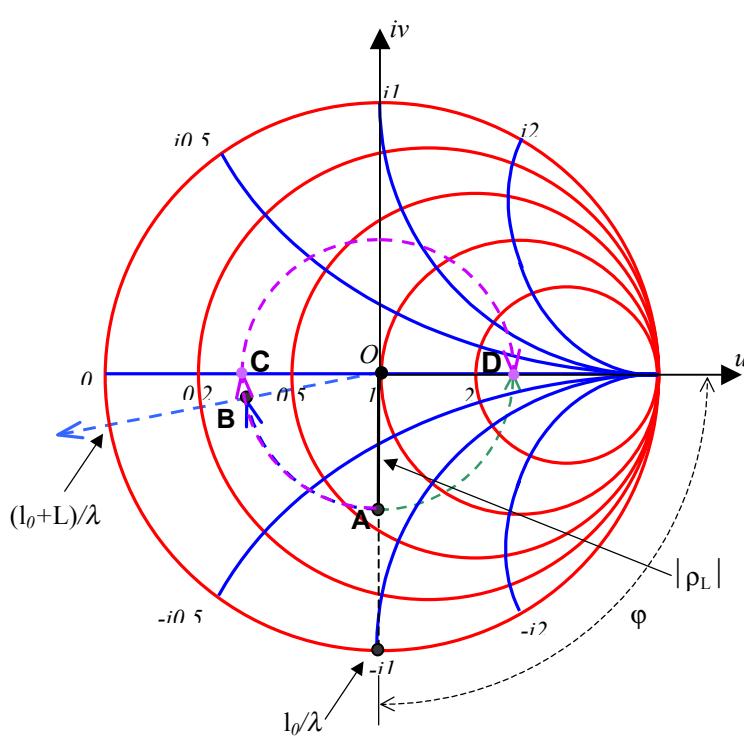
$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{30 - i40}{50} = 0.6 - i0.8$$

y entonces marcamos en la carta de Smith el punto **A** en la intersección de los círculos  $r = 0.6$  y  $x = -0.8$ .

- a) La distancia desde **A** al centro del diagrama da  $|\rho_L| = 0.5$  y la prolongación de este segmento hasta el círculo de ángulos exterior da  $\phi = 90^\circ$  (trazos en negro).

Además  $ROE = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + 0.5}{1 - 0.5} = 3$

Podemos sacar el valor de ROE de la carta de Smith. Como depende solamente de  $|\rho_L|$ , una carga resistiva pura con el mismo  $|\rho_L|$  dará el mismo ROE.



Como para  $R_L > Z_0$ :  $|\rho_L| = (R'_L - Z_0) / (R'_L + Z_0) \Rightarrow R'_L / Z_0 = (1 + |\rho_L|) / (1 - |\rho_L|) = ROE$

y el valor del  $ROE$  coincide con la resistencia normalizada que da el mismo valor de  $|\rho_L|$ . Se usa este hecho y se traza en la carta de Smith el arco de circunferencia centrada en el centro del diagrama hasta el eje  $x = 0$  para  $r > 1$ . El valor obtenido de  $r$  en el cruce **D** (3) es igual al  $ROE$  (trazo en verde).

- b) Para calcular la impedancia de entrada buscamos la posición donde el radio del diagrama que pasa por **A** corta al círculo perimetral marcado "hacia el generador". Resulta  $l_0/\lambda = 0.375$ . Este es un valor de partida arbitrario. Si ahora nos desplazamos hacia el generador (en el sentido horario) sobre el círculo de  $|\rho_L| = \text{cte}$ . ( $|\rho_L|$  depende solamente de la carga y  $Z_0$ ) en  $0.1\lambda$ , de acuerdo al enunciado del problema, tendremos:

$$(l_0 + L)/\lambda = 0.375 + 0.1 = 0.475.$$

El punto **B** así obtenido tiene  $r = 0.34$  y  $x = 0.14$ , o sea  $Z_{in} = (17 - i7)\Omega$  (trazos en azul).

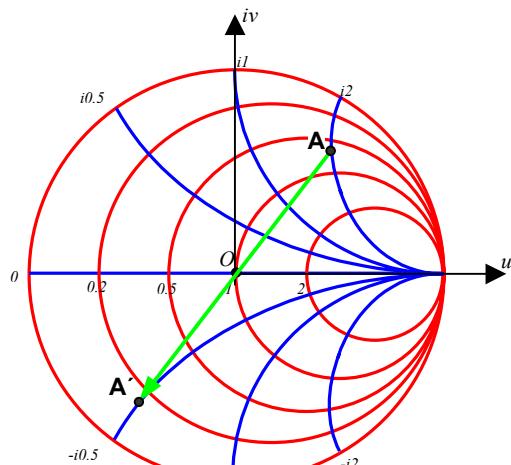
- c) Finalmente, las longitudes de las líneas con impedancia de entrada resistivas corresponden a los puntos de intersección sobre el eje real ( $x = 0$ ) de la circunferencia que pasa por **A**, recorrida en el sentido horario. El primer punto de cruce es el **C** (separado del **A** en  $\lambda/4$ ) y luego el **D** (separado del **C** en  $\lambda/4$ ) (trazos en violeta).

### Carta de admitancias

Dado que la admitancia  $Y = I/Z$  satisface las mismas ecuaciones que la impedancia de onda, **la carta de Smith es también un diagrama de admitancias normalizadas a  $Y_0 = I/Z_0$** . La transformación bilineal es:

$$\frac{Z(z)}{Z_0} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}} \Rightarrow \frac{Y(z)}{Y_0} = \frac{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}}{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi)}} = \frac{1 + |\rho_L| e^{i(2kz+\phi+\pi)}}{1 - |\rho_L| e^{i(2kz+\phi+\pi)}} \Rightarrow y = \frac{1 + we^{i\pi}}{1 - we^{i\pi}}$$

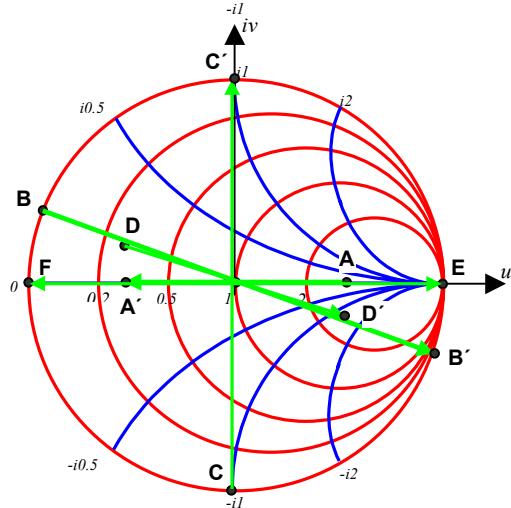
que es la misma ecuación de la carta de impedancias, pero aparece un ángulo de fase de  $\pi$  multiplicando al complejo  $w$ . Por ello, un punto de la carta de impedancias está sobre el círculo de  $|\rho_L|$  constante separado  $180^\circ$  ( $\pi$ ) del punto correspondiente a la misma carta medida en admitancias. Por otra parte, las escalas son iguales, de manera que donde se lee resistencia (reactancia) en la carta de impedancias se debe leer conductancia (susceptancia) en la de admitancias.



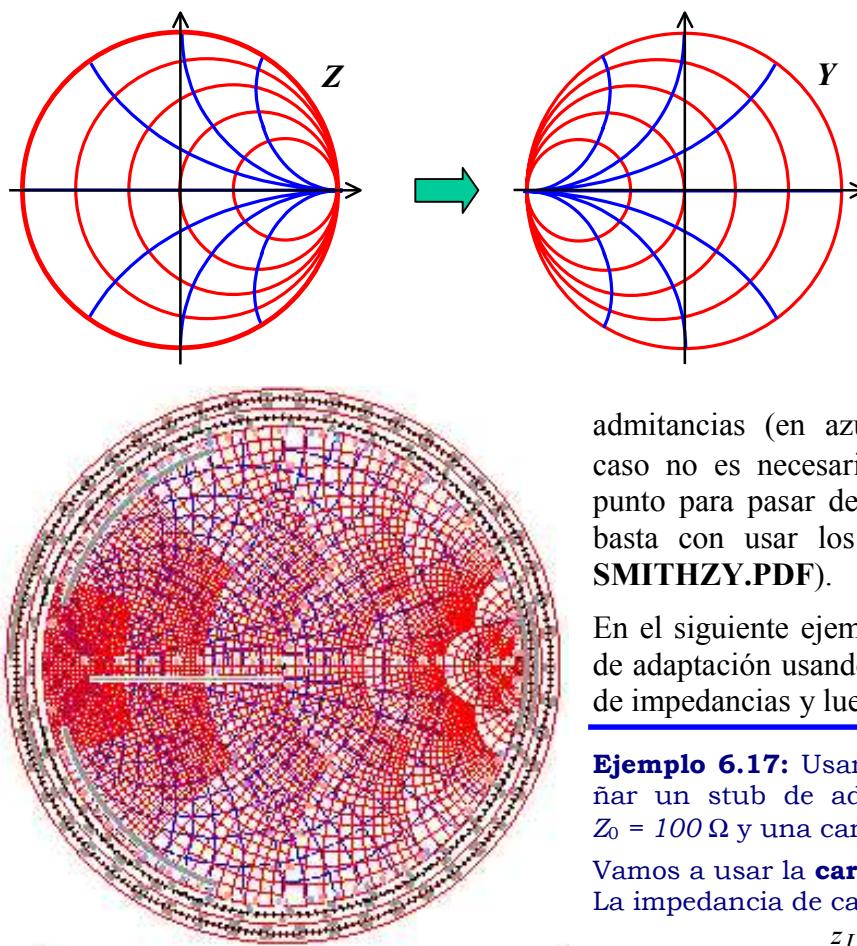
En el siguiente ejemplo se usa la carta de Smith para pasar de impedancia a admitancia en el caso de las cargas del **Ejemplo 6.14**.

**Ejemplo 6.16:** Ubicar sobre la carta de Smith las siguientes admitancias:

- a) Una resistencia  $R_A = 150\Omega$ . b) Una reactancia inductiva  $X_B = i10\Omega$ . c) Una reactancia capacitiva  $X_C = -i50\Omega$ . d) Una impedancia RL serie  $Z_D = (15 + i10)\Omega$ . e) Un circuito abierto  $Z_E = \infty$ . f) Un cortocircuito  $Z_F = 0$ . Usar como impedancia de normalización el valor  $Z_0 = 50\Omega$ .



- a)  $y_A = Y_A / Y_0 = Z_0 / G_A = 1/3$  (**A'**)  
 b)  $y_B = Y_B / Y_0 = Z_0 / X_B = -i5$  (**B'**)  
 c)  $y_C = Y_C / Y_0 = Z_0 / X_c = i1$  (**C'**)  
 d)  $y_D = Y_D / Y_0 \approx 2.3 - i1.54$  (**D'**)  
 e)  $z_E = Y_E / Y_0 = 0$  (**E**)  
 f)  $z_F = Y_F / Y_0 \rightarrow \infty$  (**F**)



Otra posibilidad de representación de admitancias es girar todo el diagrama en  $\pi$ , en lugar de girar cada punto, con lo que se obtiene una carta de admitancias como la de la figura.

A la izquierda se muestra una carta de Smith donde se dibujan los círculos de impedancias (en rojo) y de admitancias (en azul) simultáneamente. En este caso no es necesario girar en  $\pi$  la posición del punto para pasar de una carta a la otra, sino que basta con usar los círculos adecuados (archivo **SMITHZY.PDF**).

admitancias (en azul) simultáneamente. En este caso no es necesario girar en  $\pi$  la posición del punto para pasar de una carta a la otra, sino que basta con usar los círculos adecuados (archivo **SMITHZY.PDF**).

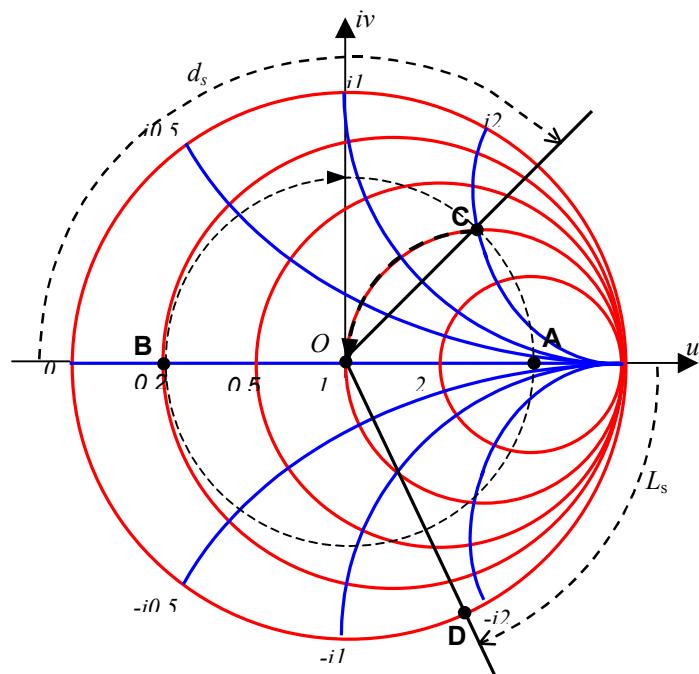
En el siguiente ejemplo se diseña un stub paralelo de adaptación usando la carta de Smith como carta de impedancias y luego como carta de admitancias.

**Ejemplo 6.17:** Usar la carta de Smith para diseñar un stub de adaptación entre una línea de  $Z_0 = 100 \Omega$  y una carga real  $Z_L = 500 \Omega$ .

Vamos a usar la **carta de Smith de impedancias**. La impedancia de carga normalizada es:

$$z_L = Z_L / Z_0 = 5$$

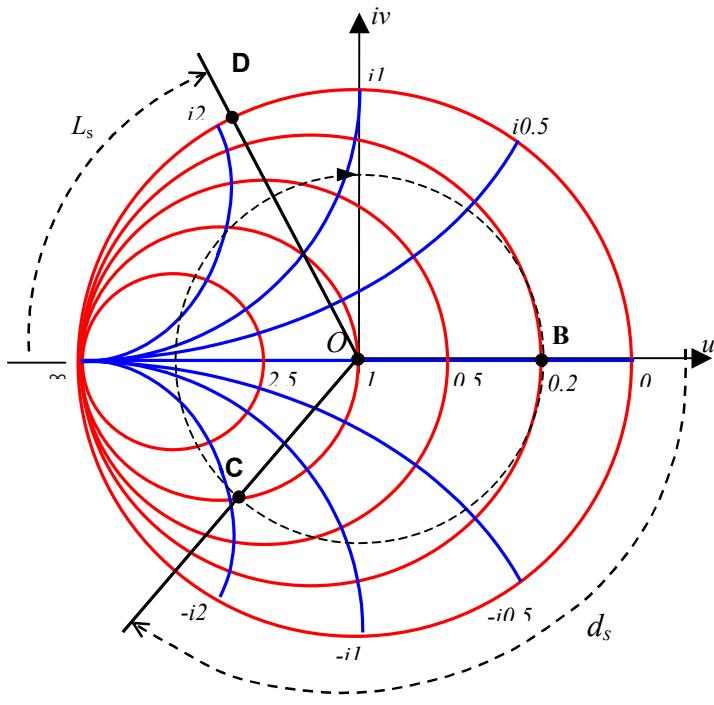
Se ingresa a la carta en este punto (**A**). Se traza un círculo auxiliar concéntrico con la carta que pasa por **A**. Este círculo es la curva de  $|\rho_L|$  y  $ROE$  constantes. Para adaptación debemos pasar de **A** a **O**, el centro del diagrama, donde  $|\rho_L| = 0$ . Como vamos a colocar un stub en paralelo con la línea principal, nos conviene trabajar con admitancias. Pasamos entonces de **A** al punto correspondiente **B** (a  $180^\circ$ ), donde la admitancia normalizada es  $y_L = 0.2$ .



Para ubicar el stub nos movemos por el círculo de  $|\rho_L|$  constante en sentido horario (hacia el generador) hasta llegar al círculo de admittance real normalizada igual a 1 (que coincide con el círculo de impedancia normalizada igual a 1 - punto **C**). Para adaptación sólo se requiere agregar una susceptancia en paralelo de valor opuesto a la susceptancia de **C**. La distancia  $d_s = 0.183 \lambda$  (en longitudes de onda) medida sobre el círculo exterior de la carta entre los radios que pasan por **B** y **C** es la distancia desde la carga a la que hay que poner el stub. Para hallar la longitud del stub, se observa que la impedancia normalizada en **C** es  $y_C = 1 + i 1.79$ , de

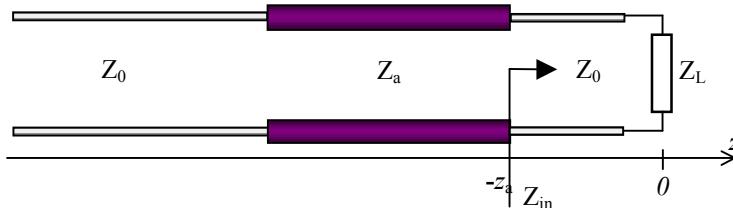
manera que el stub debe presentar una admittance:  $y_s = -i 1.79$ . El stub cortocircuitado presenta una admittance de entrada puramente reactiva:  $Z(-l_s) = i Z_0 \tan(k l_s) \Rightarrow Y(-l_s) = -i Y_0 \cot(k l_s)$ .

El lugar geométrico de esta impedancia (a medida que cambia  $l_s$  es el círculo exterior de radio unitario que corresponde a  $r = 0$ . Ubicamos entonces el punto **D** que define la admittance de entrada del stub sobre el cruce del círculo de susceptancia  $b_s = -i 1.79$  con el círculo exterior, y midiendo sobre el círculo exterior la distancia desde el punto de admittance normalizada infinita (condición de cortocircuito - eje real positivo) se obtiene  $L_s = 0.08 \lambda$  que es la longitud (mínima) requerida del stub.



Si se trabaja con la **carta de admittancias**, se parte desde **B** ( $y_L = 0.2$ ) y se gira a  $|p_L|$  constante hasta alcanzar el círculo de conductancia normalizada unitaria (**C**). Se mide sobre la escala de longitudes de onda la posición del stub, como antes. Luego se ubica el punto **D**, que neutraliza la impedancia de entrada de la línea en el punto de conexión del stub y se mide la longitud necesaria del stub. Naturalmente los valores obtenidos son los mismos que en la construcción previa.

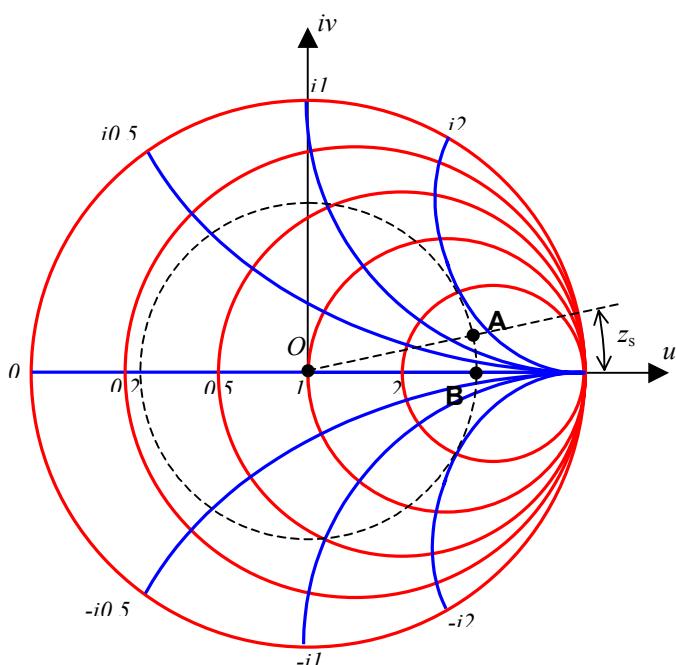
**Ejemplo 6.18:** Usar la carta de Smith para diseñar un adaptador de cuarto de onda entre una línea de  $Z_0 = 100 \Omega$  y  $v_f = 0.87c$  y una carga  $Z_L = 150(1+i)$  a  $20 \text{ MHz}$ .



carga de impedancia **compleja**.

La solución consiste en intercalar el adaptador a una distancia  $z_a$  de la carga, de manera que la impedancia de entrada  $Z_{in}$  del conjunto línea+carga sea real, como se muestra en la figura. La determinación de esta posición se complica matemáticamente si se desea resolver el problema analíticamente, pero es muy fácil con la carta de Smith.

Este es un caso donde el uso de la carta de Smith es mucho más sencillo que la resolución analítica. En la sección de adaptación vimos cómo adaptar una carga **real** a una línea de impedancia característica **real**, pero en este caso tenemos una



Comenzamos calculando primero la impedancia de carga normalizada:  

$$z_L = Z_L / Z_0 = 1.5 + i1.5$$

y determinaremos el punto **A** en la carta. Cualquier posición en la línea estará sobre la circunferencia centrada en la carta y que pasa por **A**. Para hallar la posición donde se debe intercalar el adaptador de cuarto de onda, nos movemos desde **A** hacia el generador (en sentido horario) hasta el primer cruce con el eje real. Esto ocurre en el punto **B**. Podemos leer en la escala exterior la longitud del arco que nos da la posición deseada  $z_s$  para el adaptador, y del eje real la impedancia (real)  $Z'_L$  en ese punto, que será la impedancia que hay que adaptar a la línea.

En nuestro caso:

$$z_s \approx 0.056\lambda = 0.056 \frac{v_f}{f} \approx 0.73m$$

$$Z'_L \approx 3.35Z_0 \approx 335\Omega$$

de donde:

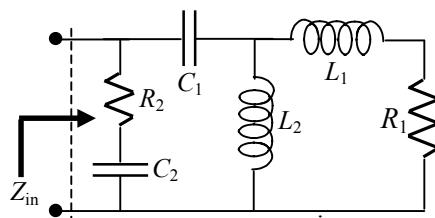
$$Z_a = \sqrt{Z_0 Z'_L} \approx 1.83 Z_0 \approx 183\Omega$$

$$L_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_f}{4f} \approx 3.26m$$

### Aplicación a circuitos de constantes concentradas

La carta de Smith no es sólo aplicable a circuitos con líneas. Se puede usar para diseñar circuitos concentrados con la misma simplicidad, como se muestra en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 6.19:** Determinar la impedancia de entrada del circuito de la figura. Datos:  $R_1 = 50\Omega$ ,  $R_2 = 15\Omega$ ,  $L_1 = 8\mu H$ ,  $L_2 = 26.5\mu H$ ,  $C_1 = 3nF$ ,  $C_2 = 50nF$ ,  $f = 1MHz$ .



Para usar la carta de Smith debemos normalizar las impedancias del circuito a un valor **arbitrario**. En el caso de las líneas elegimos la impedancia característica. En este caso elegiremos el valor de la resistencia  $R$ . Asignamos a cada elemento el valor de su impedancia normalizada a la frecuencia de trabajo:

$$R_1 \rightarrow r_1 = 1 \quad R_2 \rightarrow r_2 = R_2 / R_1 = 0.3$$

$$L_1 \rightarrow x_1 = i\omega L_1 / R_1 \approx i \quad L_2 \rightarrow x_2 \approx 3.33i$$

$$C_1 \rightarrow x_4 = 1/i\omega C_1 R \approx -1.06i$$

$$C_2 \rightarrow x_5 \approx -0.064i$$

Con estos valores ubicamos primero la impedancia serie  $z_A = r + ix_1 = 1+i$  en la carta de Smith (punto **A**). El siguiente paso consiste en hallar la impedancia resultante del paralelo de  $z_1$  con  $x_2$ , para lo cual debemos transformar ambas impedancias en admitancias:

$$z_A \rightarrow y_A = 0.5(1-i) \quad (\text{punto A'})$$

$$x_2 \rightarrow b_2 = -1/x_2 \approx -0.3i$$

La admitancia resultante del paralelo de  $y_1$  y  $b_2$  se puede hallar en el diagrama de Smith moviéndonos sobre el círculo de conductancia constante 0.3 en el sentido de admisión decreciente (porque  $b_2$  es negativa) o sea en el sentido opuesto a las agujas del reloj. Llegamos al punto **B** [ $y_B \approx 0.5 - 0.8i$ ]. Como el siguiente elemento a combinar es en serie, volvemos al

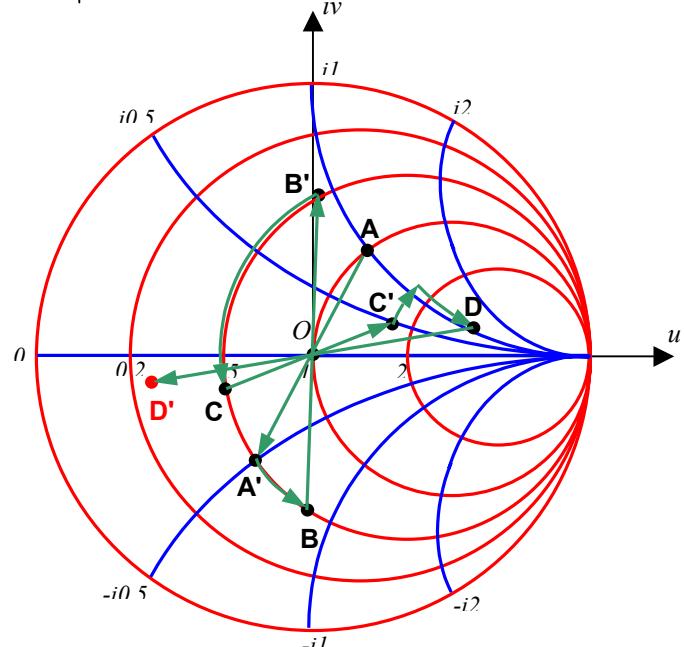
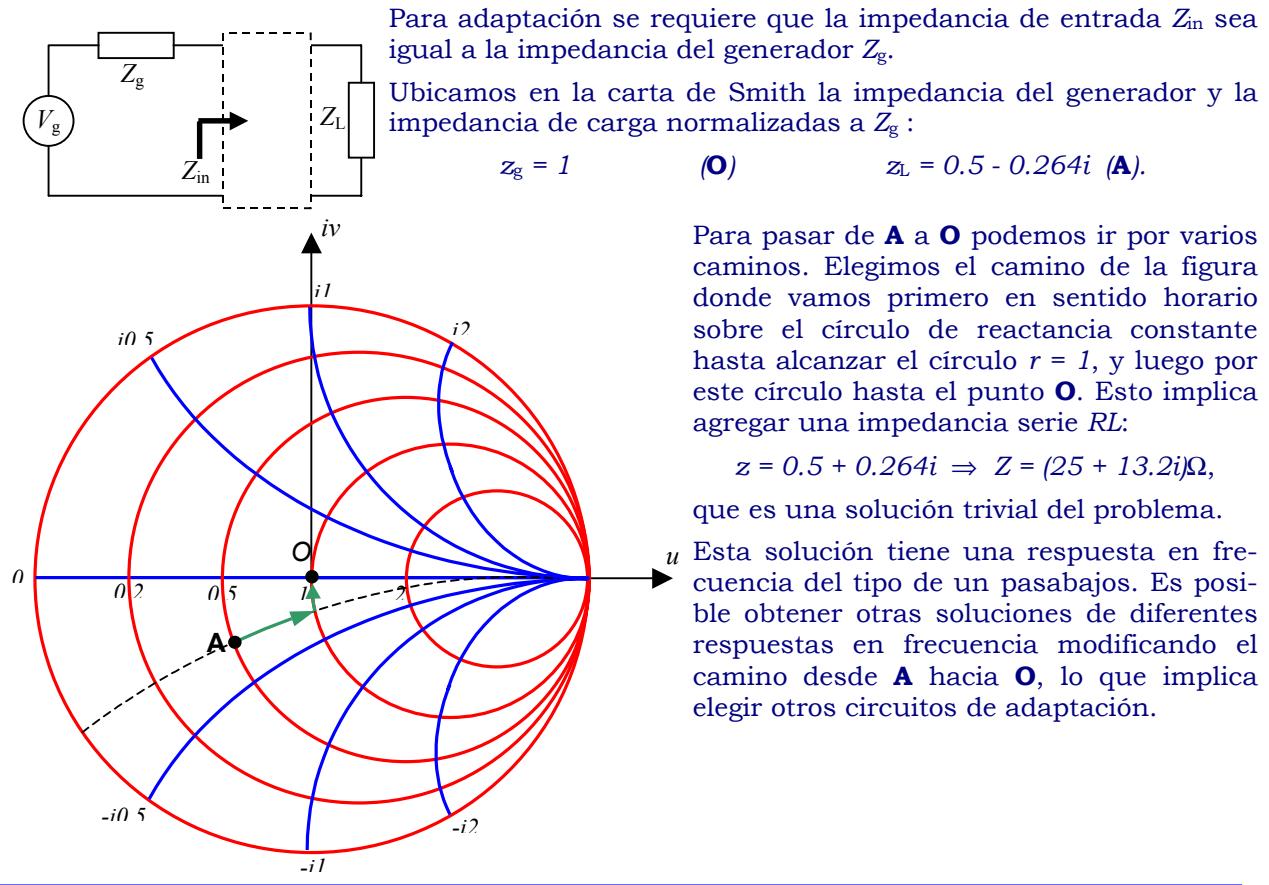


diagrama de impedancias [punto **B'**:  $z_{B'} \approx 0.56 + 0.9i$ ]. Agregamos ahora la impedancia serie  $x_4$  para lo cual nos movemos sobre el círculo de resistencia constante en el sentido antihorario de reactancia decreciente (porque  $x_4$  es negativa) hasta llegar al punto **C**:  $z_C \approx 0.56 - 0.16i$ . Finalmente agregamos en paralelo la serie de  $R_2$  y  $C_2$ :  $z_C \approx 0.3 - 0.064i$ , que corresponde a una admisión  $y_C \approx 3.19 + 0.68i$ . Pasamos al diagrama de admitancias: **C** → **C'** ( $y_C \approx 1.65 + 0.47i$ ) y giramos primero sobre un círculo de conductancia constante  $+0.68i$  y luego sobre un círculo de susceptancia constante  $3.19$ , para llegar al punto **D** ( $y_D \approx 4.84 + 1.15i$ ). Finalmente invertimos el punto para volver al diagrama de impedancias y llegamos al punto final **D'**:  $z_D = z_{in} \approx 0.196 - 0.046i \Rightarrow Z_{in} \approx (9.8 - 2.3i)\Omega$ . Los valores numéricos que aparecen en el texto salen de la carta y los valores intermedios no se requieren para el resultado y se han dado solamente para referencia.

**Ejemplo 6.20:** Diseñar un circuito de adaptación entre un generador de impedancia interna  $Z_g = 50 \Omega$  y una impedancia de carga  $Z_L = (25 - 13.2i)\Omega$  a la frecuencia de trabajo.



## Líneas resonantes

Además de transmitir energía e información de un punto a otro, las líneas se pueden usar como **elementos de circuito**, fundamentalmente por su propiedad de lograr cualquier impedancia de entrada en función de su longitud y su carga. Esta situación es muy común en la actualidad, en que se integran líneas de transmisión o guías de onda en chips para microondas.

En particular, la posibilidad de tener **ondas estacionarias** lleva a que las líneas se puedan usar como **circuitos resonantes** o sintonizados.

Consideremos primero una línea supuestamente ideal cortocircuitada en ambos extremos. El generador se coloca en algún punto intermedio que consideraremos más adelante. Las ondas (estacionarias) de tensión y corriente en la línea son:

$$v(z, t) = 2V_+ \sin(\omega t) \sin(kz) \quad i(z, t) = 2 \frac{V_+}{Z_0} \cos(\omega t) \cos(kz)$$

Veamos si estas expresiones satisfacen las condiciones en los extremos de la línea. La tensión se anula sobre el extremo de carga ( $z = 0$ ) pero debe también anularse sobre el extremo opuesto ( $z = -l$ ). Entonces:

$$\sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow l_n = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f} \Rightarrow l_n = \frac{n}{2f\sqrt{LC}}$$

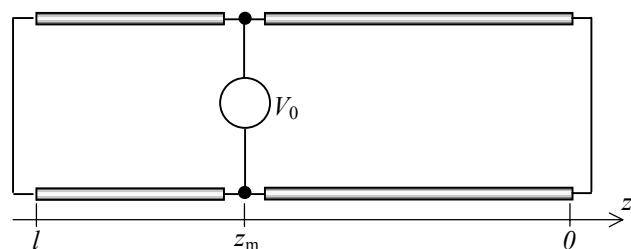
lo que significa que, para una dada frecuencia de excitación, la longitud de la línea no puede ser cualquiera, sino solamente alguno de los valores discretos  $l_n$ . Viceversa, para una línea de longitud y parámetros dados, sólo se pueden establecer ondas con un conjunto discreto de frecuencias:

$$l = n \frac{1}{2f_n\sqrt{LC}} \Rightarrow f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}}$$

Un elemento circuitual o un circuito que selecciona frecuencias es un circuito **resonante** o **sintonizado**. Para esta aplicación pueden usarse líneas que habitualmente se cortocircuitan en ambos extremos para minimizar la radiación de interferencias.

Ahora podemos analizar la posición del generador que alimenta la línea. Suponemos que es un generador de tensión ideal (impedancia interna nula), y podemos colocarlo en la posición de un antinodo cualquiera de la onda estacionaria:

$$\sin(kz) = 1 \Rightarrow -kz_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow z_m = -\frac{(2m + 1)}{4f\sqrt{LC}}$$



donde se toman valores negativos de  $z_m$  por la convención de colocar el origen de coordenadas sobre la carga. Entonces queda definido el valor de  $V_+$ :  $2V_+ = V_0$ , donde  $V_0$  es la tensión del generador.

## Energía y Q

La energía almacenada en la línea, que está asociada a sus componentes reactivos, se puede calcular apelando al modelo circuitual. Cada  $dz$  de línea tiene una inductancia  $Ldz$  y una capacidad  $Cdz$ . La energía almacenada en estos elementos es:

$$dU = \frac{1}{2} (L i^2(z, t) + C v^2(z, t)) dz = \frac{1}{2} \left( L \left( \frac{V_0}{Z_0} \right)^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + C V_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) \right) dz$$

Entonces:

$$dU = \frac{1}{2} C V_0^2 (\cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + \sin^2(\omega t) \sin^2(kz)) dz$$

y tomando el promedio temporal:  $\langle dU \rangle = \frac{1}{4} CV_0^2 (\cos^2(kz) + \sin^2(kz)) dz = \frac{1}{4} CV_0^2 dz$

Finalmente, integrando a toda la línea:  $\langle U_n \rangle = \frac{1}{4} CV_0^2 l_n$

Consideremos ahora una línea con pérdidas. Si las pérdidas son **bajas**, como es el caso en la mayoría de las líneas comerciales, podemos suponer que la distribución de tensión y corriente no será muy diferente que en el caso ideal, y podemos calcular la potencia perdida para cada tramo  $dz$  de la línea como:

$$dW = R dz i^2(z, t) + G dz v^2(z, t) = \left( R \left( \frac{V_0}{Z_0} \right)^2 \cos^2(\omega t) \cos^2(kz) + G V_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) \right) dz$$

y tomando el promedio temporal:  $\langle dW \rangle = \frac{1}{2} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} \cos^2(kz) + \frac{G}{C} \sin^2(kz) \right) dz$

Integrando a toda la línea:  $\langle W \rangle = \frac{1}{2} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} \int_{-l_n}^0 \cos^2(kz) dz + \frac{G}{C} \int_{-l_n}^0 \sin^2(kz) dz \right)$

y como  $k = n\pi/l_n$ :

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} \int_{-l_n}^0 \cos^2\left(\frac{n\pi}{l_n} z\right) dz + \frac{G}{C} \int_{-l_n}^0 \sin^2\left(\frac{n\pi}{l_n} z\right) dz \right) \Rightarrow \langle W_n \rangle = \frac{1}{4} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n$$

Un circuito resonante tiene como misión almacenar energía. Cuanto mayores son las pérdidas menor es la calidad del circuito como resonante. Esta característica se suele medir por el llamado **factor de calidad** o **factor de mérito**:

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía media almacenada}}{\text{potencia media disipada por ciclo}} = 2\pi \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle / f} = \omega \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle}$$

Usando las expresiones que hemos hallado:

$$Q = \omega \frac{\langle U \rangle}{\langle W \rangle} = \omega \frac{\frac{1}{4} CV_0^2 l_n}{\frac{1}{4} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n} \Rightarrow Q_n = \frac{1}{(R/\omega_n L + G/\omega_n C)} = \frac{2\pi}{R/f_n L + G/f_n C}$$

Se observa que para una línea de bajas pérdidas  $Q_n \gg 1$  ya que en tal caso cada término del denominador es mucho menor que 1. La frecuencia que aparece en la expresión de  $Q_n$  es una de las posibles frecuencias de resonancia  $f_n$  del circuito, y el valor de  $Q_n$  calculado corresponde a esa frecuencia.

En resonancia, el generador (supuestamente conectado en un antinodo de la tensión) ve una impedancia infinita cuando la línea es ideal. Cuando hay pérdidas, la potencia perdida debe ser suministrada por el generador, de manera que la impedancia que el generador ve debe ser ahora **finita y real** y de valor tal que la potencia que el generador le suministra sea igual a la potencia disipada en la línea. Podemos calcular así la resistencia de entrada (en resonancia) de la línea vista por el generador:

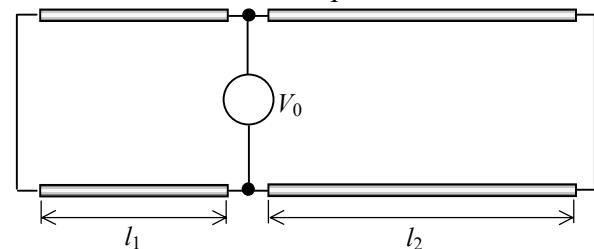
$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R_i} = \frac{1}{4} CV_0^2 \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) l_n \quad \text{de donde} \quad R_i = \frac{4}{\omega C (R/\omega L + G/\omega C) n \lambda} = \frac{4Q}{\omega C n \lambda}$$

y finalmente nos queda, en función del  $Q$  de la línea:

$$R_{i_n} = \frac{2 Q_n Z_0}{\pi n}$$

### Ancho de banda

Podemos analizar el comportamiento en frecuencia alrededor de la resonancia considerando ahora que variamos ligeramente la frecuencia del generador respecto de una de las frecuencias de resonancia del circuito. Para analizar el resultado de esta variación de frecuencia, el circuito se puede pensar como un generador conectado a dos líneas en paralelo y cortocircuitadas en sus extremos de carga. Las longitudes de cada línea



son, respectivamente,  $l_1$  y  $l_2$ . En resonancia, estas longitudes son múltiplos impares de  $\lambda/4$  y la impedancia de entrada del paralelo de ambas líneas es  $R_i$ , pero deja de tener este valor fuera de resonancia. Como se trata de líneas cortocircuitadas de bajas pérdidas, fuera de resonancia sus impedancias de entrada son fundamentalmente reactivas, por lo que en el siguiente análisis despreciamos momentáneamente la parte resistiva. Como las dos líneas están en paralelo, es conveniente trabajar con las admitancias (susceptancias). En resonancia:

$$iB_i = -iY_0[\cot(\beta l_1) + \cot(\beta l_2)] \rightarrow 0$$

Fuera de resonancia podemos escribir:  $\beta = \omega/c = \omega_0(1+\delta)/c$  donde  $\omega_0$  es una de las frecuencias de resonancia y  $\delta \ll 1$  representa un corrimiento relativo de frecuencia.

Luego:  $\beta l_1 = \frac{\omega_0(1+\delta)}{c} l_1 = \beta_0 l_1 (1+\delta) = n_1 \frac{\pi}{2} (1+\delta)$  y análogamente:  $\beta l_2 = n_2 \frac{\pi}{2} (1+\delta)$

Luego tenemos:  $iB_i = -iY_0 \left\{ \cot \left[ n_1 \frac{\pi}{2} (1+\delta) \right] + \cot \left[ n_2 \frac{\pi}{2} (1+\delta) \right] \right\}$

Pero para  $n_1$  impar:  $\cot \left[ n_1 \frac{\pi}{2} (1+\delta) \right] = -\tan \left( n_1 \frac{\pi}{2} \delta \right) \equiv -n_1 \frac{\pi}{2} \delta$

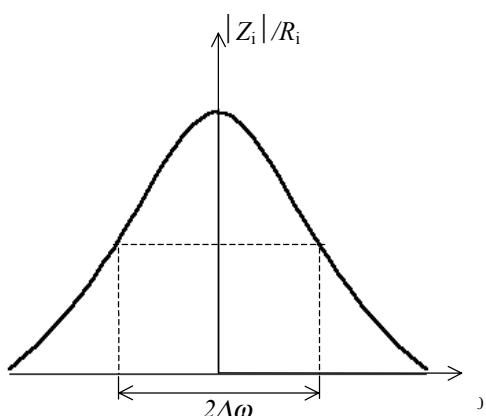
y entonces:  $iB_i = -iY_0 \left( -n_1 \frac{\pi}{2} \delta - n_2 \frac{\pi}{2} \delta \right) = iY_0 \left( \frac{n\pi\delta}{2} \right)$

Finalmente, incorporando la resistencia de entrada, la admitancia que ve el generador fuera de resonancia es, aproximadamente:

$$Y_i = 1/R_i + iB_i \approx \frac{\pi n Y_0}{2Q} + iY_0 \left( \frac{n\pi\delta}{2} \right) = \frac{n\pi}{2} Y_0 \left( \frac{1}{Q} + i\delta \right) = \frac{n\pi}{2} Y_0 \left( \frac{1}{Q} + i \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

y entonces:  $|Y_i| = \frac{n\pi}{2} Y_0 \sqrt{\left( \frac{1}{Q} \right)^2 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2} \Rightarrow |Z_i| = \frac{2Z_0}{n\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{Q} \right)^2 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2}$

Si graficamos el módulo de la **impedancia de entrada** en función de la frecuencia  $\omega$  obtenemos la clásica curva de resonancia:



El valor mínimo de admitancia (o el máximo de impedancia) de entrada se da para la resonancia  $\omega = \omega_0$ :

$$|Y_i|_{\min} = \frac{n\pi}{2Q} Y_0 \Rightarrow |Z_i|_{\max} = \frac{2Q}{n\pi} Z_0 = R_i$$

y es la resistencia de entrada  $R_i$  ya calculada. Definimos el **ancho de banda**  $\Delta\omega$  entre las dos frecuencias a ambos lados de la resonancia para las cuales la impedancia de entrada cae a  $1/\sqrt{2}$  de su valor máximo, o lo que es lo mismo, la admitancia de entrada es  $\sqrt{2}$  veces el valor mínimo:

$$|Y_i| = \frac{n\pi Y_0}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{2}|Y_i|_{\min} = \sqrt{2} \frac{n\pi Y_0}{2Q} \Rightarrow \frac{1}{Q^2} + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 = \frac{2}{Q^2}$$

y finalmente:  $\omega - \omega_0 = \pm \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  de donde:  $Q_n = \omega_{0_n} / \Delta\omega_n = f_{0_n} / \Delta f_n$

Podemos observar que a estas frecuencias la parte real y parte imaginaria de la admitancia de entrada (o de la impedancia de entrada) son iguales.

**La ecuación hallada vincula los tres parámetros fundamentales de la resonancia: la frecuencia de resonancia, el ancho de banda y el  $Q$ .**

**Ejemplo 6.21:** Una línea de parámetros  $L = 1.2 \mu H/m$ ,  $C = 30 nF/m$ ,  $R = 0.01 \Omega/m$ ,  $G = 10^{-4} 1/\Omega m$  se usa como circuito sintonizado. a) Hallar la mínima longitud para tener una frecuencia de resonancia de  $10MHz$ . b) Determinar las posibles posiciones de la entrada al circuito. c) Calcular el  $Q$ , la impedancia de entrada en resonancia y el ancho de banda del circuito sintonizado.

a) Las frecuencias de resonancia son:  $f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}}$   $\Rightarrow l_{\min} = l = \frac{1}{2f\sqrt{LC}} \approx 26.35 cm$

b) Las posiciones de los antinodos, posibles posiciones de entrada al circuito, son:

$$z_m = -\frac{(2m+1)}{4f\sqrt{LC}} = (m+1/2)l \Rightarrow z_0 = l/2 \approx 13.17 cm$$

ya que sólo se puede tomar  $m = 0$ .

$$\begin{aligned} c) \quad Q &= \frac{2\pi f}{(R/L + G/C)} \approx 5386 \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}} \approx 6.3 \Omega \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} R_i = \frac{2QZ_0}{\pi} \approx 21.68 K\Omega \\ \Delta f = \frac{f}{Q} \approx 1.86 kHz \end{cases}$$

Se observa que el ancho de banda es muy bajo comparado con el valor de la frecuencia central, lo que se asocia al alto valor del  $Q$ .

**Ejemplo 6.22:** Un tramo de coaxil RG11 se usa para crear un circuito resonante a  $100 MHz$ . Hallar la longitud necesaria del cable, el  $Q$ , la impedancia de entrada en resonancia y el ancho de banda del circuito sintonizado.

De la tabla de la p.6.10, los parámetros del coaxil RG11 son:

Diámetro ( $2b$ ) mm	$Z_0$ Ohm	$v/c$	$C$ $pF/m$	$\alpha$ ( $\alpha$ $100 MHz$ ) $dB/m$
10.3	75	0.66	67	0.069

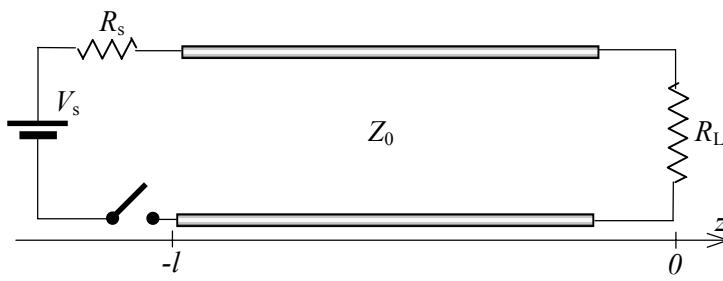
La longitud mínima del circuito sintonizado es:  $l = \frac{1}{2f\sqrt{LC}} = \frac{v}{2f} \approx 1 m$

$$\text{Como: } Q \approx \frac{2\pi f}{R/L} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{R}{2Z_0} \Rightarrow \begin{cases} Q = \frac{\pi f L}{\alpha Z_0} = \frac{\pi f}{\alpha v} \approx 200 \\ R_i = \frac{2QZ_0}{\pi} \approx 9.5 K\Omega \\ \Delta f = \frac{f}{Q} \approx 0.5 MHz \end{cases}$$

## Transitorios en líneas

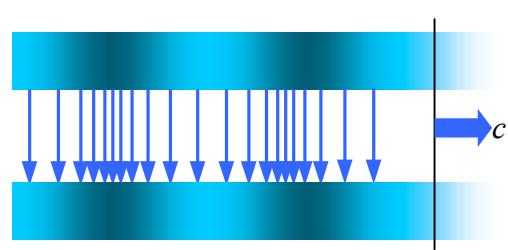
Es muy común el uso de líneas de transmisión para propagar pulsos que codifican información. Un tren periódico de pulsos se puede representar mediante una serie de Fourier que es una superposición de ondas armónicas (un pulso no periódico requiere una integral de Fourier, que también representa una superposición de ondas armónicas). Es posible entonces analizar el proceso para cada frecuencia y finalmente superponer los resultados, ya que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de las líneas de transmisión son lineales. Este análisis se hace entonces en el **dominio de la frecuencia**.

Sin embargo, en muchos casos es más instructivo analizar el comportamiento de la señal completa sin descomponerla por Fourier. Este análisis se hace en el **dominio del tiempo**, y es el que vamos a usar en esta sección.



Consideraremos una línea sin pérdidas que conecta una batería de impedancia interna resistiva  $R_s$  a una resistencia de carga  $R_L$ . En el instante  $t = 0$  se cierra el interruptor que conecta el generador a la línea. La onda inicial o de arranque “ve” solamente la serie de  $R_s$  y  $Z_0$ .

Entonces la corriente para  $z = -l$ ,  $t = 0^+$  es:  $I(-l, 0^+) = I_0 = V_s / (R_s + Z_0)$  y la tensión inicial es:  $V(-l, 0^+) = V_0 = I_0 Z_0 = V_s Z_0 / (R_s + Z_0)$ .



Después de cerrar el interruptor las ondas  $i_+ = I_0$  y  $v_+ = V_0$  se propagan hacia la carga con la velocidad  $c = 1/\sqrt{LC}$ . Como esta velocidad es finita, el frente de ondas tarda  $t_1 = l/c$  en llegar a la carga e interaccionar con ella. En ese momento la tensión y corriente en la carga serán la superposición de las ondas incidente y la reflejada:

$$V(0, t_1) = v_+ + v_- = (1 + \rho_L) V_0$$

$$I(0, t_1) = i_+ + i_- = (1 - \rho_L) I_0$$

donde  $\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$  es el coeficiente de reflexión en la carga.

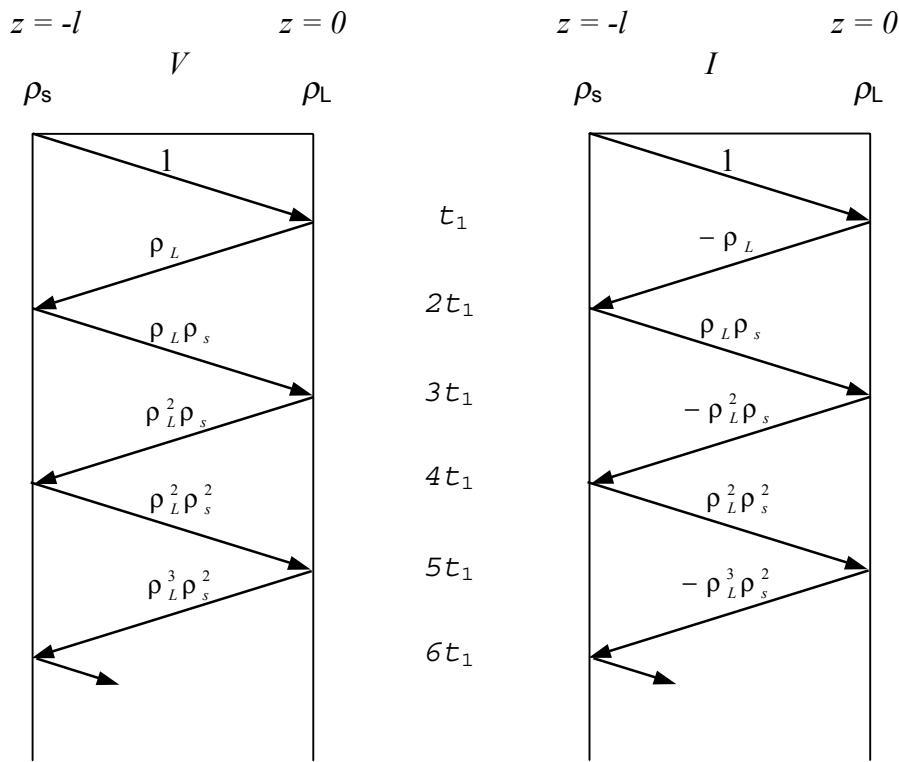
Las ondas reflejadas  $i_- = \rho_L I_0$  y  $v_- = \rho_L V_0$  viajan ahora hacia el generador (las ondas incidentes siguen propagándose desde el generador hacia la carga). En el instante  $t = 2t_1$  las ondas reflejadas llegan al generador, donde la nueva desadaptación de impedancias crea una nueva onda “reflejada” progresiva:

$$V(-l, 2t_1) = v_+ + v_- + v'_+ = (1 + \rho_L) V_0 + \rho_s \rho_L V_0 = (1 + \rho_L + \rho_s \rho_L) V_0$$

$$I(-l, 2t_1) = i_+ + i_- + i'_+ = (1 - \rho_L) I_0 - \rho_s (-\rho_L I_0) = (1 - \rho_L + \rho_s \rho_L) I_0$$

donde  $\rho_s = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$  es el coeficiente de reflexión en el generador.

Esta nueva onda progresiva viaja hacia la carga, donde llega para  $t = 3t_1$ , instante en el que se genera una nueva onda regresiva: El proceso de reflexiones múltiples se puede ver más fácilmente mediante los **diagramas de rebote** o **diagramas de malla de Bewley**, que se muestran a continuación:



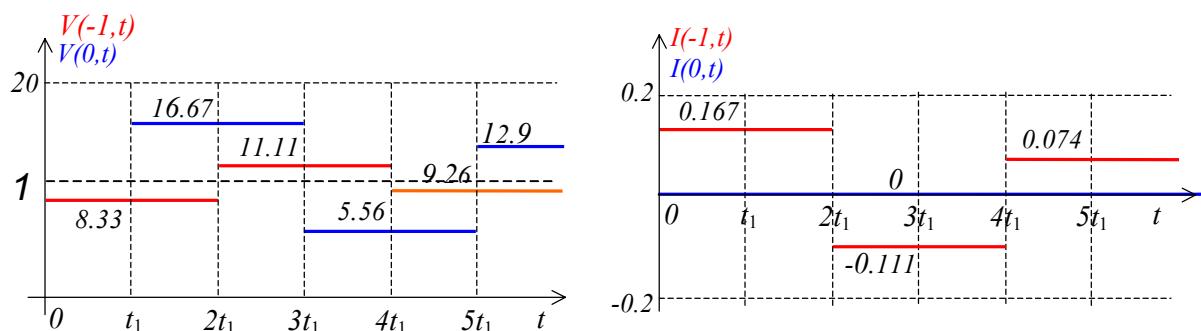
Se ve claramente cómo se forma cada serie de términos que dará el valor final de la tensión y la corriente sobre la línea después de los múltiples rebotes. Salvo en los casos de generador ideal y carga en cortocircuito o circuito abierto, en que se producen oscilaciones permanentes, como se analizó en la sección previa, como  $|\rho| < 1$  cada término es menor que el precedente y la serie finalmente converge a un valor límite. Vamos a analizar las formas de onda que se obtienen cuando se colocan diversas impedancias de carga.

**Ejemplo 6.23:** Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador y la carga para una línea de  $Z_0 = 50 \Omega$ , conectada a un generador de tensión de  $10V$  con resistencia interna  $R_s = 10 \Omega$ . La impedancia de carga es  $R_L = \infty$  (**circuito abierto**).

Las amplitudes de las ondas progresivas que viajan por la línea luego de cerrar el interruptor son.  $V_0 = \frac{Z_0 V_s}{R_s + Z_0} \approx 8.33V$   $I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \approx 0.167 A$

$$\text{Los coeficientes de reflexión son: } \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = 1 \quad \rho_s = \frac{R_s - Z_0}{R_s + Z_0} = -0.667$$

Realizamos la serie que describen los diagramas de Bewley para obtener las siguientes gráficas (tensiones en  $V$  y corrientes en  $A$ ):

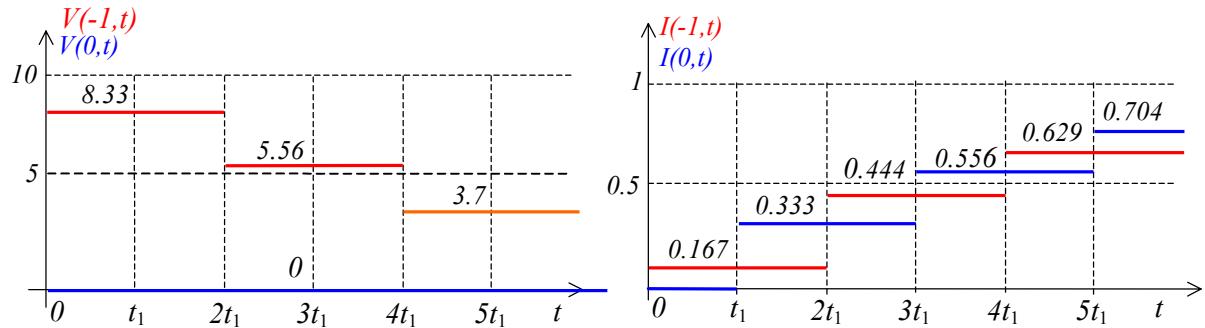


Se observa que la tensión y la corriente a la entrada de la línea oscilan tendiendo a su valor final  $V(0, \infty) = V(-l, \infty) = V_s = 10V$ , que corresponde al estado estacionario (de corriente continua) donde ya no hay ondas viajeras en la línea. La línea es en estas condiciones un

cortocircuito y la tensión final sobre la carga es la misma que la tensión de entrada ( $e$  igual a la tensión de la fuente porque no circula corriente por estar la carga en circuito abierto). La corriente sobre la carga es siempre cero, como debe ser, y la corriente en la entrada tiende a su valor final cero.

**Ejemplo 6.24:** Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para  $R_L = 0 \Omega$  (**cortocircuito**).

Los coeficientes de reflexión son:  $\rho_L = -1$      $\rho_s = -0.667$      $V_0$  e  $I_0$  tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:



La tensión a la salida es siempre cero, por el cortocircuito, mientras que a la entrada tiende a su valor límite nulo de corriente continua. La corriente tiende en ambos extremos de la línea a su valor límite de continua que vale  $I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_s / R_s = 1 A$

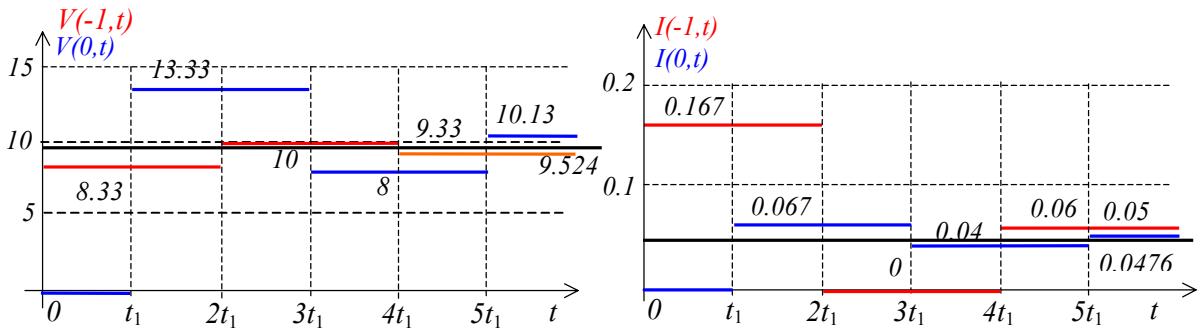
A tiempo infinito, ya no hay ondas viajeras por la línea y ésta se comporta como un cortocircuito por el que circula corriente estacionaria.

De estos ejemplos se observa que, en el caso de carga a circuito abierto, la tensión en el extremo del generador oscila alrededor del valor límite de continua (la tensión del generador) mientras que en el caso de carga cortocircuitada la tensión de entrada tiende monótonamente a cero.

Vemos ahora qué ocurre con una **impedancia de carga resistiva finita**.

**Ejemplo 6.25:** Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para  $R_L = 200 \Omega$ .

Los coeficientes de reflexión son:  $\rho_L = 0.6$      $\rho_s = -0.667$      $V_0$  e  $I_0$  tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:

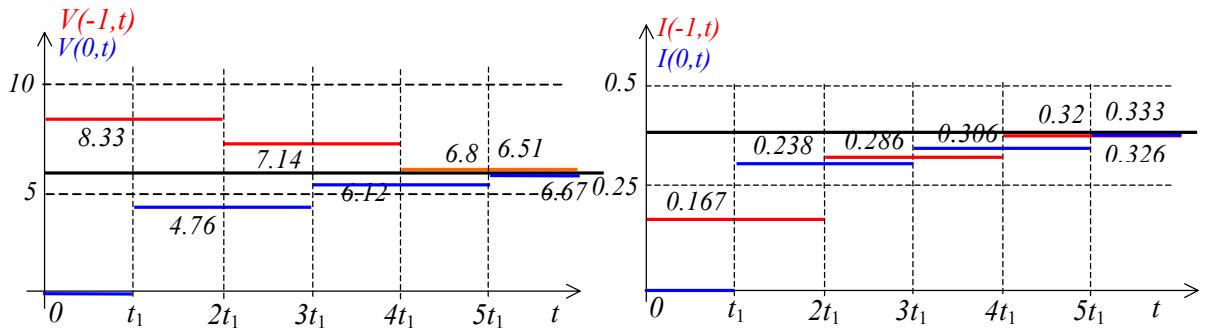


Los valores de tensión y corriente tienden a sus valores límite de corriente continua:

$$I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_0 / (Z_s + Z_L) \approx 47.6 mA \quad y \quad V(0, \infty) = V(-l, \infty) = Z_L I(0, \infty) \approx 9.524 V$$

**Ejemplo 6.26:** Realice un diagrama temporal de la tensión y la corriente sobre el generador de la línea del ejemplo anterior para  $R_L = 20 \Omega$ .

Los coeficientes de reflexión son:  $\rho_L = -0.429$      $\rho_s = -0.667$      $V_0$  e  $I_0$  tienen los mismos valores que en el Ejemplo previo. Los diagramas temporales resultan ahora:



Los valores de tensión y corriente tienden a sus valores límite de corriente continua:

$$I(0, \infty) = I(-l, \infty) = V_0 / (Z_s + Z_L) \approx 33.3 \text{ mA} \quad \text{y} \quad V(0, \infty) = V(-l, \infty) = Z_L I(0, \infty) \approx 6.67 \text{ V}$$

En este caso ( $Z_L < Z_0$ ) la tendencia de tensión y corriente a sus valores finales es monótona, mientras que en el caso previo ( $Z_L > Z_0$ ) la tendencia era oscilante.

En estos dos últimos ejemplos se observa que si  $Z_L < Z_0$  la tendencia de todas las variables graficadas es monótona hacia sus valores finales, mientras que si  $Z_L > Z_0$  la tendencia es oscilante.

### Cargas complejas

Hemos analizado el comportamiento de cargas resistivas. Cuando la carga es una **impedancia compleja** la dependencia temporal de los frentes de onda se modifica. Consideremos por ejemplo una línea de impedancia característica real  $Z_0$  terminada en una impedancia de carga  $Z_L$ , a la que se conecta una batería  $V_0$  a la entrada para  $t = 0$ . El frente de onda de tensión  $V_0$  viaja con la velocidad de propagación en la línea hasta que llega a la carga en  $t = t_1$ . La carga impone la relación entre tensión y corriente y genera así una onda reflejada, por la desadaptación de impedancias con la impedancia característica de la línea.

Podemos obtener la forma de onda de la onda regresiva utilizando técnicas de transformación de Laplace. Si en lugar de trabajar con las tensiones y corrientes como funciones del tiempo consideramos sus transformadas de Laplace:

$$v_{\pm}(z, t) \leftrightarrow V_{\pm}(z, s) \quad i_{\pm}(z, t) \leftrightarrow I_{\pm}(z, s)$$

entonces podemos escribir para el coeficiente de reflexión:

$$\rho_L = \frac{v_-(0, t)}{v_+(0, t)} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \leftrightarrow P_L = \frac{V_-(0, s)}{V_+(0, s)} = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \Rightarrow V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s}$$

donde  $\Xi_L$  es la transformada de Laplace de la impedancia de carga y  $V_0/s$  la transformada de Laplace de la función escalón que representa la onda progresiva. Esta expresión se invierte nuevamente por Laplace para hallar la expresión en el tiempo de la onda de tensión regresiva.

**Ejemplo 6.27:** Halle la onda de tensión regresiva cuando la impedancia de carga es: a) una serie RL; b) una serie RC; c) un paralelo RL; d) un paralelo RC.

a) En este caso:  $\Xi_L = R + sL$



$$\text{y: } V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 + Ls}{R + Z_0 + Ls} \frac{V_0}{s} = \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

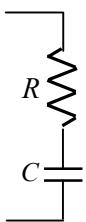
donde  $\tau = L/(R + Z_0)$ . La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0, t) = V_0 \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} + \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con} \quad t' = t - t_1$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0, t_1) = V_0$  y la tensión sobre la carga en el instante del rebote duplica a la de la onda incidente, porque la inductancia serie

impide el súbito incremento de la corriente, que entonces es inicialmente cero (condición de circuito abierto).

b) En este caso:  $\Xi_L = R + 1/sC$



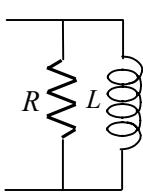
$$y: V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 + 1/sC}{R + Z_0 + 1/sC} \frac{V_0}{s} = \left[ \frac{1}{s} - \frac{2Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

donde  $\tau = C(R + Z_0)$ . La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0, t) = V_0 \left[ 1 - \frac{2Z_0}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0, t_1) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} V_0$  ya que el capacitor es inicialmente un cortocircuito y la tensión sobre la carga depende solamente de la relación  $R/Z_0$ .

c) En este caso:  $\Xi_L = 1/(1/R + 1/Ls) = sRL/(R + sL)$



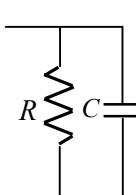
$$y: V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{sL(R - Z_0) - RZ_0}{sL(R + Z_0) + RZ_0} \frac{V_0}{s} = \left[ -\frac{1}{s} + \frac{2R}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

donde  $\tau = RZ_0 / L(R + Z_0)$ . La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0, t) = V_0 \left[ -1 + \frac{2R}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0, t_1) = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} V_0$  ya que la inductancia es inicialmente un circuito abierto y la tensión sobre la carga depende nuevamente de la relación  $R/Z_0$ .

d) En este caso:  $\Xi_L = 1/(1/R + Cs) = R/(1 + sCR)$



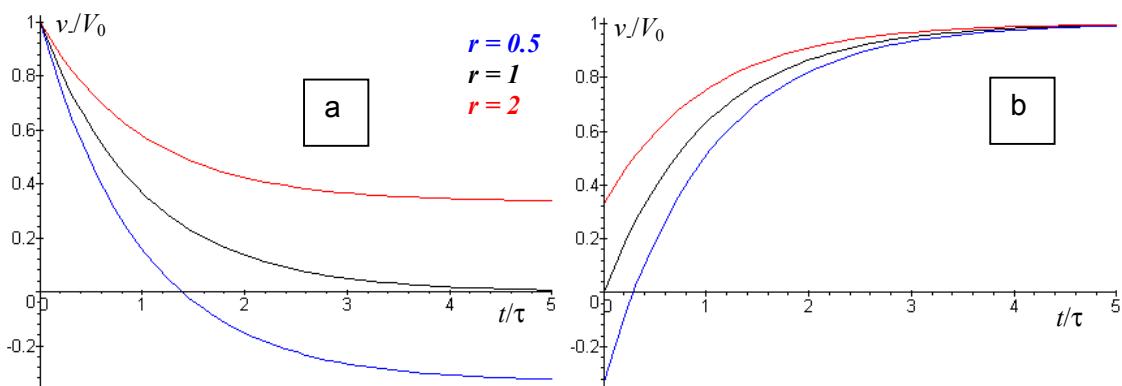
$$y: V_-(0, s) = \frac{\Xi_L - Z_0}{\Xi_L + Z_0} \frac{V_0}{s} = \frac{R - Z_0 - sCRZ_0}{R + Z_0 + sCRZ_0} \frac{V_0}{s} = \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \frac{1}{s} - \frac{2R}{R + Z_0} \frac{1}{s + 1/\tau} \right] V_0$$

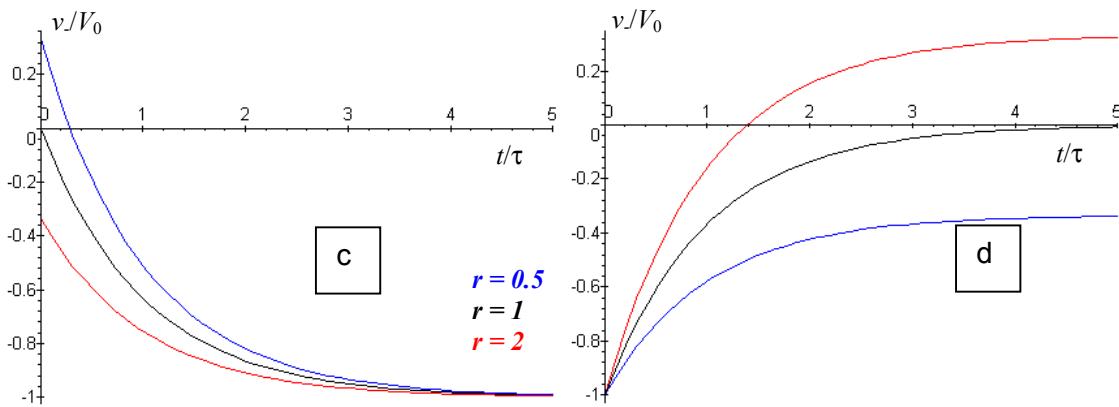
donde  $\tau = CRZ_0 / (R + Z_0)$ . La antitransformada de esta expresión es:

$$v_-(0, t) = V_0 \left[ \frac{R - Z_0}{R + Z_0} - \frac{2R}{R + Z_0} e^{-t'/\tau} \right] u(t') \quad \text{con } t' = t - t_1$$

Se ve que para  $t' = 0 \Rightarrow v_-(0, t_1) = -V_0$  ya que el capacitor es inicialmente un cortocircuito y la tensión sobre la carga debe anularse.

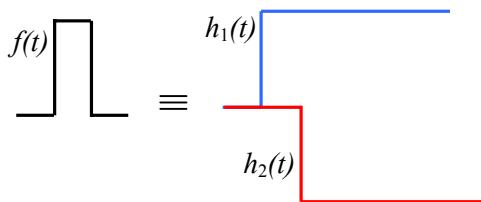
Las formas de onda de la onda regresiva en cada uno de estos casos se representan en las siguientes figuras, donde  $r = R/Z_0 = 0.5, 1, 2$ .





Estas ondas viajan hacia la entrada **desde el mismo instante  $t_1$**  en que se generan. Las diversas formas de onda que se obtienen cuando la impedancia de carga no es resistiva pura permiten sacar conclusiones del tipo de impedancia de carga y da origen a aplicaciones técnicas<sup>2</sup>.

En los ejemplos precedentes se conectó una batería a la línea. Desde el punto de vista matemático se usó una función escalón para describir la propagación de las ondas en la línea. Habitualmente en lugar de enviar un escalón se envía un **pulso** por la línea. Podemos usar los resultados obtenidos ya que el pulso es equivalente a dos escalones separados en el ancho temporal del pulso y de amplitudes iguales y de signo opuesto, como se muestra en la figura:



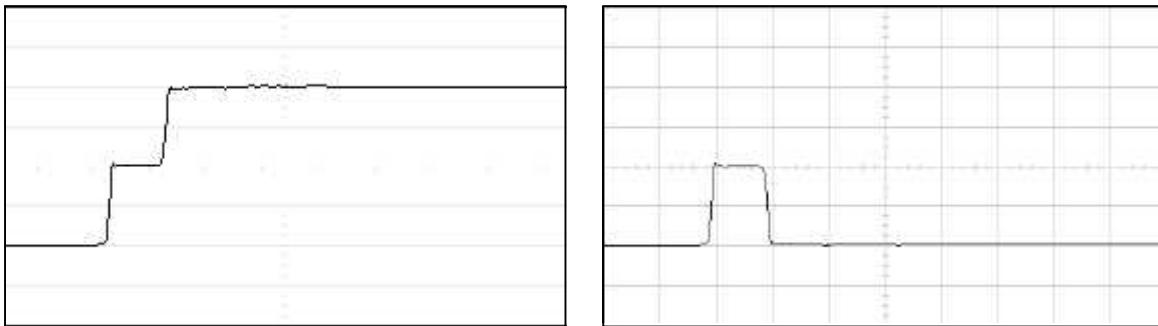
$f(t) = h_1(t) + h_2(t - \tau)$ .

Para analizar el comportamiento de la propagación de pulsos en una línea de transmisión, debemos comparar el tiempo de viaje a lo largo de la línea con el ancho del pulso. Si el ancho del pulso es mucho menor que el tiempo de viaje el pulso mantiene su entidad en la propagación y las formas de onda obtenidas en el ejemplo previo son aplicables. Si el ancho de pulso es comparable con el tiempo de tránsito el problema se complica, especialmente cuando hay múltiples rebotes, y es necesario un cálculo por computadora.

<sup>2</sup> Hewlett-Packard Application Note 1304-2, “Time Domain Reflectometry Theory”, 1988 (HP-AN1304.PDF).

### APLICACION: TDR

El comportamiento de la propagación de pulsos por una línea da la base de un método de análisis de cargas en líneas de transmisión, la **reflectometría en el dominio del tiempo** (TDR). Esta técnica se basa en enviar un escalón o un pulso desde el extremo del generador (adaptado a la línea  $\Rightarrow$  no hay rebotes a la entrada) y observar la forma de onda. En las fotos de la pantalla de un osciloscopio que siguen se presenta un caso de circuito abierto y otro de cortocircuito en el extremo de carga, con un generador prácticamente ideal ( $R_s \rightarrow 0$ ):



La técnica permite hallar la longitud de línea entre el punto de observación y el sitio donde se produce la reflexión por desadaptación de impedancias (midiendo el intervalo  $\Delta t = 2L/v$  que tarda en cambiar la lectura) y la impedancia del punto de desadaptación midiendo la altura del salto  $\Delta V = V_0 [1 + \rho_L (1 + \rho_s)]$  de donde se puede calcular  $\rho_L$  y por lo tanto  $Z_L$  conociendo  $\rho_s$ .

Esta técnica se puede usar para:

- conociendo el tipo de línea ( $\Rightarrow v$ ), calcular su longitud. Se deja el extremo de carga en circuito abierto y se mide a la entrada el tiempo  $\Delta t$  que tarda el pulso rebote.  
Luego:  $L = v\Delta t/2$ .
- conociendo la longitud, calcular los parámetros de la línea. Se carga la línea con una impedancia resistiva conocida  $R_L$ . La velocidad de propagación se calcula a partir del tiempo de rebote:  $v = 2L/\Delta t$ . La línea se considera de pérdidas despreciables ( $Z_0$  real). Como no hay rebotes a la entrada, la tensión en ella es:

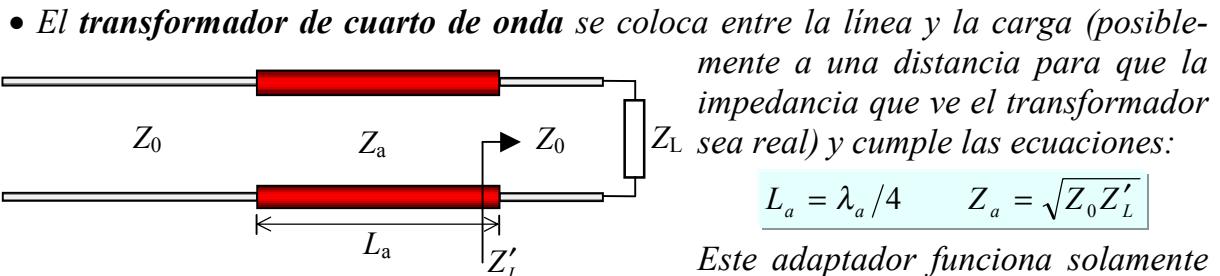
$$v_{in} = V_0(1 + \rho_L) \Rightarrow \Delta V = v_{in} - V_0 = \rho_L V_0 \Rightarrow \rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{\Delta V}{V_0} \Rightarrow Z_0 = \frac{V_0 - \Delta V}{V_0 + \Delta V} R_L$$

Entre otras aplicaciones, esta técnica permite detectar fallas en líneas de transmisión muy largas midiendo desde un extremo (o un punto conveniente). Se envía un pulso y se observa la forma de onda. Si se registran rebotes es señal de que hay una desadaptación de impedancias. El tiempo de rebote da la posición de (la primera) discontinuidad. La forma de onda da el tipo de desadaptación y permite inferir el tipo de fallas. El análisis de los ejemplos precedentes se puede extender a múltiples puntos de desadaptación. Hay procedimientos semi-automáticos de detección de fallas en líneas muy largas que usan además sistemas de GPS para la localización geográfica<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Hewlett-Packard Application Note 1285, "Traveling Wave Fault Location in Power Transmission Systems", 1997 (HP-AN1285.PDF).

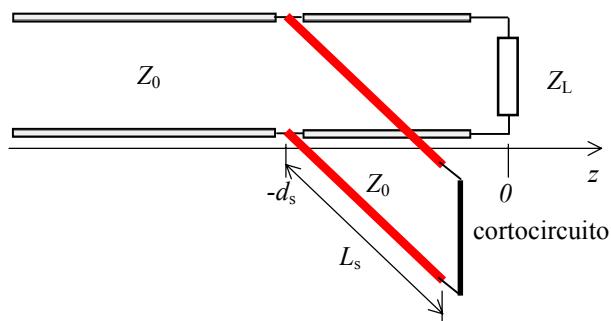
## RESUMEN

- En este Capítulo presentamos las técnicas básicas de **adaptación de impedancias** entre una línea y una carga cualquiera:



Este adaptador funciona solamente a la frecuencia de diseño.

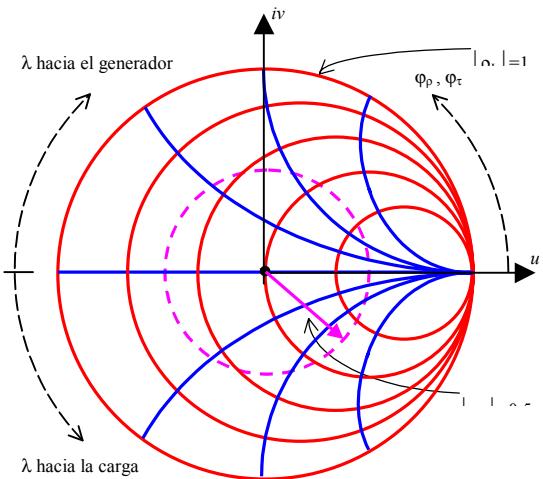
- **El stub** es un trozo de la misma línea que se coloca en paralelo con la carga a una distancia definida. El trozo o stub se puede terminar de diversas formas. Vemos solamente la forma más común, que es el cortocircuito. Las ecuaciones de diseño dan la posición y longitud del stub y son:



$$d_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1}(\sqrt{Z_L/Z_0})$$

$$L_s = \frac{\lambda}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{Z_L Z_0}}{Z_L - Z_0}\right)$$

- La **carta de Smith** permite obtener soluciones gráficas de problemas de uso de líneas de transmisión. Se basa en las propiedades de las ecuaciones de la impedancia y admitancia de onda a lo largo de la línea:



La carta de Smith presenta círculos de  $r$  constante (en rojo), círculos de  $x$  constante (en azul) y círculos de  $|\rho_L|$  constante (en violeta). Al moverse en la línea la impedancia normalizada  $z$  varía sobre un círculo de  $|\rho_L|$  constante.

La carta de Smith permite calcular con facilidad todos los parámetros de una línea cargada y la adaptación mediante transformadores o stubs.

- Una línea donde existan ondas estacionarias se comporta como un **circuito resonante** de alto  $Q$ , con las siguientes características:

Frecuencias de resonancia	$Q$ y ancho de banda
$f_n = \frac{n}{2l\sqrt{LC}}$	$Q_n = \frac{1}{(R/\omega_n L + G/\omega_n C)} = \frac{f_n}{\Delta f_n}$

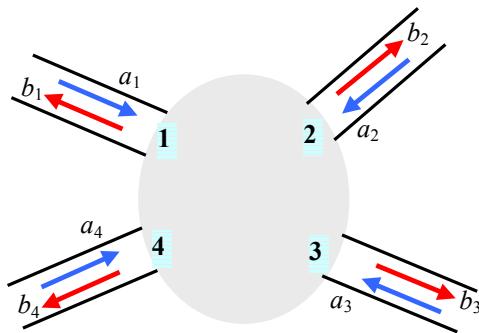
- Se presentó una introducción al comportamiento de los **transistorios** en las líneas, donde se tienen en cuenta las propiedades de propagación de pulsos a lo largo de la

línea. Esto da una serie de posibilidades técnicas, de las cuales la más común es la reflectometría en el dominio del tiempo (**TDR**) que permite obtener la posición y características de impedancia de discontinuidades en las líneas. Esta técnica se usa, por ejemplo, en la detección remota de defectos en líneas de alta tensión y caracterización de parámetros de líneas microstrips.

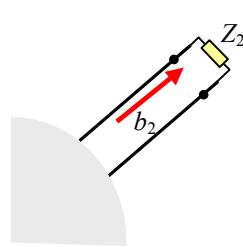
- Introducimos en un Apéndice las ideas relacionadas con la descripción de circuitos mediante la llamada **matriz de dispersión** y otras descripciones matriciales equivalentes, que son de mucha utilidad para analizar la propagación de ondas en estructuras complejas de guiado desde un punto de vista circuital. Analizamos estas ideas en el marco de la descripción de la propagación de ondas en líneas.

## APENDICE 7: Matriz de Dispersión

Muchos sistemas que propagan energía e información pueden considerarse como un conjunto de puertos por los que entran y salen señales que transportan la energía e información. Existe un método general de descripción de **sistemas lineales de n-puertos**, cuando es posible establecer una relación lineal entre las señales de entrada y salida. Este método, llamado de la **matriz de dispersión**, es aplicable a un gran número de sistemas pasivos y activos y es de mucho uso en la descripción de circuitos de microondas.



están ligados entre sí por la llamada **matriz de dispersión**:  $\mathbf{b} = S \mathbf{a}$ . Los elementos  $S_{ij}$  de la matriz están relacionados con distintos parámetros que definimos a continuación. Decimos que un puerto tiene su **salida adaptada** cuando está conectado a una impedancia de carga que no produce onda reflejada (que en caso de existir constituiría una onda incidente sobre el puerto). Por



ejemplo, si el puerto 2 tiene su salida adaptada, se tiene  $a_2 = 0$ . Análogamente, el puerto tiene su **entrada adaptada** cuando no existe onda saliente del puerto. En tal caso, para ese puerto  $b_i = 0$ .

Supongamos un sistema donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. Entonces  $a_i = 0$  si  $i > 1$ . Las ecuaciones en la descripción de la matriz de dispersión se reducen a:

$$b_i = S_{i1}a_1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de modo que  $S_{11}$  es un **coeficiente de reflexión** del primer puerto mientras que los  $S_{i1}$  ( $i > 1$ ) son **coeficientes de transferencia** de señal que liga al entrada en el primer puerto con las salidas en los otros puertos. Se los conoce como **ganancias** (o **pérdidas**) de inserción, según que sus módulos sean mayores o menores que 1. Resulta así que los coeficientes diagonales de la matriz de dispersión  $S_{ii}$  son coeficientes de reflexión del puerto en cuestión y los coeficientes fuera de la diagonal principal  $S_{ij}$  son coeficientes de transferencia o inserción entre distintos puertos.

Muchos sistemas satisfacen también la condición de **reciprocidad**:  $S_{ij} = S_{ji}$ . Esta condición significa que la transferencia de señales entre los puertos  $i$  y  $j$  es simétrica o recíproca.

Desde el punto de vista de la potencia o energía que se propaga entre los puertos, podemos decir que, en general, para señales armónicas la potencia media que ingresa en cada puerto (**potencia incidente**) es proporcional a  $|a_i a_i^*| = |a_i|^2$ , mientras que la potencia media que sale de cada puerto (**potencia reflejada**) es proporcional a  $|b_i b_i^*| = |b_i|^2$ . Por lo tanto, la potencia media **neta** que ingresa a cada puerto es proporcional a  $|a_i|^2 - |b_i|^2$ .

Analizamos nuevamente el caso donde todos los puertos, salvo el primero, tienen sus salidas adaptadas. En tal caso,  $b_i = S_{i1}a_1 \Rightarrow |a_i|^2 - |b_i|^2 = \begin{cases} (1 - |S_{11}|^2)|a_1|^2 & i = 1 \\ -|S_{i1}|^2|a_1|^2 & i > 1 \end{cases}$

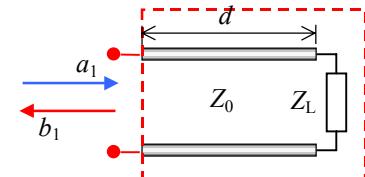
Si el sistema no tiene pérdidas ni ganancia de potencia, toda la potencia que entra debe salir, mientras que si hay pérdidas la potencia que sale debe ser menor que la que entra, de manera que para un **sistema pasivo**:

$$|a_1|^2 - \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = |a_1|^2 - \sum_{i=1}^n |S_{i1}|^2 |a_1|^2 \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |S_{i1}|^2 \leq 1$$

Se ve que cada sumando  $|S_{ii}|^2$  representa la **fracción** de potencia incidente en el sistema que se propaga a cada puerto.

Vamos a exemplificar sistemas de 1 y 2 puertos para líneas de transmisión.

## 1 Puerto



Para ejemplificar el caso de un sistema de un único puerto, consideramos un tramo de línea de longitud  $d$  conectada a una impedancia de carga  $Z_L$ . Suponemos que la línea es ideal (sin pérdidas) de impedancia característica  $Z_0$  real. La entrada al tramo de línea es el único puerto. Definimos, como es costumbre en la literatura, las señales en el puerto como:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \quad b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}}$$

donde  $v_1$  e  $i_1$  son la tensión y la corriente en el puerto. Podemos relacionar estas cantidades con las ondas de tensión y corriente en la línea de la forma:

$$v_1 = v_+(-d) + v_-(-d) = V_+ [e^{i(\omega t+kd)} + \rho_L e^{i(\omega t-kd)}] = V_+ e^{i(\omega t+kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd}]$$

$$i_1 = i_+(-d) + i_-(-d) = \frac{V_+}{Z_0} [e^{i(\omega t+kd)} - \rho_L e^{i(\omega t-kd)}] = \frac{V_+}{Z_0} e^{i(\omega t+kd)} [1 - \rho_L e^{-i2kd}]$$

de modo que:

$$a_1 = \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd} + 1 - \rho_L e^{-i2kd}]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+}{\sqrt{Z_0}} e^{i(\omega t+kd)}$$

$$b_1 = \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kd)} [1 + \rho_L e^{-i2kd} - 1 + \rho_L e^{-i2kd}]}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{-i2kd}}{\sqrt{Z_0}} e^{i(\omega t+kd)}$$

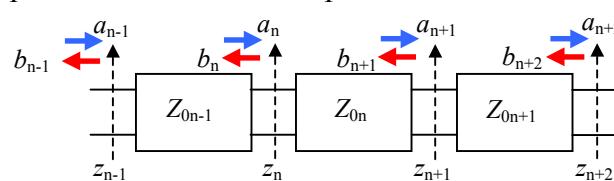
Luego la relación de dispersión es:  $b_1 = S_{11} a_1 \Rightarrow S_{11} = \rho_L e^{-i2kd}$  de donde se puede ver que  $S_{11}$  es un coeficiente de reflexión, salvo un factor de fase.

También se ve que  $|S_{11}|^2 = |\rho_L|^2 \leq 1$ . Es 1 cuando hay reflexión total (carga 0 o  $\infty$ ).

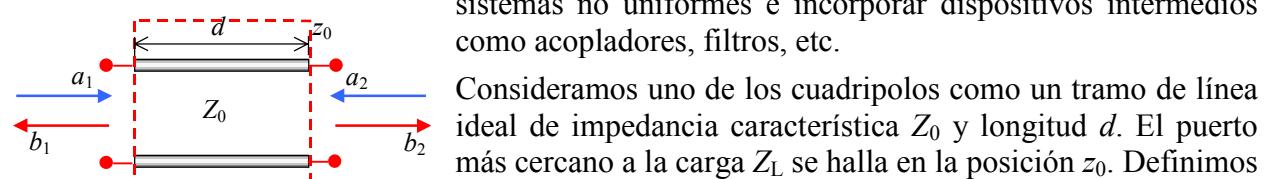
La impedancia en el puerto único es:  $Z_1 = \frac{v_1}{i_1} = Z_0 \frac{1 + \rho_L e^{-i2kd}}{1 - \rho_L e^{-i2kd}}$  que es la impedancia de entrada de la línea.

## 2 Puertos

Hemos adoptado un modelo de cuadripolo de una línea de transmisión para hallar las ecuaciones del telegrafista y, a partir de ellas, analizar la propagación de ondas en la línea. En general, es posible describir el comportamiento de la línea en términos de la matriz de dispersión modeli-



zándola como un conjunto de cuadripolos en cascada. Para el  $n$ -ésimo elemento del conjunto definimos una onda incidente  $a_n$  y una onda reflejada  $b_n$  y le adjudicamos una impedancia característica  $Z_{0n}$ . Considerar que la impedancia característica sea variable elemento a elemento de la cascada nos permite analizar sistemas no uniformes e incorporar dispositivos intermedios como acopladores, filtros, etc.



Consideraremos uno de los cuadripolos como un tramo de línea ideal de impedancia característica  $Z_0$  y longitud  $d$ . El puerto más cercano a la carga  $Z_L$  se halla en la posición  $z_0$ . Definimos

las variables de puerto como en el caso previo<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} & b_1 &= \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} \\ a_2 &= \frac{v_2 - Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} & b_2 &= \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de la línea de transmisión, las ondas que inciden y se reflejan sobre los puertos son:

$$\begin{array}{ll} \text{Ondas incidentes} & \begin{cases} v_{1+} = V_+ e^{i[\omega t+k(z_0+d)]} & i_{1+} = V_+ / Z_0 e^{i[\omega t+k(z_0+d)]} \\ v_{2-} = \rho_L V_+ e^{i(\omega t-kz_0)} & i_{2-} = -\rho_L V_+ / Z_0 e^{i(\omega t-kz_0)} \end{cases} \\ \text{Ondas reflejadas} & \begin{cases} v_{1-} = \rho_L V_+ e^{i(\omega t-k(z_0+d))} & i_{1-} = -\rho_L V_+ / Z_0 e^{i(\omega t-k(z_0+d))} \\ v_{2+} = V_+ e^{i(\omega t+kz_0)} & i_{2+} = V_+ / Z_0 e^{i(\omega t+kz_0)} \end{cases} \end{array}$$

Entonces las variables del puerto son:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{v_1 + Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{(v_{1+} + v_{1-}) + Z_0(i_{1+} + i_{1-})}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i[\omega t+k(z_0+d)]}}{\sqrt{Z_0}} & b_1 &= \frac{v_1 - Z_0 i_1}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t-k(z_0+d))}}{\sqrt{Z_0}} \\ a_2 &= \frac{v_2 - Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t-kz_0)}}{\sqrt{Z_0}} & b_2 &= \frac{v_2 + Z_0 i_2}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kz_0)}}{\sqrt{Z_0}} \end{aligned}$$

y se observa entonces que:

$$\begin{aligned} v_{1+} &= \sqrt{Z_0} a_1 & v_{1-} &= \sqrt{Z_0} b_1 & i_{1+} &= a_1 / \sqrt{Z_0} & i_{1-} &= -b_1 / \sqrt{Z_0} \\ v_{2+} &= \sqrt{Z_0} b_2 & v_{2-} &= \sqrt{Z_0} a_2 & i_{2+} &= b_2 / \sqrt{Z_0} & i_{2-} &= -a_2 / \sqrt{Z_0} \end{aligned}$$

Las variables de puerto están relacionadas entre sí por el sistema lineal:

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11} a_1 + S_{12} a_2 \\ b_2 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_2 \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes de la matriz de dispersión usamos la técnica de adaptar la salida (o entrada) de los puertos sucesivamente para simplificar las ecuaciones. Supongamos primero que el puerto de **salida** está **adaptado** (no hay onda incidente sobre la salida):

$$a_2 = 0 \Rightarrow b_1 = S_{11} a_1 \quad b_2 = S_{21} a_1$$

Entonces:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{\rho_L V_+ e^{i(\omega t-k(z_0+d))}}{V_+ e^{i(\omega t+k(z_0+d))}} = \rho_L e^{-i2k(z_0+d)} \quad S_{21} = \frac{b_2}{a_1} = \frac{V_+ e^{i(\omega t+kz_0)}}{V_+ e^{i(\omega t+k(z_0+d))}} = e^{-ikd}$$

Se ve que  $S_{11}$  es el coeficiente de reflexión de las ondas a la entrada y  $S_{21}$  es un factor de desfase introducido en la propagación de la onda progresiva en el puerto **cuando la salida está adaptada**. Para líneas sin pérdidas  $|S_{21}| = 1$ , mientras que en líneas con pérdidas  $|S_{21}| < 1$ , ya que el número de onda  $k$  es entonces complejo, indicando una atenuación de la onda en su propagación a lo largo del puerto. En general, el puerto puede incorporar un circuito activo que amplifique la onda incidente, en cuyo caso tendremos  $|S_{21}| > 1$ . Por lo tanto,  $S_{21}$  se conoce como **ganancia (o pérdida) de inserción** del puerto, e indica el factor que el puerto introduce para la onda progresiva en la propagación.

<sup>4</sup> Nótese que las  $a_i$  se refieren a las ondas incidentes en el puerto  $i$ -ésimo. Así  $a_2$  está asociada a la onda que sale del puerto 1, que es la onda “reflejada” en el puerto 1.

Análogamente, si ahora suponemos que la **entrada** del puerto está **adaptada** (no hay onda incidente sobre la entrada):  $v_{1+} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

y las ecuaciones de dispersión quedan:  $b_1 = S_{12}a_2 \quad b_2 = S_{22}a_2$

$$\text{de donde: } S_{22} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{V_+ e^{i(\omega t + kz_0)}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = \frac{1}{\rho_L} e^{i2kz_0} \quad S_{12} = \frac{b_1}{a_2} = \frac{\rho_L V_+ e^{i[\omega t - k(z_0 + d)]}}{\rho_L V_+ e^{i(\omega t - kz_0)}} = e^{-ikd}$$

Se ve que  $S_{22}$  es el coeficiente de reflexión de las ondas a la salida (aquí escrito en términos del coeficiente de reflexión en la carga de la línea) y  $S_{12}$  es el factor de desfasaje introducido en la propagación de la onda regresiva en el puerto **cuando la entrada está adaptada**.

Se observa además que:  $S_{12} = S_{21}$ . Esta es una condición general de los puertos que cumplen la llamada relación de **reciprocidad**, que conceptualmente puede definirse como la situación donde el puerto de comporta de la misma manera para la propagación en ambos sentidos.

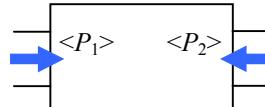
La impedancia en el puerto de entrada es:

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_{1+} + v_{1-}}{i_{1+} + i_{1-}} = Z_0 \frac{a_1 + b_1}{a_1 - b_1} = Z_0 \frac{(1 + S_{11})a_1 + S_{12}a_2}{(1 - S_{11})a_1 - S_{12}a_2}$$

$$\text{En el caso de salida adaptada } (a_2 = 0): \quad Z_{in}|_{a_2=0} = Z_0 \frac{1 + S_{11}}{1 - S_{11}} \Rightarrow S_{11} = \frac{Z_{in}|_{a_2=0} - Z_0}{Z_{in}|_{a_2=0} + Z_0}$$

$$\text{Análogamente: } Z_{out} = \frac{v_2}{i_2} = \frac{v_{2+} + v_{2-}}{i_{2+} + i_{2-}} = Z_0 \frac{b_2 + a_2}{b_2 - a_2} = Z_0 \frac{S_{21}a_1 + (1 + S_{22})a_2}{S_{21}a_1 - (1 - S_{22})a_2}$$

$$\text{Y para entrada adaptada } (a_1 = 0): \quad Z_{out}|_{a_1=0} = -Z_0 \frac{1 + S_{22}}{1 - S_{22}} \Rightarrow S_{22} = \frac{Z_{out}|_{a_1=0} + Z_0}{Z_{out}|_{a_1=0} - Z_0}$$



Analicemos el comportamiento de transmisión de potencia. Las potencias medias netas (incidente – reflejada) en cada puerto son<sup>5</sup>:

$$\langle P_1 \rangle = \langle v_{1+}i_{1+} + v_{1-}i_{1-} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(v_{1+}i_{1+}^* + v_{1-}i_{1-}^*) = \frac{1}{2} \Re e(a_1 a_1^* - b_1 b_1^*) = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |S_{11}a_1 + S_{12}a_2|^2)$$

$$= \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) - |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re e(S_{11}S_{12}^* a_1 a_2^*)]$$

$$\langle P_2 \rangle = \langle -v_{2-}i_{2-} - v_{2+}i_{2+} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(-v_{2-}i_{2-}^* - v_{2+}i_{2+}^*) = \frac{1}{2} \Re e(a_2 a_2^* - b_2 b_2^*) = \frac{1}{2} (|a_2|^2 - |S_{21}a_1 + S_{22}a_2|^2)$$

$$= \frac{1}{2} [|a_2|^2 (1 - |S_{22}|^2) - |S_{21}|^2 |a_1|^2 - 2 \Re e(S_{21}S_{22}^* a_2 a_1^*)]$$

La potencia neta que fluye hacia la derecha del cuadripolo es:

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle - \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) - |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re e(S_{11}S_{12}^* a_1 a_2^*)]$$

$$- \frac{1}{2} [|a_2|^2 (1 - |S_{22}|^2) - |S_{21}|^2 |a_1|^2 - 2 \Re e(S_{21}S_{22}^* a_2 a_1^*)]$$

Consideremos el caso de salida adaptada, donde  $v_{2-} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ :

$$\langle P \rangle = \langle P_1 \rangle - \langle P_2 \rangle = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2)] - \frac{1}{2} [ - |S_{21}|^2 |a_1|^2 ] = \frac{1}{2} [|a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2)]$$

Si la salida está adaptada, esta cantidad será nula si no hay pérdidas, ya que representa la potencia neta que ingresa al puerto de entrada menos la que sale del puerto de salida. Si hay pérdidas, la potencia neta que entra es mayor que la que sale y la cantidad es positiva. Entonces:

<sup>5</sup> Obsérvese que las potencias reflejadas a la entrada y la salida son de por sí negativas, lo que indica que son potencias que fluyen **hacia fuera** del cuadripolo.

$$1 - |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 \geq 0 \Rightarrow |S_{21}|^2 \leq 1 - |S_{11}|^2$$

El coeficiente de reflexión de potencia a la entrada es:

$$R = \frac{\langle -v_{1-} i_{1-} \rangle}{\langle v_{1+} i_{1+} \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \Re e(b_1 b_1^*)}{\frac{1}{2} \Re e(a_1 a_1^*)} = \frac{|S_{11}a_1 + S_{12}a_2|^2}{|a_1|^2} = \frac{|S_{11}|^2 |a_1|^2 + |S_{12}|^2 |a_2|^2 - 2 \Re e(S_{11}S_{12}^* a_1 a_2^*)}{|a_1|^2}$$

En el caso de la salida adaptada queda:  $R = |S_{11}|^2$

como para el sistema de 1 puerto.

### Relación con otras descripciones matriciales

La descripción de la propagación por medio de cuadripolos y la matriz de dispersión está asociada a otras descripciones.

La **matriz de transmisión**  $T$  permite relacionar las ondas a la salida del cuadripolo en función de las ondas en su entrada. En nuestra notación:

$$\begin{aligned} b_2 &= T_{11}a_1 + T_{12}b_1 \\ a_2 &= T_{21}a_1 + T_{22}b_1 \end{aligned}$$

Los coeficientes de la matriz de transmisión están relacionados con los de la matriz de dispersión por las relaciones:

$$T_{11} = \frac{S_{21}S_{12} - S_{11}S_{22}}{S_{12}} \quad T_{12} = S_{22}/S_{12} \quad T_{21} = -S_{11}/S_{12} \quad T_{22} = 1/S_{12}$$

La matriz de transmisión es más cómoda que la de dispersión para tratar una cascada de cuadripolos.

La **matriz de impedancias**  $Z$  relaciona las tensiones en los puertos con las corrientes:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

La **matriz de admitancias**  $Y$  es la inversa de  $Z$ :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \Rightarrow Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta} \quad Y_{12} = -\frac{Z_{12}}{\Delta} \quad Y_{21} = -\frac{Z_{21}}{\Delta} \quad Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta}$$

con  $\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

Podemos relacionar la matriz de dispersión con la matriz de impedancias mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{(z_{11}-1)(z_{22}-1) - z_{12}z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} & S_{22} &= \frac{(z_{11}+1)(z_{22}-1) - z_{12}z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \\ S_{12} &= \frac{2z_{12}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} & S_{21} &= \frac{2z_{21}}{(z_{11}+1)(z_{22}+1) - z_{12}z_{21}} \end{aligned}$$

donde  $z_{ij} = Z_{ij}/Z_0$  son las impedancias normalizadas a la impedancia característica del tramo.

**Estas descripciones matriciales de dispositivos y líneas de transmisión son de importancia porque proveen de una forma sencilla de conectar sucesivos dispositivos sin resolver en detalle las ecuaciones del circuito completo, y permiten utilizar programas como el Spice para analizar el comportamiento del circuito a partir de la descripción matricial de cada bloque.**

## PROBLEMAS

- 6.11) A partir del diagrama de Smith, hallar la impedancia de entrada de una sección de línea de transmisión sin pérdidas de  $50 \Omega$  con longitud de  $0.1\lambda$ , terminada en un cortocircuito. Comparar con el resultado analítico.

[Rta:  $Z_i = i 36.3 \Omega$ ]

- 6.12) Empleando la carta de Smith, encuentre la longitud mínima en metros que debe tener una línea con  $Z_0 = 100 \Omega$ , terminada en circuito abierto para que a la entrada presente una impedancia de  $i30 \Omega$ . Considere que la permitividad relativa  $\epsilon_r$  del dieléctrico de la línea vale 2.5 y que la frecuencia de trabajo es de  $300 \text{ Mhz}$ .

[Rta:  $18.8 \text{ cm}$ ]

- 6.13) Una línea de transmisión sin pérdidas, con impedancia característica de  $50 \Omega$ , está terminada en una carga cuya impedancia vale  $Z_L = (50+i20) \Omega$ . Si la línea mide  $\lambda/4$ , obtenga la impedancia de entrada a partir del diagrama de Smith.

[Rta:  $Z_i = (43 - i17.5) \Omega$ ]

- 6.14) Una línea de transmisión ideal, con impedancia característica de  $100 \Omega$ , está terminada en una carga de valor  $(150 + i150) \Omega$ . Se desea acoplarla por medio de un adaptador de  $\lambda/4$ , colocado a cierta distancia  $L_a$  de la carga. Calcule la impedancia característica del adaptador y la distancia  $L_a$  a la que debe colocarse.

[Rta:  $Z_a = 183 \Omega$ ,  $L_a = 0.056\lambda$ ]

- 6.15) Dada una impedancia  $Z = (95 + i20) \Omega$ , determinar a qué admittance corresponde utilizando el diagrama de Smith.

[Rta:  $Y = (10 - i2) \text{ mS}$ ]

- 6.16) Una línea de transmisión ideal de longitud  $0.434\lambda$  y cuya impedancia característica es de  $100 \Omega$ , está terminada en una impedancia de  $(260 + i180) \Omega$ . Calcule a) el coeficiente de reflexión, b) la razón de onda estacionaria, c) la impedancia de entrada y d) la posición del valor máximo de voltaje más cercano a la carga.

[Rta:  $\rho = 0.6/21.6^\circ$ ,  $S = 4$ ,  $Z_i = (69 + i120) \Omega$ , a  $0.03\lambda$  de la carga]

- 6.17) Una línea de transmisión sin pérdidas tiene una impedancia característica de  $100 \Omega$  y está terminada con una carga  $(120 + i80) \Omega$ . Se desean evitar las reflexiones hacia el generador, acoplando la línea con un equilibrador reactivo. Encuentre la posición más cercana a la carga sobre la línea principal donde debe unirse el stub y obtenga la longitud del mismo.

[Rta:  $l_1 = 0.232\lambda$ ,  $L_1 = 0.148\lambda$ ]

- 6.18) Se conecta un generador de tensión ideal a una línea de  $50\Omega$ ,  $v = 0.85c$ ,  $\alpha_c = 2 \text{ dB/m}$ ,  $\alpha_d = 0.25 \text{ dB/m}$ ,  $L = \lambda$  a  $100 \text{ MHz}$ . El generador se coloca a  $\lambda/4$  del extremo izquierdo de la línea. Los extremos de la línea se cortocircuitan. a) Determinar las expresiones de la tensión y la corriente a lo largo de la línea. b) Calcular la potencia cedida por el generador en resonancia. c) Calcular el  $Q$  y el ancho de banda de la línea.

- 6.19) Una batería de  $30V$  en serie con una resistencia de  $75\Omega$  se conecta a través de una línea de  $50\Omega$  y  $L = 600m$  de longitud con una carga resistiva de  $30\Omega$ . a) Dibujar los diagramas de rebote de la tensión y la corriente. b) Graficar  $V(L/2,t)$  e  $I(L/2,t)$ . c) ¿Cuáles son los valores finales de tensión y corriente sobre la carga?

- 6.20) Repita el problema anterior si ahora el generador es una fuente de pulsos de periodo  $T = 10 \text{ ms}$  y ciclo útil del 75%.

# 7 - Métodos Numéricos I

## Métodos Numéricos en baja frecuencia

### Introducción

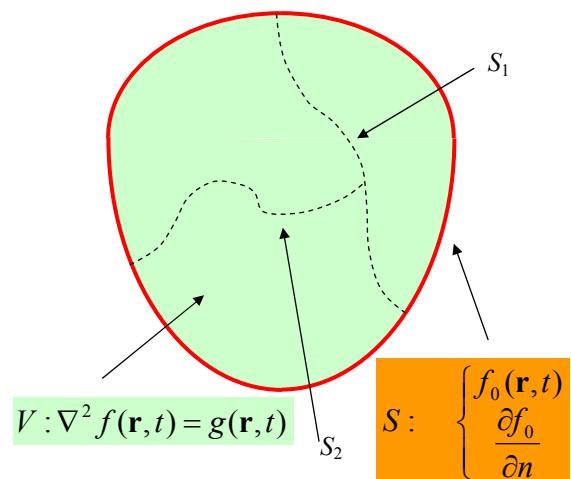
Existen diversas herramientas matemáticas para la obtención de funciones potencial para diversos tipos de campos. En particular, en campos eléctricos y magnéticos estáticos los potenciales satisfacen ecuaciones de Poisson y Laplace:

$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon$	potencial electrostático
$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$	potencial vectorial magnético
$\nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0$	potencial escalar magnético

Por otra parte, estos potenciales permiten determinar con buena aproximación los campos también en casos **cuasi-estáticos** o **cuasi-estacionarios (baja frecuencia)**.

Vamos a analizar en este Capítulo distintas técnicas, analíticas y numéricas, para resolver estas ecuaciones.

Un **problema de potencial** se presentará como una ecuación diferencial, en general de Poisson, que cumple una determinada función potencial cuasi-estática  $f(\mathbf{r}, t)$  dentro de un dado recinto  $V$



del espacio, junto con condiciones de contorno definidas sobre la superficie  $S$  frontera del recinto de integración y eventuales superficies internas ( $S_1$ ,  $S_2$ , etc.) que separan regiones de propiedades diferentes (permitividad, permeabilidad, conductividad, etc.). Los métodos llevan a postular una función potencial generalmente diferente en cada región, que sobre las superficies internas también cumplen condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno son, en general, definidas por el valor o la continuidad de la función potencial sobre una superficie (**condición de Dirichlet**) y/o el valor o la continuidad de la derivada del potencial en la dirección normal a la superficie

(**condición de Neumann**), o una mezcla de estas condiciones.

Por otra parte, las soluciones de la ecuación de Laplace tiene propiedades que se pueden usar en la búsqueda de las soluciones del problema:

- Superposición (linealidad)
- Unicidad
- Armonicidad

Existen distintos tipos de técnicas analíticas para la resolución de estas ecuaciones (método de inversión, etc) que conforman una rama muy desarrollada de la física matemática conocida como **teoría del potencial**. Veremos solamente a continuación uno de los métodos más importantes y quizás el más sencillo para la **solución analítica** de ecuaciones diferenciales lineales, el método de separación de variables.

## Separación de variables

Las coordenadas que definen la posición de un punto en el espacio son variables **independientes** entre sí. Las soluciones de la ecuación de Laplace dependen de estas variables. Por lo tanto, se puede hallar una solución posible si suponemos que el potencial es el producto de funciones que dependen de **una única** variable de posición. Vamos a desarrollar este método, llamado de **separación de variables**, en los tres sistemas de coordenadas básicos que se usan en mayor medida<sup>1</sup>.

### Coordenadas cartesianas

En coordenadas cartesianas tenemos:  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \nabla^2 \Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$

Separamos variables con la hipótesis:  $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:  $YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$

y ahora dividimos toda la ecuación por  $\Phi = XYZ$ :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_x^2 - k_y^2 + k_z^2 = 0$$

observamos que cada sumando es una función de una única variable. Como estas variables son independientes, para que esta suma sea cero para cualquier punto del espacio se requiere que cada sumando sea una constante. Por razones de comodidad matemática que quedarán claras más abajo, llamamos a esas constantes  $-k_x^2, -k_y^2$  y  $k_z^2$ . Nos quedan entonces tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k_z^2 Z = 0$$

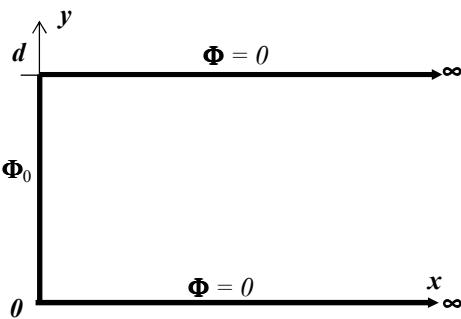
Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son:

$X(x) = \begin{cases} A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} = A'_1 \operatorname{sen}(k_x x) + A'_2 \cos(k_x x) & \text{para } k_x \neq 0 \\ A''_1 x + A''_2 & \text{para } k_x = 0 \end{cases}$
$Y(y) = \begin{cases} B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} = B'_1 \operatorname{sen}(k_y y) + B'_2 \cos(k_y y) & \text{para } k_y \neq 0 \\ B''_1 y + B''_2 & \text{para } k_y = 0 \end{cases}$
$Z(z) = \begin{cases} C_1 e^{k_z z} + C_2 e^{-k_z z} = C'_1 \operatorname{senh}(k_z z) + C'_2 \cosh(k_z z) & \text{para } k_z \neq 0 \\ C''_1 z + C''_2 & \text{para } k_z = 0 \end{cases}$

Obsérvese que estas soluciones surgen de la elección particular de signos para cada constante de separación. La elección de estos signos depende de las condiciones de borde del problema. Por ejemplo, tomar una constante de separación negativa (por ejemplo  $-k_x^2$ ) lleva a una dependencia en funciones trigonométricas, mientras que tomar un signo positivo (por ejemplo  $k_z^2$ ) lleva a soluciones que son funciones hiperbólicas. En todos los casos al menos una de las constantes de separación debe ser de signo diferente a las otras dos.

<sup>1</sup> El método de separación de variables funciona para **algunas** ecuaciones diferenciales en **algunos** sistemas de coordenadas, llamados **sistemas separables** para esa ecuación diferencial. En particular, para la ecuación de Laplace este método se puede usar en sistemas coordenados donde las superficies de coordenadas constantes son cuádricas confocales o sus formas degeneradas (P.M.Morse, H.Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill Book Co., New York, 1953, pp. 494 y siguientes). En total hay once sistemas de coordenadas separables para la ecuación de Laplace.

**Ejemplo 7.1:** Una región del espacio de base d y longitud semiinfinita se halla limitada por conductores a los potenciales indicados. Determinar el potencial dentro de la región.



Dentro de la región se cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{Las condiciones de borde son:}$$

$$x = 0, 0 < y < d : \quad \Phi = \Phi_0$$

$$y = 0, y = d : \quad \Phi = 0$$

La solución es:  $\Phi(x, y) = X(x)Y(y)$  con:

$$X(x) = A_1 e^{kx} + A_2 e^{-kx}$$

$$Y(y) = B_1 \sin(ky) + B_2 \cos(ky)$$

Nótese que elegimos la solución exponencial sobre x, ya que el potencial debe decaer a medida que  $x \rightarrow \infty$ , y entonces la solución para y debe ser en funciones trigonométricas (o exponentiales de exponentes imaginarios puros). También notamos que, como es un problema bidimensional, hay una sola constante de separación (ya que  $-k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x = k_y = k$ ).

Como para  $x \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(x, y) \rightarrow 0$ , el coeficiente  $A_1$  debe anularse. Tenemos así:

$$\Phi(x, y) = e^{-kx} (C_1 \sin(ky) + C_2 \cos(ky))$$

Ahora debemos elegir las constantes para satisfacer las condiciones de borde.

$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow V(x, 0) = C_2 e^{-kx} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\text{Para } y = d \Rightarrow V(x, d) = C_1 e^{-kd} \sin(kd) = 0 \Rightarrow k = n\pi/d$$

Hay infinitas soluciones del tipo:

$$\Phi(x, y) = C_n e^{-\frac{n\pi}{d} x} \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right)$$

$$\text{De manera que, aplicando superposición: } \Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{d} x} \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right)$$

Nos queda para aplicar la última condición de borde:

$$\Phi(0, y) = \Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) \quad \text{para } 0 < y < d$$

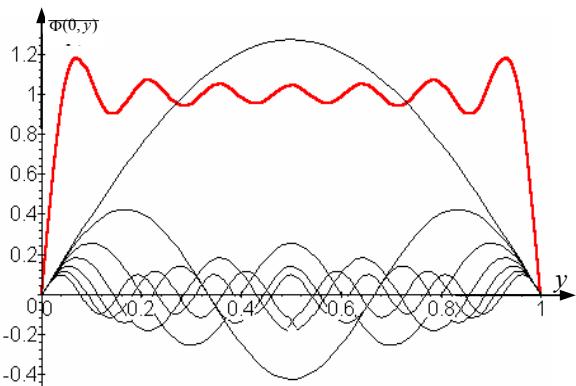
de donde deberíamos hallar los coeficientes  $C_n$ . Para ello usamos la ortogonalidad de las

$$\text{funciones seno: } \int_0^d \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) dy = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ d/2 & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \frac{2V_0}{d} \int_0^d \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) dy = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^d \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) \sin\left(\frac{m\pi}{d} y\right) dy = C_m$$

$$\text{de donde: } C_m = \frac{2V_0}{m\pi} [1 - \cos(m\pi)] = \begin{cases} 0 & \text{para } m \text{ par} \\ 4V_0/m\pi & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

$$\text{El potencial dentro del recinto es: } \Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\Phi_0}{(2n+1)\pi} e^{-\frac{(2n+1)\pi}{d} x} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{d} y\right)$$



Quedan solamente los coeficientes para n impar, y su amplitud decrece a medida que n aumenta. Este es un desarrollo en serie de Fourier. En la gráfica se ven los términos del desarrollo para  $2n+1 = 1, 2, \dots, 7$  y la suma (en rojo) de estos términos, que dan el potencial para  $x = 0$ . Se ve que a medida que se suman más términos la función tiende a un pulso de altura  $\Phi_0$ .

Para otros valores de x, las amplitudes de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier decaen exponencialmente.

### Coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas el laplaciano es:  $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$

y separamos variables de forma que:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Psi(\phi)Z(z) \Rightarrow \frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

que podemos escribir:

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2$$

porque el segundo miembro es sólo función de  $z$ . La solución para la ecuación diferencial según  $z$  es:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z(z) = A_1 z + A_2 & \text{si } k = 0 \\ Z(z) = A'_1 \operatorname{senh}(kz) + A'_2 \cosh(kz) & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Separamos nuevamente la ecuación que nos queda:

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + k^2\rho^2 = -\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} = k_2^2$$

de donde obtenemos otras dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La ecuación según  $\phi$  es:

$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + k_2^2\Psi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Psi(\phi) = B_1\phi + B_2 & \text{si } k_2 = 0 \\ \Psi(\phi) = B'_1 \operatorname{sen}(k_2\phi) + B'_2 \cos(k_2\phi) & \text{si } k_2 \neq 0 \end{cases}$$

Pero esta función angular debe tener simetría de revolución alrededor del eje  $z$ :

$$\Psi(\phi + 2\pi) = \Psi(\phi) \Rightarrow k_2 = n \quad (\text{con } n \text{ entero}). \text{ Luego:}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\phi) = B_1\phi + B_2 & \text{si } n = 0 \\ \Phi(\phi) = B'_1 \operatorname{sen}(n\phi) + B'_2 \cos(n\phi) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Queda la última ecuación diferencial:

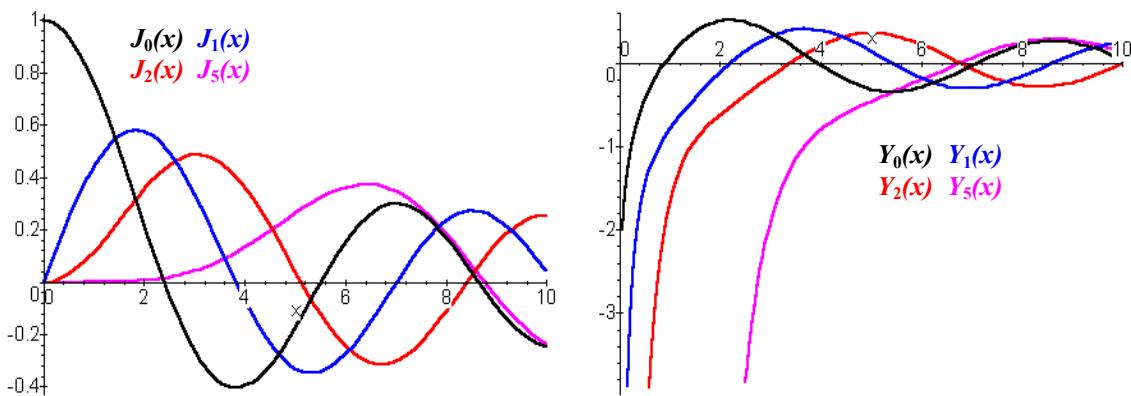
$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(k^2\rho^2 - n^2\right)R = 0 \quad \text{que es la } \textcolor{red}{\text{ecuación de Bessel}}. \text{ Esta ecuación}$$

tiene las siguientes soluciones, según los valores de  $k$  y  $n$ :

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_n(k\rho) + C_2 Y_n(k\rho) & \text{si } k \neq 0 \\ C'_1 \rho^n + C'_2 \rho^{-n} & \text{si } k = 0 \quad \text{y } n \neq 0 \\ C''_1 \ln(\rho) + C''_2 & \text{si } k = 0 \quad \text{y } n = 0 \end{cases}$$

La última solución es el potencial logarítmico que ya hemos utilizado en problemas de simetría cilíndrica sencilla. La selección de las soluciones para un dado problema depende de las condiciones de contorno como se ilustra en el **Ejemplo 7.2**. En las siguientes gráficas se esquematiza el comportamiento de las primeras **funciones de Bessel**  $J_n(x)$  (acotadas para todo  $x$ ) y de **Neumann**  $Y_n(x)$  (que divergen en el origen).

Debido a su singularidad en el origen de coordenadas, las funciones de Neumann sólo pueden usarse para representar un potencial en recintos que excluyan el origen de coordenadas, para que el potencial resulte acotado, como debe ser para cualquier distribución real de carga. Se observan además las oscilaciones de ambos tipos de funciones. Estas oscilaciones llevan a consecuencias tecnológicas en múltiples campos, como por ejemplo la distribución de la densidad de corriente en la sección de una conductor cilíndrico a alta frecuencia.



### Comportamiento en los extremos

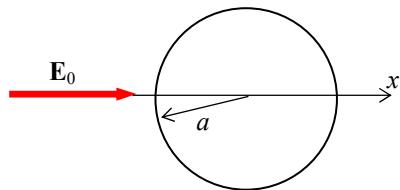
Las siguientes expresiones son aproximaciones de las funciones de Bessel y Neumann en los extremos del intervalo de definición, y son útiles para analizar el comportamiento aproxi-mado de campos y potenciales con simetría cilíndrica.

$$x \rightarrow 0 : \quad J_n(x) \rightarrow \frac{(x/2)^n}{n!} \quad Y_0(x) \rightarrow -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right) \quad Y_n(x) \rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n$$

donde  $\gamma \approx 1.78107 \dots$

$$x \rightarrow \infty : \quad J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \quad Y_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)$$

**Ejemplo 7.2:** Un cilindro conductor descargado de radio  $a$  se coloca en un campo inicialmen-te uniforme a lo largo de un diámetro.



Suponemos el campo uniforme en la dirección  $+x$ , y el cilindro con su eje sobre  $z$ . El campo es cero y el potencial constante (podemos tomarlo cero porque el cilindro está descargado) para  $\rho \leq a$ .

Para  $\rho \geq a$ , el potencial no depende de  $z$ . Por lo tanto debe ser  $k = 0$  y la solución es del tipo:

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) (C_n \sin(n\phi) + D_n \cos(n\phi)) + (E \ln(\rho) + F)(G\phi + H)$$

Si el campo original es:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \hat{x}$   $\Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -E_0 x = -E_0 \rho \cos \phi$

para  $\rho \rightarrow \infty$ , el potencial del sistema debe tender a esta forma de depen-dencia. Entonces deben anularse los coeficientes de la solución logarítmica y los coeficientes de los senos.

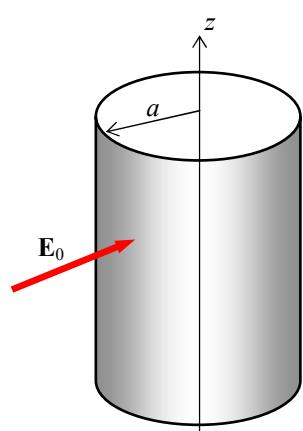
$$\text{Queda así: } \Phi(\mathbf{r}) = -E_0 \rho \cos \phi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{-n} \cos(n\phi)$$

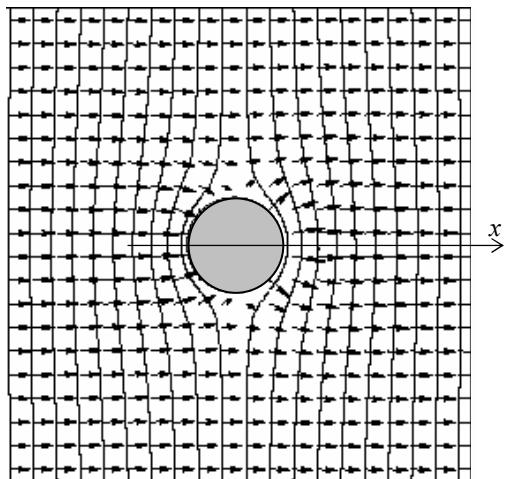
La otra condición de contorno es que  $\Phi(\rho = a, \phi) = 0$ , y entonces todos los  $B_n$  para  $n > 1$  deben anularse para que  $\Phi$  no dependa de  $\phi$ , de don-de:  $B_0 = 0$   $B_1 = E_0 a^2$

$$\text{y finalmente: } \Phi(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \phi = E_0 \left( \frac{a^2}{\rho} - 1 \right) \cos \phi$$

El campo eléctrico será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi} = -\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} \right] \left[ -E_0 \rho \cos \phi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \phi \right]$$





$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left[ E_0 \left( 1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos \phi \hat{\rho} - E_0 \left( 1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin \phi \hat{\phi} \right]$$

Se ve que para  $\rho \rightarrow \infty$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow E_0 (\cos \phi \hat{\rho} - \sin \phi \hat{\phi}) = E_0 \hat{x}$$

el valor del campo original,

y para  $\rho = a$   $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2E_0 \cos \phi \hat{\rho}$  de forma que el campo es perpendicular a la superficie del cilindro, como debe ser sobre toda superficie conductora. En la figura se esquematizan equipotenciales y líneas de campo.

La carga sobre la superficie del cilindro no es homogénea:  $\sigma = \epsilon_0 E_\rho \Big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$

## Coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas el laplaciano es:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Vamos a considerar en este curso solamente problemas que presentan un **eje de simetría (problema axisimétrico)**, para simplificar las matemáticas involucradas. Podemos elegir el eje de simetría como el eje  $z$  de un sistema de coordenadas y entonces el potencial no dependerá del ángulo  $\phi$ , de modo que podemos separar variables en la forma:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

Tenemos entonces:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \lambda(\lambda+1)$$

donde  $\lambda(\lambda+1)$  es la constante de separación. La razón de la elección de esta forma matemática de la constante quedará clara más abajo.

La ecuación para  $\Theta$  es:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda(\lambda+1) \sin \theta \Theta = 0$$

Tomamos  $\beta = \cos \theta$  y queda:  $\frac{d}{d\beta} \left[ \left( 1 - \beta^2 \right) \frac{d\Theta}{d\beta} \right] + \lambda(\lambda+1) \Theta = 0$

Esta es la **ecuación de Legendre**. La solución en serie de potencias de esta ecuación lleva a un par de soluciones: una en potencias pares de  $\beta$  y otra en potencias impares de  $\beta$ . Ambas soluciones presentan una singularidad logarítmica para  $\beta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0, \pi$ , de manera que no son soluciones aceptables para problemas físicos donde representan un potencial eléctrico. Sin embargo, si el parámetro  $\lambda$  que aparece en la constante de separación es un número entero  $n$ , se encuentra que una de las series de potencias se trunca a un polinomio en  $\beta$  de grado  $n$ ,  $P_n(\beta)$  (**polinomio de Legendre**) mientras que la otra serie mantiene su singularidad logarítmica y entonces es eliminada como posible representación matemática de un potencial.

Queda entonces:  $\lambda = n \Rightarrow \frac{d}{d\beta} \left( \left( 1 - \beta^2 \right) \frac{d\Theta}{d\beta} \right) + n(n+1) \Theta = 0 \Rightarrow \Theta(\theta) = A_n P_n(\cos \theta)$

Las expresiones de los primeros polinomios de Legendre ( $\beta = \cos \theta$ ) son:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = \beta \quad P_2 = \frac{1}{2} (3\beta^2 - 1)$$

En general:

$$P_n(\beta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\beta^n} (\beta^2 - 1)^n$$

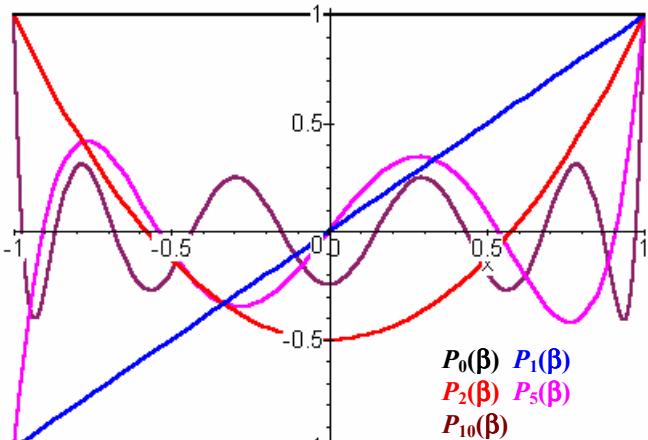
Se observan en la figura algunos de los primeros polinomios de Legendre en función de  $\beta$ . A medida que aumenta el orden del polinomio su comportamiento presenta más oscilaciones.

Finalmente, queda la ecuación radial:

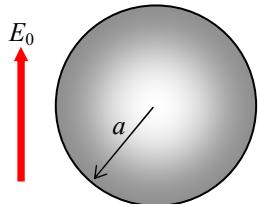
$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) R = 0 \Rightarrow R(r) = C_n r^n$$

como puede comprobarse por sustitución. Finalmente, la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas axisimétricas<sup>2</sup> respecto de  $z$  es, aplicando superposición:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$



**Ejemplo 7.3:** Una esfera dieléctrica de radio  $a$  y permitividad  $\epsilon_2$  se coloca en un campo inicialmente uniforme en un espacio de permitividad  $\epsilon_1$ .



Suponemos el campo uniforme en la dirección  $+z$ , y que la esfera está centrada en el origen de coordenadas. Entonces el problema tiene simetría esférica axisimétrica. La solución general es:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

Para el interior de la esfera se deben eliminar los coeficientes  $B_n$  ya que el campo y el potencial deben ser acotados en todo el espacio:  $\Phi_i(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (r \leq a)$

Para  $r \geq a$ , la solución es la general:  $\Phi_e(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n r^n + D_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta) \quad (r \geq a)$

El campo original es:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \mathbf{z} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ . Para  $r \rightarrow \infty$ , el potencial del sistema debe tender a esta forma de dependencia. Entonces los coeficientes  $C_n$  deben ser cero para  $n > 1$  y  $C_1 = -E_0$ :

$$\Phi_e(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (r \geq a)$$

Las otras condiciones de contorno requieren la continuidad del potencial y de la componente normal del vector  $\mathbf{D}$  sobre la superficie de la esfera, que llevan a las condiciones:

$$\begin{aligned} \Phi_i(a, \theta) = \Phi_e(a, \theta) &\Rightarrow \begin{cases} A_1 a = -E_0 a + D_1 / a^2 & n=1 \\ A_n a^n = D_n / a^{n+1} & n>1 \end{cases} \\ \left. \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial r} \right|_{r=a} &\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_2 A_1 = \epsilon_1 \left( -E_0 - D_1 / a^3 \right) & n=1 \\ n \epsilon_2 A_n a^{n-1} = -(n+1) \epsilon_1 D_n / a^{n+2} & n>1 \end{cases} \end{aligned}$$

y entonces:

$$A_1 = -\frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \quad D_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} a^3 E_0 \quad A_n = D_n = 0 \quad (n>1)$$

<sup>2</sup> Para sistemas no axisimétricos se deben introducir los armónicos esféricos para las funciones angulares. Por ejemplo, ver W.K.H.Panofsky & M.Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2<sup>nd</sup>. Ed., Addison-Wesley, Reading, 1962, Cap.5.

$$\Phi_i(r,\theta) = -\frac{3\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} r \cos \theta \quad (r \leq a)$$

Finalmente:

$$\Phi_e(r,\theta) = \left[ \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right] E_0 r \cos \theta \quad (r \geq a)$$

El campo eléctrico será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} \right)$$

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_i = \frac{3\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{3\epsilon_1 E_0 \hat{\mathbf{z}}}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \quad (r \leq a)$$

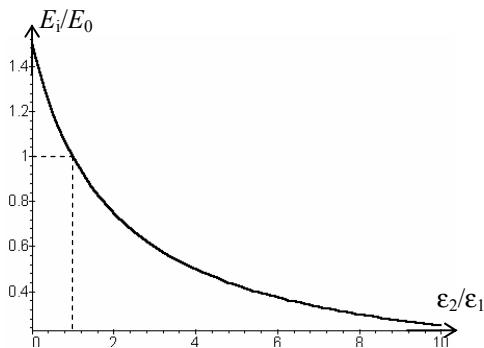
$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi_e = \left( 2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} + 1 \right) E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right) E_0 \sin \theta \hat{\theta} \quad (r \geq a)$$

Se ve que el campo dentro de la esfera es **uniforme**, y que para  $r \rightarrow \infty$  tiende a  $E_0 \hat{\mathbf{z}}$  que es el campo original antes de colocar la esfera. Dentro de la esfera dieléctrica:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_2 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\epsilon_1 \chi_2 \epsilon_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_P = \mathbf{P} \bullet \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{P} \bullet \hat{\mathbf{r}} = \frac{3\epsilon_1 \chi_2 \epsilon_0}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_0 \cos \theta \\ \rho_P = -\vec{\nabla} \bullet \mathbf{P} = 0 \end{cases}$$

El campo eléctrico tiene componentes normal y tangencial a la superficie de la esfera.

Finalmente vamos a analizar la intensidad relativa del campo en el interior de la esfera respecto del campo exterior original. Si graficamos la relación  $E_i/E_0$  en función de la relación entre permitividades interior/exterior  $\epsilon_2/\epsilon_1$  obtenemos la gráfica de la figura.



Se observa que el campo interior es menor que el original si la permitividad de la esfera es mayor que la del medio que la rodea, pero si la permitividad de la esfera es menor que la del medio ambiente, el campo interior es **mayor** que el original:  $\epsilon_{int} < \epsilon_{ext} \Rightarrow E_i > E_0$

Esto ocurre, por ejemplo, cuando se forma una burbuja de aire dentro de un dieléctrico. Entonces se tiene:  $E_i/E_0 = 3\epsilon_{r1}/(1+2\epsilon_{r1})$  donde  $\epsilon_{r1}$  es la permitividad relativa del dieléctrico fuera de la burbuja.

$$\text{En el caso del poliestireno: } \epsilon_{r1} = 2.7 \Rightarrow \frac{E_i}{E_0} \approx 1.27$$

$$\text{y en el caso del agua: } \epsilon_{r1} = 80 \Rightarrow \frac{E_i}{E_0} \approx 1.5$$

que es además el valor límite para  $\epsilon_{r1} \rightarrow \infty$ . Se ve entonces que se puede producir ruptura dieléctrica **dentro** de la burbuja aún cuando el campo no supere el valor de ruptura **fueras** de la burbuja. La ruptura dieléctrica genera calor y electrones libres que producen procesos de corrosión sobre el material dieléctrico sobre la frontera de la burbuja, que con el tiempo pueden llevar a una avalancha en el dieléctrico mismo y su ruptura. Es interesante que el campo dentro de la burbuja no depende de su tamaño, sino únicamente de las relaciones de permitividades y el campo aplicado.

## Métodos numéricos para campos quasi-estáticos

Las ecuaciones que describen los fenómenos macroscópicos del electromagnetismo se pueden resolver en forma analítica sólo en pocas situaciones, y hay numerosos ejemplos de interés tecnológico donde es imposible obtener una solución cerrada. En particular, el método usual de separación de variables requiere que las condiciones de borde se den sobre superficies coordinadas para el cálculo sencillo de las constantes de integración. De la misma manera, los efectos de borde, los campos parásitos y la presencia de irregularidades en el recinto de integración no pueden describirse mediante funciones analíticas y en muchas situaciones son justamente estos efectos los que se quiere estudiar para analizar la aplicabilidad de determinada estructura a un objetivo dado.

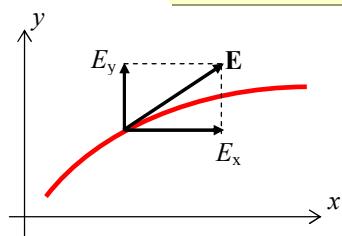
Por estos motivos desde mediados del siglo XIX se introdujeron técnicas matemáticas que extienden la aplicación de las soluciones analíticas a problemas electromagnéticos, especialmente en la teoría del potencial, y en el siglo XX el advenimiento de las computadoras de alta velocidad ha permitido el desarrollo de diversos métodos numéricos para la solución de las ecuaciones del electromagnetismo.

Vemos en este capítulo un resumen de métodos numéricos habituales para el cálculo de campos quasi-estáticos, donde valen las ecuaciones de Poisson y Laplace.

### Líneas de Campo

Frecuentemente es necesario hacer un esquema visual de las líneas de campo o las superficies equipotenciales generadas por una distribución de cargas o corrientes. Para realizar un trazado de líneas de campo consideramos su definición:

**Una línea de campo o línea de fuerza es una curva en el espacio tal que el campo es tangente a la línea en todo punto**



Esta definición se representa gráficamente para el campo eléctrico en la figura, y se puede expresar matemáticamente como  $\vec{E} \times d\vec{l} = 0$ . En coordenadas cartesianas, por ejemplo, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\vec{E} \times d\vec{l} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} \\ &= (E_y dz - E_z dy) \hat{x} + (E_z dx - E_x dz) \hat{y} + (E_x dy - E_y dx) \hat{z} = 0\end{aligned}$$

de donde en el plano xy queda la ecuación diferencial:

$$E_x dy - E_y dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

Esta ecuación nos permite también obtener la traza, sobre el plano del dibujo, de las **superficies equipotenciales**. Como las líneas de campo deben ser normales a las equipotenciales, la traza de estas superficies sobre el plano de representación son trayectorias ortogonales a las líneas de campo.

De esta forma, la ecuación diferencial de la traza de las equipotenciales sobre el plano del dibujo será:  $dy/dx = -E_x/E_y$

Desde el punto de vista práctico, un programa computacional que trace líneas de campo sobre el plano xy podría seguir los siguientes pasos:

1. Elegir un punto del plano.
2. Calcular las componentes cartesianas del campo  $E_x$  y  $E_y$ .
3. Definir un triángulo rectángulo de lados  $\square x$ ,  $\square y$  y  $\square l$  tales que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta l} = \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \quad \frac{\Delta y}{\Delta l} = \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}$$

4. Dar un valor a  $\square l$  y avanzar  $\square x$  sobre el eje  $x$  y  $\square y$  sobre el eje  $y$  hasta el siguiente punto de la línea de campo.
5. Avanzar ( $-\square y$ ) sobre el eje  $x$  y  $\square x$  sobre el eje  $y$  hasta el siguiente punto de la traza equipotencial

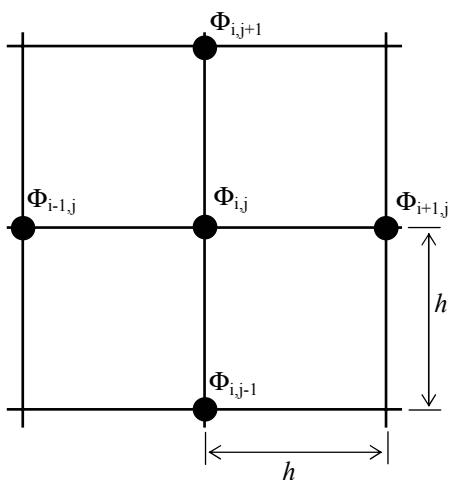
Estos pasos se repiten hasta completar la línea, lo que ocurre cuando llega a una carga.

## Métodos Numéricos en la Teoría del Potencial

En la teoría del potencial el objetivo es hallar soluciones de la ecuación de Poisson o la correspondiente ecuación de Laplace, con determinadas condiciones de contorno.

Existen diversos métodos numéricos usados, pero lo más usuales son el de diferencias finitas y el de elementos finitos.

### Método de diferencias finitas



En este método se divide el recinto de integración en una **malla** o **grilla**, generalmente de intervalo fijo  $h$ , como se muestra en la figura..

El método consiste en reemplazar las derivadas por una representación de diferencias finitas en términos de los potenciales en los *nodos* de la malla. Por ejemplo:

$$\Phi(x_i, y_j) = \Phi_{i,j} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x_i, y_j} = \Phi'_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+1/2,j} - \Phi_{i-1/2,j}}{h}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j} = \Phi''_{i,j} \approx \frac{\Phi'_{i+1/2,j} - \Phi'_{i-1/2,j}}{h} = \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{h^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de Poisson puede escribirse en este esquema como:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j+1}}{h^2} \approx -\frac{\rho_{i,j}}{\epsilon}$$

de donde podemos despejar:

$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left( \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

Esta ecuación nos permite expresar el potencial en un nodo de la malla en función de los potenciales de los nodos que lo rodean y de la densidad de carga en el nodo mismo.

Para resolver esta ecuación hay varias alternativas. Las más sencillas son:

- a) Resolución directa del sistema de ecuaciones
- b) Resolución iterativa.

### Resolución directa del sistema de ecuaciones

La ecuación:

$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left( \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

se puede escribir en la forma matricial  $A[\Phi] = [\rho]$

donde:  $[\Phi] = \{\Phi_{ij}\}$  es la matriz de potenciales (incógnitas)

$[\rho] = \frac{h^2}{\epsilon} \{\rho_{ij}\}$  es la matriz de densidades de carga, y

$$A = \{A_{ij}\} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j \pm 1 \end{cases} \quad \text{es una matriz tridiagonal}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:  $[\Phi] = A^{-1}[\rho]$  y como la matriz inversa  $A^{-1}$  es la inversa de una matriz tridiagonal, se simplifican los cálculos.

### Resolución iterativa

Aunque la resolución directa es matemáticamente irreprochable, el tamaño de la matriz a invertir, aunque sea tridiagonal, hace que este esquema sea poco práctico para mallas densas, ya que la dimensión de  $A$  es igual al número de nodos.

Existe un método de solución iterativa donde se calcula el potencial  $\Phi_{i,j}$  en la  $n$ -ésima iteración en función de los valores del potencial en los puntos circundantes hallados en la iteración previa:

$$\Phi_{i,j}^{(n)} \approx \frac{1}{4} \left( \Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

Este método se conoce como **relajación**. Esta solución iterativa generalmente converge lentamente, por lo que se han desarrollado métodos de aceleración, de los cuales uno de los más usados en la actualidad es el método de **sobre-relajación**.

La diferencia entre dos iteraciones sucesivas para  $V_{i,j}$  es:

$$\delta_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n)} - \Phi_{i,j}^{(n-1)} = \frac{1}{4} \left( \Phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \Phi_{i,j-1}^{(n-1)} + \Phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right) - \Phi_{i,j}^{(n-1)}$$

Esta diferencia, que se conoce como **residuo**, debería tender cero cuando el cálculo haya obtenido la convergencia.

La solución iterativa puede escribirse entonces como:  $\Phi_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n-1)} + \delta_{i,j}^{(n)}$

El método de sobre-relajación consiste en realizar una sobre-corrección:

$$\Phi_{i,j}^{(n)} = \Phi_{i,j}^{(n-1)} + \omega^{(n)} \delta_{i,j}^{(n)}$$

donde  $\omega^{(n)}$  es un **factor de convergencia**. Se puede demostrar que se acelera la convergencia de la iteración si  $1 \leq \omega^{(n)} \leq 2$ . Si  $\omega^{(n)} = 1$  se vuelve al método iterativo normal. En general, se optimiza la aceleración de la convergencia si  $\omega^{(n)}$  cambia en cada iteración. Un esquema usado es el siguiente:

$$\omega^{(0)} = 1 \quad \omega^{(n)} = \frac{1}{1 - \rho_J^2 \omega^{(n-1)} / 4}$$

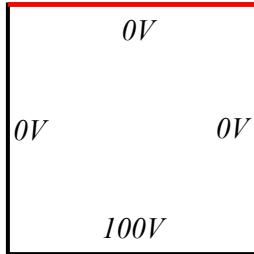
donde  $\rho_J = \cos(N\pi)$  es el llamado **radio de Jacobi** y  $N$  el número de puntos de la malla de integración. Este esquema surge del análisis numérico del radio de convergencia del método de relajación.

El método iterativo no siempre converge, de manera que es necesario monitorear la convergencia. También ocurre que los primeros pasos pueden al principio dar un residuo creciente u oscilatorio antes de comenzar a descender monótonamente. Esto se debe a que se debe asumir un conjunto de potenciales de partida en los nodos, y cuanto más alejados sean estos valores iniciales de los verdaderos es mayor la posibilidad de oscilaciones de los primeros pasos de iteración. También debe tenerse en cuenta que no se debe pedir un residuo muy pequeño para terminar el proceso, ya que existen errores de truncado y redondeo que son inevitables.

Hemos descripto el método de diferencias finitas en coordenadas cartesianas, donde las ecuaciones son más sencillas. En general, este método puede aplicarse en cualquier sistema de coordenadas, pero las ecuaciones de diferencias finitas dependen de tal sistema. En general, las ecuaciones matemáticas son más complejas y, desde el punto de vista numérico, la estabilidad y convergencia del método de inversión de matriz o el método iterativo son menos conocidos que para coordenadas cartesianas.

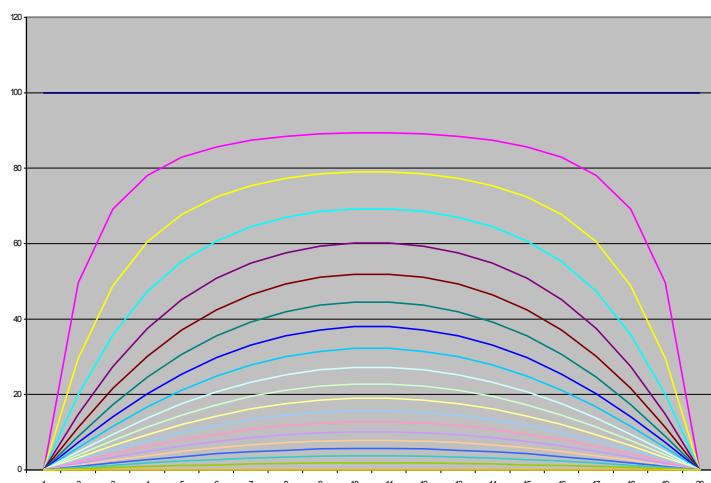
También puede usarse una grilla cartesiana reemplazando los bordes del recinto de integración que no sean planos coordinados por una “escalera” cartesiana y admitir un error en las condiciones de borde del problema. Esta alternativa no es la mejor, pero permite aplicar alguno de los muchos paquetes de programas de diferencias finitas en coordenadas cartesianas para obtener una primera solución antes de aplicar métodos más poderosos pero más sofisticados.

**Ejemplo 7.4:** Hallar numéricamente el potencial dentro del recinto cuadrado de la figura, tres de cuyos lados están a 0V y el cuarto a 100V.



El método de relajación es fácilmente programable. A continuación se muestra una tabla de un programa de hoja de cálculo. Cada celda representa un nodo de la malla de relajación. Sobre las celdas de los bordes colocamos las condiciones de contorno y en las otras celdas la fórmula de relajación que vincula el potencial en cada celda con los de sus vecinos.

	A	B	C	D	E
1	0	0	0	0	0
2	0	(B1+B3+A2+C2)/4	(C1+C3+B2+D2)/4	(D1+D3+C2+E2)/4	0
3	0	(B2+B4+A3+C3)/4	(C2+C4+B3+D3)/4	(D2+D4+C3+E3)/4	0
4	0	(B3+B5+A4+C4)/4	(C3+C5+B4+D4)/4	(D3+D5+C4+E4)/4	0
5	0	100	100	100	0



Debido a la existencia de referencias circulares, se debe usar la opción de iteración en la hoja.

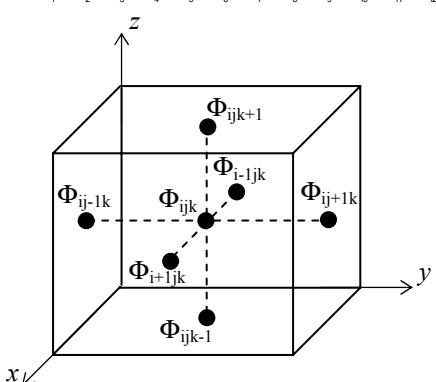
En la figura se muestra el gráfico de las equipotenciales. El lado horizontal inferior está a 100V. Esta gráfica surge de una hoja de cálculo de 20x20 celdas.

En el archivo **RELAX.XLS** se halla un cálculo por relajación con una malla más fina (100x100 celdas) y el mismo problema resuelto mediante sobrerrelajación.

### 3-D

En la figura se muestra una celda de diferencias finitas en 3-D (hay otras configuraciones posibles). Para esta celda la ecuación de relajación es:

$$\Phi_{i,j,k} \approx \frac{1}{6} \left( \Phi_{i-1,j,k} + \Phi_{i+1,j,k} + \Phi_{i,j-1,k} + \Phi_{i,j+1,k} + \Phi_{i,j,k-1} + \Phi_{i,j,k+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$



Aquí también se puede usar un método de sobrerrelajación para acelerar la convergencia.

## Métodos de Monte Carlo

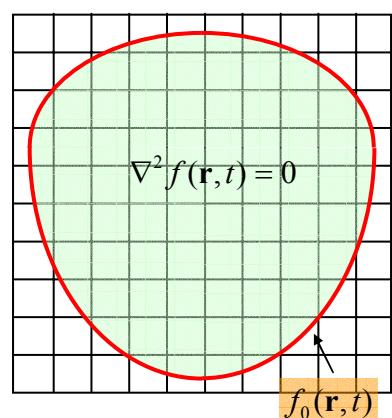
El nombre Monte Carlo se adjudica a una serie de métodos numéricos que usan la teoría de probabilidades. Estos métodos se basan en desarrollar un sistema estocástico análogo al que se quiere estudiar y luego obtener respuestas aproximadas al problema mediante ensayos estadísticos (numéricos). Estos métodos surgieron de modelizar experimentos de física nuclear, que son en sí mismos de naturaleza probabilística, y son quizás los métodos numéricos más cercanos en espíritu a las técnicas experimentales de la física.

Los métodos de Monte Carlo se pueden clasificar en dos tipos: métodos de **simulación** y métodos de **muestreo**.

En los métodos de simulación se genera un modelo matemático que imita el comportamiento probabilístico de la naturaleza. Un ejemplo típico es el modelo del movimiento de un neutrón en un reactor nuclear mediante una **caminata al azar** que simula el movimiento browniano del neutrón.

Los métodos de muestreo tratan de **estimar** las propiedades de un **universo** de objetos a partir de las propiedades de una **muestra** o subconjunto. Por ejemplo, el valor medio de una función  $f(x)$  en un intervalo  $a < x < b$  se puede estimar haciendo el promedio de la función sobre un número **finito** (pero grande) de puntos dentro del intervalo. Esta idea lleva a un método de integración, por el teorema del valor medio del cálculo integral.

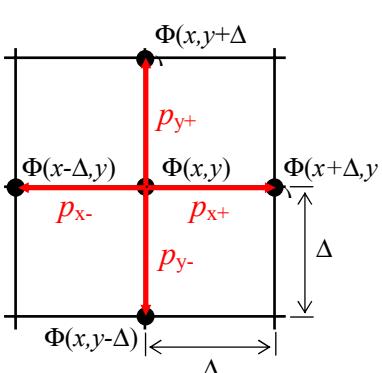
En el caso de la teoría del potencial la conexión entre la teoría del potencial y el método de caminata al azar fue establecida por primera vez en 1944 por Kakutani<sup>3</sup>. Este método se puede emplear para determinar el potencial en puntos interiores de un recinto cerrado donde se cumple la ecuación de Poisson con condiciones de Dirichlet o de Neumann sobre su frontera.



En el esquema de caminata al azar **de paso fijo**, que es el único que veremos en este curso<sup>4</sup> se trata de un problema de Laplace con condiciones de Dirichlet. Colocamos una grilla cuadrada de paso  $\Delta$  en el recinto de integración. De acuerdo a la aproximación de diferencias finitas de la ecuación de Laplace el potencial en un punto de la grilla es:

$$f(x, y) = p_{x+}f(x + \Delta, y) + p_{x-}f(x - \Delta, y) + p_{y+}f(x, y + \Delta) + p_{y-}f(x, y - \Delta)$$

con  $p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = 1/4$



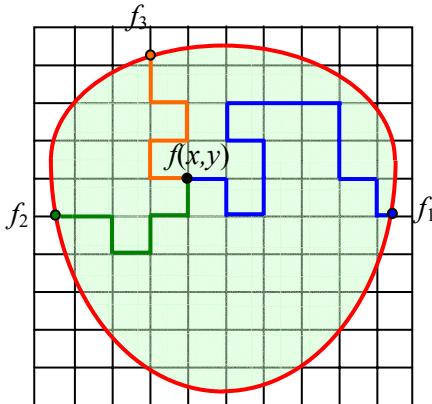
Podemos dar a esta ecuación una interpretación probabilística. Imaginemos una partícula que realiza una caminata al azar por la grilla y se halla en un instante dado en el punto  $(x, y)$ . En el siguiente movimiento la partícula tiene una probabilidad  $p_{x+}$  de saltar a  $(x + \Delta, y)$ , una probabilidad  $p_{x-}$  de saltar a  $(x - \Delta, y)$ , etc. (en este esquema todos los saltos son equiprobables, pero podemos imaginar otras situaciones).

Para decidir cuál salto se realiza, producimos un número al azar  $\lambda$  menor que 1 tal que:

<sup>3</sup> S.Kakutani, "Two-dimensional brownian motion harmonic functions", Proc.Imp.Acad. (Tokio), 20, pp.706-714.

<sup>4</sup> Más información sobre métodos de Monte Carlo se puede ver en M.N.O.Sadiku, "Numerical Techniques in Electromagnetics", 2<sup>nd</sup>.Ed., CRC Press, 2001, Cap.8.

$$\begin{aligned}
 \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{4} &\Rightarrow (x, y) \rightarrow (x + \Delta, y) \\
 \text{si } \frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{2} &\Rightarrow (x, y) \rightarrow (x - \Delta, y) \\
 \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} &\Rightarrow (x, y) \rightarrow (x, y + \Delta) \\
 \text{si } \frac{3}{4} < \lambda < 1 &\Rightarrow (x, y) \rightarrow (x, y - \Delta)
 \end{aligned}$$



En esta expresión el error estimado corresponde al valor de la desviación estándar de  $f$  considerada como una variable aleatoria. Esto da una probabilidad del 69% de que el valor verdadero de  $f$  se halle en el intervalo de error. Si se desea una probabilidad mayor, se puede tomar  $2\delta$ , con lo que la probabilidad crece al 95%.

Este procedimiento permite calcular el potencial en un solo punto del interior del recinto. Si se desea conocer el potencial en otros puntos se debe repetir por completo. Esto hace que este método no sea el más eficiente, pero es rápido y sencillo de programar para casos donde no se requiere el potencial dentro de todo el recinto, sino únicamente en algunos "puntos calientes" como por ejemplo en el diseño contra los problemas derivados del efecto corona.

En este curso vamos a usar una implementación en Excel realizada y gentilmente cedida por el Dr. Ctibor Henzl, de la Universidad Técnica de Ostrava, República Checa (**MONTEC.ZIP** contiene un artículo explicativo - MONTEC.SHS y la implementación MONTEC.XLS).

$$\begin{aligned}
 \bar{f} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i \\
 f(x, y) \rightarrow \bar{f} \pm \delta \quad \text{con} \quad \delta &= \frac{\sigma_f}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{N} \left[ \sum_{i=1}^N f_i^2 - \bar{f}^2 \right]
 \end{aligned}$$

## Método de elementos finitos<sup>5</sup>

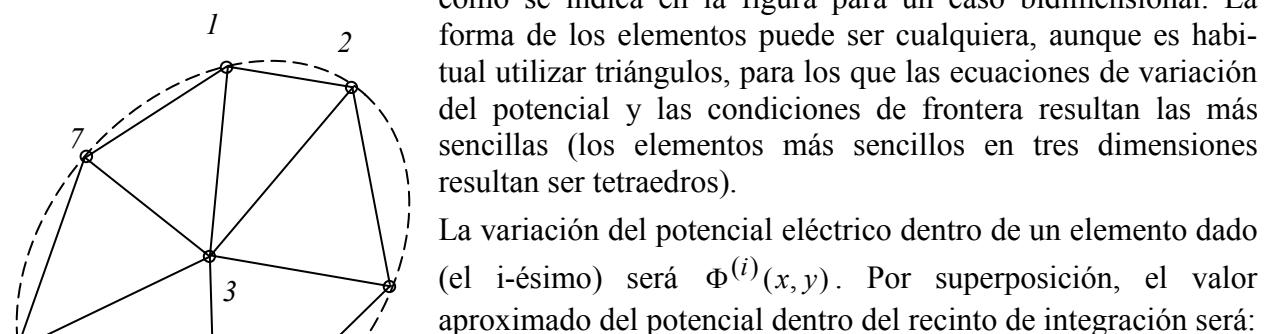
El método de diferencias finitas se puede utilizar con máxima eficiencia en problemas donde es posible definir una malla a lo largo de los ejes coordenados, pero cuando el recinto de integración es de forma compleja muchas veces esto no es posible. En los últimos años se han desarrollado métodos numéricos que permiten resolver situaciones de recintos con fronteras de forma geométrica compleja y también recintos ilimitados, con adecuadas condiciones en el infinito.

Estos métodos se basan en la técnica de **elementos finitos** (Finite Element Method - **FEM**), que tiene su origen en el campo del análisis estructural, y se ha aplicado a problemas electromagnéticos desde 1968. En este método existen básicamente cuatro pasos:

- dividir el recinto de integración en un número finito de regiones o elementos,
- deducir las ecuaciones que describen el potencial y/o los campos dentro de un elemento cualquiera,
- plantear las ecuaciones que dan las condiciones de ajuste de las soluciones en las superficies frontera entre elementos, y
- resolver estas ecuaciones.

### Generación de los elementos finitos

Se divide el recinto de integración en un número de **elementos finitos** (superficies pequeñas) como se indica en la figura para un caso bidimensional. La forma de los elementos puede ser cualquiera, aunque es habitual utilizar triángulos, para los que las ecuaciones de variación del potencial y las condiciones de frontera resultan las más sencillas (los elementos más sencillos en tres dimensiones resultan ser tetraedros).



La variación del potencial eléctrico dentro de un elemento dado (el  $i$ -ésimo) será  $\Phi^{(i)}(x, y)$ . Por superposición, el valor aproximado del potencial dentro del recinto de integración será:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^N \Phi^{(i)}(x, y)$$

donde  $N$  es el número de elementos finitos en que se ha dividido el recinto de integración. La forma más sencilla del potencial dentro de un elemento es:

$$\Phi^{(i)}(x, y) = a^{(i)} + b^{(i)}x + c^{(i)}y$$

Esta es la llamada aproximación de primer orden, que es sencilla desde un punto de vista matemático, pero involucra en general errores de posible importancia en la determinación de la solución, por lo que generalmente los programas comerciales usan potenciales de orden superior.

En esta aproximación, el campo eléctrico dentro del elemento es constante:

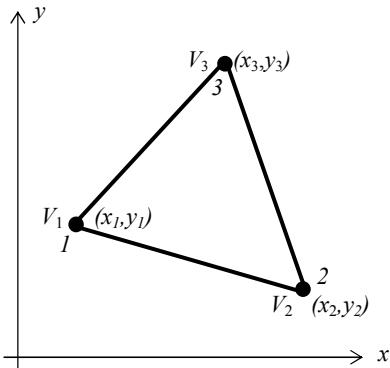
$$\bar{E}^{(i)}(x, y) = -\nabla\Phi^{(i)}(x, y) = -\left(b^{(i)}\hat{x} + c^{(i)}\hat{y}\right)$$

---

<sup>5</sup> El material de esta sección se ha tomado fundamentalmente de P.P.Silvester y R.L.Ferrari, "Elementos Finitos para Ingeniería Eléctrica", Noriega Editores, Ed. Limusa, México D.F., 1989.

### Ecuaciones de la solución en cada elemento

Consideremos un elemento triangular como el de la figura. Los potenciales en los nodos se obtienen a partir de la ecuación  $\Phi(x, y) = a + bx + cy$ , que podemos escribir según la ecuación matricial:



$$\Phi(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

donde, en esta sección, suprimimos los superíndices que identifican al elemento, ya que trabajaremos con uno solo, y, en particular, para los vértices, esta ecuación nos queda:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

de donde se pueden determinar los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$$

donde  $A$  es el área del elemento:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_2y_3 - x_3y_2) = [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

El valor de  $A$  es positivo si se numeran los nodos en el sentido antihorario, como se muestra en la figura anterior.

Reemplazando los coeficientes en la ecuación matricial (9) se obtiene el potencial dentro del elemento en función de los potenciales de sus vértices:

$$\Phi(x, y) = [1 \ x \ y] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (x_3y_1 - x_1y_3) & (x_1y_2 - x_2y_1) \\ (y_2 - y_3) & (y_3 - y_1) & (y_1 - y_2) \\ (x_3 - x_2) & (x_1 - x_3) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}$$

que también puede escribirse:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) \Phi_i$$

$$\alpha_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

donde:

$$\alpha_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$\alpha_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

Se observa que esta ecuación, la ecuación **FEM**, da el potencial (aproximado) en **cualquier punto** en el interior del elemento, y que las funciones  $\alpha_i(x, y)$  son funciones de interpolación lineal, en este caso en que elegimos un método de primer orden. Estas funciones se conocen como **funciones de forma del elemento**, y satisfacen las propiedades:

$$\alpha_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1$$

En el caso de las diferencias finitas, el método da el potencial (aproximado) **solamente** en los puntos de la malla de integración. Se puede interpolar (en un paso posterior) para obtener el potencial en cualquier punto del recinto de integración.

Hasta aquí hemos realizado solamente una descripción **geométrica** de la forma de expresar el potencial eléctrico en una región en términos de los valores que adopta en un conjunto de nodos que forman los elementos finitos. La física del problema se introduce en general a través de consideraciones energéticas: **de las infinitas soluciones posibles a un problema de potencial debe seleccionarse aquella que hace mínima la energía del campo.**

Si suponemos que el recinto de integración plano representa una sección de un recinto espacial, la energía por unidad de longitud asociada a un elemento está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\vec{E}|^2 dS = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\nabla \Phi|^2 dS$$

Pero, usando la ecuación FEM:

$$|\nabla \Phi|^2 = \nabla \Phi \bullet \nabla \Phi = \left( \sum_{i=1}^3 \Phi_i \vec{\nabla} \alpha_i(x, y) \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 \Phi_i \vec{\nabla} \alpha_i(x, y) \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_i \Phi_j \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j$$

y entonces:

$$W = \frac{1}{2} \int \varepsilon \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_i \Phi_j \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dS = \frac{1}{2} \varepsilon [\Phi]^T C[\Phi]$$

donde  $[\Phi]$  es el vector de potenciales de los vértices:  $[\Phi]^T = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3]$

y  $C$  es una matriz de coeficientes:  $C = \{C_{ij}\} = \int \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dS$

La matriz  $C$  se conoce como **matriz de coeficientes de elementos** (en mecánica estructural se conoce como **matriz de rigidez**). El coeficiente  $C_{ij}$  puede considerarse como un factor de acoplamiento entre los nodos  $i$  y  $j$ . La forma explícita de estos coeficientes se pueden obtener a partir de su definición, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} C_{12} &= \int \vec{\nabla} \alpha_1 \cdot \vec{\nabla} \alpha_2 dS = \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned}$$

También es posible demostrar que  $C_{ij} = C_{ji}$ , es decir, que la matriz de coeficientes de elementos es simétrica.

### Ensamble de las soluciones para el conjunto de elementos

Una vez resuelto el problema para un elemento, es necesario ensamblar todos los elementos para hallar la solución en todo el recinto de integración. Adelantamos en la sección previa que una forma de hacerlo es a través de la minimización de la energía del conjunto.

La energía del elemento  $i$ -ésimo es :  $W = \sum_{i=1}^N W^{(i)} = \frac{\varepsilon}{2} [\Phi]^T C[\Phi]$

y la energía del conjunto de elementos es :  $W^{(i)} = \frac{\varepsilon}{2} [\Phi^{(i)}]^T C^{(i)} [\Phi^{(i)}]$

El problema más importante en este punto es expresar la **matriz de coeficientes global**  $C$  en términos de las matrices de coeficientes de elementos  $C^{(i)}$ . Para ello se establecen relaciones topológicas en la red, de acuerdo a la conexión entre los nodos. Los coeficientes de la matriz global tienen varias propiedades generales:

- 1) es simétrica ( $C_{ij} = C_{ji}$ );
- 2) es una matriz poco densa (*sparse*) y de banda, debido a que  $C_{ij} = 0$  si no hay conexión entre los nodos  $i$  y  $j$ .
- 3) es una matriz singular, debido a que sus filas (o columnas) no son linealmente independientes.

### Resolución del sistema de ecuaciones lineales

El cálculo variacional establece que la ecuación de Laplace (o de Poisson) se satisface cuando la energía total en la región considerada es mínima. Esto lleva a que las derivadas parciales de la energía total respecto de cada valor de potencial de nodos sean cero:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Estas ecuaciones nos lleva a un sistema lineal homogéneo:  $\sum_{i=1}^N \Phi_i C_{ik} = 0$

cuya solución se puede obtener por diversos métodos, entre ellos el de relajación descripto en la sección previa.

## RESUMEN

Se han presentado algunos métodos de resolución de las ecuaciones de la teoría del potencial estática. Estas ecuaciones (y las correspondientes soluciones) son aplicables también a **casos cuasi-estáticos**.

- Los potenciales que cumplen ecuaciones diferenciales lineales del tipo de Poisson y Laplace son:

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\epsilon & \text{potencial electrostático} \\ \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) & \text{potencial vectorial magnético} \\ \nabla^2 \Psi_m(\mathbf{r}) = 0 & \text{potencial escalar magnético} \end{array}$$

- Un problema de potencial consiste en resolver alguna de las ecuaciones anteriores [ $\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t)$ ] junto con un conjunto de **condiciones de contorno** o de borde sobre la frontera que delimita el recinto de integración y/o las fronteras internas entre regiones de propiedades diferentes. Estas condiciones se clasifican como:

**Condición de Dirichlet:**  $S: f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}, t)$

**Condición de Neumann:**  $S: \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f_0}{\partial n}$

- En pocos y afortunados casos existen **soluciones analíticas**. Una de las técnicas más usadas para obtener soluciones analíticas es el **método de separación de variables**, que da **desarrollos en serie de Fourier** de las soluciones.

Se presentan las funciones base de estos desarrollos en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

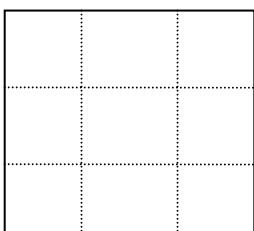
El método de separación de variables es aplicable cuando las fronteras del recinto de integración se pueden asimilar a superficies de coordenada constante en el sistema de coordenadas a utilizar.

- En general es necesario usar **métodos numéricos**. El método numérico más sencillo es el de **diferencias finitas**, que se basa en construir una grilla – habitualmente equiespaciada – y reemplazar las derivadas por diferencias finitas de los valores de la función potencial sobre los puntos de la grilla. En 2D la ecuación de Poisson de la electrostática lleva a la ecuación de diferencias finitas:

$$\Phi_{i,j} \approx \frac{1}{4} \left( \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j+1} + \frac{h^2}{\epsilon} \rho_{i,j} \right)$$

- Este es un sistema lineal de ecuaciones que puede resolverse directamente o por iteración. En el método iterativo la técnica usual es la **sobrerrelajación**.
- El método de diferencias finitas es adecuado cuando se puede asimilar la frontera del recinto de integración a superficies de coordenada constante en el sistema de coordenadas a usar.
- En general, para recintos de forma cualquiera, es aplicable el llamado método de **elementos finitos** que se basa en dividir el recinto en pequeños elementos, habitualmente triangulares, donde se postula una forma matemática de variación del potencial. El método consiste en ajustar nodo a nodo las funciones potenciales de elementos adyacentes, lo que lleva a un sistema de ecuaciones lineales.

## PROBLEMAS

- 7.1) Dos placas conductoras paralelas están separadas por una distancia  $d$  y se mantienen a potenciales de 0 y  $V_0$ . La región entre las placas está llena con una distribución continua de electrones que tiene densidad volumétrica de carga  $\rho = -\rho_0 z/d$ . Una de las placas está ubicada en  $z=0$  y la otra en  $z=d$ . Calcular a) el potencial en cualquier punto entre las placas y b) las densidades superficiales de carga en las placas.
- 7.2) Halle el potencial eléctrico a partir de la ecuación de Laplace y el campo eléctrico para la región entre dos cilindros concéntricos muy largos, donde los potenciales aplicados valen  $\Phi(1 \text{ mm}) = 0 \text{ V}$  y  $\Phi(20 \text{ mm}) = 150 \text{ V}$ .
- 7.3) Los radios interior y exterior de dos delgadas capas esféricas conductoras y concéntricas son  $R_i$  y  $R_o$ , respectivamente. El espacio entre las capas está lleno con un material aislante. La capa interior se mantiene a un potencial  $V_1$  y la exterior a  $V_2$ . Determine la distribución de potencial en el material aislante resolviendo la ecuación de Laplace. Utilizando apropiadamente este último resultado halle el potencial en la región  $R > R_o$ .
- 7.4) Se desea obtener, a partir de la ecuación de Poisson, el potencial en todo punto del espacio para las siguientes distribuciones de carga:
- Un plano infinito con densidad de carga superficial constante  $\sigma_0$ .
  - Una esfera de radio  $R$  que contiene una densidad de carga volumétrica distribuida  $\rho(r) = Ar^n$ , con  $A$  constante y  $n \geq -1$ .
  - Un cilindro infinito de radio  $a$  con una densidad de carga volumétrica constante  $\rho_0$  rodeado por un cilindro hueco concéntrico de radio  $b$  con densidad de carga superficial  $\sigma_0$ .
- 7.5) Resuelva la ecuación de Laplace para la región entre dos conos coaxiales (orientados según el eje  $z$ ) que están a potenciales  $V_1(\theta=\theta_1)$  y  $V_2(\theta=\theta_2)$ . Los vértices de los conos están aislados en  $r=0$ . Considere  $\theta_1=10^\circ$ ,  $\theta_2=30^\circ$ , y  $V_1=100 \text{ V}$ . ¿A qué ángulo el voltaje es de 50 V?  
[Rta:  $17.41^\circ$ ]
- 7.6) En un recinto rectangular bidimensional y libre de cargas en su interior, el potencial está dado por:  $\Phi(x, y) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4\Phi_0}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \operatorname{sen}(n\pi y/b)$
- Determinar los potenciales en el contorno. Sugerencia:  $\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .
- 
  - Si  $a = b$  y  $\Phi_0 = 15 \text{ V}$ , calcular por el método de las diferencias finitas el potencial en los nodos internos equidistantes que indica la figura. Comparar con el resultado exacto.
  - ¿Cómo se modifican los resultados del punto b) si además se tiene  $\Phi(x, b) = 10 \text{ V}$ ?
- 7.7) El potencial dentro de un cilindro de longitud  $L$  y radio  $a$  orientado según el eje  $z$  está dado por

$$\Phi(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\Phi_0}{p_m J_1(p_m) sh(p_m L/a)} sh\left(\frac{p_m z}{a}\right) J_0\left(\frac{p_m r}{a}\right)$$

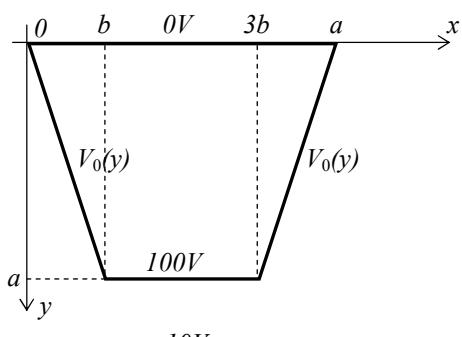
donde  $p_m$  es la raíz  $m$ -ésima de la función de Bessel  $J_0$ .

- a) Elija valores para  $a$ ,  $L$  y  $\Phi_0$  apropiados y grafique el potencial. Trate de determinar las condiciones de contorno sobre las paredes del cilindro.
- b) Si ahora, también  $\Phi(r < a, \theta) = V_0$ , ¿cuál es la expresión del potencial?. Sugerencia: utilice superposición.
- c) Obtenga numéricamente el campo eléctrico en el eje del cilindro.

$m$	$p_m$	$J_1(p_m)$	$m$	$p_m$	$J_1(p_m)$
1	2.4048	0.5191	6	18.0711	0.1877
2	5.5201	0.3403	7	21.2116	0.1733
3	8.6537	0.2715	8	24.3525	0.1617
4	11.7915	0.2325	9	27.4935	0.1522
5	14.9309	0.2065	10	30.6346	0.1442

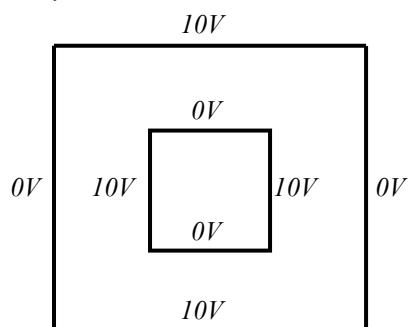
5.8) A partir de los resultados del **Ejemplo 98** obtenga el potencial de una esfera conductora de radio  $a$  colocada en un campo exterior uniforme.

5.9) Ejemplo de RELAX.XLS. Resolver en forma analítica.



5.10) a) Calcule y grafique el potencial por el método de relajación (y sobrerrelajación) para el recinto trapezoidal de la figura, donde  $b = a/4$  y el potencial varía linealmente sobre los lados oblicuos en la forma:  $V_0(y) = 100 y/a$ .

b) Calcule numéricamente el campo eléctrico.



5.11) Hallar la distribución de potencial, a partir de los métodos de relajación y sobrerrelajación, dentro del recinto que indica la figura.

## 8 - Ondas Electromagnéticas

Una de las consecuencias más revolucionarias de las ecuaciones de Maxwell es la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas, así como que en el vacío su velocidad de propagación coincide con la observada velocidad de la luz. En este capítulo analizamos estas consecuencias y presentamos diversas aplicaciones tecnológicas de las ondas electromagnéticas.

### Ondas en el vacío

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell:

$\nabla \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$	Gauss (campo eléctrico)
$\nabla \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	Gauss (campo magnético)
$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$	Faraday-Lenz
$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	Maxwell-Ampère

representan al campo electromagnético en su mayor generalidad. Estas son ecuaciones diferenciales lineales a derivadas parciales inhomogéneas con cuatro campos incógnita.

Las soluciones más sencillas de las ecuaciones de Maxwell se producen para un recinto del espacio vacío y sin fuentes de campo:

- Si el recinto es **vacío**, valen las relaciones:
- Si **no hay fuentes de campo** en su interior:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{cases}$$

Para que exista campo electromagnético debe haber fuentes que los generen. En el presente caso consideraremos que las **fuentes del campo se hallan fuera** del recinto de integración. Veremos en el Capítulo 10 (Radiación electromagnética) el análisis que se realiza cuando las fuentes se hallan **dentro** del recinto de integración.

Estas hipótesis permiten pasar de cuatro campos incógnita a dos y de ecuaciones inhomogéneas a ecuaciones homogéneas. Resultan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \nabla \bullet \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0 & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

Podemos desacoplar estas ecuaciones diferenciales acopladas tomando el rotor de la ec. de Faraday y usando la ec. de Maxwell-Ampère:

$$\nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Pero:  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$  porque  $\nabla \bullet \mathbf{E} = 0$ .

Entonces:  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  con  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Si tomamos ahora el rotor de la ec. de Maxwell-Ampère y procedemos en forma similar, llegamos a la misma ecuación para el campo magnético:  $\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$

Por lo tanto hemos podido desacoplar las ecuaciones en cada uno de los campos incógnita, pero hemos tenido que pasar de ecuaciones de primer orden a ecuaciones de segundo orden.

Las ecuaciones halladas se conocen como ecuaciones **vectoriales** de **D'Alembert**. En coordenadas cartesianas, cada componente  $f(\mathbf{r}, t)$  de los campos satisface la ecuación escalar:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{que es la ecuación escalar de D'Alembert hallada previamente en la propagación de ondas en líneas de transmisión.}$$

Esta es una ecuación que describe una propagación ondulatoria, de donde se deduce que las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en un recinto vacío sin fuentes de campo son **ondas electromagnéticas**.

La solución de las ecuaciones vectoriales de onda no es sencilla, pero puede demostrarse que, al menos en los sistemas de coordenadas separables de mayor interés<sup>1</sup> las soluciones de las ecuaciones de onda **vectoriales** se pueden obtener a partir de las correspondientes soluciones de las ecuaciones de onda **escalares** para el mismo sistema de coordenadas.

### Ondas planas elementales

En el caso de las **coordenadas cartesianas**, para facilitar el tratamiento matemático trabajamos con **ondas planas**, donde los campos dependen de una **única** coordenada espacial y del tiempo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t)$$

Además, para evitar derivar versores, usaremos ondas **linealmente polarizadas**, donde los campos mantienen su dirección vectorial en el tiempo<sup>2</sup>:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z, t) \hat{\mathbf{e}}_0 \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H(z, t) \hat{\mathbf{h}}_0$$

$\hat{\mathbf{e}}_0$  y  $\hat{\mathbf{h}}_0$  son los versores (constantes) que definen la dirección de los campos.

En resumen:

#### Cartesianas

- **onda plana:** los campos dependen de una única coordenada espacial
- **polarización lineal:** los campos se propagan manteniendo su dirección vectorial

Entonces:  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

que es una ecuación escalar de D'Alembert. Como se demostró en el **Capítulo 6**, toda función de la forma:  $f(z \mp ct)$  es solución de la ecuación de D'Alembert. Estas formas matemáticas representan ondas que se propagan con velocidad  $\pm c$  a lo largo de la dirección  $z$ .

Dado que:  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  y este valor coincide con el valor medido de la velocidad de la luz en el vacío, Maxwell propuso en 1864 que la luz era un fenómeno electromagnético, afirmación que corroboró experimentalmente Hertz en 1887. Este resultado, que puso a todos los fenómenos ópticos como casos particulares de los fenómenos electromagnéticos, ha sido una de las síntesis más abarcativas de la historia de la física

El doble signo de la función determina el sentido de la propagación:

$f(z - ct)$	propagación según $+z$ ( <b>onda progresiva</b> )
$f(z + ct)$	propagación según $-z$ ( <b>onda regresiva</b> )

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo, J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill Book Co., New York, 1941, Caps. V-VII.

<sup>2</sup> Obsérvese que en general, como en coordenadas cartesianas los versores son constantes, es posible pasar de la ecuación de onda **vectorial** a tres ecuaciones de onda **escalares**, una para cada componente del campo.

## Transversabilidad

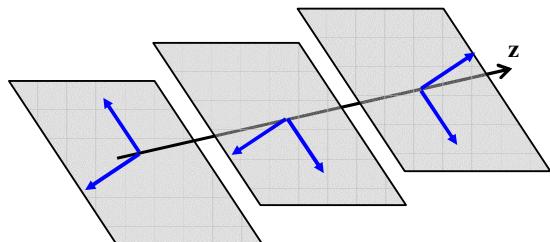
Las ecuaciones de Maxwell imponen ciertas restricciones sobre los campos. En particular las leyes de Gauss llevan a que los campos sean transversales a la dirección de propagación.

Como:  $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{E}(z, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

ya que el campo no depende de  $x$  ni de  $y$ . Como  $E_z$  depende de  $z$  y de  $t$ , esta ecuación lleva a que  $E_z$  dependa solamente de  $t$ :  $E_z(z, t) = E_z(t)$  y como además  $E_z$  satisface la ecuación de

ondas:  $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E_z(t) = At + B$

Resulta entonces que  $E_z$  varía linealmente con el tiempo. Independientemente del signo de  $A$ , se observa que la amplitud del campo crece indefinidamente con el tiempo, lo que es físicamente imposible porque llevaría a una energía infinita. Entonces  $A$  debe ser cero. Queda un campo uniforme, que nuevamente lleva a una energía infinita cuando se integra la densidad de energía, que es proporcional al cuadrado del campo, sobre todo el espacio, de modo que esta constante debe ser cero. Se tiene entonces que la componente del campo eléctrico sobre la dirección de propagación se anula. Se obtiene el mismo resultado partiendo de la ecuación de la divergencia de  $H$ :



$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow E_z = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow H_z = 0 \end{aligned}$$

De estas expresiones se ve que los campos de una onda plana no tienen componentes sobre la dirección de propagación. Se dice que son campos transversales.

En todo punto del espacio y en todo momento los campos se hallan sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación.

## Relación entre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell imponen relaciones entre los campos. Por ejemplo, si aplicamos la ley de Faraday:  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$

Dado que los campos dependen sólo de  $z$  y  $t$  y no existe componente según  $z$ :

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\mu_0 \left( \frac{\partial H_x}{\partial t} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \hat{\mathbf{y}} \right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{cases}$$

Cada componente de los campos de una onda plana debe tener la forma  $f(z \mp ct)$ , de modo

que, tomando:  $u = z \mp ct \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d}{du}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \mp c \frac{d}{du}$

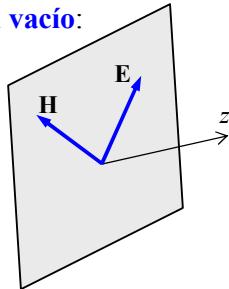
y entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} &\Rightarrow \frac{dE_y}{du} = \mp c \mu_0 \frac{dH_x}{du} \Rightarrow H_x = \mp \frac{1}{\eta_0} E_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{dE_x}{du} = \pm c \mu_0 \frac{dH_y}{du} \Rightarrow H_y = \pm \frac{1}{\eta_0} E_x \end{aligned}$$

donde  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ . Estas ecuaciones se pueden reescribir en forma vectorial:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0}$$

$\eta_0$  es una magnitud que tiene dimensiones de impedancia y se denomina **impedancia intrínseca del vacío**:



En la ecuación que relaciona los campos, el signo (+) del doble signo corresponde a una onda progresiva. Se observa que el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y ambos resultan perpendiculares a la dirección de propagación. Los tres vectores forman así un triángulo.

**Las relaciones halladas (de transversabilidad y entre los campos) son válidas para cualquier forma de onda plana.**

**Ejemplo 8.1:** Una onda plana se propaga en el vacío en la dirección y sentido de +z. En  $t = 0$  el campo eléctrico vale:  $E_x(0, t) = \frac{a^2 E_0}{a^2 + c^2 t^2}$  donde  $E_0$  y  $a$  son constantes. Si los campos no alteran su dirección en la propagación, escriba la expresión de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . ¿Cumplen estos campos las ecuaciones de Maxwell?

Se trata de una onda plana progresiva, de modo que debe tener la forma  $f(z - ct)$ . Por lo tanto, la expresión del campo eléctrico (que se propaga paralelo a sí mismo) es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2 E_0 \hat{\mathbf{x}}}{a^2 + (z - ct)^2}$$

De aquí puede calcularse fácilmente el campo magnético como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{a^2 E_0 / \eta_0 \hat{\mathbf{y}}}{a^2 + (z - ct)^2}$$

Como estos campos tienen la forma de la solución de la ecuación de ondas, que surge de las ecuaciones de Maxwell para un recinto vacío sin fuentes de campo, se ve que deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

### Vector de Poynting y densidad de energía

El vector de Poynting de una onda plana en el vacío es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \left( \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \right) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}}$$

donde el signo (+) vale para la onda progresiva y el signo (-) para la onda regresiva.

Este resultado es válido cualquiera sea la forma de onda de la onda plana.

La densidad de energía de una onda plana en el vacío puede escribirse:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \bullet \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \bullet \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 H^2(\mathbf{r}, t)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0^2} \right] = \frac{1}{2} [\epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)] = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

y finalmente:

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t)$$

Se observa que la contribución del campo eléctrico y la contribución del campo magnético son iguales. La energía está "equipartida" entre ambos campos. Además, podemos ver que:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\eta_0 \epsilon_0} = \pm c \hat{\mathbf{z}}$$

Esta es la llamada **velocidad de la energía**, que describe la velocidad con que el frente de onda (el plano frontera entre la región donde hay campo y la región donde no hay campo) transporta la energía.

## Ondas monocromáticas o armónicas

Como en el caso de ondas en líneas de transmisión, un caso particular de funciones que satisfacen la ecuación de ondas son las funciones armónicas:

$$g(z \mp ct) = g_0 \sin(\omega t \mp kz + \varphi_0), \quad g_0 \cos(\omega t \mp kz + \varphi_0)$$

donde  $g_0$  es la amplitud y  $\varphi_0$  un ángulo de fase. Estas son funciones de una única **frecuencia**  $f = \omega / 2\pi$ . Se define el **número de onda**  $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$  en función de la **longitud de onda**  $\lambda$ . Estas son funciones de onda **periódicas**, con **periodo**  $T = \lambda / c = 1 / f$ .

Debido a que cualquier función de cuadrado integrable es representable mediante una **integral de Fourier**:

$$g(z, t) = \int_0^{\infty} G_{\omega}(z) e^{i(\omega t - kz)} d\omega \quad (\text{onda progresiva})$$

(o una **serie de Fourier** si la función es periódica) y esta representación es una superposición de funciones armónicas, es posible analizar las propiedades físicas generales de las ondas electromagnéticas usando ondas de una única frecuencia u ondas monocromáticas.

Es común utilizar la representación fasorial de las ondas armónicas:

$$g(z \mp ct) = g_0 \cos(\omega t \mp kz + \varphi_0) = \Re \{ \tilde{g}_0 e^{i(\omega t \mp kz)} \} = |g_0| \Re \{ e^{i(\omega t \mp kz + \varphi_0)} \}$$

donde hemos usado el complejo  $\tilde{g}_0 = g_0 e^{i\varphi_0}$ . En muchas ocasiones sobreentenderemos el signo de “parte real”, cuando realicemos operaciones lineales (p.ej., suma algebraica, derivación, integración, etc.). En tal caso es indiferente operar con los números complejos y tomar la parte real al final u operar desde el principio con las partes reales.

**Sin embargo, si la operación a realizar no es lineal (producto, cociente, potencia, etc.) es imprescindible operar desde el principio con las “partes reales”, que representan las cantidades físicas verdaderas.**

La ecuación de ondas de D'Alembert se convierte en la **ecuación de Helmholtz** en el caso de ondas armónicas:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{con} \quad k = \omega / c$$

y lo mismo ocurre con la ecuación de onda para el campo magnético.

En coordenadas cartesianas esta ecuación vectorial se convierte en tres ecuaciones escalares, una para cada componente del campo.

### Vector de onda

La expresión fasorial de la onda monocromática:  $g(z, t) = \tilde{g}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

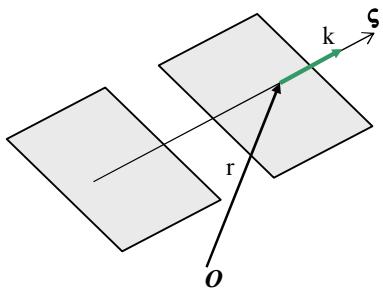
representa una onda plana monocromática progresiva que se propaga según  $+z$ . Sin embargo, en muchas ocasiones es necesario describir la propagación de una onda plana en una dirección cualquiera del espacio  $\zeta$ . Para ello se usa el **vector de onda** o **vector de propagación**  $\mathbf{k}$ :

$$g(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \tilde{g}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \} \quad \text{con} \quad \mathbf{k} = k \hat{\zeta}$$

que es un vector cuya dirección y sentido es el de la propagación y cuyo módulo es  $\omega/c$ .

Una onda monocromática plana que se propaga según el vector de onda  $\mathbf{k}$  tiene campos sobre planos transversales a  $\mathbf{k}$ . Si suponemos una onda linealmente polarizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \Re \left\{ \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\zeta} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\omega \mu} = \Re \left\{ \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \end{aligned}$$



$$\text{con } \hat{\mathbf{h}}_0 = \hat{\zeta} \times \hat{\mathbf{e}}_0$$

En esta representación fasorial, donde cada campo está descripto por una **amplitud** (p.ej.,  $\tilde{E}_0$ ) y una **fase** ( $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ), podemos definir una onda plana como **aquella cuyas superficies de fase constante son planos**. Se ve que las superficies de fase constante están dadas por la expresión:  $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \text{cte}$ , que es la ecuación de una familia de planos perpendiculares al vector de onda, y que se mueven en la dirección y sentido de  $\mathbf{k}$  a la velocidad  $c$ .

Las magnitudes asociadas a la energía de la onda son:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \hat{\zeta} \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) & \text{con } \tilde{E}_0 = |E_0| e^{i\varphi_0} \\ u(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 |E|^2 = \varepsilon_0 |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) \end{aligned}$$

### Ecuaciones de onda en forma fasorial

Vamos a analizar la forma que adoptan las ecuaciones de onda en el caso de campos monocromáticos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$$

En un recinto vacío y libre de fuentes las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - i\omega \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de ondas de D'Alembert para el campo eléctrico resulta:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0 \text{ con } k = \omega/c$$

que es una ecuación de Helmholtz. Se obtiene una ecuación idéntica para H.

Para ondas planas linealmente polarizadas:  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{E}(z) \hat{\mathbf{x}}$   $\Rightarrow \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = \frac{d^2 \tilde{E}}{dz^2} \hat{\mathbf{x}}$

y la ecuación de Helmholtz queda:  $\frac{d^2 \tilde{E}}{dz^2} + k^2 \tilde{E} = 0$  cuya solución es:  $\tilde{E}(z) = \tilde{E}_0 e^{\pm ikz}$

de modo que queda una solución fasorial:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} + \tilde{E}_{02} e^{i(\omega t + kz)}$  que consiste en la superposición de una onda progresiva y una regresiva. Se obtiene una solución idéntica para el

campo magnético:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{E}_{01}}{\eta_0} e^{i(\omega t - kz)} - \frac{\tilde{E}_{02}}{\eta_0} e^{i(\omega t + kz)}$

donde se debe notar el signo negativo de la componente regresiva. Este signo lleva a que el vector de Poynting de la onda regresiva apunte en el sentido negativo de  $z$ .

### Vector de Poynting y densidad de energía

Consideremos una onda plana linealmente polarizada progresiva:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)}$$

Para calcular el vector de Poynting, como se trata de una operación no lineal, hay que expresar los campos en su forma verdadera (la forma real):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz + \psi_0) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - kz + \psi_0)$$

donde  $E_0$  es el módulo y  $\psi_0$  es el ángulo de fase del fasor  $\tilde{E}_0$ .

Entonces: 
$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0)$$

**Nótese que multiplicando ingenuamente las formas fasoriales se obtendría:**

$$\frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} e^{i2(\omega t - kz + \psi_0)} = \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \hat{\mathbf{z}} \cos[2(\omega t - kz + \psi_0)]$$

**que es una cantidad completamente diferente (y errónea).**

## Valores medios

La ecuación hallada da el **valor instantáneo** del vector de Poynting. En la mayoría de los casos la magnitud significativa es su **valor medio** o **promedio temporal**, definido como:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) dt \quad \text{para } \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) \text{ periódica de periodo } T. \text{ Tenemos así:} \\ \langle \mathbf{N} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{\eta_0} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) dt = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0} \int_{-\pi z + \psi_0}^{\pi z + \psi_0} \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) d(\omega t - kz + \psi_0) \\ &= \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0} \int_{-\pi z + \psi_0}^{\pi z + \psi_0} \cos^2 u du = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\pi\eta_0} \int_{-\pi z + \psi_0}^{\pi z + \psi_0} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0} \end{aligned}$$

donde hemos usado la relación  $\omega T = 2\pi$ . La integral vale  $\pi$ .

Podemos usar también la expresión del **APÉNDICE 1** para hallar el valor medio del vector de Poynting en notación fasorial:  $\langle f g \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(f \tilde{g}^*)$

Tenemos así:  $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{E}}_0 \times \tilde{\mathbf{H}}_0^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\tilde{\mathbf{E}}_0 \frac{\tilde{E}_0^*}{\eta_0}\right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0}$  igual que antes.

El promedio temporal del vector de Poynting de una onda representa la potencia media que la onda transporta por unidad de área transversal a la propagación, y se conoce como **intensidad** de la radiación en las aplicaciones ópticas.

Calculamos ahora la densidad de energía instantánea del campo electromagnético de una onda plana, operando con las partes reales:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \mu_0 \frac{E^2}{\eta_0} \right) = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \psi_0)$$

Tomando el valor medio temporal, como en el caso del vector de Poynting:

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz + \psi_0) \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

## Ondas no armónicas

En general, los campos de una onda plana linealmente polarizada en el vacío pueden representarse mediante integrales de Fourier:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}$$

que son las generalizaciones de la representación en serie de Fourier de un campo periódico. Para el análisis siguiente vamos a trabajar con **funciones periódicas**, aunque las conclusiones que hallemos se pueden extender a casos no periódicos.

Entonces, representamos los campos de periodo  $T$  como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \quad \text{con } \omega = 2\pi/T$$

Estas representaciones tienen periodo  $T$ , como puede verse fácilmente comprobando que:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t+T) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Queremos calcular los valores medios del vector de Poynting y la densidad de energía en este caso. Para una onda progresiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\eta_0} \left[ \Re e \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \right\} \right]^2 \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{4\eta_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} \right]^2 \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\eta_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) e^{in\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) e^{-in\omega t} \right] \hat{\mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{4\eta_0} \left[ \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) e^{i(n+m)\omega t} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-i(n+m)\omega t} + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{i(n-m)\omega t} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

El valor medio del vector de Poynting es entonces:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{N}(\mathbf{r}, t) dt \\ &= \frac{\hat{\mathbf{z}}}{4\eta_0 T} \int_0^T \left[ \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) e^{i(n+m)\omega t} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{-i(n+m)\omega t} + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) e^{i(n-m)\omega t} \right] dt \\ &= \frac{\hat{\mathbf{z}}}{4\eta_0 T} \left[ \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m(z) \int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n^*(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) \int_0^T e^{-i(n+m)\omega t} dt + 2 \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\infty} \tilde{\mathbf{E}}_n(z) \tilde{\mathbf{E}}_m^*(z) \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt \right] \\ &\quad \int_0^T e^{\pm i(n+m)\omega t} dt = 0 \end{aligned}$$

Pero por la ortogonalidad de las funciones  $e^{i\omega t}$ :

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \begin{cases} T & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

y nos queda:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_n(z)|^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0}$$

de donde se ve que el promedio temporal del vector de Poynting es la suma de los promedios temporales de los vectores de Poynting para cada armónica. Entonces podemos decir que, desde el punto de vista de la energía, las distintas armónicas están desacopladas, es decir, no hay términos que involucren intercambio de energía entre una armónica y otra.

Lo mismo ocurre con la densidad de energía:  $\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 |E_n(z)|^2}{2}$

Estos resultados se pueden extender al caso de una representación integral de Fourier<sup>3</sup> para una función no periódica.

**Ejemplo 8.2:** El campo eléctrico de una onda plana en el vacío es :

$$E(r, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} [\cos(\omega t - kz) + (1/3) \cos 3(\omega t - kz)] \quad \text{con } k = \omega/c$$

<sup>3</sup> Esta propiedad surge de un teorema matemático general vinculado con la representación de Fourier, que es el teorema de Parseval:  $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$

Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires – www.fi.uba.ar

Halle el campo magnético, el valor promedio del vector de Poynting y la densidad de energía. Se trata de una superposición de dos armónicas. El campo magnético asociado es:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) / \eta_0 = (E_0 / \eta_0) \hat{\mathbf{y}} [\cos(\omega t - kz) + (1/3) \cos 3(\omega t - kz)]$$

El vector de Poynting **instantáneo** es:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[ \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{9} \cos^2 3(\omega t - kz) + \frac{2}{3} \cos(\omega t - kz) \cos 3(\omega t - kz) \right] \text{ El}$$

vector de Poynting es una función periódica del tiempo, de periodo  $T = 2\pi / \omega$  (verificarlo). El **promedio temporal** del vector de Poynting es entonces:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle &= \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[ \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle + \frac{1}{9} \langle \cos^2 3(\omega t - kz) \rangle + \frac{2}{3} \langle \cos(\omega t - kz) \cos 3(\omega t - kz) \rangle \right] \\ &= \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} 0 \right] = \frac{5E_0^2}{9\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Se ve que el término que involucra el producto de las funciones de distinta frecuencia es nulo, como puede probarse en general a partir de los resultados de esta sección. El vector promedio de Poynting total es la suma de los vectores de Poynting medios para cada armónica.

Lo mismo ocurre para la densidad de energía:

$$\frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = c \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow u(\mathbf{r}, t) = \frac{N(\mathbf{r}, t)}{c} \Rightarrow \langle u(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\langle N(\mathbf{r}) \rangle}{c} = \frac{5E_0^2}{9\eta_0 c} = \frac{5}{9} \epsilon_0 E_0^2$$

En este caso no podemos calcular los valores medios usando las propiedades de la notación fasorial descripta en el APENDICE 1 porque la onda **no es armónica o monocromática**.

---

## Ondas esféricas elementales

En las ondas esféricas elementales los campos dependen solamente de la distancia a un punto de referencia, que se toma como origen de coordenadas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(r,t) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(r,t)$$

La ecuación **escalar** de ondas en coordenadas esféricas para este tipo de dependencia es:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Para hallar la solución de esta ecuación de ondas, definimos:  $f(r,t) = g(r,t)/r$  de donde:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r(\partial g/\partial r) - g}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} - g \right) = \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$$

$$\text{y la ecuación diferencial queda: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

de donde se ve que, desde el punto de vista matemático formal, la ecuación para  $g$  es una ecuación de ondas planas, de forma que tiene la solución:

$$g(r,t) = g(r \mp ct) \Rightarrow f(r,t) = \frac{g(r,t)}{r} = \frac{g(r \mp ct)}{r}$$

El doble signo en la función del numerador define, como en el caso de las ondas planas, el sentido de la propagación. El signo (-) corresponde a una onda “**progresiva**” que se propaga en el **sentido creciente** de  $r$ , mientras que el signo (+) corresponde a una onda “**regresiva**” que se propaga en el **sentido decreciente** de  $r$ .

## Ondas monocromáticas o armónicas

De igual manera que en las ondas planas, el numerador de una onda esférica elemental  $f(r,t) = g(r \mp ct)/r$  puede expresarse mediante una representación de Fourier, una superposición de ondas armónicas del tipo:  $f(r,t) = \tilde{f}_0 e^{i(\omega \mp kr)}/r$  con  $k = \omega/c$ . Todas las propiedades halladas para las ondas armónicas planas se aplican también a estas ondas esféricas elementales armónicas.

## Condiciones de transversabilidad

Para analizar las condiciones de transversabilidad de los campos de una onda esférica es necesario hallar las soluciones de la ecuación de onda **vectorial**. A diferencia del caso cartesiano, donde los versores son constantes y la ecuación de onda vectorial se reduce a tres ecuaciones de onda escalares sobre las componentes de los campos, en coordenadas esféricas esto no ocurre y es necesario buscar otras relaciones, si existen, entre las soluciones de la ecuación de onda escalar y las soluciones de la ecuación de onda vectorial. Estas relaciones fueron halladas por Mie y Debye<sup>4</sup> en estudios de dispersión luminosa por partículas.

Sea  $f_s(\mathbf{r},t) = f_s(\mathbf{r})e^{i\omega t}$  la solución de la ecuación de ondas para ondas armónicas, de manera que  $f_s(\mathbf{r})$  es solución de la correspondiente ecuación de Helmholtz. Entonces definimos los

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \nabla \times [\mathbf{r} f_s(\mathbf{r},t)] \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

Observamos que ambos campos son solenoidales ( $\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot \mathbf{N} = 0$ ) por ser proporcionales a un rotor, y están ligados entre sí a través del rotor. Por lo tanto estas funciones son candidatas a representar los campos eléctrico y magnético en el vacío, que son solenoidales y están ligados entre sí a través del rotor. Puede demostrarse que  $\mathbf{M}$  satisface la ecuación vectorial de Helmholtz.

<sup>4</sup> G.Mie, Ann.Physik,25,377,1908 y P.Debye, Ann.Physik,30,57,1909. Para una presentación actual, ver C.F.Bohren y D.R.Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles", Wiley, New York, 1983, pp. 83-84.

Además como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times [\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t)] = -\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

se ve que  $\mathbf{M}$  es normal a  $\mathbf{r}$  y de la ecuación que define a  $\mathbf{N}$  este campo también resulta normal a  $\mathbf{r}$ . Por lo tanto, en el vacío, las soluciones a la ecuación vectorial de ondas **son campos transversales a la dirección de propagación** en el caso de las ondas esféricas elementales.

### Impedancia intrínseca

Las ecuaciones del rotor ligan entre sí estas componentes transversales. Consideremos nuevamente las soluciones generales de ondas esféricas elementales **progresivas**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}(r - ct)}{r} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{h}(r - ct)}{r}$$

Tomamos la ley de Faraday:  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  y tenemos así:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & r E_\theta & r \sin \theta E_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ -r \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta E_\phi) + r \sin \theta \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ -(r E_\phi) \hat{\theta} + (r E_\theta) \hat{\phi} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( -e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (H_\theta \hat{\theta} + H_\phi \hat{\phi}) = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$$

y de la ley de Faraday:  $\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$

entonces:  $\frac{\partial}{\partial r} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi})$

Definimos la variable  $u = r - ct$  de donde:  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{d}{du}$   $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{d}{du}$  y entonces:

$$\frac{d}{du} (-e_\phi \hat{\theta} + e_\theta \hat{\phi}) = \mu c \frac{d}{du} (h_\theta \hat{\theta} + h_\phi \hat{\phi}) \Rightarrow \begin{cases} e_\phi = -\mu c h_\theta = -\eta h_\theta \\ e_\theta = \mu c h_\phi = \eta h_\phi \end{cases}$$

donde  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  es la impedancia intrínseca del vacío. Este par de ecuaciones que ligan a las componentes transversales de los campos entre sí se pueden resumir en las expresiones:

$$\mathbf{E}_T = -\eta_0 (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_T) \quad \mathbf{H}_T = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_T}{\eta_0}$$

En general,  $\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$ , y el campo eléctrico no es solenoidal. En tal caso se requiere otro tipo de solución, que **no** produce ondas transversales. Esta solución es, en coordenadas esféricas:  $\mathbf{L}(\mathbf{r}, t) = \nabla f(\mathbf{r}, t)$  donde  $f(\mathbf{r}, t)$  es la solución de la ecuación escalar de Helmholtz. En este caso el campo eléctrico tiene una componente longitudinal en la dirección de propagación.

### Ondas cilíndricas elementales

En las ondas cilíndricas elementales los campos dependen solamente de la distancia a un eje de referencia, que se toma como eje z de un sistema de coordenadas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\rho, t) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\rho, t)$$

La ecuación **escalar** de ondas en coordenadas cilíndricas para este tipo de dependencia es:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

A diferencia de las ondas planas no se puede reducir esta ecuación diferencial a una forma analíticamente simple o general. Sin embargo, es posible hallar las soluciones para ondas armónicas o monocromáticas, a partir de las cuales se puede hallar la solución general mediante la representación de Fourier.

Tomamos así:  $f(\rho, t) = f_s(\rho) e^{i\omega t}$  y nos queda la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df_s}{d\rho} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} f_s = 0 \Rightarrow \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df_s}{d\rho} \right) + k^2 \rho^2 f_s = 0 \quad \text{con } k = \omega/c$$

Esta es la **ecuación de Bessel**, que vimos en el Capítulo 7, para  $n = 0$ . Por lo tanto, la solución

es: 
$$f_s(\rho) = \begin{cases} AJ_0(k\rho) + BY_0(k\rho) & k \neq 0 \\ A'\ln(\rho) + B' & k = 0 \end{cases}$$

donde  $J_0(k\rho)$  es la **función de Bessel** de orden cero (regular en el origen) y  $Y_0(k\rho)$  es la **función de Neumann** de orden cero (singular en el origen). Estas funciones son linealmente independientes. Para describir situaciones de propagación ondulatoria es conveniente usar otro par de funciones linealmente independientes:

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iY_0(x) \quad H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x)$$

que son las llamadas **funciones de Hankel** de primera y segunda especie.

Finalmente, la solución armónica para las ondas cilíndricas elementales es:

$$f(\rho, t) = [A H_0^{(1)}(k\rho) + B H_0^{(2)}(k\rho)] e^{i\omega t}$$

Para puntos lejanos ( $\rho \rightarrow \infty$ ), las funciones de Bessel tienden a (pág. 7-5):

$$x \rightarrow \infty: \quad J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad Y_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

de modo que las funciones de Hankel tienden a:

$$x \rightarrow \infty: \quad H_0^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi}{4})} \quad H_0^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi}{4})}$$

y entonces:  $x \rightarrow \infty: \quad f(\rho, t) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \left[ A e^{i(\omega t + k\rho - \frac{\pi}{4})} + B e^{i(\omega t - k\rho + \frac{\pi}{4})} \right]$

que se ve como la superposición de una onda **progresiva** (que se propaga en el sentido **creciente** de  $\rho$ ) y una onda **regresiva** (que se propaga en el sentido **decreciente** de  $\rho$ ).

En forma similar a las ondas esféricas es posible hallar soluciones a la ecuación **vectorial** de onda en función de las soluciones a la ecuación escalar. En la propagación de ondas en el vacío pueden hallarse soluciones de ondas **transversales**.

El cálculo de la **impedancia intrínseca** para la propagación de ondas transversales elementales se complica por la presencia de las funciones de Bessel, pero se obtienen las mismas relaciones que en los casos cartesiano plano y esférico elemental.

### Superposición de ondas

Cuando hay más de una fuente de ondas electromagnéticas presentes simultáneamente se dan dos situaciones:

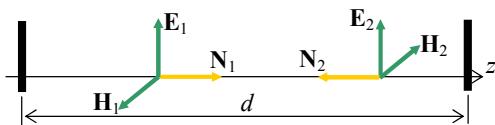
- las fases de las fuentes **están correlacionadas en el tiempo**.

En este caso se dice que las fuentes son **coherentes**. Los campos individuales de cada onda se superponen linealmente para dar un campo resultante. Esta superposición introduce diferencias de fase debido a la relación de fase original de las fuentes y la posición del punto de observación, que llevan a una redistribución de la energía en el espacio que llamamos **interferencia**. Un ejemplo de fuentes coherentes es un conjunto de antenas alimentadas desde una misma fuente.

- las fases de las fuentes **no están correlacionadas en el tiempo**.

En este caso se dice que las fuentes son **incoherentes**. Se superponen los **intensidades** (vectores de Poynting) individuales de las ondas para dar una intensidad resultante. Como las intensidades no contienen relaciones de fase, no se produce interferencia. Un ejemplo típico de fuentes incoherentes son las fuentes extensas de luz como un tubo fluorescente.

**Ejemplo 8.3:** Analizar el comportamiento del campo emitido por dos fuentes de ondas planas



linealmente polarizadas y monocromáticas de igual frecuencia que irradian **coherentemente** en la dirección  $z$ .

Los campos emitidos por cada fuente se ilustran en la figura. Tomamos un sistema coordenado con su

eje  $x$  vertical y tenemos:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i[\omega t + k(z-d)]} \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i[\omega t + k(z-d)]} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \cos^2[\omega t + k(z-d)]$$

donde se ha supuesto por simplicidad matemática que  $E_0$  es real. Obsérvense los signos de los vectores y su relación con el sentido de la propagación. La fuente de la izquierda genera una onda progresiva y la de la derecha (ubicada en  $z = d$ ) una onda regresiva. Como la emisión de ondas es coherente, se suman los campos y se obtiene para el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \left[ e^{-ikz} + e^{ik(z-d)} \right] = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \left[ e^{-i\left(kz - \frac{kd}{2}\right)} + e^{i\left(kz - \frac{kd}{2}\right)} \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \cos\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

y análogamente para el campo magnético:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -2i \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} e^{i\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)} \sin\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

Si tomamos las partes reales de estas expresiones fasoriales para obtener la forma verdadera de los campos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 2E_0 \hat{\mathbf{x}} \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \cos\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{2E_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \sin\left(kz - \frac{kd}{2}\right)$$

Se ve que existen puntos donde los campos son siempre nulos:

$$k\left(z_n - \frac{d}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{máximo} \Rightarrow z_n = \frac{d}{2} + (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k\left(z_m - \frac{d}{2}\right) = m\pi \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{máximo} \Rightarrow z_m = \frac{d}{2} + m\frac{\lambda}{2}$$

En los puntos en que el campo eléctrico es siempre nulo, el campo magnético oscila con amplitud máxima, y viceversa. Hay un desfasaje espacial de  $\pi/2$ . Se dice que los campos están en **cuadratura espacial**. Además existe un desfasaje temporal de  $\pi/2$ . Se dice que los campos están en **cuadratura temporal**. Estas son características de una **onda estacionaria**.

Para analizar el comportamiento energético, calculamos el vector de Poynting instantáneo:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \sin\left[2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)\right] \sin\left[2\left(kz - \frac{kd}{2}\right)\right]$$

y su valor medio:  $\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{E_0^2}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \left\langle \sin\left[2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right)\right] \right\rangle \sin\left[2\left(kz - \frac{kd}{2}\right)\right] = 0$

### No hay flujo de potencia en la onda estacionaria

La densidad instantánea de energía es:

$$u(r, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ 4\epsilon_0 E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \cos^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) + 4\mu_0 \frac{E_0^2}{\eta_0^2} \sin^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \sin^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right]$$

$$= 2\epsilon_0 E_0^2 \left[ \cos^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \cos^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \sin^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right]$$

y su valor medio:

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = 2\epsilon_0 E_0^2 \left( \left\langle \cos^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \right\rangle \cos^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) + \left\langle \sin^2\left(\omega t - \frac{kd}{2}\right) \right\rangle \sin^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right)$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 \left( \cos^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) + \sin^2\left(kz - \frac{kd}{2}\right) \right) = \epsilon_0 E_0^2$$

y se observa que la distribución de la energía que transporta la onda es homogénea como la de la onda plana sin interferencia.

Sin embargo, hay situaciones donde la interferencia produce una redistribución de la energía en el espacio, como en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.4:** Analizar el comportamiento del campo lejano emitido en el vacío por dos fuentes de ondas **esféricas** linealmente polarizadas y monocromáticas de igual frecuencia que irradian coherentemente.

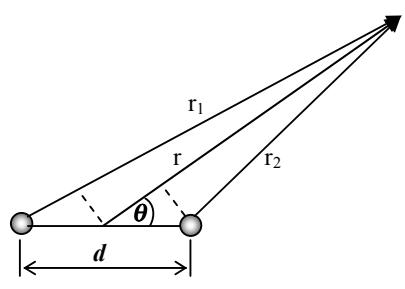
El campo creado en el vacío por una fuente esférica situada en el origen de coordenadas puede escribirse, en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{r} \hat{\theta} e^{i(\omega t - kr)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0 r} \hat{\phi} e^{i(\omega t - kr)}$$

Si el punto de observación es lejano, podemos aproximar suponiendo que los campos emitidos por ambas fuentes son colineales, y entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \approx E_0 \hat{\theta} e^{i\omega t} \left[ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{E_0}{\eta_0} \hat{\phi} e^{i\omega t} \left[ \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right]$$



De acuerdo a la figura, para puntos lejanos ( $r \gg d$ ):  $r_{1,2} \approx r \pm \frac{d}{2} \cos \theta$

Estas distancias entran en la expresión de los campos de dos formas: como un **factor de amplitud** en el denominador y como un **factor de fase**. Podemos simplificar aún más:  $r_{1,2} \approx r$  en el factor de amplitud, pero no podemos hacerlo en el factor de fase, porque aquí la diferencia de fase da lugar a **interferencia**, que puede ser destructiva y anular el campo. Por lo tanto aproximaremos a **orden cero** ( $r_{1,2} \approx r$ ) en la amplitud y a **orden uno** en la fase:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{E_0}{r} \hat{\theta} e^{i(\omega t - kr)} \left[ e^{-ik\frac{d}{2} \cos \theta} + e^{ik\frac{d}{2} \cos \theta} \right] = \frac{2E_0}{r} \hat{\theta} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(k \frac{d}{2} \cos \theta\right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{2E_0}{\eta_0 r} \hat{\phi} e^{i(\omega t - kr)} \cos\left(k \frac{d}{2} \cos \theta\right)$$

Podemos calcular el promedio del vector de Poynting ya que se trata de una onda armónica:

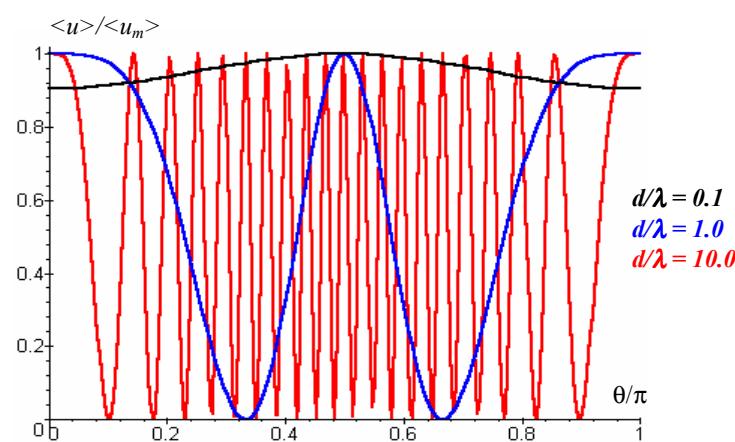
$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re e (\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) \approx \frac{2E_0^2}{\eta_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cos^2\left(k \frac{d}{2} \cos \theta\right)$$

y la densidad promedio de energía:

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\langle N(\mathbf{r}) \rangle}{c} \approx \frac{2E_0^2}{\eta_0 c r^2} \cos^2\left(k \frac{d}{2} \cos \theta\right) = \frac{2\epsilon_0 E_0^2}{r^2} \cos^2\left(k \frac{d}{2} \cos \theta\right)$$

Se ve que tanto la densidad media de energía como la densidad de flujo de potencia no son isótropas, ya que dependen de la dirección de observación  $\theta$ . Por otra parte, como  $k = 2\pi/\lambda$  podemos escribir:

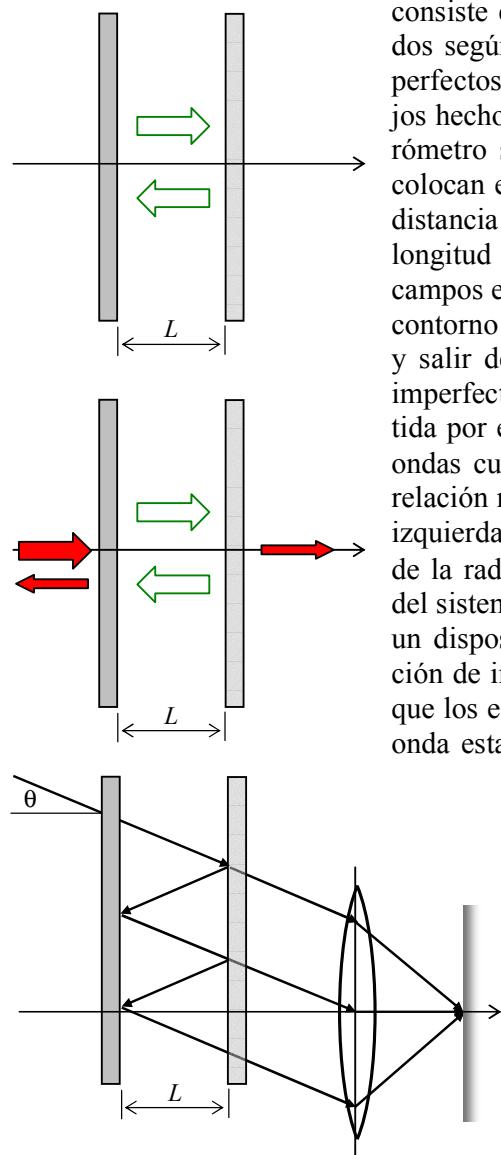
$\langle u(\mathbf{r}) \rangle \approx \frac{2\epsilon_0 E_0^2}{r^2} \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)$  y se observa que la anisotropía energética también es función de la separación entre las fuentes, comparada con la longitud de onda de la radiación. Si graficamos para una distancia dada  $r$  la densidad de energía en función de  $\theta$  para distintos valores de  $d/\lambda$  nos queda la figura, donde se nota claramente la anisotropía.



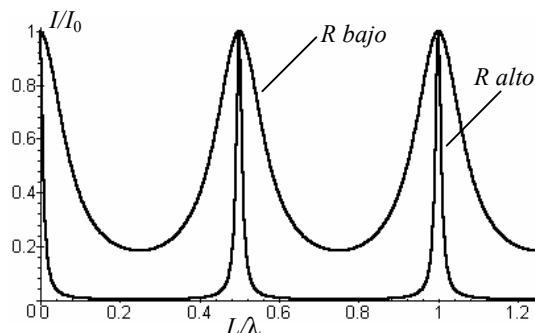
## Interferometría

Un dispositivo que utiliza la interferencia de ondas para realizar mediciones de alguna naturaleza es un **interferómetro**. Hasta mediados del siglo veinte, la interferometría se realizaba exclusivamente con ondas de luz, pero luego se han utilizado ondas electromagnéticas de múltiples frecuencias para diversos propósitos, como veremos al final de esta sección. Aunque el modelo de interferómetro más conocido es el de **Michelson**, conectado con la búsqueda de las propiedades del “éter luminífero” y la historia de la teoría de la relatividad, el sistema más simple es el modelo de **Fabry-Perot**, que consiste (en forma simplificada) en un par de espejos paralelos de alta reflectividad. Cuando uno de los espejos es móvil, modificando, como vemos más abajo, la longitud de onda de la radiación a usar, se dice que el aparato es un interferómetro, mientras que cuando la distancia entre los espejos es fija, pero se dispone de un mecanismo para asegurar el paralelismo de los espejos, se dice que el aparato es un **etalon**. Este tipo de aparato está ligado al desarrollo y construcción de la mayoría de los láseres, incluidos los láseres semiconductores, que desempeñan un rol fundamental en las comunicaciones ópticas. En el caso ideal, la radiación

consiste en ondas planas que viajan entre los dos planos espejados según una dirección perpendicular a ellos. Los espejos son perfectos (es decir, la reflexión es total). Esto se logra con espejos hechos de un material conductor perfecto. Dentro del interferómetro se producen ondas estacionarias porque los espejos se colocan en los nodos de la onda de campo eléctrico, tomando la distancia entre los espejos como un múltiplo entero de media longitud de onda:  $L = N\lambda$ . Si esta relación no se cumple, los campos en el interior del aparato no satisfacen las condiciones de contorno y no pueden existir. Para que la radiación pueda entrar y salir del aparato en una aplicación práctica, se usan espejos imperfectos, de modo que tenemos radiación reflejada y transmitida por el aparato. Dentro del interferómetro se producen ahora ondas cuasi-estacionarias para la condición:  $L = N\lambda$ . Si esta relación no se cumple, la mayor parte de la energía incidente a la izquierda se refleja. En la figura se muestra una disposición donde la radiación incide formando un ángulo  $\theta$  con el eje óptico del sistema. La radiación que sale se enfoca sobre una pantalla (o un dispositivo de fotodetección) mediante una lente. La condición de interferencia constructiva es ahora  $2L\cos\theta = N\lambda$ . Dado que los espejos no son perfectamente reflectores, la condición de onda estacionaria no se cumple exactamente, como tampoco se cumple si la longitud de onda se varía. Si se grafica la intensidad de la radiación transmitida en función de la longitud de onda se observa una curva continua con picos en las longitudes de onda de resonancia. El ancho de estos picos depende de la reflectividad  $R$  de los espejos. Cuanto mayor es la reflectividad, el sistema se acerca más al caso ideal y los picos tienden a deltas centradas en las posiciones de resonancia, como se muestra en la gráfica de la figura. Las ecuaciones que describen esta gráfica son<sup>5</sup>:



<sup>5</sup> Ver, por ejemplo, M. Young, “Optics and Lasers”, 4<sup>th</sup>.Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1992, p.136-138.

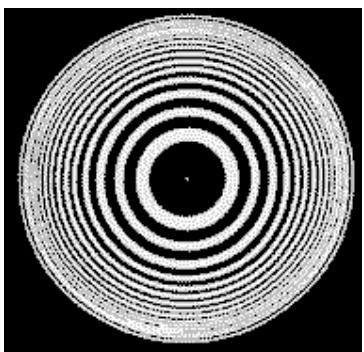


$$I = \frac{I_0}{1 + F \operatorname{sen}^2(\delta/2)}$$

$$\delta = 4\pi \frac{L}{\lambda} \cos \theta$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$
 es la **fineza** o resolución del interferómetro,

que es una medida de la habilidad del aparato para resolver o distinguir entre longitudes de onda cercanas. Cuanto mayor es la reflectividad de los espejos, mayor será el cambio en la intensidad transmitida para un cambio en la longitud de onda (o la frecuencia) de la onda incidente. Otra figura de mérito usada en el interferómetro es el **rangopectral libre** (FSR), que se define como la separación en longitud de onda entre dos máximos sucesivos, y vale:  $FSR = \frac{2d \cos \theta}{N^2}$ . Este parámetro indica el “ancho de banda” del aparato, ya que si se varía la longitud de onda más allá de la distancia entre máximos sucesivos se repite la respuesta y no es posible distinguir entre longitudes de onda separadas más allá de este rango.



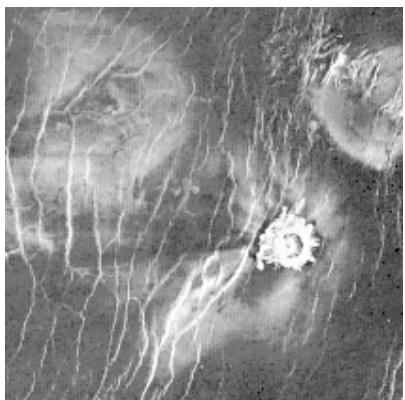
Si ahora fijamos la longitud de onda de la radiación incidente y variaremos el ángulo de incidencia  $\theta$ , habrá un conjunto de ángulos diferentes para los cuales se satisface la ecuación  $2L \cos \theta = N\lambda$  para sucesivos valores de  $N$ . Dado que esto ocurre para cualquier orientación  $\phi$  alrededor del eje normal al etalon, los máximos de transmisión toman el aspecto de círculos concéntricos, como se muestra en la figura.

Consideremos una fuente luminosa que irradia en un rango dado de longitudes de onda. Las figuras de interferencia que produce un interferómetro de cualquier tipo (que varían en el dominio de las longitudes de onda o de la frecuencia) son directamente proporcionales a la transformada de Fourier de la fuente luminosa. Por lo tanto, se pueden usar interferómetros para realizar imágenes de fuentes luminosas. Esta propiedad se usa en astronomía para obtener imágenes de objetos poco brillantes como planetas, dado que en el proceso de la interferencia se puede sumar en contrafase la luz de una estrella cercana para eliminar sus efectos.

También se usan técnicas interferométricas para medir longitudes o distancias con gran precisión, observando el corrimiento de las franjas de interferencia con la separación de los espejos, uno de los cuales se halla en el objeto cuya distancia se desea conocer.

En los últimos años ha crecido exponencialmente el uso de imágenes satelitales para obtener información sobre áreas de terreno. Muchos de estos sistemas utilizan técnicas de radar para registrar la altura topográfica de los accidentes geográficos o construcciones. El radar ilumina el área con ondas electromagnéticas (normalmente microondas) y registra la intensidad y tiempo de viaje de las señales reflejadas. La resolución del sistema está determinada, entre otros factores, por el tamaño de la apertura óptica de la antena receptora: cuanto mayor la apertura, mejor resolución.

Es posible obtener buena resolución para imágenes en el visible e infrarrojo, pero cuando se usan microondas se requieren tamaños de antena que son demasiado grandes para transportar y mantener estables. Por ejemplo, para obtener una resolución de  $100\text{ m}$  con un radar de  $\lambda = 5\text{ cm}$  desde una altura de  $800\text{ Km}$  requiere una apertura de unos  $400\text{ m}$  de largo. Sin embargo, a estas frecuencias existe la ventaja de poder “ver” el terreno aún en condiciones de nubosidad, niebla o



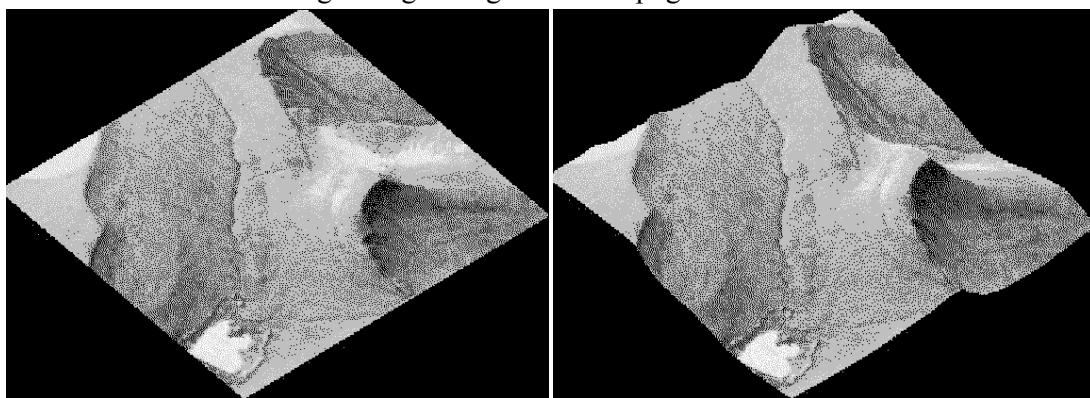
lluvia que impiden usar frecuencias ópticas. La imagen de la izquierda<sup>6</sup>, perteneciente a la NASA, es un área de 400 x 400 Km de la superficie de Venus obtenida en 1990 por el transbordador espacial Atlantis, usando la técnica SAR que describimos a continuación para evitar el eterno cielo nublado del planeta.

Sin embargo, si el satélite se mueve en su órbita, es posible combinar señales reflejadas a lo largo del camino de vuelo para crear artificialmente antenas receptoras de aperturas muy grandes. Este es el principio del **radar de apertura sintética (SAR – Synthetic Aperture Radar)**.

En la generación de imágenes por SAR, la información relevante es el tiempo de vuelo y la intensidad reflejada. Una combinación de estos dos parámetros permite deducir el tipo de objeto que se está iluminando y así obtener cartas “temáticas” (donde cada pixel representa un tipo de terreno, cultivo, mineral u objeto dado). Otras posibilidades son medir la polarización de las ondas reflejadas en función de la polarización de las incidentes (ver la siguiente sección sobre polarización). Se llaman **imágenes polarimétricas**. En la figura se muestra una imagen polarimétrica del pueblo de Feltwell, en el sudeste de Inglaterra.



Estas imágenes son planas. Para obtener la altura y poder crear imágenes 3D que reflejen además la topografía del terreno se usan técnicas interferométricas, capturando las ondas reflejadas mediante dos antenas separadas. En las figuras que siguen se muestra una imagen SAR normal a la izquierda y a la derecha un diagrama de relieve reconstruido a partir de dos imágenes cercanas. Nótese las sombras en la imagen original ligadas a la topografía.



### Speckle

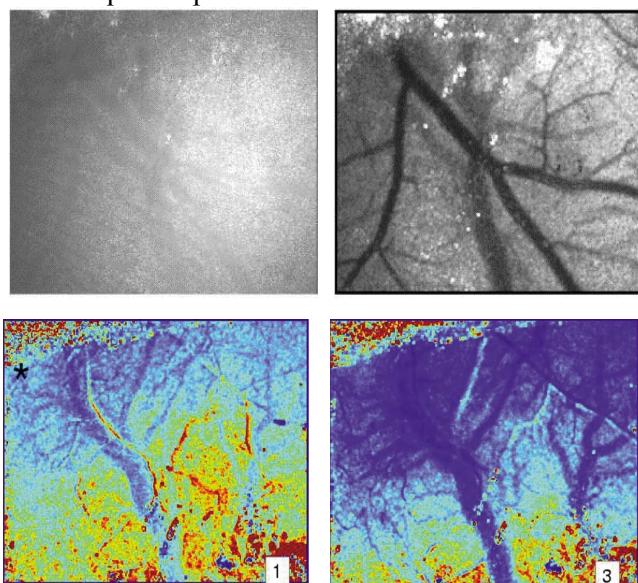
Todo método interferométrico de observación utiliza radiación coherente. Cuando esta radiación incide sobre una superficie, cada elemento de la misma se constituye en un centro emisor de ondas. La interferencia de todas las ondas elementales genera la onda reflejada. Si la superficie es lisa, habrá relaciones de fase definidas entre las ondas incidentes sobre distintos elementos de la superficie y también entre las fases de las ondas elementales reemisidas. La onda resultante será coherente. Si la superficie es rugosa, y el tamaño de grano de la rugosidad es muy pequeño, fren-

<sup>6</sup> Las imágenes de esta sección pertenecen al libro "Understanding Synthetic Aperture Radar Images", de C.Oliver y S.Quegan, Artech House, London, 1998.

te a la longitud de onda de la radiación, la situación será similar a la de una superficie lisa, pero si la rugosidad es de tamaño similar a la longitud de onda de la radiación, la interferencia será muy importante. Como además la orientación de cada elemento de superficie en una superficie rugosa es al azar, esto genera una imagen ruidosa y granulosa, con manchas oscuras y brillantes. Este fenómeno, llamada speckle, es universal pero es de mayor importancia en sistemas de imágenes que usan la coherencia de la fuente para detectar las diferencias de fase, como por ejemplo imágenes hechas con iluminación láser y técnicas de ecografía.

En muchas instancias el speckle es un problema y los equipos contienen sistemas de reducción de ruido específicos para mejorar la calidad de las imágenes. Sin embargo, como la intensidad del granulado y su disposición dependen de la rugosidad de la superficie y de su estado de movimiento respecto de la fuente luminosa, se han diseñado sistemas que permiten medir rugosidad, de uso en fabricación y control de calidad de superficies de cojinetes, películas autolubricantes y todo tipo de superficies "lisas". También se usa para hallar microfisuras en superficies y en detectar deformaciones y desplazamientos de superficies.

En los últimos años han aparecido aplicaciones médicas de speckle. En la oftalmología se ha hallado que el speckle formado en la reflexión en la córnea y la retina permite medir con mucha exactitud el grado de miopía, hipermetropía y astigmatismo. Una aplicación reciente espectacular es la formación de imágenes dinámicas de flujo sanguíneo cerebral durante operaciones de neurocirugía<sup>7</sup>. A la izquierda se ve la foto del speckle original y a la derecha la imagen contrastada.



can flujo normal.

Las imágenes de la izquierda se obtuvieron iluminando la duramadre de una rata con un diodo láser de  $760\text{ nm}$  y  $30\text{ mW}$ . Se observan los cambios en el flujo sanguíneo en el cerebro después de inducir isquemia (reducción de flujo) por 1 minuto (foto 1) y por 30 minutos (foto 3). Las áreas azules indican regiones de mayor reducción de flujo y las áreas en rojo indi-

<sup>7</sup> A. Dunn, H. Bolay, M. Moskowitz, D. Boas, "Dynamic Imaging of Cerebral Blood Flow Using Laser Speckle", *Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism* vol 21 pp 195-201, 2001.

## Polarización

En las ondas electromagnéticas, los campos tienen componentes sobre un plano normal a la dirección de propagación, y estas componentes pueden variar en el tiempo. En general, puede haber un desfasaje entre ambas componentes del campo. Vamos a exemplificar con el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{x_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - k z) + E_{y_0} \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t - k z + \phi)$$

para  $z = 0$ :  $\mathbf{E}(z = 0, t) = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} = E_{x_0} \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t) + E_{y_0} \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t + \phi)$

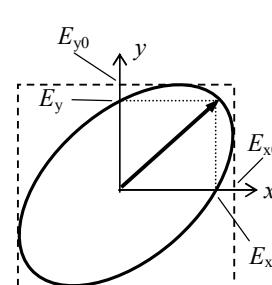
y podemos escribir:  $\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x_0}}$        $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi = \frac{E_y}{E_{y_0}}$

de donde:  $\sin(\omega t) = \left( \frac{E_x}{E_{x_0}} \cos \phi - \frac{E_y}{E_{y_0}} \right) / \sin \phi$

y además:  $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 = \left( \frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \frac{\left( \frac{E_x}{E_{x_0}} \cos \phi - \frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2}{\sin^2 \phi}$

y operando tenemos:

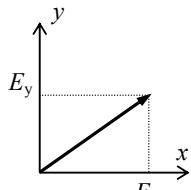
$$\left( \frac{E_x}{E_{x_0}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{y_0}} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_{x_0} E_{y_0}} \cos \phi = \sin^2 \phi$$



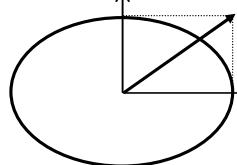
**Esta ecuación representa una elipse en el plano xy.**

Entonces, en general la punta del campo eléctrico de una onda plana describe una hélice de sección elíptica. El sentido de giro puede ser horario o antihorario. La convención más usada es la que se menciona más abajo en relación a las ondas circularmente polarizadas.

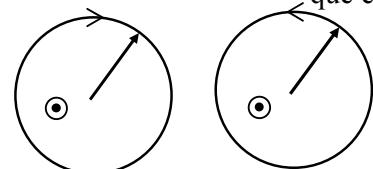
### Casos especiales



- Si  $\phi = \pm n\pi \Rightarrow \frac{E_x}{E_{x_0}} = \frac{E_y}{E_{y_0}}$  que es la ecuación de una recta en el plano del campo. Este caso se denomina **polarización lineal**.



- y se trata de una **polarización elíptica** donde los ejes de la elipse coinciden con x e y.



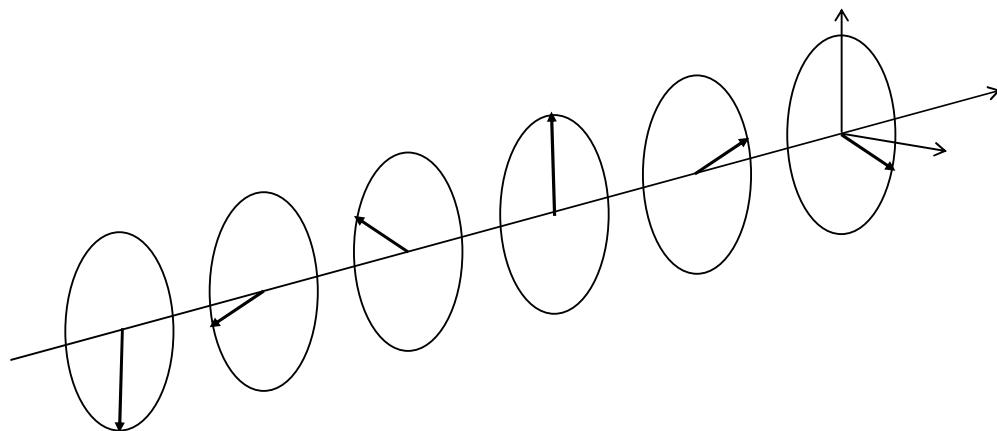
- Si además  $E_{x_0} = E_{y_0} = E_0 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$  que es la ecuación de una circunferencia de radio  $E_0$ . Se trata de un caso de **polarización circular**.

Las ondas circularmente polarizadas pueden estar polarizadas a **derecha** o a **izquierda**, según el sentido de giro de E a medida que se propaga. En las ilustraciones de la figura la onda **sale** del papel hacia el lector.

$\phi = \pi/2$

$\phi = -\pi/2$

En la figura siguiente se muestra un esquema de la propagación de una onda elípticamente polarizada a izquierda.

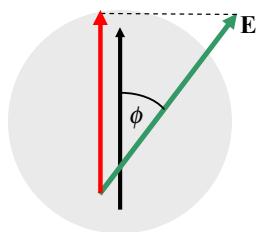


### Polarizadores. Electroóptica

La luz natural del sol o la producida por fuentes extensas está normalmente no polarizada, dado que cada fuente elemental emite con una polarización propia e independiente de las demás. Por lo tanto, además de ser incoherente, la radiación natural es no polarizada.

Un **polarizador** es un dispositivo óptico que deja pasar solamente ondas con una dada polarización lineal, absorbiendo todas las demás. Antiguamente se usaban cristales de turmalina, un compuesto natural que exhibe **dicroísmo**, que es la propiedad de absorber la radiación polarizada paralela a un eje cristalino. La radiación polarizada normal a esa dirección cristalina pasa sin atenuación. Debido a su fragilidad, actualmente se usan polarizadores artificiales formados por polímeros o cadenas moleculares colocados en una base plástica inerte. Los campos polarizados en la dirección de las cadenas moleculares son fuertemente absorbidos.

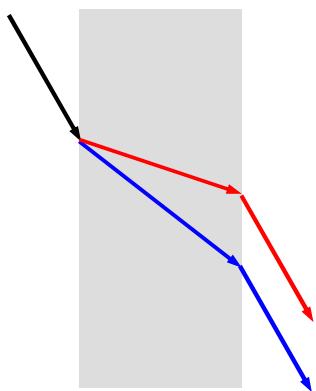
En la figura se esquematiza un polarizador. El eje de máxima transparencia es vertical (la absorción se produce sobre un eje horizontal). De un campo eléctrico polarizado en una dirección oblicua sólo pasa la componente vertical  $E_0 \cos \phi$ , donde  $E_0$  es la amplitud del campo, de manera que la densidad media de flujo de potencia que atraviesa el polarizador es:



$$\langle N \rangle = \frac{|E|^2}{2\eta} = \frac{E_0^2 \cos^2 \phi}{2\eta}$$

proporcional al coseno al cuadrado del ángulo entre el campo y la dirección de máxima transparencia. Esta expresión de la intensidad transmitida a través del polarizador se conoce como **ley de Malus**. Esta variación de la intensidad de la radiación que se obtiene al girar el polarizador (variando así el ángulo  $\phi$ ) permite verificar que la onda incidente está linealmente polarizada. Una onda circularmente polarizada o no polarizada no genera esta variación. Una onda elípticamente polarizada presenta un máximo cuando el eje de transparencia del polarizador se halla paralelo al eje mayor de la elipse y un mínimo no nulo cuando el eje de transparencia del polarizador se halla perpendicular al eje mayor de la elipse.

Algunos materiales exhiben respuestas diferentes de acuerdo al estado de polarización del campo electromagnético que se propaga en ellos. Generalmente este comportamiento depende de algún grado de anisotropía que presenta el material. Algunos materiales como la calcita y el cuarzo exhiben **birrefringencia** natural, cuando el índice de refracción depende de la dirección de polarización de la radiación. Estos materiales tienen un eje óptico, una dirección privilegiada debido a la disposición cristalina de sus átomos o moléculas. Si se propaga una onda electromagnética linealmente polarizada con su campo eléctrico normal al eje óptico, el material se comporta como un material normal y exhibe la refracción descripta por la ley de Snell de la óptica. Sin embargo, si se propaga una onda linealmente polarizada en un plano que contiene al eje óptico, se produce una refracción diferente, como si el índice de refracción del material fuera diferente al



correspondiente a la otra polarización. Si se propaga una onda linealmente polarizada de polarización oblicua al eje óptico, se obtienen dos rayos: el rayo **ordinario**, para la componente polarizada normal al eje óptico, y el rayo **extraordinario**, para la componente polarizada en el plano del eje óptico. En la figura, el rayo ordinario se simboliza en azul y el extraordinario en rojo.

Hay materiales que no tienen birrefringencia natural, pero pueden volverse birrefringentes cuando se aplica sobre ellos un campo eléctrico intenso. En el caso de líquidos o soluciones líquidas, la birrefringencia inducida se conoce como **efecto Kerr** y se debe al alineamiento o deformación de las moléculas polares del líquido. Se induce un eje óptico paralelo al campo aplicado. La diferencia entre

el índice de refracción ordinario  $n_o$  y el extraordinario  $n_e$  es proporcional al cuadrado del campo:  $\Delta n = n_o - n_e = K\lambda E^2$ . El parámetro  $K$  llamado constante de Kerr depende de la sustancia y es extraordinariamente alto en los hidrocarburos como el nitrobenceno. El efecto Kerr se ha utilizado para analizar en forma no destructiva la composición de aceites refrigerantes en transformadores de alta potencia.

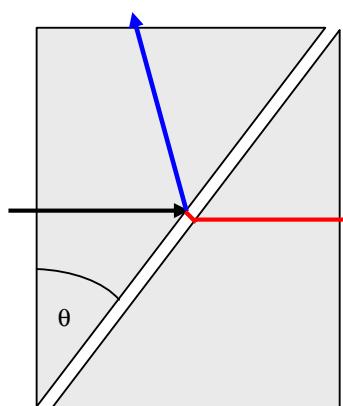
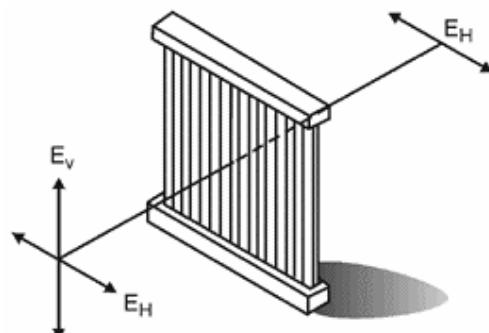
En ciertos materiales cristalinos es posible inducir birrefringencia aplicando un campo eléctrico (**efecto Pockels**). El efecto Pockels difiere del efecto Kerr en que la diferencia de índices de refracción es proporcional a la intensidad del campo en lugar del cuadrado. El efecto Pockels tiene también aplicaciones en el análisis de los transformadores de alta tensión, donde se usa para medir el campo dentro del refrigerante para detectar la presencia de "puntos calientes" de alta tensión potencialmente destructivos y en moduladores ópticos para comunicaciones. También otros materiales, como la turmalina, exhiben **dicroísmo**, efecto que consiste en que uno de los planos de polarización es absorbido mientras que el otro se propaga sin atenuación apreciable. Un material artificial que exhibe dicroísmo es el formado por una red de hilos conductores. La componente del campo eléctrico paralela a los hilos induce corriente en ellos y se anula, mientras que la

componente normal a los hilos pasa con atenuación mucho menor. Este artefacto es de muy difícil construcción práctica, pero es la base del material llamado **Polaroid**, que consiste en largas cadenas poliméricas de un alcohol, separadas en pocos angstroms

( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) a las que se les ha agregado átomos de iodo. Estos átomos son conductores y absorben la componente de la onda paralela a las cadenas poliméricas. El material Polaroid original fue inventado en 1938 por el químico norteamericano E.H. Land.

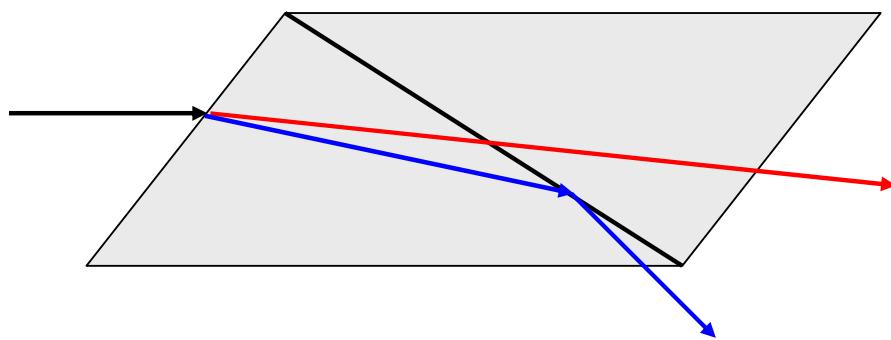
Actualmente existen diversos materiales poliméricos y cristales líquidos que funcionan por el mismo principio.

Otra forma de polarizar una onda es usar el dicroísmo. Glan y Foucault fueron los primeros que usaron esta propiedad y la propiedad de reflexión total de una onda en una interfase dieléctrica que veremos en el Capítulo siguiente. Dos prismas de calcita se colocan con sus hipotenusas paralelas separadas en una muy corta distancia. La radiación incide desde la izquierda normal a la superficie del prisma. Se elige el ángulo  $\theta$  del prisma para que refleje completamente el rayo extraordinario. El rayo ordinario sale refractado y es recogido por otro prisma que lo coloca en la misma dirección del rayo incidente. Este **polari-**



**polarizador de Glan-Foucault** presenta varios problemas prácticos, como el de garantizar el paralelismo de los prismas ante movimientos o vibraciones. Si se usan prismas de calcita se puede colocar un pegamento entre los prismas de índice de refracción intermedio entre el ordinario y el extraordinario que resuelve el problema de las vibraciones.

Este polarizador se conoce como **Glan-Thompson**.



de las caras del prisma.

Otros polarizadores usan la **polarización por reflexión** cuyas bases físicas veremos en el siguiente Capítulo.

Otros efectos electroópticos están ligados a la acción de un campo magnético sobre las propiedades de las sustancias. Por ejemplo, el **efecto Kerr magnético** usa un campo magnético para crear birrefringencia de reflexión sobre superficies materiales. Ciertas sustancias, como el cuarzo cristalino y soluciones de azúcar son **ópticamente activas**, lo que significa que rotan el plano de polarización de una onda linealmente polarizada<sup>8</sup>. El grado de rotación y el sentido (horario o antihorario) depende de la sustancia. El **efecto Faraday** surge al colocar vidrios en campos magnéticos intensos. Los vidrios se vuelven ópticamente activos, y el ángulo de rotación es proporcional al campo de inducción magnética **B** aplicado y a la longitud de la muestra.

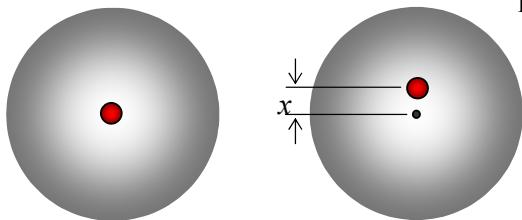
Otro tipo de polarizador es el **prisma de Nicol**, que es similar al de Glan-Thompson, con la diferencia que usa cuñas en lugar de prismas y la radiación incide a un ángulo (generalmente poqueño) respecto a una

<sup>8</sup> La existencia de la rotación en cristales de ácido tartárico, algunos en sentido horario y en otros en sentido antihorario, y la no existencia de la rotación en el ácido partartárico, una mezcla de ambos, fue la primera investigación relevante de Louis Pasteur, que era de formación química, en 1848. Este trabajo lo llevó al conocimiento de J.J.Biot (quien había tratado de explicar el fenómeno) y a sus posteriores estudios sobre microbiología.

## Modelos simples de comportamiento electrodinámico de materiales

En la próxima sección vamos a analizar la propagación de ondas electromagnéticas en un medio material. Para ello se requiere determinar la relación entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  y entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en un medio material. Se presentan modelos simples que permiten establecer esta relación para  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  en el caso de dieléctricos y conductores. Los materiales magnéticos se analizaron en el Capítulo 4.

### Dieléctricos: Modelo de Drude-Lorentz.



Un material dieléctrico se **polariza** en la presencia de un campo eléctrico aplicado. En el modelo de **Drude-Lorentz** se supone que los centros de masa de las cargas positiva y negativa se separan una cantidad  $x$  dando lugar a un dipolo. Si el campo aplicado depende del tiempo la separación  $x(t)$  también lo hará.

El electrón y el ión atómico se desplazarán bajo la fuerza eléctrica. Debido a que el ión es mucho más pesado que el electrón, podemos suponer que sólo este se mueve significativamente. Debido a que existe una **fuerza de cohesión** entre el núcleo (positivo) y la nube electrónica (negativa), habrá una fuerza que tratará de volver el electrón a su posición de equilibrio. La forma más sencilla de modelizar esta fuerza es como la de un “resorte”, proporcional al desplazamiento:

$$F_1(t) = -m\omega_0^2 x(t) \quad \text{donde } m \text{ es la masa del electrón.}$$

En este modelo, el electrón, que se ve sometido a una fuerza, se acelera, aumentando su energía cinética. Luego de un recorrido libre, experimenta una **colisión** con la red cristalina. En este modelo se considera que cede a la red toda la energía acumulada. Este **proceso de "frenado"**, a expensas de su energía cinética, puede representarse, en la forma más sencilla, como una fuerza proporcional a la velocidad del electrón:

$$F_2(t) = -m\Gamma v(t)$$

Finalmente, existe la **fuerza eléctrica** del campo  $eE(t)$  aplicado sobre la nube electrónica. Conocidas todas las fuerzas que actúan sobre el electrón, podemos plantear la ecuación de Newton:  $ma(t) = \sum F_i$  de la cual podemos hallar  $x(t)$ :

$$m\ddot{x} = eE(t) - m\omega_0^2 x - m\Gamma\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} - \omega_0^2 x - \Gamma\dot{x} = \frac{e}{m}E(t)$$

donde el punto simboliza la derivada respecto del tiempo.

Para una excitación armónica:  $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$  (notación fasorial)

existe una respuesta forzada:  $x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t}$

de donde:  $\dot{x}(t) = i\omega x(t) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

y tenemos:  $(-\omega^2 \tilde{x}_0 + i\Gamma\omega \tilde{x}_0 + \omega_0^2 \tilde{x}_0) e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$

de donde podemos despejar la amplitud (compleja) del movimiento:

$$\tilde{x}_0 = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \tilde{E}_0 = \frac{e}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \tilde{E}_0$$

El factor de proporcionalidad entre  $\tilde{x}_0$  y  $\tilde{E}_0$  es complejo, lo que indica un **desfasaje** en el tiempo entre la posición y el campo aplicado.

El desplazamiento de los centros de masa de la carga atómica genera un **dipolo**, de momento dipolar  $\tilde{\mathbf{p}} = e\tilde{x}_0 \hat{\mathbf{x}}$ . Si hay  $N$  átomos por unidad de volumen que se mueven simultáneamente y en fase, el momento dipolar por unidad de volumen, es decir, la **polarización**, es:

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = N e \tilde{x}(t) \hat{\mathbf{x}} = \frac{N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tilde{E}_0 e^{i \omega t} \hat{\mathbf{x}} = \frac{N e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \tilde{E}(t)$$

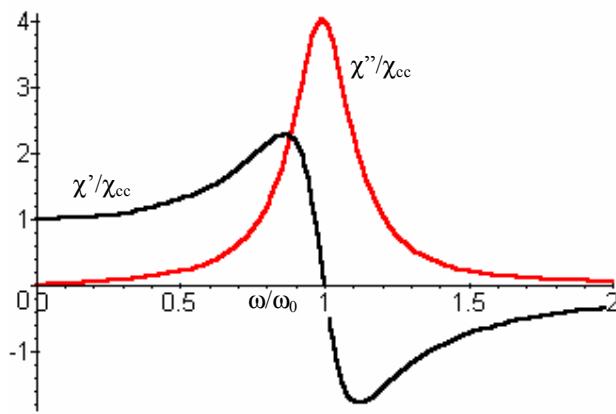
Por analogía con la polarización estática de dieléctricos podemos definir una **susceptibilidad dieléctrica** y una **permitividad para ondas monocromáticas**:

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \varepsilon_0 \chi_{\omega} \tilde{\mathbf{E}}(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(t) = \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}(t) + \tilde{\mathbf{P}}(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}(t) = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\omega}) \tilde{\mathbf{E}}(t) = \varepsilon_{\omega} \tilde{\mathbf{E}}(t) \quad \text{con:}$$

$$\chi_{\omega} = \frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad \varepsilon_{\omega} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{\omega}) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \right) = \varepsilon'_{\omega} - i \varepsilon''_{\omega}$$

Se produce entonces también un desfasaje entre el campo **E** y el campo **D**. Este desfasaje está asociado a una pérdida de energía, en forma análoga a la vista en la propagación de ondas en líneas de transmisión.

Se ve además que la parte real y la parte imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica **dependen de la frecuencia**, como se muestra en la siguiente gráfica.



En esta gráfica se ha tomado:

$$\chi_{cc} = \chi_{\omega}(\omega = 0) = \chi'_{\omega}(\omega = 0) = \frac{N e^2}{m \varepsilon_0}$$

Se observa que  $\chi'_{\omega} = 0$  para  $\omega = \omega_0$ . Se demuestra en el siguiente Ejemplo que el máximo de  $\chi''$  se da cerca de  $\omega = \omega_0$  y vale  $\chi_{cc} \omega_0 / \Gamma$ , es decir, es inversamente proporcional a  $\Gamma$ , que es el factor vinculado con la pérdida de energía por radiación. También se demuestra que el ancho del pico es proporcional a  $\Gamma$ .

**Ejemplo 8.5:** a) Hallar la posición y el valor del máximo de la curva de  $\chi''_{\omega}$ . b) Calcular el ancho de banda alrededor del máximo para  $\chi''_{\omega}$  mayor que  $1/2$  de su valor máximo.

a) La parte imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica es:

$$\chi''_{\omega} = \frac{\Gamma \omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = \frac{\gamma \delta}{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\Gamma}{\omega_0} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Derivamos esta expresión respecto de  $\delta$  e igualamos a cero para obtener:

$$3\delta_{max}^4 - (2 - \gamma^2)\delta_{max}^2 - 1 = 0 \Rightarrow \delta_{max}^2 = \left( 2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12} \right) / 6$$

donde hemos tomado el signo (+) de la doble determinación porque en general  $\gamma \ll 1$  y  $\delta^2$  debe ser positivo. En tal caso podemos aproximar mediante un desarrollo de Taylor en  $\gamma$ :

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12}}{6}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{8} \quad \text{y} \quad \delta_{max}^2 = \frac{2 - \gamma^2 + \sqrt{(2 - \gamma^2)^2 + 12}}{6} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{4}$$

Se ve que la posición del máximo difiere muy poco de la frecuencia de resonancia:  $\delta = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0$ . El valor del máximo es aproximadamente:  $\chi''_{\omega} \Big|_{max} \approx 1/\gamma$

b) Calculamos el ancho de banda mitad suponiendo que es pequeño. Entonces  $\delta$  difiere poco de 1 y podemos aproximar:  $(1 - \delta^2)^2 = [(1 - \delta)(1 + \delta)]^2 \approx 4(1 - \delta)^2$  de donde:

$$\chi''_{\omega} = \frac{\gamma \delta}{(1 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2} \approx \frac{\gamma \delta}{4(1 - \delta)^2 + \gamma^2 \delta^2}$$

Para  $\delta = \delta_{1/2}$  este valor debe ser la mitad del valor máximo, de manera que tenemos:

$$\frac{\gamma \delta_{1/2}}{4(1-\delta_{1/2})^2 + \gamma^2 \delta_{1/2}^2} \approx \frac{1}{2\gamma} \Rightarrow \delta_{1/2}^2 - 2\delta_{1/2} + \frac{4}{4+\gamma^2} \approx 0 \Rightarrow \delta_{1/2} \approx 1 \pm \frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}$$

de donde se ve que las frecuencias de ancho mitad están centradas en la frecuencia de resonancia y el intervalo entre ellas vale:  $\Delta\delta_{1/2} \approx \frac{2\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \gamma - \frac{\gamma^3}{8}$

y para bajas pérdidas:  $\Delta\omega_{1/2} \approx \Gamma$

### Conductores: Modelo de Drude

En un conductor los electrones son libres, de manera que podemos usar el modelo de dieléctricos para el movimiento electrónico anulando el término de la fuerza de cohesión. Mantenemos el término de pérdidas de frenado. Tenemos así:

$$m \ddot{x} = e \tilde{E}(t) \omega - m \Gamma \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{e}{m} \tilde{E}(t) \Rightarrow \dot{v} + \Gamma v = \frac{e}{m} \tilde{E}(t)$$

dado que nos interesará hallar la velocidad del electrón más que su posición.

Para una excitación armónica:  $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$  (notación fasorial)

existe una respuesta forzada:  $v(t) = \tilde{v}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{v}(t) = i\omega v(t)$

y tenemos:  $(i\omega + \Gamma) \tilde{v}_0 e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$

de donde podemos despejar la velocidad (compleja) del movimiento:

$$\tilde{v}_0 = \frac{e/m}{i\omega + \Gamma} \tilde{E}_0 = \frac{e}{m} \frac{\Gamma - i\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \tilde{E}_0$$

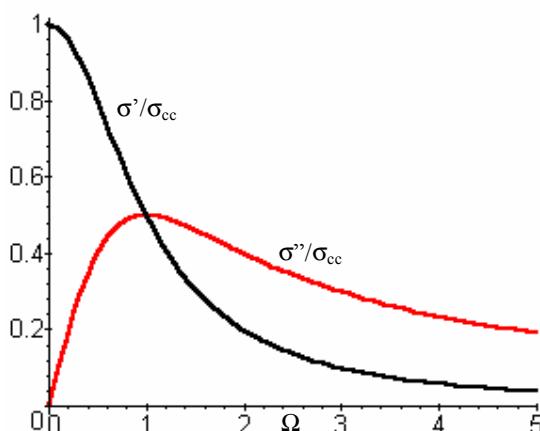
Si hay  $N$  electrones por unidad de volumen, la densidad de corriente será:

$$\mathbf{j}(t) = N e \mathbf{v}(t) = \frac{N e^2}{m} \frac{\Gamma - i\omega}{\omega^2 + \Gamma^2} \mathbf{E}(t) = (\sigma'_{\omega} - i\sigma''_{\omega}) \mathbf{E}(t)$$

Se observa que aquí también la conductividad es compleja, describiendo un defasaje entre  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{E}$ .

Para frecuencia cero, se tiene la **conductividad de corriente continua**:  $\sigma_{cc} = \frac{N e^2}{m \Gamma}$  de donde:

$$\sigma = \sigma_{cc} \frac{1 - i\Omega}{1 + \Omega^2} \quad \text{con: } \Omega = \omega/\Gamma.$$



En la siguiente gráfica se presentan las curvas de la parte real e imaginaria de la conductividad en función de la frecuencia  $\Omega$ . Se observa que la parte imaginaria se hace máxima (y coincide con la parte real) para  $\Omega = 1$  ( $\omega = \Gamma$ ) y luego decae. Para conductores, el valor de  $\Gamma \approx 10^{12} \text{ s}^{-1}$ , de manera que en la mayoría de las aplicaciones prácticas se trabaja para  $\omega \ll \Gamma$ . En tal caso,  $\Omega \rightarrow 0$  y se puede expandir la conductividad en serie de Taylor:

$$\sigma \approx \sigma_{cc} \left(1 - i\frac{\omega}{\Gamma}\right) \approx \sigma_{cc} \left(1 - i\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \approx \sigma_{cc}$$

y entonces se puede suponer que la conductividad coincide con su valor de corriente continua para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

## Plasma

Un plasma es un gas de partículas cargadas o **iones**. Habitualmente existen simultáneamente iones positivos y negativos que (estadísticamente) se neutralizan. Cuando se coloca un plasma en una región donde hay un campo eléctrico, las cargas se redistribuyen rápidamente de manera de anular (o **apantallar**, en la jerga) el campo en el interior del plasma. Esto es similar a lo que ocurre en un conductor a baja frecuencia. En muchos casos los iones negativos son electrones y los iones positivos son átomos o moléculas cargados, de manera que el movimiento de estos iones positivos sólo tiene relevancia a muy bajas frecuencias o como el movimiento del conjunto del gas. Por lo tanto, habitualmente es de interés el movimiento electrónico y entonces un plasma se

puede modelar como un conductor:  $\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = \frac{e}{m} \tilde{E}(t)$

El factor  $\Gamma$  tiene en cuenta la pérdida de energía de los electrones móviles por radiación electromagnética o colisiones con los iones positivos del gas. Para una excitación armónica:  $E(t) = \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$  existe una respuesta forzada:

$$x(t) = \tilde{x}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{x}(t) = i\omega x(t) \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \Rightarrow (-\omega^2 + i\omega\Gamma)\tilde{x}_0 e^{i\omega t} = \frac{e}{m} \tilde{E}_0 e^{i\omega t}$$

de donde despejamos la amplitud (compleja) del movimiento:  $\tilde{x}_0 = -\frac{e\tilde{E}_0}{(\omega - i\Gamma)m\omega}$

Aunque no existe una polarización real, es posible hallar la **permitividad equivalente** del plasma, noción que es útil para modelar la propagación de ondas en él. Si hay  $N$  iones por unidad de

volumen:  $\tilde{P}(t) = N e \tilde{x}(t) = -\frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\omega} \tilde{E}_0 e^{i\omega t} = -\frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\omega} E(t)$

Pero:  $\tilde{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{eq} E(t) \Rightarrow \chi_{eq} = -\frac{N e^2}{m\epsilon_0 \omega^2} - \frac{N e^2}{(\omega - i\Gamma)m\epsilon_0 \omega}$

Llamamos **frecuencia de plasma** a la cantidad:  $\omega_p = \sqrt{Ne^2/m\epsilon_0}$  y entonces podemos escribir:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \Rightarrow \chi_{eq} = -\frac{\omega_p^2}{(\omega - i\Gamma)\omega} \Rightarrow D(t) = \epsilon_0(1 + \chi_{eq})E(t) = \epsilon_{eq}E(t) \Rightarrow \epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - i\Gamma)\omega}\right)$$

o sea:  $\epsilon_{eq} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2(\omega + i\Gamma)}{(\omega^2 + \Gamma^2)\omega}\right) = \epsilon_0 \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)}\right) - i \frac{\Gamma\omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)\omega}\right] = \epsilon'_{eq} - i\epsilon''_{eq}$

**Se ve que la permitividad equivalente de un plasma es compleja. La parte imaginaria está ligada a las pérdidas de energía y es proporcional al parámetro  $\Gamma$ . La parte real está ligada a la propagación.**

Si el parámetro  $\Gamma$ , vinculado con las pérdidas, es pequeño frente a la frecuencia de operación, podemos aproximar:  $\epsilon_{eq} \approx \epsilon_0(1 - \omega_p^2/\omega^2)$  que es una permitividad real. Se ob-

serva que esta permitividad **es negativa** para frecuencias menores que la frecuencia de plasma. Esto tiene consecuencias en la propagación de ondas electromagnéticas en el plasma, como veremos en la sección siguiente.

Análogamente, podemos definir una **conductividad equivalente** del plasma. Si hay  $N$  iones por unidad de volumen, la densidad de corriente será:

$$j(t) = N e \frac{dx}{dt} = i\omega Ne x(t) = -\frac{i N e^2}{(\omega - i\Gamma)m} E(t) = -\frac{i \omega_p^2 \epsilon_0}{(\omega - i\Gamma)} E(t) = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{(\Gamma - i\omega)} E(t) \Rightarrow \sigma_{eq} = \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{(\Gamma - i\omega)}$$

de donde:

$$\sigma_{eq} = \omega_p^2 \epsilon_0 \frac{(\Gamma + i\omega)}{(\Gamma^2 + \omega^2)} = \sigma'_{eq} + i \sigma''_{eq}$$

**La conductividad equivalente es compleja.** Se observa que:  $\sigma''_{eq} = \omega \epsilon''_{eq}$  relación cuyo significado se aclarará más abajo. En el caso de bajas pérdidas, donde  $\Gamma \ll \omega$ , la conductividad es imaginaria pura:

$$\sigma_{eq} = i \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\omega}$$

## Ondas en medios materiales

El análisis del comportamiento de los materiales para campos electrodinámicos de la sección precedente es que, **para campos armónicos**, es posible establecer **relaciones lineales**:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E} \quad \mathbf{j} = \sigma(\omega) \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu(\omega) \mathbf{H}$$

donde los parámetros  $\epsilon(\omega)$ ,  $\sigma(\omega)$  y  $\mu(\omega)$  son **parámetros complejos que dependen de la frecuencia** de los campos armónicos. La existencia de parámetros complejos describe un desfasaje en el tiempo entre los fasores involucrados.

Analizamos a continuación cómo esta circunstancia influye sobre la propagación de ondas en medios materiales.

Consideremos un recinto del espacio donde existe un medio material de propiedades definidas por sus parámetros  $\epsilon$ ,  $\sigma$  y  $\mu$ , dependientes de la frecuencia. Para evitar generalidades sin correlato práctico, consideraremos que  $\mu$  es real, mientras que  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$  y  $\sigma = \sigma' + i\sigma''$  son la permitividad y conductividad complejas. Las ecuaciones de Maxwell **sin fuentes** resultan así:

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \bullet \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 & \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - i\omega\epsilon\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) - \sigma\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

Desacoplamos las ecuaciones del rotor como hicimos antes para el caso de las ondas en el vacío. Por ejemplo, de la ley de Faraday:

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu\nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla [\nabla \bullet \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i\omega\mu(i\omega\epsilon + \sigma)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

y finalmente:  $\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \gamma^2 \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0$  con  $\gamma^2 = \omega^2\mu\epsilon - i\omega\mu\sigma$

que es una **ecuación de Helmholtz**. Se obtiene una ecuación idéntica para el campo magnético.

La solución de la ecuación de Helmholtz es:  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{\mp i\gamma z}$

Pero  $\gamma$  es complejo, porque lo es  $\gamma^2$ :  $\gamma = \beta - i\alpha$

de donde la solución queda:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$

El primer sumando es una onda progresiva y el segundo una onda regresiva, cuyas amplitudes decaen exponencialmente a medida que se propagan.

La parte real  $\beta$  del número de onda es el llamado **factor de propagación** y la parte imaginaria  $\alpha$  el **factor de atenuación**. En general ambos parámetros dependen de la frecuencia.

La inversa del factor de atenuación se conoce como **profundidad de penetración**:

$$\delta = 1/\alpha$$

La **velocidad** de las ondas armónicas (también llamada velocidad de fase) es:  $v_f = \omega/\beta$  y la **longitud de onda** en el material es  $\lambda = 2\pi/\beta$ . Ambas cantidades generalmente dependen de la frecuencia.

Como el campo magnético cumple la misma ecuación diferencial que el campo eléctrico, su expresión matemática es similar:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{H}}_1 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{H}}_2 e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

Podemos calcular la **impedancia intrínseca** del medio a partir de la ley de Faraday:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{\mp i \gamma z} \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{\mp i \gamma z} \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + i \omega \mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0$$

Recordemos que el signo superior de la doble determinación corresponde a la onda progresiva y el signo inferior a la onda regresiva. Entonces:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tilde{E}_x & \tilde{E}_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = \mp i \gamma (-\tilde{E}_y \hat{\mathbf{x}} + \tilde{E}_x \hat{\mathbf{y}}) = \mp i \gamma \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -i \omega \mu \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$$

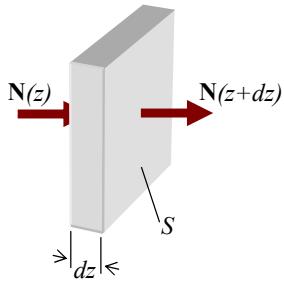
de donde:  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \pm \frac{\gamma}{\omega \mu} \hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \eta = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\beta - i \alpha} = \frac{\omega \mu (\beta + i \alpha)}{\beta^2 + \alpha^2} = \eta' + i \eta''$

y la impedancia intrínseca también es, en general, compleja.

El valor medio del **vector de Poynting** es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{H}}^*) = \pm \frac{1}{2} \Re e \left( \tilde{\mathbf{E}} \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}^*}{\eta^*} \right) = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}|^2}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}}$$

donde el signo superior corresponde a la onda progresiva y el inferior a la regresiva. Como el vector de Poynting medio decrece con la propagación por la potencia perdida, podemos relacionar estas dos cantidades.



Para ello planteamos el balance de la potencia electromagnética que entra a un paralelepípedo de sección  $S$  transversal a la propagación y espesor  $dz$ , parte de ella se pierde (por cualquier mecanismo) dentro del paralelepípedo y parte sale por la otra cara:

$$\langle N(z) \rangle S = \langle P(z) \rangle + \langle N(z+dz) \rangle S \text{ de donde:}$$

$$\frac{d\langle N \rangle}{dz} \Big|_z dz = -\frac{\langle P(z) \rangle}{S} \Rightarrow \frac{d\langle N \rangle}{dz} \Big|_z = -\frac{d\langle P(z) \rangle}{dv}$$

Pero como, en general,  $\langle N(z) \rangle = \pm \langle \mathbf{N}_{0\pm} \rangle e^{\mp 2\alpha z} \Rightarrow \frac{d\langle N \rangle}{dz} \Big|_z = -2\alpha \langle N(z) \rangle = -\frac{d\langle P(z) \rangle}{dv}$

y finalmente:  $\frac{d\langle N \rangle}{dz} \Big|_z = -\frac{d\langle P \rangle}{dv} \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle$  donde  $\langle P \rangle$  es la potencia perdida

en el material por cualquier mecanismo. Se ve que esta expresión es válida independientemente del sentido de la propagación.

El valor medio de la **densidad de energía** es:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \Re e(\mathbf{E} \bullet \mathbf{D}^* + \mathbf{H} \bullet \mathbf{B}^*) = \frac{1}{4} \Re e \left( \epsilon^* |\tilde{\mathbf{E}}|^2 + \mu |\tilde{\mathbf{H}}|^2 \right) = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}|^2}{4}$$

y finalmente:

$$\langle u \rangle = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4}$$

y la **velocidad de la energía** puede calcularse como:  $\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon'|\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}}$

**En resumen, para la propagación en un medio material general:**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0+} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} + \tilde{\mathbf{E}}_{0-} e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

con:  $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma}$

$$\delta = \frac{1}{\alpha}$$

$$v = \omega/\beta$$

$$\lambda = 2\pi/\beta$$

$$\eta = \eta' + i\eta'' = |\eta| e^{i\varphi} = \frac{\omega \mu}{\gamma}$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle$$

$$\langle u \rangle = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4}$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon'|\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0+}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} - \frac{\tilde{\mathbf{E}}_{0-}}{\eta} e^{\alpha z} e^{i(\omega t + \beta z)}$$

( $\beta$  = factor de propagación)  
( $\alpha$  = factor de atenuación)

(profundidad de penetración)

(velocidad de propagación)

(longitud de onda)

(impedancia intrínseca)

(vector medio de Poynting)

(densidad de potencia media perdida)

(densidad de energía almacenada)

(velocidad de la energía)

A continuación usamos estas expresiones en casos particulares de interés.

### Dieléctricos sin pérdidas

En este caso se tienen los parámetros:  $\epsilon$  real,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ .

Entonces:  $\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = k \sqrt{\epsilon_r}$

donde  $k$  es el número de onda en el vacío.  $\gamma$  es real  $\Rightarrow$  no hay atenuación y la profundidad de penetración es infinita.

La velocidad de propagación de las ondas en el material es:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$$

En la propagación a frecuencias ópticas se usa el **índice de refracción** del material, que se define como la relación entre la velocidad de propagación de la luz en el vacío y la velocidad de propagación de la luz en el material. En esta definición se trata de las velocidades de fase. En general el índice de refracción varía con la frecuencia, lo que se comprueba experimentalmente en los prismas, por ejemplo. Tenemos:

$$\text{índice de refracción} \quad n = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

y la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < \lambda_0$$

La impedancia intrínseca es:

$$\eta = \frac{\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{k\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < \eta_0$$

El vector de Poynting medio es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{z}}$$

No hay atenuación ( $\alpha = 0$ ), de manera que  $\langle N \rangle$  no cambia con  $z$  y la potencia de pérdidas:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha\langle N \rangle = 0 \quad \text{es nula. La energía almacenada en el campo es:}$$

$$\langle u \rangle = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} = \left( \epsilon + \frac{\mu_0}{\mu_0/\epsilon} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2}{4} = \frac{\epsilon}{2} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2$$

y se ve que la velocidad de la energía es:  $\mathbf{v}_E = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon'|\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{2\sqrt{\mu_0/\epsilon}}{2\mu_0} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \hat{\mathbf{z}}$

que coincide con la velocidad de las ondas en el material.

**Ejemplo 8.6:** Analizar la propagación de una onda de  $f = 100 \text{ MHz}$  en un medio de  $\epsilon_r = 16$ .

La velocidad de propagación es menor que en el vacío:  $v = c / \sqrt{\epsilon_r} = c/4$

La longitud de onda en el medio es menor que en el vacío:  $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r} = \lambda_0 / 4 \approx 0.75 \text{ m}$

La impedancia intrínseca en el medio es menor que en el vacío:  $\eta = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r} = \eta_0 / 4$

La densidad de energía en el medio es mayor que en el vacío:  $\langle u \rangle = \epsilon_r \langle u_0 \rangle = 16 \langle u_0 \rangle$

El índice de refracción es:  $n \approx \sqrt{\epsilon_r} = 4$

## Conductores

En este caso se tienen los parámetros:  $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma \text{ real.}$

$$\text{Entonces: } \gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - i\omega_0 \mu_0 \sigma}$$

En los **buenos conductores** los efectos conductivos son de mucha mayor relevancia que los efectos de las variaciones del campo eléctrico en el tiempo, lo que puede medirse diciendo que la corriente de conducción es mucho mayor que la llamada "corriente de desplazamiento":

$$\text{buen conductor} \Rightarrow |\mathbf{j}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \Rightarrow \sigma E \gg \omega \epsilon_0 E \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0$$

Para un buen conductor el número de onda es:

$$\gamma = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - i\omega \mu_0 \sigma} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{-i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}} e^{-i\pi/2} = \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} e^{-i\pi/4}$$

y finalmente:  $\gamma = \beta - i\alpha \approx \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1-i) = \frac{1-i}{\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$

Se ve que  $\alpha = \beta = 1/\delta$ . Los campos que se propagan en un buen conductor decaen a

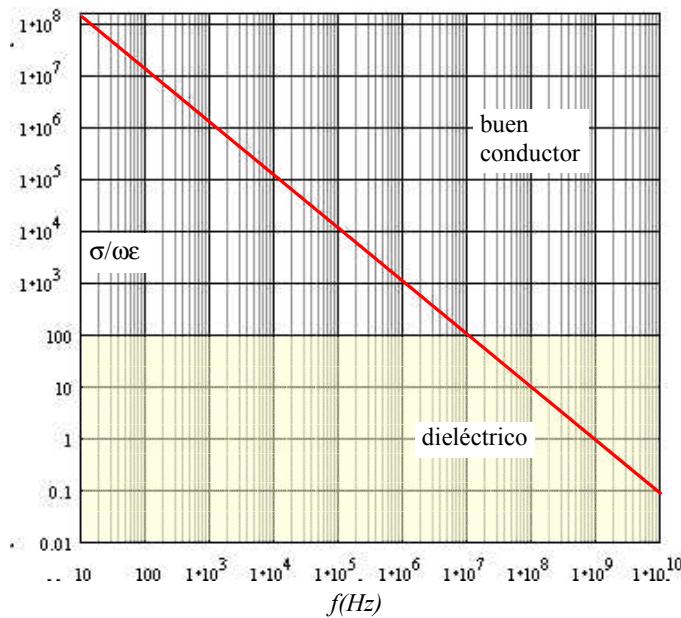
$1/e$  ( $\approx 0.37$ ) de su valor cuando recorren  $\delta$ . Al recorrer  $10\delta$  los campos decaen a alrededor de  $4.5 \times 10^{-5}$  de su valor. Para cobre, por ejemplo:

$$\sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1} \Rightarrow \delta \approx \frac{92}{\sqrt{f}} \text{ mm} \Rightarrow \begin{cases} \delta \approx 9.2 \text{ mm} \quad (\sigma/\omega\epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^4) & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ \delta \approx 92 \mu\text{m} \quad (\sigma/\omega\epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^0) & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \\ \delta \approx 2.9 \mu\text{m} \quad (\sigma/\omega\epsilon_0 \approx 8.6 \times 10^7) & \text{a } f = 1 \text{ GHz} \end{cases}$$

A medida que aumenta la frecuencia, la relación  $\sigma/\omega\epsilon$  disminuye y el material deja de comportarse progresivamente como buen conductor. Además, los valores mismos de  $\sigma$  y  $\epsilon$  varían con la frecuencia como se muestra con los modelos sencillos de la sección precedente.

El ejemplo paradigmático de este comportamiento es el del **agua de mar**, que a bajas frecuencias se comporta como un conductor pero ya a frecuencias de UHF y cercanas a las microondas se comporta como un dieléctrico con pérdidas moderadas:

$$\sigma = 4 (\Omega m)^{-1}, \epsilon_r = 80 \Rightarrow \sigma/\omega\epsilon \approx 9 \times 10^8 / f(\text{Hz})$$



Frecuencia (Hz)	$\sigma/\omega\epsilon$	Comportamiento
$10^3$ (1 KHz)	$1.3 \times 10^4$	Conductor
$10^7$ (10 MHz)	1.3	Conductor/Dieléctrico
$10^{10}$ (30 GHz)	$4.3 \times 10^{-4}$	Dieléctrico

La velocidad de propagación y la longitud de onda dentro del conductor son:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

fuertemente dependientes de la frecuencia. La impedancia intrínseca es:

$$\eta = \eta' + i\eta'' = \frac{\omega\mu_0}{\gamma} = \frac{\omega\mu_0\delta}{1-i} = \frac{1+i}{2}\omega\mu_0\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\delta}$$

Las partes real e imaginaria de la impedancia intrínseca son iguales, de modo que el **ángulo de fase es  $\pi/4$**  ( $45^\circ$ ). Un gran valor del ángulo de fase indica altas pérdidas. Se ve además que  $|\eta| \ll \eta_0$ . El vector medio de Poynting es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\widetilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\cos\varphi |\widetilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sqrt{2}\sigma\delta |\widetilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4\sqrt{2}} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sigma\delta |\widetilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4} \hat{\mathbf{z}}$$

La potencia perdida por unidad de volumen es:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha\langle N \rangle = \frac{2}{\delta}\langle N \rangle = \frac{\sigma |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{2} = \frac{|\tilde{\mathbf{j}}_{0\pm}| e^{\mp z/\delta} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}| e^{\mp z/\delta}}{2} = \frac{1}{2} |\mathbf{j} \bullet \mathbf{E}|$$

que coincide con la expresión de las pérdidas medias por efecto Joule.

La densidad media de energía almacenada en el campo es:

$$\langle u \rangle = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} = \left( \epsilon_0 + \frac{\mu_0 \sigma^2 \delta^2}{2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4} = \left( 1 + \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \frac{\epsilon_0 |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}}{4}$$

y como  $\sigma > \omega \epsilon_0$  el segundo término, vinculado con la energía magnética, es mucho mayor que el

$$\langle u \rangle \approx \frac{\sigma}{4\omega} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2z/\delta}$$

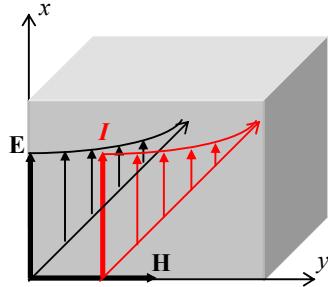
Se observa que la energía del campo electromagnético dentro del conductor, energía que se intercambia con el medio, es predominantemente magnética. Este resultado lleva a que en los modelos de interacción de campos electromagnéticos con **objetos biológicos**, que tienen un fuerte comportamiento conductor a frecuencias de interés tecnológico, interese fundamentalmente la interacción magnética.

La velocidad de la energía es:

$$\mathbf{v}_E = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon_0 |\eta|^2 + \mu_0)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{2\sigma \delta}{(2\epsilon_0 + \sigma^2 \delta^2 \mu_0)} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\sigma \delta}{\epsilon_0 + \frac{\sigma}{\omega}} \hat{\mathbf{z}} \approx \pm \omega \delta \hat{\mathbf{z}}$$

coincidente con la velocidad de las ondas en el conductor.

### Efecto pelicular

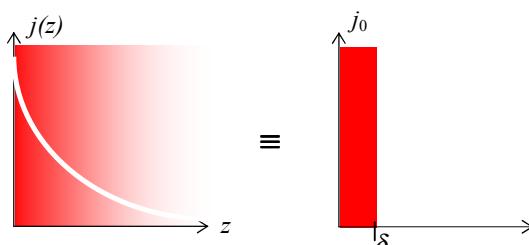


En el gráfico se observa que el campo y la corriente (orientados según  $+x$ ) decaen exponencialmente al propagarse según  $z$ . Se ve que el campo y la corriente tienen valores significativos solamente para valores pequeños de  $z$ . Para  $z = \delta$  la corriente es aproximadamente 0.37 el valor sobre la superficie del conductor  $z = 0$ . Además, la potencia perdida por efecto Joule por unidad de área sobre el plano  $xy$  en todo el conductor es:

$$\langle \frac{dP_J}{dS_{xy}} \rangle = \int_0^\infty \langle \frac{dP_J}{dv} \rangle dz = \frac{\sigma E_0^2}{2} \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma E_0^2}{4\alpha} = \frac{1}{4} \sigma \delta E_0^2$$

que podemos escribir:

$$\langle P_J \rangle = \frac{1}{4} \delta S_{xy} \mathbf{j} \bullet \mathbf{E} \Big|_{z=0}$$



Esta expresión equivale a las pérdidas por efecto Joule producidas por una corriente estacionaria  $j_0 = \sigma E|_{z=0}$  en una faja de espesor  $\delta$  de un conductor de conductividad  $\sigma$ . Por este motivo, en el

cálculo se suele usar esta equivalencia suponiendo una corriente uniforme solamente en la periferia y nula en el resto del material.

Este comportamiento lleva también a que la corriente que circula por un cable se concentre en la periferia a medida que aumenta la frecuencia, como veremos en la siguiente sección. Por este motivo suelen usarse cables de cobre, aluminio o acero con un depósito delgado de plata. A altas frecuencias la corriente circula fundamentalmente por el depósito de plata que es un material de

mayor conductividad (y por lo tanto, menos pérdidas), aunque de mayor precio y menor resistencia estructural que el material central.

**Ejemplo 8.7:** Analizar la propagación de ondas de  $f = 100 \text{ Hz}$  y  $f = 1 \text{ MHz}$  en cobre, donde  $\sigma \approx 6 \times 10^7 \text{ } (\Omega m)^{-1}$ .

$$\text{La relación } \sigma/\omega\epsilon \text{ es } \sigma/\omega\epsilon = \sigma/\omega\epsilon_0 \approx \begin{cases} 1 \times 10^{16} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 1 \times 10^{12} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

En ambos casos se trata de un buen conductor. Esta es además la relación entre la energía asociada al campo magnético y la energía asociada al campo eléctrico dentro del material.

$$\text{La profundidad de penetración es: } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\sigma f}} \approx \begin{cases} 6.5 \text{ mm} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 65 \text{ nm} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$\text{La velocidad de propagación en el medio es: } v = \omega/\beta = 2\pi f \delta \approx \begin{cases} 4.08 \text{ m/s} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 408 \text{ m/s} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

en ambos casos mucho menores que  $c$ .

$$\text{La longitud de onda en el medio es: } \lambda = v/f = 2\pi\delta \approx \begin{cases} 4.08 \text{ cm} & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 408 \text{ nm} & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

$$\text{La impedancia intrínseca es: } \eta = \frac{1+i}{\sigma\delta} \approx \begin{cases} 2.5 \times 10^{-6} (1+i) \Omega & \text{a } f = 100 \text{ Hz} \\ 0.25 (1+i) \Omega & \text{a } f = 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

**Ejemplo 8.8:** Analizar la propagación de una onda de  $f = 1 \text{ GHz}$  en agua de mar.

A esta frecuencia, como se ve en la gráfica de la página 340,  $\sigma \approx \omega\epsilon$ , y el agua de mar no es un dieléctrico ni es un buen conductor. Tenemos con mayor exactitud:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{4(\Omega m)^{-1}}{2\pi \times 10^9 \text{ s}^{-1} \times 80 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}} \approx 0.899$$

En esta situación debemos retomar la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{con} \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i \omega \mu \sigma = \omega^2 \mu \epsilon \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)$$

Haciendo los cálculos tenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha \approx (202.93 - i77.82) \text{ m}^{-1} \Rightarrow \delta = 1/\alpha \approx 1.285 \text{ cm}$$

$$v = \omega/\beta \approx 3.096 \times 10^7 \text{ m/s} \approx 0.1c \Rightarrow \lambda = vf \approx 3.09 \text{ cm} \approx 1.02 \lambda_0$$

$$\eta = \frac{\omega\mu}{\gamma} \approx (33.92 + i13)\Omega \ll \eta_0$$

### Efecto pelicular en conductores cilíndricos

Es de particular interés el análisis del efecto pelicular en conductores cilíndricos como los que se usan normalmente en cables.

En el **Ejemplo 5-11** se analizó la distribución de corriente en un conductor cilíndrico por sucesivas aproximaciones en la aplicación de las ecuaciones de Maxwell del rotor para campos variables en el tiempo, a partir de la aproximación cuasiestática. En esta sección veremos una solución más rigurosa del problema.

Consideremos un alambre cilíndrico recto de longitud indefinida y sección circular de radio  $a$ . El material tiene una permitividad  $\epsilon$  y una conductividad  $\sigma$  que serán en general dependientes de la frecuencia. Suponemos la presencia de campos armónicos:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$  de modo que las ecuaciones de Maxwell llevan a la ecuación de Helmholtz para el campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s + \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0 \quad \text{con} \quad \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 - i \omega \mu \sigma$$

Como la longitud del alambre es muy larga y hay simetría cilíndrica de revolución alrededor del eje del cilindro, el campo sólo puede depender de  $\rho$ . Nos interesa además solamente el campo

axial  $E_z$ , que es el que está ligado a la corriente de conducción en el alambre. Como el vector  $\mathbf{z}$  es constante, tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) E_{s_s} \hat{\mathbf{z}} + \gamma^2 E_{s_s} \hat{\mathbf{z}} = 0 \Rightarrow \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dE_{s_s}}{d\rho} \right) + \gamma^2 \rho^2 E_{s_s} = 0$$

Esta es la ecuación de Bessel, que vimos en los **Capítulos 5 y 7**, para  $n = 0$ . Por lo tanto, la solución es:

$$E_{s_s}(\rho) = A J_0(\gamma\rho) + B Y_0(\gamma\rho)$$

Como la solución debe ser regular para  $\rho = 0$ , sólo puede quedar el primer término:

$$E_{s_s}(\rho) = A J_0(\gamma\rho)$$

Debemos tener en cuenta que en general  $\gamma$  es complejo:  $\gamma = \beta - i\alpha$  y que depende de la frecuencia.

Para la mayoría de los metales, se cumple la condición de **buen conductor** ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) hasta frecuencias por encima del rango de las microondas ( $10^{10} \text{ Hz}$ ), de modo que en general podemos tomar:

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0 - i\omega \mu \sigma = \omega \mu (\omega \epsilon_0 - i\sigma) \approx -i\omega \mu \sigma \Rightarrow \gamma \approx \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{-i\pi/4}$$

y entonces:  $E_{s_s}(\rho) = A J_0(e^{-i\pi/4} \sqrt{\omega \mu \sigma} \rho)$

Estas funciones de Bessel de argumento complejo se conocen como **funciones de Kelvin**<sup>9</sup>:  $\text{ber}_v(x) + i \text{bei}_v(x) = e^{iv\pi} J_v(x e^{-i\pi/4})$  con  $x$  real no-negativo y  $v$  real.

Para  $v = 0$ , como es nuestro caso, se suele suprimir el subíndice. Las funciones de Kelvin cumplen la ecuación diferencial:

$$x^2 w'' + xw' - (ix^2 + v^2)w = 0 \Rightarrow w(x) = \text{ber}_v(x) + i \text{bei}_v(x) = e^{iv\pi} J_v(x e^{-i\pi/4})$$

Hay otro par de soluciones independientes de esta ecuación diferencial:

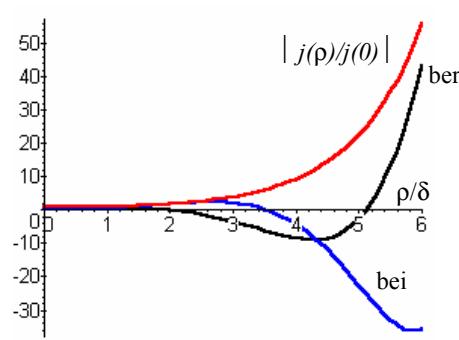
$$w(x) = \text{ker}_v(x) + i \text{kei}_v(x) = i \frac{\pi}{2} H_v^{(1)}(x e^{i3\pi/4}) = -i \frac{\pi}{2} e^{-iv\pi} H_v^{(2)}(x e^{-i\pi/4})$$

que son útiles para describir procesos de propagación ondulatoria.

Para analizar la distribución de corriente en el conductor se usa el primer par de soluciones, ya que el segundo par es singular en  $\rho = 0$ :

$$E_{s_s}(\rho) = A [\text{ber}(\sqrt{\omega \mu \sigma} \rho) + i \text{bei}(\sqrt{\omega \mu \sigma} \rho)] = A [\text{ber}(\sqrt{2} \rho / \delta) + i \text{bei}(\sqrt{2} \rho / \delta)]$$

donde  $\delta$  es la profundidad de penetración en el conductor a la frecuencia de trabajo. La corriente axial será entonces:  $j_{s_s}(\rho) = j_{z_s}(0) [\text{ber}(\sqrt{2} \rho / \delta) + i \text{bei}(\sqrt{2} \rho / \delta)]$



donde  $j_{z_s}(0)$  es la densidad de corriente en el eje del conductor. En la figura se grafican  $\text{ber}$ ,  $\text{bei}$  y el módulo de la corriente en función de  $\rho/\delta$ . Se ve que la corriente es mínima en el eje del conductor y va aumentando hacia la periferia. Por lo tanto la corriente se concentra en la superficie del material. Esto causa una variación de la resistencia por unidad de longitud del cable con la frecuencia. La distribución no uniforme de corriente también modifica la distribución de campo magnético dentro del conductor y en consecuencia la inductancia interna por unidad de longitud, como se calcula en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.9:** Hallar la impedancia **interna** por unidad de longitud de un conductor macizo cilíndrico de radio  $a$  y conductividad constante  $\sigma$  en función de la frecuencia.

<sup>9</sup> Ver, por ejemplo, M.Abramowitz e I.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1970, p.379.

La impedancia por unidad de longitud es:  $Z_i = R + i\omega L_i$  donde  $R$  es la resistencia y  $L_i$  la inductancia interna. En términos de las variables circuitales, esta impedancia se define como el cociente de la caída de tensión a lo largo de la unidad de longitud sobre la superficie del conductor y la corriente total que circula:  $Z_i = E_z(a)/I_z = j_z(a)/\sigma I_z$

Podemos calcular la corriente integrando la densidad sobre toda la sección:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S j_z dS = 2\pi \int_0^a \rho j_z(\rho) d\rho = 2\pi \int_0^a \rho j_{z_s}(0) [\text{ber}(\sqrt{2}\rho/\delta) + i \text{bei}(\sqrt{2}\rho/\delta)] d\rho \\ &= \pi\delta^2 j_{z_s}(0) \int_0^{\sqrt{2}a/\delta} x [\text{ber}(x) + i \text{bei}(x)] dx \end{aligned}$$

Pero<sup>10</sup>:  $\int x \text{ber}(x) dx = x \text{bei}'(x)$        $\int x \text{bei}(x) dx = -x \text{ber}'(x)$

donde la prima simboliza la derivada respecto de  $x$ . Tenemos entonces:

$$I_z = \sqrt{2}\pi a \delta j_{z_s}(0) [\text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta) - i \text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta)]$$

y nos queda:  $Z_i = \frac{j_z(a)}{\sigma I_z} = \frac{i}{\sqrt{2}\pi a \delta} \left[ \frac{\text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta)}{\text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta)} \right]$

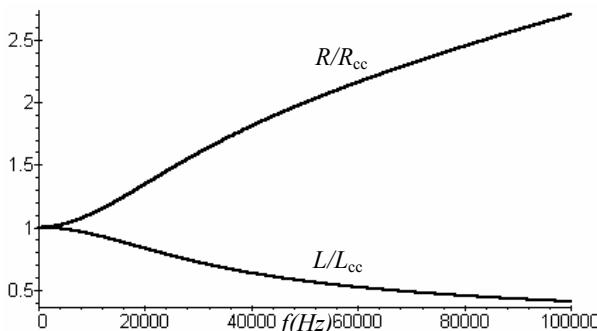
de donde:  $Z_i = R + i\omega L_i = \frac{iR_s}{\sqrt{2}\pi a} \left[ \frac{\text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta)}{\text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) + i \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta)} \right]$

es la impedancia interna del conductor.  $R_s = 1/\sigma\delta$  es la resistencia superficial.

Para  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \delta \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{ber}(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow 1 \\ \text{bei}(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow (\sqrt{2}a/\delta)^2/4 \\ \text{ber}'(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow -(\sqrt{2}a/\delta)^3/16 \\ \text{bei}'(\sqrt{2}a/\delta) \rightarrow (\sqrt{2}a/\delta)/2 \end{cases}$

y entonces:

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow Z_i = R + i\omega L_i \rightarrow \frac{i}{\sigma\sqrt{2}\pi a \delta} \left[ \frac{1 + i(\sqrt{2}a/\delta)^2/2}{i(\sqrt{2}a/\delta)/2} \right] = \frac{1}{\sigma\pi a^2} + i\omega \frac{\mu}{4\pi} = R_{cc} + i\omega L_{i_{cc}}$$



menor a medida que disminuye la corriente.

donde  $R_{cc}$  es la resistencia y  $L_{i_{cc}}$  la inductancia interna del conductor en corriente continua. En la figura se muestra la variación de la resistencia y la inductancia interna por unidad de longitud para un conductor de cobre ( $\sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$ ) de 1mm de radio, entre 0 y 100 KHz. Se observa que la resistencia aumenta, porque disminuye la sección eficaz de transporte de la corriente, mientras que la inductancia interna disminuye porque el campo magnético creado es

<sup>10</sup> M.Abramowitz, I.Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1972. p.380.

## Dieléctricos con pérdidas

Cuando un campo electromagnético variable en el tiempo se propaga en un material dieléctrico, el campo eléctrico crea fuerzas variables en el tiempo sobre los electrones del medio. Los electrones se mueven aceleradamente y, como veremos más adelante, emiten una nueva radiación electromagnética. La energía de esta radiación se toma del campo original, que ve disminuida su energía y va decayendo a medida de que se propaga. Así, desde el punto de vista del campo EM original este proceso de **dispersión** (scattering) se ve como pérdida de energía.

En este caso se tienen los parámetros:  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 0$ .

$$\text{Entonces: } \gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon' - i\epsilon'')}$$

Y se ve que existe atenuación. Son de interés los llamados **dieléctricos de bajas pérdidas**, dado que habitualmente el propósito de los dieléctricos es almacenar energía. En tal caso:  $\epsilon'' \ll \epsilon'$  y podemos aproximar:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu_0 (\epsilon' - i\epsilon'')} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon' (1 - i\epsilon''/\epsilon')} \approx \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon'} \left(1 - i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right)$$

La velocidad de propagación es:

$$v = \omega/\beta \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r'}}$$

La profundidad de penetración es:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{2\epsilon'}{\beta \epsilon''} = \frac{v}{\omega} \frac{2\epsilon'}{\epsilon''}$$

La longitud de onda:

$$\lambda = 2\pi/\beta \approx \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r'}}$$

Se ve que la profundidad de penetración es grande (porque las pérdidas son pequeñas) y la velocidad de propagación y la longitud de onda tienen expresiones similares a las del dieléctrico ideal.

$$\text{La impedancia intrínseca es: } \eta = \eta' + i\eta'' = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu_0}{\beta^2} (\beta + i\alpha) \approx \frac{\omega \mu_0}{\beta^2 + \alpha^2} (\beta + i\alpha)$$

ya que  $\beta \gg \alpha$ . Resulta además que  $\eta' \gg \eta''$ , o sea que  $\varphi \rightarrow 0$ .

$$\text{Finalmente: } \eta \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right) = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r'}} \left(1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right)$$

El vector medio de Poynting es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \pm \frac{\eta' |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2|\eta|^2} \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z} \cos \varphi}{2|\eta|} \hat{\mathbf{z}} \approx \pm \frac{\sqrt{\epsilon_r'} |\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{2\eta_0} \hat{\mathbf{z}}$$

y entonces podemos calcular los otros parámetros:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle \quad (\text{densidad de potencia media perdida})$$

$$\langle u \rangle = \left( \epsilon' + \frac{\mu}{|\eta|^2} \right) \frac{|\tilde{\mathbf{E}}_{0\pm}|^2 e^{\mp 2\alpha z}}{4} \quad (\text{densidad de energía almacenada})$$

$$\mathbf{v}_E = \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{\langle u \rangle} = \pm \frac{2|\eta| \cos \varphi}{(\epsilon' |\eta|^2 + \mu)} \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{velocidad de la energía})$$

donde hemos introducido la impedancia intrínseca compleja:

$$\eta = \frac{\omega \mu}{\gamma} = \frac{\omega \mu}{\beta - i\alpha} \Rightarrow \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left( 1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right)$$

o sea  $\eta = \eta' + i\eta'' \quad \text{con} \quad \eta'' \ll \eta'$

**Para un dieléctrico de bajas pérdidas, la profundidad de penetración es alta (la atenuación es baja) y la impedancia intrínseca es prácticamente real.**

La potencia que fluye y las pérdidas se pueden calcular mediante el vector de Poynting:  $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle \frac{E_0^2}{2|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$

donde:  $\cos \varphi \approx \frac{\epsilon'}{\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2}}$  es cercano a 1 ( $\varphi$  es muy pequeño).

Los dieléctricos con pérdidas de aplicación técnica suelen caracterizarse por la llamada **tangente de pérdidas**  $\delta$ , definida por<sup>11</sup>:

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \Rightarrow \tan \delta \approx \delta \rightarrow 0 \quad \text{para dieléctricos de bajas pérdidas.}$$

La potencia perdida en la propagación de una onda en el medio es:

$$\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = 2\alpha \langle N \rangle = \frac{\alpha E_0^2}{|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z} \quad \text{proporcional a } \alpha.$$

### Conductividad equivalente

Independientemente del tipo de material que estemos analizando, siempre podemos imaginar un medio conductor equivalente con las mismas pérdidas:

$$\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = \frac{\sigma_{eq} E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \quad \text{y como para un dieléctrico:} \quad \left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = \frac{\alpha E_0^2}{|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$$

podemos obtener:  $\sigma_{eq} = \frac{2\alpha}{|\eta|} \cos \varphi \approx \frac{2\alpha}{\sqrt{\mu/\epsilon'}} \frac{2\epsilon''}{2\epsilon'} \Rightarrow \sigma_{eq} \approx \omega \epsilon''$  donde se ha tomado  $\cos \varphi \approx 1$ .

y se ve claramente la relación entre las pérdidas dieléctricas y la **parte imaginaria** de la permitividad compleja. Puede comprobarse que la cantidad  $\omega \epsilon''$  tiene dimensiones de conductividad eléctrica<sup>12</sup>.

Cuando un material presenta **simultáneamente** pérdidas conductoras y dieléctricas (por ejemplo, nuevamente el agua de mar), las pérdidas pueden expresarse mediante una conductividad equivalente:  $\sigma_{eq} = \sigma_c + \omega \epsilon''$

Análogamente, el factor de atenuación puede escribirse:  $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$

<sup>11</sup> En alguna literatura se define  $\tan \delta = \epsilon''/2\epsilon'$

<sup>12</sup> También podemos hablar de una **permittividad equivalente** de, por ejemplo, un conductor, estableciendo la equivalencia  $\sigma \leftrightarrow \omega \epsilon$  (que surge de considerar las pérdidas) para pasar de una descripción a la otra. Estos modelos son convenientes para simplificar los cálculos.

## Plasmas

En la sección precedente se encontró que, para la descripción de la propagación de ondas electromagnéticas, se puede describir al plasma como un medio con una **permitividad equivalente**:

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_0 \left[ \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2)} \right) - i \frac{\Gamma \omega_p^2}{(\omega^2 + \Gamma^2) \omega} \right] \quad \text{donde: } \omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \text{ es la } \mathbf{\text{frecuencia de plasma.}}$$

Para  $\Gamma \ll \omega$ , la parte imaginaria de la permitividad es pequeña y podemos aproximar a la parte real:  $\Gamma \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_{eq} \approx \varepsilon_0 (1 - \omega_p^2 / \omega^2)$

Se ve que para frecuencias menores que la frecuencia de plasma, la permitividad equivalente es negativa, de manera que el vector de onda:  $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{eq}} = i\omega \sqrt{\mu |\varepsilon_{eq}|}$  es imaginario puro y por lo tanto **no hay propagación**. Los campos decaen exponencialmente con la distancia pero no hay un factor de fase real. Por ejemplo, para el campo eléctrico:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - i|k|z)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-|k|z}$$

**Este tipo de campos que no se propagan se llaman evanescentes.**

**La frecuencia de plasma resulta así un límite inferior para la propagación de ondas en el plasma.**

En el siguiente ejemplo calculamos la frecuencia de plasma para varios casos.

**Ejemplo 8.10:** Calcular la frecuencia de plasma en a) la cromosfera solar ( $N = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ), b) la ionósfera ( $N = 3 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$ ), c) un arco de descarga ( $N = 3 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ) y en d) un metal ( $N = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ).

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \Rightarrow \begin{cases} \text{cromosfera:} & \omega_p \approx 3.1 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \\ \text{arco:} & \omega_p \approx 9.78 \times 10^{12} \text{ s}^{-1} \\ \text{ionosfera:} & \omega_p \approx 9.78 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \\ \text{metal:} & \omega_p \approx 5.65 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

Vemos que, salvo en el caso de la ionósfera, donde el gas es muy enrarecido, las frecuencias de plasma son muy altas, lo que indica que estos plasmas son generalmente opacos porque la radiación tiene normalmente frecuencias menores.

## La ionosfera

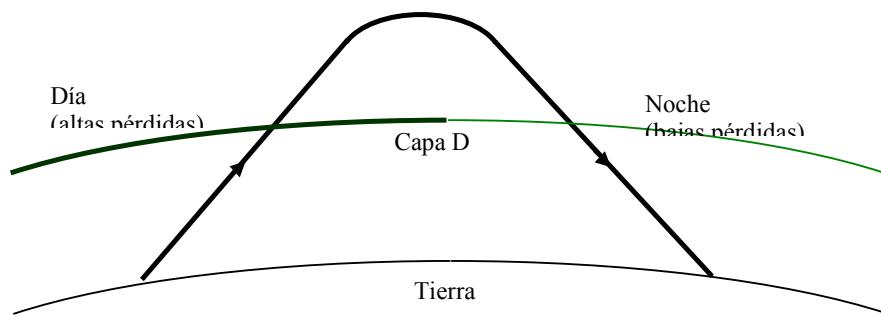
En la región atmosférica que se extiende aproximadamente entre los 50 y 500 Km de altura la radiación solar produce una ionización parcial de los gases produciendo un plasma. Esta región se conoce como ionosfera. La ionosfera consiste en un gas de electrones libres, separados de sus átomos originales por la ionización, y un gas de iones pesados. Como la frecuencia de plasma depende inversamente de la raíz de la masa de los iones involucrados, se ve que el gas de electrones tiene una frecuencia de plasma mayor (más de 40 veces) que la frecuencia de plasma del gas de iones, lo que hace al gas de electrones el factor más importante para la propagación de ondas de alta frecuencia de radio. Además cuanto mayor sea la densidad de electrones, producto de una mayor ionización, mayor será la frecuencia de plasma.

Durante el día puede haber cuatro regiones presentes, llamadas **capas** o regiones D, E, F1 y F2, que difieren entre sí por sus densidades electrónicas. Sus alturas aproximadas son:

<b>D</b>	50 a 90 Km	<b>F1</b>	140 a 210 Km
<b>E</b>	90 a 140 Km	<b>F2</b>	por encima de los 210 Km

Durante el día, una zona E esporádica se observa a veces dentro de la región E y en ciertos momentos del ciclo solar las capas F1 y F2 no son distinguibles sino que se confunden en una única capa F. Como la ionización depende casi exclusivamente de la luz solar, a la noche disminuye notablemente el número de electrones libres, dejando sólo la capa F2 prácticamente disponible para comunicaciones. Debido a la absorción de la luz solar, la densidad del gas de electrones

aumenta a medida que se aumenta la altura, pero este efecto se ve contrarrestado por la menor densidad de la atmósfera a medida que ascendemos, de manera que el máximo se da en la zona de la capa F. La variación de la densidad de electrones con la altura modifica la frecuencia de plasma y con ella la permitividad equivalente del plasma, lo que lleva a que el índice de refracción efectivo de la ionosfera varía con la altura. Esto lleva a que una onda que incide oblicuamente sobre la ionosfera siga un camino “curvo” en su propagación y eventual rebote dentro del plasma, cuando la densidad de electrones local lleve a una frecuencia de plasma mayor que la frecuencia de la onda.



Sólo las capas E, F1, la E esporádica (si está presente), y la F2 refractan ondas de HF. La capa D es también importante porque, aunque no refracta las ondas de HF, las absorbe y atenúa. La región F2 es la más importante para uso en comunicaciones ya que está presente las 24 horas, su gran altitud permite los rebotes más largos y usualmente refracta las frecuencias superiores del espectro de HF (3 a 30 MHz).

La composición y altura de las capas ionosféricas varía por diversos factores:

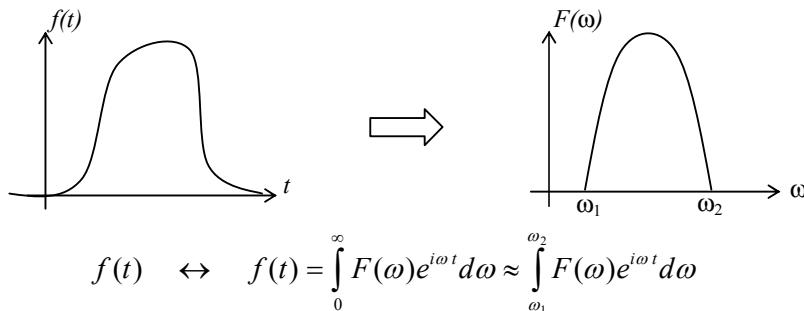
- La hora del día. La ionización es un fenómeno que depende casi exclusivamente de la luz solar. A la noche las capas son más delgadas y con densidad electrónica menor. La altura de la capa inferior (D) se eleva de noche y se hace casi insignificante, lo que es de importancia para las comunicaciones ya que esta capa absorbe las ondas de HF.
- La latitud. Cuanto más verticalmente incida la radiación solar es mayor la densidad de potencia y la tasa de ionización. Por ello las capas ionosféricas son más gruesas y más ionizadas en el ecuador, disminuyendo paulatinamente hasta llegar a los polos, donde además influye la mayor intensidad del campo magnético terrestre que desvía la radiación cósmica que produciría mayor ionización.
- La estación del año. En los equinoccios el sol está perpendicular a la latitud media de cada hemisferio, lo que aumenta la tasa de ionización<sup>13</sup>.
- El ciclo solar. El Sol varía la densidad de potencia que emite en forma cíclica, con un pico máximo cada alrededor de once años. Estos son los períodos de máxima ionización de la ionosfera, aunque la presencia de otras partículas de alta energía que el Sol emite en las llamadas tormentas solares aumenta la ionización de la capa D aumentando la absorción de ondas de comunicaciones. Este efecto lleva a los clásicos desvanecimientos de la señal inmediatamente después de producida la tormenta solar y puede durar hasta un día completo. Las tormentas solares con emisión de partículas cargadas a velocidades relativistas modifican profundamente las líneas de campo magnético terrestre, fundamentalmente en los polos, causando mayor ionización y presencia de auroras. Estos efectos totalmente al azar perturban apreciablemente las comunicaciones en zonas de alta latitud.

<sup>13</sup> Es en la primavera donde se produce el mayor efecto en la capa de ozono austral.

### Medios dispersivos. Señales de banda angosta.

La propagación de señales **no armónicas** en medios dispersivos presenta la dificultad conceptual de definir cuál es la velocidad de la señal, ya que cada componente de frecuencia viaja a una velocidad distinta. Es posible obtener una definición consistente cuando el ancho de banda de la señal es pequeño. Llamamos a este tipo de señales **señales de banda angosta**.

Una señal acotada en el tiempo tiene una representación de Fourier acotada en frecuencia:



En el caso de una onda plana:

$$f(z - vt) \leftrightarrow f(z - vt) = \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega$$

Como la velocidad de propagación de las ondas generalmente depende de la frecuencia, tendremos que  $\beta = \beta(\omega)$ . Si el **ancho de banda**  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  es pequeño (condición matemática para una señal de **banda angosta**) en ese intervalo puede escribirse:

$$\beta = \beta(\omega) \approx \beta(\omega_0) + \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \dots$$

donde  $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$  es la **frecuencia central** de la banda. Queda así:

$$\begin{aligned} f(z - vt) &\approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega t - \beta z)} d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i\left[\omega t - \left(\beta_0 + \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)\right)z\right]} d\omega \\ &= e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega) e^{i(\omega - \omega_0) \left[ t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z \right]} d\omega = e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} F(\Omega) e^{i\Omega \left[ t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z \right]} d\Omega \end{aligned}$$

donde:  $\Omega = \omega - \omega_0$ . Pero esta integral es la representación de Fourier:

$$f(t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z) \leftrightarrow \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} F(\Omega) e^{i\Omega \left[ t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z \right]} d\Omega \Rightarrow f(z - vt) \approx f\left(t - \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega_0} z\right) e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$

donde  $\beta_0 = \beta(\omega_0)$  y  $\omega_0$  es la frecuencia central de la banda de señal.

**Se observa que la señal se comporta como una envolvente  $f(z - v_g t)$  junto con una oscilación rápida de frecuencia  $\omega_0$ .**

La velocidad con que viaja la envolvente es la

**velocidad de grupo:**  $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\beta_0}$

que debe compararse con la

**velocidad de fase**  $v_f = \omega / \beta$

con que se **propaga cada componente de frecuencia** de la señal.

Esto significa que el conjunto (el "centro de masa" del "paquete" de ondas) viaja con  $v_g$ , mientras que cada componente de frecuencia viaja con su correspondiente  $v_f$ .

Como en general la llamada **relación de dispersión**  $\omega = \omega(\beta)$  no es lineal, la velocidad de fase será diferente a cada frecuencia, y algunas componentes viajarán más rápido que otras. Esto lleva a una deformación de la forma de onda del paquete, lo que se conoce como **dispersión**, que, desde el punto de vista de la transmisión de información codificada en señales electromagnéticas, se traduce en distorsión y/o pérdida de datos.

Podemos escribir la velocidad de grupo en función de la velocidad de fase:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \Big|_{\beta_0} = \frac{d}{d\beta} (v_f \beta) \Big|_{\beta_0} = v_f \Big|_{\beta_0} + \beta_0 \frac{dv_f}{d\beta} \Big|_{\beta_0}$$

También podemos escribir:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{d}{d\beta} = \frac{d}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{2\pi}{\beta^2} \frac{d}{d\lambda} \Rightarrow v_g = v_f \Big|_{\lambda_0} - \frac{2\pi}{\beta_0^2} \beta_0 \frac{dv_f}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0} = v_f \Big|_{\lambda_0} - \lambda_0 \frac{dv_f}{d\lambda} \Big|_{\lambda_0}$$

Los medios dispersivos se clasifican como:

- **dispersión normal.** Son los medios en donde  $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0 \Rightarrow v_g < v_f$
- **dispersión anómala.** Son los medios en donde  $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0 \Rightarrow v_g > v_f$

Cuando hay dispersión normal (pequeña) el paquete se distorsiona poco al viajar por el material y su identidad se mantiene. Cuando la dispersión es normal y grande o se trata de dispersión anómala la señal se distorsiona tanto que es imposible recuperar la información. En tal caso la noción de velocidad de grupo pierde su sentido como parámetro que describe la propagación de energía e información. En el siguiente ejemplo vemos que la propagación en un material **con pérdidas** (un conductor) se da con dispersión anómala.

**Ejemplo 8.11:** Calcular las velocidades de fase y de grupo para un buen conductor.

En un buen conductor:  $\beta \approx \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$

La velocidad de fase es:  $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \omega \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}$

Y la velocidad de grupo:  $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = 1 \sqrt{\frac{d\beta}{d\omega}} = 1 \sqrt{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} = 1 \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}}} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}} = 2v_f$

y se ve que la velocidad de grupo es el doble de la velocidad de fase para toda frecuencia, lo que indica que se trata de un caso de **dispersión anómala**.

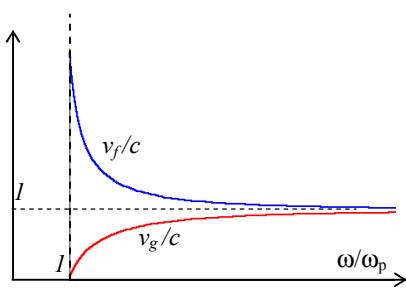
**Ejemplo 8.12:** Calcular las velocidades de fase y de grupo para un plasma sin pérdidas.

En el caso de un plasma sin pérdidas:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{eq}} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Luego:  $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}$

y  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 / \frac{dk}{d\omega} = c / \frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} = c \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$



Se observa que:  $v_f v_g = c^2$ . En la figura se muestra la dependencia de ambas velocidades respecto de  $\omega$ .

Como para todo  $\omega$ :  $v_f > v_g$ , se trata de un caso de **dispersión normal**.

El archivo **GV.ZIP** contiene una página HTML GroupVelocity.htm desde la cual se corre un applet que permite ver la forma de un paquete de ondas con distintos valores de la velocidad de grupo en relación a la velocidad de fase.

## APENDICE 6 - Relaciones de Kramers y Krönig

A una dada frecuencia en muchos dieléctricos existe una relación lineal entre el campo eléctrico y el desplazamiento (o la polarización):

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad \text{donde} \quad \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega)$$

es la permitividad compleja dependiente de la frecuencia. Pero cada función de la frecuencia se puede pensar como la transformada de Fourier de la correspondiente señal o función en el dominio del tiempo:

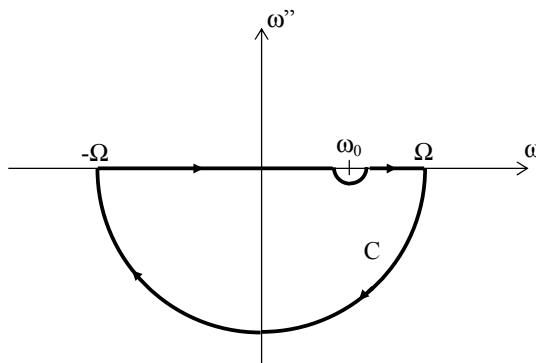
$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt & \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt \\ \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) &= \int_0^\infty \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt & \epsilon(\omega) &= \int_0^\infty \epsilon(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Entonces, la relación que establece el producto de las transformadas corresponde a un **producto convolución** en el dominio del tiempo:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \epsilon(\tau) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \epsilon_0 \chi(\tau) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

Estas ecuaciones describen una **relación causal**, en el sentido que es el campo eléctrico aplicado  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$  la causa que genera el efecto  $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$  o  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$ , la polarización del material. Como en toda relación causal, el efecto debe ser posterior a la causa, de manera que  $t > t - \tau \Rightarrow \tau > 0$  y el límite inferior en las integrales de convolución es cero. En términos generales, hablamos de la relación causal entre un **estímulo** y una **respuesta** mediante una **función de transferencia**  $\epsilon(t)$ .

Las partes real e imaginaria de la función de transferencia están ligadas entre sí, como puede demostrarse de la siguiente manera. Consideremos momentáneamente que la frecuencia es una cantidad compleja:  $\omega = \omega' + i\omega''$ . Tenemos entonces que:



$$\epsilon(\omega) = \int_0^\infty \epsilon(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^\infty \epsilon(t) e^{\omega'' t} e^{-i\omega' t} dt$$

y vemos que  $\epsilon(\omega)$  es una función analítica en el semiespacio inferior del plano complejo ( $\omega < 0$ ). Entonces calculamos la integral:

$$\oint_C \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0}$$

sobre la curva  $C$  del recinto de la figura, donde el semicírculo tiene un radio  $\Omega$  que tiende a infinito. Como el integrando es una función analítica en todo el recinto de integración, se puede aplicar el teorema de los residuos. Como se ha evitado el único polo (en  $\omega_0$ ) la integral es cero. También se anula la integral sobre el semicírculo, debido a que el radio tiende a infinito y el denominador del integrando se anula. Nos queda así:

$$\oint_C \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = \int_{-\infty}^{\omega_0 - \delta} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{C_1} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 - \delta}^{\infty} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = 0$$

donde  $\delta$  es el radio del semicírculo  $C_1$ . La contribución de este tramo es  $-i\pi \chi(\omega_0)$  de modo que podemos escribir:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\omega_0 - \delta} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 + \delta}^{\infty} \frac{\chi(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right] - i\pi \chi(\omega_0) = 0$$

Este límite es el llamado **valor principal de Cauchy** de la integral sobre el eje real y entonces nos queda la relación:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\chi(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right]$$

donde  $\wp$  indica el valor principal de la integral y hemos cambiado  $\omega \rightarrow \omega'$  y  $\omega_0 \rightarrow \omega$ .

Separando esta ecuación en parte real e imaginaria tenemos:

$$\chi'(\omega) - i\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[i\chi'(\omega') + \chi''(\omega')] d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \Rightarrow \begin{cases} \chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \\ \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \end{cases}$$

Estas son las llamadas **relaciones de Kramers y Krönig**<sup>14</sup> que vinculan entre sí las partes real e imaginaria de la susceptibilidad dieléctrica.

Como:  $\epsilon'(\omega) - i\epsilon''(\omega) = \epsilon_0 [1 + \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)] = \epsilon_0 [1 + \chi'(\omega)] - i\epsilon_0 \chi''(\omega)$  tenemos:

$$\epsilon'(\omega) = \epsilon_0 + \frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \quad \epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\epsilon'(\omega') - \epsilon_0] d\omega'}{\omega' - \omega} \right]$$

La parte real de la permitividad está relacionada con el índice de refracción del material, es decir, con la propagación de las ondas en el material, mientras que la parte imaginaria está relacionada con las pérdidas dieléctricas o la absorción del material.

De esta forma se pueden usar las relaciones de Kramers-Krönig para determinar las características de propagación en términos de las propiedades de absorción, que son de más simple medición experimental.

Estas relaciones surgen únicamente de la condición de causalidad en una relación lineal entre estímulo y respuesta que establece que el estímulo debe preceder a la respuesta, y entonces **son aplicables a cualquier situación causal**. Estas relaciones fueron descubiertas independientemente en el diseño de circuitos eléctricos, como surge del libro clásico de Bode "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", de la década del 40 y en otras disciplinas.

La relación entre el par de funciones:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right] \quad g(t) = -\frac{1}{\pi} \wp \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t} \right]$$

se conoce como **transformada de Hilbert**. Las transformadas de Hilbert se usan en diseño de filtros de fase mínima, análisis de vibraciones y deformaciones en sólidos y en todo aspecto donde haya un estímulo y una respuesta lineal.

<sup>14</sup> H.A.Kramers, Nature, 117 (1926) 775, R. De L.Kronig, J. Opt. Soc. Am. 12 (1926) 547

## RESUMEN

En este capítulo describimos la propagación de ondas electromagnéticas en recintos libres de fuentes.

- El caso más simple se da cuando el recinto es vacío. Las ecuaciones de Maxwell llevan a **ecuaciones vectoriales de onda** de las que se deduce que el campo electromagnético se comporta como ondas que se propagan con velocidad

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- Las **ondas planas elementales** ocurren cuando la simetría es cartesiana y la onda se propaga según un eje:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t)$   $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t)$
- y las **ondas linealmente polarizadas** son aquéllas donde la dirección de los campos no varía con el tiempo:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z, t) \hat{\mathbf{e}}_0$   $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H(z, t) \hat{\mathbf{h}}_0$
- En ondas planas cualquier función del tipo  $f(z \mp ct)$  es solución.
- Se demuestra además que las ondas planas son **transversales** a la dirección de propagación:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(z, t) \Rightarrow E_z = 0$   $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(z, t) \Rightarrow H_z = 0$
- Y existe una relación entre los campos eléctrico y magnético de la onda plana, llamada **impedancia intrínseca** (del vacío):  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\eta_0}$   $\eta_0 \approx 377 \Omega$
- El vector de Poynting y la densidad de energía que transporta una onda plana son:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{E^2(\mathbf{r}, t)}{\eta_0} \hat{\mathbf{z}} \quad u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 E^2(\mathbf{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}, t)}{u(\mathbf{r}, t)} = \pm \frac{\hat{\mathbf{z}}}{\eta_0 \epsilon_0} = \pm c \hat{\mathbf{z}}$$

es la llamada velocidad de la energía.

- Cualquier señal físicamente realizable se puede describir como una superposición de armónicas. Para ondas armónicas la ecuación de ondas lleva a una ecuación de Helmholtz:  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$  con  $k = \omega/c$
- La descripción de una onda plana que se propaga en una dirección del espacio cualquiera  $\zeta$  es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \tilde{E}_0 \hat{\mathbf{e}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \frac{\tilde{E}_0}{\eta_0} \hat{\mathbf{h}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right\}$$

$$\text{con} \quad \mathbf{k} = k \hat{\zeta} \quad \hat{\mathbf{h}}_0 = \hat{\zeta} \times \hat{\mathbf{e}}_0$$

mientras que el vector de Poynting y la densidad de energía son:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \zeta \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0) \quad \text{con} \quad \tilde{E}_0 = |E_0| e^{i\varphi_0}$$

$$u(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 |E|^2 = \epsilon_0 |E_0|^2 \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)$$

- Los valores medios de estas cantidades son:  $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{E_0^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0}$   $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$

- En el caso de **ondas no armónicas**, se demuestra que el valor medio del vector de Poynting y la densidad de energía resultan la suma de los valores correspondientes a cada armónica. En el caso de señales periódicas tenemos:

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_n(z)|^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\eta_0} \quad \langle u(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_0 |E_n(z)|^2}{2}$$

- Se presentan las descripciones de las **ondas esféricas** y **cilíndricas elementales**, que dependen solamente de la distancia al origen de coordenadas (esféricas) y de la distancia al eje de simetría (cilíndricas). En ambos casos se resuelve la ecuación de onda **escalar** para pasar luego a las soluciones de la ecuación de onda **vectorial**. En el caso esférico existe una forma general de solución:

$$\nabla^2 f(r,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(r,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f(r,t) = \frac{g(r \mp ct)}{r}$$

que para ondas armónicas puede escribirse:  $f(r,t) = \tilde{f}_0 e^{i(\omega t \mp kr)} / r$  con  $k = \omega/c$ .

A partir de la solución escalar podemos escribir una solución vectorial:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \nabla \times [\mathbf{r} f(\mathbf{r},t)] = -\mathbf{r} \times \nabla f(\mathbf{r},t) \quad \text{y} \quad \mathbf{N}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

Estos campos son transversales a la dirección de propagación y su relación es la impedancia intrínseca del vacío.

En el caso **cilíndrico** no existe una forma general de solución sino que se tiene, para ondas armónicas escalares:

$$\nabla^2 f_s - k^2 f_s = 0 \Rightarrow f_s(\rho) = \begin{cases} A H_0^{(1)}(k\rho) + B H_0^{(2)}(k\rho) & k \neq 0 \\ A' \ln(\rho) + B' & k = 0 \end{cases}$$

donde  $H_0^{(1)}$  y  $H_0^{(2)}$  son las llamadas funciones de Hankel. Las soluciones vectoriales son más complejas que en el caso esférico pero comparten las condiciones de transversabilidad y la relación de la impedancia intrínseca del vacío entre los campos.

- Cuando existe más de una fuente de ondas, es necesario superponer los efectos. Se dan dos casos, según que las fases de los campos emisidos estén correlacionados en el tiempo o no:
  - ♦ Superposición de campos si hay correlación de fase (**caso coherente**);
  - ♦ Superposición de intensidades si no hay correlación de fase (**caso incoherente**).

La superposición coherente se conoce como **interferencia**, que da lugar a una redistribución espacial de la energía y crea una serie de fenómenos que se utilizan en diversas técnicas, llamadas de **interferometría**, que se describen brevemente. Por otra parte la interferencia es la técnica fundamental en el diseño de antenas para obtener esquemas direccionales de emisión a demanda.

- Un aspecto importante de las ondas es su **polarización**, que describe la posición de los vectores campo a medida que se propagan. En general, la punta de los campos traza una hélice de sección elíptica. Casos particulares son la polarización circular y la polarización lineal. La polarización de las ondas crea fenómenos en la propagación

en materiales, que permiten conocer propiedades de estos materiales, y es también de importancia en el diseño de antenas. Se describen varios fenómenos asociados a la polarización en la disciplina que se conoce como **electroóptica**.

- Para describir la propagación de ondas en medios materiales es necesario previamente entender la respuesta de los átomos y moléculas del medio a un campo electromagnético. Este comportamiento se puede describir en primera aproximación mediante modelos simples, que son de utilidad para aplicaciones técnicas. Se presentan los modelos clásicos de Drude-Lorentz (dieléctricos) y Drude (conductores).
- En el modelo de **Drude-Lorentz** se halla que para campos armónicos existe una **permittividad compleja** que describe el fenómeno de pérdidas:

$$\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_0(1 + \chi_{\omega}) = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \right) = \varepsilon'_{\omega} - i\varepsilon''_{\omega}$$

mientras que en el modelo de **Drude** de conductores también existe una **conductividad compleja**:  $\sigma = \sigma_{cc} \frac{1-i\Omega}{1+\Omega^2}$  que en la mayoría de las aplicaciones se puede considerar real y coincidente con la conductividad de cc.

- Finalmente, un **plasma** es un gas de iones, que puede describirse alternativamente

mediante una **permittividad compleja**:  $\varepsilon_{eq} = \varepsilon_0 \left( 1 - \frac{\omega_p^2(\omega + i\Gamma)}{(\omega^2 + \Gamma^2)\omega} \right)$

o mediante una **conductividad compleja**:  $\sigma_{eq} = \omega_p^2 \varepsilon_0 \frac{(\Gamma + i\omega)}{(\Gamma^2 + \omega^2)}$

donde la **frecuencia de plasma** es:  $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$

- La propagación de ondas en medios materiales debe tener en cuenta los parámetros complejos y dependientes de la frecuencia que los caracterizan. En el caso de los **dieléctricos** llamados **sin pérdidas** (donde se desprecian las pérdidas, en rigor), la propagación es idéntica a la propagación en el vacío, salvo que la velocidad y la impedancia intrínseca son menores:  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} < c \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{n} < \eta_0$

donde n es el llamado **índice de refracción** del medio en las aplicaciones ópticas.

- En la propagación en medios con pérdidas hay una atenuación de los campos a medida que se propagan. Esto lleva a un vector de onda e impedancia intrínseca complejos:  $\gamma = \beta - i\alpha \quad \eta = \eta' + i\eta''$  y los campos tienen la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$\beta$  es el **factor de propagación** y  $\alpha$  el **factor de atenuación**, generalmente dependientes de la frecuencia. La inversa de  $\alpha$ ,  $\delta = 1/\alpha$ , se llama **profundidad de penetración**. Indica grosso modo la zona de influencia importante de los campos dentro del material debido al decaimiento posterior. La impedancia intrínseca compleja implica un des-

fasaje entre los campos. Este ángulo es tanto mayor cuanto mayores son las pérdidas.

$$\text{Se encuentra que el vector de Poynting es: } \langle \mathbf{N} \rangle \frac{E_0^2}{2|\eta|} \cos \varphi e^{-2\alpha z}$$

donde  $\varphi$  es el ángulo de fase del complejo  $\eta$ . La potencia perdida en la propagación de una onda en el medio es:  $\left\langle \frac{dP}{dv} \right\rangle = 2\alpha \langle N \rangle$  proporcional a  $\alpha$ .

- En la propagación en conductores interesan los **buenos conductores**, donde:

$$|\mathbf{j}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \Rightarrow \sigma \gg \omega \epsilon_0$$

Y tenemos:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{con} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha}$$

El comportamiento de decaimiento se conoce como **efecto pelicular** e implica una distribución no uniforme de las líneas de campo dentro de los conductores. Se describe el efecto pelicular en **conductores cilíndricos**, que incrementa el valor de la resistencia del material aumentando las pérdidas de Joule con la frecuencia. Los conductores exhiben una impedancia intrínseca compleja:  $\eta = \eta' + i\eta'' = \frac{1+i}{\sigma\delta}$

El ángulo de fase  $\varphi$  en un conductor es  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ), lo que indica fuertes pérdidas.

- En la propagación en **dieléctricos con pérdidas** interesa el caso de bajas pérdidas, donde  $\epsilon'' \ll \epsilon'$ . Se tiene nuevamente un factor de propagación complejo:

$$\gamma = \beta - i\alpha \Rightarrow \begin{cases} \beta = \omega / v \\ \alpha = 1/\delta = \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \beta \end{cases} \quad \text{con} \quad v = 1/\sqrt{\mu\epsilon'}$$

$$\text{y una impedancia intrínseca: } \eta = \eta' + i\eta'' \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left( 1 + i \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right)$$

El ángulo de fase  $\varphi$  en un dieléctrico de bajas pérdidas es pequeño. Su tangente se conoce como **tangente de pérdidas** del material.

- En el caso de los **plasmas**, la permitividad equivalente tiene su parte real negativa **por debajo** de la frecuencia de plasma. Como esto implica un factor de propagación imaginario puro, se tendría un campo del tipo:

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - i|k|z)} = E_0 e^{i\omega t} e^{-|k|z}$$

Este es un campo que **no se propaga o evanescente**. Por lo tanto, en el plasma la frecuencia de plasma es una **frecuencia de corte inferior**, que indica un límite inferior a la propagación de ondas. Por encima de la frecuencia de plasma el material se comporta como un dieléctrico con pérdidas. El ejemplo de aplicación de los plasmas más importante para las comunicaciones es la ionosfera, que se describe brevemente.

- Cuando en un medio la velocidad de las ondas armónicas depende de la frecuencia, y se propaga una señal **no armónica**, cada componente armónica se propaga a

velocidad diferente, y se produce una **distorsión** de la señal, que en casos destruye su contenido de información. Este fenómeno se conoce como **dispersión**. Incluso es difícil decir cuál es la velocidad de la señal en su conjunto. En el caso de señales de **banda angosta** (donde el espectro de Fourier es limitado) es posible definir una velocidad del conjunto, llamada **velocidad de grupo**:  $v_g = d\omega/d\beta|_{\beta_0}$  que comparamos con la **velocidad de fase**:  $v_f = \omega/\beta$  con que viaja cada componente armónica. Ambas velocidades dependen de la frecuencia. Si  $v_g < v_f$  decimos que la dispersión es **normal**, mientras que es **anómala** en los casos donde:  $v_g > v_f$ . En casos de dispersión normal pequeña la señal puede conservar su integridad, lo que no ocurre para dispersión normal grande o dispersión anómala.

- El Apéndice 6 demuestra que existen relaciones entre la parte real y la parte imaginaria de la permitividad compleja, relaciones llamadas de **Kramers-Krönig**. Estas relaciones son válidas para cualquier función de transferencia en **sistemas causales** y están asociadas a la **transformada de Hilbert**.

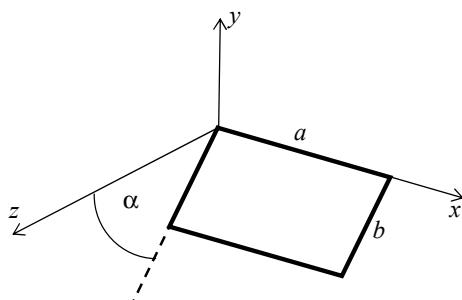
## PROBLEMAS

- 8.1) Una onda plana monocromática de frecuencia  $f = 10 \text{ MHz}$  se propaga en el vacío según la dirección del eje  $x$ . El campo  $\mathbf{E}$  tiene la dirección del eje  $z$  y su valor pico es  $E_0 = 1 \text{ V/m}$ . a) Calcular  $k$  y  $\lambda$ . b) Escribir la expresión de los campos eléctrico y magnético y el vector de Poynting instantáneos para la onda progresiva. c) Hallar la ecuación de los planos de fase constante. d) Hallar las frecuencias del espectro del vector de Poynting. e) Calcular el valor medio del vector de Poynting. f) Calcular los valores instantáneos y medio de la densidad de energía almacenada en el campo.

[Rta:  $\mathbf{k} = 0.2 \text{ m}^{-1} \mathbf{x}$ ,  $\lambda = 30 \text{ m}$ ,  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $\langle \mathbf{N} \rangle = 1.32 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2 \mathbf{x}$ ,  $\langle u \rangle = 4.42 \times 10^{-12} \text{ J/m}^3$  ]

- 8.2) Dos ondas monocrómáticas de igual amplitud, frecuencia y fase inicial se propagan en el vacío según el eje  $z$ . Los planos de polarización forman un ángulo  $\alpha$ . Hallar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  totales, el valor instantáneo y el valor medio del vector de Poynting.

- 8.3) Dos ondas monocrómáticas de igual amplitud, frecuencia y fase inicial están polarizadas linealmente según el eje  $z$ . Los vectores de propagación están en el plano  $xy$  y forman un ángulo  $\alpha$  entre ellos. Calcule  $\langle \mathbf{N} \rangle$  e indique si la onda resultante es una onda plana. Analice en particular el caso  $\alpha = \pi$ .



- 8.4) Una onda plana que viaja en el vacío  $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$  incide sobre una espira rectangular de resistencia  $R$ , situada como indica la figura. Calcular: a) el campo magnético asociado a la onda incidente, b) la velocidad de la onda, c) la corriente inducida en la espira y d) el valor eficaz de la corriente inducida y graficar en función de  $\alpha$ . Considerar los casos particulares  $b/\lambda = 1/2, 1$ .

- 8.5) Una onda plana monocromática de  $100 \text{ MHz}$  se propaga en neopreno en la dirección  $z$ . Calcular sin utilizar aproximaciones: a) el desfasaje entre los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , b) la expresión del vector de Poynting medio y c) la distancia que debe recorrer la onda para que su densidad media de flujo de potencia se reduzca a la mitad. *Dato: Para neopreno a 100 MHz:*
- $$\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = 3.4 \quad \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = 0.16$$

[Rta:  $4^\circ 33'$ ,  $1.12 \text{ m}$ ]

- 8.6) En un medio dieléctrico con pérdidas cuya permitividad relativa es  $2.5$  y cuya tangente de pérdidas es  $0.001$  existe un campo eléctrico armónico de amplitud  $250 \text{ V/m}$  y frecuencia  $1 \text{ Ghz}$ . Calcule la conductividad del medio y la potencia media disipada por metro cúbico.

[Rta:  $1.39 \times 10^4 \text{ S/m}$ ,  $4.34 \text{ W/m}^3$ ]

- 8.7) Utilizando los datos de la página 8-32 determine la frecuencia a la cual la profundidad de penetración en el agua de mar es de  $10 \text{ m}$ . Discuta la dificultad que existe para las comunicaciones submarinas, incluso a muy bajas frecuencias.

- 8.8) Una onda plana monocromática de  $10 \text{ MHz}$  se propaga en un metal, del cual se conoce el tiempo de relajación  $\tau = 10^{-17} \text{ seg}$ . Hallar, a) la conductividad del metal y b) la profundidad de penetración a la frecuencia dada.

[Rta:  $8.85 \times 10^5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ,  $0.17 \text{ mm}$ ]

- 8.9) Una onda plana de  $10 \text{ MHz}$  se propaga en cobre ( $\sigma_{\text{Cu}} = 5.88 \times 10^7 \text{ } \text{A}/\Omega\text{m}$ ) en la dirección del eje  $+x$ . Se sabe que  $H_y(x=0, t=0) = 0.1 \text{ A/m}$ . a) Verificar que a la frecuencia dada el material se comporta como un buen conductor. b) Hallar las expresiones de  $\mathbf{E}(x, t)$ ,  $\mathbf{H}(x, t)$  y  $\mathbf{j}(x, t)$ . c) Calcular la longitud de onda y la velocidad de fase.

[Rta:  $1.3 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $1304 \text{ m/s}$ ]

- 8.10) Una onda electromagnética se propaga en agua de mar en la dirección  $+z$  y es tal que en  $z = 0$  vale  $\mathbf{E} = 100 \cos(107\pi t) \mathbf{x} \text{ V/m}$ . Sabiendo que  $\epsilon_r = 72$  y  $\sigma = 4 \text{ S/m}$ , determine la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la profundidad de penetración y la velocidad de fase.

[Rta:  $8.89 \text{ Np/m}$ ,  $8.89 \text{ rad/m}$ ,  $\pi e^{j\pi/4} \Omega$ ,  $0.112 \text{ m}$ ,  $3.53 \times 10^6 \text{ m/s}$ ]

- 8.11) La velocidad de grupo de una onda en un cierto medio es proporcional a la frecuencia:  $v_g(\omega) = a \omega$ , donde  $a$  es una constante. Se sabe además que a una frecuencia especial  $\omega_0$ , la velocidad de fase iguala a la velocidad de grupo. Se desea saber cuál es la velocidad de fase para cualquier otra frecuencia. ¿Se trata de una dispersión normal o anómala?

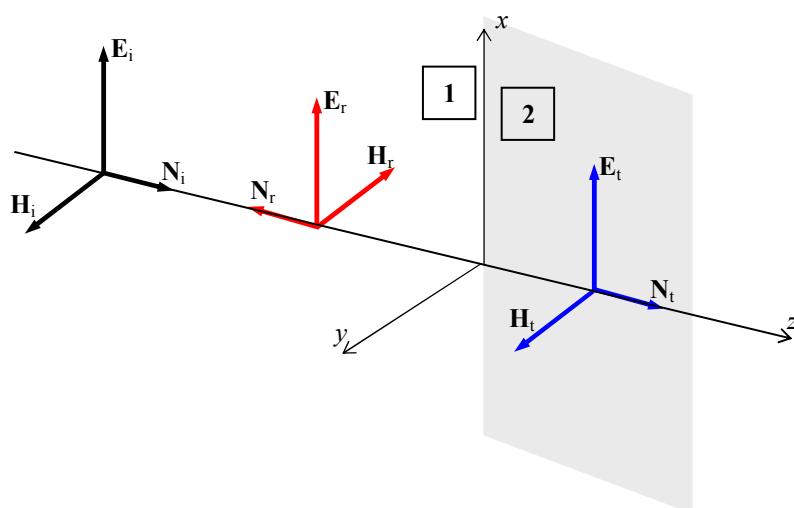
- 8.12) Determinar la velocidad de fase y la velocidad de grupo para una onda plana de  $100 \text{ MHz}$  que se propaga en la ionósfera.

## 8 - Ondas Electromagnéticas (cont.)

En este parte veremos la propagación de ondas electromagnéticas en presencia de interfases entre medios de características diferentes. Cuando las ondas inciden normalmente sobre la interfase se producen reflexiones cuya descripción es equivalente a la de la propagación de ondas en líneas de transmisión. Numerosas aplicaciones en blindajes surgen de esta teoría. En la incidencia oblicua se hallan las leyes de Snell de la óptica. Finalmente veremos brevemente la teoría de la difracción de ondas al propagarse cerca de obstáculos.

### Incidencia normal sobre una interfase

Hemos visto la propagación de ondas en medios ilimitados. En las siguientes secciones veremos el comportamiento de los campos cuando ondas electromagnéticas inciden sobre una superficie interfase que separa dos medios de propiedades (simbolizadas por su impedancia intrínseca) diferentes. Por simplicidad matemática usaremos ondas planas e interfases planas.



campos en las dos regiones:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= E_{0+} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_1 z)} + E_{0-} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega' t + k'_1 z)} \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0+}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_1 z)} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega' t + k'_1 z)} \quad k'_1 = k_1(\omega') \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= E_{0t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega'' t - \gamma''_2 z)} \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_{0t}}{\eta_2} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega'' t - \gamma''_2 z)} \quad \gamma''_2 = \gamma_2(\omega'') \end{aligned}$$

En la región de incidencia, debe haber en general una **onda incidente** y una **onda reflejada**, debido a la presencia de la interfase que implica una discontinuidad en el medio donde ocurre la propagación. En la región de transmisión, supuesto semi-infinito, sólo hay una **onda transmitida**. Las frecuencias de estas tres ondas son en general diferentes.

Los campos deben cumplir las condiciones de contorno en la interfase  $z = 0$ . Como ambos campos son tangenciales a la superficie de separación, se conservan:

$$\begin{aligned} E_1(z=0, t) &= E_2(z=0, t) \quad \Rightarrow \quad E_{0+} e^{i\omega t} + E_{0-} e^{i\omega' t} = E_{0t} e^{i\omega'' t} \\ H_1(z=0, t) &= H_2(z=0, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{0+}}{\eta_1} e^{i\omega t} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} e^{i\omega' t} = \frac{E_{0t}}{\eta_2} e^{i\omega'' t} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se deben cumplir para todo  $t$ . Como las funciones exponenciales complejas son ortogonales para distintos valores de  $\omega$ , debe ser  $\omega = \omega' = \omega''$ .

Consideraremos una onda plana monocromática linealmente polarizada que incide **normalmente** desde un medio (1) sobre un plano interfase que lo separa de un medio (2).

En la incidencia normal la dirección de propagación es **perpendicular al plano interfase**. Suponemos que el **medio de incidencia** (1) no tiene pérdidas ( $k_1$  y  $\eta_1$  reales). El **medio de transmisión** (2) tendrá en general parámetros complejos  $\gamma_2$  y  $\eta_2$ .

Planteamos las ecuaciones de los

Queda así:

$$E_{0+} + E_{0-} = E_{0t}$$

$$\frac{E_{0+}}{\eta_1} - \frac{E_{0-}}{\eta_1} = \frac{E_{0t}}{\eta_2}$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar  $E_{0-}$  y  $E_{0t}$  en función de  $E_{0+}$ :

$$\rho = \frac{E_{0-}}{E_{0+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\tau = \frac{E_{0t}}{E_{0+}} = 1 + \rho = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

donde hemos definido los **coeficientes de reflexión y transmisión**  $\rho$  y  $\tau$

Desde el punto de vista del transporte de energía, podemos calcular el **flujo medio de potencia por unidad de área** que transportan las ondas involucradas:

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_i H_i^*) = \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} \quad (\eta_1 \text{ real})$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_r H_r^*) = |\rho|^2 \frac{E_{0+}^2}{2\eta_1} = |\rho|^2 \langle P_i \rangle \Rightarrow R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = |\rho|^2$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_t H_t^*) = |\tau|^2 \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} \langle P_i \rangle \Rightarrow T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{\eta_1 \eta_2'}{|\eta_2|^2} |\tau|^2$$

donde  $R$  y  $T$  son los **coeficientes de reflexión y transmisión de potencia**.

Para una onda plana que se propaga en un medio infinito, la relación entre el campo eléctrico y el magnético es  $\pm\eta$ , donde  $\eta$  es la impedancia intrínseca de ese medio y el signo superior corresponde a la onda progresiva y el inferior a la regresiva. Esto ocurre para los campos transmitidos, que forman una onda progresiva, pero no para los campos en el medio de incidencia. En este último caso podemos definir la **impedancia de campo** o **impedancia de onda**:

$$Z(z) = \frac{E_1}{H_1} = \frac{\frac{E_{0+} e^{-ikz} + E_{0-} e^{ikz}}{\eta_1}}{\frac{E_{0+} e^{-ikz} - E_{0-} e^{ikz}}{\eta_1}} \Rightarrow Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$$

que depende de la posición.

De las ecuaciones para la incidencia normal se observa que hay una gran semejanza con las ecuaciones que hemos hallado para las líneas de transmisión:

	<b>Líneas de transmisión</b>	<b>Incidencia normal</b>
Característica del medio	<i>Impedancia característica: <math>Z_0</math></i>	<i>Impedancia intrínseca: <math>\eta</math></i>
Magnitud física	<i>tensión: <math>v(z,t)</math></i> <i>corriente: <math>i(z,t)</math></i>	<i>campo eléctrico: <math>E(z,t)</math></i> <i>campo magnético: <math>H(z,t)</math></i>
Coeficiente de reflexión	$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$
Coeficiente de transmisión	$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} = 1 + \rho$	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \rho$
Reflexión de potencia	$R =  \rho ^2$	$R =  \rho ^2$
Transmisión de potencia	$T = 1 - R$	$T = 1 - R$
Impedancia de campo	$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$	$Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$
Relación de onda estacionaria	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$

**Esto significa que muchas técnicas del análisis de la propagación de ondas en líneas, entre ellas el uso de la carta de Smith, se pueden usar en la descripción de la propagación en la incidencia normal.**

### Incidencia sobre un dieléctrico sin pérdidas

**En este caso  $\eta_2$  es real y entonces  $\rho$  es real.**

El campo reflejado se hallará en fase con el campo incidente en  $z = 0$  si  $\eta_2 > \eta_1$  y en contrafase si  $\eta_2 < \eta_1$ . Sólo si las impedancias intrínsecas de ambos medios coinciden no habrá reflexión. En general, esto ocurrirá cuando se trate de un único medio (no existe interfase) si ambos medios son dieléctricos, ya que serán medios paramagnéticos y las permeabilidades habitualmente serán cercanas a la del vacío. Sin embargo, como veremos más abajo, actualmente se usan materiales de ferrita cerámica con impedancia característica similar a la del aire.

**Esta situación equivale al caso de una línea ideal cargada con una resistencia.**

### Incidencia sobre un dieléctrico con pérdidas

**En este caso  $\eta_2$  es compleja y entonces  $\rho$  es también complejo.**

Para dieléctricos de **bajas pérdidas**,  $\eta_2 = \eta'_2 + i\eta''_2$  con  $\eta''_2 \ll \eta'_2$  y el desfasaje entre los campos es pequeño. Los campos de la onda transmitida decaen lentamente en la propagación.

**Esta situación equivale al caso de una línea ideal cargada con una impedancia de reactancia pequeña frente a su resistencia.**

### Incidencia sobre un conductor

**En este caso  $\eta_2$  es compleja y pequeña:**  $\eta_2 = (1+i)/\sigma\delta \ll \eta_0$ .

Si se tratara de un **conductor perfecto** ( $\sigma \rightarrow \infty$ ),  $\eta_2 \rightarrow 0$ . En tal caso  $\rho = -1$  y se forman ondas estacionarias de **E** y **H** en el medio de incidencia. La onda de **E** estará desfasada en  $\pi/2$  en tiempo y espacio respecto de la onda de **H**. Toda la potencia incidente se refleja.

**Esta situación es equivalente al caso de la línea ideal cortocircuitada.**

Cuando el medio conductor **no es perfecto**, de todas formas  $|\eta_2| \ll \eta_0$  y entonces:

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = -\frac{1 - \eta_2/\eta_1}{1 + \eta_2/\eta_1} \approx -\left(1 - 2\frac{\eta_2}{\eta_1}\right) = -1 + 2\frac{\eta_2}{\eta_1}$$

de modo que  $\rho$  difiere del caso ideal por una pequeña diferencia.

El coeficiente de transmisión es:  $\tau = 1 + \rho \approx 2\frac{\eta_2}{\eta_1} \Rightarrow |\tau| \ll 1$

La potencia que se propaga por el conductor es:

$$\langle N_t \rangle = \frac{\eta'_2 |E_{ot}|^2}{2|\eta_2|^2} e^{-2z/\delta} = \frac{\eta'_2 |\tau|^2 |E_{o+}|^2}{2|\eta_2|^2} e^{-2z/\delta} \approx \frac{2|E_{o+}|^2}{\eta_1^2 \sigma \delta} e^{-2z/\delta} = \frac{4}{\eta_1 \sigma \delta} \langle N_i \rangle e^{-2z/\delta}$$

donde  $\langle P_i \rangle$  es el valor medio de la potencia incidente. Toda esta potencia se disipa por efecto Joule en el semiespacio conductor. Por lo tanto  $4/(\eta_1 \sigma \delta)$  de la potencia incidente por unidad de área de interfase se disipa en el conductor. Este valor es muy pequeño. Por ejemplo, para la incidencia normal de una onda de  $10^{14} \text{ Hz}$  (luz visible) desde el vacío sobre un semiespacio de cobre:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_1 = \eta_0 \approx 377 \Omega \\ \sigma \approx 6 \times 10^7 (\Omega m)^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{4}{\eta_1 \sigma \delta} = \frac{4}{\eta_1} \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{2 \sigma}} \approx 1.9 \times 10^{-9}$$

y podemos decir que prácticamente toda la potencia se ve reflejada en la interfase. Por este motivo el cobre (como la mayoría de los metales) es opaco a la luz visible.

**Ejemplo 8.13:** Los coeficientes de reflexión y transmisión se han definido a partir de los campos eléctricos de las ondas incidente, reflejada y transmitida sobre la interfase. Encuentre sus expresiones en términos de los campos magnéticos.

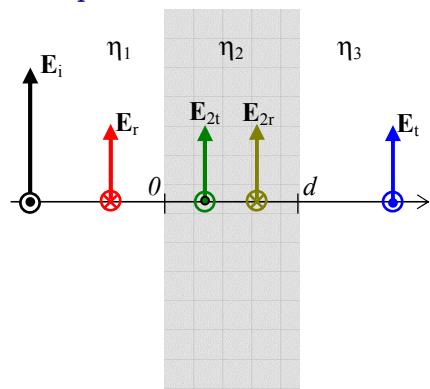
Tenemos:  $\rho_M = \frac{H_r}{H_i} = \frac{-E_r/\eta_1}{E_i/\eta_1} = -\rho$        $\tau_M = \frac{H_t}{H_i} = \frac{E_t/\eta_2}{E_i/\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau$

El coeficiente de reflexión "magnético" es igual y de signo opuesto que el coeficiente de reflexión "eléctrico". Esto indica que el desfasaje entre los campos magnéticos incidente y reflejado sobre la interfase difiere en  $\pi$  del desfasaje entre los correspondientes campos eléctricos. El coeficiente de transmisión "magnético" es  $(\eta_1/\eta_2)$  veces el coeficiente de transmisión "eléctrico".

## Incidencia sobre capas materiales

Cuando una onda plana incide normalmente sobre capas materiales, en cada capa el campo estará formado por una onda progresiva y una onda regresiva, salvo en el medio de transmisión. El análisis de los campos se realiza imponiendo sobre cada interfase las condiciones de contorno, como vemos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 8.14:** Considere una capa de espesor  $d$  e impedancia intrínseca  $\eta_2$  que separa dos medios de impedancias intrínsecas  $\eta_1$  y  $\eta_3$ . Halle los campos en todo el espacio si sobre la capa incide normalmente una onda plana monocromática linealmente polarizada.



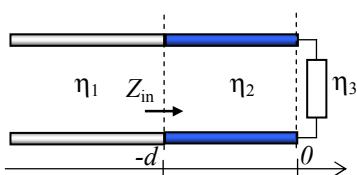
La situación se esquematiza en la figura. El modelo equivalente de líneas de transmisión se muestra abajo. Los campos en cada región son:

$$(1) \begin{cases} \mathbf{E}_i = E_0 \hat{x} e^{i(\omega t - \gamma_1 z)} & \mathbf{H}_i = (E_0 / \eta_1) \hat{y} e^{i(\omega t - \gamma_1 z)} \\ \mathbf{E}_r = E_{0r} \hat{x} e^{i(\omega t + \gamma_1 z)} & \mathbf{H}_r = -(E_{0r} / \eta_1) \hat{y} e^{i(\omega t + \gamma_1 z)} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \mathbf{E}_{2t} = E_{02t} \hat{x} e^{i(\omega t - \gamma_2 z)} & \mathbf{H}_{2t} = (E_{02t} / \eta_2) \hat{y} e^{i(\omega t - \gamma_2 z)} \\ \mathbf{E}_{2r} = E_{02r} \hat{x} e^{i(\omega t + \gamma_2 z)} & \mathbf{H}_{2r} = -(E_{02r} / \eta_2) \hat{y} e^{i(\omega t + \gamma_2 z)} \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathbf{E}_t = E_{0t} \hat{x} e^{i(\omega t - \gamma_3 z)} \quad \mathbf{H}_t = (E_{0t} / \eta_3) \hat{y} e^{i(\omega t - \gamma_3 z)}$$

Las condiciones de borde, que implican la conservación de las componentes tangenciales de los campos sobre cada interfase llevan a las ecuaciones:



$$z=0 \Rightarrow \begin{cases} E_0 + E_{0r} = E_{02t} + E_{02r} \\ E_0 - E_{0r} = \frac{\eta_1}{\eta_2} (E_{02t} - E_{02r}) \end{cases}$$

$$z=d \Rightarrow \begin{cases} E_{02t} e^{-i\gamma_2 d} + E_{02r} e^{i\gamma_2 d} = E_{0t} e^{-i\gamma_3 d} \\ E_{02t} e^{-i\gamma_2 d} - E_{02r} e^{i\gamma_2 d} = \frac{\eta_2}{\eta_3} E_{0t} e^{-i\gamma_3 d} \end{cases}$$

de donde pueden despejarse las cuatro incógnitas  $E_{0r}, E_{0t}, E_{0vr}, E_{02t}$ . Se obtiene:

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = -\frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2)} \frac{e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)}{e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)} \frac{e^{-i\gamma_2 d}}{e^{-i\gamma_2 d}}$$

$$\tau = \frac{E_{0t}}{E_0} = \frac{4\eta_2\eta_3}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2)} \frac{e^{i\gamma_3 d}}{e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

$$\frac{E_{02t}}{E_0} = \frac{2\eta_2(\eta_3 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2)} \frac{e^{i\gamma_2 d}}{e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

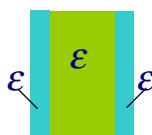
$$\frac{E_{02r}}{E_0} = \frac{2\eta_2(\eta_3 - \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)} \frac{e^{i\gamma_2 d}}{e^{i\gamma_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-i\gamma_2 d}}$$

$\rho$  también se puede obtener con la analogía de líneas de transmisión calculando la impe-

dancia de entrada  $Z_{in}$  del segundo tramo:  $\rho = \frac{Z_{in} - \eta_1}{Z_{in} + \eta_1}$  como en el siguiente Ejemplo.

**Ejemplo 8.15:** Un radomo está formado por tres capas, las exteriores de 1.5 mm de espesor y permitividad relativa 4 y la central de espuma sintética de 1.81 cm de espesor y permitividad relativa 1.1. Calcule el coeficiente de reflexión a incidencia normal para ondas de 3 y 6 GHz.

Un **radomo** (de radar+domo - figura) es una cubierta que encierra una antena (u otra instalación de comunicaciones) para protegerla del medio ambiente, rayos, etc. Su uso más extendido es en aviones, buques, helicópteros, etc. Idealmente debe ser transparente a la radiación que emite o recibe la antena, aunque esto se logra en un ancho de banda limitado.

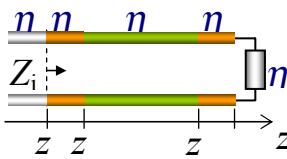


Para determinar el coeficiente de reflexión del conjunto de capas es suficiente, en la analogía con líneas de transmisión, conocer la impedancia de entrada del conjunto  $Z_{in}$ . En la figura:

$$\Rightarrow \frac{d}{D} \frac{D}{d}$$

$$\eta_1 = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_{1r}} = \eta_0 / 2 \quad \eta_2 = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_{2r}} \approx 0.95\eta_0$$

$$z_1 = -d = -0.0015 \text{ m} \quad z_2 = -(d + D) = -0.0196 \text{ m} \quad z_3 = -(2d + D) = -0.0211 \text{ m}$$



Para hallar la impedancia de entrada del conjunto el método más sencillo es usar la carta de Smith para calcular las sucesivas impedancias de entrada de cada interfase. Primero normalizamos la impedancia de carga a  $\eta_1$ . El punto de carga (**A**) se halla entonces en el punto  $z = 2+i0$ . Desde allí nos trasladamos a  $|p|$  constante hacia el generador una distancia:  $d/\lambda_1 = df/v_1 = df\sqrt{\epsilon_{1r}}/c \approx 0.03$  ( $f = 3 \text{ GHz}$ ).

Llegamos así a **B**, donde medimos la impedancia normalizada:  $z(z_1) \approx 1.8 - i0.5$  que corresponde a la impedancia de entrada:

$$Z(z_1) \approx (1.8 - i0.5)\eta_0 / 2$$

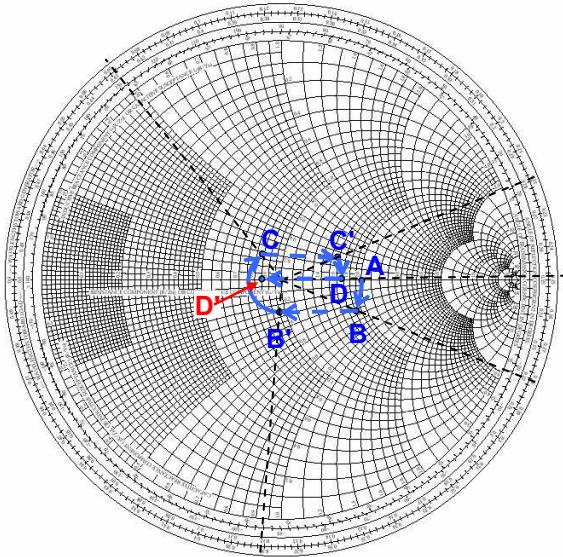
Renormalizamos esta impedancia a  $\eta_2$ , que ahora es carga de la línea representativa de la capa intermedia:

$$z'(z_1) \approx (1.8 - i0.5)\sqrt{\epsilon_{2r}} / 2 \approx 0.95 - i0.26$$

(punto **B'**). La impedancia de entrada a la capa intermedia en  $z_2$  se obtiene ahora girando desde **B'** a  $|p|$  constante hacia el generador una distancia:  $D/\lambda_2 = Df\sqrt{\epsilon_{2r}}/c \approx 0.19$  lo que nos lleva al punto **C** cuya impedancia normalizada es:  $z(z_2) \approx 0.82 + i0.17$  que corresponde a una impedancia verdadera:

$$Z(z_2) \approx (0.82 + i0.17)0.95\eta_0$$

Esta es impedancia de carga para la capa extrema izquierda. Normalizamos a  $\eta_1$ :  $z'(z_2) \approx 1.57 + i0.33$  y obtenemos el punto **C'**. Desde aquí giramos a  $|p|$  constante hacia el generador  $d/\lambda_1 \approx 0.03$  para llegar a **D**, que da la impedancia de entrada de todo el conjunto:  $z(z_3) \approx 1.68 + i0.02$  que corresponde a una impedancia  $Z_{in} \approx (1.68 + i0.02)\eta_0 / 2$ . Finalmente normalizamos a  $\eta_0$  para obtener **D'**. La distancia entre **D'** y el centro de la carta (relativa al radio de la carta) nos da el módulo del coeficiente de reflexión total:  $|p| \approx 0.086$ , que como se ve es muy bajo, indicando que el "sandwich" del radomo es bastante transparente a la frecuencia de cálculo. A la frecuencia doble se deben recalcular las relaciones  $z/\lambda$ , lo que modifica todas las impedancias de entrada a cada sector. Se obtiene en este caso:  $|p| \approx 0.45$  lo que indica que la reflexión es importante (~21% de la potencia incidente sobre el radomo se refleja).



**Ejemplo 8.16:** Analice la incidencia normal sobre una capa de un buen conductor y espesor grande frente a la profundidad de penetración a la frecuencia de operación para simplificar las ecuaciones resultantes.

Si la capa es de un buen conductor:

$$\gamma_2 = \frac{1-i}{\delta} \Rightarrow e^{i\gamma_2 d} = e^{-d/\delta} e^{id/\delta} \quad \eta_2 = \frac{1+i}{\sigma\delta} \Rightarrow |\eta_2| << \eta_1, \eta_3$$

Tenemos así, desarrollando según Taylor:

$$\begin{aligned} \rho &\approx -1 - 2i \frac{\eta_2}{\eta_1} \cot\left[(1-i)\frac{d}{\delta}\right] = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{id/\delta} e^{d/\delta} + e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}} \\ \tau &\approx 4 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{ik_3 d}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}} \\ \frac{E_{02t}}{E_0} &\approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{id/\delta} e^{d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}} \quad \frac{E_{02r}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}}{e^{id/\delta} e^{d/\delta} - e^{-id/\delta} e^{-d/\delta}} \end{aligned}$$

Si el espesor de la capa es grande frente a la profundidad de penetración, como ocurre a altas frecuencias en muchas aplicaciones, los términos que tienen la exponencial  $e^{-d/\delta}$  tienden a cero y nos queda:

$$\rho \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \tau \approx 4 \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{i(k_3-1/\delta)d} e^{-d/\delta} \quad \frac{E_{02t}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \frac{E_{02r}}{E_0} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} e^{-2id/\delta} e^{-2d/\delta}$$

Se observa que el coeficiente de reflexión es prácticamente el que se tendría al incidir sobre un conductor de espesor infinito (-1) y que dentro de la capa la onda regresiva es despreciable frente a la onda progresiva. Esto se debe a que la onda regresiva dentro de la capa surge del rebote en la interfase derecha de la onda que se propagó en la capa, la que se ve muy atenuada con respecto a su valor original. También se observa que la energía que atraviesa la capa, que es proporcional al módulo al cuadrado del coeficiente de transmisión es muy baja, ya que interviene el factor  $e^{-2d/\delta}$ .

Podemos calcular la potencia perdida en la capa conductora por unidad de área. Despreciando la onda regresiva dentro de la capa, el campo en ella es:

$$\mathbf{E}_2 = E_{02t} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_2 z)} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \hat{\mathbf{x}} e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

y la densidad de potencia media disipada por efecto Joule es:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{j} \bullet \mathbf{E}_2^*) = \frac{\sigma |E_2|^2}{2} \approx 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 e^{-2z/\delta}$$

donde hemos supuesto que el medio de incidencia no tiene pérdidas ( $\eta_1$  real). La potencia perdida por unidad de área en toda la capa es:

$$\langle W \rangle = \int_{capa} \langle w \rangle dz \approx 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \int_0^d e^{-2z/\delta} dz = 2\sigma \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \frac{\delta}{2} (1 - e^{-2d/\delta}) \approx \sigma \delta \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2$$

cuando el espesor de la capa es grande frente a la profundidad de penetración. Podemos reescribir esta expresión en otros términos de mayor utilidad observando que, si el campo magnético sobre la primer interfase es:

$$H_1|_{z=0} = \frac{E_0 - E_{0r}}{\eta_1} = \frac{1-\rho}{\eta_1} E_0 \approx 2 \frac{E_0}{\eta_1} \Rightarrow \frac{|E_0|^2}{\eta_1^2} \approx \frac{|H_1|_{z=0}^2}{4} = \frac{|H_s|^2}{4}$$

donde  $H_s$  es el **campo magnético superficial**. Como:  $\eta_2 = \frac{1+i}{\sigma\delta}$  nos queda:

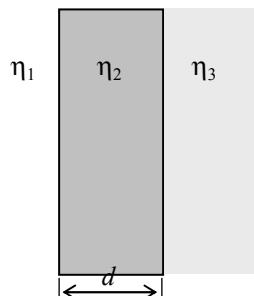
$$\langle W \rangle \approx \sigma \delta \frac{|\eta_2|^2}{\eta_1^2} |E_0|^2 \approx \sigma \delta \frac{2}{\sigma^2 \delta^2} \frac{|H_s|^2}{4} = \frac{1}{2} |H_s|^2 R_s$$

donde  $R_s = 1/\sigma\delta$  es la resistencia superficial del material que forma la capa. Este análisis es similar al realizado para ondas que se propagan en un semiespacio conductor en la primera parte de este capítulo.

De este análisis surge que la potencia electromagnética que atraviesa la capa es muy pequeña siempre que su espesor sea grande respecto a la profundidad de penetración del material a la/s frecuencia/s de trabajo. En tal caso, una capa conductora es un excelente **blindaje** para ondas electromagnéticas.

### Recubrimiento de cuarto de onda

Supongamos que los tres medios son dieléctricos sin pérdidas. Analicemos las características que debe tener la capa para anular la reflexión de ondas que incidan normalmente. Esto es de interés en aplicaciones ópticas y de medición.



Debido a la analogía con las líneas de transmisión, puede verse que este problema es equivalente a la adaptación mediante un transformador de cuarto de onda entre una línea de impedancia característica  $\eta_1$  y una impedancia de carga  $\eta_3$ . Las ecuaciones de diseño del adaptador son entonces:

$$l_2 = \lambda_2 / 4 \quad \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

Podemos verificar que estas condiciones dan reflexión nula a partir de la expresión de  $\rho$ :

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = -\frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{ik_2 d} - (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-ik_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) e^{ik_2 d} - (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2) e^{-ik_2 d}}$$

El factor exponencial resulta:  $e^{\pm ik_2 d} = e^{\pm i \frac{2\pi \lambda_2}{\lambda_2} \frac{d}{4}} = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$  y entonces:

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_0} = -\frac{(\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) + (\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_3 + \eta_2) + (\eta_1 - \eta_2)(\eta_3 - \eta_2)} = -\frac{\eta_1 \eta_3 - \eta_2^2}{\eta_1 \eta_3 + \eta_2^2}$$

y  $\rho$  se anula cuando la impedancia de la capa es la media geométrica entre las impedancias de los medios adyacentes. Una capa que cumple estas condiciones se denomina **recubrimiento de cuarto de onda** y es muy utilizado en instrumentos ópticos para eliminar las reflexiones.

El recubrimiento de  $\lambda/4$  funciona adecuadamente a una única frecuencia, pero fuera de ella el coeficiente de reflexión ya no es cero. Podemos calcularlo usando nuevamente la analogía con las líneas de transmisión a partir de la expresión de la impedancia de entrada del conjunto recubrimiento+segundo medio y la impedancia intrínseca del primer medio:

$$\rho = \frac{Z_{in} - \eta_1}{Z_{in} + \eta_1} \quad \text{con: } Z_{in} = \eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)}$$

$$\text{Entonces: } \rho = \frac{\eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)} - \eta_1}{\eta_2 \frac{\eta_3 + i \eta_2 \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2 + i \eta_3 \tan(\beta_2 l_2)} + \eta_1} = \frac{\eta_2(\eta_3 - \eta_1) + i(\eta_2^2 - \eta_1 \eta_3) \tan(\beta_2 l_2)}{\eta_2(\eta_3 + \eta_1) + i(\eta_2^2 + \eta_1 \eta_3) \tan(\beta_2 l_2)}$$

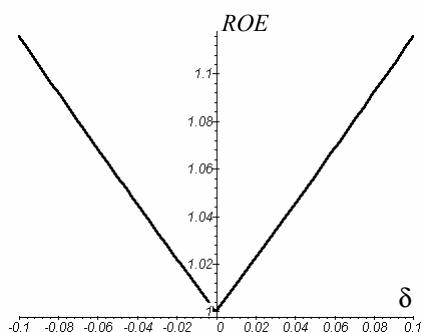
Pero  $\beta_2 l_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \frac{\lambda_{20}}{4} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_{20}}{\lambda_2} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}$  donde  $(\omega_0, \lambda_{20})$  son la frecuencia angular central y la

longitud de onda en el recubrimiento para adaptación y  $(\omega, \lambda_2)$  son los valores correspondientes fuera de adaptación. Si llamamos  $\omega = \omega_0(1+\delta)$  con  $\delta \ll 1$  tenemos:

$$\tan(\beta_2 l_2) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(1+\delta)\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) + \tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)} \cong -\frac{1}{\tan\left(\delta \frac{\pi}{2}\right)} \cong -\frac{2}{\pi \delta}$$

y entonces:  $\rho = \frac{\pi \eta_2 (\eta_3 - \eta_1) \delta - 2i(\eta_2^2 - \eta_1 \eta_3)}{\pi \eta_2 (\eta_3 + \eta_1) \delta - 2i(\eta_2^2 + \eta_1 \eta_3)} \quad ROE = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$

**Ejemplo 8.17:** Se desea diseñar un recubrimiento de cuarto de onda para adaptar al aire un vidrio de permitividad relativa  $\epsilon_{r2} = 4$  para ondas de 100 MHz. Analizar la variación de ROE con la frecuencia alrededor de la adaptación.



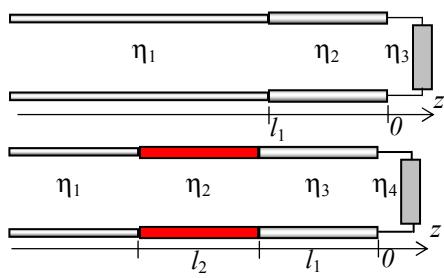
El diseño del adaptador de  $\lambda/4$  es:

$$\eta_1 = \sqrt{\eta_0 \eta_2} = \frac{\eta_0}{\sqrt[4]{\epsilon_{r2}}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} \approx 266.58 \Omega$$

$$l_a = \frac{\lambda_a}{4} = \frac{v_a}{4f} = \frac{c}{4f \sqrt{\epsilon_{r2}}} \approx 0.375 \text{ m}$$

Si ploteamos ROE en función de  $\delta$ , obtenemos la gráfica de la izquierda. Se observa que ROE varía prácticamente en forma lineal alrededor de la frecuencia de adaptación.

Cuando se sale de la frecuencia de resonancia aumenta el ROE y la reflexión. Una forma de aumentar el ancho de banda, es decir, el rango de frecuencias en que ROE es cercano a 1 es colocar varios recubrimientos sucesivos con impedancias que van cambiando gradualmente desde las impedancias de los medios extremos. Una forma de hacerlo es agrupar recubrimientos de  $\lambda/4$  tales que las relaciones de las sucesivas impedancias sean los coeficientes de las potencias del binomio. Por ejemplo, para 1 sección (3 medios) se usan los coeficientes del binomio de grado 1:



#### • 1 sección (cuarto de onda):

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \Rightarrow (1,1) \Rightarrow \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} \Rightarrow \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

#### • 2 secciones:

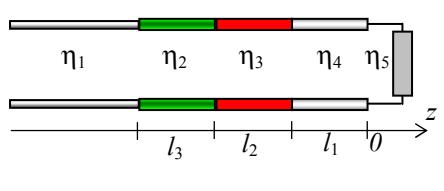
$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \Rightarrow (1,2,1) \Rightarrow 2 \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} = 2 \log \frac{\eta_4}{\eta_3}$$

$$l_1 = -\lambda_3/4 \quad l_2 = -(\lambda_3/4 + \lambda_2/4) \quad \Rightarrow \eta_2 = \sqrt[4]{\eta_1^3 \eta_4} \quad \eta_3 = \sqrt[4]{\eta_4^3 \eta_1}$$

Se puede calcular la impedancia de campo sobre la cara izquierda de cada recubrimiento:

$$Z_{in1} = Z(-\lambda/4) = \sqrt{\eta_1 \eta_4} \quad Z_{in2} = Z(-\lambda/2) = \eta_1$$

lo que implica que el sistema se halla adaptado.



#### • 3 secciones:

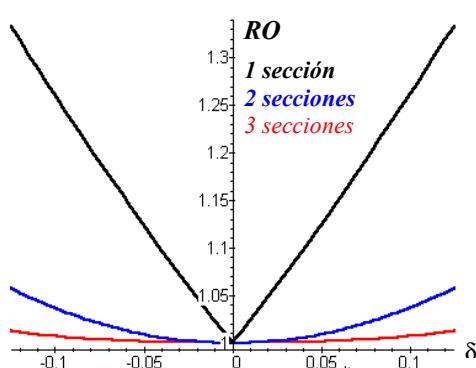
$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \Rightarrow (1,3,3,1) \Rightarrow 3 \log \frac{\eta_2}{\eta_1} = \log \frac{\eta_3}{\eta_2} = \log \frac{\eta_4}{\eta_3} = 3 \log \frac{\eta_5}{\eta_4}$$

con:

$$l_1 = -\lambda_4/4 \quad l_2 = -(\lambda_4/4 + \lambda_3/4) \quad l_3 = -(\lambda_4/4 + \lambda_3/4 + \lambda_2/4)$$

$$\eta_2 = \sqrt[8]{\eta_1^7 \eta_5} \quad \eta_3 = \sqrt{\eta_1 \eta_5} \quad \eta_4 = \sqrt[8]{\eta_1^7 \eta_5}$$

En todos estos casos podemos estimar el ancho de banda calculando el ROE como en el caso previo, a partir de la impedancia de entrada del conjunto, que se obtiene yendo desde la carga hacia el generador calculando sucesivamente las impedancias de entrada a cada tramo, con  $\tan(\beta_i \Delta l_i) \approx -2/\pi\delta$



#### • 2 secciones:

$$Z(l_1) = \eta_3 \frac{\pi \eta_4 \delta - 2i \eta_3}{\pi \eta_3 \delta - 2i \eta_4} \quad Z(l_2) = \eta_2 \frac{\pi Z(l_1) \delta - 2i \eta_2}{\pi \eta_2 \delta - 2i Z(l_1)} \Rightarrow \rho = \frac{Z(l_2) - \eta_1}{Z(l_2) + \eta_1}$$

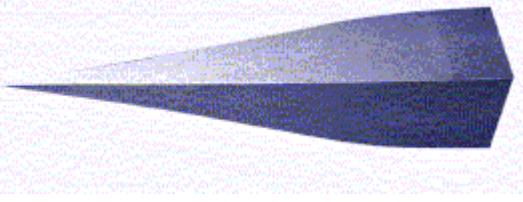
#### • 3 secciones:

$$Z(l_1) = \eta_4 \frac{\pi \eta_5 \delta - 2i \eta_4}{\pi \eta_4 \delta - 2i \eta_5} \quad Z(l_2) = \eta_3 \frac{\pi Z(l_1) \delta - 2i \eta_3}{\pi \eta_3 \delta - 2i Z(l_1)} \quad Z(l_3) = \eta_2 \frac{\pi Z(l_2) \delta - 2i \eta_2}{\pi \eta_2 \delta - 2i Z(l_2)} \\ \Rightarrow \rho = \frac{Z(-3\lambda/4) - \eta_1}{Z(-3\lambda/4) + \eta_1}$$

En la gráfica se observa que el ancho de banda efectivo del sistema aumenta a medida que aumenta el número de secciones de adaptación. Este es un método práctico para mejorar la respuesta en frecuencia de lentes ópticas. Los sucesivos recubrimientos se depositan mediante técnicas de

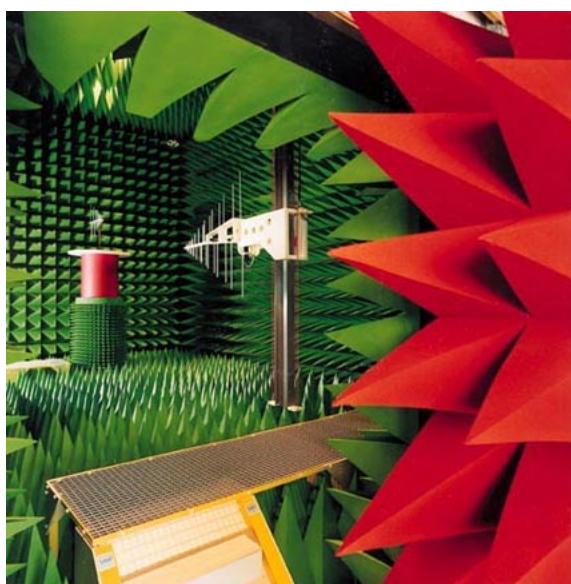
depositación en vacío y sus propiedades ópticas se modifican cambiando la composición química o la cristalografía del depósito. En muchos casos los recubrimientos son poliméricos y se modifican sus propiedades cambiando la composición de las cadenas o agregando impurezas adecuadas.

También se puede pensar en usar un medio cuya impedancia intrínseca varíe gradualmente a lo largo del recubrimiento, desde la impedancia del medio izquierdo hasta la del medio a la derecha.



Esto se logra, por ejemplo, con una estructura piramidal como la de la figura, que lleva la impedancia de campo desde el valor del aire al valor del material de la pirámide. Este tipo de pirámides se usan en las:

### Cámaras Anecoicas



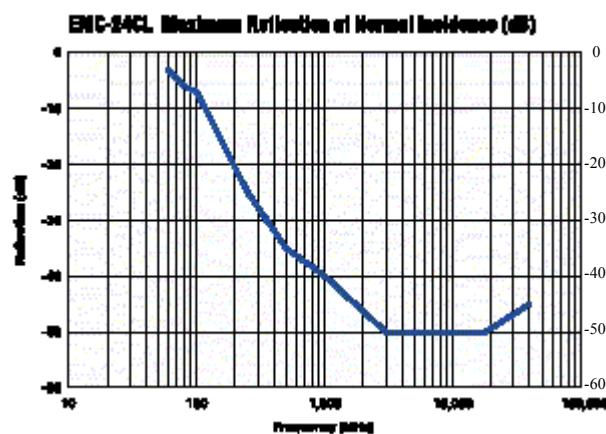
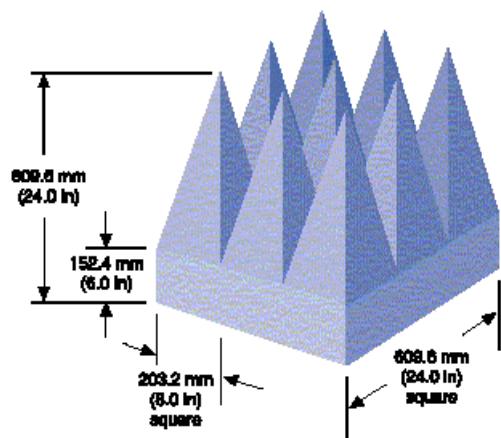
En muchas aplicaciones es necesario probar equipos que emiten radiación electromagnética como si se hallaran muy lejos de cualquier objeto que pudiera dispersar la radiación y causar interferencias que modifiquen el comportamiento del equipo bajo ensayo.

Estas pruebas son esenciales para determinar el diagrama espacial de radiación de antenas, las emisiones de equipos electrónicos que podrían causar interferencia, etc.

Para ello se usan cámaras cuyas paredes absorben completamente la radiación que les llega, sin producir ecos, por los que se las llama anecoicas. En la figura se muestra el interior de una cámara anechoica con las paredes tapizadas con pirámides absorbentes.

Estas cámaras son diseñadas con tamaños diferentes y con distintos tipos de material absorbente para responder a las distintas normas de prueba para diferentes tipos de radiación (existen también cámaras anecoicas para **sonido**, que permite evaluar las propiedades acústicas de sistemas de audio).

En la siguiente figura se muestra una celda de pirámides comercial usada en la banda de microondas de 80 MHz a 40 GHz, de acuerdo a las normas IEC 61000-4-3 (civil) y MIL-STD 462D



(militar) de uso en testeо de compatibilidad electromagnética (EMC). El material es una espuma de poliuretano especial impregnado con una fórmula carbonada conductora y sales antiflame en el proceso de fabricación. A la derecha se presenta la máxima reflexión (en dB) para incidencia

normal en función de la frecuencia. Para no generar ecos cuando la radiación incide sobre las paredes de la cámara estas paredes deben ser absorbentes. Por ello es que se impregna el material de las pirámides con un material conductor para producir pérdidas por efecto Joule.

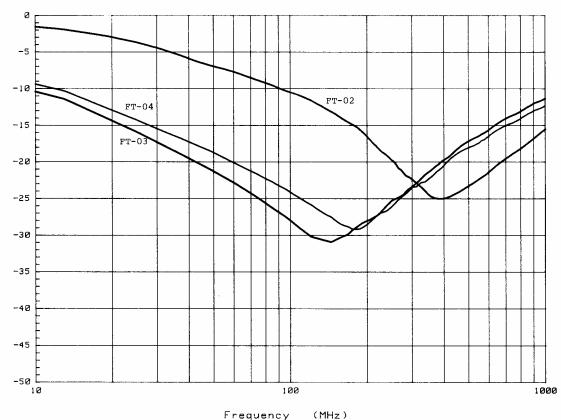
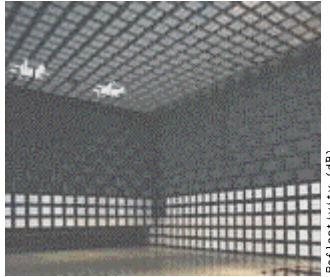
Otra forma de lograr el mismo efecto es usar un material cuya impedancia intrínseca tenga parte real igual a la del vacío y parte imaginaria no nula, lo que implica pérdidas de Joule, o sea, absorción. Se fabrican actualmente materiales de este tipo con ferritas ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) cerámicas, como el titanato de ferrita, para el cual se tiene  $\mu_r = \epsilon_r = 60(2-i)$ . La impedancia intrínseca es  $\eta_0$  y no hay reflexión en la dirección normal, y toda la potencia incidente se transmite al material que la absorbe por sus pérdidas dieléctricas y magnéticas. Ya que:

$$\gamma = \beta - i\alpha = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon} = \omega \sqrt{(\mu' - i\mu'')(\epsilon' - i\epsilon'')} = \frac{\omega}{c} \sqrt{(\mu'_r \epsilon'_r - \mu''_r \epsilon''_r) - i(\mu''_r \epsilon'_r + \epsilon''_r \mu'_r)}$$

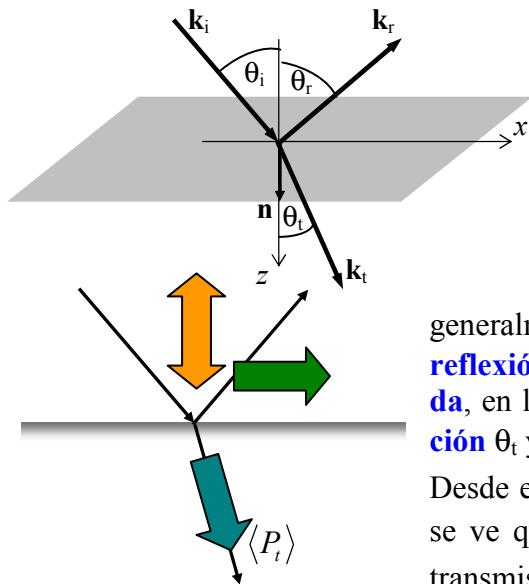
$$= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(120^2 - 60^2) - i(2 \times 120 \times 60)} = \frac{60\pi}{\lambda} \sqrt{3 - i4} = \frac{60\pi}{\lambda} (2 - i) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{60\pi}{\lambda}$$

que es la atenuación por unidad de longitud de penetración de las ondas que ingresan en un medio de este material.

Este tipo de material absorbente tiene una buena respuesta en frecuencia y se usa también en cámaras anecoicas en forma de mosaico, aportando una mayor resistencia mecánica y mayor facilidad constructiva que los paneles de pirámides. En la gráfica se muestra la respuesta en frecuencia de la reflectividad de varios formatos del material Eccoisorb™. En otros modelos los mosaicos de absorbente se combinan con una capa metálica posterior y/o un dieléctrico para aumentar aún más el ancho de banda de baja reflectividad



### Incidencia oblicua



Cuando el vector de propagación  $\mathbf{k}$  de una onda electromagnética incidente no es normal a la interfase plana entre dos medios de impedancia intrínseca diferentes hablamos de incidencia oblicua.

El plano formado por la normal  $\mathbf{n}$  a la interfase y el vector de incidencia  $\mathbf{k}_i$  es el **plano de incidencia** ( $xz$ ). El **ángulo de incidencia** es  $\theta_i$ . Debido a la desadaptación de impedancias entre ambos medios habrá generalmente una onda **reflejada**, definida por su **ángulo de reflexión**  $\theta_r$  y el vector  $\mathbf{k}_r$  y una onda transmitida (o **refractada**, en la jerga de la óptica), definida por el **ángulo de refracción**  $\theta_t$  y el vector  $\mathbf{k}_t$  (supuesto real en esta sección).

Desde el punto de vista de la potencia que propagan las ondas, se ve que hay una potencia transmitida  $\langle P_t \rangle$  en el medio de transmisión, mientras que en el medio de incidencia hay potencia que se propaga en dirección **paralela** a la interfase y potencia que se propaga en dirección **normal** a la interfase. Las componentes de los campos **normales al plano de incidencia** son **transversales** a las direcciones de propagación de potencia.

Es matemáticamente conveniente y ventajoso desde el punto de vista de las analogías conceptuales entre la incidencia de ondas sobre interfases y la propagación de ondas en líneas de transmisión definir la llamada **impedancia de onda**, como la relación entre las componentes de los campos **paralelas a la interfase**:

$$Z = \frac{|E_t|}{|H_t|} = \frac{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}|}{|\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}|}$$

La onda plana incidente tendrá sus campos polarizados en un plano perpendicular a  $\mathbf{k}_i$ . Suponemos por simplicidad ondas linealmente polarizadas. En tal caso, cualquier dirección de polarización de los campos se puede resolver en dos componentes: una con  $\mathbf{E}$  **contenido en el plano de incidencia** y otra con  $\mathbf{E}$  **normal al plano de incidencia**. Las condiciones de borde de los campos sobre la interfase son diferentes para estos dos casos, por lo que vamos a estudiarlos por separado. Los campos resultantes se pueden superponer en un caso de polarización lineal cualquiera.

Para cualquier dirección de polarización de la onda incidente podemos escribir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_i e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)}{\omega \mu_i} \\ \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_r e^{i(\omega' t - \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}'_r \times \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)}{\omega' \mu_i} \\ \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_t e^{i(\omega'' t - \mathbf{k}''_t \cdot \mathbf{r})} & \mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}''_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)}{\omega'' \mu_i} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r(\omega')$ ,  $\mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t(\omega'')$ . Estos campos deben satisfacer las condiciones de contorno sobre la interfase  $z = 0$ :

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r - \mathbf{E}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r - \mathbf{H}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0$$

que es la expresión matemática de conservación de la componentes tangenciales. Estas ecuaciones de conservación implican que la fase de las ondas debe ser la misma sobre el plano interfase por la ortogonalidad de las exponenciales complejas. Nuevamente, como en el caso de la incidencia normal, la frecuencia de las ondas debe ser la misma:  $(\omega = \omega' = \omega'')$

$$\Rightarrow \mathbf{k}'_r = \mathbf{k}_r = \mathbf{k}_r(\omega), \mathbf{k}''_t = \mathbf{k}_t = \mathbf{k}_t(\omega)$$

para que estas condiciones se cumplan para **todo instante de tiempo**, y además:

$$k_{i_x} x = k_{r_x} x = k_{t_x} x \Rightarrow k_{i_x} = k_{r_x} = k_{t_x}$$

para que se cumpla para **todo punto** ( $x, z = 0$ ) sobre la interfase. Entonces las componentes tangenciales de los vectores de onda deben ser iguales y tenemos:

$$k_{i_x} = k_{r_x} \Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r \Rightarrow \sin \theta_i = \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$$

$$k_{i_x} = k_{t_x} \Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2}$$

Estas relaciones entre los ángulos de las direcciones de propagación y la normal a la interfase se conocen como **leyes de Snell** de la óptica geométrica. Si ambos medios

son dieléctricos ( $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$ ):

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los **índices de refracción** de los medios.

**Las leyes de Snell son válidas independientemente de la polarización de la onda incidente.**

Se observa que en la incidencia desde un medio ópticamente menos **denso** a otro más denso ( $n_2 > n_1$ ) el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia, es decir, la dirección de propagación se acerca a la normal, mientras que lo opuesto ocurre en el caso contrario ( $n_2 < n_1$ ).

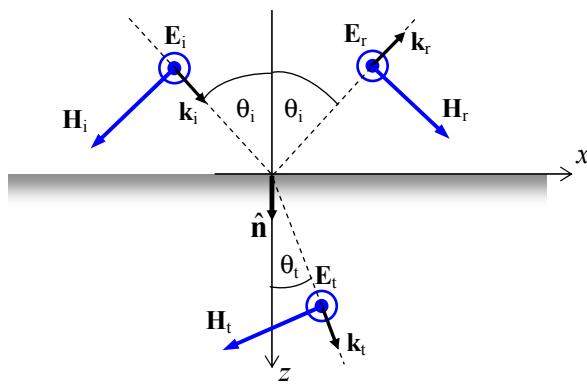
**Ejemplo 8.18:** Determinar el ángulo de refracción para la incidencia de una onda desde aire sobre resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  si el ángulo de incidencia es de  $35^\circ$ .

De acuerdo a la ley de Snell:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \theta_t = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) \approx 20.84^\circ$$

Vamos a analizar a continuación las consecuencias de la conservación de las componentes tangenciales de los campos sobre las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, para cada caso de polarización (normal y paralelo al plano de incidencia) por separado.

### $E_i$ normal al plano de incidencia



Obsérvese que la impedancia de onda para la onda incidente es:

$$Z_{TE_1} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = \frac{E_0}{H_0 \cos \theta_i} = \eta_1 \sec \theta_i$$

donde hemos colocado el signo menos para que el signo de  $Z_{TE}$  sea positivo, ya que la componente tangencial del campo magnético es negativa.

$$\text{Análogamente, para la onda reflejada: } Z_{TE} = \frac{E_{0ry}}{H_{0rx}} = \frac{E_{0r}}{H_{0r} \cos \theta_i} = \eta_1 \sec \theta_i = Z_{TE_1}$$

$$\text{y para la onda transmitida: } Z_{TE} = -\frac{E_{0ty}}{H_{0tx}} = \frac{E_{0t}}{H_{0t} \cos \theta_t} = \eta_2 \sec \theta_t = Z_{TE_2}$$

Y entonces las ecuaciones de borde se pueden escribir:

$$E_0 + E_{0r} = E_{0t} \quad E_0/Z_{TE_1} - E_{0r}/Z_{TE_1} = E_{0t}/Z_{TE_2}$$

**Obsérvese que el uso de las impedancias de onda nos lleva a las mismas ecuaciones que obtuvimos para la incidencia normal.**

Podemos calcular el **coeficiente de reflexión** y el **coeficiente de transmisión** a partir de estas ecuaciones:

$$\rho_{TE} = \frac{Z_{TE_2} - Z_{TE_1}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}} \quad \tau_{TE} = 1 + \rho_{TE} = \frac{2Z_{TE_2}}{Z_{TE_2} + Z_{TE_1}}$$

y en función de las impedancias intrínsecas de los medios:

$$\rho_{TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad \tau_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

Introducimos en estas ecuaciones la ley de Snell de la refracción:

$$\rho_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad \tau_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\eta_1^2 \mu_2^2 / \eta_2^2 \mu_1^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

El campo eléctrico en el medio de incidencia es:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \rho_{TE} E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i\omega t} \left[ e^{-ik_{ix}x} e^{-ik_{iz}z} + \rho_{TE} e^{-ik_{rx}x} e^{-ik_{rz}z} \right]$$

Pero:  $k_{rx} = k_{ix} = k_i \sin \theta_i$        $k_{rz} = -k_{iz} = -k_i \cos \theta_i$

Luego:  $\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \left[ e^{-ik_i \cos \theta_i z} + \rho_{TE} e^{ik_i \cos \theta_i z} \right]$

y entonces puede verse que el campo eléctrico en el medio de incidencia se comporta como una **onda viajera** que se propaga en la dirección  $x$  paralela a la interfase y como una **onda semi-estacionaria** en la dirección  $z$  normal a la interfase (que se convierte en una onda estacionaria pura para  $|\rho_{TE}| = 1$ ).

- De las ecuaciones halladas surge que para que **no exista reflexión**:

$$\rho_{TE} = 0 \Rightarrow \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \operatorname{sen}^2 \theta_i + \cos^2 \theta_i = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2}$$

de donde se ve que, en el caso usual donde  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \Rightarrow \eta_1 = \eta_2$  y solamente no hay reflexión cuando los dos medios son ópticamente indistinguibles.

- Si el segundo medio (el medio de transmisión) es un **buen conductor**:

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \quad |\eta_2| \ll \eta_1 \Rightarrow \rho_{TE} \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_i), \quad \tau_{TE} \approx 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_i)$$

donde hemos desarrollado las expresiones en serie de Taylor. Se observa que el coeficiente de reflexión difiere muy poco del caso para la reflexión sobre un conductor perfecto.

En este último caso, el campo en el medio de incidencia es:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_i \operatorname{sen} \theta_i x)} \left[ e^{-ik_i \cos \theta_i z} - e^{ik_i \cos \theta_i z} \right] = 2iE_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_i \operatorname{sen} \theta_i x)} \operatorname{sen}(k_i \cos \theta_i z)$$

o sea una **onda estacionaria pura** según  $z$  y una **onda viajera** según  $x$ . Se observa un **guia-doo de la energía electromagnética** paralelo a la interfase. No existe campo transmitido en este caso, y la interfase constituye una superficie de campo eléctrico nulo.

- En el caso en que ambos medios sean dieléctricos:

$$\rho_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i}} \quad \tau_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i}}$$

Estas ecuaciones de los coeficientes de reflexión y de transmisión en función de las propiedades de los medios se conocen como **ecuaciones de Fresnel**.

En el caso de **incidencia entre dieléctricos**:

- si  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  los radicandos de las raíces e numerador y denominador son positivos y existe para todo  $\theta_i$  un  $\rho_{TE}$  real con  $|\rho_{TE}| < 1$ . En este caso la incidencia se produce desde el medio ópticamente menos denso hacia el más denso
- si  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , la incidencia se produce desde el medio ópticamente más denso hacia el menos denso, existe un **ángulo crítico**  $\theta_{ic}$  para el cual  $\operatorname{sen}^2 \theta_{ic} = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$ .

Para  $\theta_i \geq \theta_{ic}$  se tiene  $\rho_{TE}$  complejo con  $|\rho_{TE}| = 1$  (verificarlo). Por lo tanto, si la onda incide con un ángulo mayor que el crítico, toda la energía electromagnética se refleja y no hay transmisión al segundo medio. Por eso  $\theta_{ic} = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}$  se denomina también **ángulo de reflexión total**.

¿Cómo es el campo “transmitido” para reflexión total? El campo transmitido es, en general:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = E_{0_t} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_t \bullet \mathbf{r})} = E_{0_t} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_{tx} x - k_{tz} z)}$$

$$k_{tx} = k_{ix} = k_i \operatorname{sen} \theta_i$$

Pero:

$$k_{tz} = k_t \cos \theta_t = k_t \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t} = -ik_t \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta_t - 1} = -ik_t \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \operatorname{sen}^2 \theta_i - 1} = -i\alpha$$

Entonces:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) = \tau_{TE} E_{0_i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \operatorname{sen} \theta_i x)}$$

y se ve que el campo transmitido resulta una onda que se propaga según  $x$  (la coordenada sobre el plano de incidencia) pero **decae exponencialmente** según  $z$  (la coordenada normal a la interfase). El campo magnético transmitido es:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, t) &= \frac{\hat{\mathbf{k}}_t \times \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t)}{\eta_2} = \frac{1}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - i\alpha \hat{\mathbf{z}}) \times \tau E_{0i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \\ &= \frac{\tau E_{0i}}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} + i\alpha \hat{\mathbf{x}}) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - k_i \sin \theta_i x)}\end{aligned}$$

y el vector medio de Poynting:  $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \tau_{TE} E_{0i} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \times \frac{\tau_{TE}^* E_{0i}}{\eta_2} (k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}} - i\alpha \hat{\mathbf{x}}) e^{-\alpha z} e^{-i(\omega t - k_i \sin \theta_i x)} \right) \\ &= \frac{|\tau_{TE} E_{0i}|^2}{2\eta_2} e^{-2\alpha z} \operatorname{Re}(k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} + i\alpha \hat{\mathbf{z}}) = \frac{|\tau_{TE} E_{0i}|^2}{2\eta_2} e^{-2\alpha z} k_i \sin \theta_i \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

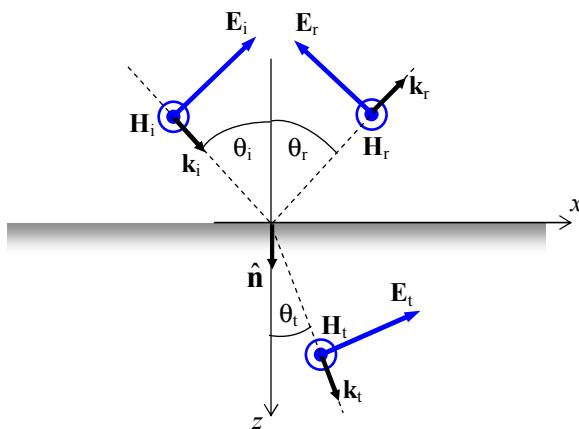
Se ve entonces que la potencia fluye paralela a la interfase, pero **no hay potencia que penetre en el medio de transmisión**. Una onda que se propaga paralela a la interfase pero que no transporta energía en la dirección normal a ella se llama **onda evanescente**.

El fenómeno de reflexión total produce así ondas evanescentes que no penetran en el medio de transmisión. **Este comportamiento es la base del guiado de ondas electromagnéticas por fibras ópticas.**

**Ejemplo 8.19:** Determinar el ángulo de reflexión total para la incidencia de una onda desde resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  sobre aire.

El ángulo de reflexión total es:  $\theta_{ic} = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 38.33^\circ$

Esto significa que para una incidencia más rasante, la radiación permanece dentro del dieléctrico. Este es el principio de guiado dieléctrico de ondas en que se basan las guías de fibra óptica.

**E<sub>i</sub> paralelo al plano de incidencia**

En este caso los vectores magnéticos son transversales a las direcciones de propagación de potencia, mientras que el campo eléctrico tiene componentes longitudinales a esas direcciones. Se dice que se trata de un modo de propagación **TM (transversal magnético)**.

Además, los vectores magnéticos son paralelos a la interfase y entonces la condición de contorno lleva a:  $H_{0y} + H_{0ry} = H_{0ty}$

y para los vectores eléctricos:

$$E_{0x} - E_{0rx} = E_{0tx}$$

Las impedancias de onda son ahora:

Onda incidente:  $Z_{TM} = \frac{E_{ox}}{H_{oy}} = \eta_1 \cos \theta_i = Z_{TM_1}$

Onda reflejada:  $Z_{TM} = -\frac{E_{orx}}{H_{ory}} = \eta_1 \cos \theta_i = Z_{TM_1}$

Onda transmitida:  $Z_{TM} = \frac{E_{otx}}{H_{oty}} = \eta_2 \cos \theta_t = Z_{TM_2}$

y las condiciones de borde quedan:  $H_0 + H_{0r} = H_{0t}$   $Z_{TM_1}(H_0 - H_{0r}) = Z_{TM_2}H_{0t}$

de donde obtenemos:  $\frac{H_{0r}}{H_0} = \frac{E_{0r}}{E_0} = \rho_{TM} = \frac{Z_{TM_2} - Z_{TM_1}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}}$

$$\frac{H_{0t}}{H_0} = \frac{\eta_1 E_{0t}}{\eta_2 E_0} = \frac{2Z_{TM_2}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}} \Rightarrow \tau_{TM} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{2Z_{TM_2}}{Z_{TM_2} + Z_{TM_1}}$$

y en términos de las impedancias intrínsecas de los medios:

$$\rho_{TM} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = \frac{2\eta_2^2}{\eta_1 \eta_2} \frac{\cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

y mediante el uso de la ley de la refracción:

$$\rho_{TM} = \frac{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \operatorname{sen}^2 \theta_i} - \cos \theta_i}{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \operatorname{sen}^2 \theta_i} + \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = \frac{2 \frac{\mu_1 \eta_2^3}{\mu_2 \eta_1^3} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \operatorname{sen}^2 \theta_i}}{\frac{\mu_1 \eta_2^2}{\mu_2 \eta_1^2} \sqrt{\frac{\mu_2^2 \eta_1^2}{\mu_1^2 \eta_2^2} - \operatorname{sen}^2 \theta_i} + \cos \theta_i}$$

- El coeficiente de reflexión  $\rho_{TM}$  es cero para ángulos de incidencia que cumplen la relación:

$$\tan \theta = \frac{\mu_2 \eta_1}{\eta_2} \sqrt{\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{\mu_2^2 \eta_1^2 - \mu_1^2 \eta_2^2}}$$

Dado que para la mayoría de los casos de interés práctico:  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$  la condición necesaria para la **no reflexión** es que  $\tan \theta = \eta_1 / \eta_2$ .

- Si el segundo medio (el medio de transmisión) es un **buen conductor**:

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0 \quad |\eta_2| \ll \eta_1 \Rightarrow \rho_{TM} \approx -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \sec(\theta_i), \quad \tau_{TM} \approx 2 \frac{\eta_2^2}{\eta_1} \sec(\theta_i)$$

donde hemos desarrollado las expresiones en serie de Taylor. El coeficiente de reflexión difiere muy poco del valor para la reflexión sobre un conductor perfecto, salvo cuando el án-

gulo de incidencia se acerca a  $\pi/2$  (incidencia rasante).

En el caso en que **ambos medios sean dieléctricos**:

$$\rho_{TM} = \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_i}{\epsilon_1}} - \cos \theta_i}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_i}{\epsilon_1}} + \cos \theta_i} \quad \tau_{TM} = 2 \frac{\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_i}{\epsilon_1}}}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 - \sin^2 \theta_i}{\epsilon_1}} + \cos \theta_i}$$

La condición de **no reflexión** para este caso se convierte en:

$$\tan \theta_B = n_1 / n_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = n_2 / n_1$$

El ángulo  $\theta_B$  se conoce como **ángulo de Brewster**. Como la tangente puede dar valores menores o mayores que 1, la condición de no reflexión se da independientemente del sentido de propagación entre dos medios.

El ángulo de Brewster se denomina también **ángulo de polarización**, ya que si una onda que tiene ambas componentes, una polarizada paralela y la otra polarizada normal al plano de incidencia, incide sobre una interfase formando el ángulo de Brewster, la componente polarizada paralela se transmite totalmente mientras que la componente polarizada normal sufre reflexión, de manera que la onda reflejada queda linealmente polarizada. Este procedimiento se llama **polarización por reflexión** y se usa en múltiples aplicaciones.

Si la onda se propaga desde un medio menos denso a otro más denso ( $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ) existe, como en el otro tipo de polarización, un ángulo de reflexión total tal que:

$$|\rho| = 1 \text{ cuando } \theta_i \geq \theta_{i_c} \quad \text{con} \quad \sin \theta_{i_c} = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

Obsérvese que sólo hay reflexión total cuando  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , mientras que siempre existe una condición de no reflexión en la incidencia TM.

**El fenómeno de reflexión total ocurre independientemente de la polarización de la onda incidente.**

**Ejemplo 8.20:** Determinar el ángulo de Brewster (ángulo de no reflexión) para la incidencia de una onda sobre la interfase entre resina de poliestireno, con  $\epsilon_r = 2.6$  y aire.

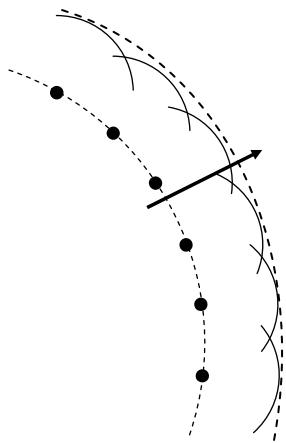
El ángulo de Brewster es:

$$\text{poliestireno} \rightarrow \text{aire: } \theta_B = \tan^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 31.8^\circ$$

$$\text{aire} \rightarrow \text{poliestireno: } \theta_B = \tan^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \approx 58.2^\circ$$

## Difracción. Principio de Huygens

Se observa que la sombra proyectada por objetos no tiene una frontera definida. Esto contradice la imagen sencilla de que un obstáculo detiene el paso de la luz, como si ésta estuviera compuesta de rayos. En realidad, los bordes de los objetos emiten radiación en todas direcciones y sentidos, y las ondas radiadas por puntos cercanos del borde interfieren entre sí formando ese borde impreciso de la sombra. Este proceso, donde cambia la dirección de propagación de la onda por la presencia del borde del obstáculo, se conoce como **difracción**.



Para modelizar la difracción se usan diversos modelos, que generalmente se basan en el llamado **principio de Huygens**. Este principio dice que se puede describir la propagación de una onda en un medio cualquiera suponiendo que cada punto del frente de ondas se comporta como una fuente secundaria emisora de ondas esféricas. Estas ondas secundarias interfieren entre sí para conformar el nuevo frente de onda. El principio de Huygens se puede formular rigurosamente a partir de las propiedades matemáticas de las soluciones generales de las ecuaciones de onda. De esta manera quedan las llamadas **integrales de Kirchhoff**, que expresan el valor del campo en un punto del espacio en función de la integral sobre una superficie de funciones de onda que representan ondas esféricas. Esta formulación lleva al llamado **método de Kirchhoff**,

**que, a pesar de sus limitaciones de rigor matemático se usa con buenos resultados en la determinación de los campos radiados por aberturas radiantes o antenas de abertura, usadas en microondas y radar.**

Vamos a presentar un ejemplo de uso de este método que permite describir un caso de difracción. Se trata de una onda plana que incide horizontalmente sobre un obstáculo vertical, que representamos como un plano conductor semi-infinito.

Colocamos un sistema de coordenadas con su eje vertical  $z$  coincidente con la traza del plano conductor y su eje horizontal a una altura  $z_0$  por debajo del borde del plano. Queremos calcular el campo en el punto  $P$  a una distancia  $r$  lejana ( $r \gg z_0$ ) del conductor, que, de no existir difracción, sería nulo. Según el principio de Huygens, cada punto del eje  $z$  por encima del conductor se convierte en un centro emisor de ondas esféricas secundarias. En particular, el punto  $Q$  genera en  $P$  un campo dado por:

$$dE(P) = A \frac{e^{i[\omega t - k d_{QP}]}}{d_{QP}} dz = A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

de modo que el campo total en  $P$  será:

$$E(P) = \int_{z_0}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

Podemos calcular esta integral como la suma de una integral entre  $z_0$  y  $z_1$ , con  $z_1 \ll r$  y una integral entre  $z_1$  e  $\infty$ :

$$E(P) = \int_h^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz = \int_{z_0}^{z_1} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r + \delta} dz$$

Consideremos la primera integral, para la cual  $z_1 \ll r$ . De la figura se ve que en el triángulo rectángulo POQ:  $r^2 + z^2 = (r + \delta)^2 \Rightarrow \delta \approx \frac{z^2 - \delta^2}{2r}$

Pero además:  $\delta \approx z \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \delta \approx \frac{z^2(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{2r} \approx \frac{z^2}{2r} \Rightarrow \delta \ll r$

porque  $\alpha$  es un ángulo pequeño para todo  $z \leq z_1$ . Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} E(P) &= \int_{z_0}^{z_1} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r+\delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r+\delta} dz \approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-ik\delta} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r+\delta} dz \\ &= \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-i\frac{kz^2}{2r}} dz + \int_{z_1}^{\infty} A \frac{e^{i[\omega t - k(r+\delta)]}}{r+\delta} dz \end{aligned}$$

Con el cambio de variable:  $\frac{kz^2}{2r} = \frac{\pi u^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{\lambda r / 2} u$  ( $u$  es adimensional) la integral

$$\int_{z_0}^{z_1} e^{-i\frac{kz^2}{2r}} dz \text{ puede escribirse: } \int_{z_0}^{z_1} e^{-i\frac{kz^2}{2r}} dz = \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \int_{u_0}^{u_1} e^{-i\frac{\pi u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \int_0^{u_1} e^{-i\frac{\pi u^2}{2}} du - \int_0^{u_0} e^{-i\frac{\pi u^2}{2}} du \right]$$

Además, la integral:  $\int_0^u e^{-i\frac{\pi u^2}{2}} du = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du - i \int_0^u \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du = C(u) - i S(u)$

donde aparecen las llamadas **integrales de Fresnel**:

$$\begin{cases} C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \end{cases} \Rightarrow C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$$

Se ve de las gráficas que ambas funciones tienden a 0.5 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Entonces, la primera integral resulta:

$$\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{z_1} e^{-i\frac{kz^2}{2r}} dz = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_1\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_1\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

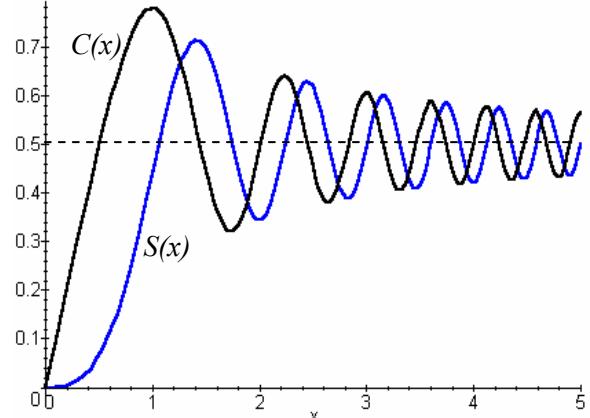
Si ahora tendemos  $z_1 \rightarrow \infty$  la segunda integral en el cálculo original se anula, mientras que en esta expresión nos queda:

$$E(P) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \int_{z_0}^{\infty} e^{-i\frac{kz^2}{2r}} dz \rightarrow E(r, z_0) \approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \frac{1}{2}(1 - i) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) + iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

En esta expresión  $r$  es la distancia desde el plano al punto de observación y  $z_0$  es la distancia “dentro” del plano medida paralela al mismo. Para  $z_0$  negativo se tiene el campo en la región “libre”. Como  $C(-x) = -C(x)$  y  $S(-x) = -S(x)$ :

$$E(r, -z_0) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} \left[ \frac{1}{2}(1 - i) + C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0\right) \right]$$

La intensidad de la radiación en  $P$  es igual al valor medio del vector de Poynting:



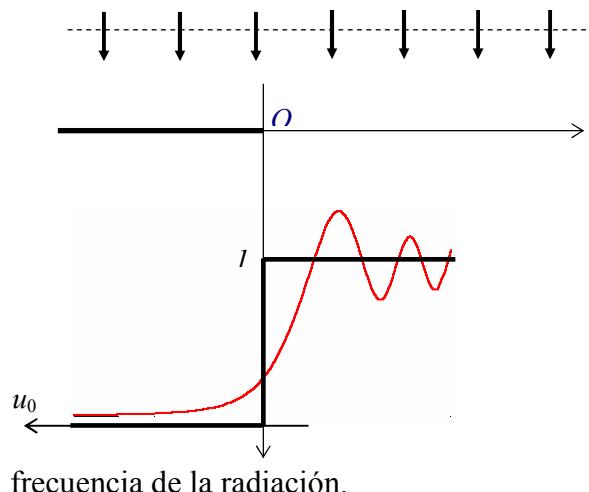
$$I(r, z_0) \approx \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left| \frac{1}{2}(1-i) - C \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0 \right) + iS \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0 \right) \right|^2 = \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left[ \left( \frac{1}{2} - C(u_0) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - S(u_0) \right)^2 \right]$$

$$I(r, -z_0) \approx \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left| \frac{1}{2}(1-i) + C \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0 \right) - iS \left( \sqrt{\frac{2}{\lambda r}} z_0 \right) \right|^2 = \frac{\lambda |A|^2}{2\eta r} \left[ \left( \frac{1}{2} + C(u_0) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + S(u_0) \right)^2 \right]$$

con  $u_0 = \sqrt{2/\lambda r} z_0$ . Para  $-z_0 \rightarrow \infty$  se tiene la potencia plena de la onda:

$$I(r, -\infty) \rightarrow I_0(r) = \frac{\lambda |A|^2}{\eta r} \quad \text{y entonces tenemos:}$$

$$I(r, z_0) \approx \frac{I_0(r)}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} - C(u_0) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - S(u_0) \right)^2 \right] \quad I(r, -z_0) \approx \frac{I_0(r)}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + C(u_0) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} + S(u_0) \right)^2 \right]$$

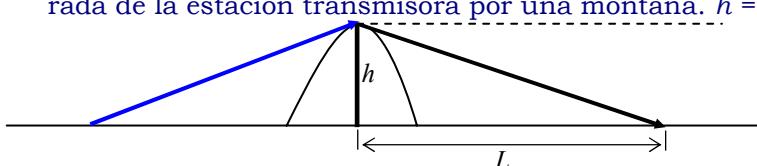


En la gráfica se observa la variación de la intensidad de la radiación en función de  $u_0$ , es decir de la profundidad hacia dentro o fuera del borde del plano. En negro (escalón) se dibuja la intensidad esperada en el límite de la óptica geométrica (óptica de rayos) y en rojo el valor obtenido con la ecuación anterior. Se observa que existen bandas más oscuras y más claras en la región alrededor, y hay iluminación “detrás” del obstáculo, todo lo cual constituye el fenómeno de la difracción.

Como la intensidad es proporcional a  $\lambda$ , el tamaño de los picos es inversamente proporcional a la frecuencia de la radiación.

La existencia de la difracción hace posibles comunicaciones aún cuando haya un obstáculo en la línea directa entre el emisor y el receptor, pero naturalmente la potencia difractada suele ser pequeña frente a la potencia directa.

**Ejemplo 8.21:** Determinar la relación entre la potencia que recibe una antena receptora separada de la estación transmisora por una montaña.  $h = 800 \text{ m}$ ,  $L = 2 \text{ km}$ ,  $f = 1 \text{ MHz}$ .



ducto vertical, tenemos:

$$z_0 = h = 800 \text{ m}, r = L = 2000 \text{ m}, \lambda = c/f \approx 300 \text{ m}.$$

$$\text{Entonces: } u_0 = \sqrt{2/\lambda r} z_0 \approx 1.46 \Rightarrow \frac{I(r, z_0)}{I_0} \approx 0.022 \approx -33 \text{ dB}$$

y entonces la recepción cae en más de 30 dB con respecto a la radiación que viaja en línea directa sin obstáculos.

Como se ve en la figura, el punto de recepción se halla en la zona de sombra. Suponiendo por simplicidad que la radiación incide horizontalmente sobre la montaña, que modelizamos como un plano conductor vertical, tenemos:

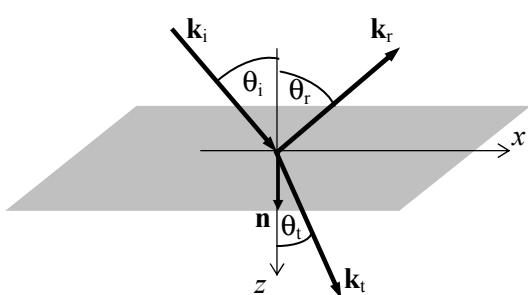
## RESUMEN

En este capítulo hemos analizado la incidencia de ondas electromagnéticas sobre interfaces entre medios diferentes.

- En la **incidencia normal** se obtienen ecuaciones similares a las halladas en la propagación de ondas en líneas de transmisión cargadas, por lo que se pueden usar las herramientas de ese caso, como la carta de Smith, para el análisis de la propagación de ondas en medios inhomogéneos:

	Líneas de transmisión	Incidencia normal
Característica del medio	Impedancia característica: $Z_0$	Impedancia intrínseca: $\eta$
Magnitud física	tensión: $v(z,t)$ corriente: $i(z,t)$	campo eléctrico: $E(z,t)$ campo magnético: $H(z,t)$
Coeficiente de reflexión	$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$	$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$
Coeficiente de transmisión	$\tau = \frac{2Z_L}{Z_L + Z_0} = 1 + \rho$	$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \rho$
Reflexión de potencia	$R =  \rho ^2$	$R =  \rho ^2$
Transmisión de potencia	$T = I - R$	$T = I - R$
Impedancia de campo	$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$	$Z(z) = \eta_1 \frac{e^{-ikz} + \rho e^{ikz}}{e^{-ikz} - \rho e^{ikz}}$
Relación de onda estacionaria	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$	$ROE = \frac{1 +  \rho }{1 -  \rho }$

- **Incidencia sobre una capa.** El análisis de capas dieléctricas es de interés en el diseño de superficies antirreflectantes usadas para aplicaciones ópticas y cámaras aneáticas. El caso de capas conductoras da las bases para el análisis de la efectividad y aplicación de los **blindajes** de alta frecuencia.
- Cuando la propagación no es normal la conservación de la fase sobre la superficie interfase lleva a las **leyes de Snell** de la óptica geométrica:



$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\mu_2 \eta_1}{\mu_1 \eta_2}$$

que en el caso de dieléctricos se convierte en:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los **índices de refracción** de los medios.

- El cálculo de los campos es más complicado y se simplifica en parte tratando por separado el caso en que el campo incidente está linealmente polarizado normal al plano de incidencia (caso **TE**) del caso en que se halla en el plano de incidencia (caso **TM**). La aplicación de las condiciones de contorno lleva a las expresiones que definen los coeficientes de reflexión y transmisión en la incidencia oblicua.
- Del análisis de estas expresiones surge que:
  - Si el medio de transmisión es un buen conductor el comportamiento es similar al de la incidencia normal, es decir, el coeficiente de reflexión es prácticamente igual a

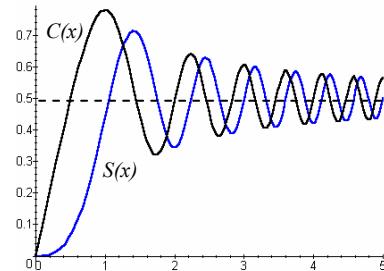
(-1). Se produce una onda estacionaria en la dirección normal a la interfase y hay un guiado de energía paralelo a la interfase.

- Si ambos medios son dieléctricos y la propagación se da desde el medio más denso al menos denso ( $n_2 < n_1$ ), existe un **ángulo crítico** de incidencia por encima del cual no hay transmisión (reflexión total):

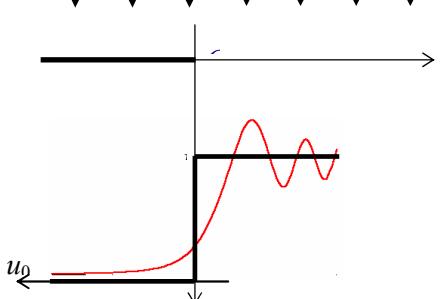
$$\theta_{ic} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$$

- En el medio de transmisión se presentan **campos evanescentes** que no se propagan. Este efecto es la base del guiado de energía electromagnética por guías dieléctricas.
- En la incidencia TM solamente existe un ángulo (**ángulo de Brewster**) donde no hay reflexión:  $\tan \theta_B = \eta_1 / \eta_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = n_2 / n_1$
- Este efecto se usa para maximizar la eficiencia de las ventanas que dejan salir la radiación en los láseres gaseosos y para polarizar linealmente una onda, ya que la componente TE se refleja.
- Se introduce la descripción del fenómeno de **difracción**. El modelo utilizado es el de Huygens, que postula a cada punto del frente de onda como un hipotético centro secundario emisor de ondas esféricas coherentes. La interferencia de estas ondas constituye la nueva onda que se propaga.
- Se estudia un ejemplo, la **difracción por un borde**, de interés en las comunicaciones terrestres. El campo y la intensidad de radiación detrás del obstáculo se describe mediante las llamadas **integrales de Fresnel**:

$$\begin{cases} C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \\ S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \end{cases} \Rightarrow C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$$



- Se observa una caída de tipo exponencial de la radiación detrás del obstáculo y la presencia de franjas brillantes y oscuras alternadas cerca del borde del lado iluminado, que disminuyen a medida que nos alejamos del borde tiendiendo a la intensidad de la propagación libre. En la óptica este fenómeno se conoce como **difracción de Fraunhofer**.



## PROBLEMAS

8.13) Considere un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  polarizado según la dirección  $x$ , cuyo vector de onda tiene la dirección  $z$ , e incide normalmente desde el vacío sobre un semiespacio conductor perfecto. Determine: a) Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio, b) la impedancia de campo para  $z < 0$  (vacío), c) Los valores instantáneos y promedio del vector de Poynting y c) la densidad de corriente que circula sobre la superficie del conductor, indicando su dirección y sentido.

8.14) Para un semiespacio material dieléctrico sin pérdidas, se observa que la reflexión de una onda de  $1 \text{ MHz}$  y  $E_{\text{pico}} = 0.1 \text{ V/m}$  en la dirección  $x$ , que incide normalmente desde el vacío, produce una relación de onda estacionaria de valor 2.7. Calcule: a) las expresiones de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio, b) la relación entre la potencia incidente y la que se transmite al dieléctrico y c) la posición para  $t = 0$  de los mínimos del campo eléctrico en el vacío.

$$[\text{Rta: } k=0.021m^{-1}, \rho=-0.459, \gamma=0.056m^{-1}, \eta=139.5\Omega, \langle N_t \rangle / \langle N_i \rangle = 79\%, z_{\min} = (1-2n)75 \text{ m}]$$

8.15) Una onda plana de  $100 \text{ MHz}$  y cuyo campo eléctrico posee una amplitud pico de  $0.5 \text{ V/m}$  incide normalmente desde el vacío sobre un dieléctrico sin pérdidas, observándose que el coeficiente de reflexión de potencia (valor medio de la potencia reflejada sobre valor medio de la potencia incidente) es 0.25. Hallar a) la permitividad del dieléctrico, b) la potencia media por unidad de área que se transmite al dieléctrico.

$$[\text{Rta: } \epsilon = 9\epsilon_0, \langle N_t \rangle = 2.49 \times 10^4 \text{ W/m}^2]$$

8.16) Una onda plana de  $10 \text{ MHz}$  incide normalmente desde el vacío sobre un semiespacio metálico de conductividad  $\sigma = 1000 \text{ (1/}\Omega\text{m)}$ . Determinar: a) el porcentaje de la potencia incidente que se refleja en la interfase y b) ¿a qué distancia de la interfase la amplitud del campo que se propaga por el metal se reduce a  $10^{-6}$  de su valor inicial?

$$[\text{Rta: } \langle N_r \rangle / \langle N_i \rangle = 99.79\%, d = 6.95 \text{ cm}]$$

8.17) Detrás de una placa dieléctrica de  $1 \text{ cm}$  de espesor y con una permitividad relativa  $\epsilon_r = 4 - i0.01$  se coloca un plano conductor perfecto. Determinar, para la frecuencia  $f = 3 \times 10^9 \text{ Hz}$ , la impedancia de campo en la cara frontal del dieléctrico y el coeficiente de reflexión.

$$[\text{Rta: } Z_i = (2.39 + i 581.43)\Omega, \rho = 0.41 + i 0.91]$$

8.18) La permitividad del agua a frecuencias ópticas es  $1.75 \epsilon_0$ . Se sabe que una fuente de luz isótropa a una distancia  $d$  bajo el agua produce un área circular iluminada de radio  $5 \text{ m}$ . Determine  $d$ .

$$[\text{Rta: } d = 4.32 \text{ m}]$$

8.19) Se puede usar una varilla dieléctrica o fibra de material transparente para guiar la luz o una onda electromagnética en condiciones de reflexión interna total. Determine la mínima constante dieléctrica del medio que sirve de guía para que una onda que incida con cualquier ángulo sobre un extremo quede confinada dentro de la varilla hasta que salga por el extremo opuesto.

$$[\text{Rta: } \epsilon_r \geq 2]$$

# 9 - Ondas electromagnéticas guiadas

## Introducción

En el Capítulo 1 observamos que en sistemas cuyas dimensiones son pequeñas frente a la mínima longitud de onda del espectro de Fourier de los campos se puede usar la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria en la descripción del comportamiento electromagnético. Otras estructuras, como las líneas de transmisión, donde sólo una única dimensión lineal no satisface el criterio de cuasi-estaticidad se pueden describir con las técnicas de los circuitos de constantes distribuidas, que implican la propagación de ondas que transportan energía e información.

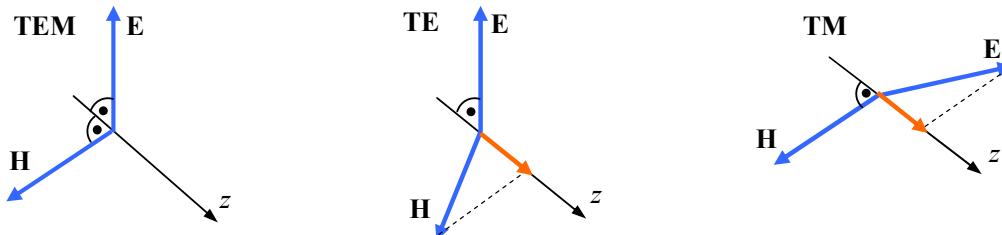
Finalmente, existen estructuras donde sólo es posible realizar una descripción "completa" usando la descripción de campos de las ecuaciones de Maxwell. Este es el caso de la propagación de ondas en sistemas de guia donde las dimensiones de los contornos en cualquier sentido sean comparables o mayores que la mínima longitud de onda involucrada, o cuando no hay contornos, como en la propagación en medios infinitos o semi-infinitos.

## Modos de Propagación

En el vacío y en **medios ilimitados**, las soluciones de las ecuaciones de Maxwell son ondas electromagnéticas **transversales**, es decir, ambos campos **E** y **H** son perpendiculares a la dirección de propagación (y perpendiculares entre sí). Esta situación es una consecuencia matemática de las ecuaciones de la divergencia nula ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ) para campos que dependen de una **única** coordenada (ondas elementales).

En la propagación en recintos limitados no es posible describir los campos como funciones de una única coordenada por la existencia de condiciones de contorno que imponen las fronteras del recinto y entonces existen otras posibilidades, en las cuales uno (o los dos) campos tienen componentes en la dirección de propagación.

Convencionalmente se llama **modo TEM** (Transversal ElectroMagnético) a la situación donde los campos son ambos transversales a la dirección de propagación, **modo TE** (Transversal Eléctrico) cuando sólo el campo eléctrico es transversal y **modo TM** (Transversal Magnético) cuando sólo el campo magnético es transversal. Se puede demostrar que cualquier tipo de propagación se puede resolver como la superposición de un modo TE y un modo TM.



## Ecuaciones generales de las ondas guiadas

Consideraremos campos que se propagan a lo largo del eje  $z$  de un sistema de referencia. También supondremos campos armónicos, de manera que las expresiones de los campos deben incorporar el factor:  $e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$ . La "constante" de propagación a lo largo de  $z$ ,  $\gamma_z$ , dará información sobre el tipo de propagación (si hay o no atenuación, las velocidades de fase y de grupo, etc.).

Los campos pueden escribirse así:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(\omega t - \gamma_z z)} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(x, y) e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$$

Dentro del sistema de guiado supondremos que no existen fuentes de campo (cargas y corrientes, independientes o inducidas por el campo eléctrico presente - por lo que suponemos  $\sigma = 0$ ). Las ecuaciones de Maxwell llevan en tal caso a ecuaciones de onda y éstas, en la hipótesis de campos armónicos, a ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \gamma^2 \mathbf{H} = 0 \quad \text{con} \quad \gamma = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

donde, en general,  $\mu$  y  $\epsilon$  pueden ser complejos para medios con pérdidas.

Dado que suponemos conocido el comportamiento de los campos según  $z$ , nos conviene separar el operador laplaciano en una parte transversal y otra longitudinal a la propagación:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla_t^2 \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \nabla_t^2 \mathbf{E} - \gamma_z^2 \mathbf{E} = -\gamma^2 \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \nabla_t^2 \mathbf{E} = -(\gamma^2 - \gamma_z^2) \mathbf{E} = -\gamma_t^2 \mathbf{E}$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Maxwell del rotor:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\omega\mu(H_x \hat{\mathbf{x}} + H_y \hat{\mathbf{y}} + H_z \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma_z E_y = -i\omega\mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \end{cases}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = i\omega\epsilon(E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + E_z \hat{\mathbf{z}}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma_z H_y = i\omega\epsilon E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z \end{cases}$$

Debe recordarse que las componentes de los campos son funciones solamente de las variables espaciales  $x$  e  $y$ , ya que  $z$  y  $t$  aparecen en el factor de propagación.

De las ecuaciones precedentes es posible despejar las componentes transversales del campo en función de las longitudinales:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{\gamma_t^2} \left( \gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) & H_x &= \frac{i}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ E_y &= \frac{i}{\gamma_t^2} \left( -\gamma_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= -\frac{i}{\gamma_t^2} \left( \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

**y de estas expresiones surge un método de cálculo de los campos dentro de una guía de ondas :**

- **Resolver la ecuación de Helmholtz**  $\nabla^2 f_z + \gamma^2 f_z = \nabla_t^2 f_z + \gamma_t^2 f_z = 0$  **para la componente longitudinal, sabiendo que la dependencia respecto de  $z$  (coordenada de propagación) y del tiempo es**  $e^{i(\omega t - \gamma_z z)}$ .
- **Usar las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía para hallar las constantes de la solución de la ecuación de Helmholtz.**
- **Calcular las otras componentes del campo.**

Este esquema es válido para estructuras cilíndricas (no necesariamente de sección circular), que son las de uso común en las guías de ondas. Veremos al final del capítulo los métodos a aplicar en el caso de las guías dieléctricas.

### Guía de planos conductores paralelos

El método más sencillo de guiar una onda electromagnética es mediante un par de planos conductores paralelos. Por simplicidad matemática en esta etapa consideraremos que se trata de conductores perfectos ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) y que el medio entre ellos sea sin pérdidas ( $\gamma = k$ )..

#### Modo TEM

Existe en esta configuración la posibilidad de ondas transversales como en un medio ilimitado. En el modo **TEM** las componentes longitudinales de los campos son nulas. Para que las componentes transversales no sean también nulas, de las ecuaciones halladas en la sección precedente surge que  $k_t = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  debe ser también nulo, o sea:  $k = k_z$ . En tal caso queda:  $\nabla^2 \mathbf{E}_t = 0$  y  $\nabla^2 \mathbf{H}_t = 0$  de manera que los campos transversales (los únicos en este modo) **satisfacen la ecuación de Laplace de la (cuasi-)estática**.

Elijiendo un sistema coordenado como el de la figura la ecuación vectorial para el campo eléctrico se desdobra en dos ecuaciones escalares:

$$\nabla^2 E_x = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 E_y = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones de Laplace escalares deben satisfacer el teorema de Earnshaw, de manera que no deben presentar extremos entre los planos. En particular,  $E_y$  es tangente a los planos conductores y se debe anular sobre ellos (conservación de la componente tangencial del campo). Por lo tanto debe ser nulo para todo  $y$ , pues de lo contrario presentaría al menos un extremo dentro del recinto de integración.  $E_x$  es normal a los planos, de modo que no se anula, y además coincide con el campo  $\mathbf{E}$  cuasiestático entre dos conductores paralelos infinitos es uniforme y perpendicular a los planos, de manera que podemos escribir:

$$\text{TEM} \quad \mathbf{E}(r, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)}$$

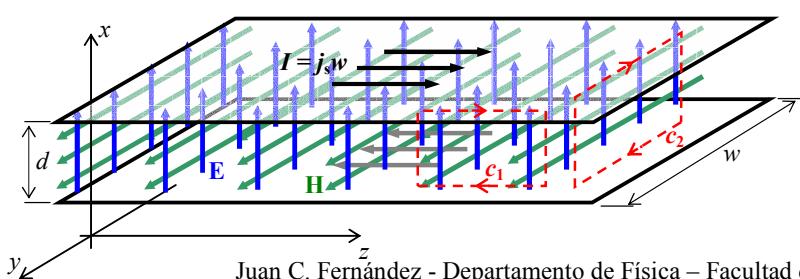
El mismo razonamiento se aplica a la componente  $H_x$ , que es normal a los planos y debe anularse sobre ellos por la conservación de la componente normal de  $\mathbf{B}$ . La componente no nula del campo magnético se puede calcular a partir del campo eléctrico por la ley de Faraday:

$$-ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \quad \Rightarrow \quad H_y = \frac{k_z}{\omega\mu} E_x = \frac{E_x}{\eta}$$

Y finalmente:

<b>TEM</b> $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)}$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)}$
--

que coincide con la ecuación de una onda plana transversal en un medio ilimitado.



El campo eléctrico no es conservativo, porque su rotor no es nulo. Por ejemplo, la circulación a lo largo del circuito  $c_1$  de la figura no es cero porque hay un flujo magnético concatenado dependiente

del tiempo. Sin embargo, la circulación sobre  $c_2$  es cero, así como sobre cualquier circuito sobre **planos de  $z$  constante**. Podemos definir entonces un voltaje<sup>1</sup> entre los electrodos circulando a  $z$  constante, un voltaje entre electrodos dependiente de  $z$  (y del tiempo):

$$v(z, t) = \int_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = E_x(z, t) d$$

donde  $C$  es una curva de  $z$  constante que va de un plano al otro.

Además las condiciones de borde para el campo tangencial magnético sobre los planos conductores perfectos llevan a que exista una densidad de corriente superficial  $\mathbf{j}_s = j_s \hat{\mathbf{z}}$ , de manera que habrá una "corriente"<sup>2</sup> a lo largo de los electrodos  $i(z, t) = j_s w = H_y w$  en la dirección  $z$ .

Podemos entonces escribir los campos en función de  $v(z, t)$  e  $i(z, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} &\Rightarrow \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial z} = -\mu \frac{1}{w} \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{con } L = \frac{\mu d}{w} \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} &\Rightarrow \frac{1}{w} \frac{\partial i}{\partial z} = -\epsilon \frac{1}{d} \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{con } C = \frac{\epsilon w}{d} \end{aligned}$$

donde  $L$  y  $C$  son la inductancia y capacidad por unidad de longitud (en la dirección  $z$ ) del sistema, que pueden calcularse mediante sus definiciones (cuasi-)estáticas.

Estas son las **ecuaciones del telegrafista** y constituyen un modelo de parámetros distribuidos asociado al modelo de campos previamente analizado. Ambos modelos describen en forma equivalente el comportamiento electromagnético de la guía de planos paralelos en el modo TEM.

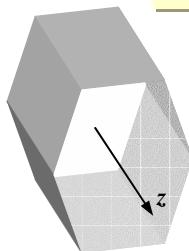
La velocidad de propagación de las ondas de tensión y corriente es:  $v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  que coincide con la velocidad de los campos en el medio de propagación, y la impedancia característica de la línea es:  $Z_0 = \sqrt{L/C} = \sqrt{\mu/\epsilon} = \eta$  que es la impedancia intrínseca del medio de propagación.

Podemos así relacionar la descripción a partir de los campos y la descripción de constantes distribuidas a partir de tensiones y corrientes mediante las ecuaciones:

- $i(z, t) = \int_S \mathbf{H} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$  (integral sobre una curva  $C$  de  $z = cte.$  entre ambos conductores)
- $v(z, t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l}$  (flujo a través de una superficie  $S$  de  $z = cte.$  cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores)

Con esta representación las ecuaciones de Maxwell llevan naturalmente a las ecuaciones del telegrafista para el modelo circuital de constantes distribuidas.

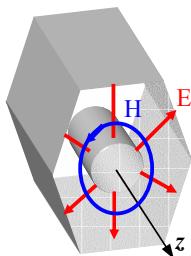
**Esto ocurre cuando es posible circular los campos en forma conservativa por caminos de  $z = cte.$ , donde  $z$  es la dirección de propagación.**



Una guía de sección cilíndrica (no necesariamente circular) de interior dieléctrico no puede sustentar un modo TEM. En tal caso los campos deben satisfacer la ecuación de Laplace vectorial, y cada componente en un sistema cartesiano la correspondiente ecuación escalar. Por el teorema de Earnshaw las soluciones de la ecuación de Laplace escalar no pueden tener extremos dentro del recinto de integración, cada componente debe anularse para adecuarse a las

<sup>1</sup> Sólo es correcto hablar de diferencia de potencial en el caso de la circulación de campos conservativos, por lo que se prefiere usar el término técnico voltaje o tensión para referirse a esta circulación.

<sup>2</sup> Se trata de una corriente superficial.



condiciones de contorno sobre las paredes.

Puede existir propagación TEM en un recinto donde haya conductores internos que permitan líneas transversales de campo eléctrico entre dos conductores, como en la configuración coaxil de la figura. Las líneas de campo eléctrico variable en el tiempo llevan a líneas de campo magnético también transversales.

Otros sistemas donde se puede tener propagación TEM son las líneas abiertas, como las bifilares y las de microcinta<sup>3</sup>.

**En resumen, en la propagación TEM se puede describir la situación de dos formas equivalentes:**

- **El modelo de campos, de estructura equivalente a las ondas elementales en recintos ilimitados (campos transversales, impedancia de onda igual a la impedancia intrínseca del medio de propagación, sin frecuencia de corte).**
- **El modelo de constantes distribuidas, a partir de ondas de corriente y de tensión dependientes de la coordenada de propagación y del tiempo.**

Las dos descripciones están ligadas entre sí a partir de las relaciones:

$$v(z, t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \quad i(z, t) = \int_S \mathbf{H} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde la integral de circulación del campo eléctrico se realiza a lo largo de una curva  $C$  de  $\zeta = \text{cte.}$  entre ambos conductores, y el flujo del campo magnético se calcula a través de una superficie  $S$  de  $\zeta = \text{cte.}$  cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores, siendo  $\zeta$  la dirección de propagación.

La velocidad de propagación de las ondas coincide en ambos modelos y la impedancia de onda del modelo de campos coincide con la impedancia característica del modelo de constantes distribuidas.

Esta analogía permite el uso de herramientas como la carta de Smith para el diseño de sistemas de guiado de ondas en alta frecuencia. En particular es el modelo estándar en el diseño de redes de microondas.

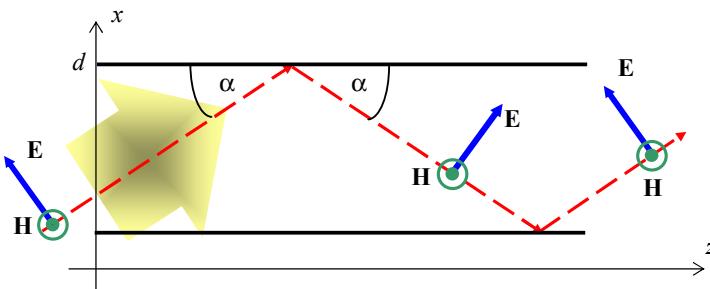
Veremos que en la propagación para un modo no TEM existe una frecuencia mínima por debajo de la cual no hay propagación. Esto limita la utilidad de la guía. En lo que sigue analizaremos los modos no TEM que se pueden propagar en una guía de planos paralelos. Aunque esta guía no es útil desde el punto de vista práctico, ilustra con la matemática mínima todas las características esenciales de la propagación guiada.

<sup>3</sup> A diferencia de las coaxiles, en estas líneas el modo TEM es una **aproximación**, en algunos casos muy buena, porque siempre existe una componente longitudinal de los campos.

## Modo TM

Vamos a analizar el modo TM no con la formulación general establecida en la sección precedente (que usamos en el modo TE, más abajo), sino con una aproximación intuitiva, a partir de la incidencia oblicua de una onda plana. Esto nos permitirá analizar el significado de la propagación guiada: la presencia simultánea de una onda viajera en la dirección de propagación y ondas estacionarias en direcciones transversales.

Consideremos una onda plana linealmente polarizada que incide oblicuamente en el espacio entre dos planos conductores perfectos paralelos, separados en  $d$  con los campos dispuestos como se indica en la figura. Al incidir sobre uno de los planos se produce la reflexión total de la onda, y la onda reflejada sale con el mismo ángulo de incidencia por las leyes de Snell. Lo mismo



ocurre cuando esta onda reflejada se vuelve a reflejar en el otro plano. Se ve que el progreso de la onda a lo largo de la guía se produce por sucesivas reflexiones. El campo eléctrico de la onda incidente original puede escribirse:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = E_0 \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_1 = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{k}_1 = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$$

Una vez producida la reflexión, se suma la onda reflejada:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = E_{0,r} \hat{\mathbf{e}}_r e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_r = \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{k}_r = -k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$$

El campo total dentro de la guía es la suma de estos dos campos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{e}}_1 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + E_{0,r} \hat{\mathbf{e}}_r e^{i(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = e^{i\omega t} \left[ E_0 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_1 + E_{0,r} e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_r \right] \\ &= e^{i\omega t} \left[ E_0 e^{-i(k_x x + k_z z)} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] + E_{0,r} e^{-i(-k_x x + k_z z)} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] \right] \\ &= e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ E_0 e^{-ik_x x} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} - \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] + E_{0,r} e^{ik_x x} [\cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{z}}] \right] \\ &= e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ (E_{0,r} e^{ik_x x} + E_0 e^{-ik_x x}) \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + (E_{0,r} e^{ik_x x} - E_0 e^{-ik_x x}) \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \right] \end{aligned}$$

Se ve de estas ecuaciones que el campo eléctrico (el campo magnético tiene el mismo comportamiento) se comporta como una onda viajera a lo largo del eje  $z$  y tiene un comportamiento más complejo a lo largo del eje  $x$ . Para aclarar este comportamiento, debemos analizar el cumplimiento de las condiciones de contorno del campo sobre los planos conductores. Como se trata de conductores perfectos, el campo tangencial eléctrico  $E_z$  se debe anular sobre ellos:

$$E_z = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, d \quad \Rightarrow \quad (E_{0,r} e^{ik_x x} - E_0 e^{-ik_x x}) \sin \alpha = 0 \quad \text{para} \quad x = 0, d$$

de donde:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad (E_{0,r} - E_0) \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{0,r} = E_0$$

$$x = d \quad \Rightarrow \quad (e^{ik_x d} - e^{-ik_x d}) \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k_x d) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x = n\pi/d$$

Esto significa que la longitud de onda del campo incidente no puede ser cualquiera, sino que está ligada a la separación  $d$  entre los planos y al ángulo de incidencia  $\alpha$ .

Campos de otras longitudes de onda **no cumplen las condiciones de contorno** y no pueden existir dentro de la guía. El campo eléctrico para una de las longitudes de onda **permitidas** se puede escribir finalmente:

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = 2E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \cos \alpha \hat{\mathbf{x}} + i \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \sin \alpha \hat{\mathbf{z}} \right]$$

Se ve que el campo tiene una componente longitudinal, es decir, sobre la dirección de propagación  $z$ . Como se observa en la figura inicial, el campo magnético sólo tiene componente según  $y$ , por lo que resulta transversal a la dirección de propagación. Se trata entonces de una onda **transversal magnética (TM)**.

Por otra parte, podemos eliminar de las expresiones de los campos el ángulo  $\alpha$  observando que: :  $k_z = k \cos \alpha$      $k_x = n\pi/d = k \sin \alpha$ , y entonces:

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = 2E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right]$$

El campo magnético asociado a este campo eléctrico puede calcularse de la ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\omega\mu H_x & H_x = 0 \\ -ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y & H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \left( ik_z E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z & H_z = 0 \end{cases}$$

de donde:  $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) = 2 \frac{E_0}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}}$

La relación entre las componentes del campo eléctrico y el magnético **transversales** a la propagación ha sido definida en el análisis de la incidencia oblicua y tiene el mismo rol que la impedancia de onda en medios ilimitados o líneas. Esta relación tiene dimensiones de impedancia y se conoce como **impedancia de onda** o **impedancia de campo**. Para un modo **TM<sub>n</sub>**:

$$Z_{\text{TM}_n} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \frac{k_{z_n}}{k} = \eta \frac{\sqrt{k^2 - k_{x_n}^2}}{k} = \eta \sqrt{1 - \frac{k_{x_n}^2}{k^2}} = \eta \sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}$$

Se puede ver que esta relación no depende de la posición dentro de la guía, pero sí del orden  $n$  del modo de propagación.

En general, el campo dentro de la guía puede expresarse como una superposición de estos **modos normales TM<sub>n</sub>** (que, desde el punto de vista matemático, forman un conjunto completo):

$$\mathbf{TM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}}$$

Hemos supuesto que entre los dos planos conductores hay un dieléctrico sin pérdidas. La velocidad de las ondas electromagnéticas en ese medio (considerado como ilimitado) es  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . En la guía, la relación entre  $k$  y  $\omega$  define las características de la propagación. Como el vector de onda tiene componentes solamente sobre  $x$  y sobre  $z$ :  $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$  y siendo  $k_x = n\pi/d$  y  $k = \omega/c$  se tiene:

$$k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (n\pi/d)^2}$$

Pero  $k_z$  es el número de onda que aparece en el factor de propagación:  $e^{i(\omega t - k_z z)}$  de la onda dentro de la guía. Para que exista propagación,  $k_z$  debe ser real, ya que de otro modo el factor de propagación se convierte en un factor de atenuación que da una onda evanescente. Esta onda no

transmite potencia. Para que  $k_z$  sea real es necesario que:

$$\frac{\omega}{c} > n \frac{\pi}{d} \Rightarrow \omega > n \frac{\pi c}{d} \Rightarrow f > n \frac{c}{2d}$$

Por lo tanto, para el modo normal  $\mathbf{TM}_n$  la frecuencia mínima que lleva a que haya propagación ondulatoria dentro de la guía es  $f_n = nc/2d$ . Esta frecuencia mínima (para este modo) se denomina **frecuencia de corte** de la guía para el modo  $\mathbf{TM}_n$ .

De la ecuación para  $k_z$ :  $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (n\pi/d)^2} = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\omega_n/c)^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}/c$

donde  $\omega_n = 2\pi f_n$  es la frecuencia angular de corte para el modo  $\mathbf{TM}_n$ . Se ve además que la impedancia de campo  $Z_{TM_n}$  es real (la onda propaga potencia media o potencia activa) para  $f > f_c$  e imaginaria pura (la onda no propaga energía) para  $f < f_c$ .

Otra característica que se puede analizar es el valor de longitud de onda (medida para la propagación ilimitada) en el medio que llena la guía para las frecuencias de corte:

$$\lambda_n = c/f_n = 2d/n \Rightarrow d = n\lambda_n/2$$

o sea que la frecuencia de corte del modo  $\mathbf{TM}_n$  se da cuando la separación entre planos es igual a  $n$  veces la semilongitud de onda en el espacio ilimitado.

La **velocidad de fase** de las ondas permitidas en la guía se puede calcular de la ecuación de los planos de fase constante:

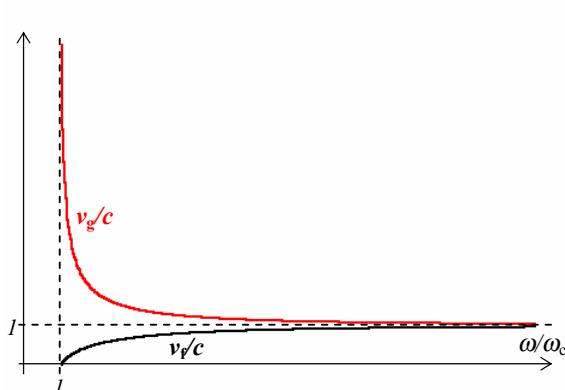
$$\alpha t - k_z z = cte \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}}$$

Se ve que la velocidad de fase sólo es real para  $\omega > \omega_n$ , y en tal caso es superior a  $c$ . Desde el punto de vista de la propagación de la energía se debe considerar la velocidad de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega} \left( \sqrt{\omega^2 - \omega_n^2} \right)} = c \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_n}{\omega} \right)^2} < c$$

y se ve que la velocidad de grupo también es real para  $\omega > \omega_n$ , y es menor que la velocidad de la luz en el medio.

Más aún, podemos ver que:

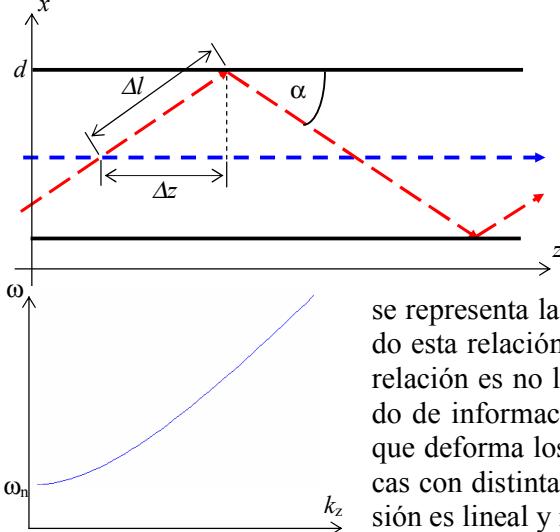


$$v_f v_g = c \sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2} \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}} = c^2$$

En la figura se muestra la variación de ambas velocidades dentro de la guía a partir de la frecuencia de corte. Para  $\omega \rightarrow \omega_n^+$  la velocidad de fase tiende a infinito, mientras que la velocidad de grupo tiende a cero. Para  $\omega \rightarrow \infty$ , ambas velocidades tienden a  $c$ , la velocidad de las ondas electromagnéticas en el medio que rellena la guía.

Este comportamiento es exactamente el mismo que el de la propagación en un plasma ilimitado de pérdidas despreciables (**Ejemplo 8.12**). La existencia de la frecuencia de corte como frecuencia mínima de propagación distingue al modo TM del modo TEM donde **no hay limitaciones de frecuencia** a la propagación. Podemos vincular la noción de velocidad de grupo con el esquema de incidencia oblicua que usamos en esta sección para analizar la propagación guiada. En el intervalo  $\Delta t$  la onda plana que va rebo-

tando entre los planos conductores avanza una distancia  $\Delta l$ , mientras que la onda guiada avanza la distancia  $\Delta z$ . Entonces:



$$c = \Delta l / \Delta t \quad \text{y} \quad v_g = \Delta z / \Delta t, \quad \text{de donde:}$$

$$v_g = c \frac{\Delta z}{\Delta l} = c \cos \alpha = c \frac{k_z}{k} = c \sqrt{1 - (\omega_c / \omega)^2}$$

que es la expresión hallada previamente.

Como la velocidad de fase depende de la frecuencia, existe **dispersión**, que es dispersión normal, como en el caso del plasma. En la figura

se representa la **relación de dispersión**  $\omega = \omega(k_z) = \omega(\beta)$ . Cuando esta relación es lineal no hay dispersión. En el presente caso la relación es no lineal. La existencia de dispersión altera el contenido de información de las señales que se propagan por la guía, ya que deforma los pulsos al viajar las distintas componentes armónicas con distinta velocidad. En el modo TEM la relación de dispersión es lineal y no hay dispersión.

**Ejemplo 9.1:** Analizar la propagación de una onda **TM** de 20 GHz entre planos conductores perfectos paralelos separados 1cm por aire.

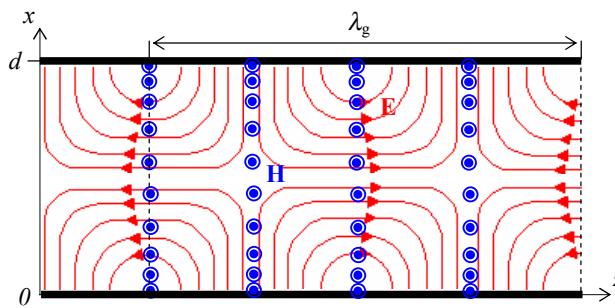
La frecuencia de corte para el modo **TM**<sub>n</sub> es:  $f_n = nc / 2d \approx 15n\text{GHz}$  de modo que la frecuencia de trabajo se halla por encima de la frecuencia de corte y hay propagación solamente si  $n = 1$ . Los campos son en este caso:

$$\mathbf{TM}_1 \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{01} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{x} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{z} \right] \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_{01}}{\eta_0} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{y}$$

$$\text{con: } k = \omega/c \approx 418.88 \text{ m}^{-1} \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - (\pi/d)^2} \approx 277.06 \text{ m}^{-1}$$

$$v_f = \omega/k_z \approx 4.54 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 1.51c \quad v_g = c^2/v_f \approx 1.98 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0.66c$$

$$Z_{\mathbf{TM}_1} = \eta_0 \sqrt{1 - \omega_{c1}^2/\omega^2} \approx 0.66 \eta_0 \approx 249.18 \Omega$$



En la figura se esquematizan las líneas de campo para el modo **TM**<sub>1</sub>. Las líneas de campo de **E** se extienden entre distintas posiciones de la misma placa y las líneas de **H** son paralelas a los planos y equiespaciadas sobre **z**, aunque se concentran a lo largo de **x** por la función coseno. En la figura:

$$\lambda_g = v_g / f.$$

### Modo TE

En el caso de los modos TM analizamos la propagación dentro de la guía de planos paralelos usando una visión de una onda que ingresa oblicuamente a la guía. En el caso de los modos TE vamos a usar las ecuaciones generales a partir de la/s componente/s longitudinal/es. En este caso la única componente longitudinal es  $H_z$ , por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} & H_x &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ E_y &= \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} & H_y &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}$$

La componente longitudinal satisface la ecuación de Helmholtz:  $\nabla_t^2 H_z + k_t^2 H_z = 0$ .  $H_z$  no puede depender de  $y$  por la simetría de los planos contorno, que son de extensión infinita en esa dirección, y entonces:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + k_t^2 H_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = (H_{0+} e^{-ik_t x} + H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

de donde:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 & E_y &= \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\omega\mu}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ H_y &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 & H_x &= -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{k_z}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

De estas componentes,  $E_y$  es tangencial a los planos conductores que forman el contorno. Pero el campo en los conductores es nulo, de modo que  $E_y$  debe anularse sobre los planos:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{\omega\mu}{k_t} (H_{0+} e^{-ik_t x} - H_{0-} e^{ik_t x}) e^{i(\omega t - k_z z)} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{0-} = H_{0+}$$

Luego:  $E_y = -\frac{2i\omega\mu}{k_t} H_{0+} \operatorname{sen}(k_t x) e^{i(\omega t - k_z z)}$

$$x = d \quad \Rightarrow \quad E_y = -\frac{2i\omega\mu}{k_t} H_{0+} \operatorname{sen}(k_t d) e^{i(\omega t - k_z z)} = 0 \quad \Rightarrow \quad k_t = \frac{n\pi}{d}$$

Queda entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{TE}_n \quad H_z &= H_{0_n} \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} & E_y &= -\frac{i\omega\mu}{k_t} H_{0_n} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ H_x &= \frac{ik_z}{k_t} H_{0_n} \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

En este caso el vector de onda es:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = k_x^2 + k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + k_z^2 \quad \Rightarrow \quad k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}}{c} \quad \text{con} \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{d}$$

y las frecuencias de corte coincide para modos **TM** y **TE** del mismo orden  $n$ . También coinciden las expresiones de las velocidades de fase y de grupo, con lo que el modo **TE** presenta las mismas características de dispersión que el modo **TM** del mismo orden.

La impedancia de onda en el modo **TE<sub>n</sub>** es:

$$Z_{\mathbf{TE}_n} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{k_{z_n}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2 - k_{z_n}^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}}$$

Se observa así que para la propagación guiada entre planos conductores paralelos:

$$Z_{\text{TM}_n} Z_{\text{TE}_n} = \eta^2$$

Como en el caso **TM**, la expresión general de los campos en el caso **TE** se puede escribir como la superposición de los modos normales **TE<sub>n</sub>**.

TE	$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{0_n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)}$
	$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{0_n} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)}$

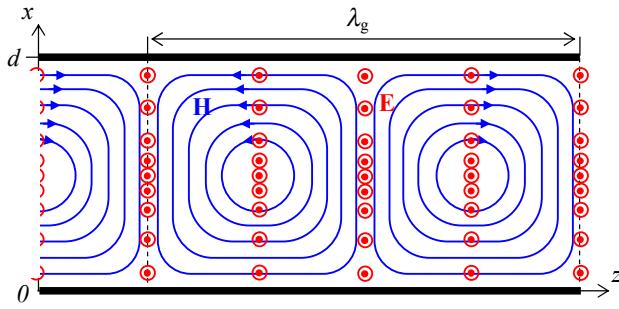
**Ejemplo 9.2:** Analizar la propagación de una onda **TE** de 20 GHz entre planos conductores perfectos paralelos separados 1 cm por aire.

La frecuencia de corte para el modo **TE<sub>n</sub>** es la misma que para el modo **TM<sub>n</sub>**, hallada en el Ejemplo previo:  $f_n = nc/2d \approx 15n \text{ GHz}$  de modo que nuevamente hay propagación sólo para  $n = 1$ . Los campos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{TE}_1 & \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\omega\mu H_{0_1}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ & \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = H_{0_1} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$

Los valores de  $k$ ,  $k_z$ ,  $v_f$  y  $v_g$  son los mismos que en el Ejemplo previo, mientras que::

$$Z_{\text{TE}_1} = \eta_0 / \sqrt{1 - \omega_{c_1}^2 / \omega^2} \approx 1.51 \eta_0 \approx 569.56 \Omega$$



En la figura se muestran las líneas de campo para el modo **TE<sub>1</sub>**. Las líneas de campo eléctrico se distribuyen uniformemente a lo largo de  $z$  pero se concentran para  $x = d/2$  por la presencia de la función seno. Las líneas de campo magnético son cerradas. En la figura:

$$\lambda_g = v_g / f .$$

**En resumen, para la propagación de ondas guiadas entre planos conductores paralelos:**

- en el modo **TEM** no existe límite de frecuencia - inferior o superior - para la propagación de ondas. No hay dispersión de paquetes de onda;
- en los modos **TM** y **TE** hay un límite inferior de frecuencia para la propagación, la frecuencia de corte, que además depende del orden del modo. Hay dispersión de paquetes de onda.

En la siguiente sección analizamos la influencia de las pérdidas conductoras en la propagación de ondas en una guía de planos paralelos.

### Consideraciones energéticas

La energía media almacenada en los campos por unidad de área normal a  $z$  es:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) + \mu \operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^*)] dx$$

Vamos a analizar el comportamiento de esta energía media para un modo  $\mathbf{TE}_n$ . Consideremos una superposición de modos normales:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_t} H_{0_n} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} + i \frac{k_z}{k_t} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)}\end{aligned}$$

Entonces, por ejemplo, para el campo eléctrico (obsérvese que  $k_t$  y  $k_z$  dependen del orden del modo  $n$ ):

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) &= \operatorname{Re} \left\{ -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_{t_n}} H_{0_n} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_{z_n} z)} \right\} \bullet \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i\omega\mu}{k_{t_m}} H_{0_m}^* \hat{\mathbf{y}} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{-i(\omega t - k_{z_m} z)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n} k_{t_m}} H_{0_n} H_{0_m}^* \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(k_{z_m} - k_{z_n})z} \right\}\end{aligned}$$

Al realizar las integrales sobre  $x$ , la suma de cuadrados da un valor finito, mientras que la suma de productos para distintos modos produce integrales nulas. Queda así:

$$\int_0^d \operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) dx = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} + i \frac{k_{z_n}}{k_{t_n}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{i(\omega t - k_{z_n} z)} \right\} \bullet \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} H_{0_m}^* \left[ \cos\left(\frac{m\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} - i \frac{k_{z_m}}{k_{t_m}} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} \right] e^{-i(\omega t - k_{z_m} z)} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |H_{0_n}|^2 \left[ \cos^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) + \left(\frac{k_{z_n}}{k_{t_n}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} H_{0_n} H_{0_m}^* \left[ \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{d}\right) + \frac{k_{z_n}}{k_{t_n}} \frac{k_{z_m}}{k_{t_m}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) \right] e^{i(k_{z_m} z - k_{z_n} z)}\end{aligned}$$

integrandos:

$$\int_0^d \operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^*) dx = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k_{t_n}} \right)^2 |H_{0_n}|^2$$

Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned}\langle U \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) + \mu \operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^*)] dx \\ &= \epsilon \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2 \mu^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2 + \mu \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k_{t_n}} \right)^2 |H_{0_n}|^2 = \frac{d}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu}{k_{t_n}^2} (\omega^2 \mu \epsilon + k^2) |H_{0_n}|^2\end{aligned}$$

y como  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  se ve que ambos sumandos son iguales:

$$\mu \int_0^d \operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^*) dx = \epsilon \int_0^d \operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) dx$$

o sea que la energía media está **equipartida** entre el campo eléctrico y el campo magnético. Finalmente la energía almacenada queda:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} \int_0^d [\epsilon \operatorname{Re}(\mathbf{E} \bullet \mathbf{E}^*) + \mu \operatorname{Re}(\mathbf{H} \bullet \mathbf{H}^*)] dx = \mu d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k_{t_n}^2} |H_{0_n}|^2$$

Una conclusión importante es que la energía media almacenada dentro de la guía resulta la **suma de las energías medias almacenadas asociadas a cada modo de orden  $n$** . Este resultado ocurre siempre que describimos un campo mediante una superposición de funciones ortogonales como en la representación de Fourier.

Como dentro de la guía (por encima de la frecuencia de corte) existe propagación, hay un flujo de energía que podemos cuantificar con el vector de Poynting:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re e(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

Para los modos de propagación hallados tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - k_z z)} \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta} \hat{\mathbf{z}}$$

donde hemos usado el hecho de que la impedancia  $\eta$  es real.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{TM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0_n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0_n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_{0_n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}}$$
  

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{TE} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -2i\omega\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{0_n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\omega\mu |H_{0_n}|^2 k_z}{k_t^2} \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}}$$

Se ve que no hay flujo medio de potencia sobre la dirección transversal  $x$ . También se anulan, como hemos visto, los productos de términos de frecuencias diferentes.

Estas expresiones son válidas para frecuencias mayores que la frecuencia de corte. Por debajo,  $k_z$  es imaginario puro y la parte real del producto de fasores se anula, lo que implica que **no hay propagación**, ya que se trata de campos evanescentes.

### Pérdidas conductoras

Las guías reales presentan pérdidas, debido a que los conductores no son perfectos y presentan una conductividad finita y pérdidas por efecto Joule, y eventualmente puede haber pérdidas dieléctricas. En este tratamiento introductorio consideraremos solamente pérdidas conductoras.

Consideramos que los planos conductores tienen un cierto espesor  $d$ . Debido a la presencia de una conductividad finita, existe campo EM dentro de los conductores y supondremos que, a la frecuencia de trabajo,  $d \gg \delta$ . En estas condiciones, para analizar el comportamiento del campo dentro de la guía podemos aplicar los resultados del análisis de la incidencia oblicua desde un dieléctrico sobre un buen conductor:  $\rho_{TE} \approx -1 + 2 \cos(\theta_i) \eta_2 / \eta_1$      $\rho_{TM} \approx -1 + 2 \sec(\theta_i) \eta_2 / \eta_1$  donde  $\theta_i$  es el ángulo de incidencia (complementario de  $\alpha$  en la figura de la pág. 9.6),  $\eta_1$  es la impedancia intrínseca del dieléctrico interior a la guía y  $\eta_2$  es la impedancia intrínseca del conductor. En ambos casos se observa que el coeficiente de reflexión difiere del caso ideal (-1) en muy poco.

**Por este motivo es posible aproximar las expresiones de los campos en el interior de la guía con pérdidas con las correspondientes al caso ideal, pero introduciendo un factor de atenuación que tenga en cuenta las pérdidas**<sup>4</sup>:

$$\mathbf{E}_{real}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{E}_{ideal}(\mathbf{r},t) e^{-\alpha z} \quad \mathbf{H}_{real}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{H}_{ideal}(\mathbf{r},t) e^{-\alpha z}$$

<sup>4</sup> Esta aproximación es posible en todos los casos en que las pérdidas son bajas en relación a la potencia propagada.

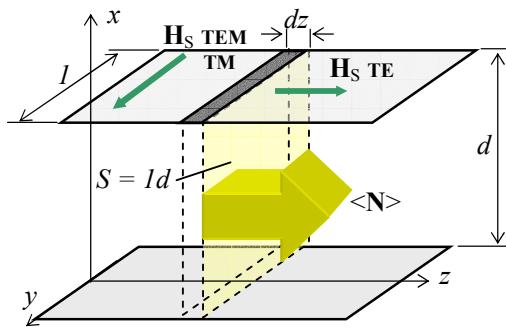
Los campos para una guía real de planos paralelos quedan entonces:

$$\begin{aligned}
 \textbf{TEM} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{z}} \\
 \textbf{TM} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_{0n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \\
 \textbf{TE} \quad & \left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{0n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{0n} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \mu |H_{0n}|^2}{k_t^2} k_z \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

Obsérvese que, en general, el coeficiente de atenuación dependerá del modo en consideración. Para determinar este coeficiente analizamos la pérdida de energía a lo largo de la propagación.

La potencia que cruza un área transversal  $dS$  de la guía es  $\langle \mathbf{N} \rangle dS$ , y entonces la diferencia entre estas cantidades a lo largo de un desplazamiento elemental  $dz$  es la potencia perdida en ese tramo<sup>5</sup>:

$$\langle \mathbf{N}(z + dz) \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \langle \mathbf{N}(z) \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS - \frac{d\langle P \rangle}{dv} dS dz \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dv} = -\frac{d\langle N \rangle}{dz} = 2\alpha \langle N \rangle$$



La potencia perdida sobre el tramo  $dz$  se da en los conductores, y se puede expresar por unidad de superficie como se describe en el Capítulo 8, en la sección dedicada al efecto pelicular:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dS} = \frac{\delta}{4} \mathbf{j} \bullet \mathbf{E} \Big|_s$$

donde  $\delta$  es la profundidad de penetración y los campos se calculan sobre la superficie del conductor. Se puede reescribir esta expresión en términos del campo magnético sobre la superficie del conductor:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dS} = \frac{\delta}{4} \mathbf{j} \bullet \mathbf{E} \Big|_s = \frac{\sigma \delta}{4} |\mathbf{E}_s|^2 = \frac{\sigma \delta |\eta|^2}{4} |H_s|^2 = \frac{1}{2\sigma \delta} |H_s|^2 = \frac{1}{2} |H_s|^2 R_s \quad \text{con } R_s = 1/\sigma \delta$$

Esta es la potencia perdida por unidad de área por efecto Joule. Se debe multiplicar por 2 por la existencia de dos planos conductores. Tomando un paralelepípedo de ancho unitario, altura  $d$  y profundidad  $dz$ , tenemos:

$$\langle P \rangle = \int_0^1 |H_s|^2 R_s dy dz = R_s dz \int_0^1 |H_s|^2 dy \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dz} = R_s \int_0^1 |H_s|^2 dy$$

$$\text{y: } \frac{d\langle P \rangle}{dv} = 2\alpha \langle N \rangle \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dz} = 2\alpha \int_S \langle N \rangle dS$$

e igualando ambas expresiones obtenemos finalmente para  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{R_s}{2} \frac{\int_0^1 |H_s|^2 dy}{\int_S \langle N \rangle dS}$$

<sup>5</sup> Esta expresión ya fue hallada en el tratamiento general de la propagación de ondas electromagnéticas en medios ilimitados, Capítulo 8.

Para cada modo  $\mathbf{H}_s$  y  $\mathbf{N}$  son distintos:

$$\text{TEM} \quad \mathbf{H}_s = \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = \frac{|E_0|^2}{\eta^2} e^{-2\alpha z} \Rightarrow \alpha = R_s / \eta d$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{|E_0|^2 d}{2\eta} e^{-2\alpha z}$$

$$\text{TM}_n \quad \mathbf{H}_s = \frac{E_{0_n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = \frac{|E_{0_n}|^2}{\eta^2} e^{-2\alpha_n z}$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{|E_{0_n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{|E_{0_n}|^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} e^{-2\alpha_n z} \int_0^d \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) dx = \frac{|E_{0_n}|^2 d}{4\eta} \frac{k_z}{k} e^{-2\alpha_n z}$$

En la integral del campo magnético se debe tomar  $x = 0, d$ , lo que lleva a que el coseno sea de módulo unitario y la integral del coseno cuadrado vale  $d/2$ . Finalmente:

$$\alpha_{TM} = 2 \frac{k}{k_z} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}} = \frac{2}{d} \frac{R_s}{Z_{TM}}$$

$$\text{TE}_n \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{0_n} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-\alpha_n z} e^{i(\omega t - k_z z)} \Rightarrow \int_0^1 dy |H_s|^2 = |H_{0_n}|^2 e^{-2\alpha_n z}$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \mu |H_{0_n}|^2 k_z}{k_t^2} \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_S \langle N \rangle dS = \frac{\omega \mu |H_{0_n}|^2 k_z d}{2k_t^2} e^{-2\alpha_n z}$$

Nuevamente en la integral del campo magnético se debe tomar  $x = 0, d$ , lo que lleva a que el seno se anule y el coseno sea de módulo unitario. Finalmente:

$$a_{TE} = \frac{k_t^2}{k_z} \frac{R_s}{\omega \mu d} = \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d}$$

En resumen:

**Las expresiones para la constante de atenuación debida a las pérdidas conductoras en la propagación en la guía de planos paralelos dependen del modo y en el caso de los modos TM y TE también del orden.**

$$\text{TEM} \quad \alpha_{TEM} = \frac{R_s}{\eta d}$$

$$\text{TM} \quad \alpha_{TM} = 2 \frac{k}{k_z} \frac{R_s}{\eta d} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}}$$

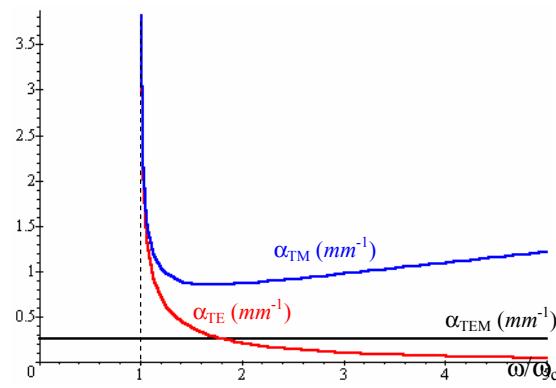
$$\text{TE} \quad a_{TE} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d} = \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}} \frac{R_s}{\eta d}$$

**Ejemplo 9.3:** Grafique la variación con la frecuencia de los coeficientes de atenuación para los modos  $\text{TM}_1$  y  $\text{TE}_1$  con conductores de cobre separados en 1cm y dieléctrico de aire.

Las expresiones explícitas en función de la frecuencia son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{TEM} = \frac{R_s}{\eta d} = \sqrt{\frac{\omega \epsilon}{2\sigma}} \frac{1}{d} \\ \alpha_{TM} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon}{\sigma(1 - \omega_c^2/\omega^2)}} \\ \alpha_{TE} = \frac{\omega_c^2/\omega^2}{d} \sqrt{\frac{2\omega \epsilon}{\sigma(1 - \omega_c^2/\omega^2)}} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \alpha_{TM} \end{array} \right.$$

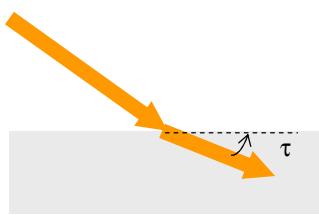
Graficamos a la derecha para  $n = 1$ . Se observa que  $\alpha_{TM}$  crece con la frecuencia, mientras que  $\alpha_{TE}$  tiende a cero, y que  $\alpha_{TEM}$  (constante con  $\omega$ ) se halla entre las otras curvas para  $\omega > \sim 1.8\omega_c$ . Las curvas para otros valores de  $n$  son idénticas a las presentadas, ya que sólo varía la frecuencia de corte.



## Guías abiertas

En el caso de la guía de planos paralelos, el guiado de las ondas se realiza mediante las condiciones de contorno impuestas por los conductores. Sin embargo, **toda desadaptación de impedancias puede funcionar como un sistema de guiado de ondas**. En ese sentido vimos en el análisis de la incidencia oblicua que, cualesquiera fueran los medios involucrados, el campo electromagnético en el medio de incidencia consiste en una onda semiestacionaria en la dirección normal a la interfase y una onda viajera paralela a la misma. Esta onda viajera es una onda guiada por la interfase. Sommerfeld encontró en 1899 que en la radiación de antenas cerca de tierra existía una onda de superficie, guiada por la interfase aire-tierra.

Este guiado se puede entender analizando el caso de la incidencia oblicua sobre una interfase. Si el segundo medio es conductor perfecto, el campo eléctrico en el medio de incidencia resulta normal a la interfase, ya que la componente tangencial se debe anular sobre ella. Cerca de la interfase, entonces, todo el flujo neto de potencia se da en una dirección paralela a la misma. Si el segundo medio no es conductor perfecto, existe una componente tangencial del campo eléctrico no nula sobre la interfase. Esta componente produce un flujo del vector de Poynting normal a la interfase aparte de la paralela, de modo que resulta un flujo oblicuo, que en todos los casos va del primer medio (el medio de incidencia) al segundo medio (el medio de transmisión).



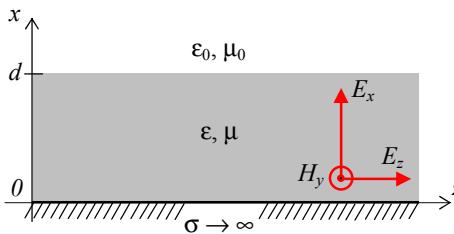
Esta característica lleva a que una interfase entre dos medios produce una tendencia a que la energía que transporta la onda viajera se centre cerca de la interfase, produciendo así un guiado de la energía.

El ángulo de propagación de la energía respecto de la propagación paralela en distintos casos se presenta en el siguiente cuadro, para la incidencia desde el aire a una frecuencia de 3GHz:

Medio 2	Conductividad $(\Omega m)^{-1}$ , Permitividad	Angulo $\tau$ ( $^\circ$ )
Conductor perfecto	$\rightarrow \infty$	0
Cobre	$\approx 6 \times 10^7, \epsilon_0$	$2.2 \times 10^{-3}$
Agua de mar	$\approx 4, 80\epsilon_0$	6.4

En el caso en que el segundo medio sea un buen conductor, la energía que se propaga normal a la interfase se disipa por efecto Joule dentro del semiespacio conductor. Se puede mejorar el guiado de ondas por una superficie conductora agregando corrugaciones periódicas transversales o una capa dieléctrica.

En ambos casos es posible demostrar que, para la propagación **normal** a la interfase, **la impedancia de onda es reactiva pura**, lo que indica un onda estacionaria, a pesar de que el coeficiente de reflexión entre los medios extremos (aire y conductor) no es uno.



En particular, podemos considerar una capa dieléctrica supuestamente sin pérdidas, de parámetros  $\epsilon$  y  $\mu$  colocada entre aire ( $\epsilon_0, \mu_0$ ) y un conductor perfecto ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), como se indica en la figura.

La solución TM para la propagación según  $z$  es, dentro de la capa:

$$E_x = -\frac{ik_z}{k_x} E_0 \cos(k_x x) \quad E_z = E_0 \sin(k_x x) \quad H_y = -\frac{i\omega\epsilon}{k_x} E_0 \cos(k_x x) \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k_x^2 + k_z^2$$

Esta solución anula el campo eléctrico tangencial sobre el conductor perfecto. La impedancia de onda cerca de la interfase dieléctrico-aire ( $x \rightarrow d$ ) es:

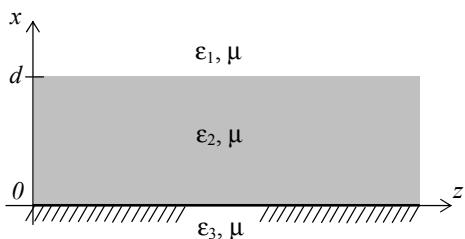
$$Z_{\parallel} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} \quad Z_{\perp} = \frac{E_z}{H_y} = -\frac{k_x}{i\omega\epsilon} \tan(k_x d) = i \frac{k_x}{\omega\epsilon} \tan(k_x d)$$

donde hemos distinguido entre la impedancia para la propagación paralela ( $Z_{\parallel}$ ) y la impedancia para la propagación normal ( $Z_{\perp}$ ) a las superficies interfases. Para que exista propagación guiada (a lo largo de  $z$ ) se requiere que  $k_z$  sea real. En tal caso la impedancia paralela es real.

En general, el valor de  $k_x$  puede ser real o imaginario. Si  $k_x$  es real, se ve que  $Z_{\perp}$  es real y se produce propagación. Si  $k_x$  es imaginario, como  $\tan(i|k_x|d) = i \tanh(|k_x|d)$  también la impedancia normal será imaginaria pura, o sea, reactiva. Esto indica que no hay propagación de energía en la dirección normal.

El guiado por superficies abiertas se puede realizar mediante alambres cilíndricos rectos, alambres conductores rodeados por un dieléctrico, espirales conductoras, etc. En todos estos casos la excitación del modo apropiado es el problema más difícil de resolver en la práctica. El guiado de ondas mediante estructuras metálicas abiertas es uno de los campos de mayor desarrollo en los últimos años.

### Guías de hoja dieléctrica



Es posible usar una hoja dieléctrica (entre dieléctricos) para guiar ondas si su permitividad (o su índice de refracción, si se trabaja en el rango óptico) es mayor que la de los medios a su alrededor:  $\epsilon_2 > \epsilon_3$  y  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . En tal caso, existen ángulos límite:

$$\theta_{iq12} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \quad \text{o} \quad \theta_{ic23} = \sin^{-1} \sqrt{\epsilon_3/\epsilon_2}$$

Si la radiación dentro de la hoja, considerada como una onda plana que incide “oblicuamente” sobre las interfases, lo hace con ángulos mayores que estos ángulos límite, se produce el fenómeno de reflexión total y no existe potencia (media) que cruce la interfase. Toda la energía de la radiación se ve entonces guiada por la hoja dieléctrica. En este principio se basa el guiado de ondas de luz en las llamadas fibras ópticas.

Aunque las fibras ópticas son de sección circular y requieren una descripción matemática basada en coordenadas cilíndricas, existen guías dieléctricas planas en dispositivos de óptica integrada que se basan en tecnologías de películas delgadas. Para estos dispositivos es posible realizar un análisis en sólo dos direcciones: la dirección longitudinal (de propagación) y la dirección normal a las interfases.

Consideraremos el caso de tres medios de características diferentes, que corresponden al **sustrato** ( $\epsilon_3, \mu$ ), la **capa** ( $\epsilon_2, \mu$ ) y el **recubrimiento** ( $\epsilon_1, \mu$ ) en la nomenclatura de la tecnología de películas delgadas. Habitualmente el sustrato es el soporte mecánico de la estructura, la capa es la guía

de ondas propiamente dicha, y el recubrimiento tiene funciones de protección de la estructura. Suponemos que la permeabilidad es la misma en los tres medios, lo que es lo normal.

Asumimos campos que se propagan en la dirección  $z$ , de manera que las componentes incorporarán el factor  $e^{i(\omega t - k_z z)}$  que consideraremos implícito en las ecuaciones. Despreciamos además la dependencia respecto de  $y$  debido a que consideramos indefinida la extensión de la estructura sobre planos  $yz$ . Esta aproximación tiene sentido si el tamaño de la estructura sobre estos planos es mucho mayor que el espesor de la capa  $d$  y si ese tamaño es además grande frente a la máxima longitud de onda de la radiación a considerar.

Consideremos primero un modo TE. La ecuación de Helmholtz para la componente longitudinal ( $H_z$ ) queda:

$$\frac{\partial^2 H_{zi}}{\partial x^2} + \left( k_i^2 - k_{xi}^2 \right) H_{zi} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

cuya solución es una superposición de exponentiales de argumento imaginario o funciones trigonométricas. Elegiremos exponentiales en los medios externos, donde esperamos tener ondas evanescentes, y funciones trigonométricas en la capa, donde esperamos tener ondas “estacionarias” en la dirección normal a las interfasas.

$$H_{z1} = A e^{-qx} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

Tenemos así:

$$H_{z2} = (B \operatorname{sen}(hx) + C \cos(hx)) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

$$H_{z3} = D e^{px} e^{i(\omega t - k_z z)}$$

De las condiciones de contorno surge que  $\omega$  y  $k_z$  deben ser constantes en los tres medios. Las componentes transversales de los campos salen de las ecuaciones:

$$E_x = -\frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad H_x = -\frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad E_y = \frac{i\omega\mu}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad H_y = \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$$

de donde:

$$E_{y1} = \frac{i\omega\mu}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = -\frac{i\omega\mu}{q} A e^{-qx}$$

$$H_{x1} = -\frac{ik_z}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = \frac{ik_z}{q} A e^{-qx}$$

$$E_{y2} = \frac{i\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{h} (B \cos(hx) - C \operatorname{sen}(hx))$$

$$H_{x2} = -\frac{ik_z}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{h} (B \cos(hx) - C \operatorname{sen}(hx))$$

$$E_{y3} = \frac{i\omega\mu}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{p} D e^{px}$$

$$H_{x3} = -\frac{ik_z}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{p} D e^{px}$$

(en estas ecuaciones se ha omitido el factor común  $e^{i(\omega t - k_z z)}$ ).

Planteamos las condiciones de contorno. Se conservan las componentes tangenciales a las interfasas de ambos campos ( $E_y$  y  $H_z$ ) y las componentes normales  $H_x$ :

$$\begin{aligned} x=0 \Rightarrow & \begin{cases} H_{x2} = H_{x3} \\ E_{y2} = E_{y3} \\ H_{z2} = H_{z3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pB = hD \\ pB = hD \\ C = D \end{cases} \\ x=d \Rightarrow & \begin{cases} H_{x1} = H_{x2} \\ E_{y1} = E_{y2} \\ H_{z1} = H_{z2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} hAe^{-qd} = -q(B \cos(hd) - C \operatorname{sen}(hd)) \\ hAe^{-qd} = -q(B \cos(hd) - C \operatorname{sen}(hd)) \\ Ae^{-qd} = B \operatorname{sen}(hd) + C \cos(hd) \end{cases} \end{aligned}$$

Se ve que la conservación de las componentes normales dan condiciones redundantes respecto de la conservación de las tangenciales. De las ecuaciones restantes queda un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

Como  $C = D$ , quedan sólo tres incógnitas. Para que este sistema tenga solución, su determinante debe anularse:

$$\begin{vmatrix} 0 & p & -h \\ h e^{-qd} & q \cos(hd) & -q \sin(hd) \\ e^{-qd} & -\sin(hd) & -\cos(hd) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \tan(hd) = \frac{h(p+q)}{h^2 - pq}$$

ecuación trascendente que debe cumplirse junto con las ecuaciones:

$$k_1^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 = q^2 + k_z^2 \quad k_2^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 = h^2 + k_z^2 \quad k_3^2 = \omega^2 \mu \epsilon_3 = p^2 + k_z^2$$

que definen las componentes del vector de onda.

Esta ecuación trascendente no tiene solución analítica. Puede resolverse en forma gráfica o en forma numérica.

Supongamos el caso simétrico en que las propiedades del sustrato y las del recubrimiento coinciden. En tal caso  $\epsilon_1 = \epsilon_3$  y entonces  $k_1 = k_3 \Rightarrow p = q$ , y la ecuación a resolver es:

$$\tan(hd) = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$$

$$\text{Como } \tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \text{ tenemos: } \tan(hd) = \frac{2\tan(hd/2)}{1 - \tan^2(hd/2)} = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$$

De esta ecuación se puede obtener una ecuación cuadrática para la tangente:

$$\tan^2(hd/2) + \frac{h^2 - p^2}{ph} \tan(hd/2) - 1 = 0 \Rightarrow \tan(hd/2) = \begin{cases} p/h \\ -h/p \end{cases}$$

Además, podemos escribir que:

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon_1 - p^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 - h^2 \Rightarrow p = \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) + h^2}$$

Por lo tanto la ecuación original se reduce a:

$$(pd/2) = (hd/2) \tan(hd/2) \Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2 / 4 + (hd/2)^2} = (hd/2) \tan(hd/2)$$

o

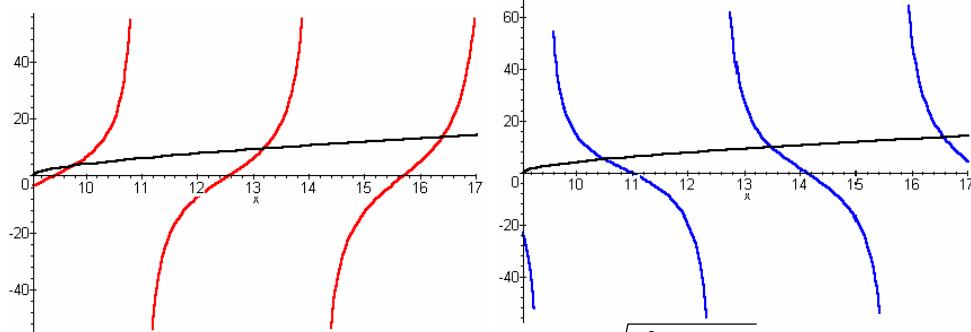
$$(pd/2) = -(hd/2) / \tan(hd/2) \Rightarrow \sqrt{\omega^2 \mu (\epsilon_1 - \epsilon_2) d^2 / 4 + (hd/2)^2} = -(hd/2) / \tan(hd/2)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse en forma gráfica, ploteando ambos miembros y hallando los puntos de cruce, que son las soluciones del problema.

**Ejemplo 9.4:** Halle gráficamente las soluciones de las ecuaciones trascendentes del problema de la capa dieléctrica para una capa de vidrio de espesor  $d = 1.46 \mu\text{m}$  rodeada de aire ( $n_1 = 1, \epsilon_{1,r} \approx 1$ ) a  $f = 5 \times 10^{14} \text{ Hz} (\lambda_0 = 0.6 \mu\text{m})$ .

Nos quedan las ecuaciones:

$$\sqrt{x^2 - 81.89} = x \tan(x) \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 - 81.89} = x / \tan(x) \quad \text{con} \quad x = hd/2$$



$$\sqrt{x^2 - 81.89} = x \tan(x) \quad \sqrt{x^2 - 81.89} = x / \tan(x)$$

Se observa de las figuras que hay solución para:

$$x_1 \approx 9.78, 13.2, 16.4 \Rightarrow h \approx 13.4, 18.08, 22.47 \mu\text{m}$$

$$x_2 \approx 10.5, 13.5, 16.6 \Rightarrow h \approx 14.38, 18.5, 22.74 \mu\text{m}$$

y para otros espesores de capa mayores.

## Nociones de fibra óptica

Por muchos años se ha apreciado que el uso de ondas de luz como portadoras de información provee un enorme ancho de banda potencial. Las ondas ópticas se hallan en el rango de  $10^{13}$  a  $10^{16} \text{ Hz}$  ( $30 \text{ nm} - 30 \mu\text{m}$  - este rango incluye el infrarrojo lejano y el ultravioleta cercano y medio, además del espectro visible), o sea de tres a seis órdenes de magnitud mayor que las frecuencias de microondas. Sin embargo, el aire es un medio con demasiadas pérdidas por dispersión (scattering) para la transmisión de ondas de luz. Sólo la evolución de guías dieléctricas de bajas pérdidas y fabricación económica en los últimos años ha llevado al uso masivo de esta tecnología en las comunicaciones. Debido a sus propiedades, el espectro más eficiente se hallan entre los  $600 - 1600 \text{ nm}$ , siendo las longitudes de onda más utilizadas las de  $850 \text{ nm}$ ,  $1300 \text{ nm}$  y  $1550 \text{ nm}$ .

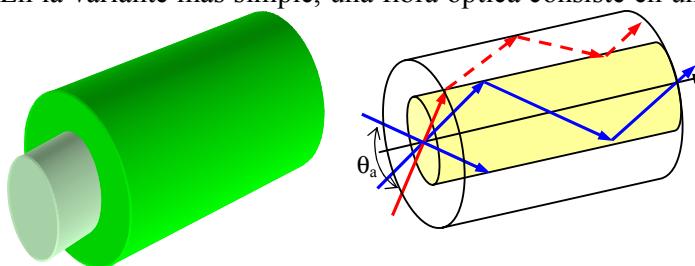
Las principales ventajas de la comunicación por guías dieléctricas cilíndricas (o **fibras ópticas**, en la jerga) son:

- Tamaño, peso y flexibilidad. Las fibras ópticas tienen espesores muy pequeños. Un gran número de fibras individuales pueden agruparse en un cable del tamaño de un coaxil normal. Los cables son más livianos que los de metal y más flexibles.
- Aislación eléctrica. Las fibras ópticas son prácticamente inmunes a las fuentes de interferencia. Esto hace su uso obligatorio en ambientes de alto ruido. Tampoco existe la diafonía (cross-talk) entre fibras individuales en un paquete.
- Seguridad. Es difícil "pinchar" una comunicación enviada mediante fibra óptica. Es mucho más difícil hacerlo sin que se note.
- Bajas pérdidas. Las fibras ópticas modernas tienen mejores performances que los cables coaxiales. Se ha llegado a menos de  $0.2 \text{ dB/Km}$  de pérdidas, lo que elimina la necesidad de repetidoras.

Las principales desventajas de la comunicación con fibras ópticas reside en la fragilidad de las fibras individuales, y fundamentalmente en la dificultad técnica para lograr conexiones confiables y económicas a la circuitería asociada. También la velocidad de los circuitos asociados es lo que limita al presente la tasa de transferencia de información de un sistema de comunicaciones ópticas. El paso de señales electrónicas a ópticas y viceversa es también en la actualidad un factor de alto costo.

En la variante más simple, una fibra óptica consiste en un núcleo cilíndrico de vidrio de un dado

índice de refracción y un recubrimiento, también de vidrio, de índice de refracción menor. El conjunto se rodea de una vaina de polietileno y otras cubiertas de protección. Las dimensiones típicas están en el orden de  $100$  a  $150 \mu\text{m}$  de diámetro. Debido a que el material del recubrimiento tiene un índice de refracción menor al del núcleo (valores típicos  $1.485$  y  $1.5$ ), existe reflexión total para rayos de luz que se propagan en el núcleo con un ángulo mayor (respecto de la normal a la interfase) que el **ángulo aceptable**  $\theta_a$ , ligado con el ángulo límite (rayos en azul),

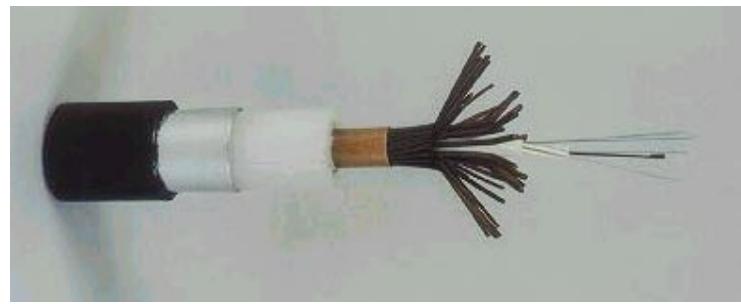


brimiento tiene un índice de refracción menor al del núcleo (valores típicos  $1.485$  y  $1.5$ ), existe reflexión total para rayos de luz que se propagan en el núcleo con un ángulo mayor (respecto de la normal a la interfase) que el **ángulo aceptable**  $\theta_a$ , ligado con el ángulo límite (rayos en azul),

y no hay energía radiada fuera del núcleo (los campos en el recubrimiento y más allá son evanescentes - rayos en rojo). Esta característica se mide a través de la llamada **apertura numérica** de la fibra:

$$NA = \operatorname{sen}(\theta_a / 2)$$

Hay diversos modos normales de propagación posibles por encima de la frecuencia de corte. Si la fibra acepta sólo un modo a una dada frecuencia se dice que es una fibra **mono-modo**, mientras que si existen varios modos posibles a una dada frecuencia se habla de una fibra **multi-modo**.



Cada fibra individual (núcleo + recubrimiento + vaina) se agrupa habitualmente en cables de gran número de fibras, y los cables se pueden a su vez agrupar de nuevo en manojos y el conjunto se recubre de capas protectoras y eventualmente almas de metal para disminuir la fragilidad.

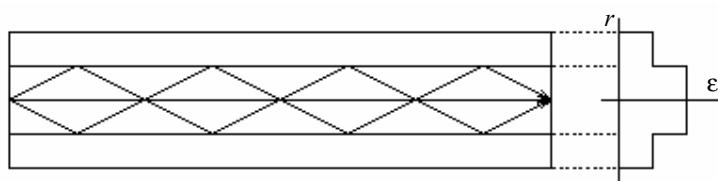
La atenuación en la propagación a lo largo de la fibra se debe a varios fenómenos. Hay **absorción** de energía y **dispersión** luminosa. La absorción se debe a la presencia de impurezas en el material de la fibra (por ejemplo, las moléculas de agua tienen un pico de absorción a los  $1400\text{ nm}$ ) y a la absorción propia del sílice de que está hecha la fibra por encima de los  $1600\text{ nm}$ . La dispersión luminosa tiene tres componentes: uno debido a variaciones microscópicas del índice de refracción del vidrio (dispersión de Rayleigh), fenómeno que aumenta con la frecuencia, otro debido a imperfecciones de la estructura cristalina de la fibra, y un tercero por la relación de dispersión no lineal presente en toda guía de ondas. Este tipo de dispersión se denomina **dispersión cromática**, porque depende de la frecuencia de la radiación que viaja por la fibra. Además en las fibras multimodo cada modo tiene una velocidad de propagación propia que depende de la relación de dispersión en cada modo y la frecuencia de la radiación. Esta **dispersión multimodo** es más importante y se agrega a la dispersión cromática (los anchos de banda se suman cuadráticamente). La dispersión es el factor esencial en la limitación del ancho de banda útil de las fibras ópticas, y es una ironía que la ventaja potencial más importante de las comunicaciones ópticas no se haya hecho realidad, ya que las fibras actuales tienen aproximadamente el mismo ancho de banda que un buen coaxil.

También la curvatura de la guía modifica el ángulo de incidencia de la luz sobre la interfase y puede aumentar las pérdidas respecto del caso rectilíneo si el ángulo de incidencia cae por debajo del ángulo límite. Todos estos factores llevan en general a que la mejor performance (mínima absorción) se da en la región de  $0.8\text{ }\mu\text{m}$  a  $1.8\text{ }\mu\text{m}$  donde se logran factores de atenuación de  $2\text{ dB/Km}$  a  $5\text{ dB/Km}$ .

Existen tres formas básicas de presentación de las fibras ópticas:

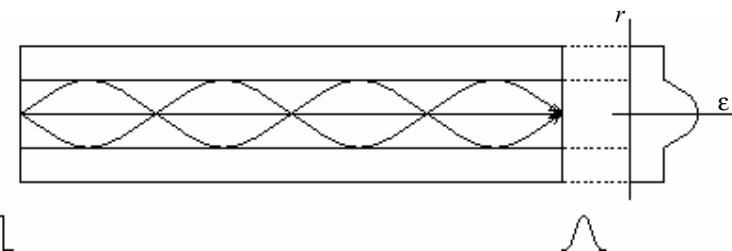
- **Fibra de índice de refracción discontinuo.** En este caso el núcleo tiene índice de refracción constante y existe un salto abrupto en la interfase con el recubrimiento. La propagación de los rayos es mediante reflexión total en la interfase. El diámetro del núcleo está entre  $100$  y  $500\text{ }\mu\text{m}$ . Se trata de una guía multimodo, co-

¶



nocida por la sigla **n/m SI MM** (Step Index Multimode), donde  $n$  es el radio del núcleo y  $m$  el radio del recubrimiento en  $\mu m$ .

- **Fibra de índice de refracción gradual.** En este caso el índice de refracción del núcleo disminuye gradualmente a medida que se avanza hacia la periferia. Esto lleva a que el camino de los rayos se curve hasta que se hacen tangenciales sobre la interfase con el recubrimiento. Se trata de una



guía multimodo y se identifica por la sigla **n/m GI MM** (Graded Index Multimode), donde  $n$  es el radio del núcleo y  $m$  el radio del recubrimiento en  $\mu m$ . Este tipo de fibra tiene menor dispersión (en consecuencia, mayor ancho de banda) que la fibra de índice discontinuo, porque se diseña la forma variación de variación del índice para que la velocidad de grupo de los distintos modos sea similar. La atenuación también es menor que en la fibra de índice discontinuo, pero es bastante más cara.

- **Fibra mono-modo.** Esta fibra sólo permite un único modo o camino de rayos, porque usa diámetros de núcleo mucho menores que en los otros casos y se trata de una guía de índice de refracción constante con salto discontinuo. Como se propaga un solo modo, la dispersión es más baja que en los otros casos, ya que se trata solamente de dispersión cromática. El sistema de acople es en este caso el de mayor dificultad técnica y costo, así como son mayores los costos de producción, pero se tiene mayor performance.

## RESUMEN

En este capítulo se ha realizado un estudio introductorio de la propagación de ondas electromagnéticas por estructuras de guiado, llamadas **guías de ondas**.

- Comenzamos analizando nuevamente los modelos a aplicar de acuerdo a la comparación del tamaño  $D$  de los dispositivos respecto de la mínima longitud de onda  $\lambda_m$  del campo electromagnético:
  - Si  $D \ll \lambda_m$  vale la aproximación cuasi-estática o cuasi-estacionaria para el cálculo de los campos. Es posible pasar de la descripción de campos a la teoría de circuitos y definir parámetros circuitales concentrados. Este es el **modelo circuital de constantes concentradas**.
  - Si  $D \geq \lambda_m$  o  $D \sim \lambda_m$  no es posible usar la aproximación cuasi-estática y en principio se debe usar una descripción del problema a partir del campo electromagnético y resolver las ecuaciones de Maxwell para el problema en estudio. Sin embargo, habitualmente cuando la condición cuasi-estática no se cumple solamente en una dimensión, es posible dividir el dispositivo en partes cuyas dimensiones satisfagan la condición cuasi-estática y usar un modelo circuital para su descripción. Este es el **modelo circuital de constantes distribuidas**, que hemos usado en el análisis de las líneas de transmisión.
- En el caso general se tienen tres modos diferentes de propagación: modo TEM, donde ambos campos son transversales a la dirección de propagación, el modo TM, donde solamente el campo magnético es transversal y el modo TE, donde sólo el campo eléctrico es transversal. De las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de ondas de Helmholtz surge que se puede expresar el campo dentro de la guía en términos de la/s componentes longitudinales:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{k_t^2} \left( k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) & H_x &= \frac{i}{k_t^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ E_y &= \frac{i}{k_t^2} \left( -k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) & H_y &= -\frac{i}{k_t^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

y de estas expresiones surge un método de cálculo de los campos dentro de una guía de ondas :

- Resolver la ecuación de Helmholtz  $\nabla^2 f_z + k^2 f_z = \nabla_t^2 f_z + k_t^2 f_z = 0$  para la componente longitudinal, sabiendo que la dependencia respecto de  $z$  (coordenada de propagación) y del tiempo es  $e^{i(\omega t - k_z z)}$ .
- Usar las condiciones de contorno sobre las paredes de la guía para hallar las constantes de la solución de la ecuación de Helmholtz.
- Calcular las otras componentes del campo.
- Se analiza el guiado de ondas entre un par de planos conductores paralelos que, aunque no constituyen un sistema práctico, permiten describir las propiedades básicas de una guía de ondas.
- En el modo TEM se puede pasar de la descripción en términos de campos a una descripción en términos de constantes distribuidas como el empleado en las líneas de transmisión:

$$\begin{aligned} \text{TEM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \quad \Rightarrow \quad v(z, t) = \int_{C1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{E_0}{\eta} \hat{\mathbf{y}} e^{i(\omega t - kz)} \quad \Rightarrow \quad i(z, t) = \int_S \mathbf{H} \bullet \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

donde la integral de circulación del campo eléctrico se realiza a lo largo de una curva  $C$  de  $\zeta = \text{cte.}$  entre ambos conductores, y el flujo del campo magnético se calcula a través de una superficie  $S$  de  $\zeta = \text{cte.}$  cuyo contorno encierra a sólo uno de los dos conductores, siendo  $\zeta$  la dirección de propagación.

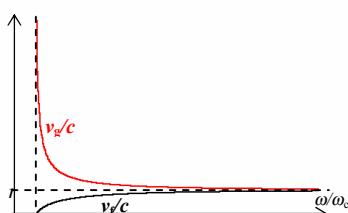
La velocidad de propagación de las ondas coincide en ambos modelos y la impedancia de onda del modelo de campos coincide con la impedancia característica del modelo de constantes distribuidas.

Esta analogía permite el uso de herramientas como la carta de Smith para el diseño de sistemas de guiado de ondas en alta frecuencia. En particular es el modelo estándar en el diseño de redes de microondas,

- En los modos TM y TE tienen los campos:

$$\left. \begin{aligned} \text{TM} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} e^{i(\omega t - k_z z)} \left[ \frac{k_z}{k} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{x}} + i \frac{k_x}{k} \sin\left(n \frac{\pi}{d} x\right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{0n}}{\eta} \cos\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \hat{\mathbf{y}} \\ \text{TE} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i\omega \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{0n}}{k_t} \hat{\mathbf{y}} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{0n} \left[ \frac{ik_z}{k_t} \sin\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(n \frac{\pi x}{d}\right) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{i(\omega t - k_z z)} \end{aligned} \right\}$$

y surge que sólo se pueden propagar ondas de frecuencia superior a una **frecuencia de corte**, que depende además del orden del modo.  $\omega_n = n \frac{\pi c}{d}$



Las velocidades de fase y grupo son las mismas para ambos modos. La guía presenta dispersión normal:

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_n/\omega)^2}} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2} \quad v_f v_g = c^2$$

La **impedancia de onda**, relación entre las componentes del campo eléctrico y el magnético transversales a la propagación es:

$$Z_{\text{TM}_n} = \eta \sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}} \quad Z_{\text{TE}_n} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c_n}^2}{\omega^2}}}$$

- Se calculan la energía transportada, la potencia disipada por efecto Joule y el coeficiente de atenuación en las paredes conductoras para los tres modos:

<b>TEM:</b> $\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{ E_0 ^2}{2\eta} e^{-2\alpha z} \hat{\mathbf{z}}$	$\Rightarrow \alpha = R_s / \eta d$
<b>TM:</b> $\langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ E_{0_n} ^2}{2\eta} \frac{k_z}{k} \cos^2\left(n \frac{\pi}{d} x\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{TM} = \frac{2}{d} \frac{R_s}{Z_{TM}} = \frac{2R_s}{\eta d \sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}}$	
<b>TE:</b> $\langle \mathbf{N} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega \mu  H_{0_n} ^2}{k_i^2} k_z \sin^2\left(n \frac{\pi x}{d}\right) e^{-2\alpha_n z} \hat{\mathbf{z}} \quad \Rightarrow \quad a_{TE} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{Z_{TE} R_s}{\eta^2 d} = \frac{\omega_c^2 / \omega^2}{\sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega^2}} \frac{R_s}{\eta d}$	

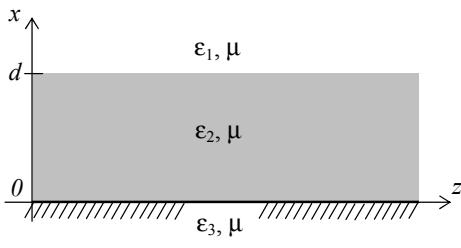
- Se hace una breve introducción a las guías abiertas, que conducen ondas electromagnéticas por desadaptación de impedancias más que por la presencia de superficies conductoras. En particular, se analiza la guía de hoja dieléctrica entre dos dieléctricos: el sustrato y el recubrimiento. En este último caso, el guiado se realiza utilizando un modo de propagación que haga incidir oblicuamente las ondas sobre las interfases de la guía con un ángulo superior al ángulo límite de reflexión total. Las ecuaciones de los campos son:

$E_{y1} = \frac{i\omega\mu}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = -\frac{i\omega\mu}{q} A e^{-qx}$ $E_{y2} = \frac{i\omega\mu}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{h} (B \cos(hx) - C \sin(hx))$ $E_{y3} = \frac{i\omega\mu}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = \frac{i\omega\mu}{p} D e^{px}$	$H_{x1} = -\frac{ik_z}{q^2} \frac{\partial H_{z1}}{\partial x} = \frac{ik_z}{q} A e^{-qx}$ $H_{x2} = -\frac{ik_z}{h^2} \frac{\partial H_{z2}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{h} (B \cos(hx) - C \sin(hx))$ $H_{x3} = -\frac{ik_z}{p^2} \frac{\partial H_{z3}}{\partial x} = -\frac{ik_z}{p} D e^{px}$
---	---

Las constantes surgen de la resolución de una ecuación trascendente. Si el sustrato y el recubrimiento tienen las mismas propiedades la ecuación es:  $\tan(hd) = \frac{2ph}{h^2 - p^2}$

que puede resolverse en forma gráfica para hallar el espesor  $h$  de la capa para propagación.

- Finalmente se hace una introducción a las fibras ópticas como guías de onda.



## PROBLEMAS

- 9.1) Una onda electromagnética se propaga entre dos placas paralelas conductoras separadas  $5\text{ cm}$  entre sí. La frecuencia de la onda es de  $8\text{ GHz}$ . a) ¿Cuántos modos distintos se pueden propagar en la guía? b) ¿Cuál es la longitud de onda en la guía para cada modo?  
 [Rta: a) 5, b)  $3.75, 4.045, 5.669\text{ cm}$ ]
- 9.2) ¿Cuál es la separación máxima permisible entre dos placas paralelas para que de los modos **TE** sólo pueda propagarse el primero, a una frecuencia de  $10\text{ GHz}$ ? Suponga que entre las dos placas hay aire.  
 [Rta:  $d < 3\text{ cm}$ , estudie el caso  $d = 3\text{ cm}$ ]
- 9.3) Grafique aproximadamente las componentes de los campos **E** y **H** entre dos placas paralelas, en un cierto instante, para el modo de propagación **TE**<sub>1</sub>.
- 9.4) Considere nuevamente el ejercicio 8.2). Suponga ahora que entre las dos placas hay un material con  $\epsilon_r = 4$ . ¿Cuál debería ser ahora la separación entre placas para que solamente se propaguen los primeros modos **TEM**, **TE**<sub>1</sub> y **TM**<sub>1</sub> en un rango de frecuencias con  $f < 10\text{ GHz}$ ?  
 [Rta:  $0.0075m < d < 0.015m$ ]
- 9.5) Obtenga el diagrama  $\omega$ - $\beta$  para el modo **TE**<sub>1</sub> de propagación dentro de dos placas paralelas. Considere que la separación entre placas es de  $3\text{ cm}$  y que el medio de propagación es aire.
- 9.6) Calcule las velocidades de fase y de grupo de todos los modos que se pueden propagar a una frecuencia de  $12\text{ GHz}$  entre dos placas paralelas de cobre, separadas  $4\text{ cm}$  entre sí.  
 [Rta:  $v_f(\times 10^8\text{ m/s}) = 3.00, 3.16, 3.84, 8.62, v_g(\times 10^8\text{ m/s}) = 3.00, 2.85, 2.34, 1.04$ ]
- 9.7) Para un sistema de dos placas paralelas, grafique las impedancias de onda para los modos **TE**<sub>1</sub>, **TM**<sub>1</sub>, **TE**<sub>3</sub> y **TM**<sub>3</sub> del ejercicio anterior.

# 10 - Radiación Electromagnética

## Introducción

En los capítulos precedentes analizamos las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en un recinto sin fuentes de campo, que constituyen ondas electromagnéticas. En tales casos se suponía que las fuentes se hallaban fuera del recinto de integración. En este capítulo analizaremos las soluciones de las ecuaciones de Maxwell cuando las fuentes del campo se hallan dentro del recinto de integración. De esta forma se determina la relación entre el campo y sus fuentes, es decir, se describe el proceso de **generación de energía electromagnética radiante**.

El problema de la radiación electromagnética tiene importancia práctica a altas frecuencias. En sistemas de potencia es de relevancia en situaciones de sobrecarga o desbalanceo transitorios, caída de rayos, y como factor de interferencia electromagnética sobre otros equipos o instalaciones. En comunicaciones inalámbricas, los sistemas radiantes se basan en estos principios. Finalmente, son de interés actual las consecuencias biológicas y ambientales de los campos electromagnéticos, fundamentalmente en relación a los eventuales efectos perjudiciales que las instalaciones eléctricas puedan tener sobre la salud humana y el medio ambiente.

## Resolución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío con fuentes

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$$

En el **vacío**:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Para resolver estas ecuaciones inhomogéneas, es conveniente introducir los llamados **potenciales electrodinámicos**, que surgen de las propiedades de los campos:

Como  $\nabla \bullet \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$\mathbf{A}$  es el llamado **potencial vectorial electrodinámico**<sup>1</sup>.

Entonces:  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$

Luego:  $\nabla \times \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0$

de modo que el campo dentro del corchete se puede escribir como el gradiente de un potencial

escalar:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

$\phi$  es el llamado **potencial escalar electrodinámico**<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Nótese que este potencial vectorial **electrodinámico** coincide con el potencial vectorial magnético que hemos visto previamente en el caso estático cuando los campos no dependen del tiempo.

<sup>2</sup> También el potencial escalar **electrodinámico** coincide con el potencial electrostático cuando los campos no dependen del tiempo.

**Ejemplo 10.1:** Analizar la unicidad en la selección de los potenciales electrodinámicos.

Como se define el potencial vectorial a partir de:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \mu_0$  se ve que puede escribirse también:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)] / \mu_0$  donde  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  es un campo escalar diferenciable cualquiera, ya que el rotor de un gradiente siempre es cero. Entonces el potencial vectorial no es único, sino que está definido a menos del gradiente de un campo escalar. Si tomamos entonces:  $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)$

queda para el campo eléctrico:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \nabla \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

$$\text{o sea: } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \left( \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

de manera que si tomamos los potenciales electrodinámicos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) \\ \phi'(\mathbf{r}, t) &= \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

llegamos a las mismas expresiones de los campos que antes. La función  $\Psi$  es arbitraria, y su elección se conoce como una **calibración o gauge**. Las leyes físicas deben ser invariantes frente a una transformación de calibración. Las modernas teorías de gauge en la descripción de las interacciones elementales han creado una nueva visión de la física.

Los potenciales electrodinámicos  $\phi(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  permiten obtener los campos. Veamos cómo se escriben las ecuaciones de Maxwell para estos potenciales:

$$\nabla \bullet \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \bullet \left[ \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bullet \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{j}$$

de donde:

$$\nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j} \Rightarrow \nabla \left( \nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Todo campo vectorial queda únicamente definido si se dan su divergencia y su rotor. En el caso del potencial vectorial  $\mathbf{A}$  se conoce el rotor (que es  $\mathbf{H}$ ) pero las ecs. de Maxwell no dan ninguna condición sobre su divergencia. Es así que podemos elegirla de la forma más conveniente para resolver el problema. Esta elección arbitraria se llama una **calibración**, como se mencionó en el **Ejemplo 10.1**.

En nuestro caso, las ecuaciones diferenciales para los potenciales electrodinámicos se simplifican si usamos la **calibración de Lorentz**:

$$\nabla \bullet \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

de donde queda:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

que son ecuaciones vectoriales de D'Alembert **inhomogéneas**.

La solución de estas ecuaciones inhomogéneas son las siguientes (**APENDICE 7**):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV$$

$$\text{con: } R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad t' = t - R/c$$

Se ve de estas expresiones que los potenciales en un punto  $\mathbf{r}$  del espacio y en el instante  $t$  dependen de lo que ocurrió en las fuentes en un instante **anterior**  $t'$ . Por esta razón se llaman **potenciales retardados**.

Este retardo surge del valor finito de propagación de la luz en el vacío, que da lugar a un intervalo entre el momento que se da un cambio en la fuente y el momento en que se observa el correspondiente cambio en el campo lejano observado. Los cambios se propagan en forma ondulatoria con velocidad  $c$ . Estas ecuaciones representan la generación de ondas electromagnéticas a partir de sus fuentes. Estas ondas transportan energía desde las fuentes hacia otros sistemas.

De la expresión de  $\mathbf{A}$  se observa que existe generación de ondas cuando la corriente **depende del tiempo**. Si la corriente es estacionaria, no existe generación de ondas. Una corriente estacionaria (independiente del tiempo) implica que las cargas se hallan en movimiento uniforme. Una corriente no estacionaria implica **cargas aceleradas**.

**Se concluye entonces que sólo cargas aceleradas emiten ondas electromagnéticas, mientras que cargas en movimiento uniforme no emiten radiación.**

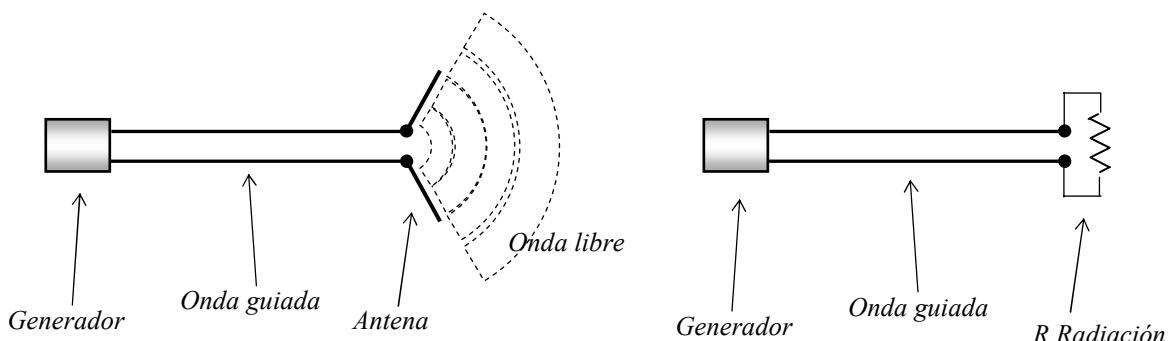
## Parámetros básicos de las antenas

**Una antena es un transductor entre una onda guiada y una onda en el espacio libre.**

Su objetivo es enviar o recibir energía y/o información a distancia en forma de ondas electromagnéticas. Se puede pensar una antena como un dispositivo de adaptación de impedancias entre la línea o guía de alimentación y el espacio. En las siguientes secciones presentamos los parámetros básicos que describen el comportamiento de las antenas.

### Resistencia de radiación

Cuando la antena actúa como **emisora**, envía energía al espacio que la rodea. Se puede modelizar esta cesión de energía con una analogía circuital donde la energía radiada se supone disipada por efecto Joule en una **resistencia de radiación**.



### Diagrama de radiación

Un parámetro importante de una antena es la **distribución espacial** de la radiación que emite. Sabemos que mediante interferencia de radiadores coherentes podemos obtener una distribución no uniforme de la radiación. Esto permite lograr “guiar” ondas aún el espacio libre sin contornos. Las gráficas de campo o densidad de potencia radiada según las direcciones del espacio son los llamados **diagramas de radiación**. Estos diagramas también describen las propiedades anisótropas de **recepción** de antenas receptoras, de manera que son características de gran interés en el diseño de un enlace de radiocomunicaciones. Habitualmente el diagrama de radiación de una antena es un diagrama tridimensional o un grupo de secciones sobre planos que definen las características de la antena.

Normalmente se trata de un diagrama en coordenadas esféricas y secciones sobre planos horizontales ( $\theta$  constante) o verticales ( $\phi$  constante). En la figura se muestran diagramas polares horizontales del campo y la densidad de potencia radiados por un arreglo de radiadores ubicados sobre el eje vertical.

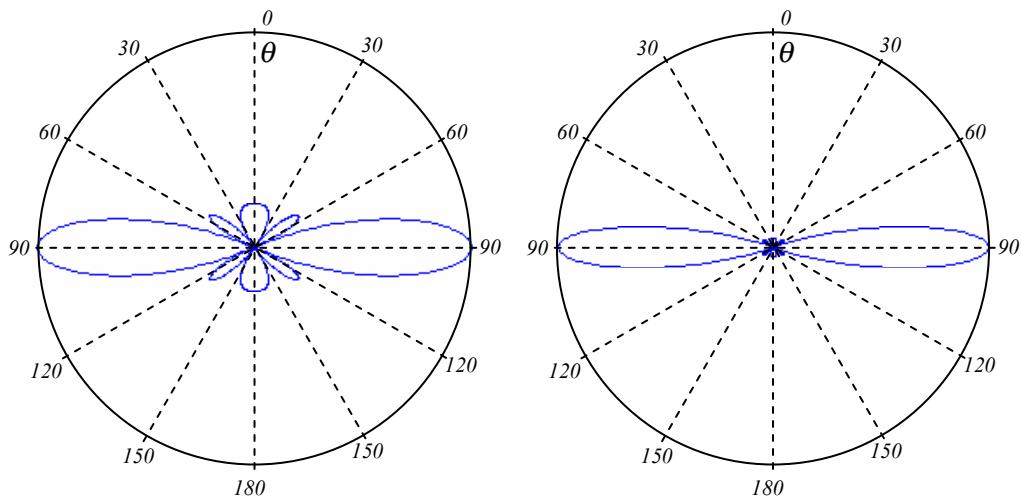
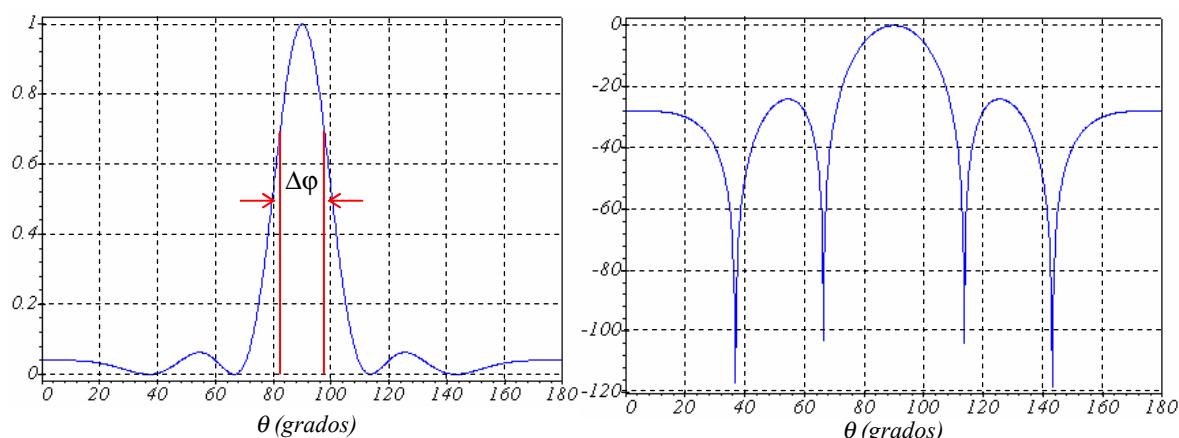


Diagrama de campo

Diagrama de potencia

También se pueden dibujar los diagramas en coordenadas cartesianas, con ordenada proporcional a la amplitud del campo o a la densidad media de potencia radiada, en escala normal o en escala logarítmica (en dB), como se ilustra en las siguientes figuras para el mismo sistema de las gráficas polares.



Se observa que el diagrama de radiación consiste en una serie de **lóbulos**. Se ve además que (en general) el diagrama de radiación de campo revela con más detalle la estructura lobular de la radiación, aunque el diagrama de densidad de potencia describe en forma más realista la distribución anisotrópica de la energía radiada. En lo que sigue en esta sección, nos referiremos al diagrama de potencia.

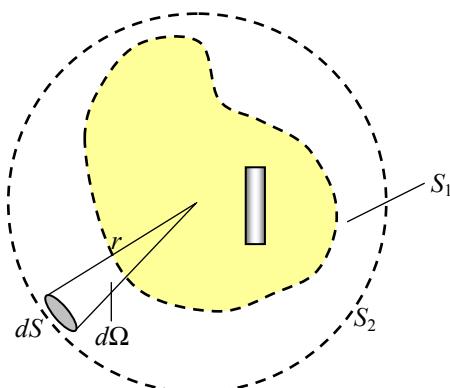
Hay **lóbulos principales**, en las direcciones de máxima radiación, y lóbulos secundarios, que se hacen más evidentes en los diagramas logarítmicos. El lóbulo se define por su **amplitud** y su **ancho de haz de potencia media**  $\Delta\phi$  para el cual la densidad de potencia cae a la mitad del valor máximo para el lóbulo (y los campos a  $1/\sqrt{2}$ ).

En muchos casos la antena produce una polarización no lineal, y se pueden dar los diagramas de radiación para cada componente de polarización o un diagrama de potencia, que grafica el módulo del vector de Poynting (para el campo completo) en función de la dirección  $(\theta, \phi)$ . Habitualmente los diagramas de potencia se normalizan a la densidad máxima.

### Potencia media radiada

El **vector de Poynting medio** emitido por la antena será:  $\langle N \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E \times H^*)$

La **potencia media radiada** por la antena se calcula mediante el flujo del vector de Poynting a través de una superficie cerrada que contiene a la antena:



$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \mathbf{N} \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

La superficie de integración es cualquiera. Supongamos, por ejemplo, que tomamos a  $S_1$  como superficie de integración, y obtenemos un valor  $\langle P_1 \rangle$ . Si luego tomamos otra superficie  $S_2$  que contiene a  $S_1$ , obtendremos en principio otro valor  $\langle P_2 \rangle$ . Pero el espacio entre  $S_1$  y  $S_2$  es vacío, es decir, no contiene fuentes (otros radiadores) ni sumideros (por ejemplo, cuerpos conductores) de energía electromagnética. Por lo tanto la potencia que cruza  $S_1$  debe ser la misma que cruza  $S_2$ . De esta forma demostramos que la superficie de integración puede ser cualquiera y entonces se elige por conveniencia matemática una esfera centrada en el centro de la antena:

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \mathbf{N} \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{4\pi} \langle N_r \rangle r^2 d\Omega$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido elemental subtendido por el elemento  $dS$ . Definimos así el **diagrama de radiación** de potencia:

$$\frac{d \langle P \rangle}{d\Omega} = r^2 \langle N_r \rangle \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d \langle P \rangle / d\Omega}{d \langle P \rangle / d\Omega}_{max} \right| = \frac{\langle N_r \rangle}{\langle N_r \rangle_{max}} = f(\theta, \varphi)$$

### Área de haz

Se define como **área de haz** a:  $\Omega_A = \int_{4\pi} f(\theta, \varphi) d\Omega \leq 4\pi$  y es el ángulo sobre el cual se

concentraría la radiación si fuera dentro de este ángulo de valor igual al máximo.

Se tiene que:  $\langle P \rangle = \langle N_r \rangle r^2 \Big|_{max} \Omega_A = d \langle P \rangle / d\Omega \Big|_{max} \Omega_A$

El área de haz mide la **anisotropía** de la radiación. Es menor cuanto más concentrada se halla la radiación en un ángulo pequeño.

El área de haz se puede expresar en forma aproximada como el producto de los anchos de potencia media sobre las dos direcciones principales ortogonales:

$$\Omega_A \approx \Delta\theta \Delta\varphi$$

También en ocasiones se separa la contribución de los lóbulos mayores de los lóbulos menores:

$\Omega_A \approx \Omega_M + \Omega_m$  lo que lleva a definir la **eficiencia del haz principal** como:  $\varepsilon_M = \Omega_M / \Omega_A$

### Directividad, ganancia y eficiencia

La **directividad** de una antena es la relación entre la densidad de potencia máxima y la densidad de potencia promediada sobre una esfera. Resulta en un número  $\geq 1$  que mide el grado de anisotropía de la radiación. Una antena muy directiva concentra su radiación en un ángulo sólido pequeño.

**Una antena isotrópica tiene directividad unitaria.**

De acuerdo a su definición:  $D = \frac{d \langle P \rangle / d\Omega \Big|_{max}}{\langle P \rangle / 4\pi} = \frac{\langle P \rangle / \Omega_A}{\langle P \rangle / 4\pi} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$  y se ve que la directividad es inversamente proporcional al área de haz.

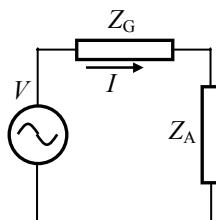
Se denomina **ganancia** de la antena a:  $G = k D$

donde  $k$  es la **eficiencia** de la antena, que está relacionada con las pérdidas por efecto Joule en los conductores de la antena. Si (idealmente) la antena no presenta pérdidas óhmicas,  $k = 1$  y la ganancia coincide entonces con la directividad.

### Impedancia de entrada

La impedancia de entrada es la impedancia que la antena presenta al circuito de alimentación. En general es compleja:  $Z_A = R_A + i X_A$  y la parte resistiva se puede descomponer en la parte  $R_j$  que representa las **pérdidas óhmicas** en el circuito de la antena y la **resistencia de radiación**  $R_r$ , asociada a la potencia emitida:  $R_A = R_j + R_r$ .

La impedancia de entrada de la antena es un parámetro fundamental para la adaptación de la antena al circuito alimentador y es frecuente que su variación con la frecuencia sea uno de los parámetros de diseño más importantes.



En general podemos considerar un generador de impedancia interna  $Z_G$  conectado a una antena de impedancia de entrada  $Z_A$ . La corriente de alimentación de la antena es la que circula por el circuito equivalente de la figura:

$$I = \frac{V}{Z_G + Z_A} = \frac{V}{R_G + R_j + R_r + i(X_G + X_A)}$$

donde  $V$  es la tensión pico del generador. La potencia media de pérdidas óhmicas en la antena es:  $P_j = \frac{1}{2}|I|^2 R_j = \frac{|V|^2}{2} \frac{R_j}{(R_G + R_j + R_r)^2 + (X_G + X_A)^2}$

mientras que la potencia media radiada por la antena es:

$$P = \frac{1}{2}|I|^2 R_r = \frac{|V|^2}{2} \frac{R_r}{(R_G + R_j + R_r)^2 + (X_G + X_A)^2}$$

Finalmente, la potencia media perdida en el circuito del generador es:

$$P_G = \frac{1}{2}|I|^2 R_G = \frac{|V|^2}{2} \frac{R_G}{(R_G + R_j + R_r)^2 + (X_G + X_A)^2}$$

El generador debe suministrar estas tres potencias. La **condición de máxima transferencia de potencia** del generador a la antena se da cuando la impedancia de la antena es el conjugado de la impedancia del generador:

$$R_G = R_A = R_j + R_r \quad X_G = -X_A$$

En este caso las potencias involucradas valen:

$$P_j = \frac{|V|^2}{8} \frac{R_j}{(R_j + R_r)^2} \quad P = \frac{|V|^2}{8} \frac{R_r}{(R_j + R_r)^2} \quad P_G = \frac{|V|^2}{8(R_j + R_r)}$$

de donde se ve que:  $P_G = P_A = P_j + P$

es decir la potencia perdida en el circuito interno del generador es igual a la potencia total que se envía a la antena, donde parte se disipa por efecto Joule y parte es emitida en forma de radiación electromagnética. Si la antena idealmente no tuviera pérdidas el generador debería suministrar el doble de la potencia que se quiere emitir en la condición de máxima transferencia de potencia. En casos prácticos debe suministrar más, para compensar las pérdidas óhmicas de la antena y de la/s líneas de transmisión de conexión.

### Abertura o área efectiva

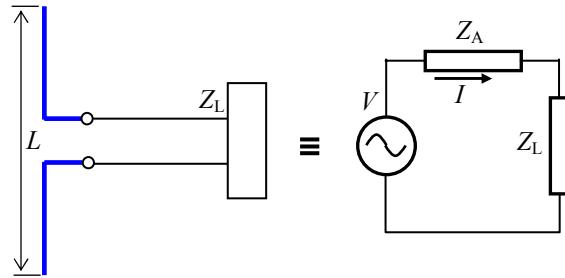
Cuando la antena se utiliza como **receptora**, recibe una dada densidad de potencia electromagnética, que convierte en energía eléctrica en un circuito. La relación entre la potencia eléctrica

útil y la densidad de potencia que recibe la antena tiene dimensiones de área, y se denomina **área o abertura efectiva** de la antena:

$$A_e = \langle P \rangle / \langle N \rangle$$

La abertura efectiva de la antena significa el **área efectiva que presenta a la radiación incidente**, como si fuera una “abertura” por donde pasa toda la potencia recibida. La abertura efectiva de la antena resume dos características: la anisotropía o directividad de la antena y la eficiencia de conversión de energía radiante en potencia eléctrica en un circuito. Si suponemos que esta eficiencia es máxima (unitaria), la abertura efectiva se denomina **abertura efectiva máxima**.

Para calcular la abertura efectiva máxima de una antena receptora consideremos una antena que



está conectada a una carga  $Z_L$ , sobre la que incide una onda desde un transmisor lejano, que podemos considerar una onda plana. En tal caso, el vector de Poynting o densidad de potencia incidente es:  $\langle N \rangle = |E_i|^2 / 2\eta_0$  donde  $E_i$  es la amplitud del campo incidente. Por otra parte, este campo incidente inducirá una fem  $V \approx |E_i|L$  sobre la antena, donde  $L$  es su longitud. Se puede entonces pensar en un circuito equivalente como el de la figura, donde  $Z_A$  es la impedancia de la antena. Por lo tanto, la potencia transmitida a la carga es:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re e(V I^*) = \frac{1}{2} \Re e(Z_L I I^*) = \frac{|I|^2 R_L}{2} = \frac{|V|^2 R_L}{2|Z_L + Z_A|^2}$$

Si queremos hallar la abertura máxima no debe haber pérdidas en la antena, de modo que la parte real de la impedancia de antena es solamente la resistencia de radiación:  $Z_A = R_r + iX_A$  lo que indica que toda la potencia activa absorbida por la antena es potencia de radiación. Además, para máxima transferencia de potencia de la antena a la carga, la impedancia de carga debe ser conjugada de la de la antena:  $Z_L = Z_A^* = R_r - iX_A$  y entonces:

$$\langle P \rangle = \frac{|V|^2 R_L}{2|Z_L + Z_A|^2} = \frac{|V|^2 R_r}{2|2R_r|^2} = \frac{|V|^2}{8R_r} = \frac{|E_i|^2 L^2}{8R_r}$$

La abertura efectiva máxima resulta así:  $A_{e_m} = \frac{\langle P \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{|E_i|^2 L^2 / 8R_r}{|E_i|^2 / 2\eta_0} = \frac{\eta_0 L^2}{4R_r}$

para una antena del tipo de un alambre recto.

Cuando la antena es una **espira**, la fem inducida será:

$$V = d\Phi_m / dt \approx i\omega B_i S = i\omega \mu_0 (E_i / \eta_0) S = i\omega E_i S / c$$

donde  $S$  es el área de la espira. Luego:

$$\langle P \rangle = \frac{|V|^2}{8R_r} = \frac{\omega^2 |E_i|^2 S^2}{8c^2 R_r} \Rightarrow A_{e_m} = \frac{\langle P \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{\omega^2 |E_i|^2 S^2 / 8c^2 R_r}{|E_i|^2 / 2\eta_0} = \frac{\eta_0 \omega^2 S^2}{4c^2 R_r} = \frac{\pi^2 \eta_0 S^2}{\lambda^2 R_r}$$

donde se ha usado:  $\omega/c = 2\pi/\lambda$

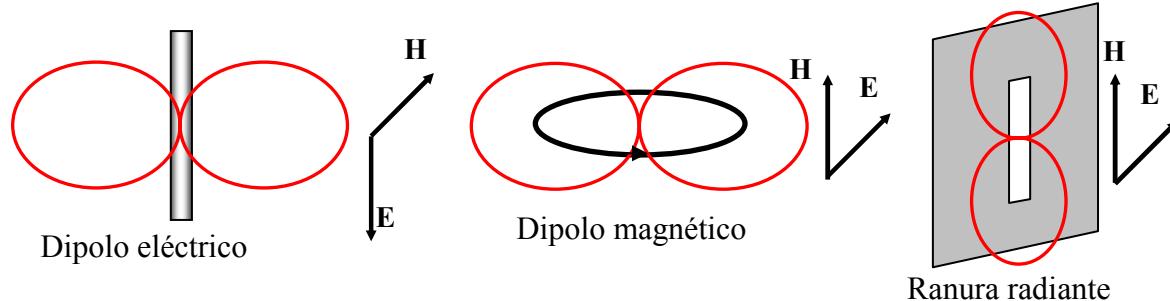
Una misma antena puede utilizarse como transmisora y receptora. Por lo tanto, sus características de transmisión y recepción están ligadas. Las relaciones más importantes son<sup>3</sup>:

$$\lambda^2 = A_{e_m} \Omega_A \quad D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{e_m} \Rightarrow G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e :$$

<sup>3</sup> Ver, por ejemplo, W. Stutzman & G. Thiele, “Antenna Theory and Design”, 2<sup>nd</sup>.Ed., Wiley, New York, 1998, p.78.

### Tipos básicos de radiadores

En este capítulo veremos algunos de los tipos básicos de radiadores: el dipolo eléctrico corto, el dipolo magnético elemental y las ranuras radiantes. Con estos tipos podemos describir antenas de mayor complejidad y tamaño.



Los diagramas de radiación y la polarización de los campos emitidos por estos radiadores se muestran en las figuras para comparación. Debe tenerse en cuenta que la intensidad de la potencia radiada por estos elementos es diferente y los diagramas no están a escala.

**La combinación de estos tres tipos elementales de radiadores lleva a la mayoría de los tipos de antenas de uso en la técnica.**

Una clasificación básica de las antenas surge de su comportamiento en frecuencia. Hay configuraciones de **banda angosta**, que emiten eficientemente sólo en un conjunto discreto de frecuencias (quizás una sola) y antenas de **banda ancha**, que emiten con eficiencia similar en un espectro importante. Cada tipo tiene aplicaciones específicas y veremos ejemplos de ambos tipos de antenas en este Capítulo.

### Radiación dipolar eléctrica

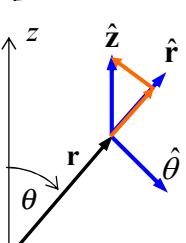
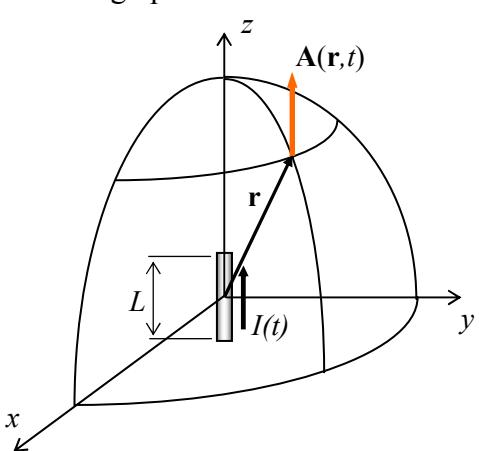
Las antenas tradicionales consisten en conductores filiformes por los que circulan corrientes dependientes del tiempo. El caso más simple de emisión de ondas electromagnéticas o **radiación**, se da en el caso de un hilo muy corto, que transporta una corriente uniforme variable en el tiempo. Este objeto no corresponde a ningún caso real, pero se trata de un caso límite que se puede usar luego para el análisis de antenas reales mediante superposición.

Suponemos que por el hilo, que llamamos **dipolo eléctrico radiante**, circula una corriente armónica uniforme  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$  (en notación fasorial). El potencial vectorial magnético creado por el dipolo será:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \frac{I(t')}{r} \hat{\mathbf{z}} dz'$$

donde hemos pasado de una integral de volumen a una integral de línea, y como  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$  y la corriente no depende de  $\mathbf{r}'$  queda:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{i\omega(t-r/c)} \hat{\mathbf{z}}$$



De la figura:  $\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}$

De la figura:

y entonces:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}) e^{i\omega(t-r/c)}$$

En coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ A_r & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{i\omega t} \left[ -\frac{\partial}{\partial r} (e^{-ikr} \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta \right) \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{i\omega t} \left[ -(-ik e^{-ikr}) \sin \theta + \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta \right) \right] \hat{\phi}\end{aligned}$$

y finalmente:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{I_0 L}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \hat{\phi}$$

Se ve que  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  tiene dos términos, uno que depende como  $1/r$  y otro que depende como  $1/r^2$ .

A partir de  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  se puede calcular  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  con la ecuación de Maxwell-Ampère:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & r \sin \theta H_\phi \end{vmatrix} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta H_\phi) - r\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta H_\phi) \right]\end{aligned}$$

y finalmente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i I_0 L}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \left[ 2 \frac{\cos \theta}{r} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \left( k^2 - \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{\theta} \right]$$

Se ve que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  tiene dos componentes, una sobre  $\hat{\mathbf{r}}$  y otra sobre  $\hat{\theta}$ . Esta última componente presenta un término que depende como  $1/r$  mientras que todos los otros términos de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  dependen de potencias de  $r$  inversas mayores.

Los campos creados por cargas estáticas y corrientes estacionarias contenidas en recintos acotados a grandes distancias varían como  $1/r^n$ , con  $n \geq 2$ . Este es el primer caso que hemos encontrado donde campos lejanos varían como  $1/r$ . Estos términos, que predominan a grandes distancias sobre los otros términos, se denominan **términos de radiación**.

Para completar el análisis de su significado calculamos la potencia media que transportan las ondas generadas por el dipolo. Necesitamos el valor medio del vector de Poynting. En notación

$$\text{fasorial: } \langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\phi^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\theta H_\phi^* \hat{\mathbf{r}} - E_r H_\phi^* \hat{\theta})$$

Luego (señalamos en rojo los términos de radiación):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\theta H_\phi^*) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{i I_0 L}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \left( k^2 - \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{I_0 L}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \left( -ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{i I_0^2 L^2}{16\pi^2 \epsilon_0 \omega r^2} \sin^2 \theta \left( -ik^3 + \frac{k^2}{r} - \frac{k^2}{r} - \frac{ik}{r^2} + \frac{ik}{r^2} - \frac{1}{r^3} \right) \right] = \frac{I_0^2 L^2 k^3 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 \omega r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_r H_\phi^*) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ 2 \frac{i I_0 L}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \frac{\cos \theta}{r} \left( i k + \frac{1}{r} \right) \frac{I_0 L}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \left( -i k + \frac{1}{r} \right) \sin \theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{i I_0^2 L^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \omega r^2} \sin^2 \theta \cos \theta \left( k^2 + \frac{i k}{r} - \frac{i k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \right] = 0\end{aligned}$$

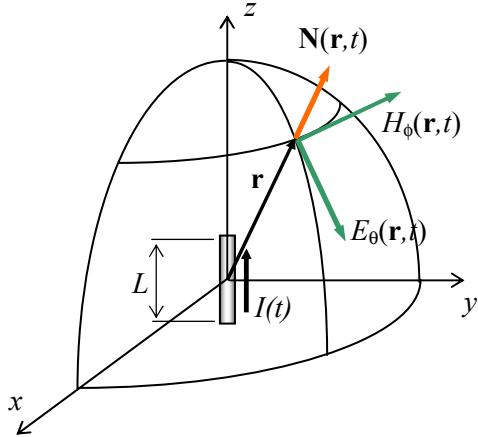
y finalmente:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{I_0^2 L^2 k^3 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 \omega r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\eta_0 I_0^2 \sin^2 \theta}{8r^2} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

**Se observa que sólo contribuyen al valor medio del vector de Poynting los términos de radiación en el desarrollo de los campos:**

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta} = -\frac{I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta \hat{\theta} \\ \mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i I_0 L k}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\phi} = -\frac{I_0 L k}{4\pi r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta \hat{\phi}\end{aligned}$$

de donde:



$$\frac{|\mathbf{E}_{rad}|}{|\mathbf{H}_{rad}|} = \frac{\frac{I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r}}{\frac{I_0 L k}{4\pi r}} = \frac{k}{\epsilon_0 \omega} = \frac{1}{c \epsilon_0} = \eta_0$$

Estos campos se denominan **campos de radiación** y son los que describen la emisión de energía electromagnética del dipolo. Se ve que los términos de radiación dependen como  $1/r$ , son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación radial, y la relación entre ellos es la impedancia intrínseca del vacío. Constituyen entonces una **onda esférica elemental**.

**Ejemplo 10.2:** Analizar la relación entre los campos de **radiación** y los potenciales electrodinámicos.

Para soluciones armónicas:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi + i\omega \mathbf{A}$$

El potencial vectorial es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 L}{4\pi r} e^{i\omega(t-r/c)} (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta})$$

Y el campo eléctrico de radiación:  $\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = -\frac{I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta}$

Se ve que  $\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = i\omega A_\theta \hat{\theta}$  de donde surge que el campo de radiación está relacionado **sólo** con la componente de **A transversal a la propagación**. El potencial escalar no interviene en la definición del campo de radiación, sino que da lugar a componentes longitudinales a la propagación que no son términos de radiación.

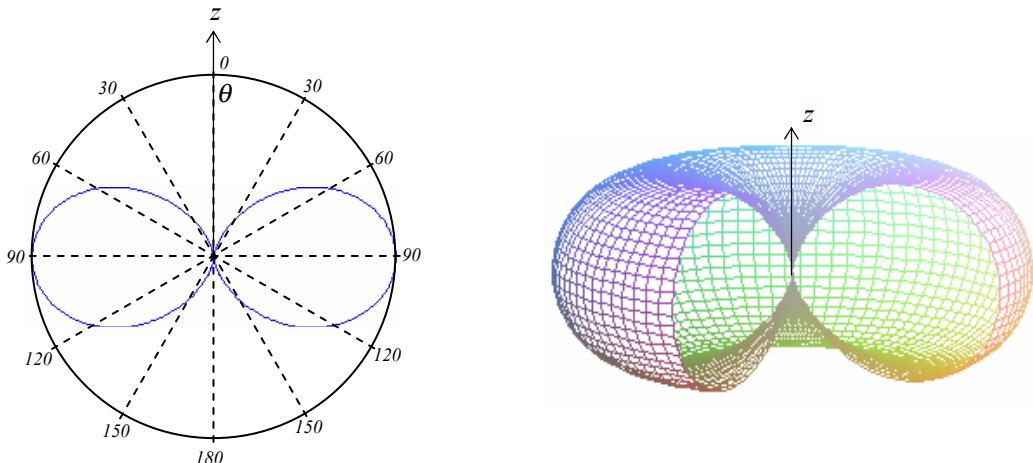
De estas ecuaciones surge que una forma sencilla de hallar, en forma aproximada, los campos lejanos o campos de radiación de un radiador es:

- 1) calcular A con la solución particular ecuación inhomogénea;
- 2) calcular  $\mathbf{E}_{rad} = i\omega \mathbf{A}_T$  donde  $\mathbf{A}_T$  es la componente de A transversal a la propagación;
- 3) calcular  $\mathbf{H}_{rad} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad} / \eta_0$

Los otros términos de los campos se denominan **campos de inducción** o **términos de inducción** y **decaen más rápido** que los términos de radiación. Estos términos **no transportan energía neta** (en valor medio temporal), pero definen los valores relevantes del campo **en las cercanías del emisor**.

El **diagrama de radiación** para el dipolo eléctrico corto se obtiene de:

$$f(\theta, \phi) = \frac{r^2 \langle N_r \rangle}{r^2 \langle N_r \rangle_{\max}} = \frac{\frac{\eta_0 I_0^2}{8} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta}{\frac{\eta_0 I_0^2}{8} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2} \Rightarrow f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta$$



Este diagrama presenta un máximo o **lóbulo principal** para  $\theta = \pi/2$ . El diagrama no presenta dependencia respecto de  $\phi$  por la simetría de revolución del problema respecto del eje z, de manera que la gráfica polar 2D es una sección recta del diagrama 3D que es un toro.

### Potencia radiada

La potencia media radiada por el dipolo es:

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \mathbf{N} \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS$$

donde  $S$  es una superficie cerrada cualquiera que encierra al radiador. Debido a que  $\langle \mathbf{N} \rangle$  depende de  $r$  y de  $\theta$ , conviene usar una superficie esférica. Se tiene:

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle \mathbf{N} \rangle \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\eta_0 I_0^2}{8} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\eta_0 I_0^2}{8} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

y entonces:

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \eta_0 I_0^2}{3} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$$

Se observa que la potencia media radiada depende del cuadrado de la corriente pico y de la relación  $(L/\lambda)^2$ . Como para el dipolo elemental esta relación es muy pequeña, la potencia emitida por el dipolo radiante eléctrico también lo es.

Podemos calcular los otros parámetros vinculados con la radiación:

- Resistencia de radiación:**  $\langle P \rangle = \frac{\pi \eta_0 I_0^2}{3} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} I_0^2 R_r \Rightarrow R_r = \frac{2\pi}{3} \eta_0 \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$
- Ancho de haz de potencia media:**  $\sin^2 \theta = 1/2 \Rightarrow \theta_{1,2} = \pm \pi/4 \Rightarrow \Delta\theta = \pi/2 = 90^\circ$
- Área de haz y eficiencia del haz principal:**

$$\Omega_A = \oint_{4\pi} \frac{< N_r >}{< N_r >|_{max}} d\Omega = \oint_{4\pi} \sin^2 \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8}{3}\pi \quad \varepsilon_M = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} = 1$$

- **Directividad:**  $D = 4\pi / \Omega_A = 3/2$
- **Abertura efectiva máxima:**  $A_{e_m} = \frac{\eta_0 L^2}{4R_r} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$  (se verifica  $D = 4\pi A_{e_m} / \lambda^2$ )

**Ejemplo 10.3:** Un dipolo eléctrico radiante de 1 cm de longitud alimentado por una corriente pico de 1 A y frecuencia 10 MHz. Halle la potencia radiada y la resistencia de radiación

A 10 MHz la longitud de onda es  $\lambda = c/f \approx 30m \gg L = 1cm$  de modo que podemos usar las aproximaciones de dipolo elemental.

La potencia radiada es:  $< P > = \pi/3 \eta_0 I_0^2 (L/\lambda)^2 \approx 44 \mu W$  que es muy baja.

La resistencia de radiación es:  $R_r = 2\pi \eta_0 / 3(L/\lambda)^2 \approx 2.3 \times 10^{-7} \eta_0 \approx 8.77 \times 10^{-5} \Omega$  también muy baja

## Radiación dipolar magnética

Para el espacio vacío, las ecuaciones de Maxwell donde figura el rotor de los campos son simétricas:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

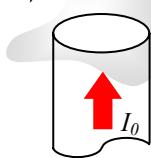
Nada cambia si reemplazamos  $\mathbf{E}$  por  $\mathbf{H}$  y  $\mu_0$  por  $\epsilon_0$  en la ley de Faraday,  $\mathbf{H}$  por  $(-\mathbf{E})$  y  $\epsilon_0$  por  $\mu_0$  en la de Maxwell-Ampère. Esta propiedad se conoce como **dualidad**, y lleva a que podamos expresar la solución de un problema con una fuente magnética a partir de la solución para un problema similar con una fuente eléctrica.

Para usar esta propiedad expresamos los campos de la radiación por un dipolo eléctrico corto, no en términos de la corriente que circula por el elemento sino a través de su **momento dipolar eléctrico**, que podemos calcular a partir de la ecuación de continuidad aplicada dentro del elemento conductor. Para variaciones armónicas:

$$\nabla \bullet \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \mathbf{j} + i\omega \rho = 0$$

Integramos sobre un volumen  $V$  que encierre un solo extremo del elemento:

$$\int_V (\nabla \bullet \mathbf{j} + i\omega \rho) dV = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \bullet \mathbf{j} dV = i\omega \int_V \rho dV \Rightarrow \oint_S \mathbf{j} \bullet \hat{\mathbf{n}} dS = i\omega \int_V \rho dV$$



de donde:  $I_0 = i\omega q$ . En esta ecuación  $q$  es la carga acumulada en el extremo del elemento. Debido a la pequeña longitud del elemento no habrá carga acumulada en su interior, aunque un razonamiento similar nos demuestra que hay una carga acumulada ( $-q$ ) en el otro extremo del elemento. Podemos pensar así al elemento de corriente como un dipolo, cuyo momento dipolar será:  $p = qL = I_0 L / i\omega$

A partir de este resultado podemos expresar los campos y otras características del dipolo eléctrico corto radiante en términos de este momento dipolar eléctrico<sup>4</sup>:

En la magnetostática se define el **momento dipolar magnético** de una espira como  $\mathbf{m} = IS \hat{\mathbf{n}}$ , donde  $I$  es la corriente que circula por la espira,  $S$  su área y  $\hat{\mathbf{n}}$  la normal. El campo magnético creado por este dipolo magnético tiene la misma forma matemática que el campo eléctrico creado por el dipolo eléctrico en la electrostática. En la electrodinámica podemos, utilizando la propiedad de dualidad, escribir los campos creados por un dipolo magnético radiante por el que circula una corriente armónica. Para ello usamos las siguientes relaciones duales:

Dipolo eléctrico radiante	$\Rightarrow$	Dipolo magnético radiante
Momento dipolar eléctrico	$\Rightarrow$	Momento dipolar magnético
Campo $\mathbf{E}$ , $\mu_0$	$\Rightarrow$	Campo $\mathbf{H}$ , $\epsilon_0$
Campo $\mathbf{H}$ , $\epsilon_0$	$\Rightarrow$	Campo $(-\mathbf{E})$ , $\mu_0$
$\mathbf{p} = (I_0 L / i\omega) \hat{\mathbf{z}}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{m} = IS \hat{\mathbf{z}}$

de donde:

$H_\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{i\omega p}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta$	$\Rightarrow$	$E_\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\omega \mu_0 m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \sin \theta$
$E_r(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{2\pi \epsilon_0 r^2} e^{i(\omega t - kr)} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \cos \theta$	$\Rightarrow$	$H_r(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{2\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \left( ik + \frac{1}{r} \right) \cos \theta$
$E_\theta(\mathbf{r}, t) = -\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r} e^{i(\omega t - kr)} \left( k^2 - \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta$	$\Rightarrow$	$H_\theta(\mathbf{r}, t) = -\frac{m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \left( k^2 - \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta$

<sup>4</sup> En realidad, en la deducción original de los campos radiados por este elemento realizada por Hertz consideró efectivamente un dipolo (dos cargas eléctricas) cuya carga depende del tiempo, de donde surge el nombre de este radiador.

Y los campos de radiación del dipolo magnético radiante quedan entonces

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{\eta_0 k^2 m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\phi} \quad \mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r}, t) = -\frac{k^2 m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta}$$

Los campos de radiación son normales entre sí y a la dirección radial de propagación, y se hallan en relación de dualidad respecto de los campos radiados por el dipolo eléctrico corto. El vector medio de Poynting es:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\eta_0 k^2 I_0 S}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\phi} \times \frac{k^2 I_0 S}{4\pi r} e^{-i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta} \right) = \frac{k^4 \eta_0 I_0^2 S^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{r}}$$

El diagrama de radiación es el mismo que para el dipolo eléctrico corto. La potencia radiada es:

$$\langle P \rangle = \oint_S r^2 \langle N_r \rangle dS = 2\pi \frac{k^4 \eta_0 I_0^2 S^2}{32\pi^2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi^2 \eta_0 I_0^2 \frac{S^2}{\lambda^4}$$

A partir de estas expresiones se pueden calcular los otros parámetros de la antena dipolar magnética.

- **Resistencia de radiación:**  $\langle P \rangle = \frac{4}{3} \pi^2 \eta_0 I_0^2 \frac{S^2}{\lambda^4} = \frac{1}{2} I_0^2 R_r \Rightarrow R_r = \frac{8\pi^2 \eta_0 S^2}{3\lambda^4}$
- **Abertura efectiva máxima:**  $A_{e_m} = \frac{\pi^2 \eta_0 S^2}{\lambda^2 R_r} = \frac{3\lambda^2}{8}$

El ancho de haz de potencia media, el área de haz y la eficiencia del haz principal y la directividad coinciden con las expresiones del dipolo eléctrico corto.

Es interesante comparar las potencias radiadas por las dos antenas elementales en similares condiciones. Tomamos el mismo valor de  $I_0$ , frecuencia y tamaño equivalente con:  $S = L^2$ :

$$\frac{\langle P_M \rangle}{\langle P_E \rangle} = \frac{\frac{4}{3} \pi^2 \eta_0 I_0^2 (S/\lambda^2)^2}{\frac{4}{3} \pi \eta_0 I_0^2 (L/\lambda)^2} = \frac{4\pi S}{\lambda^2} \ll 1$$

para dipolos pequeños frente a la longitud de onda. Por lo tanto, el dipolo magnético radiante es aún menos eficiente que el dipolo eléctrico de dimensiones similares.

## Radiador isotrópico

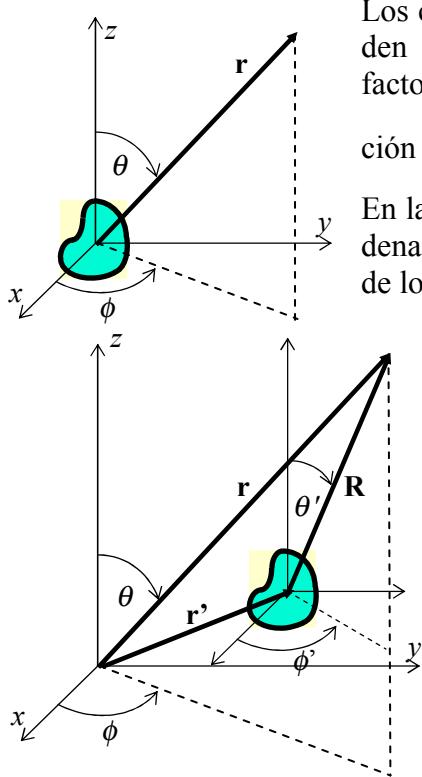
Se ve que la radiación emitida por el dipolo eléctrico corto es anisótropa, es decir, depende de la dirección en el espacio. En análisis teóricos es conveniente disponer de un radiador (ideal) que emita en forma isotropa. Este radiador isotropo o isotrópico se puede describir mediante los campos y densidad de potencia:

$$\text{radiador isotrópico} \quad E_\theta = A \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad H\phi = \frac{E_\theta}{\eta_0} \quad \langle N_r \rangle = \frac{A^2}{2\eta_0 r^2} \Rightarrow f(\theta, \phi) = 1$$

que representan una onda esférica elemental.

Por otra parte, estas expresiones coinciden con las correspondientes a los campos del dipolo eléctrico elemental sin tener en cuenta la variación con  $\theta$ .

### Radiador fuera del origen



Los campos de un radiador situado en el origen de coordenadas pueden describirse por ondas esféricas elementales, modulada por un factor de anisotropía debido a la geometría del radiador y la distribución de corriente dentro del radiador:

$$F(\mathbf{r}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

En la figura se muestra esta geometría. Si se corre el origen de coordenadas, de modo que el radiador pase a la posición  $\mathbf{r}'$ , la expresión de los campos debe modificarse a:

$$F(\mathbf{r}) = f(\theta', \phi') \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} \quad \text{donde} \quad R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$\theta'$  y  $\phi'$  son los ángulos esféricos en el sistema coordinado centrado en el radiador. Para distancias lejanas ( $r \gg r'$ ) el triángulo formado por los vectores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  y  $\mathbf{R}$  es muy delgado. Por el teorema del coseno y desarrollando en serie de Taylor a primer orden:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}} \approx r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}$$

Podemos aproximar a **orden cero en la amplitud** del campo (el denominador de la expresión anterior), pero debemos mantener **orden uno en la fase**, ya que en general usamos la descripción del radiador fuera del origen de coordenadas para

analizar la superposición coherente de los campos radiados por un conjunto de radiadores, y es el término de fase el que introduce el fenómeno de interferencia. Por otra parte, los ángulos esféricos tienden a sus valores respecto del sistema coordinado original:  $\theta' \rightarrow \theta$  y  $\phi' \rightarrow \phi$ .

Aproximamos así:

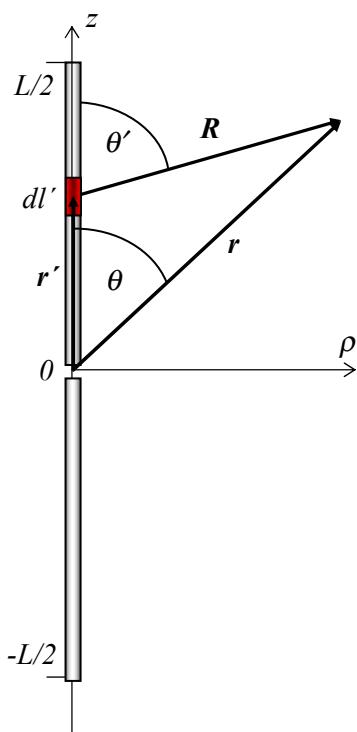
$$F(\mathbf{r}) \approx f(\theta, \phi) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} e^{-ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} = f(\theta, \phi) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$$

ya que  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow kR \approx k(r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) = kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$ . En resumen:

**En la superposición de campos emitidos por radiadores elementales, los campos de radiación lejana habitualmente pueden calcularse:**

- **aproximando la amplitud a orden cero:**  $1/R \approx 1/r$
- **aproximando la fase a orden uno:**  $kR \approx kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'$
- **suponiendo paralelos los campos emitidos**

## Dipolo eléctrico largo



El dipolo eléctrico corto es un sistema ideal, ya que la corriente no puede ser constante sobre toda su extensión, porque debe anularse en los extremos. En el caso de una antena dipolar de longitud  $L$  cualquiera podemos anular la corriente en los extremos abiertos, pero entonces debemos admitir que la corriente varía a lo largo de la antena. Se observa experimentalmente que en muchos casos de interés la distribución de corriente a lo largo de la antena se puede expresar aproximadamente como:

$$I(z, t) = I_0 \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{L}{2} - |z| \right) \right] e^{i\omega t}$$

Para calcular los campos emitidos por el dipolo largo podemos repetir el procedimiento realizado con el dipolo corto o podemos pensar que la antena está formada por una sucesión de dipolos eléctricos cortos de longitud  $dl'$ , cada uno de los cuales emitirá un campo de radiación:

$$dE_\theta = \frac{i I(z, t) k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega R} e^{-ikR} \operatorname{sen} \theta' dl' = \frac{i \eta_0}{2\lambda R} I(z, t) e^{-ikR} \operatorname{sen} \theta' dl'$$

$$dH_\phi = \frac{dE_\theta}{\eta_0}$$

En estas ecuaciones:  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$

y  $\theta'$  es el ángulo formado entre  $\mathbf{R}$  y el eje  $z$ .

Como la relación de fases entre las corrientes que alimentan a los distintos elementos radiantes es fija, dada por la expresión de la distribución de corriente sobre la antena, los radiadores emiten en **coherencia** de fase, y se suman los campos.

$$E_\theta = \frac{i \eta_0 I_0}{2\lambda} e^{i\omega t} \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{L}{2} - |z'| \right) \right] \frac{e^{-ikR}}{R} \operatorname{sen} \theta' dz' \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta_0}$$

Para distancias muy alejadas ( $r \gg L$ ) aproximamos el campo generado por cada elemento como se ha explicado en la sección precedente y tenemos:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-i(kr - \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}')}}{r} = \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}} = \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ikz' \cos \theta}$$

Luego:  $E_\theta \approx \frac{i \eta_0 I_0}{2\lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \operatorname{sen} \theta \int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen} \left( \frac{kL}{2} - k|z'| \right) e^{ik \cos \theta z'} dz'$

En el **APENDICE 8** se calcula esta integral:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \operatorname{sen} \left( \frac{kL}{2} - k|z'| \right) e^{ik \cos \theta z'} dz' = \frac{2}{k \operatorname{sen}^2 \theta} \left[ \cos \left( \frac{kL}{2} \cos \theta \right) - \cos \frac{kL}{2} \right]$$

con lo que tenemos:

$$E_\theta \approx \frac{i \eta_0 I_0}{2\pi r \operatorname{sen} \theta} e^{i(\omega t - kr)} \left[ \cos \left( \frac{kL}{2} \cos \theta \right) - \cos \frac{kL}{2} \right] \quad H_\phi \approx \frac{E_\theta}{\eta_0}$$

Podemos reescribir esta expresión como el producto entre el campo generado por un único dipolo “corto” de longitud  $L$  y otro factor:

$$\begin{aligned} E_\theta &\approx \frac{i\eta_0 I_0}{2\pi r \sin\theta} e^{i(\omega t - kr)} \left[ \cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kL}{2} \right] \\ &= \left( \frac{i\eta_0 I_0 L}{2\lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \sin\theta \right) \left( \frac{\lambda}{\pi L \sin^2\theta} \left[ \cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kL}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

donde el primer factor  $E_\theta^d(r, \theta) = \frac{i\eta_0 I_0 L}{2\lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \sin\theta$  es el campo que generaría un único

dipolo “corto” de longitud  $L$  y  $F(L, \theta) = \frac{1}{(kL/2) \sin^2\theta} \left[ \cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\frac{kL}{2} \right]$

es un **factor de interferencia** que depende de la dirección en el espacio (como en toda interferencia) y también de la longitud del dipolo. Este factor de interferencia surge de la superposición coherente de dipolos elementales que se ha usado en el cálculo del campo radiado.

El diagrama de radiación generado por el dipolo largo es:

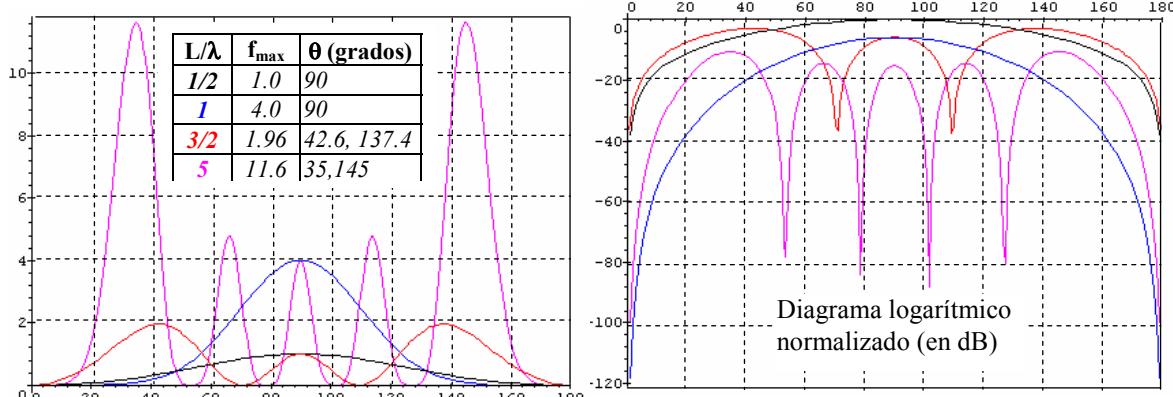
$$\begin{aligned} \langle N_r \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_\theta \times H_\phi^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(E_\theta \times \frac{E_\theta^*}{\eta_0}\right) = \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{1}{2\eta_0} |E_\theta^d(r, \theta)|^2 F^2(L, \theta) \\ f(\theta, \phi) &= \frac{r^2 \langle N_r \rangle}{r^2 \langle N_r \rangle_{\max}} = \left( \frac{|E_\theta^d(r, \theta)|^2}{|E_\theta^d(r, \theta)|_{\max}^2} \right) \left( \frac{F^2(L, \theta)}{F^2(L, \theta)_{\max}} \right) \end{aligned}$$

y se observa que se cumple la llamada **regla de multiplicación de diagramas**: el diagrama de radiación total se puede expresar como el producto del diagrama de radiación de cada elemento en que se divide el sistema radiante y el diagrama de radiación que surge de la interferencia entre los radiadores elementales independientemente de sus características individuales. Realizando las cuentas:

$$f(\theta, \phi) = \frac{r^2 \langle N_r \rangle}{r^2 \langle N_r \rangle_{\max}} \quad \text{pero:} \quad r^2 \langle N_r \rangle = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2} \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right]^2}{\sin^2\theta}$$

el máximo de esta densidad de potencia depende de una forma trascendente de la relación  $L/\lambda$ . Para hallar el máximo, graficamos la siguiente expresión en función de  $\theta$  para distintos valores

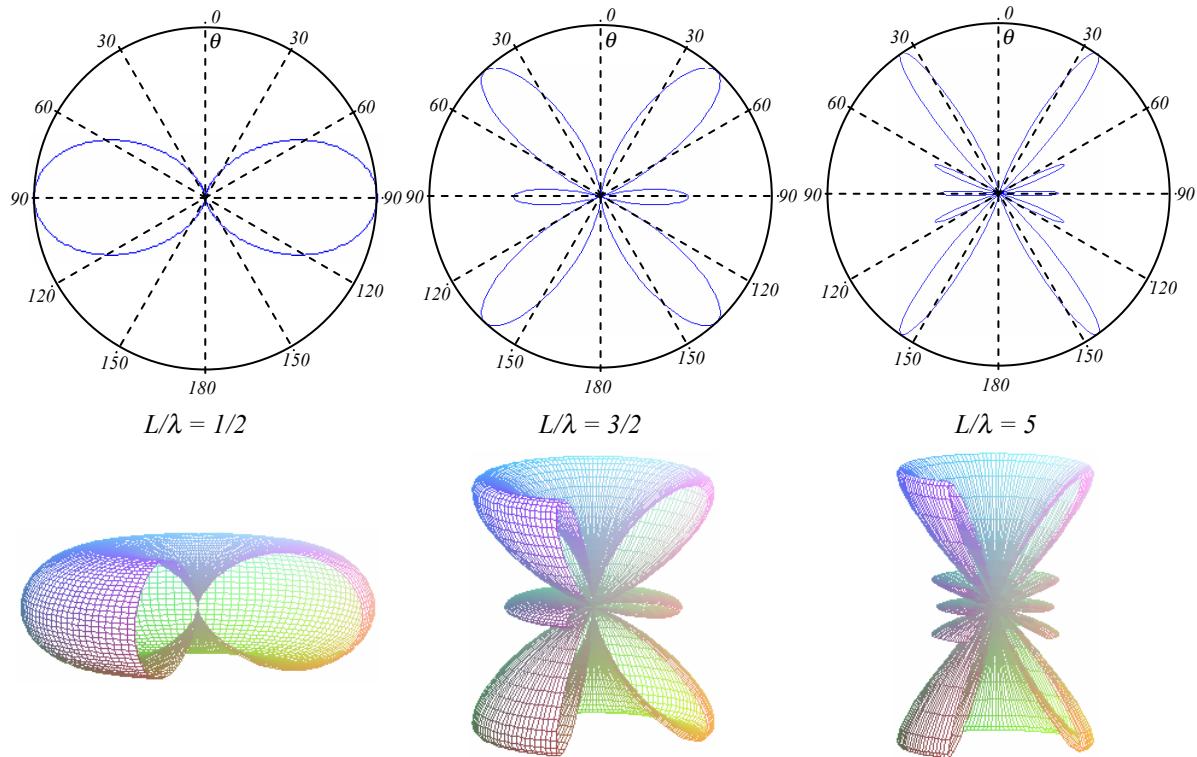
$$\text{de } L/\lambda: g(\theta) = \left[ \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right]^2 / \sin^2\theta$$



A la derecha se da el diagrama de radiación logarítmico (en dB) normalizado para las distintos valores de  $L/\lambda$ . Observamos el reposicionamiento y modificación del valor de los máximos

principales con la longitud de la antena. Se ve que aumenta la intensidad de los máximos con la relación  $L/\lambda$  y aparecen lóbulos secundarios en distintas direcciones.

En las figuras se presenta el diagrama de radiación polar normalizado<sup>5</sup> lineal que pueden compararse con los diagramas lineales de la página previa:



Finalmente, podemos calcular la potencia radiada por el dipolo largo:

$$\langle P \rangle = \oint_S \langle N_r \rangle dS = 2\pi \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi^2} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right]^2}{\sin \theta} d\theta$$

Esta expresión se puede calcular<sup>6</sup> en términos del llamado coseno integral:

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Definimos  $n = 2L/\lambda$  (número de semilongitudes de onda que entran en la longitud de la antena)

$$\text{y entonces: } \langle P \rangle = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi} \begin{cases} Cin(2n\pi) & n \text{ impar} \\ [4Cin(n\pi) - Cin(2n\pi)] & n \text{ par} \end{cases}$$

o, en función de la resistencia de radiación:

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2 R_r}{2} \Rightarrow R_r = \frac{\eta_0}{4\pi} \begin{cases} Cin(2n\pi) & n \text{ impar} \\ [4Cin(n\pi) - Cin(2n\pi)] & n \text{ par} \end{cases}$$

y la abertura efectiva máxima:

$$A_e = \frac{\eta_0 L^2}{4R_r} = \begin{cases} \pi L^2 / Cin(2n\pi) & n \text{ impar} \\ \pi L^2 / [4Cin(n\pi) - Cin(2n\pi)] & n \text{ par} \end{cases}$$

<sup>5</sup> En diagramas no normalizados los máximos crecen rápidamente con la longitud de la antena, de acuerdo a los valores de la gráfica de la página previa.

<sup>6</sup> M.Bisceglia, E.Zubcov, J.C.Fernandez, "Curso de electromagnetismo", Ed. Nueva Librería (1982), p.347.

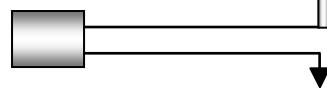
**Ejemplo 10.4:** Calcular la resistencia de radiación para dipolos eléctricos radiantes de  $n\lambda/2$ , con  $n = 1, 10$ .

Calculamos de tablas o mediante series los cosenos integrales<sup>7</sup> para obtener:

<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>r</sub></i></b>	<b>Comentarios</b>	<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>r</sub></i></b>
1	$0.194 \eta_0 = 73.08\Omega$	dipolo de media onda	6	$0.785 \eta_0 = 295.55\Omega$
2	$0.528 \eta_0 = 198.95\Omega$	dipolo de onda completa	7	$0.347 \eta_0 = 130.76\Omega$
3	$0.279 \eta_0 = 105.42\Omega$		8	$0.853 \eta_0 = 321.29\Omega$
4	$0.689 \eta_0 = 259.46\Omega$		9	$0.367 \eta_0 = 138.28\Omega$
5	$0.320 \eta_0 = 120.68\Omega$		10	$0.906 \eta_0 = 341.29\Omega$

Se observa que la resistencia de radiación aumenta, tendiendo a  $\eta_0$  con la longitud del dipolo y es mayor para antenas de longitud múltiplo de onda completa. Este comportamiento está relacionado con la forma y tamaño de los lóbulos de radiación de las figuras previas, donde se ve cómo aumenta la radiación emitida con el tamaño de la antena.

La antena dipolar eléctrica o dipolo largo, es una antena resonante porque en el caso ideal de pérdidas nulas se forma sobre ella una onda estacionaria de corriente con nodos en los extremos abiertos. Por lo tanto la longitud de la antena debe ser un número entero de semilongitudes de onda para satisfacer esta condición. De esta forma se ve que sólo se puede excitar un conjunto discreto de frecuencias de resonancia. Si se alimenta a la antena con una frecuencia no "permitida", habrá una fuerte reflexión a la entrada de la antena, que se comporta en forma similar a una línea resonante. Por lo tanto la antena dipolar eléctrica es una antena de banda angosta alrededor de la/s frecuencia/s de resonancia. Este resultado es para un alambre de sección despreciable. Puede demostrarse que el ancho de banda de una antena dipolar eléctrica aumenta si se usan alambres de mayor sección.



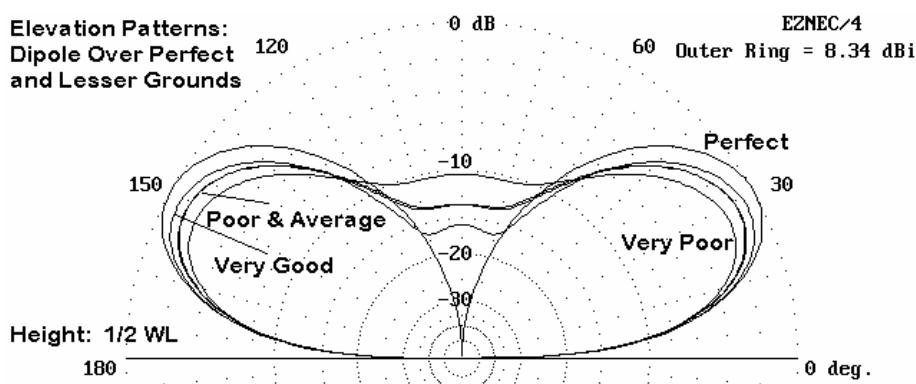
En muchas ocasiones el “dipolo” tiene una sola rama a la que se conecta el generador, cuya otra conexión se hace a tierra. La otra rama se puede considerar como la imagen en tierra de la rama verdadera. Así, una rama de  $L = \lambda/4$  produce un “dipolo” de  $\lambda/2$ . Esta disposición se conoce como antena látigo y es muy usada (automóviles, teléfonos celulares, etc.). Para que este sistema sea eficiente la tierra debe acercarse al comportamiento de plano conductor perfecto, de manera que debe ser de alta conductividad y extenderse varias veces  $\lambda/4$  alrededor de la posición del látigo.

En general, la mayoría de las antenas se diseñan y construyen sobre tierra, y el método de imágenes se usa extensivamente. Sin embargo, en la realidad la tierra no es un conductor perfecto, ni siquiera en casos un buen conductor. A partir de las investigaciones pioneras de Sommerfeld a principios del siglo XX, la radiación de un dipolo eléctrico sobre un plano terrestre de conductividad finita se puede describir convenientemente como la superposición de una onda espacial, cuyos campos decae como  $1/r$  (los típicos campos de radiación que hemos ya encontrado) y una onda de superficie cuyos campos decae como  $1/r^2$ , de forma que estos términos dejan de tener importancia en la radiación lejana. Sin embargo, la presencia de conductividad finita altera los diagramas de radiación, de manera que los lóbulos que se dan para el plano horizontal  $\theta = \pi/2$  giran sus máximos a un cierto ángulo de elevación, y la potencia emitida rasante al suelo se ve reducida respecto al caso ideal.

En la figura<sup>8</sup> se muestra la influencia en el diagrama de radiación de una antena dipolar vertical de 10m de longitud colocada a  $\lambda/2$  por encima de tierra, con suelos de distinta conductividad,

<sup>7</sup> En el Apéndice 9 se dan las expresiones de las series que representan al coseno integral.

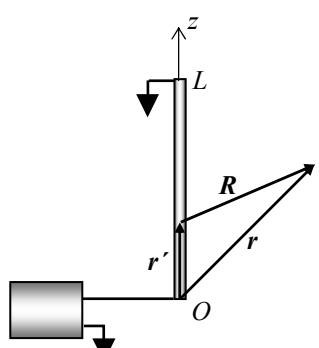
<sup>8</sup> Esta figura está tomada de “A ground is just a ground – unless it is a model of a ground”, L.B.CebikW4RNL, <http://www.cebik.com/modelling.html>.



valor del máximo de radiación y convierte el cero en un máximo secundario ( Nótese que la escala es logarítmica, en dB).

### Antenas de onda viajera

El dipolo eléctrico largo que hemos analizado es una antena resonante, porque las distribuciones de corriente y tensión a lo largo de la misma son ondas estacionarias. Podemos analizar esta antena como una línea de transmisión de impedancia característica variable y abierta en el extremo. Sin embargo, es posible construir antenas donde la onda de corriente es una onda viajera que se propaga a lo largo de ella. Por ejemplo, consideremos un conductor recto de longitud  $L$  donde la corriente está definida por la onda progresiva:



El campo eléctrico radiado por cada elemento  $dz'$  de la antena será, como en el caso del dipolo largo:

$$dE_\theta = \frac{i I(z, t) k^2}{4 \pi \epsilon_0 \omega R} e^{-ikR} \sin \theta' dl' = \frac{i \eta_0}{2 \lambda R} I(z, t) e^{-ikR} \sin \theta' dl'$$

y aproximando de la misma manera que en ese caso:

$$E_\theta \cong \frac{i \eta_0 I_0}{2 \lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \int_0^L e^{-ikz'} e^{ik \cos \theta z'} dz'$$

La integral es inmediata y obtenemos:

$$E_\theta \cong \frac{i \eta_0 I_0}{2 \lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \frac{e^{ikL(\cos \theta - 1)} - 1}{ik(\cos \theta - 1)} = \frac{\eta_0 I_0}{4 \pi r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} [e^{ikL(\cos \theta - 1)} - 1]$$

y finalmente:

$$E_\theta \cong -\frac{\eta_0 I_0}{2 \pi r} e^{i(\omega t - kr)} e^{ik \frac{L}{2} (\cos \theta - 1)} \frac{\sin \left[ k \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) \right] \sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta_0}$$

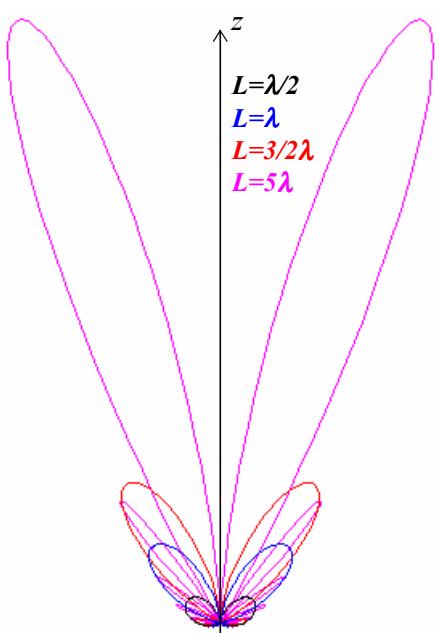
El diagrama de radiación (no normalizado) será:

$$r^2 \langle N_r \rangle = r^2 |E_\theta|^2 / 2 \eta_0 \cong \frac{\eta_0 I_0^2}{8 \pi^2} \frac{\sin^2 \left[ k \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) \right] \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{\eta_0 I_0^2}{8 \pi^2} \frac{\sin^2 \left[ \pi \frac{L}{\lambda} (1 - \cos \theta) \right]}{\tan^2(\theta/2)}$$

En la figura se muestran cuatro casos. Obsérvese que los máximos se hallan orientados hacia el sentido de propagación de la onda viajera ( $+z$ ). El valor de los máximos crece con la longitud de la antena en forma similar a la de la antena resonante. Podemos calcular la potencia total radiada por esta antena:

$$\langle P \rangle = \int_{4\pi} r^2 \langle N_r \rangle d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \frac{\eta_0 I_0^2}{8 \pi^2} \frac{\sin^2 \left[ k \frac{L}{2} (1 - \cos \theta) \right] \sin^3 \theta}{(1 - \cos \theta)^2} d\theta$$

modelizado con el programa EZNEC/4. Se observa primero que el caso de tierra de conductor perfecto los lóbulos, que tienen su máximo sobre el plano horizontal, se mueven hacia arriba. La caída de la conductividad del suelo disminuye el valor del máximo de radiación y convierte el cero en un máximo secundario (Nótese que la escala es logarítmica, en dB).



Esta integral vale<sup>9</sup>:

$$\langle P \rangle = \frac{\eta_0 I_0^2}{4\pi} \left[ 1.1415 + \ln(2L/\lambda) - Ci(4\pi L/\lambda) + \frac{\sin(4\pi L/\lambda)}{4\pi L/\lambda} \right]$$

donde  $Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \ln(x) + \gamma - Ci(x)$  es otra variante del **coseno integral**. La constante  $\gamma \approx 0.577216$  es llamada **constante de Euler**.

De aquí la resistencia de radiación resulta:

$$R_r = \frac{\eta_0}{2\pi} \left[ 1.1415 + \ln(2L/\lambda) - Ci(4\pi L/\lambda) + \frac{\sin(4\pi L/\lambda)}{4\pi L/\lambda} \right]$$

y la abertura efectiva máxima:

$$A_e = \frac{\eta_0 L^2}{4R_r} = \frac{\pi L^2 / 2}{\left[ 1.1415 + \ln(2L/\lambda) - Ci(4\pi L/\lambda) + \frac{\sin(4\pi L/\lambda)}{4\pi L/\lambda} \right]}$$

**Ejemplo 10.5:** Calcular  $R_r$  para antenas de onda viajera de  $n\lambda/2$ , con  $n = 1, 10$ .

La expresión a usar es:  $R_r = \frac{\eta_0}{2\pi} \left[ 1.1415 + \ln(n) - Ci(2n\pi) + \frac{\sin(2n\pi)}{2n\pi} \right]$

Calculamos de tablas o mediante series<sup>10</sup> los cosenos integrales para obtener:

<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>r</sub></i></b>	<b><i>n</i></b>	<b><i>R<sub>r</sub></i></b>
1	$0.185 \eta_0 = 69.80\Omega$	6	$0.467 \eta_0 = 175.92\Omega$
2	$0.293 \eta_0 = 110.37\Omega$	7	$0.491 \eta_0 = 185.15\Omega$
3	$0.357 \eta_0 = 134.48\Omega$	8	$0.513 \eta_0 = 193.15\Omega$
4	$0.403 \eta_0 = 151.66\Omega$	9	$0.531 \eta_0 = 200.20\Omega$
5	$0.438 \eta_0 = 165.00\Omega$	10	$0.548 \eta_0 = 206.52\Omega$

Se observa que la resistencia de radiación aumenta en forma monótona, tendiendo a  $\eta_0$  con la longitud de la antena. Salvo para  $n = 1$ , los valores para  $n$  impar son mayores y los valores para  $n$  par menores que los de la antena resonante de igual longitud.

Las antenas de onda viajera se pueden combinar para construir antenas V o antenas rómbicas, disposiciones cuyas características de radiación se pueden describir en función de las halladas.

Como además la longitud de onda de la onda viajera no tiene que cumplir ninguna condición en los extremos de la antena, como en el caso de las antenas resonantes, no hay condición sobre la frecuencia de la corriente alimentadora y estas antenas son **antenas de banda ancha**, a diferencia de las antenas resonantes que son de banda angosta.

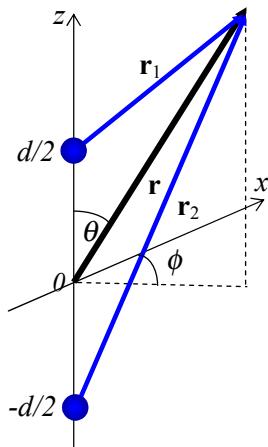
<sup>9</sup> J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory", Mc-Graw Hill, New York, (1941), p.445.

<sup>10</sup> En el Apéndice 9 se dan las expresiones de las series que representan al coseno integral.

### Redes o arreglos de radiadores

Las antenas individuales dan diagramas de radiación que no siempre satisfacen las necesidades. Es posible modificar el diagrama de radiación usando múltiples radiadores, causando **interferencia** entre los campos emitidos por cada uno. Para ello es necesario que los radiadores emitan en forma **coherente**, es decir, que haya una correlación de fase entre los campos, lo que se logra habitualmente estableciendo una correlación de fase entre las corrientes alimentadoras de los radiadores.

Estas disposiciones se conocen como **redes** o **arreglos** de radiadores, y la mayoría de las antenas de uso actual se basa en ellas.



Analicemos el caso más simple que consiste en un par de radiadores **isotrópicos** separados una distancia  $d$ . Como la recta que une ambos radiadores es un eje de simetría de revolución del sistema, tomamos un sistema de referencia centrado en el par, con los radiadores sobre el eje  $z$ , de forma que los campos no dependan de  $\phi$ . Suponemos además que las corrientes alimentadoras son de igual amplitud pero que puede haber un **desfasaje**  $\psi$  entre ellas. El campo emitido por el par de dipolos es, por superposición coherente para distancias lejanas:

$$E_\theta \cong E_0 e^{i\omega t} \left( \frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} e^{i\psi} \right)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias desde cada radiador al punto de observación. Hemos adjudicado al segundo dipolo el desfasaje de las corrientes.

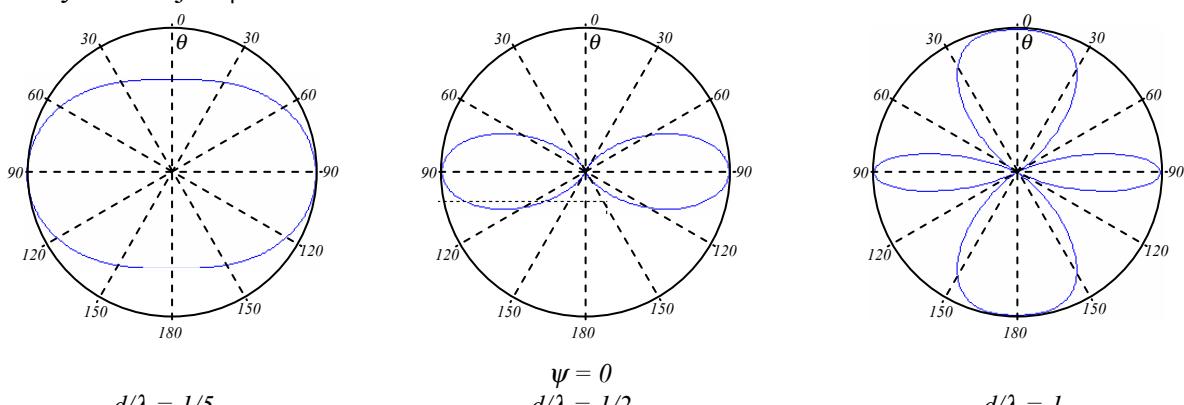
Para puntos lejanos ( $r \gg d$ ):  $\frac{e^{-ikr_{1,2}}}{r_{1,2}} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{1,2}} = \frac{e^{-ikr}}{r} e^{\pm ik \frac{d}{2} \cos \theta}$  y tenemos:

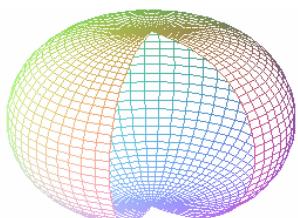
$$\begin{aligned} E_\theta &\approx \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \left( e^{ik \frac{d}{2} \cos \theta} + e^{-ik \frac{d}{2} \cos \theta} e^{i\psi} \right) = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \frac{\psi}{2})} \left( e^{i(k \frac{d}{2} \cos \theta - \frac{\psi}{2})} + e^{-i(k \frac{d}{2} \cos \theta - \frac{\psi}{2})} \right) \\ &= \frac{2E_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \frac{\psi}{2})} \cos \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

El vector medio de Poynting es:

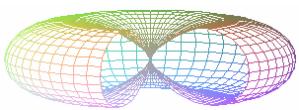
$$\langle N_r \rangle = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \cong 4 \frac{|E_0|^2}{2\eta_0 r^2} \cos^2 \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) = \langle N_r \rangle_{max} F(\theta, \psi) \Rightarrow F(\theta, \psi) \cong \cos^2 \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) \text{ que}$$

es un **factor de interferencia** entre los dos radiadores, que tienen diagramas individuales esféricos. Este factor depende de  $\theta$  y  $\psi$  y en las siguientes figuras se grafica para diversas relaciones  $d/\lambda$  y desfasajes  $\psi$ .

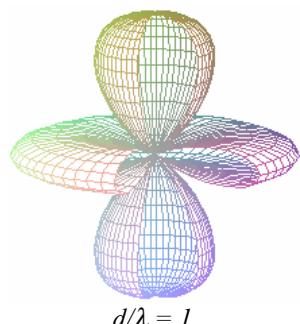




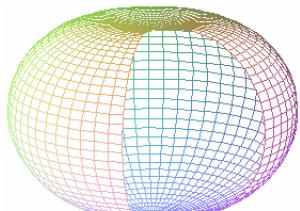
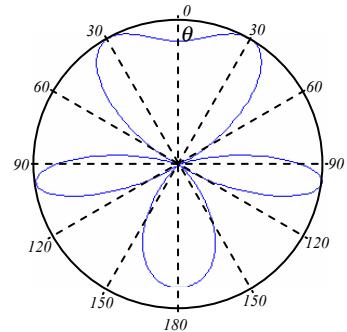
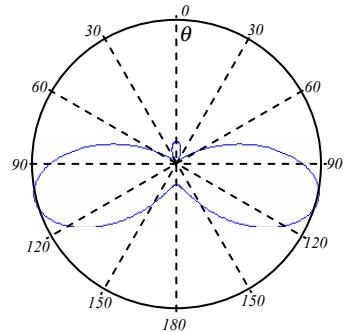
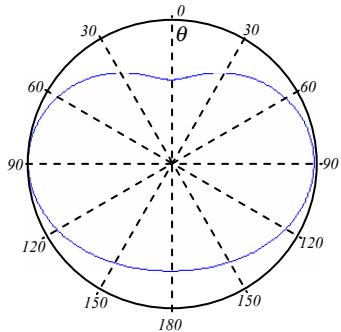
$$d/\lambda = 1/5$$



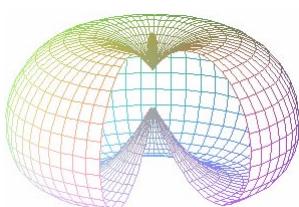
$$\psi = 0 \\ d/\lambda = 1/2$$



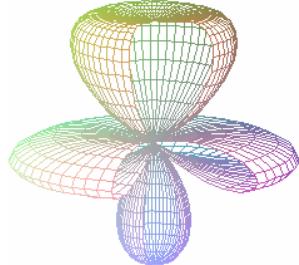
$$d/\lambda = 1$$



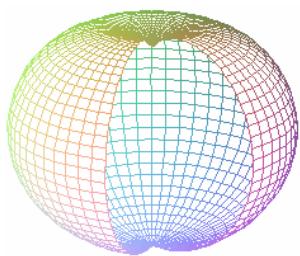
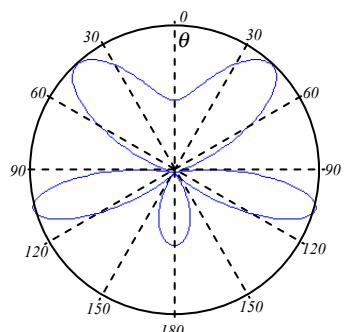
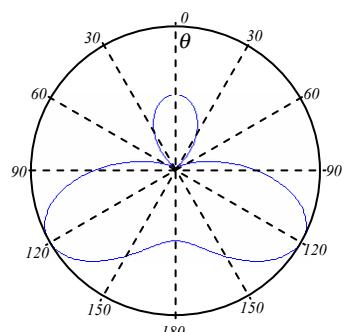
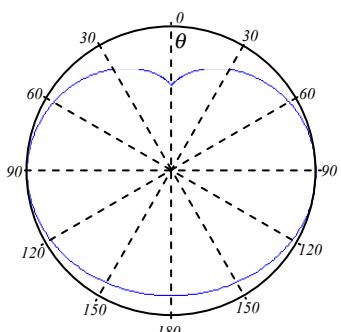
$$d/\lambda = 1/5$$



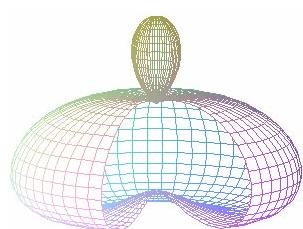
$$\psi = \pi/4 \\ d/\lambda = 1/2$$



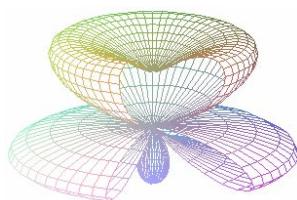
$$d/\lambda = 1$$



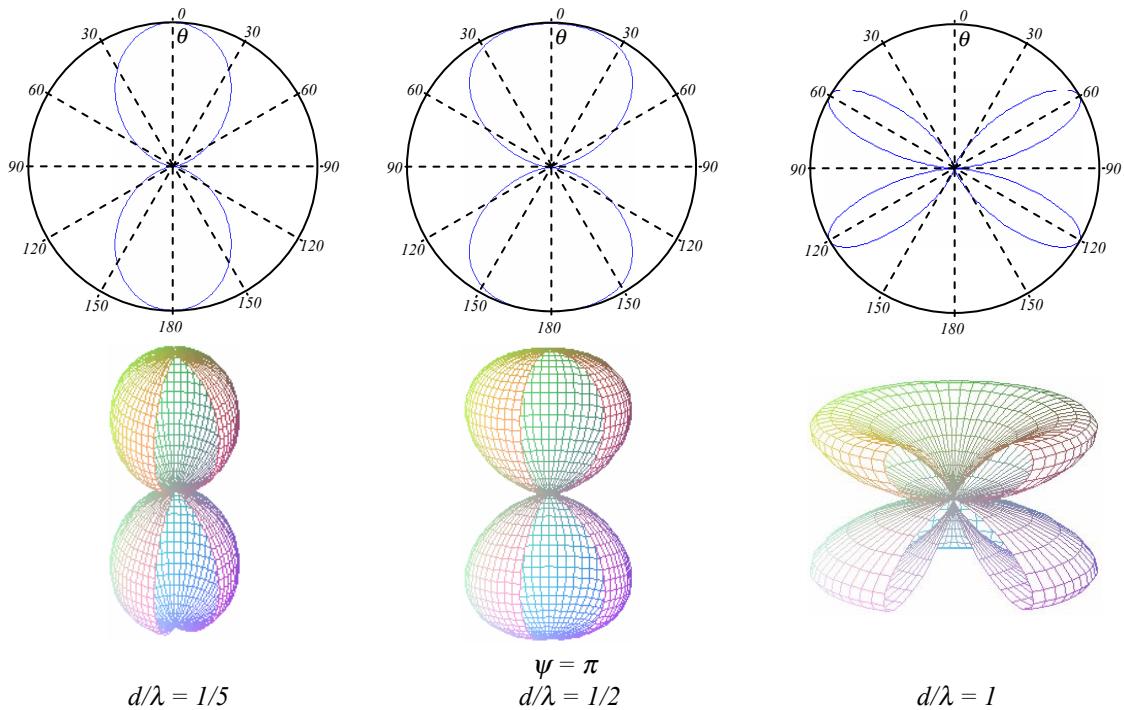
$$d/\lambda = 1/5$$



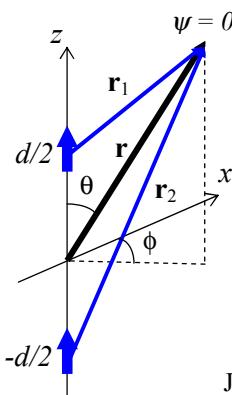
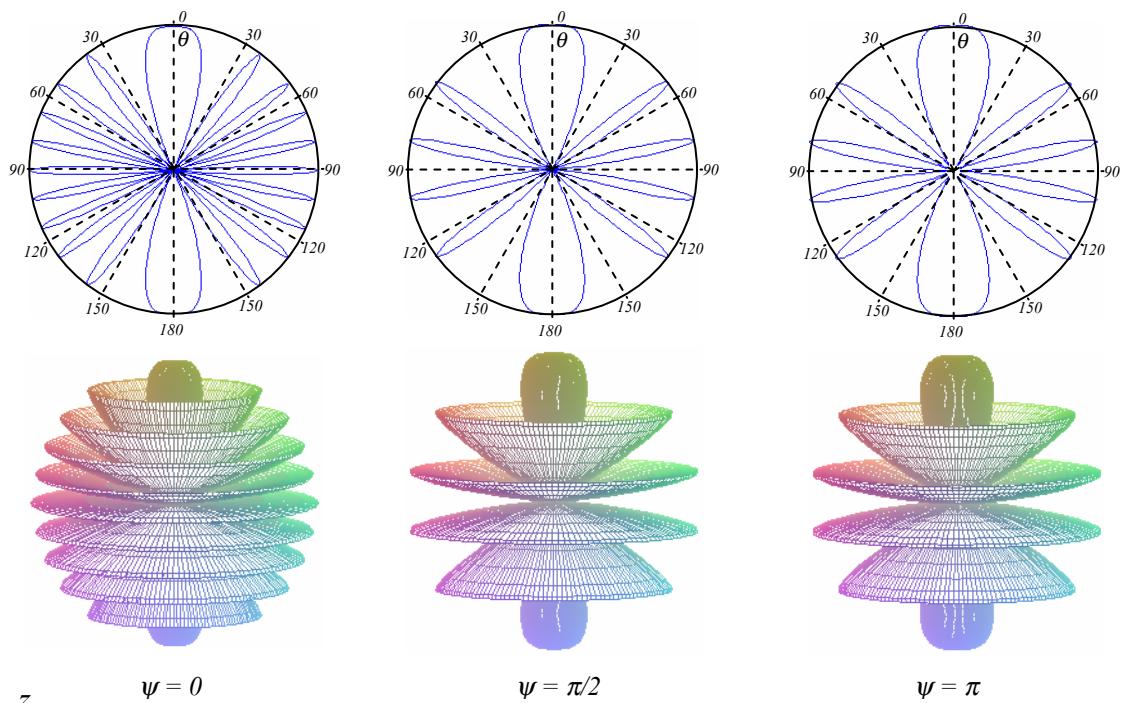
$$\psi = \pi/2 \\ d/\lambda = 1/2$$



$$d/\lambda = 1$$



Se observa la influencia que tiene la separación y el desfasaje en el diagrama de interferencia de los dos radiadores. En los diagramas siguientes, para  $d = 5\lambda$  se ve la complejidad de los diagramas obtenidos aún con sistemas muy simples.



Consideramos ahora la misma configuración pero reemplazamos los radiadores isotrópicos con **dipolos** eléctricos cortos paralelos al eje  $z$ . Repetimos el cálculo del campo radiado y el diagrama de radiación para obtener:

$$\begin{aligned} E_\theta &\approx \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \left( e^{\frac{ikd}{2} \cos \theta} + e^{-\frac{ikd}{2} \cos \theta} e^{i\psi} \right) \\ &= \frac{2E_0}{r} e^{i(\omega t - kr + \frac{\psi}{2})} \sin \theta \cos \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) \end{aligned}$$

y el vector medio de Poynting es:

$$\begin{aligned} \langle N_r \rangle &= \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \equiv 4 \left[ \frac{|E_0|^2}{2\eta_0 r^2} \sin^2 \theta \right] \cos^2 \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta - \frac{\psi}{2} \right) \\ &= 4 \langle N_r \rangle_{dip} F(\theta, \phi, \psi) \end{aligned}$$

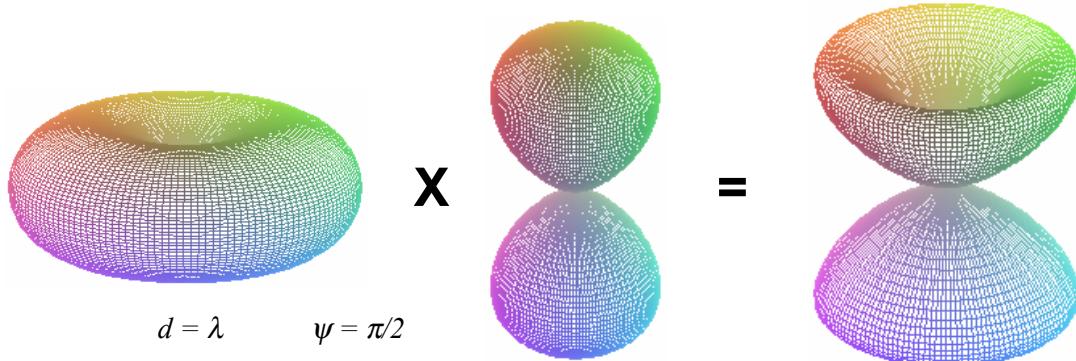
que es un nuevo ejemplo de la:

### Regla de multiplicación de diagramas

**El diagrama de radiación del conjunto es el producto del diagrama de radiación del elemento base por un diagrama de interferencia**

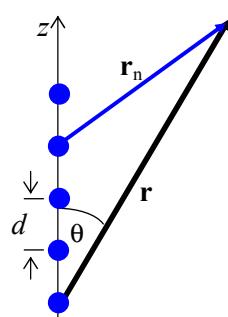
La anisotropía en el diagrama de radiación introducida por el elemento base se ve así multiplicada por la anisotropía introducida por el factor de interferencia, que depende de la dirección del espacio y el desfasaje entre las corrientes alimentadoras de los elementos. Este resultado es totalmente general y se aplica cualquiera sea el elemento base (siempre que el arreglo sea de elementos idénticos).

En la siguiente figura se grafica el diagrama dipolar, el factor de interferencia y su producto para  $d = \lambda$ ,  $\psi = \pi/2$ .



### Redes lineales

Consideremos ahora  $N$  radiadores puntuales que se hallan situados sobre una línea recta. Esta es una red lineal.



Analizamos primero una red **vertical**. Asumiremos que se trata de **radiadores isotrópicos** porque nos interesa analizar el diagrama de interferencia. Colocamos el sistema de coordenadas de manera que la posición del  $n$ -ésimo radiador de la fila sea:  $\mathbf{r}'_n = (n-1)d \hat{\mathbf{z}}$ . El campo creado por el conjunto es:

$$E_\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N E_{0n} e^{i(\omega t + \psi_n)} \frac{e^{-ikR_n}}{R_n} \quad \text{con} \quad R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|$$

donde hemos supuesto que cada radiador genera un campo de amplitud  $E_{0n}$  y fase  $\psi_n$ . Para puntos lejanos podemos aproximar como en la sección anterior, a orden uno en la fase:  $R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n| \approx r - (n-1)d \cos \theta$  y a orden cero en la amplitud, para obtener:

$$E_\theta(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=1}^N E_{0n} e^{i[(n-1)kd \cos \theta + \psi_n]} = \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} E_{0n} e^{i[nkd \cos \theta + \psi_n]} \quad \text{con} \quad E_{00} = 1, \psi_0 = 0.$$

Consideremos primero campos de igual amplitud y **en fase**. Entonces podemos tomar

$$E_{0n} = E_0 = cte \quad \text{y} \quad \psi_n = cte = 0 \quad \forall n.$$

La suma se convierte en una serie geométrica, ya que cada término es igual al precedente multi-

PLICADO POR EL FACTOR CONSTANTE  $e^{ikd \cos \theta}$ :

$$\begin{aligned}
 E_\theta(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inkd \cos \theta} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1 - e^{iNkd \cos \theta}}{1 - e^{ikd \cos \theta}} \\
 &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{\frac{i}{2}(N-1)kd \cos \theta} \frac{e^{-\frac{i}{2}Nkd \cos \theta} - e^{\frac{i}{2}Nkd \cos \theta}}{e^{-\frac{i}{2}kd \cos \theta} - e^{\frac{i}{2}kd \cos \theta}} \\
 &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{\frac{i}{2}(N-1)kd \cos \theta} \frac{\sin\left(\frac{Nkd}{2} \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right)}
 \end{aligned}$$

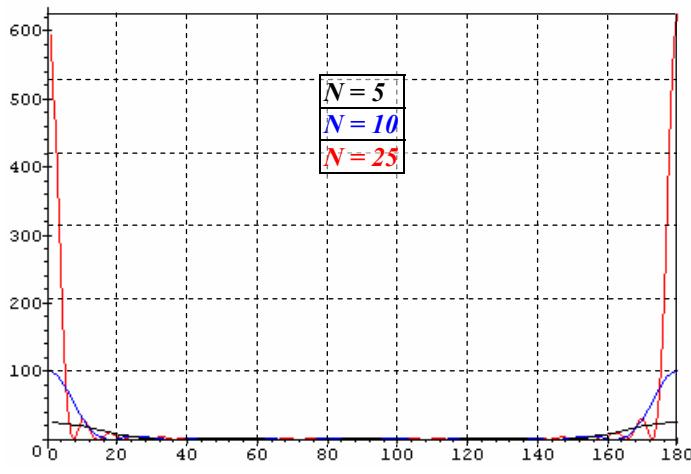
y el diagrama de interferencia será proporcional a:

$$r^2 \langle N_r \rangle = r^2 \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} \equiv \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right)} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}$$

que es función del tipo  $\sin^2(N\beta)/\sin^2(\beta)$ . Esta función tiene el máximo principal para

$$\beta = \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta = n\pi, \text{ que vale: } N^2 |E_0|^2 / (2\eta_0)$$

$$f(\theta, \phi) = \frac{r^2 \langle N_r \rangle}{r^2 \langle N_r \rangle}_{\max} = \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}{N^2 \sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta\right)}$$



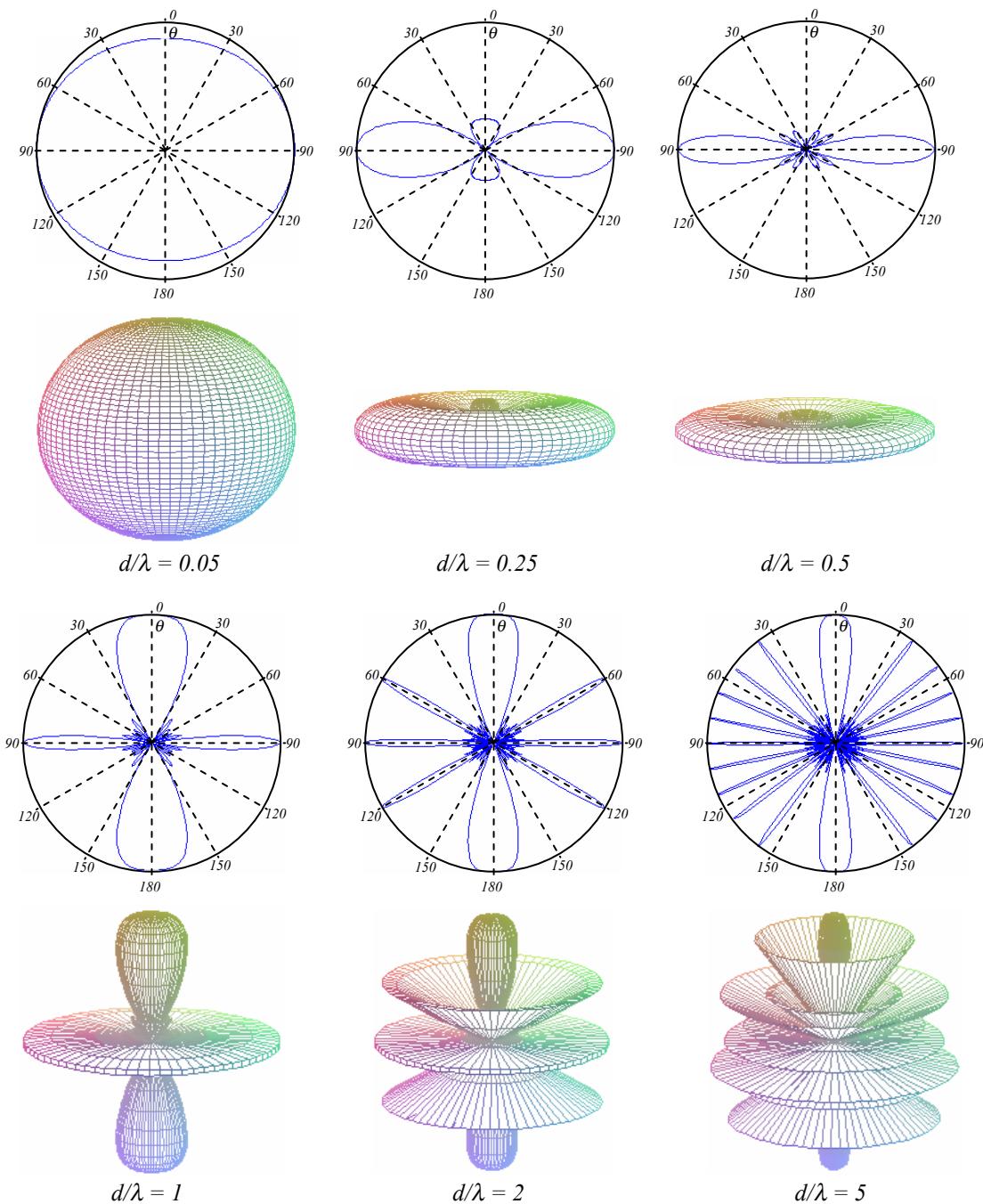
Para  $n > 0$  tenemos que:

$$\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta = n\pi \Rightarrow \cos \theta = n \frac{\lambda}{d}$$

Como  $|\cos \theta| \leq 1$ , esta condición se cumple solamente para  $d \geq \lambda$ . En tal caso, aparecen otros máximos principales en direcciones no laterales.

En las figuras siguientes se muestran los diagramas de campo de interferencia para  $N = 6$  y distintas relaciones  $d/\lambda$ . Se observa que el ancho del lóbulo principal disminuye a medida que aumenta  $d/\lambda$  cuando  $d < \lambda$ , y que aparecen otros lóbulos para  $d \geq \lambda$ .

Graficamos la expresión **no normalizada** en función de  $\beta$  para varios valores de  $N$ : Los máximos principales se dan para  $\beta = n\pi$ , con  $n$  entero ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Como  $\beta = \pi(d/\lambda) \cos \theta$ , la condición  $n = 0$ ,  $\beta = 0$  lleva a  $\cos \theta = 0$ , que implica un máximo sobre el plano horizontal  $\theta = \pi/2$ . **Este máximo siempre existe, aunque no siempre es el máximo principal**. Por este motivo, estos arreglos con corrientes alimentadoras en fase se conocen como **formaciones laterales (broadside arrays)**.



Consideremos ahora que mantenemos los campos de igual amplitud pero con **fases variables**. Esto se logra desfasando las corrientes alimentadoras de cada radiador.

Sólo podemos obtener una serie geométrica si la fase crece linealmente con la posición del dipolo en el arreglo, o sea si:  $\psi_n = n\delta \Rightarrow \psi_n - \psi_{n-1} = \delta$ . En tal caso:

$$\begin{aligned} E_\theta(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(kd \cos \theta + \delta)} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1 - e^{iN(kd \cos \theta + \delta)}}{1 - e^{ikd \cos \theta + \delta}} \\ &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{\frac{iN}{2}[kd \cos \theta + \delta]} \frac{\sin\left[N\left(\frac{kd}{2} \cos \theta + \frac{\delta}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{kd}{2} \cos \theta + \frac{\delta}{2}\right)} \end{aligned}$$

y el diagrama de radiación es:

$$r^2 < N_r = r^2 \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2 \left[ N \left( \frac{kd}{2} \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right) \right]}{\sin^2 \left( \frac{kd}{2} \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right)} \Rightarrow f(\theta) = \frac{\sin^2 \left[ N \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right) \right]}{N^2 \sin^2 \left( \pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right)}$$

La presencia del desfasaje  $\delta$  varía la posición de los máximos principales del diagrama de radiación. Como en el caso de desfasaje nulo, el máximo principal se da cuando:

$$\beta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta + \delta = n\pi.$$

Analizamos el caso  $\beta = 0$ . Como  $|\cos \theta| \leq 1$  se ve que el dominio de  $\beta$  es:

$$\delta - 2\pi d/\lambda \leq \beta \leq \delta + 2\pi d/\lambda$$

Entonces, para que exista un máximo principal, el valor  $\beta = 0$  debe estar dentro del dominio de  $\beta$ . Como  $\delta$  puede ser positivo o negativo, se dan dos posibilidades:

- a)  $\delta > 0$ . Existe  $\beta = 0$  si  $\delta - 2\pi d/\lambda \leq 0 \Rightarrow \delta/2\pi \leq d/\lambda$
- b)  $\delta < 0$ . Existe  $\beta = 0$  si  $-\delta + 2\pi d/\lambda \geq 0 \Rightarrow |\delta|/2\pi \leq d/\lambda$

O sea que en general podemos decir que existirá un máximo principal si:

$$|\delta|/2\pi \leq d/\lambda \Rightarrow (N-1)|\delta|/2\pi \leq (N-1)d/\lambda \Rightarrow \Delta\psi/2\pi \leq L/\lambda$$

donde  $\Delta\psi$  es el desfasaje total del arreglo (entre el primer y el último elemento). Suponiendo que se cumpla esta condición, el máximo principal se da para:

$$\beta = 2\pi d/\lambda \cos \theta_M + \delta = 0 \Rightarrow \cos \theta_M = -\frac{\delta}{2\pi d}$$

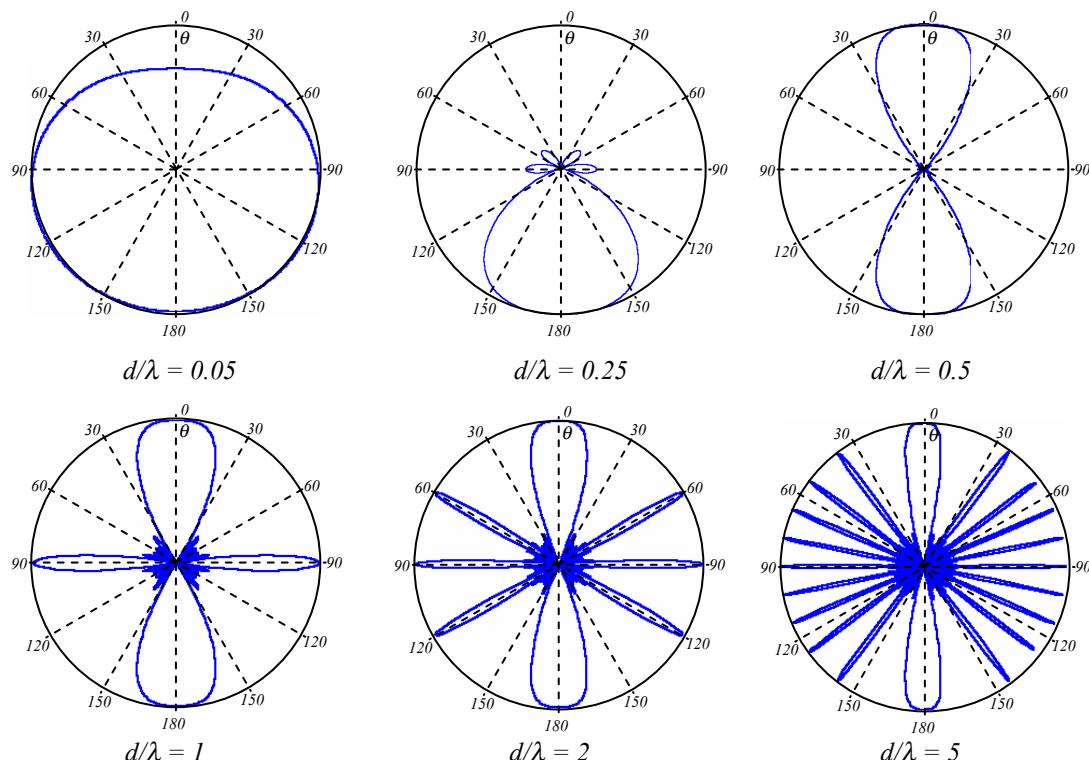
Como puede verse,  $\theta_M$  depende del desfasaje. Si  $\delta$  es cero, el máximo principal se da para  $\theta_M = \pm\pi/2$ , lo que nos lleva a las formaciones laterales ya vistas.

Por otra parte, si:

$$\delta = 2\pi d/\lambda \Rightarrow \theta_M = \pi$$

$$\delta = -2\pi d/\lambda \Rightarrow \theta_M = 0$$

y se tienen las llamadas **formaciones de punta (endfire arrays)**, donde la máxima radiación se da sobre la línea que contiene a los dipolos. Las siguientes gráficas muestran los diagramas de campo de 6 radiadores en una formación de punta:



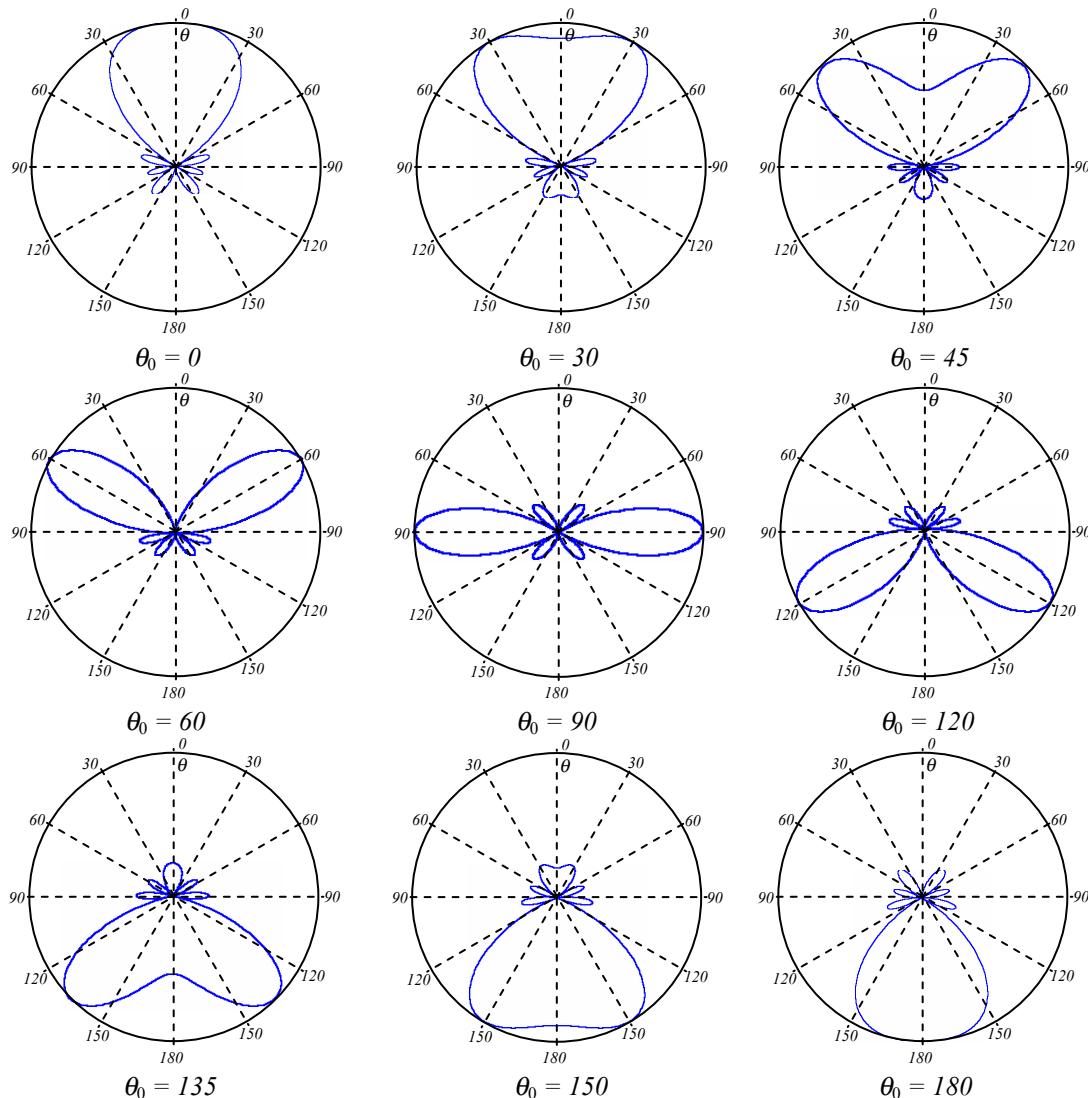
### Arreglos en fase (phased arrays)

El análisis de las formaciones laterales y de punta indica que introduciendo un desfasaje entre las corrientes alimentadoras de un arreglo de radiadores se logra modificar la posición del máximo principal. Podemos ver que el diagrama de radiación:

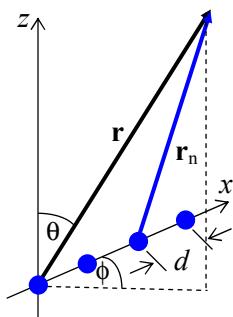
$$f(\theta) = \frac{\sin^2(N\beta)}{N^2 \sin^2(\beta)} = \frac{\sin^2\left[N\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta + \frac{\delta}{2}\right)\right]}{N^2 \sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta + \frac{\delta}{2}\right)}$$

que da el máximo principal para  $\beta = 0$  si  $d < \lambda$ . Si tomamos:  $\delta = -2\pi d/\lambda \cos \theta_0$  nos queda  $\beta = 2\pi d/\lambda (\cos \theta - \cos \theta_0)$  que se anula con  $\theta = \theta_0$ . Variando  $\theta_0$  con el tiempo se logra que el máximo principal de radiación gire en el tiempo. Esta característica se usa, por ejemplo, en radares de aeropuertos donde es importante el seguimiento de los aviones. En las siguientes gráficas se muestra el diagrama de radiación para un arreglo lineal de 5 elementos, separados en  $d = 0.4\lambda$ , para distintos ángulos  $\theta_0$ :

Se observa la relocación del máximo principal siguiendo el ángulo  $\theta_0$ , desde la formación de punta, para  $\theta_0 = 0$ , hasta la formación lateral, para  $\theta_0 = 90$  y luego se repite el comportamiento en el otro hemisferio.



## Redes horizontales



Consideremos ahora  $N$  radiadores puntuales que se hallan sobre una línea horizontal. Asumiremos nuevamente que se trata de radiadores isotrópicos porque nos interesa analizar el diagrama de interferencia. Ubicamos el sistema de coordenadas de forma que la posición del  $n$ -ésimo radiador de la fila es:  $\mathbf{r}'_n = (n-1)d \hat{\mathbf{x}}$ .

El campo creado por el conjunto es:

$$E_\theta(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N E_{0n} e^{i(\omega t + \psi_n)} \frac{e^{-ikR_n}}{R_n} \quad \text{con} \quad R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|$$

donde hemos supuesto que cada radiador genera un campo de amplitud  $E_{0n}$  y fase  $\psi_n$ . Para puntos lejanos podemos aproximar nuevamente a orden uno en la fase:

$$R_n = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n| \approx r - (n-1)d \sin \theta \cos \phi \quad \text{y a orden cero en la amplitud, para obtener:}$$

$$\begin{aligned} E_\theta(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=1}^N E_{0n} e^{i[(n-1)kd \sin \theta \cos \phi + \psi_n]} \\ &= \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} E_{0n} e^{i[nkd \sin \theta \cos \phi + \psi_n]} \quad \text{con} \quad E_{00} = 1, \psi_0 = 0 \end{aligned}$$

Consideremos primero campos de igual amplitud y **en fase**. Tomamos  $E_{0n} = E_0 = cte$  y  $\psi_n = cte = 0 \quad \forall n$ . La sumatoria constituye una serie geométrica, ya que cada término es igual a precedente multiplicado por un factor constante  $e^{ikd \sin \theta \cos \phi}$ :

$$\begin{aligned} E_\theta(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{inkd \sin \theta \cos \phi} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1 - e^{iNkd \sin \theta \cos \phi}}{1 - e^{ikd \sin \theta \cos \phi}} \\ &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{i\frac{1}{2}(N-1)kd \sin \theta \cos \phi} \frac{e^{-i\frac{1}{2}Nkd \sin \theta \cos \phi} - e^{-i\frac{1}{2}Nkd \sin \theta \cos \phi}}{e^{-i\frac{1}{2}kd \sin \theta \cos \phi} - e^{-i\frac{1}{2}kd \sin \theta \cos \phi}} \\ &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{i\frac{1}{2}(N-1)kd \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin\left(\frac{Nkd}{2} \sin \theta \cos \phi\right)}{\sin\left(\frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi\right)} \end{aligned}$$

y el diagrama de interferencia será proporcional a:

$$r^2 \langle N_r \rangle = r^2 \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} \approx \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2\left(\frac{Nkd}{2} \sin \theta \cos \phi\right)}{\sin^2\left(\frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi\right)} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \cos \phi\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \cos \phi\right)}$$

Para el plano horizontal  $\theta = \pi/2$ , esta función tiene el máximo para  $\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \cos \phi = 0$ , que vale:

$$N^2 |E_0|^2 / (2\eta_0) \Rightarrow f(\vartheta, \phi) = \frac{r^2 \langle N_r \rangle}{r^2 \langle N_r \rangle_{max}} = \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \cos \phi\right)}{N^2 \sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \cos \phi\right)}$$

es el diagrama de radiación, que puede escribirse:  $f(\vartheta, \phi) = \frac{\sin^2(N\beta)}{N^2 \sin^2(\beta)}$

Esta expresión en  $\beta$  es la misma que para la red vertical, de modo que son aplicables las conclusiones halladas en la sección precedente. Los máximos principales se dan para  $\beta = n\pi$ . Como

$\beta = \pi(d/\lambda) \sin \theta \cos \phi$  la condición  $\beta = 0$  lleva a  $\sin \theta \cos \phi = 0$ .

En el **plano horizontal** ( $\theta = \pi/2$ ) esto significa que los máximos principales se dan para  $\phi = \pi/2, 3\pi/2$  (direcciones laterales a la línea de dipolos).

La otra condición  $\beta = n\pi$  lleva a que  $(d/\lambda) \sin \theta \cos \phi = n$ . Como las funciones trigonométricas tienen módulo  $\leq 1$ , esta condición se cumple solamente para  $(d/\lambda) \geq 1$ . En tal caso, aparecen otros máximos principales en direcciones no laterales. Estos arreglos son **formaciones laterales** como las vistas en la sección precedente.

Consideremos ahora nuevamente campos de igual amplitud pero con fases linealmente variables con la posición, como antes:  $\psi_n = n\delta \Rightarrow \psi_n - \psi_{n-1} = \delta$ .

En tal caso:

$$\begin{aligned} E_\theta(\mathbf{r}, t) &\cong \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in(kd \sin \theta \cos \phi + \delta)} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1 - e^{iN(kd \sin \theta \cos \phi + \delta)}}{1 - e^{i(kd \sin \theta \cos \phi + \delta)}} \\ &= \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{\frac{iN}{2}[kd \sin \theta \cos \phi + \delta]} \frac{\sin \left[ N \left( \frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2} \right) \right]}{\sin \left( \frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2} \right)} \end{aligned}$$

y el diagrama de radiación es proporcional a:

$$r^2 \langle N_r \rangle = r^2 \frac{|E_\theta|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_0|^2}{2\eta_0} \frac{\sin^2 \left[ N \left( \frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2} \right) \right]}{\sin^2 \left( \frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2} \right)}$$

Podemos realizar el mismo análisis que en el caso del arreglo vertical.

Para que exista un máximo principal, el valor  $\beta = 0$  debe estar dentro del dominio de  $\beta$ . Como  $\delta$  puede ser positivo o negativo, se dan dos posibilidades:

c)  $\delta > 0$ . Existe  $\beta = 0$  si  $\delta - 2\pi \frac{d}{\lambda} \leq 0 \Rightarrow \frac{\delta}{2\pi} \leq \frac{d}{\lambda}$

d)  $\delta < 0$ . Existe  $\beta = 0$  si  $-\delta + 2\pi \frac{d}{\lambda} \geq 0 \Rightarrow \frac{|\delta|}{2\pi} \leq \frac{d}{\lambda}$

O sea que en general podemos decir que existirá un máximo principal si:

$$\frac{|\delta|}{2\pi} \leq \frac{d}{\lambda} \Rightarrow (N-1) \frac{|\delta|}{2\pi} \leq (N-1) \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta\psi}{2\pi} \leq \frac{L}{\lambda}$$

donde  $\Delta\psi$  es el desfasaje total del arreglo (entre el primer y el último elemento). Suponiendo que se cumpla esta condición, el máximo principal se da para:

$$\beta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos \phi_M + \delta = 0 \Rightarrow \cos \phi_M = -\frac{\delta}{2\pi} \frac{\lambda}{d}$$

Como puede verse,  $\phi_M$  depende del desfasaje. Si  $\delta$  es cero, el máximo principal se da para  $\phi_M = \pm\pi/2$ , lo que nos lleva a las formaciones laterales ya vistas.

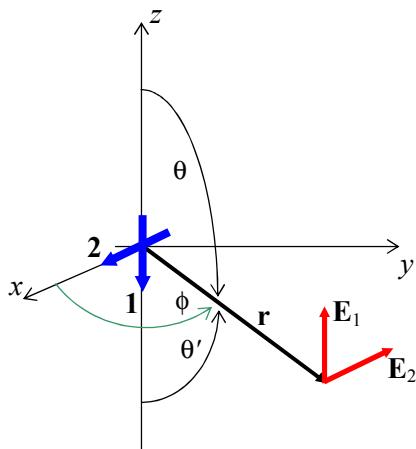
$$\delta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \phi_M = \pi$$

Por otra parte, si:

$$\delta = -2\pi \frac{d}{\lambda} \Rightarrow \phi_M = 0$$

y se tienen nuevamente las **formaciones de punta**, donde la máxima radiación se da sobre la línea que contiene a los radiadores.

**Ejemplo 10.6:** No siempre los radiadores emiten campos polarizados en la misma dirección. Considere dos dipolos eléctricos cortos perpendiculares entre sí, situados en el mismo punto. Las corrientes alimentadoras son de igual amplitud y frecuencia, pero pueden estar desfasadas en  $\psi$ . Se pide hallar el diagrama de radiación sobre el plano horizontal que contiene a los dipolos y analizar la polarización de la onda radiada.



Elegimos un sistema de coordenadas con su origen en los dipolos y orientado como indica la figura. El punto campo se toma sobre el plano horizontal  $xy$ . El dipolo 1 (orientado según  $-z$ ) crea el campo:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{E_0}{r} \sin \theta' e^{i(\omega t - kr)} \hat{\theta}' = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{z}$$

porque sobre el plano  $xy$ :  $\theta' = \pi/2$  y  $\hat{\theta}' = \hat{z}$ .

Para expresar el campo creado por el dipolo 2 debemos reemplazar  $\theta'$  por el ángulo entre el eje del dipolo ( $x$  en nuestro caso) y el vector posición  $\mathbf{r}$ . Sobre el plano  $xy$  este ángulo es  $\phi$ , y el vedor  $\hat{\theta}'$  resulta el vedor  $\hat{\phi}$ . Entonces el campo emitido por el dipolo 2 es:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{E_0}{r} \sin \phi e^{i(\omega t - kr + \psi)} \hat{\phi}$$

y el campo eléctrico total es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} [\sin \phi e^{i\psi} \hat{\phi} + \hat{z}]$$

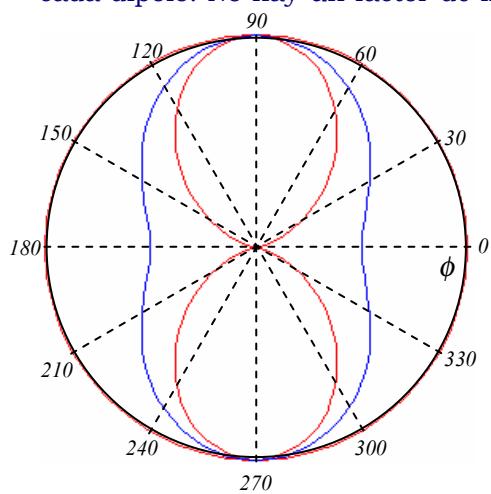
El campo magnético radiado puede calcularse como:

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}}{\eta_0} = \frac{E_0}{\eta_0 r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{r}} \times [\sin \phi e^{i\psi} \hat{\phi} + \hat{z}] = \frac{E_0}{\eta_0 r} e^{i(\omega t - kr)} [\sin \phi e^{i\psi} \hat{z} - \hat{\phi}]$$

y el vector medio de Poynting:

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{E_0^2}{2\eta_0 r^2} \Re e [(\sin \phi e^{i\psi} \hat{\phi} + \hat{z}) \times (\sin \phi e^{-i\psi} \hat{z} - \hat{\phi})] = \frac{E_0^2}{2\eta_0 r^2} (1 + \sin^2 \phi)$$

Se ve que el vector medio de Poynting es la suma de los vectores de Poynting individuales de cada dipolo. No hay un factor de interferencia. Esto se debe a que los campos radiados son perpendiculares entre sí. Además no depende del desfasaje entre las corrientes alimentadoras de los elementos. Las direcciones de máxima radiación corresponden a  $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ , para las cuales el seno vale 1. El diagrama de radiación sobre el plano horizontal que contiene a los dipolos es entonces:



Este diagrama es la semisuma de los diagramas horizontales de radiación individuales de cada dipolo, que se muestran en rojo en la figura.

Para analizar el comportamiento de la polarización de la onda radiada, seguimos un procedimiento similar al de la página 328. El campo eléctrico total es:

$$\mathbf{E} = \Re e \left[ \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} (\sin \phi e^{i\psi} \hat{\phi} + \hat{z}) \right] = \frac{E_0}{r} [(\sin \phi \cos(\omega t - kr + \psi) \hat{\phi} + \cos(\omega t - kr) \hat{z})]$$

Entonces:  $E_z = \frac{E_0}{r} \cos(\omega t - kr)$

$$E_\phi = \frac{E_0}{r} \sin \phi \cos(\omega t - kr + \psi) = \frac{E_0}{r} \sin \phi [\cos(\omega t - kr) \cos \psi - \sin(\omega t - kr) \sin \psi]$$

y podemos escribir:

$$\cos(\omega t - kr) = \frac{rE_z}{E_0}$$

$$\sin(\omega t - kr) = \cos(\omega t - kr)\cotan\psi - \frac{rE_\phi}{E_0 \sin\phi \sin\psi} = \frac{rE_z}{E_0} \cotan\psi - \frac{rE_\phi}{E_0 \sin\phi \sin\psi}$$

Elevamos ambas ecuaciones al cuadrado y sumamos miembro a miembro para obtener:

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \frac{rE_z}{E_0} \right)^2 + \left( \frac{rE_z}{E_0} \cotan\psi - \frac{rE_\phi}{E_0 \sin\phi \sin\psi} \right)^2 \\ 1 &= \left( \frac{rE_z}{E_0} \right)^2 (1 + \cotan^2\psi) + \left( \frac{rE_\phi}{E_0 \sin\phi \sin\psi} \right)^2 - \frac{2r^2 E_\phi E_z \cotan\psi}{E_0^2 \sin\phi \sin\psi} \\ \left( \frac{E_z}{E_0 / r} \right)^2 + \left( \frac{E_\phi}{E_0 \sin\phi / r} \right)^2 - \frac{2E_\phi E_z}{(E_0 / r)(E_0 \sin\phi / r)} \cos\psi &= \sin^2\psi \end{aligned}$$

que podemos comparar con la ecuación de la elipse de polarización hallada en el Capítulo 6:

$$\left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos\phi = \sin^2\phi$$

Observamos que ambas ecuaciones son formalmente idénticas, de manera que el sistema de dos dipolos cruzados emite una onda elípticamente polarizada.

Se observa también que los semiejes de la elipse cambian con  $r$  (por el decaimiento de la amplitud de los campos de una onda esférica) y con  $\phi$ .

En particular, en la dirección de mínima radiación  $\sin\phi = 0$ , y se tiene  $E_\phi = 0$ . Entonces en esa dirección sólo hay  $E_z$  y la onda es linealmente polarizada.

En la dirección de máxima radiación  $\sin\phi = 1$ , y el estado de polarización de la onda radiada depende solamente de  $\psi$ :

$$\left( \frac{E_z}{E_0 / r} \right)^2 + \left( \frac{E_\phi}{E_0 / r} \right)^2 - \frac{2E_\phi E_z}{(E_0 / r)^2} \cos\psi = \sin^2\psi$$

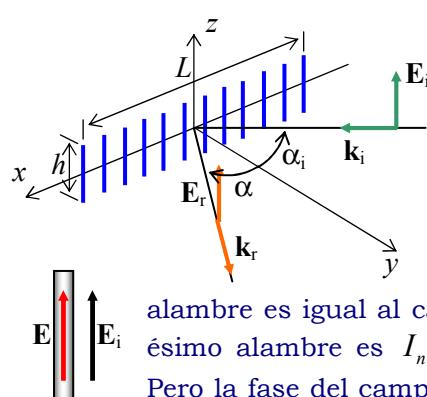
$\psi = \pm n\pi$ .  $E_\phi = E_z$  y la onda es linealmente polarizada a  $\pi/4$  del plano  $xy$ .

$$\psi = \pm(2n+1)\pi/2. E_z^2 + E_\phi^2 = \left( \frac{E_0}{r} \right)^2 \text{ y la onda es circularmente polarizada.}$$

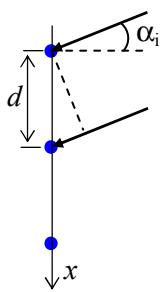
Para valores intermedios de  $\psi$  la onda resulta elípticamente polarizada.

En otras direcciones la onda resulta elípticamente polarizada.

**Ejemplo 10.7:** Las antenas usan reflectores para modificar sus diagramas de radiación y mejorar su eficiencia. Considere un arreglo lineal de  $N$  alambres conductores de sección despreciable  $S$  y altura  $h \ll \lambda$  a la frecuencia de trabajo. Una onda plana verticalmente polarizada incide sobre el conjunto formando un ángulo  $\alpha_i$  con la normal a la distribución. Esta onda induce corrientes variables en el tiempo sobre los alambres, que entonces se convierten en radiadores. Halle la amplitud del campo radiado por el conjunto y el diagrama de radiación horizontal. Analice su uso como reflector.



Por la continuidad del campo eléctrico sobre la interfase aire-conductor podemos suponer que el campo dentro de cada alambre es igual al campo incidente, de forma que la corriente que circula en el  $n$ -ésimo alambre es  $I_n = \sigma S E_{in}$  donde  $E_{in}$  es el campo incidente sobre ese alambre. Pero la fase del campo incidente va cambiando de elemento a elemento, porque, como se muestra en la figura, hay una diferencia de caminos  $\Delta l = d \sin\alpha_i$  entre los



campos que llegan a dos elementos adyacentes. Esta diferencia de caminos se traduce en una diferencia de fase  $\Delta\phi = k\Delta l = kd \operatorname{sen} \alpha_i$  entre los campos y, por lo tanto, entre las corrientes de elementos adyacentes.

Por comodidad colocamos el origen de coordenadas en un extremo de la distribución y tenemos para el elemento  $n$ -ésimo la corriente:

$$I_n = \sigma S E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_n)} = \sigma S E_0 e^{i(\omega t - nkd \operatorname{sen} \alpha_i)}$$

Como la altura del elemento es mucho menor que  $\lambda$  podemos suponer que la distribución de corriente es uniforme y que el elemento se comporta como un dipolo radiante elemental, y emite un campo eléctrico de radiación:

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \frac{i I_n h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{-ikr} \operatorname{sen} \theta e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \hat{\mathbf{r}}} \hat{\theta} = \frac{i \sigma S E_0 h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} e^{-inkd \operatorname{sen} \alpha_i} \operatorname{sen} \theta e^{-inkd \operatorname{sen} \theta \cos \phi} \hat{\theta}$$

El campo total emitido por la distribución es:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i \sigma S E_0 h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \operatorname{sen} \theta \hat{\theta} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-inkd(\operatorname{sen} \alpha_i + \operatorname{sen} \theta \cos \phi)} \\ &= \frac{i \sigma S E_0 h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i[\omega t - kr + (N-1)\beta/2]} \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen}[N\beta/2]}{\operatorname{sen}[\beta/2]} \hat{\theta} \end{aligned}$$

donde:  $\beta = kd(\operatorname{sen} \alpha_i + \operatorname{sen} \theta \cos \phi)$ . El diagrama de radiación es proporcional a:

$$r^2 \langle N_r \rangle = \frac{1}{2\eta_0} \frac{\sigma^2 S^2 E_0^2 h^2 k^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \omega^2} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\operatorname{sen}^2[N\beta/2]}{\operatorname{sen}^2[\beta/2]}$$

Sobre el plano horizontal  $\theta = \pi/2$  y tenemos:

$$r^2 \langle N_r \rangle = \frac{1}{2\eta_0} \frac{\sigma^2 S^2 E_0^2 h^2 k^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \omega^2} \frac{\operatorname{sen}^2[N\beta/2]}{\operatorname{sen}^2[\beta/2]} \quad \beta = kd(\operatorname{sen} \alpha_i + \cos \phi)$$

El valor máximo de esta expresión se da para  $\beta = 0$ , de modo que el diagrama de radiación queda:

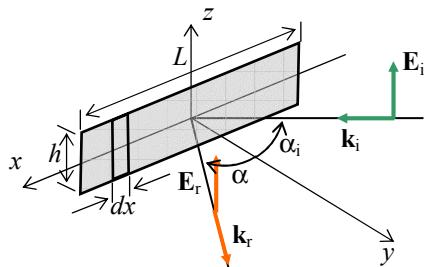
$$f(\phi) = \frac{\operatorname{sen}^2[N\beta/2]}{N^2 \operatorname{sen}^2[\beta/2]} \quad \beta = kd(\operatorname{sen} \alpha_i + \cos \phi)$$

La condición de máximo implica:  $\beta = kd(\operatorname{sen} \alpha_i + \cos \phi) = 0 \Rightarrow \cos \phi_M = \operatorname{sen} \alpha_i$

Pero, de la figura:  $\phi = \pi/2 - \alpha \Rightarrow \cos \phi = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha_M = \operatorname{sen} \alpha_i$

y se observa que el máximo de radiación se da en la dirección que predice la **ley de Snell de la reflexión**. Además, de la figura de la página 410 se ve que el diagrama de radiación tiene un máximo principal más angosto y máximos secundarios más pequeños cuanto mayor sea el número  $N$  de elementos en la distribución, de forma que la potencia emitida en las direcciones de reflexión secundaria es más baja cuanto mayor es  $N$ .

**Ejemplo 10.8:** Extender los resultados del ejemplo previo al caso de un reflector plano conductor.



El reflector puede considerarse como la superposición de elementos de ancho  $dx$  y altura  $h$ . Cada elemento se puede ver como un dipolo, que emite un campo:

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i \sigma S E_0 h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} e^{-ikx' \operatorname{sen} \alpha_i} \operatorname{sen} \theta e^{-ikx' \operatorname{sen} \theta \cos \phi} \hat{\theta} dx' \mathbf{E}$$

esta es la misma expresión del ejemplo precedente, con:  $x \rightarrow x'$ . El campo total es la integral:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{i \sigma S E_0 h k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \operatorname{sen} \theta \hat{\theta} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx'(\operatorname{sen} \alpha_i + \operatorname{sen} \theta \cos \phi)} dx' \\ &= \frac{i \sigma S E_0 h k^2 L}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \operatorname{sen} \theta \frac{\operatorname{sen}(\gamma/2)}{\gamma/2} \hat{\theta} \end{aligned}$$

con  $\gamma = kL(\sin \alpha_i + \sin \theta \cos \phi)$ . El diagrama de radiación es proporcional a:

$$r^2 \langle N_r \rangle = \frac{\sigma^2 S^2 E_0^2 h^2 k^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \omega^2} \sin^2 \theta \frac{\sin^2(\gamma/2)}{(\gamma/2)^2}$$

y nuevamente el máximo principal de esta ecuación se da para  $\gamma = 0$ , lo que lleva a la ley de Snell de la reflexión para la radiación en el plano horizontal. Nuevamente aparecen máximos secundarios cuya altura es menor cuanto mayor sea  $kL$ . En el límite  $kL = 2\pi L / \lambda \rightarrow \infty$  la función  $\sin^2(\gamma/2)/(\gamma/2)^2$  se convierte en una delta de Dirac  $\delta(0)$  que lleva a que sólo existe el “rayo” reflejado en la dirección de la ley de Snell de la óptica. Esta es una buena aproximación cuando la longitud de onda es muy pequeña frente a las dimensiones del reflector.

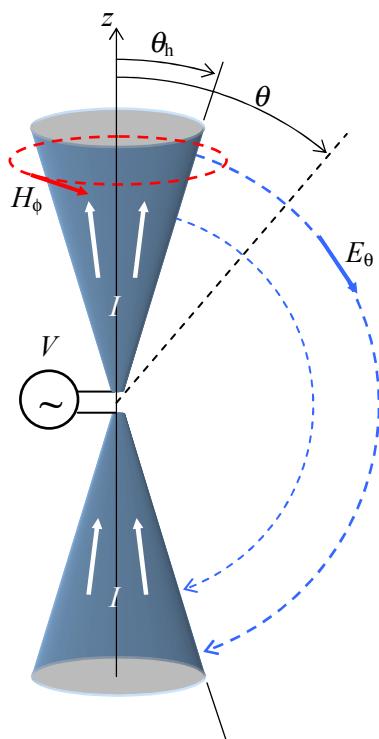
El uso de arreglos de radiadores permite diseñar diagramas de radiación que no pueden obtenerse con un único elemento. Permiten modificar el ancho de los lóbulos aumentando la directividad y elegir la dirección del espacio de máxima potencia. También permiten lograr radiación con polarización no lineal. Además del número de elementos, el espaciamiento y el desfasaje entre las corrientes alimentadoras se pueden introducir valores distintos en las **amplitudes** de las corrientes alimentadoras o un **espaciado no equidistante** para tener aún mayor flexibilidad en el diseño, especialmente en la eliminación de los lóbulos secundarios y en el aumento del ancho de banda de la antena.

También se pueden realizar arreglos 2D y 3D. Todos estos tipos de sistemas radiantes se presentan en el programa **APV.EXE**<sup>11</sup> que se puede descargar del ftp de la materia. Este es un programa de DOS que permite ver los diagramas de radiación de distintos tipos de arreglos con diversos elementos y otros tipos de antenas.

---

<sup>11</sup> Desarrollado por A.Z. Elsherbeni y C.D.Talor Jr., Dept. Electrical Engineering, Univ. Mississippi, ©1993.  
Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires – [www.fi.uba.ar](http://www.fi.uba.ar)

### Antena bicónica



Como se mencionó al final de la sección del dipolo eléctrico largo, el ancho de banda de la antena aumenta con la sección del alambre. Este efecto se aprovecha en la antena bicónica.

La antena bicónica ideal consiste en dos conos infinitos enfrentados por los vértices, como se indica en la figura. Como la estructura es infinita, se puede analizar como una línea de transmisión de parámetros variables a lo largo de su estructura. Cuando se conecta un generador a la entrada de la antena, circularán corrientes a lo largo de los conos. A su vez, estas corrientes crean un campo magnético  $H_\phi$  que tiene simetría cilíndrica respecto del eje de los conos. Las variaciones en el tiempo del campo magnético generan un campo eléctrico. Ambos campos resultan en una onda electromagnética que se propaga hacia fuera de la antena. Suponemos el caso más sencillo, que la onda sea una onda esférica elemental y que el campo electromagnético sea transversal (TEM) a la propagación. En tal caso, el campo eléctrico tendrá solamente componente  $E_\theta$ .

Entonces, en la región entre los conos tenemos:

$$\mathbf{H} = H_\phi \hat{\phi} \quad \mathbf{E} = E_\theta \hat{\theta}$$

La ecuación de Maxwell-Ampere:  $\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon \mathbf{E}$  en coordenadas esféricas puede escribirse:

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r \operatorname{sen} \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & r \operatorname{sen} \theta H_\phi \end{vmatrix} = i\omega\epsilon E_\theta \hat{\theta}$$

de donde:  $\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta H_\phi) = 0 \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) = i\omega\epsilon E_\theta$

De la primera ecuación surge que:  $\frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta H_\phi) = 0 \Rightarrow H_\phi \propto \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$  y como suponemos ondas esféricas elementales, podemos asumir:  $H_\phi = H_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r \operatorname{sen} \theta}$

Introduciendo esta expresión en la segunda ecuación obtenemos  $E_\theta$ :

$$E_\theta = -\frac{1}{i\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) = -\frac{1}{i\omega\epsilon r} \frac{\partial}{\partial r} \left( H_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi} \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \right) = \frac{k H_0}{4\pi \omega \epsilon r} \frac{e^{-ikr}}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\eta H_0}{4\pi r} \frac{e^{-ikr}}{\operatorname{sen} \theta} = \eta H_\phi$$

Los campos satisfacen la relación de las ondas esféricas elementales. Podemos calcular el diagrama de radiación:  $r^2 \langle N_r \rangle = r^2 \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_\theta H_\phi^*) = \frac{r^2 \eta}{2} |H_\phi|^2 = \frac{\eta H_0^2}{32\pi^2 \operatorname{sen}^2 \theta}$

Esta expresión es máxima para  $\theta = \theta_h$  que es el valor mínimo de  $\theta$ , de donde el diagrama de radiación es simplemente:  $f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta_h}{\operatorname{sen}^2 \theta}$

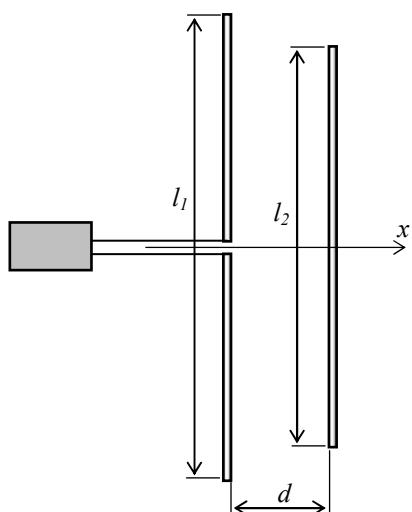
Existen otros modos no TEM que aparecen cuando la antena no es infinita. En este caso se distingue entre una región interior hasta la tapa de los conos y una región exterior. En la región interior, y lejos de las tapas, se puede suponer válida la descripción sencilla TEM que hemos analizado.

zado, porque el sistema se comporta como una línea de transmisión, mientras que cerca de las tapas y en la región exterior es necesario usar otros modos no TEM en función de armónicos cilíndricos.

Las antenas cónicas o bicónicas se usan desde los tiempos de Marconi por su gran ancho de banda, pero sólo a mediados del siglo XX se encontró una descripción matemática satisfactoria. Actualmente es una de las antenas usadas en ensayos de EMC (compatibilidad electromagnética).

### Antenas tipo Yagi-Uda

Los arreglos de radiadores vistos hasta el momento consisten de elementos idénticos todos **activos**, es decir, todos alimentados por corrientes desde el sistema generador. Esto puede ser complicado desde el punto de vista práctico porque los desfasajes y/o amplitudes deben seguir una función rígida para garantizar el diagrama de radiación. El llamado arreglo Yagi-Uda tiene un único elemento activo y otros elementos (**pasivos**) por los que circulan corrientes inducidas por el campo generado por el elemento activo. El desfasaje adecuado entre las corrientes se logra ajustando el tamaño y separación de los elementos pasivos.



En el esquema de la figura se ve un dipolo activo de longitud  $l_1$  y un elemento pasivo de longitud  $l_2$  separados una distancia  $d$ . La linealidad de las ecuaciones de Maxwell hace posible escribir un par de ecuaciones que relacionan los voltajes y las corrientes en el centro de los elementos:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}$$

Las  $Z_{ij}$  son constantes que dependen de las longitudes de los elementos, su espaciado y la longitud de onda de la radiación.

Se puede demostrar que  $V_2 = 0$ , de manera que:  $I_2 = -(Z_{21}/Z_{22})I_1$ .

El campo emitido por el conjunto se puede escribir como:

$$E_{rad} \propto a_1 + a_2 e^{ikd \cos \theta} = a_1 \left( 1 + I_2 / I_1 e^{ikd \cos \theta} \right)$$

y el diagrama de radiación será proporcional a:

$$f(\theta, \phi) \propto \left| \left( 1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{ikd \cos \theta} \right) \right|^2 = 1 + \left| \frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{ikd \cos \theta} \right)$$

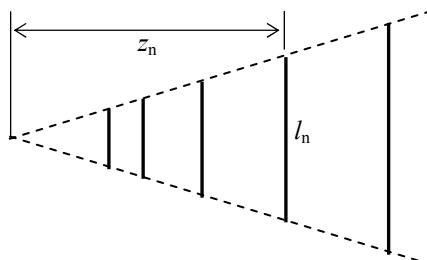
El primer término representa la contribución del radiador activo, el segundo la contribución del radiador pasivo y el tercero es un término de interferencia. Cuando esta interferencia es tal que maximiza la radiación en el sentido de  $+z$  el elemento pasivo se conoce como un **director**, mientras que si la radiación se maximiza según  $-z$  el elemento pasivo se conoce como un **reflector**. La máxima directividad de un director se obtiene cuando  $d \cong 0.11\lambda$ . Si el elemento activo es de media onda, el espaciado debe ser mayor:  $0.38\lambda < d < 0.48\lambda$ . En el caso de un reflector, la máxima directividad de un reflector se obtiene cuando  $d \cong 0.16\lambda$ . Si el elemento activo es de media onda, el espaciado debe ser mayor:  $0.51\lambda < d < 0.52\lambda$ .

El arreglo Yagi-Uda más simple consiste de un elemento activo, un director y un reflector. En esta situación puede mantenerse las separaciones antedichas, pero surge que el director debe ser un poco menor aún que elemento activo y el reflector un poco mayor.

La adición de más reflectores no modifica mucho el diagrama de radiación, pero sí lo hacen más directores, de manera que las antenas típicas de TV consisten de un dipolo (doblado) activo, un reflector y un conjunto de directores de tamaños variables. Directividades entre 10 y 100 se pueden obtener en función de la cantidad de directores usada. Sin embargo estos valores se dan para

la longitud de onda de diseño, de modo que la respuesta en frecuencia de la antena Yagi-Uda es pobre.

### Antenas log-periódicas



Consideremos una estructura como la de la figura. La localización y longitud de los sucesivos elementos aumenta de uno al siguiente en un factor constante:

$$z_n = \tau z_{n-1} \quad l_n = \tau l_{n-1}$$

donde la longitud del primer elemento es función de la longitud de onda de operación. Si ahora multiplicamos la longitud de onda de operación por  $\tau$ , todas las posiciones y longitudes de la estructura se multiplican por  $\tau$  y el resultado es

una estructura idéntica a la original (supuestamente indefinida). Por lo tanto la estructura radia de igual manera para longitudes de onda  $\lambda$ ,  $\tau\lambda$ ,  $\tau^2\lambda$ , etc., de donde podemos escribir el conjunto de longitudes de onda "permitidas" como:

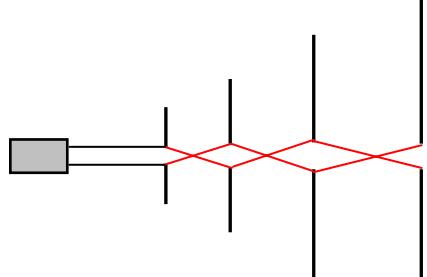
$$\lambda_n = \tau \lambda_{n-1} = \tau^{n-1} \lambda_1 .$$

Expresando esta ecuación en términos de logaritmos:

$$\log \lambda_n = \log \lambda_1 + (n-1)\tau \Rightarrow \log f_n = \log f_1 - (n-1)\tau$$

La estructura se conoce como logarítmica-periódica o **log-periódica**.

Un análisis de las características de radiación de esta estructura se puede hacer a partir de una estructura de tres elementos y la antena Yagi-Uda. Se halla del cálculo que la máxima radiación a lo largo del arreglo se da cuando el elemento central, supuesto activo, tiene una longitud de media onda. Como el elemento menor actúa como director y el mayor como reflector en la antena Yagi-Uda, entonces la radiación se dirige hacia el extremo derecho del arreglo. Para mejorar el ancho de banda, se adopta la siguiente forma de alimentación desde el extremo más corto de la



antena y se conectan los sucesivos semi-elementos del arreglo como se indica en la figura, espaciando los elementos en la mitad de su longitud en ese punto. Esto hace que la corriente en el elemento  $n+1$  esté adelantada  $\pi/2$  respecto del elemento  $n$ . Si el elemento  $n$  es resonante a la frecuencia de operación, la distancia al siguiente elemento es  $\lambda/4$ . Estas dos características llevan a que ambos elementos radien en fase.

El cálculo detallado muestra que la fase de la tensión provista a los sucesivos dipolos aumenta uniformemente desde el extremo de alimentación. Si el elemento resonante está al medio del arreglo, es esta región la que radiará más eficientemente. Si se varía la frecuencia, será otra región la de máxima radiación. El cálculo demuestra que hay poca variación en el diagrama de radiación en el rango de frecuencias de operación ( $f_1, \tau^{-(n-1)} f_1$ ).

## APENDICE 7 - Resolución de las ecuaciones de la radiación

Los potenciales retardados satisfacen las ecuaciones inhomogéneas de la radiación electromagnética:

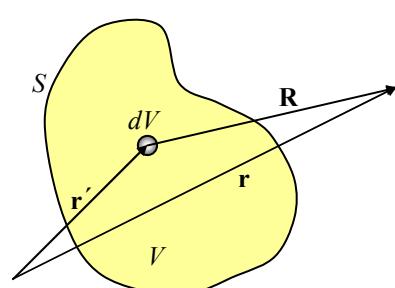
$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Puede observarse que cada componente cartesiana de la ecuación vectorial para  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  es matemáticamente equivalente a la ecuación diferencial escalar para  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , de forma que vamos a resolver esta última ecuación diferencial y escribiremos por analogía la solución para el potencial vectorial.

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal e inhomogénea dentro de un recinto del espacio se puede escribir como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación completa.

La ecuación homogénea se obtiene cuando se toma  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$  para todo punto del recinto de integración. Desde el punto de vista físico, esta suposición es equivalente a decir que no hay fuentes del potencial escalar electrodinámico dentro del recinto de interés. Pero si no hay fuentes, no puede haber campo, de manera que habrá una solución no trivial del problema sólo en el caso en que las fuentes se hallen **fueras** del recinto de integración. Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea representa la contribución a la radiación de las fuentes **externas** al recinto de integración. Esta situación fue analizada en los Capítulos precedentes, donde se estudió la propagación de ondas electromagnéticas en recintos sin fuentes de campo. Por lo tanto, para los propósitos presentes podemos suponer que no hay fuentes de campo fuera del recinto de integración y entonces debemos anular la solución de la ecuación homogénea. La solución del problema será entonces la solución particular.



Para obtener una solución particular, y dada la linealidad de la ecuación diferencial, vamos a dividir el recinto de integración  $V$  en elementos de volumen infinitesimales  $dV'$ . Como la forma de estos elementos es irrelevante, elegimos esferas de radio  $\delta \rightarrow 0$ . Para una de estas esferas, situada en  $\mathbf{r}'$ , la ecuación diferencial queda:

$$\nabla^2 \delta\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} & \text{si } R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \delta \\ 0 & \text{si } R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \delta \end{cases}$$

donde  $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$  es el potencial escalar creado por la esfera, dado que fuera de ella no hay carga. Como nos interesa la solución fuera de la esfera, nos queda la ecuación:

$$\nabla^2 \delta\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(\mathbf{r}, t) = 0$$

El elemento de carga tiene simetría esférica, de manera que  $\delta\phi(\mathbf{r}, t) = \delta\phi(R, t)$ , donde  $R$  es la distancia al centro de la esfera. Entonces podemos escribir:

$$\nabla^2 \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \delta\phi(R, t) = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\delta\phi}{dR} \right) \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\delta\phi}{dR} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial t^2} = 0$$

Pero el laplaciano se puede reescribir como:  $\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R \delta\phi)$  ya que:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\delta\phi}{dR} \right) = \frac{1}{R^2} \left( 2R \frac{d\delta\phi}{dR} + R^2 \frac{d^2\delta\phi}{dR^2} \right) = \frac{2}{R} \frac{d\delta\phi}{dR} + \frac{d^2\delta\phi}{dR^2}$$

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R\delta\phi) = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( \delta\phi + R \frac{d\delta\phi}{dR} \right) = \frac{2}{R} \frac{d\delta\phi}{dR} + \frac{d^2\delta\phi}{dR^2}$$

y la ecuación de ondas resulta:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R\delta\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\phi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dR^2} (R\delta\phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (R\delta\phi) = 0$$

Pero esta ecuación es matemáticamente idéntica a la ecuación de las ondas planas, de manera que podemos escribir la solución **formal**:

$$R\delta\phi(\mathbf{r},t) = f(R \mp ct) \quad \Rightarrow \quad \delta\phi(\mathbf{r},t) = \frac{f(t \mp R/c)}{R}$$

donde el signo positivo identifica una onda "progresiva" (que se propaga en el sentido de  $R$  crecientes) y el signo negativo a una onda "regresiva" (que se propaga en el sentido de  $R$  decrecientes).

Para determinar cuál función  $f(t \mp R/c)$  es la apropiada, consideramos la condición de borde para  $R \rightarrow 0$ . En este caso vale la ecuación inhomogénea (ya que  $R < \delta$ ) y tenemos:

$$\nabla^2 \delta\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(\mathbf{r},t) = -\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \delta\phi(R,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(R,t) = -\frac{\rho(R,t)}{\epsilon_0}$$

ya que se sigue cumpliendo la simetría esférica. Podemos escribir entonces el laplaciano como antes:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \delta\phi(R,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(R,t) &= -\frac{\rho(R,t)}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{d\delta\phi}{dR} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(R,t) = -\frac{\rho(R,t)}{\epsilon_0} \\ \frac{2}{R} \frac{d\delta\phi}{dR} + \frac{d^2\delta\phi}{dR^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\phi(R,t) &= -\frac{\rho(R,t)}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

En esta última ecuación se ve que el término del laplaciano predomina frente a la derivada temporal para  $R \rightarrow 0$ , debido a los factores inversamente proporcionales a  $R$ . Entonces podemos escribir:

$$\nabla^2 \delta\phi(R,t) \approx -\frac{\rho(R,t)}{\epsilon_0}$$

que es una **ecuación de Poisson cuasi-estática**. Esta ecuación tiene la solución particular que es

$$\text{la integral de Poisson:} \quad \delta\phi(\mathbf{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(R,t) dv'$$

Por lo tanto este es el límite al que debe tender la solución general fuera de la esfera. La forma matemática obtenida anteriormente y la condición de borde se satisfacen simultáneamente si:

$$\begin{cases} \delta\phi(\mathbf{r},t) = \frac{f(t \mp R/c)}{R} \\ \delta\phi(\mathbf{r},t) \approx \frac{\rho(R,t) dv'}{4\pi\epsilon_0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta\phi(\mathbf{r},t) \approx \frac{\rho(\mathbf{r}',t \mp R/c) dv'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Esta es entonces la solución a la ecuación inhomogénea para un elemento de volumen infinitesimal  $dv'$ . Se observa que el doble signo describe dos soluciones físicamente diferentes:

- $\delta\phi(\mathbf{r},t) \approx \frac{\rho(\mathbf{r}',t-R/c) dv'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho(\mathbf{r}',t') dv'}{4\pi\epsilon_0 R}$  representa el potencial creado en  $(\mathbf{r},t)$  por la presencia de la fuente en  $(\mathbf{r}',t')$ , con  $t' = t - R/c$ , o sea, el efecto en el punto campo se debe a

las características de la fuente en un instante **previo**. Esta solución también describe, desde el punto de vista ondulatorio, una onda esférica que viaja desde el punto fuente **hacia afuera** (es decir, en el sentido de  $R$  crecientes).

- $\delta\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\rho(\mathbf{r}', t + R/c) dv'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho(\mathbf{r}', t'') dv'}{4\pi\epsilon_0 R}$  representa el potencial creado en  $(\mathbf{r}, t)$  por la presencia de la fuente en  $(\mathbf{r}', t'')$ , con  $t'' = t + R/c$ , o sea, el efecto en el punto campo se debe a las características de la fuente en un instante **posterior**. Esta solución también describe, desde el punto de vista ondulatorio, una onda esférica que viaja desde fuera **hacia el punto fuente** (es decir, en el sentido de  $R$  decrecientes).

Podemos visualizar la primera solución como la generación de una onda electromagnética esférica que surge del punto fuente y se propaga en todas direcciones a la velocidad  $c$ . La segunda solución, en cambio, representa una onda que llega al punto fuente desde toda dirección del espacio.

Por otra parte, hay una relación de **causalidad** en la primera solución, porque el efecto (el potencial creado) es posterior a la causa (las variaciones en el tiempo de la fuente). El intervalo entre los dos sucesos es el tiempo necesario para que la radiación cubra la distancia  $R$  moviéndose a velocidad  $c$ . En la segunda solución, la causalidad está invertida, y debemos considerar que la fuente de la radiación que viaja hacia adentro se halla en otro sitio del espacio.

La primera solución (con  $t' = t - R/c$ ) se denomina solución **retardada** y satisface las interpretaciones de generación de energía y causalidad que hemos dado. La segunda solución (con  $t'' = t + R/c$ ) se denomina solución **adelantada** y no es compatible con la interpretación de una fuente de ondas electromagnéticas, por lo que la descartamos<sup>12</sup>.

Por superposición podemos hallar el potencial escalar producido por todo el recinto de integración:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t') dv'}{R} \quad \text{con} \quad t' = t - R/c$$

que es la expresión buscada. Además, cada componente cartesiana del potencial vectorial tiene una solución de esta misma forma matemática, de manera que podemos escribir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dv'}{R} \quad \text{con} \quad t' = t - R/c$$

---

<sup>12</sup> Modernas teorías físicas especulativas asignan significado físico a los potenciales adelantados y los incorporan en las ecuaciones de la electrodinámica cuántica.

## APENDICE 8 - Cálculo de la integral del campo de un dipolo largo

Vamos a calcular la integral:

$$F = \int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{kL}{2} - k|z'|\right) e^{ik \cos \theta z'} dz'$$

que surge en la determinación del campo eléctrico radiado por un dipolo largo de longitud  $L$ . Primero dividimos la integral en dos intervalos para eliminar el módulo en el argumento del seno:

$$F = \int_{-L/2}^0 \sin\left(\frac{kL}{2} + kz'\right) e^{ik \cos \theta z'} dz' + \int_0^{L/2} \sin\left(\frac{kL}{2} - kz'\right) e^{ik \cos \theta z'} dz'$$

Ahora realizamos los cambios de variable:

$$\begin{aligned} u &= kL/2 + kz' \Rightarrow du = k dz' && \text{en la primera integral y} \\ v &= kL/2 - kz' \Rightarrow dv = -k dz' && \text{en la segunda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{k} \int_0^{kL/2} \sin u e^{i(u-kL/2)\cos \theta} du - \frac{1}{k} \int_{kL/2}^0 \sin v e^{i(kL/2-v)\cos \theta} dv \\ &= \frac{e^{-i\frac{kL}{2}\cos \theta}}{k} \int_0^{kL/2} \sin u e^{iu\cos \theta} du + \frac{e^{i\frac{kL}{2}\cos \theta}}{k} \int_0^{kL/2} \sin v e^{-iv\cos \theta} dv \end{aligned}$$

Pero:  $\int_0^a \sin x e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{1-\alpha^2} [1 - e^{i\alpha a} (\cos a - i\alpha \sin a)]$  y entonces:

$$\begin{aligned} F &= \frac{e^{-i\frac{kL}{2}\cos \theta}}{k \sin^2 \theta} \left[ 1 - e^{i\frac{kL}{2}\cos \theta} \left( \cos \frac{kL}{2} - i \cos \theta \sin \frac{kL}{2} \right) \right] + \frac{e^{i\frac{kL}{2}\cos \theta}}{k \sin^2 \theta} \left[ 1 - e^{-i\frac{kL}{2}\cos \theta} \left( \cos \frac{kL}{2} + i \cos \theta \sin \frac{kL}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{k \sin^2 \theta} \left( e^{-i\frac{kL}{2}\cos \theta} - \cos \frac{kL}{2} + i \cos \theta \sin \frac{kL}{2} \right) + \frac{1}{k \sin^2 \theta} \left( e^{i\frac{kL}{2}\cos \theta} - \cos \frac{kL}{2} - i \cos \theta \sin \frac{kL}{2} \right) \end{aligned}$$

y finalmente:

$$F = \frac{2}{k \sin^2 \theta} \left[ \cos\left(\frac{kL}{2} \cos \theta\right) - \cos \frac{kL}{2} \right]$$

## APENDICE 9 – Desarrollo en serie del coseno integral

Las integrales que definen el coseno integral:

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \ln(x) + \gamma - Cin(x)$$

La constante  $\gamma \approx 0.5772156649\dots$  se conoce como **constante de Euler**.

Para argumentos  $x$  pequeños, podemos expresar el coseno en el integrando mediante una serie de Taylor:

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{(2k)!} \Rightarrow \frac{1 - \cos t}{t} = \frac{1}{t} \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \right] = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k)!}$$

y entonces, integrando término a término:

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \int_0^x \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k)!} \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \int_0^x t^{2k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{2k(2k)!}$$

Esta expresión converge rápidamente para valores pequeños de  $x$  debido al factorial en el denominador. Para  $x \geq 20$  el carácter oscilatorio de la serie origina errores significativos por redondeo y truncaje en los primeros términos, que son los más significativos, para los cuales la función  $x^{2k}$  crece más rápidamente con  $k$  que el factorial y se requiere usar otros métodos de representación para el cálculo.

Se ha usado esta expresión para el cálculo de las resistencias de radiación en los Ejemplos 10.4 y 10.5.

## RESUMEN

- La resolución de las ecuaciones de Maxwell en un recinto con fuentes de campo (problema de la radiación) se simplifica usando los **potenciales electrodinámicos** en lugar de los campos:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\phi(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}$$

- Estos potenciales electrodinámicos satisfacen **ecuaciones de onda vectoriales inhomogéneas**:

$$\boxed{\nabla^2\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\epsilon_0} \quad \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t)}$$

- Estas ecuaciones tienen como solución (Apéndice 7) los **potenciales retardados**, cuyo valor en el punto campo depende del valor de las fuentes en **instantes anteriores**, por la propagación a **velocidad finita** de la radiación electromagnética:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{R} dV \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{R} dV}$$

con :  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad t' = t - R/c$

- De estas soluciones surge que **sólo cargas aceleradas** emiten radiación electromagnética.

- Se presentan las propiedades fundamentales de las antenas:

- diagrama de radiación.** Describe gráficamente la anisotropía de transmisión/recepción de las antenas receptoras:

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = r^2 \langle N_r \rangle \Rightarrow \frac{d\langle P \rangle/d\Omega}{d\langle P \rangle/d\Omega|_{max}} = \frac{\langle N_r \rangle}{\langle N_r \rangle|_{max}} = f(\theta, \varphi)$$

- ancho de haz de potencia media.** Es el ángulo para el cual la densidad de potencia cae a la mitad del valor máximo para un lóbulo de radiación.

- área de haz.** Es el ángulo sobre el cual se concentraría la radiación si fuera dentro de este ángulo de valor igual al máximo:

$$\Omega_A = \int_{4\pi} f(\theta, \varphi) d\Omega \leq 4\pi.$$

- directividad.** Es la relación entre la densidad de potencia máxima y la densidad de potencia promedio sobre una esfera. Es inversamente proporcional al área de haz:

$$D = \frac{d\langle P \rangle/d\Omega|_{max}}{\langle P \rangle/4\pi} = \frac{\langle P \rangle/\Omega_A}{\langle P \rangle/4\pi} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

- ganancia:**  $G = k D$  donde  $k$  es la **eficiencia**, relacionada con las pérdidas por efecto Joule en los conductores de la antena.

- área o abertura efectiva.** Da la relación entre la potencia eléctrica útil y la densidad de potencia que recibe la antena:

$$\boxed{A_e = \langle P \rangle / \langle N \rangle}$$

- Las propiedades de las antenas están ligadas entre sí. Algunas relaciones importantes son:  $\lambda^2 = A_{e_m} \Omega_A$   $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{e_m} \Rightarrow G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$
- El sistema radiante usado como base para el análisis de antenas de hilo largas es el **dipolo eléctrico radiante**, para el que se calculan los campos. Se demuestra que los campos tienen **términos de radiación**, que transportan potencia media y **términos de inducción**, que no lo hacen. Los campos de radiación constituyen una onda esférica elemental:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{i I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta} = -\frac{I_0 L k^2}{4\pi \epsilon_0 \omega r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta \hat{\theta}$$

$$\mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{i I_0 L k}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\phi} = -\frac{I_0 L k}{4\pi r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \frac{I_0^2 L^2 k^3 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 \omega r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\eta_0 I_0^2 \sin^2 \theta}{8r^2} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2 \hat{\mathbf{r}}$$

tal que el campo eléctrico y el campo magnético son perpendiculares entre sí y a la dirección radial de propagación y están relacionados entre sí por la impedancia intrínseca del vacío, como en el caso de las ondas planas. Los campos de radiación son los campos emitidos por las antenas, mientras que ambos tipos de campo intervienen en el análisis de la radiación de interferencia.

- Se obtienen los campos emitidos por el **dipolo eléctrico elemental**. A partir de ellos se determina el diagrama de radiación:  $f(\theta, \phi) = \sin^2 \theta$

y la potencia radiada es:  $\langle P \rangle = \frac{\pi \eta_0 I_0^2}{3} \left( \frac{L}{\lambda} \right)^2$

- Se hallan por el principio de dualidad los campos emitidos por un **dipolo magnético elemental**:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \frac{\eta_0 k^2 m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\phi} \quad \mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t) = -\frac{k^2 m}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\theta}$$

- Se expresa el campo emitido por un radiador fuera del origen de coordenadas aproximando la **amplitud a orden cero**, la **fase a orden uno** y considerando campos paralelos:

Si:  $F(\mathbf{r}) = f(\theta', \phi') \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R}$  con  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

resulta:  $F(\mathbf{r}) \approx f(\theta, \phi) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} e^{ik\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}}$

- Las antenas largas (de tamaño comparable a la longitud de onda de la radiación) se modelizan mediante la superposición coherente de los campos emitidos por radiadores elementales. Se analizan antenas largas resonantes:

$$E_\theta \approx \frac{i\eta_0 I_0}{2\pi r \sin \theta} e^{i(\omega t - kr)} \left[ \cos \left( \frac{kL}{2} \cos \theta \right) - \cos \frac{kL}{2} \right] \quad H_\phi \approx \frac{E_\theta}{\eta_0}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\eta_0 I_0^2}{8\pi} \begin{cases} \text{Cin}(2n\pi) & n \text{ impar} \\ [4\text{Cin}(n\pi) - \text{Cin}(2n\pi)] & n \text{ par} \end{cases}$$

*y de onda viajera:*

$$E_\theta \approx -\frac{\eta_0 I_0}{2\pi r} e^{i(\omega t - kr)} e^{ik\frac{L}{2}(\cos \theta - 1)} \frac{\sin\left[k \frac{L}{2}(1 - \cos \theta)\right] \sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta_0}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\eta_0 I_0^2}{4\pi} \left[ 1.1415 + \ln(2L/\lambda) - Ci(4\pi L/\lambda) + \frac{\sin(4\pi L/\lambda)}{4\pi L/\lambda} \right]$$

*en términos de las funciones coseno integral.*

- *Otra forma de modificar el diagrama de radiación de una antena es agrupar antenas. El caso más sencillo es aquél donde todos los radiadores son idénticos, con la misma intensidad y frecuencia de corriente de alimentación y la interferencia se logra por su ubicación espacial y/o desfasaje. Se analizan distribuciones lineales de radiadores, con corrientes desfasadas en forma uniforme ( $\psi_n = n\delta$ ) :*

$$E_\theta(\mathbf{r}, t) \approx \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} e^{i\frac{N}{2}[kd \sin \theta \cos \phi + \delta]} \frac{\sin\left[N\left(\frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{kd}{2} \sin \theta \cos \phi + \frac{\delta}{2}\right)}$$

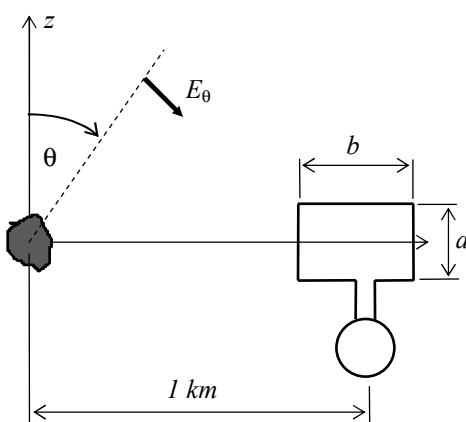
## PROBLEMAS

- 10.1) Una estación de radio emite isotrópicamente una potencia de  $P_0$  watts. Para un receptor ubicado a una distancia  $D$  que sintoniza a dicha estación, ¿Cuál es la intensidad de los campos eléctrico y magnético que recibe?
- 10.2) Considere un radiador que emite un campo lejano dado por  $E_\theta = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$  con  $A = 60 \text{ V}$  y  $f = 100 \text{ MHz}$ . a) Compruebe que la onda radiada tiene un frente de onda esférico. b) Calcule el  $\mathbf{H}$  de radiación. c) Verifique que el radiador es isotrópico y calcule la potencia media emitida.

[Rta: 60 W]

- 10.3) Para el radiador isotrópico del problema anterior: a) si a una distancia de 1 km se coloca una espira rectangular de lados  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = \lambda/2$ , tal que su plano contiene al campo eléctrico emitido tal como indica la figura. ¿Cuál es el valor eficaz de la fem inducida sobre la espira?

[Rta: 4.24 mV]



- 10.4) Dos radiadores isotrópicos idénticos al del problema 7.2) se encuentran ubicados en  $\bar{r}_1 = -(d/2)\hat{z}$  y  $\bar{r}_2 = (d/2)\hat{z}$ . a) Determinar los campos eléctricos emitidos por cada radiador y el campo radiado total. b) Calcular el valor medio del vector de Poynting de radiación para cada radiador y para el conjunto. c) Calcular la potencia media radiada por el sistema.

- 10.5) A 10 km de una antena dipolar elemental orientada verticalmente, y a su misma altura, se mide la densidad media de flujo de potencia radiada, que es de  $10^{-6} \text{ W/m}^2$ . Hallar las amplitudes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  radiados en ese punto, indicando sus direcciones y sentidos. Calcular la potencia media total irradiada por la antena.

[Rta: 27.46 mV/m, 72.84  $\mu\text{A}/\text{m}$ , 837.76 W]

- 10.6) Dos dipolos de longitud  $l$ , paralelos al eje  $z$ , están ubicados en  $\mathbf{r}_1 = (d/2)\hat{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{r}_2 = -(d/2)\hat{\mathbf{x}}$  respectivamente. Las corrientes excitadoras son de igual amplitud y frecuencia y están desfasadas en  $\pi/2$ . Para  $r \gg \lambda = d$ : a) calcular los campos radiados y el vector de Poynting medio de radiación. b) Dibujar el diagrama de radiación horizontal y vertical. c) Analizar la presencia de lóbulos y sus magnitudes relativas en los diagramas de radiación.

- 10.7) Repita el ejercicio anterior para dos dipolos ubicados en  $\mathbf{r}_{1,2} = \pm(d/2)\hat{\mathbf{z}}$ .

- 10.8) Un conjunto de tres dipolos cortos orientados según  $\mathbf{z}$  están alineados paralelos al eje  $\mathbf{x}$ . La separación entre ellos es  $d = \lambda/2$  y el desfasaje de la corriente entre dos elementos es  $\alpha = \pi$ . Determinar el diagrama de radiación para  $\theta = \pi/2$ .

- 10.9) Considere la misma situación del ejercicio anterior pero determine el diagrama de radiación en el plano  $zx$ .
- 10.10) Un conjunto de tres dipolos cortos se alinean paralelamente separados por una distancia  $d = 2\lambda/3$  y con un desfasaje  $\alpha = 2\pi/3$  entre las corrientes. Hallar el diagrama de radiación en el plano  $\theta = \pi/2$ .
- 10.11) Calcule la anchura del haz principal de un sistema lineal uniforme de cinco elementos con espaciado  $\lambda/2$  en los planos a) horizontal y b) vertical.
- [Rta: a)  $47.2^\circ$ , b)  $106.2^\circ$ ]
- 10.12) Cuatro radiadores de igual amplitud están espaciados en  $\lambda/2$ . a) Halle el ángulo de fase  $\alpha$  que se requiere para maximizar el campo en la dirección  $\theta = 90^\circ$ .

# 10 - Radiación Electromagnética (cont.)

## Introducción

En este Capítulo completamos el análisis introductorio a antenas analizando la radiación emitida por un agujero en un plano conductor sobre el que incide una onda electromagnética. Esta es la idea subyacente en las llamadas antenas de abertura de gran aplicación práctica.

Se presenta el método de Kirchhoff-Huygens para el cálculo del campo lejano emitido por una abertura en función del campo sobre la abertura.

Se introduce la noción de corrientes equivalentes, que se utiliza para lograr un esquema de cálculo general y optimizado en el análisis numérico de las estructuras radiantes.

Se introduce la fórmula de Friis para el cálculo de un enlace sencillo de comunicaciones. Se presentan diversos enlaces a sitios que analizan el problema de las radio-comunicaciones.

Se presenta una muy breve introducción a los problemas de compatibilidad electromagnética (EMC) que surgen de los fenómenos de interferencia. Se analizan las fuentes comunes de interferencia, la posibilidad de interferencia radiada o conducida y se dan varios ejemplos. Finalmente se mencionan brevemente algunas de las normas internacionales sobre el tema y se presentan varios enlaces con mayor información.

Se presenta una introducción a los efectos biológicos de los campos electromagnéticos, en particular sobre la salud humana. Se describen las distintas regiones del espectro electromagnético y se explica la diferencia entre la radiación ionizante y no ionizante.

Se presentan algunos organismos internacionales y organizaciones no gubernamentales que estudian los efectos de los campos electromagnéticos sobre la salud humana y sus planes de trabajo.

Se discuten brevemente los criterios metodológicos para el estudio científico y la evaluación del riesgo de agentes ambientales sobre la salud humana.

Se presenta un resumen de las pautas para limitar la exposición a campos electromagnéticos entre 30 Hz y 300 GHz elaboradas por la ICNIRP en 1998, y que son la base para la mayoría de las normas nacionales en vigencia.

Se comenta brevemente la declaración del IEE (Institution of Electrical Engineers - UK) de mayo de 2002 sobre la evaluación de trabajos científicos sobre el impacto de campos electromagnéticos de baja frecuencia sobre la salud humana publicados en los últimos dos años.

Se presenta información más detallada sobre posibles efectos, mecanismos de acoplamiento y estudios epidemiológicos en tres casos: campos estáticos, campos de frecuencia industrial y campos asociados a la telefonía celular, que se están estudiando con gran detenimiento en los últimos años.

## Antenas de abertura

Las antenas de abertura explotan la posibilidad de la radiación generada por agujeros o aberturas en superficies conductoras. Se usan antenas de este tipo en UHF y frecuencias mayores, y son el tipo preferido para obtener alta ganancia. Las características esenciales de las antenas de abertura es el aumento en ganancia con la frecuencia, en muchos casos en forma cuadrática, y que su impedancia de entrada es prácticamente real a toda frecuencia.

### Método de Kirchhoff-Huygens

El cálculo de los campos emitidos por una abertura radiante es complejo. Salvo en casos de geometría sencilla no existen soluciones analíticas y es necesario recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, desde el punto de vista conceptual la formulación es sencilla y se basa en el **principio de Huygens** que hemos descripto brevemente en relación al análisis introductorio de la difracción. Según este principio cada punto en el frente de onda de una onda que se propaga se puede considerar como un centro secundario de emisión de ondas esféricas. La superposición coherente de los campos emitidos por estos centros secundarios define el nuevo frente de onda. Este principio fue presentado por Christiaan Huygens en 1690 para explicar la difracción de la luz alrededor de un objeto.

El principio de Huygens puede demostrarse rigurosamente a partir de las ecuaciones de Maxwell y el teorema de Green de las funciones analíticas, como vemos a continuación.

Consideremos una función  $\psi(\mathbf{r})$  que es solución de la **ecuación escalar** de ondas de Helmholtz  $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$  en un recinto  $V$  cualquiera, que contiene al origen de coordenadas y cuya frontera es la superficie  $S$ . Sea  $\phi(\mathbf{r})$  otra función diferenciable dentro de  $V$ . Entonces dentro de  $V$  vale el llamado teorema de Green (APENDICE 1):

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS$$

donde las derivadas en el integrando del segundo miembro son las derivadas direccionales en la dirección normal a la superficie  $S$ :  $\partial \psi / \partial n = \nabla \psi \bullet \hat{\mathbf{n}}$

El teorema de Green es una consecuencia del teorema de la divergencia.

Introducimos la ecuación de Helmholtz en la expresión del teorema de Green y elegimos como  $\phi$  a la onda esférica elemental<sup>1</sup>  $\phi(\mathbf{r}) = e^{-ikr} / r$  con lo que tenemos:

$$\int_V \left( \nabla^2 \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) + k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \psi dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS$$

Pero:  $\nabla^2(fg) = \nabla \bullet \nabla(fg) = \nabla \bullet (f\nabla g + g\nabla f) = f\nabla^2g + 2\nabla f \bullet \nabla g + g\nabla^2f$  y entonces:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) &= \frac{1}{r} \nabla^2(e^{-ikr}) + 2\nabla(e^{-ikr}) \bullet \nabla \left( \frac{1}{r} \right) + e^{-ikr} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} e^{-ikr} \right) - 2(ik e^{-ikr} \hat{\mathbf{r}}) \bullet \left( -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) - 4\pi e^{-ikr} \delta(r) \\ &= e^{-ikr} \left[ -\left( \frac{2ik}{r^2} + \frac{k^2}{r} \right) + \frac{2ik}{r^2} - 4\pi \delta(r) \right] = -e^{-ikr} \left( \frac{k^2}{r} + 4\pi \delta(r) \right) \end{aligned}$$

donde se ha usado el laplaciano en esféricas y las propiedades de la delta de Dirac.

La integral de volumen resulta así:

$$\int_V \left( -e^{-ikr} \left( \frac{k^2}{r} + 4\pi \delta(r) \right) + k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \psi dV = -4\pi \int_V \psi e^{-ikr} \delta(r) dV = -4\pi \psi(0)$$

<sup>1</sup> Esta función es singular en el origen de coordenadas, de modo que en rigor se debe quitar del recinto de integración un entorno de  $\mathbf{r} = 0$  porque las funciones que aparecen en el teorema de Green deben ser analíticas dentro del recinto de integración.

porque el origen de coordenadas se halla dentro del recinto de integración.

Entonces:

$$\psi(0) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dS$$

donde  $S$  encierra al origen de coordenadas. Como la elección del sistema de coordenadas es totalmente arbitrario, podemos correrlo a otro punto cualquiera. Entonces:  $\psi(0) \rightarrow \psi(\mathbf{r}')$ ,  $r \rightarrow R$  con  $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS'' \quad \text{con } \mathbf{r} \text{ interior a la superficie } S.$$

Esto significa que la función  $\psi(\mathbf{r})$ , que satisface la ecuación de Helmholtz dentro de un recinto  $V$ , calculada en un punto cualquiera dentro del recinto, se puede obtener a partir de los valores de  $\psi$  y su derivada normal sobre la superficie  $S$  que encierra a  $V$ . Además se ve que los factores que multiplican a  $\psi$  y su derivada normal son funciones de onda esféricas elementales, y la integral representa una superposición. Entonces la ecuación obtenida, que se conoce como **integral de Kirchhoff**, es la expresión matemática del principio de Huygens.

Para obtener una integral de Kirchhoff para la **ecuación vectorial** de ondas observamos que en coordenadas cartesianas cada componente de los campos satisface la correspondiente ecuación escalar de Helmholtz y entonces es posible escribir:

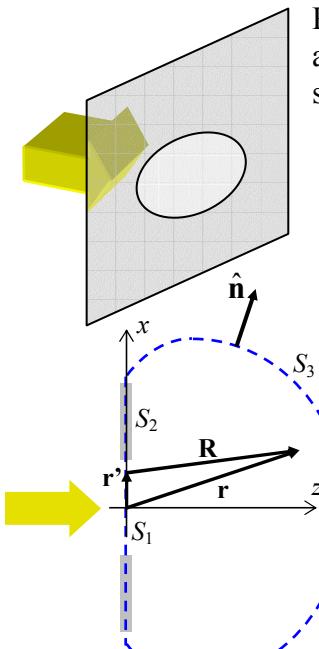
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \mathbf{E} - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) dS'$$

En este esquema es necesario conocer el campo y su derivada normal sobre la superficie del recinto para calcular los integrales, pero habitualmente estos valores no se conocen. Una de las formas de resolver esta situación es admitir una forma de campo sencilla sobre el contorno.

Por ejemplo, si se quiere calcular el campo creado por una antena de abertura en un plano conductor, se supone que una onda plana incide sobre el sistema, y sobre la superficie el campo es:

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{sobre el plano conductor}$$

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz)} \quad (\text{el campo de la onda plana original}) \\ \text{sobre la abertura.}$$



Sorprendentemente, esta elección un tanto arbitraria produce resultados que coinciden con las mediciones con poco error. Prácticamente todos los cálculos realizados en problemas de difracción y de radiación por aberturas se han realizado hasta hace pocos años usando estas hipótesis (o similares) en lo que se conoce como el **método de Kirchhoff**. Para aplicar el método de Kirchhoff-Huygens al cálculo de la radiación por una abertura, consideraremos una superficie formada por  $S_1$ , sobre la abertura,  $S_2$ , sobre el conductor, y  $S_3$  para completar la superficie cerrada. Tomamos  $S_3 \rightarrow \infty$ , de modo que el campo se anula sobre ella. El campo también se anula sobre el conductor, que tomamos como perfecto, de modo que la integral de superficie cerrada del principio de Huygens se reduce a la integral sobre la superficie de la abertura solamente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \mathbf{E} - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) dS' = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \mathbf{E} - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) dS'$$

Sobre la superficie de la abertura ( $z' = 0$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{z}}$ ) admitimos que existe un campo similar a una onda plana, pero introducimos una dependencia (en principio desconocida) respecto de las

coordenadas transversales:

$$\mathbf{E} = E_s(x', y') \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - kz')} = E_s(x', y') \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z'} = ik E_s(x', y') \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t}$$

y además:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \nabla' \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \left( \frac{\nabla' e^{-ikR}}{R} + e^{-ikR} \nabla' \frac{1}{R} \right) \bullet \hat{\mathbf{n}} = \left( -\frac{ik e^{-ikR}}{R} + \frac{e^{-ikR}}{R^2} \right) \hat{\mathbf{R}} \bullet \hat{\mathbf{z}} = \frac{e^{-ikR}}{R} \left( -ik + \frac{1}{R} \right) \cos \alpha$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{z}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \int_{S_1} \left( E_s(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} \left( -ik + \frac{1}{R} \right) \cos \alpha - ik \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \int_{S_1} \left( E_s(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} \left( -ik + \frac{1}{R} \right) \cos \alpha - ik \frac{e^{-ikR}}{R} \right) dS' \approx \frac{ik}{2\pi} \hat{\mathbf{x}} e^{i\omega t} \int_{S_1} E_s(x', y') \frac{e^{-ikR}}{R} (1 + \cos \alpha) dS' \end{aligned}$$

donde se ha despreciado el término que depende como  $1/R^2$  para el cálculo del campo lejano. También para puntos lejanos:  $kR \approx \mathbf{k} \bullet \mathbf{R} = \mathbf{k} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  con  $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{R}}$ , y podemos escribir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{i}{2\pi} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \int_{S_1} E_s(x', y') \frac{e^{i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'}}{R} (k + k \cos \alpha) dS' = \frac{i}{2\pi} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \int_{S_1} E_s(x', y') \frac{e^{i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'}}{R} (k + k_z) dS'$$

Finalmente, para puntos lejanos podemos aproximar a cero la amplitud en el integrando y suponer que el vector de onda es aproximadamente constante sobre la superficie de la abertura, con lo que nos queda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{i(k + k_z)}{2\pi r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \int_{S_1} E_s(x', y') e^{i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'} dS'$$

Esta expresión es extremadamente importante, porque relaciona el campo lejano y el campo en la abertura (o campo cercano)<sup>2</sup>:

**El campo lejano creado por la abertura radiante es la transformada de Fourier de la distribución de campo en la abertura.**

Desde el punto de vista de la óptica, la difracción para puntos lejanos, respecto del tamaño del obstáculo difractor, se conoce como **difracción de Fraunhofer**. Para puntos más cercanos o situaciones donde la distancia del obstáculo al punto de observación no es muy grande respecto del tamaño del obstáculo, estamos en la **difracción de Fresnel**, de descripción matemática más compleja<sup>3</sup>.

El cálculo que hemos hecho para la radiación de una abertura finita es entonces un caso de difracción de Fraunhofer.

**Ejemplo 10.9:** Analizar la radiación lejana de una abertura rectangular de lados  $a$  y  $b$  usando el método de Kirchhoff-Huygens

En la hipótesis del método de Kirchhoff-Huygens, sobre la superficie de la abertura el campo es el de la onda plana incidente. Entonces suponemos el campo constante sobre la abertura:  $E_s(x', y') = E_0$ . La expresión del campo lejano es así:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{i(k + k_z) E_0}{2\pi r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \int_{S_1} e^{i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'} dS' = \frac{i(k + k_z) E_0}{2\pi r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{i(k_x x' + k_y y')} \\ &= \frac{i(k + k_z) E_0}{2\pi r} \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r})} \frac{2}{k_x} \operatorname{sen}\left(\frac{k_x a}{2}\right) \frac{2}{k_y} \operatorname{sen}\left(\frac{k_y b}{2}\right) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Nótese que, aunque la integral se extiende al área de la abertura, se puede pensar en una integral sobre todo el plano  $xy$  con una antitransformada de Fourier  $E_s(x, y)$  de banda limitada.

<sup>3</sup> La difracción por un borde, que vimos en el Capítulo 6, es siempre una difracción de Fresnel, porque el obstáculo es un plano semi-infinito.

$$\text{y finalmente: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{i2(k+k_z)E_0}{\pi k_x k_y r} \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) \sin\left(\frac{k_y b}{2}\right) \hat{\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

Asociado a este campo eléctrico de radiación habrá una campo magnético a lo largo del eje  $\hat{\mathbf{y}}$  ligado a través de la impedancia intrínseca. Para calcular el diagrama de radiación

partimos de:

$$r^2 \langle N \rangle = r^2 \frac{\langle E^2 \rangle}{2\eta_0} \approx \frac{(k+k_z)^2 S^2 |E_0|^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{k_y b}{2}\right)}{\left(\frac{k_y b}{2}\right)^2}$$

En esta ecuación:  $k_x = k \sin\theta \cos\phi$      $k_y = k \sin\theta \sin\phi$      $k_z = k \cos\theta$     y     $S = ab$  es el área de la abertura. Obsérvese en la figura cómo se definen los ángulos.

Sobre un plano vertical  $xz(\phi = 0)$  tenemos  $k_y = 0$  y:

$$r^2 \langle N \rangle \approx \frac{k^2 (1 + \cos\theta)^2 S^2 |E_0|^2}{4\pi^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)^2}$$

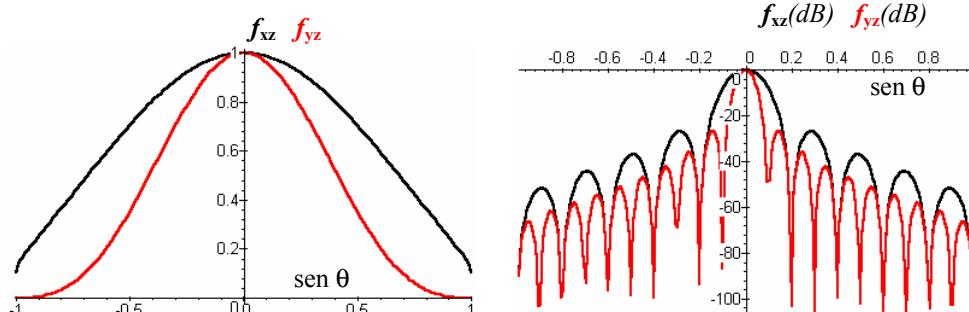
El valor máximo de esta expresión se da para  $\theta = 0$ :

$$r^2 \langle N \rangle \Big|_{max} \approx \frac{k^2 S^2 |E_0|^2}{\pi^2} \text{ y el diagrama de radiación es:}$$

$$f_{xz}(\theta) \approx \frac{(1 + \cos\theta)^2}{4} \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right) \Big/ \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)^2$$

Sobre un plano horizontal  $yz(\phi = \pi/2)$  tenemos  $k_x = 0$  y procediendo de igual manera:

$$f_{yz}(\theta) \approx \frac{(1 + \cos\theta)^2}{4} \sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right) \Big/ \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)^2$$



En las figuras se muestran diagramas de radiación para ambos planos de corte. La figura de la izquierda es para  $a = \lambda/2$ ,  $b = \lambda$  y la figura de la derecha, que se ha graficado en escala logarítmica (en dB  $- 20 \log_{10}(f)$ ) para que se noten los lóbulos secundarios, es para  $a = 5\lambda$ ,  $b = 10\lambda$ .

## Corrientes equivalentes

Hemos visto antenas que consisten en hilos de corriente. Es posible expresar la radiación de una abertura mediante una distribución de **corrientes equivalentes**, lo que permite usar los métodos numéricos desarrollados para antenas de hilos de corriente, fundamentalmente el método de momentos, para analizar antenas de abertura.

Las ecuaciones de Maxwell del rotor pueden escribirse:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{donde} \quad \mathbf{J} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad \text{es una densidad de corriente eléctrica, y:}$$

$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M}$  donde  $\mathbf{M} = \partial \mathbf{B} / \partial t$  es una densidad de corriente magnética, que equipara conceptualmente la ley de Faraday a la de Maxwell-Ampere.

¿Cuál es la ventaja de definir estas corrientes equivalentes? Para puntos donde  $\mathbf{J}=0$ , podemos

escribir:  $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$  con  $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{R} dV'$

Análogamente, para puntos donde  $\mathbf{M} = 0$ , podemos escribir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r},t) \quad \text{con} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}',t')}{R} dV'$$

Obsérvese que estas son soluciones formales de las ecuaciones inhomogéneas, pero permiten desarrollar métodos numéricos únicos para tratar con el campo eléctrico y el magnético de igual manera.

Un esquema general de cálculo puede ser el siguiente:

Si hay corrientes eléctricas equivalentes:

- 1) Considerar soluciones armónicas:  $\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t')}{R} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{i(\omega t - kR)}}{R} dV' = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-ikR}}{R} dV'$$

- 2) Aproximar a **orden cero en amplitud** y a **orden uno en la fase**:  $kR \approx kr - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-ikR}}{R} dV' \approx \frac{\mu_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \int_V \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'} dV'$$

- 3) Calcular el campo eléctrico de radiación a partir de la componente transversal del potencial vectorial  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = i\omega \mathbf{A}_T(\mathbf{r},t)$

- 4) Calcular el campo magnético a partir de la relación con  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t) = \mathbf{r} \times \mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) / \eta_0$$

Si hay corrientes magnéticas equivalentes:

- 1) Considerar soluciones armónicas:  $\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \mathbf{M}_s(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}',t')}{R} dV' = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') e^{i(\omega t - kR)}}{R} dV' = \frac{\epsilon_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') e^{-ikR}}{R} dV'$$

- 2) Aproximar a orden cero en amplitud y a orden uno en la fase:  $kR \approx kr - \mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \frac{\epsilon_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}_s(\mathbf{r}') e^{-ikR}}{R} dV' \approx \frac{\epsilon_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \int_V \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \bullet \mathbf{r}'} dV'$$

- 3) Calcular el campo magnético de radiación a partir de la componente transversal del potencial vectorial  $\mathbf{F}$ <sup>4</sup>:  $\mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t) = i\omega \mathbf{F}_T(\mathbf{r},t)$

- 4) Calcular el campo eléctrico a partir de la relación con  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = -\eta_0 \mathbf{r} \times \mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t)$$

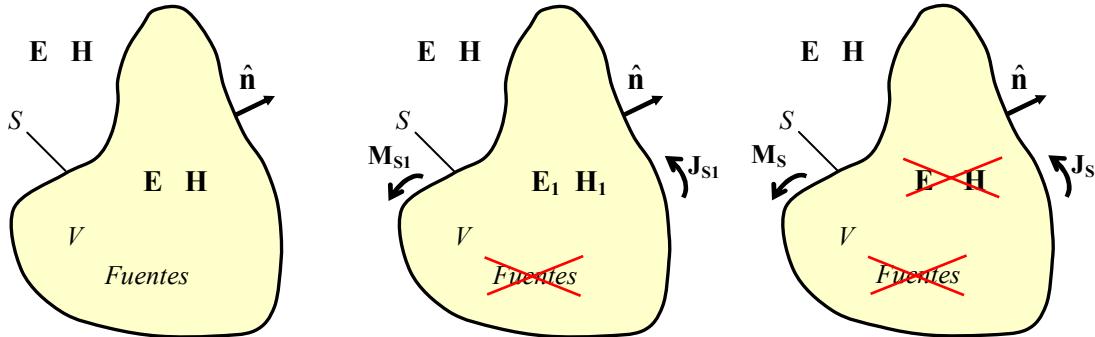
---

<sup>4</sup> Estas ecuaciones surgen por dualidad respecto al comportamiento del campo eléctrico.

Si hay ambos tipos de corriente se superponen los campos correspondientes.

El uso de corrientes equivalentes en los problemas de radiación surge del llamado **principio de equivalencia**, que se ilustra en los siguientes gráficos.

En el gráfico de la izquierda se muestra el problema original: un conjunto de fuentes dentro de un recinto de volumen  $V$  y superficie frontera  $S$  crean campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio. El problema, como siempre, es calcular los campos fuera del recinto  $V$ . En este caso los campos se calculan a partir de las fuentes, como en el caso de las antenas lineales que hemos visto.



En el gráfico del centro tenemos un sistema equivalente. Se eliminan las fuentes internas a  $V$ , lo que modifica los campos internos y para satisfacer las condiciones de contorno de los campos sobre la superficie del recinto, se introducen hipotéticas corrientes equivalentes tales que:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{S1} &= \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) && \text{sobre } S \\ \mathbf{M}_{S1} &= -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} - \mathbf{E}_1) && \text{sobre } S\end{aligned}$$

La corriente  $\mathbf{J}_{S1}$  es una corriente superficial eléctrica, mientras que  $\mathbf{M}_{S1}$  es una **corriente superficial magnética**, un ente hipotético que sólo sirve para ajustar las condiciones de borde sin un significado físico real.

Dado que estas corrientes son inventadas, podemos elegirlas, **al único fin de calcular los campos fuera de  $V$** , de manera de anular los campos internos, y entonces estamos en el problema equivalente de la derecha, donde se cumple que:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_S &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_S && \text{sobre } S \\ \mathbf{M}_S &= -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_S && \text{sobre } S\end{aligned}$$

Dado que los campos se anulan dentro de  $V$ , podemos introducir cualquier tipo de material. En particular, si asumimos que  $S$  es un **conductor eléctrico perfecto** ( $\sigma \rightarrow \infty$ ),  $\mathbf{J}_S$  se anulará, y se deberá modificar la corriente magnética  $\mathbf{M}_S$  para que genere por sí sola los campos externos. Si, por otra parte, asumimos que  $S$  es un **conductor magnético perfecto** ( $\mu \rightarrow \infty$ ),  $\mathbf{M}_S$  se anulará, y se deberá modificar la corriente eléctrica  $\mathbf{J}_S$  para que genere por sí sola los campos externos.

Se plantean entonces dos modelos equivalentes más que pueden usarse, aunque son generalmente de más difícil solución que el problema mezclado, dado que si  $S$  contiene partes de conductores verdaderos, sobre esas partes existe sólo  $\mathbf{J}_S$  (que coinciden con las corrientes verdaderas), mientras que en aberturas existirán ambas  $\mathbf{J}_S$  y  $\mathbf{M}_S$  simultáneamente.

Existe también la posibilidad de definir superficies de conductor eléctrico o magnético perfecto dentro del recinto donde no se requiere obtener los campos, lo que lleva a simplificar el cálculo introduciendo corrientes equivalentes imagen. Esto conduce a tener solamente corrientes eléctricas equivalentes o corrientes magnéticas equivalentes. Por otra parte, si suponemos que existen corrientes de ambos tipos sobre la abertura, de las ecuaciones del rotor, sobre la abertura:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}_S = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_a \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{M}_S = \mathbf{E}_a \times \hat{\mathbf{n}}$$

donde  $\mathbf{E}_a$  y  $\mathbf{H}_a$  son los campos en la superficie de la abertura. Entonces, las ecuaciones de cálculo de los campos de radiación son:

$$\mathbf{E}_{rad_1}(\mathbf{r},t) \approx \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dS' = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \mathbf{H}_a(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dS'$$

$$\mathbf{H}_{rad_1}(\mathbf{r},t) \approx \frac{i\omega\epsilon_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \int_S \mathbf{M}_s(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dS' = -\frac{i\omega\epsilon_0}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{n}} \times \int_S \mathbf{E}_a(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dS'$$

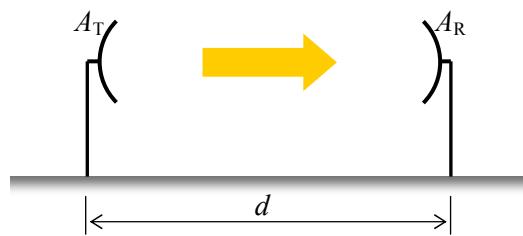
Los campos totales de radiación resultan así:

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{rad_1}(\mathbf{r},t) - \eta_0 \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{rad_1}(\mathbf{r},t) \quad \mathbf{H}_{rad}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_{rad_1}(\mathbf{r},t) + \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{rad_1}(\mathbf{r},t) / \eta_0$$

Las integrales se extienden a la superficie de la abertura, y de nuevo observamos que el campo de radiación lejano es la transformada de Fourier del campo sobre la superficie de la ranura (difracción de Fraunhofer). Estas ecuaciones ligan el tratamiento que usa las corrientes equivalentes con el tratamiento de Huygens-Kirchhoff.

## Radio propagación

En comunicaciones inalámbricas el problema básico es definir las pérdidas del **enlace** entre una estación transmisora y una estación receptora. Otros problemas se derivan de estos cálculos. El caso más simple es la propagación directa en el vacío entre una antena emisora de po-



tencia radiada  $P_T$  y abertura efectiva  $A_T$ . La antena receptora tiene a su vez una abertura efectiva  $A_R$ . La densidad de potencia por unidad de área (vector medio de Poynting) es:

$$\langle N \rangle = \frac{P_T}{4\pi r^2} D = \frac{P_T}{4\pi r^2} \frac{4\pi}{\lambda^2} A_T = \frac{P_T A_T}{\lambda^2 r^2}$$

La potencia que recibe la antena receptora es:

$$P_R = \langle N \rangle A_R = \frac{P_T A_T A_R}{\lambda^2 d^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_R}{P_T} = \frac{A_T A_R}{\lambda^2 d^2} \quad \text{que es la } \mathbf{fórmula de Friis}.$$

La fórmula de Friis describe la transmisión de potencia entre una estación transmisora y una receptora en un enlace directo (enlace **LOS** – Line Of Sight link). Se observa que la relación de potencias es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de onda de la radiación (o directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia), lo que surge de la dependencia de la abertura de antena con la longitud de onda. También esta relación de potencias es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre estaciones del enlace.

Para antenas isotrópicas  $A_e = \lambda^2 / 4\pi \Rightarrow \frac{P_R}{P_T} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 d^2} = \frac{c^2}{16\pi^2 f^2 d^2}$

La fórmula de Friis también se puede escribir en dB:

$$-20 \log\left(\frac{P_R}{P_T}\right) = -20 \log\left(\frac{c^2}{16\pi^2}\right) + 40 \log(f) + 40 \log(d) \approx -295.116 + 40 \log(fd)$$

con  $f$  en Hz y  $d$  en m.

La fórmula de Friis describe la situación ideal de propagación directa en el vacío. Sin embargo, la propagación por un medio (p.ej., el aire) produce pérdidas de absorción que dependen de la frecuencia, y refracción de la radiación debido a que el índice de refracción varía ligeramente con la altura por la variación de densidad del aire con la altura.

Además, existen fenómenos de interferencia que se dan por la reflexión de las ondas en el suelo, que, en primera aproximación, puede considerarse de alta conductividad. Hay interferencia por reflexión en edificios, construcciones o accidentes naturales. Estas interferencias dan lugar al fenómeno de **desvanecimiento** (fading). La reflexión (oblicua) de las ondas en el suelo cau-

sa interferencia con el haz directo de LOS y modifica la polarización del haz reflejado, lo que puede generar dificultades para sistemas (como el radar) donde la información de polarización es importante. También hay absorción en edificios, follaje, y para frecuencias de microondas, en el vapor de agua, lluvia o nieve presente en la atmósfera.

Otros efectos de modificación de la simple fórmula de Friis surgen de la difracción en obstáculos cercanos a la LOS. De acuerdo a la distancia del obstáculo a la antena receptora se debe analizar la difracción de Fresnel (habitual para la mayoría de los enlaces comunes) o la difracción de Fraunhofer (en los casos de comunicaciones intercontinentales con rebotes inonosféricos). En muchos casos es posible aproximar los efectos de la difracción de Fresnel con la difracción por un borde que vimos en el Capítulo 6.

Los radioaficionados y los equipos técnicos de las emisoras comerciales deben manejar instante a instante la información atmosférica y climática para mantener los enlaces activos. Esto se hace normalmente en forma semi-automática a partir de programas computacionales que reciben los datos de organismos estatales o internacionales y modifican las características del enlace de acuerdo a esas variaciones.

Siguen algunos enlaces a direcciones de la Web con información sobre radio propagación:

- <http://www.rnw.nl/realradio/links/html/propagation.html> - Radio Netherlands Wereldomroep. Enlaces a sitios vinculados con propagación.
- <http://www.keele.ac.uk/depts/por/psc.htm> - Propagation Studies Committee of the Radio Society of Great Britain - Tutoriales, enlaces, e información general.
- <http://www.sel.noaa.gov/radio> - Space Environment Center's Radio User's Page. Del Servicio NOAA (National Oceanic & Atmospheric Administration) de EEUU.
- <http://dx.qsl.net/propagation> - Indices de actividad solar, flujo de rayos X, actividad auroral, etc.
- <http://www.ips.gov.au> - IPS. Servicio australiano de radio propagación y medio ambiente espacial. Datos y tutoriales.
- <http://www.tapr.org/tapr/html/ve3jf.dcc97/ve3jf.dcc97.html> - VHF/UHF/Microwave Radio Propagation: A primer for digital experimenters. Una introducción a los problemas mencionados en esta sección.
- <http://www.scnt01426.pwp.blueyonder.co.uk/Articles/Propagation/Propagation.htm> - Otra serie de páginas con información introductoria a la radio propagación.

## Compatibilidad electromagnética

La diversidad de instalaciones que usan campos y señales electromagnéticas en nuestra sociedad ha causado la necesidad de investigar las posibles interacciones de estos campos para asegurar que los dispositivos funcionen según su diseño, lo que lleva a la incorporación de medidas que disminuyan las radiaciones y efectos no deseados creados por dispositivos e instalaciones que hacen uso de campos electromagnéticos y el uso de medidas de protección de dispositivos frente a la acción de campos foráneos.

El campo de la Compatibilidad Electromagnética (**EMC**) ha surgido como el área de la ingeniería eléctrica de crecimiento más explosivo en los últimos años, fundamentalmente ligado al crecimiento de las comunicaciones y la computación.

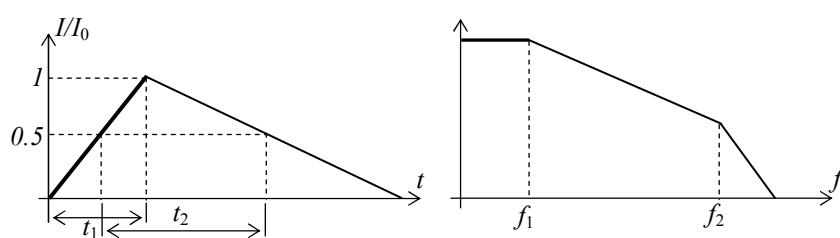
El concepto central en estos estudios es el de **interferencia**, que aquí puede definirse como todo agente electromagnético que cause el mal funcionamiento de un dispositivo, equipo o instalación. Un dispositivo, equipo o instalación que, colocado en un medio ambiente donde existan campos electromagnéticos foráneos, es víctima de interferencia, tiene **susceptibilidad electromagnética**. Modificando el nivel de los campos en el medio ambiente se encontrará habitualmente que por debajo de un umbral cesa la interferencia. Esto permite definir el **nivel de susceptibilidad electromagnética** del dispositivo, equipo o instalación en cuestión. Recientemente hay una tendencia a cambiar el término de susceptibilidad por el de **inmunidad electromagnética**, que indica exactamente lo contrario: la habilidad de un dispositivo, equipo o instalación para soportar la acción de un ambiente electromagnéticamente activo. El nivel de inmunidad se define exactamente como en el caso previo.

La habilidad de dos dispositivos, equipos o instalaciones para trabajar conjuntamente en proximidad se conoce como **compatibilidad electromagnética**. Esto requiere que los campos creados por uno de los sistemas estén por debajo del nivel de inmunidad del otro.

### Fuentes de interferencia

Además de los artefactos de creación humana, hay fuentes naturales de interferencia, como:

- **ruido térmico**. Se produce por las fluctuaciones estadísticas del movimiento electrónico en los conductores debido a la temperatura. De acuerdo a la teoría cuántica, a cualquier temperatura por encima de  $0K$  los electrones de un conductor se hallan en movimiento al azar. Al circular una corriente, este movimiento aleatorio se superpone al movimiento ordenado producido por las fuentes de fem. Estas fluctuaciones, de muy baja intensidad, puede crear efectos de ruido en señales de baja intensidad y producir fallas de funcionamiento en circuitos muy sensibles. En particular, se puede definir una tensión eficaz de ruido térmico sobre una resistencia de valor  $R$ :  $V_N = \sqrt{4kT\Delta f R}$  donde  $\Delta f$  es el ancho de banda de interés (el ruido térmico es “blanco”, es decir, de igual intensidad en todo el espectro de frecuencias),  $k = 1.38 \times 10^{-23} J/K$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta en Kelvins. Para dar una idea de la importancia relativa del ruido térmico, calculamos la tensión equivalente de ruido en una resistencia de  $10K\Omega$  a  $300K$  ( $\sim 27^\circ C$ ) en una banda de  $1 KHz$  de ancho:  $V_N \approx 0.4 \mu V$ .
- **rayos y campos atmosféricos**. Las tormentas eléctricas (deberían llamarse electromagnéticas) crean descargas por ruptura dieléctrica del aire ante los campos eléctricos producidos entre nubes y/o entre nubes y la tierra, dado que las nubes acumulan carga eléctrica estática. La corriente de un rayo típico es de 3 a 200



*KA*, el 80% de los casos medidos excede los 50 KA. En las figuras se esquematizan la forma de onda temporal y el espectro de frecuencias de un rayo. La forma de onda es cuasi-triangular, con un tiempo de subida de alrededor de  $t_1 \cong 500\text{ ns}$  y un tiempo entre medias de subida y caída de  $t_2 \cong 20\text{ }\mu\text{s}$ . A  $f_1 \cong 16\text{ KHz}$  se produce una caída del espectro a una pendiente de 20 db/década y a  $f_2 \cong 640\text{ KHz}$  se cambia a una pendiente de 40 db/década. Estos valores indican un rico contenido armónico y un gran potencial de interferencia.

Las tormentas y actividad electromagnética atmosférica inducen cambios en las partes altas de la atmósfera, donde existen regiones de partículas cargadas por la radiación solar y la radiación cósmica. Estas regiones (tropósfera e ionósfera) actúan como guías de onda para radiaciones de RF y generan también campos electromagnéticos propios que varían a lo largo del año y de acuerdo a la situación geográfica.

- **ruido cósmico.** Los fenómenos extraterrestres, como las manchas solares, generan radiación cósmica en forma de partículas de alta energía que interactúan con los átomos y moléculas de la alta atmósfera. La presencia del campo magnético terrestre ejerce fuerzas sobre estas partículas modificando su trayectoria y “enfocándolas” hacia los polos, donde las interacciones producen las llamadas auroras. La mayor parte de la radiación cósmica proviene de la actividad solar, aunque hay fuentes de partículas elementales extrasolares y aún extragalácticas, pero su intensidad es muy baja. La actividad solar presenta ciclos de aproximadamente 11 años, donde se produce un máximo en la actividad de las manchas solares y aumenta la producción de partículas de alta energía, causando interferencias apreciables en sistemas de comunicaciones satelitales y aviónicos. El año 2001 fue un año de máxima actividad solar.

Dentro de las interferencias producidas por la actividad humana, debe señalarse que todos los equipos que usan campos electromagnéticos producen algún tipo de interferencia, pero su importancia varía con muchos factores ligados a la susceptibilidad (o inmunidad) de los equipos posibles víctimas de esa interferencia, fundamentalmente dependientes de la frecuencia e intensidad de los campos de interferencia.

### Interferencia radiada o conducida

Suele clasificarse el origen de la interferencia como **radiada** o **conducida**. La interferencia radiada es la producida por los campos electromagnéticos (deseados o no) creado por el agente que interfiere. La interferencia conducida se produce por las señales eléctricas que viajan por conductores que conectan (a propósito o no) los dispositivos, equipos o instalaciones que se interfieren.

La **interferencia radiada** está asociada a campos creados por el agente que interfiere en su vecindad. Estos campos pueden ser, en nuestra nomenclatura, campos de inducción (cuasi-estáticos o cercanos) o verdaderos campos de radiación (que transporta potencia neta). Puede disminuirse la susceptibilidad de dispositivos, equipos o instalaciones a campos externos mediante técnicas de **apantallado** o **blindaje**. Estas técnicas son particularmente efectivas en el caso de los campos eléctricos, pero son poco eficaces para campos magnéticos de baja frecuencia, que podrían inducir corrientes y tensiones parásitas sobre el equipo susceptible.

La **interferencia conducida** se clasifica según el camino de las corrientes sean los **puertos de señal** o los **puertos de alimentación** de un circuito, y aún más de acuerdo si la interferencia es en **modo común** (entre los caminos de señal y tierra) o en **modo diferencial** (entre los propios caminos de señal). La interferencia conducida se puede disminuir utilizando distintos tipos de **filtros**, en el caso de la interferencia de modo común o mediante **acoplos optoelectrónicos** que son inmunes a interferencias electromagnéticas.

De particular importancia es la interferencia inducida en cables y conectores del equipo por campos externos, y que luego es conducida por los mismos cables y conectores al equipo. Esta situación requiere un adecuado diseño de los cables para aumentar su inmunidad frente a seña-

les espurias y del uso de los conectores indicados para la aplicación. Muchas causas de interferencia conducida se deben a líneas bus o de tierra mal diseñadas, soldaduras imperfectas, inadecuados contactos o conectores y diafonía (cross-talk) entre caminos de señal dentro del mismo circuito.

Un caso de mucha importancia es el diseño de **plaquetas de circuito impreso** (Printed Circuit Board - PCB) donde el aumento progresivo de las frecuencias de señal ha llevado a que la distribución geométrica de las líneas y los caminos de señal y la colocación de los componentes adheridos a la placa deban calcularse con mucho cuidado para evitar las interferencias conducidas, diafonía y emisión de radiación electromagnética que interfiera con otros circuitos. Técnicas de desacoplamiento entre distintas plaquetas y entre partes de la misma placa son imprescindibles. De acuerdo a los criterios generales de diseño se deben tener en cuenta las siguientes características:

- elección adecuada del formato de la PCB (mono-, bi- o multicapa) y del material soporte
- cuidado de que cada camino de señal tenga su retorno cercano
- desacoplamiento adecuado de cada CI o grupos de Cis.
- no superar las longitudes de camino ni las áreas de lazos máximas de acuerdo a las frecuencias involucradas
- colocación adecuada de los conectores
- elección adecuada del tipo de cable y/o conector
- uso y ubicación apropiados de filtros

Para el diseño se debe considerar que además de la resistividad de los caminos conductores, debe tenerse en cuenta su autoinductancia y la capacidad e inductancia mutua con caminos cercanos para conocer cómo se comportarán frente a la señal. Habitualmente las trazas sobre la placa deben considerarse más como líneas de transmisión (sistemas de parámetros distribuidos) que como conductores equipotenciales. Por otra parte, los caminos y los lazos generan radiación electromagnética que puede interferir otros equipos (y a otras partes de la misma placa). De acuerdo a las normas internacionales (FCC, IEC CISPR) la emisión de una PCB debe limitarse a  $100 \mu V/m$  a  $10 m$  de distancia y por encima de  $30 MHz$ . Parte de esta emisión puede estimarse a partir de todas las posibles fuentes del circuito que forman lazos. Estos lazos se modelizan como antenas dipolares magnéticas y a partir de este análisis se determinan las máximas corrientes que pueden circular a la/s frecuencia/s de trabajo para no superar el límite de las normas. Análogamente, cada traza de la PCB que no constituya lazo puede modelizarse como una antena dipolar eléctrica, cuya radiación debe sumarse a las de los lazos para calcular las máximas corrientes. El efecto de los conectores, entre plaquetas o entre partes de la misma es aumentar las interferencias de modo común, por lo que debe minimizarse la longitud de los conductores ligados a los conectores y usar el adecuado tipo de cable y conductor para minimizar la diafonía o interferencia por inducción. En algunos casos es necesario separar la zona de conectores de la zona de manejo de señales en la placa mediante planos o cintas de tierra que se conectan a la carcasa del equipo para proveer de un camino de retorno de las señales.

Un capítulo aparte es el tema del **blindaje** de los equipos. Los blindajes contra campos eléctricos realizados con materiales conductores son generalmente muy eficientes, aunque las juntas, aberturas de conexiones o de ventilación, las uniones y la deposición de suciedad o humedad disminuyen esta eficiencia. Hay actualmente mucho interés en el cálculo de la radiación electromagnética producida por equipos y que sale por juntas, agujeros y conectores, de manera que se han desarrollado métodos numéricos para esta simulación.

Otro aspecto de gran importancia es el diseño adecuado de las **instalaciones eléctricas** de alimentación de los equipos y el estudio del ambiente en que van a operar. Esto lleva a analizar las **tomas de tierra** (que supuestamente es común a todos los equipos interconectados), las interferencias que se producen dentro del edificio en que se hará la instalación (ascensores,

motores de bombeo, etc.) y habitualmente requiere el uso de filtros de línea o UPS para que no haya alteración del funcionamiento.

Existen capítulos dedicados a la **arquitectura** de sitios para minimizar los efectos de las interferencias y se garantice la EMC de los equipos a operar, el diseño de vehículos de transporte (los motores a explosión de ciclo naftero requieren una chispa eléctrica que genera mucha radiación e interferencias). En el caso de la **aviónica** el análisis de la ECM y la inmunidad a interferencia de los equipos de vuelo, control y comunicaciones es esencial. También es esencial el análisis de posibles interferencias en equipamiento de uso médico y el control de las emisiones, posiblemente dañinas a la salud, de muchos de estos equipos.

Otros aspectos se hallan en el uso de equipos que generan campos electromagnéticos en ambientes peligrosos como aquéllos donde existen instalaciones de gas, combustible, explosivos u otros donde puedan producirse explosiones, deflagraciones u otras reacciones químicas de potencial peligro.

Finalmente, los artefactos de iluminación (luminarias y equipos de control y comando) es otra área de interés en la medición y mitigación de las interferencias.

### **Normas**

Existen diversas normas nacionales e internacionales que regulan las emisiones y la inmunidad de los equipos que usan campos electromagnéticos. Estas regulaciones son de mucha importancia en Europa y EEUU, de modo que los equipos que allí se fabrican o que se pretende comercializar deben cumplir estas normas. No existe una única norma internacional, pero las normas de la FCC (Federal Communications Commission) en EEUU y las Directivas de la CEE (89/336, 72/245 y 75/322 y otras) parecen funcionar de hecho como normas a nivel mundial. Organizaciones internacionales como ISO e IEC se hallan desde hace años en proceso de compatibilización y búsqueda de acuerdos para lograr normas más abarcativas y genéricas, que además sean lo suficientemente flexibles para cubrir tecnologías que van apareciendo a una velocidad incompatible con el análisis de su impacto y posterior normatización. El caso típico es el de la telefonía celular, donde prácticamente hasta hace un par de años no existían normas de frecuencias, máxima emisión de radiaciones (salvo las genéricas de todos los equipos), ancho de banda, etc., compartidas, ya que, de hecho, eran las compañías las que imponían sus estándares de facto. Un caso similar ocurrió con las PC en la década anterior.

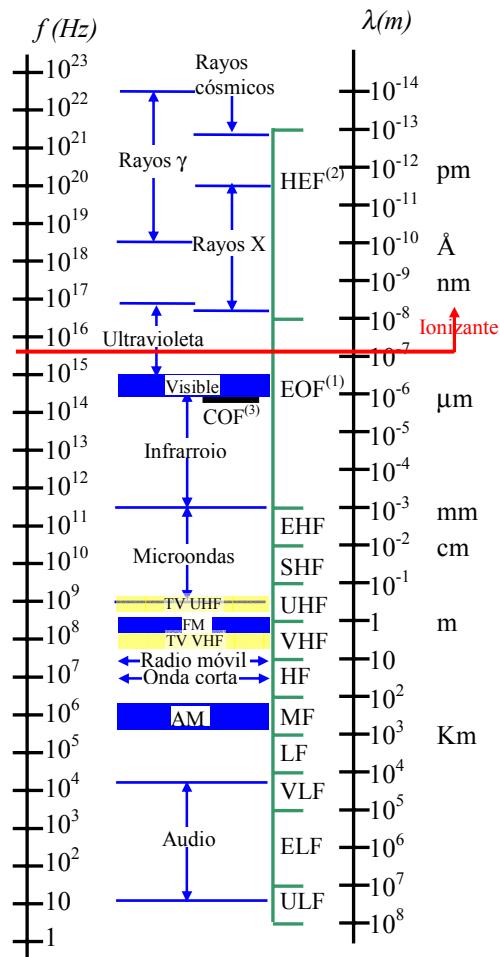
Desde el punto de vista de la seguridad en el uso de los artefactos eléctricos, está en vigencia la LVD (Low Voltage Directive) que, aunque no regula sobre cuestiones de EMC e interferencia, tiene que ver con la seguridad de los usuarios de los equipos eléctricos, electrodomésticos y otros.

Siguen algunos enlaces a direcciones de la Web con información sobre compatibilidad electromagnética:

- <http://www.emclab.umr.edu> - Laboratorio de Compatibilidad Electromagnética. Univ. de Missouri-Rolla. Programas de investigación y desarrollo, documentos, enlaces y herramientas.
- <http://www.esda.org/index.htm> - ESD Association. Organización dedicada a la difusión de normas y trabajo profesional sobre descarga electrostática.
- <http://www.fda.gov/cdrh/eme> - Center for Devices and Radiological Health, de la FDA (Food and Drug Administration) de los EEUU. Se encarga de analizar problemas de compatibilidad electromagnética de equipos médicos.
- [http://europa.eu.int/comm/enterprise/electr\\_equipment/emc/index.htm](http://europa.eu.int/comm/enterprise/electr_equipment/emc/index.htm) - La directiva europea 89/336/EEC.
- <http://www.dti.gov.uk/strd/strdpubs.htm> - Sitio del Department of Trade & Industry del Reino Unido. Se trata de un directorio de standards y regulaciones técnicas, entre ellas algunas referentes a EMC.
- <http://www.safetylink.com> - The Safety Link. Inmensa cantidad de enlaces a temas de seguridad y EMC.

## Efectos biológicos de los campos electromagnéticos

### El espectro electromagnético



- 1) EOF - Rango de frecuencia electroóptica
- 2) HEF - Rango de frecuencia de alta energía
- 3) COF - Comunicaciones por fibra óptica

### Clasificación de bandas de la ITU

Banda	Abreviatura	Rango de frecuencia
Frecuencia extra alta	EHF	30 - 300 GHz
Frecuencia super alta	SHF	3 - 30 GHz
Frecuencia ultra alta	UHF	300 - 3000 MHz
Frecuencia muy alta	VHF	30 - 300 MHz
Frecuencia alta	HF	3 - 30 MHz
Frecuencia media	MF	300 - 3000 kHz
Frecuencia baja	LF	30 - 300 kHz
Frecuencia muy baja	VLF	3 - 30 kHz
Frecuencia de voz	VF	300 - 3000 Hz
Frecuencia extremadamente baja	ELF	30 - 300 Hz

En la normativa internacional el espectro asociado a ondas sub-ópticas se extiende convencionalmente desde  $30\text{ Hz}$  a  $300\text{ GHz}$ . La International Telecommunications Union (ITU) ha dividido el espectro en bandas como se muestra en la tabla.

Nótese que las frecuencias por debajo de  $30\text{ Hz}$  no se consideran aptas para las comunicaciones, aunque hay muchos efectos naturales (p.ej., el campo magnético terrestre, campos electromagnéticos atmosféricos y subterráneos) y artificiales (p.ej., imanes permanentes, transporte) que producen campos estáticos o de frecuencias por debajo de este valor.

cuencias por debajo de este valor.

### Radiación ionizante y no ionizante

La naturaleza de la interacción entre campos electromagnéticos y el material biológico depende de la frecuencia de la emisión, así que los diferentes tipos de emisiones electromagnéticas deben ser evaluados de forma individual.

Los rayos X, luz ultravioleta, luz visible, campos eléctricos y magnéticos generados por los sistemas de energía eléctrica (campos de frecuencia industrial) y campos magnéticos estáticos son todas emisiones electromagnéticas diferentes, caracterizadas por su frecuencia o su longitud de onda.

La interacción del material biológico con una emisión electromagnética depende de la frecuencia de la emisión. A muy altas frecuencias, características del ultravioleta lejano y los rayos X, los fotones del campo tienen suficiente energía para romper los enlaces químicos. Esta ruptura de los enlaces es conocida como **ionización**, y a esa parte del espectro electromagnético se le denomina **radiación ionizante**. Los bien conocidos efectos biológicos de los rayos X están asociados con la ionización de las moléculas. A frecuencias más bajas, como las de la luz visible, radio y microondas, la energía de un fotón está muy por debajo de la que es necesaria para romper enlaces químicos. Esta parte del espectro se conoce como **radiación no ionizante**. Como la energía electromagnética no ionizante no puede romper los enlaces químicos, no existe analogía entre los efectos biológicos de la energía electromagnética ionizante y

no ionizante. La frontera entre ambos efectos se coloca convencionalmente en energías de  $10eV$  (la energía de enlace químico de muchas moléculas biológicas es de este orden). Como  $E = hf$  la frecuencia y longitud de onda en el vacío límites son del orden de:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1.602 \times 10^{-18}}{6.63 \times 10^{-34}} Hz \approx 2.42 \times 10^{15} Hz \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \approx 0.124 \mu m$$

Esta frontera convencional cae en el ultravioleta lejano.

Las emisiones de energía electromagnética no ionizante pueden producir efectos biológicos. Muchos de los efectos biológicos del ultravioleta cercano, luz visible e infrarrojos dependen también de la energía del fotón, pero están relacionados con la excitación electrónica más que con la ionización, y no se producen a frecuencias inferiores al infrarrojo (por debajo de  $3 \times 10^{11} Hz$ ). Las radiofrecuencias y microondas pueden causar efectos en los tejidos, por la producción de calor. La eficiencia con la que una emisión electromagnética puede inducir corrientes eléctricas, y por tanto generar calor, depende de la frecuencia de la emisión y del tamaño y la orientación del objeto que está siendo calentado. A frecuencias inferiores a las utilizadas por la radio en AM (alrededor de  $10^6 Hz$ ) las emisiones electromagnéticas se acoplan débilmente con los cuerpos humanos y de animales y, por lo tanto, son muy ineficientes para inducir corrientes eléctricas y generar calor.

De este modo, en términos de posibles efectos biológicos, el espectro electromagnético se puede dividir en dos regiones:

1. La **región ionizante**, donde puede haber un **daño químico directo (rayos X, ultravioleta lejano)**.
2. La **región no ionizante**, que puede subdividirse en:
  - a. La región de la **radiación óptica**, donde pueden darse fenómenos ligados a la excitación electrónica (**ultravioleta cercano, luz visible, infrarrojo**).
  - b. La región donde **la longitud de onda es más pequeña o de tamaño similar al del cuerpo**, en la que se puede producir calentamiento a través de corrientes inducidas (**microondas y ondas de radio de alta frecuencia**).
  - c. La región donde **la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño del cuerpo**, y el calentamiento por corrientes inducidas es muy bajo (**ondas de radio de baja frecuencia, campos de frecuencia industrial y estáticos**).

## Efectos sobre la salud humana

### Organizaciones internacionales

El problema de evaluar los posibles efectos nocivos de los campos electromagnéticos (**EMF** - en la jerga) sobre la salud humana es muy difícil por la complejidad del sujeto biológico y las interacciones y por las consecuencias sociales, económicas y éticas que un diagnóstico equivocado o tendencioso pudieran tener sobre la sociedad industrial moderna, fuertemente dependiente de dispositivos e instalaciones eléctricas para su funcionamiento.

Por este motivo se han establecido a nivel internacional y nacional una serie de organismos cuyo objetivo es realizar esta evaluación. La **Organización Mundial de la Salud** (World Health Organization - **WHO**) es uno de estos organismos internacionales que tiene un programa llamado International Electromagnetic Fields (EMF) Project, establecido en 1996. Este programa se halla actualmente (octubre 2001) revisando resultados de investigación y realizando evaluaciones de riesgo de exposiciones a campos eléctricos y magnéticos estáticos y de frecuencias ultrabajas (ELF). Se planea realizar una evaluación de todos los efectos sobre la salud de la exposición a campos ELF en el bienio 2002-2003.

Debido a que uno de los efectos de los EMF sobre la salud más estudiados es su relación con la aparición y/o proliferación de distintos tipos de enfermedades cancerosas, la **International**

**Agency for Research on Cancer** (IARC), organismo dependiente de WHO ha concluido en 2001 el primer paso en el proceso de evaluación de riesgo clasificando los campos ELF de acuerdo a la fuerza de la evidencia existente de sus posibles efectos cancerígenos en humanos.

En 1974, la **International Radiation Protection Association** (IRPA) estableció un grupo de estudio sobre los efectos sanitarios y protección contra radiación no ionizante. En 1992 este grupo se convirtió en la organización no gubernamental **International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection** (ICNIRP), que es reconocida por la WHO, la Organización Internacional del Trabajo (International Labour Organization - ILO) y la Unión Europea como el organismo experto de consulta en temas de radiaciones no ionizantes. En 1998 ICNIRP produjo un documento titulado "**Guidelines for Limiting Exposure to Time-Varying Electric, Magnetic, and Electromagnetic Fields (up to 300 Ghz)**"<sup>5</sup> que se ha convertido en el documento base para múltiples legislaciones sobre máximos valores de exposición a campos electromagnéticos. Analizamos brevemente este documento más abajo.

Estas tres organizaciones (WHO, IARC e ICNIRP) han generado acuerdos de trabajo conjunto y un calendario de revisión formal de la literatura sobre EMF:

2001	Identificación y evaluación carcinogenética de campos estáticos y ELF (IARC)
2002	Evaluación de riesgo sanitario de campos estáticos y ELF (WHO/ICNIRP)
2003	Identificación y evaluación carcinogenética de campos de RF (IARC)
2004	Evaluación de riesgo sanitario de campos de RF (WHO/ICNIRP)

Se espera que los reportes de esta evaluación se publiquen para el año 2005.

Además de estos organismos a nivel internacional, hay organismos nacionales que realizan estudios y evaluaciones de riesgo propias. Se pueden mencionar por el nivel de trabajo a los organismos estadounidenses. En EEUU se creó en 1992 el **Electric and Magnetic Fields Research and Public Information Dissemination Program** (EMF-RAPID Program) y el Congreso instruyó al **National Institute of Environmental Health Sciences** (NIEHS), National Institutes of Health y el Departamento de Energía a dirigir un programa de investigación y análisis con el objetivo de proveer evidencia científica para aclarar los potenciales riesgos sanitarios de la exposición a campos ELF. Este programa concluyó el 31 de diciembre de 1998 y las conclusiones se publicaron en mayo de 1999.

Más abajo presentamos las conclusiones del Reporte Final del NIEHS.

### Metodología de la investigación y evaluación de riesgos

Es enorme la cantidad de trabajos de investigación, reportes, informes, estudios y demás literatura que se publica anualmente sobre los efectos sanitarios de los EMF. La calidad y relevancia de estos trabajos también es muy variada. Aunque la variedad de temas y enfoques utilizadas es muy grande, podemos clasificar los estudios en las siguientes categorías:

- Estudios epidemiológicos.
- Estudios de laboratorio.
- Estudios sobre humanos.
- Estudios sobre animales.
- Estudios de los mecanismos biológicos.
- Revisiones y evaluación de la literatura existente.

---

<sup>5</sup> Publicado en **Health Physics**, Vol.74, No.4, pp. 494-522, Abril 1998. **ICNIRP1998.PDF**  
Juan C. Fernández - Departamento de Física – Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires – www.fi.uba.ar

### Estudios epidemiológicos

Este tipo de estudios es muy antiguo en la medicina. Trata de establecer correlaciones estadísticas entre una enfermedad y sus posibles factores causales. El problema fundamental es que habitualmente es imposible o muy difícil separar los efectos de las diversas (posibles) causas o **agentes** dado que ocurren simultáneamente y es también posible que lo importante sea la concurrencia de distintos agentes que, aisladamente, serían inocuos. Una vez establecida la relación estadística el problema consiste en descubrir si esta relación indica una relación causal. Para ello se requieren otros estudios no epidemiológicos. Podemos resumir en forma muy incompleta un estudio epidemiológico en la siguiente tabla:

Proceso	Ejemplo
1. Se reúne un grupo de personas que tienen una determinada enfermedad. Estos son los <b>casos</b> . Se reúne otro grupo similar (edad, sexo, etc.) que no tiene la enfermedad. Estos son los <b>controles</b> .	1. Supongamos un conjunto de 300 casos de la enfermedad y 300 controles. Se desea evaluar un potencial factor de riesgo X.
2. Se estima el número de casos y de controles que fueron expuestos al agente X. Habitualmente esta es la parte más complicada del estudio porque la exposición pudo haber ocurrido muchos años atrás.	2. Si 71 de los 300 casos fueron expuestos a X (229 no) la tasa de exposición de casos será $t_1 = 71/229 = 0.31$ . Si también 71 controles fueron expuestos, la tasa de exposición de control será $t_2 = 0.31$ .
3. El cociente entre estas dos cifras da el <b>riesgo relativo</b> . Si el riesgo relativo es del orden de 1 no hay asociación. Si el riesgo relativo es mayor que 1 hay una <b>asociación positiva</b> y X puede ser causa de la enfermedad. Si el riesgo relativo es menor que 1 hay una <b>asociación negativa</b> y X puede proteger de la enfermedad.	3. En este caso $t_1/t_2 = 1$ . Este valor indica que no hay asociación entre X y la enfermedad. Si el riesgo es mayor que 1, eso indica que X ha incidido más sobre los casos que sobre los controles.

Se debe analizar también el **significado estadístico** del estudio, que está relacionada con el porcentaje de casos y controles expuestos respecto del total. Si los cálculos involucran un gran número de sujetos, el estudio es significativo y merece que se evalúe con más pruebas la incidencia de X sobre la enfermedad. Si el número de expuestos es bajo, el riesgo relativo no es significativo y puede indicar una mera coincidencia.

### Criterios de Hill

Para determinar si un agente ambiental, por ejemplo, un campo electromagnético, produce o contribuye al desarrollo de una enfermedad, hay ciertos criterios ampliamente aceptados a menudo denominados **criterios de Hill**, que se emplean para evaluar los estudios epidemiológicos y de laboratorio sobre posibles agentes. Bajo estos criterios se examina la fuerza, consistencia y especificidad de la asociación entre exposición e incidencia de la enfermedad, la evidencia de una relación dosis-respuesta, evidencia de laboratorio, la plausibilidad biológica de una asociación y la coherencia de la asociación propuesta con lo que se conoce sobre el agente y sobre la enfermedad.

1. **Fuerza de la asociación**: si existe un claro incremento de la incidencia de la enfermedad asociado con la exposición. Una asociación fuerte es aquélla con un riesgo relativo de 5 o superior. Fumar tabaco, por ejemplo, tiene un riesgo relativo de cáncer de pulmón 10 - 30 veces superior que no fumar.
2. **Consistencia**: si la mayoría de los estudios muestran el mismo incremento de la incidencia del mismo tipo de enfermedad. Utilizando el ejemplo del fumador, básicamente todos los estudios sobre fumar y cáncer han mostrado un incremento de la incidencia del cáncer de pulmón y de cabeza y cuello.

3. **Relación dosis-respuesta:** si aumenta la incidencia de la enfermedad cuando aumenta la exposición. De nuevo, cuanto más fuma una persona mayor es el incremento de la incidencia de cáncer de pulmón.
4. **Evidencia de laboratorio:** si existe evidencia experimental que sugiera que la enfermedad está asociado con la exposición. Las asociaciones epidemiológicas se refuerzan cuando hay evidencia de laboratorio que apoye tal asociación.
5. **Mecanismos biológicos plausibles:** si hay algún dato biológico o mecanismos biofísicos que sugieran que debe existir una asociación entre el agente y la enfermedad. Cuando se entiende cómo algo causa una enfermedad es mucho más fácil interpretar la epidemiología ambigua. En el caso de fumar, mientras que las pruebas directas de laboratorio relacionando fumar y cáncer eran débiles en el momento en el que se publicaba el informe del Cirujano General (Surgeon General), la asociación era altamente plausible porque había conocidos agentes causantes de cáncer en el humo del tabaco.
6. **Coherencia:** si la asociación entre exposición a un agente y la enfermedad es consistente con lo que se sabe sobre la biofísica del agente y la biología de la enfermedad.

Estos criterios deben aplicarse con precaución:

- Es necesario analizar toda la literatura publicada al respecto; no es aceptable elegir sólo aquellos informes que concluyen la existencia (o la inexistencia) de un riesgo para la salud.
- Es necesario revisar directamente los documentos originales importantes; no es aceptable basar los juicios únicamente en revisiones académicas o legislativas.
- Cumplir un criterio individual no es una cuestión de un sí o un no; el respaldo para un criterio puede ser fuerte, moderado, débil o inexistente.
- Los criterios deben contemplarse como un conjunto; ningún criterio individual es ni necesario ni suficiente para concluir que existe una relación causal entre exposición a un agente y una enfermedad.

### Estudios de laboratorio

Limitaciones importantes de los estudios epidemiológicos son que no es posible separar la acción del agente bajo investigación de otros potenciales agentes, que los sujetos puede manifestar predisposiciones o debilidades naturales desconocidas, que las circunstancias de la exposición (ambientales, meteorológicas, psicológicas, etc.) pueden ser desconocidas por haber ocurrido en el pasado, etc. Por este motivo los estudios de laboratorio, donde se trabaja en un ambiente controlado y a menudo simplificado, pueden dar información más concluyente sobre la asociación de posibles agentes y enfermedades.

En laboratorio se puede colocar un tejido u órgano bajo la influencia de campos de valor, frecuencia y variación en el tiempo controlados y repetir el experimento muchas veces para hallar comportamientos repetitivos.

En relación con campos electromagnéticos, una de las asociaciones posibles más estudiada ha sido (y es) la asociación con diversos tipos de cáncer. En este contexto es importante señalar las diferencias entre agentes genotóxicos y epigenéticos.

Por ejemplo, los **carcinógenos**, agentes que producen cáncer, pueden ser genotóxicos o epigenéticos (en la terminología antigua eran iniciadores y promotores). Los agentes **genotóxicos** (genotoxinas) pueden dañar directamente el material genético de las células. Las genotoxinas a menudo afectan a muchos tipos de células, y pueden provocar más de un tipo de cáncer. Las genotoxinas generalmente no tienen un valor umbral para sus efectos; así que al disminuir la dosis de la genotoxina se reduce el riesgo, pero puede que nunca desaparezca. Por lo tanto, la evidencia de genotoxicidad a cualquier intensidad de campo sería relevante para evaluar su potencial carcinogénico.

Por otra parte, un agente **epigenético** es algo que incrementa la probabilidad de que una genotoxina dañe el material genético de las células o de que provoque cáncer. Los **promotores** son un tipo particular de agente epigenético que incrementa el riesgo de cáncer en animales ya expuestos a un carcinógeno genotóxico. Los agentes epigenéticos (incluyendo promotores) pueden afectar sólo a ciertos tipos de cáncer. Los agentes epigenéticos generalmente tienen valores umbral para producir efectos; así que al disminuir la dosis de un agente epigenético se alcanza un nivel en el que no hay riesgo. Por lo tanto, la evidencia de actividad epigenética a intensidades de campo muy por encima de las que se encuentran en ambientes residenciales y laborales no sería claramente relevante para evaluar su potencial carcinogénico.

Los estudios de laboratorio no dan necesariamente información de los efectos de determinado posible agente sobre la salud, sino que permiten inferir los mecanismos de interacción entre el agente y el sujeto biológico, los que a su vez permiten evaluar el potencial riesgo que involucra el agente.

### **Estudios sobre humanos y animales**

Los estudios sobre humanos y animales permiten analizar efectos que no surgen de los estudios epidemiológicos ni de laboratorio. En el caso de los humanos están limitados por la necesidad de evitar daños al sujeto. Un caso típico fueron los estudios de influencia de los campos electromagnéticos sobre la melatonina, que describimos más abajo. Los estudios sobre animales pueden ser más agresivos pero su utilidad está limitada por las diferencias biológicas entre especies. Nuevamente, se realizaron muchos estudios sobre ratas para analizar el efecto sobre la melatonina y efectos hormonales.

Como en los estudios de laboratorio, estos estudios permiten inferir mecanismos de interacción entre el agente y el sujeto.

### **Estudios de los mecanismos biológicos**

En última instancia, si se conociera en detalle la forma de interacción del agente con el sujeto biológico, sería posible determinar con gran seguridad si el agente es dañino o no. Pero la elucidación de estos mecanismos biológicos está lejos de ser completa. Por ello, los estudios básicos en biología y en las interacciones son de fundamental importancia en la evaluación de riesgo, la prevención y, eventualmente, la terapia.

Además de los posibles efectos carcinógenos de los campos, es sabido que las radiaciones, en general, producen efectos ionizantes (que pueden ser carcinógenos) y efectos no ionizantes. En la gran mayoría de las situaciones prácticas los EMF son de frecuencias dentro del rango de las radiaciones no ionizantes. Sin embargo, como se observa fácilmente en un horno a microondas, pueden producir otros efectos notablemente dañinos, que deben evaluarse.

En general, estos efectos se pueden dividir en **efectos térmicos** y **efectos no térmicos**. Como señalamos en la introducción, a frecuencias de RF y microondas (el extremo alto del espectro electromagnético industrial) se producen corrientes inducidas (corrientes de Foucault) que pueden producir daño por calentamiento, alterando los procesos bioquímicos fundamentales de las células. En el caso extremo, este calentamiento puede matar células. Si mueren suficientes células se pueden producir quemaduras y, posiblemente, otros daños permanentes en los tejidos. Las células que no mueren por el calor vuelven gradualmente a su estado normal cuando cesa el calentamiento; no se conocen daños no letales permanentes en las células. En un animal, pueden esperarse alteraciones en los tejidos y otros efectos inducidos térmicamente cuando la cantidad de energía absorbida es similar, o excede, a la cantidad de calor generada por los procesos corporales normales. Algunos de estos efectos térmicos son muy sutiles y se estima que no representan riesgos biológicos. Otros se utilizan normalmente en terapias, especialmente en síndromes traumatólogicos o reumáticos, dado que se ha comprobado que un

leve calentamiento acelera los mecanismos naturales de reparación de fracturas y fisuras óseas y de accidentes musculares o tendinosos.

La presencia de EMF debería alterar otros procesos biológicos que se basan en el **intercambio de iones**, que es un mecanismo fundamental de la biología celular, producido a través de la membrana, y que es responsable de la mayoría de las actividades colectivas del cuerpo. A pesar de la gran cantidad de estudios sobre estos posibles efectos no térmicos, no se tiene aún una noción clara de su importancia y eventual riesgo, tal vez por la complejidad de los mecanismos de intercambio celular y su redundancia. Hay muchas hipótesis de eventuales efectos que se estudian actualmente y que detallamos más abajo.

El cuerpo humano se puede pensar (grosamente) como un conductor de conductividad moderada a alta, debido a su gran contenido de agua y electrolitos. En consecuencia, hay una profundidad de penetración dependiente de la frecuencia, que hace que, salvo para campos de frecuencia ultrabaja (por debajo de los 30 Hz), la penetración del campo eléctrico es despreciable. Como sabemos, las ondas electromagnéticas en un conductor presentan fundamentalmente energía magnética, que se traduce en corrientes de Foucault y otros efectos. **Por lo tanto, la mayoría de los estudios se ha concentrado en los efectos del campo magnético sobre la salud.**

### **Revisiones y evaluación de la literatura existente**

Una importante cantidad de trabajos, especialmente los realizados por agencias gubernamentales, comisiones especiales y los organismos internacionales, tratan de analizar los trabajos científicos especializados que se publican anualmente de a miles para encontrar patrones comunes, evaluar el peso de la evidencia para caracterizar el riesgo y recomendar líneas de acción. Habitualmente un comité de expertos revisa la literatura y saca conclusiones. Debido a la variedad de tamaño, experiencia científica y tiempo de trabajo de estas comisiones, los resultados son también variados y, quizás porque los expertos son conscientes de sus limitaciones, las publicaciones utilizan un lenguaje muy cuidado y a veces críptico para el lector casual. La frase común en todos estos trabajos es la necesidad de seguir estudiando los temas en discusión. Adjuntamos a este capítulo varios informes:

- NIEHS (USA) 1999 - **Health Effects from Exposure to Power-Line Frequency Electric and Magnetic Fields.**  
Campos de frecuencia industrial. (**NIEHS1999.PDF**).
- ICNIRP 2001 - **Review of the Epidemiologic Literature on EMF and Health.**  
Campos de frecuencia industrial (**ICNIRP2001.PDF**).
- IEE (Institution of Electrical Engineers) 2002 - **The Possible Harmful Biological Effects of Low Level Electromagnetic Fields of Frequencies up to 300 GHz.**  
General. (**IEE2002.PDF**)

Para tener una idea de la profundidad de la controversia sobre los efectos de los EMF sobre la salud humana citamos el caso del llamado "California Report" donde un comité de tres expertos concluyó que hay evidencia suficiente para considerar probables (más del 50%) los efectos dañinos de campos ELF sobre la salud, en particular en el caso de la leucemia infantil y los abortos.

Este reporte se halla publicado en "versión borrador" en la Web desde julio de 2001 (<http://www.dhs.ca.gov/ps/deodc/ehib/emf/RiskEvaluation/riskeval.html>), ya que continúan las discusiones sobre la seriedad y alcance de las conclusiones y hay al menos una acción legal para suprimir su publicación. Se adjunta un comentario y resumen del Prof. D.L.Henshaw, de la Univ. De Bristol, de octubre de 2001 (**HENSHAW.PDF**).

## Pautas de la ICNIRP

Probablemente el documento más influyente en el establecimiento de límites a la exposición a campos electromagnéticos, base de las legislaciones nacionales de la gran mayoría de los países sobre el tema, es la guía que publicó la ICNIRP en Abril de 1998 (**ICNIRP1998.PDF**). Lo que sigue son extractos del texto.

Se describen estudios de efectos directos e indirectos de los EMF. Los **efectos directos** resultan de la interacción directa de los campos con el cuerpo, mientras que los **efectos indirectos** involucran interacciones con un objeto a una potencial eléctrica diferente al del cuerpo.

Se discuten resultados de estudios de laboratorio y epidemiológicos, criterios básicos de exposición y niveles de referencia para evaluación práctica de los peligros y las recomendaciones se aplican a exposiciones ocupacionales o públicas.

IRPA/INIRC publicó pautas para EMF de alta frecuencia y de 50/60 Hz en 1988 y 1990, respectivamente, pero estas pautas se reemplazan por las presentes que cubren el rango entero de frecuencia para EMF (hasta 300 GHz). Los **campos magnéticos estáticos** fueron considerados en las pautas de la ICNIRP publicadas en 1994.

"Al establecer límites de exposición, la Comisión reconoce la necesidad de reconciliar un número de opiniones diferentes de expertos. Debe considerarse la validez de los informes científicos y se deben hacer extrapolaciones de experimentos sobre animales a efectos sobre humanos. Las restricciones en estas pautas se basaron solamente en datos científicos; sin embargo, los conocimientos actualmente disponibles indican que estas restricciones proveen un nivel adecuado de protección ante la exposición a EMF variables en el tiempo. Dos clases de guía se presentan:

- **Restricciones básicas.** Las restricciones a la exposición a campos eléctricos, magnéticos y electromagnéticos variables en el tiempo que se basan directamente en efectos establecidos sobre la salud se denominan "restricciones básicas". Dependiendo de la frecuencia del campo, las cantidades físicas usadas para especificar estas restricciones son: densidad de corriente ( $J$ ), tasa de absorción específica de energía (SAR<sup>6</sup>) y densidad de potencia ( $S^7$ ). Sólo la densidad de potencia en el aire, fuera del cuerpo, puede medirse fácilmente en individuos expuestos.
- **Niveles de referencia.** Estos niveles se proveen para **propósitos de evaluación práctica de la exposición** para determinar si es probable que se excedan las restricciones básicas. Algunos niveles de referencia se derivan de las restricciones básicas relevantes usando técnicas de medición y/o computacionales, y otras se dirigen a la percepción y efectos indirectos adversos de la exposición a EMF. Las cantidades derivadas son: intensidad de campo eléctrico ( $E$ ), intensidad de campo magnético ( $H$ ), densidad de flujo magnético ( $B$ ), densidad de potencia ( $S$ ) y las corrientes que fluyen por los miembros ( $I_L$ ). Las cantidades que se dirigen a la percepción y otros efectos indirectos son la corriente de contacto ( $I_C$ ) y, para campos pulsados, la absorción específica de energía (SA<sup>8</sup>). En cualquier situación de exposición particular, valores medidos o calculados de cualquiera de estas cantidades pueden compararse con el apropiado nivel de referencia. **El cumplimiento de los niveles de referencia asegurará el cumplimiento de la relevante restricción básica.** Si el valor medido o calculado excede el nivel de referencia, no necesariamente se sigue que se excederá la restricción básica. Sin embargo, cuando un nivel de referencia se excede es necesario probar el cumplimiento de la relevante restricción básica y determinar si son necesarias medidas adicionales de protección."

En la zona de campo cercano es necesario conocer la intensidad de los campos  $E$  y  $H$  (o  $B$ ), mientras que en la región de campo lejano, se supone que la radiación se comporta como una onda plana TEM, de manera que el conocimiento de la densidad de potencia (intensidad del

<sup>6</sup> La SAR se define como la potencia electromagnética absorbida por el tejido por unidad de masa:

$SAR = dW/dm = \sigma E^2 / \rho$  donde  $\sigma$  es la conductividad y  $\rho$  la densidad del tejido. [SAR] = W/Kg.

<sup>7</sup> El vector de Poynting.

<sup>8</sup> La SA considera la energía, en lugar de la potencia que se toma en la SAR. [SA] = J/Kg.

vector de Poynting) es equivalente a conocer los campos mismos<sup>9</sup>.

"La exposición a EMF variables en el tiempo da lugar a corrientes internas en el cuerpo y absorción de energía en los tejidos que dependen de los mecanismos de acoplamiento y la frecuencia involucrada.

El campo eléctrico y la densidad de corriente internos están relacionados por la ley de Ohm:

$$J = \sigma E \quad (3)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad eléctrica del medio. Las cantidades dosimétricas usadas en estas pautas, tomando en cuenta los distintos rangos de frecuencias y formas de onda, son:

- Densidad de corriente, J, en el rango de frecuencia hasta 10 MHz.
- Corriente, I, en el rango de frecuencia hasta 110 MHz.
- Tasa de absorción específica de energía, SAR, en el rango de frecuencia 100 kHz-10 GHz.
- Absorción específica de energía, SA, para campos pulsados en el rango de frecuencia 300 MHz-10 GHz.
- Densidad de potencia, S, en el rango de frecuencia 10-300 GHz."

A continuación describe las bases para la limitación de las exposiciones:

"Estas pautas para limitar la exposición han sido desarrolladas siguiendo una revisión exhaustiva de toda la literatura científica publicada... sólo se usaron efectos establecidos como base para las restricciones propuestas. **La inducción de cáncer por una exposición prolongada a EMF no fue considerada como establecida, por lo que estas pautas se basan en efectos sobre la salud de corto plazo, inmediatos, como la estimulación de nervios y músculos periféricos, choques y quemaduras causados por tocar objetos conductores y elevadas temperaturas en los tejidos que resultan de la absorción de energía durante la exposición a EMF.** En el caso de los potenciales efectos de largo plazo de la exposición, como un incrementado riesgo de cáncer, ICRNIRP concluyó que los datos disponibles son insuficientes para proveer una base de definición de restricciones a la exposición, aunque la investigación epidemiológica ha dado evidencia sugestiva, pero no convincente de una asociación entre posibles efectos carcinógenos y la exposición a niveles de densidades de flujo magnético de 50/60 Hz sustancialmente menores que los recomendados en estas pautas."

Esta última frase es muy significativa. A continuación se indican cuáles se consideran los **mecanismos de acoplamiento** entre los EMF y el cuerpo, que se dividen en mecanismos directos y mecanismos indirectos:

**"Hay tres mecanismos de acoplamiento básicos** establecidos a través de los cuales los campos eléctrico y magnético variables en el tiempo interaccionan directamente con la materia viva (UNEP/WHO/IRPA 1993):

- **acoplamiento a campos eléctricos de baja frecuencia.**

La interacción de campos eléctricos variables en el tiempo con el cuerpo humano resulta en el flujo de carga eléctrica (corriente eléctrica), la polarización de carga ligada (formación de dipolos eléctricos) y la reorientación de dipolos eléctricos ya presentes en el tejido. Las magnitudes relativas de estos diferentes efectos dependen de las propiedades eléctricas del cuerpo, es decir, a conductividad eléctrica (que gobierna el flujo de corriente eléctrica) y la permitividad (que gobierna la intensidad de los efectos de polarización). La conductividad eléctrica y la permitividad varía con el tipo de tejido corporal y también dependen de la frecuencia del campo aplicado. Campos eléctricos externos al cuerpo inducen una carga superficial sobre el cuerpo, que resulta en corrientes inducidas en el interior, cuya distribución depende de las condiciones de la exposición, el tamaño y forma del cuerpo y de la posición del cuerpo en el campo.

- **acoplamiento a campos magnéticos de baja frecuencia.**

La interacción de campos magnéticos variables en el tiempo con el cuerpo humano resulta en campos eléctricos inducidos y la circulación de corrientes eléctricas. Las magnitudes del campo inducido y la densidad de corriente son proporcionales al radio del lazo, la conductividad eléctrica del tejido y la tasa de variación y la magnitud de la densidad

---

<sup>9</sup> Para una onda plana:  $S = EH = E^2 / \eta_0 = \eta_0 H^2$

de flujo magnético. Para una dada magnitud y frecuencia de campo magnético los campos eléctricos más fuertes se inducen cuando las dimensiones del lazo son mayores. El camino y magnitud exactos de la corriente resultante inducida en cualquier parte del cuerpo dependerá de la conductividad eléctrica del tejido. El cuerpo no es eléctricamente homogéneo. Sin embargo, las densidades de corriente inducida pueden calcularse usando modelos anatómica y eléctricamente realistas del cuerpo y adecuados métodos computacionales, con un alto grado de resolución anatómica.

- **absorción de la energía de campos electromagnéticos.**

La exposición a campos eléctricos y magnéticos de baja frecuencia normalmente resulta en una absorción de energía despreciable y ninguna elevación observable de la temperatura corporal. Sin embargo, la exposición a EMF a frecuencias por encima de alrededor de 100 kHz pueden llevar a una significativa absorción de energía e incremento de temperatura. En general, la exposición a un campo electromagnético uniforme (una onda plana) resulta en una deposición y distribución de energía altamente no uniforme dentro del cuerpo, que debe evaluarse por medición y cálculo dosimétrico. En lo referente a la absorción de energía por el cuerpo humano, los EMF pueden dividirse en cuatro rangos (Durney et al. 1985):

- frecuencias desde alrededor de 100 kHz a menos de alrededor de 20 MHz, a las cuales la absorción en el tronco decrece rápidamente a medida que decrece la frecuencia, y puede ocurrir absorción significativa en el cuello y piernas;
- frecuencias desde alrededor de 20 MHz a 300 MHz, a las cuales puede ocurrir absorción relativamente alta en el cuerpo entero, y aún a mayores valores si se consideran resonancias parciales (p.ej., en la cabeza);
- frecuencias desde alrededor de 300 MHz a algunos GHz, a las cuales ocurre absorción local y no uniforme significativa; y
- frecuencias por encima de alrededor de 10 GHz, a las cuales la absorción de energía ocurre primariamente sobre la superficie corporal.

En el tejido la SAR es proporcional al cuadrado de la intensidad de campo eléctrico interno. El promedio y distribución de SAR pueden calcularse o estimarse a partir de mediciones de laboratorio. Los valores de SAR dependen de los siguientes factores:

- los parámetros del campo incidente: frecuencia, intensidad, polarización y configuración fuente-objeto (campo cercano o lejano);
- las características del cuerpo expuesto: su tamaño y geometría interna y externa y las propiedades dieléctricos de los distintos tejidos; y
- efectos de tierra y reflectores de otros objetos situados en el campo cerca del cuerpo expuesto.

Cuando el eje longitudinal del cuerpo humano es paralelo al vector eléctrico, y bajo condiciones de exposición de onda plana (campo lejano), la SAR de cuerpo entero alcanza sus valores máximos. La cantidad de energía absorbida depende de un número de factores, incluyendo el tamaño del cuerpo expuesto. El “Standard Reference Man” (ICRP 1994), si no está conectado a tierra, tiene una frecuencia de absorción resonante cercana a los 70 MHz. Para individuos más altos la frecuencia de absorción resonante es algo menor, y para adultos más bajos, niños, infantes e individuos sentados puede exceder los 100 MHz. Los valores de los niveles de referencia de campo eléctrico se basan en la dependencia de la frecuencia de la absorción humana; en individuos conectados a tierra las frecuencias de resonancia son menores por un factor de 2 (UNEP/WHO/IRPA 1993).

Para algunos dispositivos que operan a frecuencias por encima de 10 MHz (p.ej., calentadores dieléctricos, teléfonos móviles) la exposición humana puede ocurrir bajo condiciones de campo cercano. La dependencia respecto de la frecuencia de la absorción de energía bajo estas condiciones es muy diferente de la descripta para condiciones de campo lejano. Los campos magnéticos pueden ser predominantes para ciertos dispositivos, como teléfonos móviles.

La utilidad de los cálculos de modelización numérica, así como las mediciones de corriente corporal inducida e intensidad del campo tisular para la evaluación de exposiciones a campos cercanos ha sido demostrada para teléfonos celulares, walkie-talkies, torres de transmisión radial, fuentes de comunicación a bordo y calentadores dieléctricos (Kuster and Balzano 1992; Dimbylow and Mann 1994; Jokela et al. 1994; Gandhi

1995; Tofani et al. 1995). La importancia de estos estudios reside en haber demostrado que la exposición a campos cercanos puede resultar en una alta SAR local (p.ej., en la cabeza, muñecas, tobillos) y que los valores globales y locales de SAR dependen fuertemente de la distancia de separación entre la fuente de alta frecuencia y el cuerpo. Finalmente, datos de SAR obtenidos por medición son consistentes con datos obtenidos de cálculos con modelos numéricos. El valor promedio de SAR de cuerpo entero y el valor local son cantidades convenientes para comparar efectos bajo varias condiciones de exposición. Una discusión detallada de la SAR se puede encontrar en otra parte (UNEP/WHO/IRPA 1993).

A frecuencias mayores que alrededor de 10 GHz, la profundidad de penetración del campo en los tejidos es pequeña, y la SAR no es una buena medida para evaluar la energía absorbida. La densidad de potencia incidente del campo (en W/m<sup>2</sup>) es una cantidad dosimétrica más apropiada."

#### **"Hay dos mecanismos de acoplamiento indirecto:**

- corrientes de contacto que resultan cuando el cuerpo humano se pone en contacto con un objeto a un diferente potencial eléctrico (es decir, cuando el cuerpo o el objeto se cargan por un EMF); y
- acoplamiento de un EMF a dispositivos médicos usados por o implantados en un individuo (no considerado en este documento).

La carga de un objeto conductor por un EMF causa que corrientes eléctricas pasen a través del cuerpo humano en contacto con el objeto (Tenforde and Kaune 1987; UNEP/WHO/IRPA 1993). La magnitud y distribución espacial de tales corrientes dependen de la frecuencia, el tamaño del objeto, el tamaño de la persona y el área de contacto. Descargas transitorias - chispas - pueden ocurrir cuando un individuo y un objeto conductor expuesto a un campo intenso se ponen en proximidad."

A continuación el documento presenta las bases biológicas para las limitaciones en la exposición, en dos tramos: hasta 100 KHz (campos de relativamente baja frecuencia) y desde 100 KHz a 300 GHz (campos de alta frecuencia). Estas "bases biológicas" incluyen estudios epidemiológicos, de laboratorio, ocupacionales, en animales y en células, estudios de cáncer y abortos y otros, que no mencionamos aquí porque se presentarán en secciones posteriores.

Las pautas para limitar la exposición a EMF se pueden dividir en límites para **exposición ocupacional** ("**individuos adultos que están generalmente expuestos bajo condiciones conocidas y están entrenados para ser conscientes de los riesgos potenciales y para tomar precauciones apropiadas**") y límites para **exposición pública** ("el público general comprende individuos de todas las edades y status de salud variable, y puede incluir grupos o individuos particularmente susceptibles. En muchos casos, miembros del público general no son conscientes de su exposición a EMF, y, más aún, no puede esperarse razonablemente que individuos del público general tomen precauciones para minimizar o evitar la exposición. Son estas consideraciones que subyacen en la adopción de restricciones de exposición más exigentes para el público general que para la población expuesta ocupacionalmente").

Se describen los criterios científicos usados en la determinación de las restricciones básicas y los niveles de referencia:

#### **"Restricciones básicas**

Se usaron diferentes bases científicas en el desarrollo de las restricciones básicas a la exposición para varios rangos de frecuencia:

- Entre 1 Hz y 10 Mhz se proveen restricciones básicas sobre la densidad de corriente para prevenir efectos sobre funciones del sistema nervioso.
- Entre 100 kHz y 10 GHz se proveen restricciones básicas sobre la SAR para prevenir tensiones corporales por calor y excesivo calentamiento local tisular, en el rango 100 kHz - 10 MHz se proveen restricciones tanto sobre la densidad de corriente como sobre la SAR; y
- Entre 10 y 300 GHz se proveen restricciones básicas sobre la densidad de potencia para prevenir excesivo calentamiento tisular sobre o cerca de la superficie del cuerpo."

Las **restricciones básicas** se presentan en las Tablas 4 y 5:

**"Tabla 4.** Restricciones básicas para campos eléctrico y magnético variables en el tiempo para frecuencias hasta 10 GHz

Características de la exposición	Rango de frecuencia	Densidad de corriente para cabeza y tronco (mA m <sup>-2</sup> ) (rms)	SAR promedio cuerpo entero (W kg <sup>-1</sup> )	SAR localizado (cabeza y tronco) (W kg <sup>-1</sup> )	SAR localizado (miembros) (W kg <sup>-1</sup> )
Exposición Ocupacional	Hasta 1 Hz	40	—	—	—
	1 - 4 Hz	40/f	—	—	—
	4 Hz - 1 kHz	10	—	—	—
	1 - 100 kHz	f/100	—	—	—
	100 kHz -10 Mhz	f/100	0.4	10	20
	10 MHz -10 GHz	—	0.4	10	20
Exposición de público general	Hasta 1 Hz	8	—	—	—
	1 - 4 Hz	8/f	—	—	—
	4 Hz - 1 kHz	2	—	—	—
	1 - 100 kHz	f/500	—	—	—
	100 kHz -10 Mhz	f/500	0.08	2	4
	10 MHz -10 GHz	—	0.08	2	4

Notas:

1. f es la frecuencia en hertz.
2. Debido a la inhomogeneidad eléctrica del cuerpo, las densidades de corriente deben promediarse sobre una sección recta de 1 cm<sup>2</sup> perpendicular a la dirección de la corriente.
3. Para frecuencias hasta 100 kHz, los valores pico de densidad de corriente pueden obtenerse multiplicando el valor eficaz (rms) por  $\sqrt{2}$  (~1.414). Para pulsos de duración  $t_0$  la frecuencia equivalente a aplicar en las restricciones básicas debería calcularse como  $f=1/(2f_p)$ .
4. Para frecuencias hasta 100 kHz y para campos magnéticos pulsados, la máxima densidad de corriente asociada con los pulsos puede calcularse a partir de los tiempos de subida/caída y la máxima tasa de cambio de la densidad de flujo magnético. La corriente inducida se puede entonces comparar con la apropiada restricción básica.
5. Todos los valores de SAR se deben promediar sobre un periodo cualquiera de 6 minutos
6. La masa para promediar SAR localizado es cualquier 10 g de tejido contiguo; la SAR máxima así obtenida debe ser el valor usado para la estimación de la exposición.
7. Para pulsos de duración  $t_0$  la frecuencia equivalente a aplicar en las restricciones básicas debería calcularse como  $f=1/(2f_p)$ . Adicionalmente, para exposiciones pulsadas en el rango de frecuencia 0.3 a 10 GHz y para exposición localizada de la cabeza, para limitar o evitar efectos auditivos causados por la expansión termoelástica, una restricción básica adicional se recomienda. Esta es que la SA no debe exceder 10 mJ kg<sup>-1</sup> para trabajadores y 2 mJ kg<sup>-1</sup> para el público general, promediada sobre 10 g de tejido.

**Tabla 5.** Restricciones básicas de densidad de potencia para frecuencias entre 10-300 GHz

Características de la exposición	Densidad de potencia (W/m <sup>2</sup> )
Exposición Ocupacional	50
Exposición de público general	10

Notas:

1. Las densidades de potencia se promediarán sobre cualquier área expuesta de 20 cm<sup>2</sup> y cualquier periodo de  $68/f^{1.05}$  minutos (donde f está en GHz) para compensar la progresivamente menor profundidad de penetración a medida que la frecuencia aumenta.
2. Las densidades de potencia máxima espaciales, promediadas sobre 1 cm<sup>2</sup>, no deberían exceder 20 veces los valores tabulados.

En las Tablas 6 y 7 se presentan los **niveles de referencia**:

**"Tabla 6.** Niveles de referencia para **exposición ocupacional** a campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo (valores eficaces rms no perturbados)

Rango de frecuencia	Intensidad de campo E (V m <sup>-1</sup> )	Intensidad de campo H (A/m)	Intensidad de campo B (μT)	Densidad de potencia equivalente de onda plana S <sub>eq</sub> (W m <sup>-2</sup> )
Hasta 1 Hz	—	1.63×10 <sup>5</sup>	2×10 <sup>5</sup>	—
1-8 Hz	20000	1.63×10 <sup>5</sup> /f <sup>2</sup>	2×10 <sup>5</sup> /f <sup>2</sup>	—
8-25 Hz	20000	2×10 <sup>4</sup> /f	2.5×10 <sup>4</sup> /f	—
0.025-0.82 kHz	500/f	20/f	25/f	—
0.82-65 kHz	610	24.4	30.7	—
0.065-1 MHz	610	1.6/f	2.0/f	—
1-10 MHz	610/f	1.6/f	2.0/f	—
10-400 MHz	61	0.16	0.2	10
400-2000 MHz	3f <sup>1/2</sup>	0.008f <sup>1/2</sup>	0.01f <sup>1/2</sup>	f/40
2-300 GHz	137	0.36	0.45	50

Notas:

1.  $f$  indicada en la columna de rango de frecuencia.
2. Siempre que las restricciones básicas se cumplan y que se puedan excluir efectos indirectos adversos, los valores de intensidad de campo pueden excederse.
3. Para frecuencias entre 100 kHz y 10 GHz,  $S_{eq}$ ,  $E^2$ ,  $H^2$ , y  $B^2$  se deben promediar sobre cualquier periodo de 6 minutos.
4. Para valores pico a frecuencias hasta 100 kHz ver Tabla 4, nota 3.
5. Para valores pico a frecuencias por encima de 100 kHz ver Figs. 1 and 2. Entre 100 kHz y 10 MHz, los valores pico para las intensidades de campo se obtienen por interpolación desde el pico de 1.5 a 100 kHz al pico de 32 a 10 MHz. Para frecuencias por encima de 10 MHz se sugiere que la densidad pico de potencia de onda plana equivalente, promediada sobre el ancho del pulso, no exceda 1,000 veces las restricciones de  $S_{eq}$ , o que la intensidad de campo no exceda 32 veces los niveles de exposición de intensidad de campo dados en la tabla.
6. Para frecuencias por encima de 10 GHz,  $S_{eq}$ ,  $E^2$ ,  $H^2$ , y  $B^2$  se deben promediar sobre cualquier periodo de  $68/f^{1.05}$  minutos ( $f$  en GHz).
7. No se proveen valores de campo E para frecuencias < 1 Hz, que son efectivamente campos eléctricos estáticos. Los choques eléctricos de fuentes de baja impedancia se previenen mediante procedimientos de seguridad eléctrica establecidos para tales equipos."

**Tabla 7.** Niveles de referencia para **exposición pública general** a campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo (valores eficaces rms no perturbados)

Rango de frecuencia	Intensidad de campo E (V/m)	Intensidad de campo H (A/m)	Intensidad de campo B ( $\mu$ T)	Densidad de potencia equivalente de onda plana $S_{eq}$ ( $\text{W m}^{-2}$ )
Hasta 1 Hz	—	$3.2 \times 10^4$	$4 \times 10^4$	—
1-8 Hz	10000	$3.2 \times 10^4/f^2$	$4 \times 10^4/f^2$	—
8-25 Hz	10000	$4 \times 10^3/f$	$5 \times 10^3/f$	—
0.025-0.8 kHz	$250/f$	$4/f$	$5/f$	—
0.8-3 kHz	$250/f$	5	6.25	—
3-150 kHz	87	5	6.25	—
0.15-1 MHz	87	$0.73/f$	$0.92/f$	—
1-10 MHz	$87/f^{1/2}$	$0.73/f$	$0.92/f$	—
10-400 MHz	28	0.073	0.092	2
400-2000 MHz	$1.375 f^{1/2}$	$0.0037 f^{1/2}$	$0.0046 f^{1/2}$	$f/200$
2-300 GHz	61	0.16	0.2	10

Notas:

1.  $f$  indicada en la columna de rango de frecuencia.
2. Siempre que las restricciones básicas se cumplan y que se puedan excluir efectos indirectos adversos, los valores de intensidad de campo pueden excederse.
3. Para frecuencias entre 100 kHz y 10 GHz,  $S_{eq}$ ,  $E^2$ ,  $H^2$ , y  $B^2$  se deben promediar sobre cualquier periodo de 6 minutos.
4. Para valores pico a frecuencias hasta 100 kHz ver Tabla 4, nota 3.
5. Para valores pico a frecuencias por encima de 100 kHz ver Figs. 1 and 2. Entre 100 kHz y 10 MHz, los valores pico para las intensidades de campo se obtienen por interpolación desde el pico de 1.5 a 100 kHz al pico de 32 a 10 MHz. Para frecuencias por encima de 10 MHz se sugiere que la densidad pico de potencia de onda plana equivalente, promediada sobre el ancho del pulso, no exceda 1,000 veces las restricciones de  $S_{eq}$ , o que la intensidad de campo no exceda 32 veces los niveles de exposición de intensidad de campo dados en la tabla.
6. Para frecuencias por encima de 10 GHz,  $S_{eq}$ ,  $E^2$ ,  $H^2$ , y  $B^2$  se deben promediar sobre cualquier periodo de  $68/f^{1.05}$  minutos ( $f$  en GHz).
7. No se proveen valores de campo E para frecuencias < 1 Hz, que son efectivamente campos eléctricos estáticos. La percepción de cargas eléctricas superficiales no ocurrirá a intensidades de campo menores que  $25 \text{ kVm}^{-1}$ . Las descargas de chispa que produzcan stress o molestias deben evitarse."

A continuación se dan niveles de referencia para corrientes de contacto e inducidas variables en el tiempo:

**Tabla 8.** Niveles de referencia para **corrientes de contacto** variables en el tiempo desde objetos conductores.

Característica de la exposición	Rango de frecuencia	Máxima corriente de contacto (mA)	Característica de la exposición	Rango de frecuencia	Máxima corriente de contacto (mA)
Exposición ocupacional	Hasta 2.5 kHz	1.0	Exposición pública general	Hasta 2.5 kHz	0.5
	2.5-100 kHz	$0.4f$		2.5-100 kHz	$0.2f$
	0.1-110 MHz	40		0.1-110 MHz	20

Nota:

1.  $f$  es la frecuencia en kHz."

"**Tabla 9.** Niveles de referencia para **corrientes inducidas** en cualquier miembro a frecuencias entre 10 y 110 MHz.

Característica de la exposición	Corriente (mA)
Exposición ocupacional	100
Público general	45

Notas:

1. El nivel de referencia público es igual al nivel de referencia ocupacional dividido por  $\sqrt{5}$ .
2. Para cumplir con la restricción básica sobre SAR localizada, la raíz cuadrada del valor promediado en el tiempo del cuadrado de la corriente inducida sobre cualquier periodo de 6 minutos forma la base de los niveles de referencia."

En la siguiente sección se detalla cómo "**sumar**" efectos para la exposición a campos de múltiples frecuencias. Se dividen los efectos por rango de frecuencia y por tipo: corrientes inducidas, efectos térmicos, corrientes sobre los miembros y corrientes de contacto. Finalmente se hace un breve comentario sobre las medidas de protección y la responsabilidad de la industria de asegurar el cumplimiento de las pautas.

Las pautas de ICNIRP han sido criticadas por ambientalistas que sugieren que los valores publicados son muy altos según su interpretación de la literatura científica, y también por los sectores industriales que se quejan de que los valores son exageradamente bajos, según su interpretación de la literatura científica, y para cumplirlos se deberían realizar inversiones exorbitantes.

En noviembre de 2001 se realizó la Conferencia de Campos Electromagnéticos y Salud, ¿cuál marco regulatorio para la Comunidad Europea?, organizada por el Health & Consumer Protection Directorate-General de la Comisión Europea. La conferencia estuvo dirigida a discutir aspectos técnicos, científicos y legales de campos electromagnéticos y salud a la luz de las recientes opiniones científicas. En la introducción a las conclusiones se lee:

"En conclusión, se acordó que el conocimiento científico disponible a la fecha se reflejaba bien en la opinión del Comité Científico sobre Toxicidad-Ecotoxicidad y el Ambiente de la Comisión. No hubo ninguna propuesta de cambiar los límites actuales definidos por la recomendación del 12th July Council, que limita la exposición del público general a campos electromagnéticos. Se estableció que cualquier modificación a límites más estrictos sin una más fuerte base científica negaría el trabajo realizado y los estudios de alta calidad financiados desde hace muchos años para explorar los riesgos de salud asociados con la exposición a la radiación no ionizante. Esto no significa que los hallazgos recientes en el área de frecuencias extremadamente bajas no deban tenerse en cuenta, sino que deben ser evaluadas más aún y que futuras medidas, si fueran necesarias, deberán ser proporcionadas a los riesgos establecidos."

Jarmo Elovaara, portavoz de la "Recomendación sobre Campos Electromagnéticos y la Realidad de las Compañías de Transmisión Eléctrica de Potencia" de la Comisión Europea dice:

"En las empresas de servicios públicos creemos que la Recomendación de la ICNIRP y la Comisión Europea contienen márgenes de seguridad innecesariamente altos y que uno debería discutir la validez de esos valores. En la realidad, los valores presentes establecidos por la Recomendación se ven ya excedidos. En Finlandia sería un problema muy grande tomar literalmente las presentes recomendaciones debido a que reconstruir las líneas de potencia existentes es extremadamente caro. Hay necesidad de preparar una metodología para implementar límites, especialmente los campos de banda ancha son tratados en una forma demasiado pesimista. También debería reconocerse la falta de equipos comerciales de medición apropiados."

### El informe del IEE

El informe del IEE (Institution of Electrical Engineers) del Reino Unido es una actualización de informes realizados cada dos años desde 1994 y contiene conclusiones a partir de la revisión de 798 trabajos científicos en el área. El resumen indica:

" El Grupo Consejero de Políticas sobre los Efectos Biológicos de Campos electromagnéticos de Bajo Nivel, del IEE ha concluido que todavía no hay evidencia científica convincente que muestre efectos dañinos de campos electromagnéticos de bajo nivel sobre los humanos. Es-

ta conclusión es la misma que alcanzó en sus declaraciones previas, la última realizada en mayo de 2000 y no ha sido cambiada por la revisión por pares de la literatura de los últimos dos años..."

" A bajas frecuencias, la evidencia acumulada del gran cuerpo de literatura construido en los últimos veinte años sugiere que la existencia de efectos dañinos a la salud es general es improbable. Sin embargo, recientes análisis conjuntos de estudios epidemiológicos han sugerido una asociación con leucemia infantil, que requiere una mayor investigación. A mayores frecuencias hay menos datos disponibles. Mientras los datos existentes no muestran efectos dañinos, el Grupo es de la opinión que investigaciones adicionales, tanto epidemiológicas como de laboratorio, deberían financiarse. Esta visión es consistente con las conclusiones de importantes revisiones publicados en otra parte, y está basada más en la preocupación pública y la naturaleza ubicua de nuestra exposición a tales campos que en una probabilidad de que tales efectos dañinos existan. El programa de investigación del Reino Unido sobre Telecomunicaciones Móviles y Salud avanza en cierta medida para enfrentar esta necesidad de mayor investigación con unos quince proyectos que se inician en 2002."

Continúa realizando un resumen de la literatura revisada, de la cual la sección más interesante es quizás la que presenta otras revisiones recientes:

" En los dos años pasados diversos cuerpos nacionales e internacionales revisaron la evidencia científica sobre campos electromagnéticos de baja frecuencia:

- En marzo de 2001 un Grupo Consejero de la National Radiological Protection Board (NRPB - UK) publicó una revisión sobre cáncer, que concluyó que, aunque la evidencia no es suficientemente fuerte para justificar conclusiones firmes, permanece la posibilidad que los campos magnéticos puedan incrementar el riesgo de leucemia en niños.
- Una conclusión similar fue alcanzada en junio por la International Agency for Research on Cancer, que clasificó a los campos magnéticos de baja frecuencia como 'posiblemente carcinógenos'. Esta opinión se basó en evidencia epidemiológica 'limitada' para leucemia infantil, pero 'inadecuada' para todos los otros tipos de cáncer, evidencia 'inadecuada' a partir de estudios animales y evidencia 'inadecuada' para campos eléctricos. En Diciembre, una revisión de la International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP) llegó a conclusiones muy similares para cáncer, y también analizó varias otras enfermedades, concluyendo que no hay una enfermedad para la cual los campos electromagnéticos puedan considerarse como una causa establecida.
- En California, los Servicios del Departamento de Salud emitieron una revisión borrador concluyendo que hay una probabilidad significativa, en varios casos superior al 50%, que los campos de baja frecuencia causen un número de diferentes enfermedades. Esta conclusión está claramente fuera de línea con las otras revisiones mencionadas arriba, y aparece ser injustificada por el balance de evidencia científica.
- El informe Zmirou a la Dirección General de Salud francesa consideró los efectos sobre la salud de teléfonos móviles y estaciones base. Revisó las revisiones principales incluyendo el informe Stewart inglés y el informe de la Royal Society of Canada. También revisó la literatura científica y escuchó evidencia de un número de expertos de los sectores científico e industrial. Sus conclusiones principales concuerdan con las del informe Stewart en relación al estado del conocimiento, la adecuación de los estándares actuales y la necesidad de un programa de investigación bien planeado. El informe concluye que los niños no son una categoría de alto riesgo pero que los padres deben usar el sentido común y aconsejar a sus niños adecuadamente.]
- Un informe del Consejo de Salud de los Países Bajos titulado "Mobile telephones - An evaluation of health effects", se publicó en enero de 2002. Concuerda con revisiones previas sobre el estado del conocimiento y la adecuación de los estándares. En un significativo apartamiento de las conclusiones del informe Stewart no recomienda la aplicación del principio de precaución relativo a los efectos no térmicos y no ve justificación para recomendar la restricción en el uso de teléfonos móviles por niños."

El informe Stewart que se menciona repetidamente es un informe realizado en 2000 por un Grupo Independiente de Expertos en telefonía Móvil, liderado por Sir William Stewart, por encargo de la National Radiological Protection Board (NRPB - UK). En el prefacio se dice:

" El informe señala que el balance de la evidencia no sugiere que las tecnologías de telefonía móvil ponen en riesgo la salud de la población en general del Reino Unido. Hay alguna evidencia preliminar que los productos de las tecnologías de telefonía móvil pueden causar, en

algunos casos, sutiles efectos biológicos, aunque, es importante, esto no necesariamente significa que la salud se vea afectada. Hay también evidencia de que en algunos casos el bienestar de la gente puede verse afectado desfavorablemente por la ubicación no sensata de estaciones base. Deben proveerse nuevos mecanismos para prevenir estos hechos. En resumen, el informe propone que se adopte una aproximación con precauciones hasta que se halle disponible información científica más robusta y que el tema sea revisado nuevamente en tres años, o antes si las circunstancias así lo exigen."

El **principio de precaución** recomendado por el informe Stewart sugiere adoptar las pautas de la ICNIRP, más exigentes que las pautas inglesas al momento, revocar los permisos de instalación de antenas de telefonía móvil en lugares "sensibles" como áreas residenciales, escuelas y hospitales y elaborar protocolos en acuerdo entre el gobierno, la industria y los consumidores, para conceder futuros permisos de erección de antenas y estaciones base y asegurar el no uso de teléfonos móviles en lugares como hospitales o escuelas donde la interferencia podría ser muy peligrosa.

En las siguientes secciones vamos a presentar resultados de estudios en tres aspectos: campos estáticos, campos de frecuencia industrial y campos asociados con la telefonía celular.

## Campos electromagnéticos estáticos

**Sólo la componente magnética del campo estático es relevante para posibles efectos en la salud.**

Los campos magnéticos asociados con campos estáticos sólo existen cuando hay un flujo de corriente. Estos campos magnéticos son difíciles de apantallar y penetran fácilmente en edificios y personas. Los campos eléctricos asociados con fuentes electromagnéticas estáticas existen siempre que exista tensión, independientemente de que la corriente fluya o no.

A diferencia de los campos magnéticos, estos campos eléctricos tienen poca capacidad de penetración en la piel o edificios. Como los campos eléctricos estáticos no penetran en el cuerpo, está asumido que cualquier efecto biológico por exposición habitual a campos estáticos tiene que ser debido a la componente magnética del campo, o a los campos eléctricos y corrientes que estos campos magnéticos inducen en el cuerpo.

La exposición residencial y ambiental a campos magnéticos estáticos está dominada por el campo natural de la Tierra, que varía entre  $0.03$  y  $0.07\text{ mT}$ , dependiendo de la localización. Los campos magnéticos estáticos justo debajo de líneas de transporte de energía eléctrica continua están alrededor de  $0.02\text{ mT}$ . Pequeñas fuentes artificiales de campos estáticos (imanes permanentes) son comunes, desde los especializados (componentes de altavoces, motores con batería, hornos de microondas) hasta triviales (imanes de refrigeradores). Estos pequeños imanes pueden producir campos de  $1\text{-}10\text{ mT}$  a  $1\text{ cm}$  de sus polos magnéticos. La exposición más elevada a campo magnético estático por parte del público en general proviene de las imágenes de resonancia magnética (en inglés, **MRI**), donde los campos varían entre  $150\text{-}2000\text{ mT}$ .

Los efectos directos en objetos ferromagnéticos y equipos electrónicos es lo único que la mayoría de la gente notaría por debajo de unos  $1000\text{ mT}$ . Realmente, no hay un valor umbral para efectos en objetos ferromagnéticos; una buena brújula girará en presencia de campos de hasta  $0.01\text{ mT}$ , pero se requiere un campo mucho más intenso (por encima de  $1\text{ mT}$ ) para que los objetos ferromagnéticos se muevan de forma peligrosa. La electrónica puede verse afectada por campos bastante bajos; un monitor en color de alta resolución, por ejemplo, puede mostrar distorsiones con campos magnéticos de hasta  $0.1\text{ mT}$ .

Una fuente de exposición a campos estáticos que empaña la distinción entre exposición residencial y laboral son los trenes eléctricos. Los campos estáticos en trenes eléctricos pueden llegar a  $0.2\text{ mT}$ .

Las personas expuestas laboralmente a campos estáticos incluyen operadores de unidades de resonancia magnética (MRI), personal de instalaciones de física especializada y biomédicas (por ejemplo, aquéllos que trabajan en aceleradores de partículas) y trabajadores involucrados en procesos electrolíticos, como la producción de aluminio. Algunos trabajadores de la industria del aluminio están expuestos a campos de  $5\text{-}15\text{ mT}$  durante largos períodos de tiempo, con exposiciones máximas de hasta  $60\text{ mT}$ ; pero otro estudio muestra campos promedio de sólo  $2\text{-}4\text{ mT}$ . Se ha informado de que los trabajadores de plantas que usan celdas electrolíticas están expuestos a campos de  $4\text{-}10\text{ mT}$  durante largos períodos de tiempo, con exposiciones máximas de hasta  $30\text{ mT}$ . Las personas que trabajan en aceleradores de partículas están expuestas a campos por encima de  $0.5\text{ mT}$  durante largos períodos de tiempo, con exposiciones por encima de  $300\text{ mT}$  durante muchas horas y exposiciones máximas de hasta  $2000\text{ mT}$ .

Otra fuente de exposición a campos magnéticos estáticos son los campos residuales que pueden quedar **después** de retirar campos magnéticos fuertes. Por ejemplo, después de retirar una unidad de resonancia magnética de la habitación puede quedar un campo residual de hasta  $2\text{ mT}$  en el acero de la estructura que ha sido permanentemente magnetizado. Tales campos no son lo suficientemente fuertes para constituir una preocupación para la salud humana, pero

pueden ser lo bastante fuertes como para interferir con el funcionamiento de equipos electrónicos sensibles. Estos campos residuales pueden reducirse (aunque no eliminarse por completo) de forma profesional.

Se han realizado relativamente pocos estudios sobre incidencia de cáncer en trabajadores expuestos a campos magnéticos estáticos. Budinger y col. no han encontrado un exceso de cáncer en trabajadores expuestos a campos de *300 mT* generados por aceleradores de partículas, y Barregard y col. no han encontrado un incremento de cáncer en trabajadores expuestos a campos de *10 mT* en una planta de producción de cloro.

También hay estudios en trabajadores de plantas de reducción de aluminio. En general, los estudios en trabajadores de estas plantas no estaban diseñados para analizar los efectos de los campos estáticos, pero estos trabajadores están expuestos a campos de *5 - 15 mT*. En los estudios en estas plantas el único incremento de cáncer detectado fueron tumores linforeticulares, y esto sólo fue observado en un estudio. El único estudio en plantas de reducción de aluminio que investigó específicamente la exposición a campos estáticos y cáncer no encontró ningún exceso de cáncer del sistema nervioso o hematopoyético.

### **Estudios epidemiológicos**

La aplicación de los criterios de Hill muestra que actualmente la evidencia epidemiológica de una relación entre campos magnéticos estáticos y cáncer es débil o inexistente.

1. Primero, sólo hay una **débil asociación** entre campos magnéticos estáticos y cáncer. Sólo hay un estudio que muestra alguna indicación de una asociación entre campos estáticos y cáncer, la asociación no es fuerte y sólo se observa con un tipo de cáncer.
2. Segundo, la asociación entre campos magnéticos estáticos y cáncer **no es consistente**. Los estudios en trabajadores expuestos a campos magnéticos estáticos en industrias que no sean plantas de reducción de aluminio no muestran asociación entre exposición a campos estáticos y cáncer, y todos los estudios, excepto uno, entre la industria del aluminio no muestran asociación entre exposición a campos magnéticos estáticos y cáncer.
3. Tercero, como sólo un estudio informa de una asociación entre exposición a campos estáticos y cáncer, el **tema de la especificidad es irrelevante**.
4. Cuarto, **no hay evidencia de una relación dosis-respuesta** entre exposición a campos estáticos e incidencia de cáncer. El único estudio que señala una asociación entre exposición a campos estáticos y cáncer no muestra evidencia de relación dosis-respuesta.

Por lo tanto, la evidencia epidemiológica de una asociación entre campos magnéticos estáticos y cáncer es débil e inconsistente, y no consigue mostrar una relación dosis-respuesta.

### **Estudios de laboratorio**

Cuando la evidencia epidemiológica de una relación causal oscila entre débil e inexistente, como en el caso de los campos magnéticos estáticos y el cáncer, los estudios de laboratorio tendrían que proporcionar una evidencia muy fuerte de carcinogénesis para equilibrar la balanza.

Se han llevado a cabo un amplio rango de estudios sobre genotoxicidad de los campos estáticos en organismos completos y células. En conjunto, estos estudios ofrecen una evidencia convincente de que los campos magnéticos estáticos no son genotóxicos.

Los estudios de genotoxicidad en organismos completos han sido algo limitados. Beniashvili y col. no encontraron un incremento de la incidencia de cáncer de mama en ratones expuestos a campos de *0.02 mT*. Mahlum y col. hallaron que la exposición de ratones a campos de *1000 mT* no producía mutaciones, y otros investigadores encontraron una ausencia similar de mutagénesis en moscas de la fruta expuestas a campos de *1000 - 3700 mT*.

Hay un estudio de posible genotoxicidad. En ese estudio, Koana y col. encontraron indicios de un incremento de mutaciones en moscas de la fruta que no tenían capacidad para reparar daños, al ser expuestas a campos de  $600\text{ mT}$  durante 24 horas. No se observaron efectos en moscas de la fruta con capacidad normal de reparar los daños del ADN.

Los estudios de genotoxicidad celular han sido más extensivos. Los estudios de laboratorio publicados han mostrado que los campos magnéticos estáticos no producen ninguno de los efectos que indican genotoxicidad. Los campos magnéticos estáticos no producen roturas en hebras de ADN, aberraciones cromosómicas, intercambio de cromátides hermanas, transformacion celular, mutaciones o formación de micronúcleos.

También se han llevado a cabo algunos estudios sobre campos eléctricos estáticos. Estos estudios han sido revisados por McCann y col., quienes concluyeron que a pesar de que había algunos informes de genotoxicidad de los campos eléctricos estáticos, "todos los informes de resultados positivos han utilizado condiciones de exposición que posiblemente han sido acompañadas de otros fenómenos, como efecto corona, chispazos y transitorios, mientras que los negativos no."

En general, los campos magnéticos estáticos no parecen tener este tipo de actividad epigenética. Hay unos pocos estudios que sugieren que los campos magnéticos estáticos podrían amplificar los efectos de otros agentes genotóxicos, pero ninguno de estos estudios ha podido ser replicado.

Tres estudios han encontrado que campos estáticos de  $140 - 3700\text{ mT}$  no incrementan los efectos mutagénicos de la radiación ionizante; pero un cuarto estudio señala que campos estáticos de  $1100 - 1400\text{ mT}$  produjeron un ligero incremento en el número de aberraciones cromosómicas producidas por la exposición a dosis altas de radiación ionizante, y un quinto estudio informó de que un campo de  $4000\text{ mT}$  incrementó ligeramente la muerte celular radioinducida.

La reparación del daño producido por la radiación no resultó afectada por un campo de  $140\text{ mT}$ , hasta que fue inhibida a  $4000\text{ mT}$ . Dos estudios informaron de que campos estáticos de  $1300 - 4700\text{ mT}$  no amplificaron los efectos mutagénicos de una conocida genotoxina química, e incluso puede que inhiban tal actividad.

Dos estudios hallaron que campos estáticos de  $150 - 800\text{ mT}$  no amplificaban el desarrollo de tumores de mama inducidos químicamente, pero un tercer estudio informó de que un campo estático de  $0.02\text{ mT}$  incrementó el desarrollo de tumores de mama inducidos químicamente.

Los estudios de laboratorio sobre los efectos de los campos magnéticos estáticos muestran que estos campos no tienen el tipo de efectos sobre el crecimiento tumoral, crecimiento celular, funcionamiento del sistema inmunológico o balance hormonal que ha sido asociado con la carcinogénesis.

**Crecimiento tumoral:** En general, campos magnéticos estáticos de  $13 - 1150\text{ mT}$  no parecen tener efecto en el crecimiento de tumores inducidos químicamente o trasplantados. Sin embargo, hay un estudio que sugiere que un campo magnético estático de  $15\text{ mT}$  incrementa la tasa de crecimiento de tumores inducidos químicamente.

**Crecimiento celular:** En general, campos magnéticos estáticos de  $45 - 2000\text{ mT}$  no parecen tener efecto en el crecimiento de células humanas, animales o de levadura. Sin embargo, hay cuatro estudios de efectos de los campos estáticos en el crecimiento celular:

- inhibición del crecimiento de linfocitos humanos a  $4000 - 6300\text{ mT}$ ;
- inhibición del crecimiento de células tumorales a  $7000\text{ mT}$ ;
- estimulación del crecimiento de células de mamíferos a  $140\text{ mT}$ ;
- tanto estimulación como inhibición de la síntesis de ADN en fibroblastos a  $610\text{ mT}$ .

**Efectos en el sistema inmunológico:** En la mayoría de los estudios, campos magnéticos estáticos de  $13 - 2000 \text{ mT}$  no parecen tener efectos en el sistema inmunológico de animales, aunque un estudio informa que la implantación de pequeños imanes en el cerebro de ratas incrementa su respuesta inmunológica. Dos estudios en humanos han informado de que los trabajadores de plantas de reducción de aluminio, donde la exposición a campos magnéticos estáticos es común, tienen pequeñas alteraciones en el número de algunos tipos de células inmunológicas. Estas alteraciones en el número de células no tienen una significación clínica conocida, y puede que incluso no estén relacionadas con la exposición a campos magnéticos.

**Efectos hormonales:** Hay algunos estudios de que los campos magnéticos estáticos del nivel del campo natural de la Tierra (alrededor de  $0.05 \text{ mT}$ ) pueden afectar a la producción de melatonina en ratas, aunque otros estudios con campos más intensos (por ejemplo,  $2000 \text{ mT}$ ) no han observado tales efectos. No está claro que esta observación tenga ninguna significación para la salud humana. Aunque se ha sugerido que la melatonina podría tener actividad "preventiva del cáncer", no hay evidencia de que los campos magnéticos estáticos afecten al nivel de melatonina en humanos, o de que la melatonina tenga actividad anticancerígena en humanos.

La aplicación de los criterios de Hill muestra que la evidencia de una asociación causal entre exposición a campos estáticos y la incidencia de cáncer es débil o inexistente.

1. La revisión de la evidencia epidemiológica muestra una **asociación débil o inexistente** entre exposición a campos magnéticos estáticos y cáncer.
2. **No hay evidencia de laboratorio** de que los campos estáticos produzcan el tipo de efectos en células, tejidos o animales que apuntan a que produzcan o contribuyan al cáncer.
3. De lo que se conoce sobre la biofísica de los campos magnéticos estáticos y sus efectos en los sistemas biológicos, la hipótesis de que causan o contribuyen al cáncer **no tiene plausibilidad biofísica**.

Mientras que las pruebas de laboratorio no sugieren una conexión entre campos magnéticos estáticos y cáncer, los estudios han mostrado que los campos magnéticos estáticos tienen "bioefectos", particularmente a intensidades de campo por encima de  $2000 \text{ mT}$ . Estos bioefectos no tienen una relación obvia con el cáncer.

Por otra parte, no existe evidencia convincente de que los campos estáticos puedan tener efectos sobre la fertilidad, causen defectos o malformaciones congénitas o incrementen las tasas de aborto.

Recientemente se han publicado varias revisiones de la literatura epidemiológica y de laboratorio. Ninguna de estas revisiones ha concluido que los campos magnéticos o eléctricos estáticos de la intensidad que se encuentra en ambientes residenciales y laborales sean un riesgo para la salud humana.

Una revisión de 1993 realizada por el **Consejo Nacional de Protección Radiológica del Reino Unido** (National Radiological Protection Board - NRPB) concluyó que para campos eléctricos estáticos "no hay evidencia biológica a partir de la cual se puedan deducir restricciones básicas de exposición humana a campos eléctricos estáticos..." y que "para la mayoría de la población, la percepción de cargas eléctricas superficiales molestas... no tendrá lugar por exposición a campos eléctricos estáticos por debajo de  $25 \text{ kV/m}$ ."

Para campos magnéticos estáticos, el NRPB concluyó que "no hay evidencia experimental directa de ningún efecto adverso agudo en la salud, efectos adversos en la salud debidos a exposición de corta duración a campos magnéticos estáticos de hasta  $2T$  ... No se puede descartar efectos en el comportamiento o funcionamiento de marcapasos por exposición a campos magnéticos de densidad de flujo mucho mayor de  $2T$ ... Hay poca información experimental sobre

los efectos de la exposición crónica. De momento no se ha descubierto ningún efecto a largo plazo... No hay evidencia convincente de que los campos magnéticos estáticos sean mutagénicos... La progresión tumoral, y consecuentemente la promoción tumoral, no parece verse afectada por exposición a campos estáticos de hasta  $1T$  ( $1000\text{ mT}$ )."

En 1993, la **Conferencia Americana de Higienistas Industriales Gubernamentales** (American Conference of Governmental Industrial Hygienists - ACGIH) concluyó en su revisión de la literatura sobre campos magnéticos estáticos que "por el momento, no se han podido identificar órganos diana específicos para los efectos nocivos de los campos magnéticos... Aunque se han observado algunos efectos [de campos magnéticos estáticos] en humanos y animales, ningún efecto nocivo de campos magnéticos de hasta  $2T$  ha sido demostrado de forma concluyente."

En 1994, la **Comisión Internacional de Protección contra la Radiación No Ionizante** (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection - ICNIRP) concluyó que "los conocimientos científicos actuales no sugieren efectos nocivos en los principales parámetros de desarrollo, comportamiento y fisiológicos en organismos superiores por exposición transitoria a campos estáticos de densidad hasta  $2T$ . A partir del análisis de las interacciones entre exposición a largo plazo, la exposición a densidades de flujo magnético de hasta  $200\text{ mT}$  no debe tener consecuencias adversas." Las últimas recomendaciones de ICNIRP sobre campos magnéticos variables pueden ser relevantes también.

Cierto número de organizaciones gubernamentales y profesionales han desarrollado normas de exposición, o han modificado o confirmado sus normas anteriores.

- En 1987, el **Laboratorio Nacional Lawrence Livermore de Estados Unidos** desarrolló y publicó unas recomendaciones de exposición personal a campos magnéticos. Según estas recomendaciones, las personas con marcapasos y aparatos protésicos están limitadas a un campo máximo de  $1\text{ mT}$ , se requiere formación y seguimiento médico para personas expuestas a campos por encima de  $50\text{ mT}$ , y el campo medio ponderado en el tiempo se limita a  $60\text{ mT}$  para todo el cuerpo y a  $600\text{ mT}$  en brazos y piernas. La exposición máxima de pico se limita a  $2000\text{ mT}$ .
- En 1987, la **Organización Mundial de la Salud (OMS)** publicó unos criterios de salud para trabajadores expuestos a campos magnéticos estáticos. Su informe concluía que "a partir de los datos disponibles no se puede concluir que la exposición a corto plazo a campos magnéticos estáticos por debajo de  $2T$  suponga un riesgo para la salud."
- A finales de 1993, el **Consejo Nacional de Protección Radiológica del Reino Unido (NRPB)** estableció unas recomendaciones de exposición a campos estáticos. Para campos magnéticos estáticos los límites recomendados son  $200\text{ mT}$  promediados durante 24 horas, un campo máximo en todo el cuerpo de  $2000\text{ mT}$  y un campo máximo en brazos y piernas de  $5000\text{ mT}$ .

Para campos eléctricos estáticos el límite recomendado es  $25\text{ kV/m}$ . Estas normas se aplican tanto a exposición residencial como laboral.

- También en 1994, la **Conferencia Americana de Higienistas Industriales Gubernamentales (ACGIH)** estableció normas de exposición a campos magnéticos estáticos. El límite de la ACGIH para campos magnéticos estáticos es  $0.5\text{ mT}$  para portadores de marcapasos, y para el resto el límite ponderado en el tiempo es de  $60\text{ mT}$  para exposición de todo el cuerpo y  $600\text{ mT}$  para las extremidades. Debido a la naturaleza de las normas de la ACGIH, esta normativa se aplica sólo en ambientes laborales.
- En 1994, la **Comisión Internacional de Protección contra la Radiación No Ionizante (ICNIRP)** publicó unas recomendaciones de exposición a campos magnéticos estáticos. Para el público en general la norma de exposición a campos magnéticos estáticos es  $40\text{ mT}$ .

para exposición continua, excepto para personas con marcapasos cardíacos y otros equipos médicos implantables, para los que la norma es menor ( $0.5\text{ mT}$ ). Para exposición laboral la norma es  $200\text{ mT}$  para exposición continua,  $2000\text{ mT}$  para exposición breve en todo el cuerpo, y  $5000\text{ mT}$  para exposición de brazos y piernas.

Esta normativa se basa en varias consideraciones.

- Un objetivo es mantener las corrientes eléctricas inducidas por el movimiento a través del campo magnético estático a niveles por debajo de los que se dan de forma natural en el cuerpo.
- Un segundo objetivo es mantener las corrientes inducidas por el flujo de corriente en los vasos sanguíneos grandes a niveles que no produzcan efectos hemodinámicos o cardiovasculares.

**Más información y citas bibliográficas sobre la influencia de los campos electromagnéticos estáticos sobre la salud en:**

<http://www.mcw.edu/gcrc/cop/static-fields-cancer-FAQ/QandA.html>

de donde se ha tomado el texto (copyright © 1996-1999 de **John Moulder, Ph.D.** y el Medical College of Wisconsin)

## Campos electromagnéticos industriales

Gran parte de la preocupación por las líneas eléctricas y el cáncer proviene de estudios sobre personas que viven cerca de líneas eléctricas y gente que trabaja en "profesiones eléctricas". Algunos de estos estudios parecen mostrar una relación entre la exposición a campos magnéticos de frecuencia industrial y la incidencia de cáncer.

Sin embargo, los estudios epidemiológicos más recientes muestran poca evidencia de que las líneas eléctricas estén asociadas a un aumento del cáncer, los estudios de laboratorio han mostrado poca evidencia de una relación entre campos de frecuencia industrial y cáncer y la conexión entre los campos generados por las líneas eléctricas y cáncer no es biofísicamente plausible.

Una revisión llevada a cabo en 1996 por un grupo de importantes científicos de la Academia Nacional de las Ciencias de Estados Unidos concluyó que:

"Ninguna evidencia concluyente y consistente muestra que la exposición residencial a campos eléctricos y magnéticos produzca cáncer, efectos neurocomportamentales adversos o efectos sobre la reproducción y el desarrollo." .

De forma similar, una revisión de 1999 por parte del Instituto Nacional de la Salud de Estados Unidos concluyó que:

"La evidencia científica que sugiere que la exposición [a campos electromagnéticos de frecuencia industrial] supone algún riesgo para la salud es débil." .

Más aún, los mayores estudios sobre leucemia infantil y líneas eléctricas realizados informaron en 1997 y 1999 de que no podían encontrar ninguna evidencia significativa de una asociación entre líneas eléctricas y leucemia infantil.

Finalmente, una serie de estudios han mostrado que la exposición de animales durante toda su vida a campos magnéticos de frecuencia industrial no produce cáncer.

En general, la mayoría de los científicos consideran que la evidencia de que los campos de las líneas eléctricas causen o contribuyan al cáncer va de débil a inexistente.

Los campos de frecuencia industrial se denominan también **campos de frecuencia extremadamente baja** (en inglés, **ELF**). Estrictamente, en ingeniería eléctrica se denomina así a las frecuencias entre 30 y 300 Hz, pero el término se usa a menudo en la literatura biológica y de salud laboral para cubrir el rango de 0 a 3000 Hz (todo lo que esté por encima de los campos estáticos y por debajo de las radiofrecuencias).

El principal mecanismo por el cual las emisiones de radio y microondas producen efectos biológicos es por calentamiento (**efectos térmicos**). Es posible producir efectos térmicos incluso con bajos niveles de energía absorbida. Un ejemplo es el fenómeno conocido como "oír las microondas"; son sensaciones auditivas que una persona experimenta cuando su cabeza está expuesta a microondas pulsadas, como las generadas por un radar. El efecto de oír las microondas es térmico, pero puede observarse con niveles energéticos muy bajos.

Como los efectos térmicos se deben a las corrientes inducidas, no a los campos eléctricos o magnéticos directamente, pueden ser producidos por campos de frecuencias muy diferentes. Existen normas de seguridad aceptadas para prevenir daños térmicos significativos en las personas expuestas a microondas y ondas de radio, y también para personas expuestas a rayos láser, luz infrarroja y ultravioleta.

Los campos eléctricos asociados con las fuentes de frecuencia industrial existen siempre que haya tensión, con independencia de que la corriente esté fluyendo, o no. Estos campos eléctricos tienen poca capacidad de penetración en edificios e incluso en la piel. Los campos magnéticos asociados con las fuentes de frecuencia industrial existen sólo cuando la corriente está fluyendo. Estos campos magnéticos son difíciles de apantallar y penetran fácilmente en edificios y personas. Como los campos eléctricos de frecuencia industrial no pueden penetrar en el

cuerpo, está ampliamente aceptado que cualquier efecto biológico por exposición residencial a campos de frecuencia industrial tiene que ser debido a la componente magnética del campo, o a los campos eléctricos y corrientes que estos campos magnéticos inducen en el organismo.

El argumento de que los efectos de los campos de frecuencia industrial tienen que ser debidos a la componente magnética del campo ha sido objeto de debate recientemente. En particular, King ha argumentado que los campos eléctricos procedentes de líneas eléctricas penetran en la mayoría de los edificios y que las corrientes inducidas en el cuerpo por los campos eléctricos de las líneas eléctricas puede ser mayor que las corrientes inducidas por los campos magnéticos.

A frecuencias industriales la energía del fotón es de  $10^{10}$  veces más pequeña que la necesaria para romper incluso el más débil enlace químico. Sin embargo, existen mecanismos bien establecidos mediante los cuales los campos eléctricos y magnéticos de frecuencia industrial podrían producir efectos biológicos sin romper enlaces químicos. Los campos eléctricos de frecuencia industrial pueden ejercer fuerzas en moléculas cargadas y no cargadas, y en las estructuras celulares dentro de un tejido. Estas fuerzas pueden producir movimiento de partículas cargadas, orientar o deformar estructuras celulares, orientar moléculas dipolares o inducir voltajes a través de las membranas celulares. Los campos magnéticos de frecuencia industrial pueden ejercer fuerzas en estructuras celulares, pero como los materiales biológicos son esencialmente no magnéticos, estas fuerzas suelen ser muy débiles.

Los campos magnéticos de frecuencia industrial también pueden producir efectos biológicos a través de los campos eléctricos que inducen en el organismo. Estas fuerzas eléctricas y magnéticas se dan en presencia de la agitación térmica al azar (ruido térmico) y el ruido eléctrico procedente de muchas fuentes; y para producir cambios significativos en un sistema biológico los campos aplicados deben, en general, exceder con mucho los que existen en condiciones de exposición residencial típicas.

En general, los campos o corrientes inducidas en el organismo por campos eléctricos o magnéticos de frecuencia industrial son demasiado débiles para ser nocivos; y las normas de seguridad establecidas están para proteger a las personas de la exposición a campos de frecuencia industrial que puedan inducir corrientes peligrosas. Estas normativas de seguridad para campos (al contrario de las que protegen contra descargas por contacto con los conductores) se establecen para limitar las corrientes inducidas en el cuerpo a niveles por debajo de los que se dan de forma natural en el cuerpo. Los bien conocidos riesgos de la energía eléctrica, descargas y quemaduras, generalmente precisan que el sujeto entre en contacto directo con un superficie cargada (por ejemplo, un conductor cargado y el suelo), permitiendo que la corriente pase directamente por el cuerpo.

En las discusiones sobre efectos biológicos de las emisiones electromagnéticas no ionizantes se hace a menudo una distinción entre efectos no térmicos y térmicos. Esto se refiere al mecanismo del efecto: los efectos no térmicos son resultado de una interacción directa entre el campo y el organismo (por ejemplo, procesos fotoquímicos como la visión y la fotosíntesis) y los efectos térmicos son resultado del calentamiento (por ejemplo, calentamiento con hornos microondas o luz infrarroja). Se ha informado de muchos efectos biológicos de las emisiones electromagnéticas no ionizantes cuyos mecanismos son totalmente desconocidos, y es difícil (y no muy útil) intentar distinguir entre mecanismos térmicos y no térmicos para tales efectos.

Dentro de la calle (corredor o zona de paso; en inglés, **row o right of way**) de una línea eléctrica de alta tensión ( $115\text{-}765\text{ kV}$ ) los campos pueden alcanzar  $10\text{ }\mu\text{T}$  y  $10\text{ KV/m}$ . En el borde de la calle los campos estarán entre  $0.1\text{-}1\text{ }\mu\text{T}$  y  $100\text{-}1000\text{ V/m}$ . A diez metros de una línea de distribución de  $12\text{ kV}$  los campos estarán entre  $0.2\text{-}1\text{ }\mu\text{T}$  y  $2\text{-}20\text{ V/m}$ . Los campos magnéticos dependen de la distancia, la tensión, el diseño y la intensidad de corriente; los campos eléctricos solo se ven afectados por la distancia, la tensión y el diseño (no por el flujo de corriente).

Dentro de las viviendas los campos pueden variar desde  $150 \mu T$  y  $200 V/m$  a pocos cm de determinados electrodomésticos, hasta menos de  $0.02 \mu T$  y  $2 V/m$  en el centro de muchas habitaciones. Los electrodomésticos que tienen los campos magnéticos más altos son aquéllos que necesitan una alta intensidad de corriente (por ejemplo, aspiradoras, hornos de microondas, lavadoras, lavavajillas, batidoras, abrelatas, afeitadoras eléctricas). Los relojes y radiorrelojes eléctricos, que se decía eran fuentes importantes de exposición nocturna para los niños, no tienen un campo magnético especialmente elevado ( $0.04-0.06 \mu T$  a  $50 cm$ ). Los campos de los electrodomésticos disminuyen rápidamente con la distancia. De los electrodomésticos estudiados en casas británicas, sólo los hornos microondas, las lavadoras, lavavajillas y abrelatas generaban campos superiores a  $0.2 \mu T$  medidos a  $1 m$  de distancia.

Como los campos eléctricos de las líneas eléctricas tienen poca capacidad de penetrar en los edificios, hay muy poca correlación entre campos eléctricos y magnéticos dentro de las casas. En particular, mientras que los campos magnéticos en el interior de edificios situados cerca de líneas eléctricas están aumentados, los campos eléctricos no parecen ser igualmente elevados.

Se han observado exposiciones laborales superiores a  $100 \mu T$  y  $5000 V/m$  (por ejemplo, en soldadura al arco y montadores de cables). En trabajos "eléctricos" normales la exposición media varía desde  $0.5$  a  $4 \mu T$  y  $100-2000 V/m$ . Las exposiciones a campos eléctricos y magnéticos de frecuencia industrial en ambientes laborales están muy poco correlacionadas.

Los trenes eléctricos también pueden ser una importante fuente de exposición, puesto que los campos de frecuencia industrial a la altura de los asientos en los vagones de pasajeros puede llegar hasta  $60 \mu T$ .

Existen una serie de técnicas de ingeniería que pueden utilizarse para reducir los campos magnéticos producidos por líneas eléctricas, subestaciones, transformadores e incluso el cableado doméstico y los electrodomésticos de las casas. Sin embargo, una vez que los campos se han generado, el apantallamiento es muy difícil. Se pueden apantallar pequeñas áreas utilizando Mu-metal (una aleación de níquel-hierro-cobre), pero es muy caro. Áreas más grandes pueden apantallarse con metales más baratos, pero sigue siendo caro y, por lo general, su uso adecuado requiere considerables conocimientos técnicos.

Aumentar la altura de las torres, y por lo tanto la altura de los conductores por encima del nivel del suelo, reduce la intensidad del campo en el borde de la calle. El tamaño, espaciamiento y configuración de los conductores puede ser modificado para reducir los campos magnéticos, pero este método tiene limitaciones desde el punto de vista de la seguridad eléctrica. Si se instalan múltiples circuitos en el mismo conjunto de torres también se reduce el campo, aunque ello requiere generalmente torres más altas. Otra manera de reducir los campos magnéticos consiste en reemplazar las líneas por otras de mayor tensión.

Enterrar las líneas de transporte puede reducir de forma substancial los campos magnéticos. Esta reducción del campo magnético se debe a que las líneas subterráneas utilizan goma, plástico o aceite como material aislante en lugar de aire; esto permite que los conductores puedan situarse mucho más juntos, produciéndose una mayor cancelación de las fases. La reducción de los campos magnéticos en las líneas subterráneas no se debe al apantallamiento. Construir líneas de alta tensión subterráneas es muy caro, añadiendo costes que pueden superar el millón de dólares por milla.

La reducción del campo magnético al enterrar una línea aumenta con la distancia a la línea. En el centro del pasillo de una línea el campo generado por una línea enterrada puede ser superior que el generado por una línea aérea. Por ejemplo, en una comparación entre una línea aérea y otra subterránea de  $400 kV$  el campo en el centro del pasillo era de  $25 \mu T$  en la aérea y  $100 \mu T$  en la subterránea, pero a  $20$  metros el campo era  $10 \mu T$  para la aérea y  $1-2 \mu T$  para la subterránea.

Diferentes métodos de cableado hogareño pueden afectar apreciablemente a los campos magnéticos dentro de las casas. Una estrategia para reducir los campos del cableado doméstico consisten en intentar evitar los bucles de tierra, y ocuparse de cómo están cableados los circuitos con múltiples interruptores. En general, las instalaciones que se hacen de acuerdo a los códigos de cableado eléctrico modernos tienen un campo magnético menor.

Algunos estudios han informado que los niños que residen cerca de ciertos tipos de líneas eléctricas (líneas de distribución de alta intensidad y líneas de transporte a alta tensión) tienen tasas de leucemia, de tumores cerebrales y/o tasa global de cáncer más alta que la media. Las correlaciones no son fuertes y, en general, los estudios no han mostrado una relación dosis-respuesta. Cuando se miden realmente los campos de frecuencia industrial, la asociación generalmente desaparece. Muchos otros estudios no han mostrado ninguna correlación entre residir cerca de las líneas eléctricas y riesgo de leucemia infantil, tumores cerebrales infantiles o tasa global de cáncer infantil.

Todos, excepto uno, los estudios más recientes sobre líneas y leucemia o tumores cerebrales infantiles han fracasado en encontrar asociaciones significativas. La excepción es un estudio canadiense que mostraba una asociación entre la incidencia de leucemia infantil y algunas medidas de la exposición.

Con dos excepciones, todos los estudios sobre correlaciones entre cáncer en adultos y residir cerca de líneas eléctricas han sido negativos. Las excepciones son Wertheimer y Leeper, quienes informaron de un exceso la tasa global de cáncer y de tumores cerebrales, pero no de leucemia; y Li y col. que hallaron un exceso de leucemia, pero no de cáncer de mama o tumores cerebrales.

Es imposible realizar una revisión sencilla de la epidemiología, porque las técnicas epidemiológicas y los métodos de evaluación de la exposición en los distintos estudios son muy diferentes. Se ha intentado el meta-análisis, un método para combinar distintos estudios, pero los resultados son problemáticos debido a la falta de consenso sobre la mejor forma de medir la exposición. La siguiente tabla resume los riesgos relativos (RR) de los estudios de exposición residencial.

<b>Tipo de cáncer</b>	<b>Número de estudios</b>	<b>Mediana de RRs</b>	<b>Rango de RRs</b>
Leucemia infantil	18	1,15	0,80-1,80
Tumor cerebral infantil	8	1,30	0,80-1,90
Linfoma infantil	7	2,00	0,80-5,00
Tasa global de cáncer infantil	6	1,40	0,90-1,70
Leucemia en adultos	6	1,15	0,85-1,65
Tumor cerebral en adultos	4	0,95	0,70-1,40
Tasa global de cáncer en adultos	8	1,10	0,80-1,35

Como base de comparación, la tasa de incidencia de cáncer en adultos, ajustada para la edad, en Estados Unidos es de 3 por 1000 por año para todos los tipos de cáncer (es decir, un 0.3% de la población desarrolla un cáncer en un año dado), y de 1 por 10000 por año para la leucemia.

Gran parte de la atención pública y científica se ha centrado en la leucemia infantil, prestando menos atención a la leucemia en adultos, tumores cerebrales en niños y en adultos, linfomas y tasa global de cáncer infantil. Los estudios originales que sugirieron una asociación entre líneas eléctricas y cáncer infantil utilizaron una combinación del tipo de cableado y la distancia a la vivienda como medida sustitutoria de la exposición, un sistema denominado "código de cables". Otros estudios han utilizado la distancia a las líneas de transporte o subestaciones como medida de la exposición, y algunos estudios han utilizado campos medidos en el momento o campos históricos calculados. En general, los diferentes métodos para evaluar la exposición

no están bien correlacionados ni entre sí ni con los campos medidos en el momento; ninguna de estas medidas de la exposición es manifiestamente superior, y ninguna es utilizada por la totalidad de los principales estudios.

Históricamente, una de las características más enigmáticas de los estudios de leucemia infantil era que la correlación de la exposición con la incidencia del cáncer parecía ser mayor cuando el código de cables o la proximidad a las líneas eléctricas se utilizaba como métrica de la exposición, más que cuando los campos eran medidos directamente en las casas. Esto ha llevado a sugerir que la asociación de cáncer infantil con residir cerca de líneas eléctricas podría ser debida a un factor distinto al campo de frecuencia industrial. Por ejemplo, se ha sugerido que el nivel socioeconómico podría ser un factor de confusión, ya que está relacionado con el riesgo de cáncer, y los grupos "expuestos" y "no expuestos" en algunos estudios pueden ser de niveles socioeconómicos distintos. Esto es particularmente importante en los estudios de exposición residencial en Estados Unidos que se basan en los códigos de cables, puesto que los tipos de código de cables relacionados con cáncer infantil se encuentran fundamentalmente en barrios más viejos y pobres, y/o en barrios con una alta proporción de casas alquiladas. Sin embargo, en 1997 y 1999, los mayores estudios realizados hasta la fecha sobre líneas eléctricas y leucemia infantil no encontraron ninguna asociación entre leucemia y código de cables o campos medidos; y los más recientes estudios sobre tumores cerebrales no han hallado ninguna relación con código de cables. Estos últimos estudios indican que la "paradoja del código de cables" no existe realmente.

Debido a la falta de consenso sobre el parámetro correcto de medida de la exposición, y a la falta de un parámetro común a la mayoría de los estudios, no se puede hacer un resumen sencillo de la epidemiología. Los intentos de hacer una revisión se han frustrado por el hecho de que no se puede realizar un único análisis. En su lugar, se obtienen un grupo de análisis basados en diferentes definiciones de exposición, la mayoría de los cuales excluyen algunos estudios, y ninguno de los cuales puede ser considerado como el mejor.

Por ejemplo, una revisión realizada en 1997 por el Consejo Nacional de Investigación de la Academia Nacional de las Ciencias de los Estados Unidos llevó a cabo un complejo meta-análisis y concluyó que: "los códigos de cables están asociados con un incremento estadísticamente significativo en, aproximadamente, un factor 1.5 de leucemia infantil". Esta conclusión está basada en sólo uno de los ocho diferentes meta-análisis sobre leucemia infantil llevados a cabo por el comité del Consejo Nacional de Investigación, un análisis que excluía siete de los once estudios y utilizaba un punto de corte arbitrario para definir quien estaba expuesto. Un segundo análisis de los mismos cuatro estudios utilizó un punto de corte superior y encontró un pequeño aumento no significativo. Los otros seis análisis realizados por el comité dieron riesgos relativos que variaban entre 0.8 y 1.7.

Los estudios de leucemia infantil en su conjunto no muestran una asociación consistente entre residir cerca de líneas eléctricas e incidencia de leucemia.

Los estudios que muestran una relación entre cáncer y líneas eléctricas no proporcionan ninguna guía consistente sobre qué distancia o nivel de exposición está asociado con un incremento en la incidencia de cáncer. Los estudios han utilizado una amplia variedad de técnicas para medir la exposición, y difieren en el tipo de líneas que han estudiado. Los estudios en Estados Unidos se han basado principalmente en líneas de distribución local, mientras que en los estudios europeos se han basado estrictamente en líneas de transporte de energía a alta tensión y/o transformadores.

**Medidas de campo:** Varios estudios han medido campos de frecuencia industrial en domicicios. Se han realizado medidas puntuales, de pico y promedios a lo largo de 24 horas y 48 horas. Sólo uno de los estudios que utilizan medidas del campo ha mostrado una relación entre exposición y cáncer. Dependiendo del tipo de línea y de su intensidad de corriente, los campos

magnéticos que genera a una distancia de 20-50 metros son menores que los de una vivienda típica.

**Proximidad a las líneas:** Muchos estudios han utilizado la distancia entre la línea y las viviendas como medida de los campos de frecuencia industrial. Cuando algo que podemos medir (la distancia a la línea) se utiliza como un índice de lo que realmente queremos medir (el campo magnético), lo denominamos "medida sustitutoria o subrogada". Tres de los diez estudios que han utilizado la distancia a las líneas como una medida sustitutoria de la exposición han mostrado una relación entre proximidad a las líneas y cáncer. Los más importantes son un estudio en niños que mostró un incremento en la incidencia de leucemia infantil en viviendas situadas a menos de 50 m de las líneas de transporte a alta tensión, y un estudio en adultos que mostró un incremento en la incidencia de leucemia en viviendas situadas a menos de 100 metros de líneas de transporte a alta tensión.

**Código de cables** (o configuración de cables): Los estudios originales sobre líneas eléctricas en Estados Unidos usaban una combinación del tipo de cable (distribución frente a transporte, número y grosor de cables) y la distancia de los cables a la vivienda como medida sustitutoria de la exposición. Esta técnica se conoce como "código de cables". Tres estudios que han utilizado el código de cables han informado de una relación entre cáncer infantil y el código "configuración de alta intensidad". Dos de estos estudios no consiguieron encontrar una relación entre exposición y cáncer cuando se hicieron mediciones reales; el tercer estudio no hizo medidas reales. Los estudios más recientes sobre códigos de cables y cáncer infantil no han encontrado asociaciones significativas.

Los códigos de cables son estables a lo largo del tiempo, pero no se correlacionan bien con los campos medidos. El esquema de código de cables se desarrolló para áreas urbanas de Estados Unidos, y no es fácilmente aplicable en otros países. Se ha sugerido que los códigos de cables pueden ser una medida más apropiada para estimar los campos magnéticos a largo plazo que las medidas reales, pero los análisis han mostrado que esto es poco probable. Un problema más serio cuando se utiliza el código de cables para estimar la exposición al campo magnético es que el código de cables se correlaciona fuertemente con cosas que no tienen nada que ver con el campo magnético (como la antigüedad de la vivienda, densidad de tráfico y nivel socioeconómico).

**Campos históricos calculados:** Muchos estudios recientes han utilizado las bases de datos de las empresas eléctricas y mapas para calcular qué campos habrían sido generados en el pasado por líneas eléctricas de alta tensión. Normalmente, se utiliza como medida de exposición el campo calculado en el momento del diagnóstico o el campo promedio para un número de años previos al diagnóstico. Estas exposiciones calculadas excluyen explícitamente las contribuciones de otras fuentes, tales como líneas de distribución, cableado doméstico o electrodomésticos. No hay forma de comprobar la exactitud de los campos históricos calculados.

Varios estudios han publicado que las personas que trabajan en algunas profesiones eléctricas tienen una tasa más alta de lo que cabría esperar de algunos tipos de cáncer. Los estudios originales analizaron sólamente leucemia. Algunos estudios posteriores también incluyeron tumores cerebrales, linfoma y/o cáncer de mama. Al igual que en los estudios residenciales, hay muchos estudios negativos, correlaciones débiles y relaciones dosis-respuesta inconsistentes. Además, muchos de esos estudios están basados en categorías laborales, no en exposiciones medidas.

El meta-análisis de los estudios laborales es todavía más difícil que para los residenciales. Primero, se utilizan varias técnicas epidemiológicas, y no se deberían combinar estudios que utilizan diferentes técnicas. Segundo, se utiliza una amplia gama de definiciones de "trabajos eléctricos", y muy pocos estudios miden realmente la exposición. Por último, no hay consenso

sobre la forma apropiada de medir la exposición. La siguiente tabla resume los riesgos relativos (RR) de los estudios de exposición laboral.

<b>Tipo de cáncer</b>	<b>Número de estudios</b>	<b>Mediana de RR</b>	<b>Rango de RR</b>
Leucemia (todos los estudios)	38	1,30	0,80-2,50
Leucemia (estudios basados en campos medidos)	8	1,20	0,60-2,50
Tumores cerebrales	29	1,20	0,90-2,20
Linfoma	11	1,20	0,90-1,80
Pulmón	14	1,05	0,65-1,45
Cáncer de mama en mujeres	8	1,10	0,85-1,50
Cáncer de mama en hombres	10	1,25	0,65-2,80
Todos los tipos de cáncer	15	1,05	0,85-1,15

### Estudios de laboratorio

A pesar de que todavía se conoce poco sobre las causas de cánceres específicos, se comprenden lo suficientemente bien los mecanismos de la carcinogénesis como para que los estudios celulares y en animales puedan proporcionar información relevante para determinar si un agente causa o contribuye al cáncer. Actualmente, la investigación indica que la carcinogénesis es un proceso en varias fases causado por una serie de daños en el material genético de las células. No es sorprendente que este modelo se conozca como "**Modelo de carcinogénesis de múltiples etapas**".

En estudios que bordean la frontera entre epidemiología y laboratorio se pueden analizar las células blancas de la sangre (linfocitos) de trabajadores expuestos laboralmente a un agente en busca de aberraciones cromosómicas, intercambio de cromátides hermanas (SCE) o formación de micronúcleos. La interpretación de estos estudios es compleja, ya que todos tienen los mismos problemas de estimación de la dosis, factores de confusión y sesgos que caracterizan a los estudios epidemiológicos. Se han publicado algunos estudios de este tipo. A primera vista estos estudios parecen muy contradictorios, algunos estudios muestran efectos significativos y otros no.

Un aspecto estadístico de gran importancia que debe tenerse en cuenta es que todos los estudios analizan múltiples objetivos y subgrupos, creando un enorme problema de comparaciones múltiples. Skyberg y col., por ejemplo, observaron daño cromosómico en trabajadores expuestos; pero este incremento se encontró sólamente en un subgrupo, y sólo en una de varias pruebas, y tiene un valor de probabilidad de sólo 0.04. Con cualquier ajuste para comparaciones múltiples, la significación estadística del efecto genotóxico observado por Skyberg y col. desaparece. El problema de las comparaciones múltiples también es aplicable a los hallazgos de Valjus y col.

Incluso con los problemas de las comparaciones múltiples, se pueden apreciar varios hechos. Los efectos observados se dan predominantemente en fumadores, grupo donde es de esperar un aumento de anomalías cromosómicas. Los efectos también se ven predominantemente en trabajadores expuestos a descargas eléctricas (las descargas eléctricas son fenómenos exclusivos de ambientes eléctricos con fuentes de alta tensión, donde los campos eléctricos alcanzan intensidades de hasta  $20 \text{ kV/m}$ , y las densidades de corriente corporales pueden alcanzar varios amperios). Finalmente, los aumentos referidos se limitan a aberraciones cromosómicas, sin efecto sobre el intercambio de cromátides hermanas (SCE); esto es algo sorprendente, ya que el análisis de SCE se considera generalmente más sensible a agentes genotóxicos que el análisis de aberraciones cromosómicas.

En resumen, los estudios citogenéticos de trabajadores expuestos a campos eléctricos y magnéticos intensos de frecuencia industrial no proporcionan evidencia consistente de que estos campos sean genotóxicos. Los indicios de efectos genotóxicos, no replicados, quedan confinados a fumadores, ex-fumadores, y a trabajadores expuestos a descargas eléctricas.

Por otra parte, los estudios en animales expuestos a largo plazo realizados hasta ahora no proporcionan pruebas que hayan sido replicadas de que la exposición prolongada a campos de frecuencia industrial esté asociada con leucemia, tumores cerebrales o cáncer de mama, o produzcan genotoxicidad. Es más, hay publicados unos 60 estudios sobre campos de frecuencia industrial y genotoxicidad, que incluyen unos 150 test distintos de actividad genotóxica. Estos análisis son mayoritariamente negativos, a pesar del hecho de que muchos han utilizado intensidades de campo muy elevadas. De los estudios que muestran indicios de genotoxicidad, la mayoría contienen una mezcla de resultados positivos y negativos, o resultados ambiguos. Como la mayoría de estas publicaciones contienen muchos subestudios, la presencia de algunos estudios con resultados positivos o mixtos es de esperar por simple azar. Ninguno de los estudios positivos ha sido replicado, y algunos de ellos no han podido ser replicados cuando se ha intentado. Muchos de los informes positivos han utilizado condiciones de exposición (por ejemplo, descargas eléctricas, campos pulsados, campos de  $20T$  y superiores) que son muy diferentes de las que se encuentran en la vida real.

Además, hay poca evidencia de que los campos de frecuencia industrial tengan actividad epigenética en cultivos celulares, y ninguna evidencia de que tengan actividad epigenética bajo condiciones de exposición reales.

**La hipótesis "Líneas eléctricas y melatonina":** Algunos investigadores han formulado la hipótesis de que los campos de frecuencia industrial podrían suprimir la producción de la hormona melatonina, y que la melatonina podría tener actividad preventiva frente al cáncer. Existen informes de que los campos eléctricos y los campos magnéticos estáticos pueden afectar a la producción de melatonina, pero los estudios que han usado campos magnéticos de frecuencia industrial han mostrado claramente la ausencia de tales efectos. El segundo componente de la hipótesis, que niveles bajos de melatonina están asociados con un incremento de cáncer, tampoco está probado. En resumen, ninguno de los componentes de la hipótesis de la melatonina, es decir, que los campos de frecuencia industrial puedan reducir la melatonina, o que la reducción de la melatonina cause un incremento de cáncer, tienen un soporte experimental sólido. En seres humanos, no hay evidencias para apoyar ninguna de los componentes de la hipótesis. Lo que la evidencia sugiere es que cualquier efecto se limitaría al cáncer de mama, y posiblemente en otros cánceres hormonodependientes, como el cáncer de próstata.

Los mecanismos biológicos conocidos, a través de los cuales campos magnéticos de frecuencia industrial intensos (por encima de  $500 \mu T$ ) causan efectos biológicos, no son relevantes para campos por debajo de, aproximadamente,  $50 \mu T$ . Los efectos de campos intensos tienen que ver con las corrientes eléctricas inducidas, y las corrientes inducidas en el organismo por campos menores de  $50 \mu T$  son cualitativamente similares, pero mucho más débiles que las que se dan en el cuerpo de forma natural

Las interacciones de los campos sinusoidales de frecuencia industrial con el cuerpo humano son muy débiles a los niveles ambientales típicos. Numerosos investigadores han especulado acerca de cómo los campos de frecuencia industrial podrían superar los problemas de la relación señal-ruido a través mecanismos de resonancia o de amplificación de señales:

**Corrientes inducidas:** Los campos eléctricos y magnéticos de frecuencia industrial pueden inducir corrientes eléctricas, y estas corrientes pueden producir efectos biológicos si son lo suficientemente fuertes. Sin embargo, las corrientes inducidas en el organismo por campos por debajo de  $1 kV/m$  ó  $50 \mu T$  son más débiles que los que existen de forma natural en el organismo. Por lo tanto, si los campos sinusoidales de frecuencia industrial de la magnitud que se encuentra en ambientes residenciales tienen efectos biológicos, es poco probable que sean debidos a las corrientes eléctricas inducidas.

**Material biológico magnético:** Se han encontrado pequeñas partículas magnéticas (magnetita  $Fe_3O_4$ ) en bacterias que se orientan en el campo magnético de la Tierra; estas partícu-

las pueden también existir en peces, abejas y aves. La presencia de magnetita en las células de los mamíferos está todavía sin demostrar. Kirschvink ha sugerido que los campos magnéticos de frecuencia industrial podrían causar efectos biológicos al actuar directamente sobre estas partículas. Sin embargo, los cálculos muestran que eso requeriría campos de 50-60 Hz de 2-5 microT o superiores.

**Reacciones con radicales libres:** Los campos magnéticos estáticos (DC) pueden afectar al ritmo de las reacciones químicas donde intervengan pares de radicales libres. Como los radicales libres implicados tienen un tiempo de vida media en el rango de microsegundos y los campos de frecuencia industrial tienen ciclos en el rango de milisegundos, un campo de frecuencia industrial actúa como un campo estático en la escala de tiempo en la que estas reacciones tienen lugar. Los efectos de los campos de frecuencia industrial se sumarían a los del campo magnético terrestre ( $30-70 \mu T$ ), por lo que no es de esperar efectos biológicos por debajo de  $50 \mu T$ . Además, si se supone que los efectos biológicos provocados por estas reacciones con radicales libres estuvieran implicados en la carcinogénesis, los estudios relevantes serían los que utilizan campos estáticos; y los estudios sobre actividad genotóxica y epigenética de los campos estáticos han sido negativos en su inmensa mayoría (ver más arriba). Eichwald y Wallczek han desarrollado un argumento teórico que sugiere que los efectos bioquímicos mediados por el mecanismo de pares de radicales podría explicar los efectos de campos de frecuencia industrial de  $1000 \mu T$  o superiores. Adair, por el contrario, ha presentado argumentos teóricos de que los efectos debidos al mecanismos de pares de radicales son bastante improbables a niveles de  $5 \mu T$  o inferiores.

**Teorías de resonancia:** Algunas de las restricciones biofísicas podrían ser superadas si hubiera mecanismos de resonancia que hicieran a las células (u organismos) especialmente sensibles a los campos de frecuencia industrial. Se han propuesto diversos mecanismos de resonancia, el más reciente por Lednev y por Blanchard y Blackman. Hasta ahora, ninguna de estas teorías ha superado la crítica científica, y muchas de las evidencias experimentales que dieron lugar a estas teorías no pueden ser replicadas de forma independiente. Existen también severas incompatibilidades entre las características biofísicas conocidas de las células y las condiciones requeridas por dichas resonancias. Hay que señalar que las teorías de resonancia predecirían efectos biológicos distintos en Estados Unidos ( $60 \text{ Hz}$ ) que en el resto del mundo ( $50 \text{ Hz}$ ).

Los campos cercanos a electrodomésticos con motores eléctricos de corriente alterna (AC) pueden superar los  $100 \mu T$  y  $200 \text{ V/m}$ . Si estos electrodomésticos se utilizan muy cerca del cuerpo, como por ejemplo maquinillas de afeitar eléctricas y secadores de pelo, pueden darse exposiciones muy altas en partes concretas del cuerpo. Se han realizado estudios epidemiológicos sobre la relación existente entre uso de electrodomésticos y cáncer. Estos estudios han mostrado una relación muy poco consistente entre el uso de electrodomésticos y cáncer, aunque uno de estos estudios ha mostrado una disminución de leucemias entre los adultos usuarios de electrodomésticos personales.

### Estudios Recientes

En 1993-94 se publicaron cinco nuevos estudios residenciales en Europa. El estudio sueco sobre niños mostró los riesgos relativos más altos y obtuvo la mayor atención. En contraste con los estudios previos en Estados Unidos, que estimaron la exposición procedente de líneas tanto de transporte como de distribución, estos nuevos estudios se restringieron a líneas y subestaciones de alta tensión. La exposición se estimó con medidas puntuales, cálculos retrospectivos y distancia a las líneas eléctricas.

Los autores de los tres estudios escandinavos sobre cáncer en niños han efectuado un análisis combinado de sus datos. Este análisis está basado en los campos históricos calculados retrospectivamente, que fue la única medida común de exposición en los tres estudios. Los rangos

de riesgos relativos (RR) de este meta-análisis se muestran a continuación en comparación con los estudios anteriores y posteriores.

Tipo de Cáncer infantil	Rango de RRs en los estudios previos	Rango de RRs en los estudios escandinavos	Rango de RRs en los estudios posteriores
Leucemia	0.9-2.2	1.0-3.9	0.7-2.0
Linfoma	ninguno	0.3-3.7	1.2-2.5
Tumores cerebrales	1.7-3.5	0.7-3.2	0.6-1.4
Tasa global de cáncer	1.3-1.9	0.9-2.1	0.9-1.3

Dos estudios de 1996 sobre tumores cerebrales infantiles y residir cerca de líneas eléctricas no mostraron evidencia de una asociación ni con campos medidos ni con el código de cables. Un estudio europeo de 1997 sobre leucemia infantil, linfoma, tumores cerebrales y tasa global de cáncer no muestra evidencia alguna de asociación ni con la distancia a líneas eléctricas ni con los campos calculados. En 1997 un segundo estudio europeo encontró un aumento no significativo de leucemia en niños cuyos dormitorios tenían un promedio de campo magnético superior a  $0.2 \mu T$ . Un tercer estudio de 1997 no encontró asociación entre leucemia infantil con campos medidos ni códigos de cable. Un estudio de 1999 no halló una asociación entre leucemia infantil con campos medidos ni con código de cables.

Los estudios escandinavos en adultos que viven cerca de líneas de alta tensión no muestran incrementos en la tasa global de cáncer, leucemia o tumores cerebrales. Tan sólo el estudio de 1997 en Taiwan muestra algún indicio de asociación entre cáncer en adultos y residir cerca de líneas de transporte de energía eléctrica.

Se dice frecuentemente que Suecia o Dinamarca han decidido establecer una legislación sobre los niveles de campo magnético generados por las líneas de transporte de energía eléctrica, o que han decidido trasladar líneas lejos de los colegios. Sin embargo, declaraciones oficiales en ambos países a lo largo de los años muestran que ni están legislando respecto a los campos de las líneas ni trasladando líneas lejos de las escuelas.

En 1996 el gobierno Sueco anunció un "**principio de cautela**" o "**principio precautorio**":

- "Las autoridades nacionales [Suecas] recomiendan un principio de cautela basado principalmente en riesgos de cáncer que no se pueden descartar..."
- "Las investigaciones presentadas hasta el momento no proporcionan una base ni justifican el establecimiento de ningún valor límite u otras restricciones obligatorias sobre los campos eléctricos y magnéticos de baja frecuencia..."
- " Las autoridades nacionales se unen en recomendar los siguientes principios de cautela: Si se pueden adoptar medidas que reduzcan la exposición, con un gasto razonable y con consecuencias razonables en todos los demás aspectos, se debería hacer un esfuerzo para reducir los campos que estén muy por encima de lo que puede considerarse como normal en el ambiente en cuestión. En lo que concierne a nuevas instalaciones eléctricas, los esfuerzos deben hacerse en el momento de planificación, para diseñarlas y situarlas de forma que se limite la exposición...".

La declaración sueca incluye algunos ejemplos en los que se ha intentado medir el coste de la mitigación. Asumiendo una incidencia de leucemia infantil de 1 caso por 25.000 y año, y un riesgo relativo de 2,7; el coste de cada caso evitado varía entre 200.000 y 50.000.000 dólares estadounidenses. Para poner esto en perspectiva, el documento hace notar que se considera razonable gastar hasta 1.000.000 dólares para evitar una muerte debida a exposición a radiación ionizante.

Un estudio caso-control sobre líneas eléctricas y leucemia infantil, realizado por el Instituto Nacional del Cáncer de Estados Unidos, fue publicado en julio de 1997. Este era el mayor es-

tudio realizado hasta esa fecha, y no encuentra ninguna asociación entre campos medidos y leucemia infantil, ni entre códigos de cables y leucemia infantil.

- Para una media ponderada en el tiempo superior a  $0.2 \mu T$  en los dormitorios, el estudio encuentra un riesgo relativo de  $1.2 (0.9-1.8)$ , con una tendencia estadísticamente no significativa.
- Para una "configuración muy alta intensidad" de código de cables (según lo definen Wertheimer y Leeper) el estudio encuentra un riesgo relativo de  $0.9 (0.5-1.6)$ .

El estudio era especialmente importante por la conclusión de un informe de la Academia Nacional de las Ciencias de Estados Unidos de 1996 que decía que la única evidencia epidemiológica para asociar líneas eléctricas y cáncer era la asociación entre categorías altas de códigos de cable y leucemia. El informe de la Academia Nacional de las Ciencias daba un riesgo relativo de  $1.5 (1.2-1.8)$  para esta asociación, basándose en los cuatro estudios previos. Para esta misma definición de exposición, este estudio del Instituto Nacional del Cáncer encuentra un riesgo relativo de  $1.0 (0.7-1.3)$ .

McBride y col. (1999) es el estudio más amplio realizado hasta la fecha (399 casos y 399 controles emparejados), y no encuentra evidencia de ninguna asociación entre líneas eléctricas y leucemia infantil. El estudio es notable por su tamaño y por el amplio rango de métricas de la exposición probadas. Junto con el estudio del Instituto Nacional del Cáncer de Estados Unidos de 1997, este nuevo estudio en esencia elimina todas la bases de la sugerencia de una asociación causal entre exposición a campos generados por las líneas eléctricas y la incidencia de leucemia infantil.

Los hallazgos del estudio de McBride y col. son:

- Los campos medidos con monitores personales (promedios de 48 horas) no estaban asociados con leucemia infantil, sino con:
  - un riesgo relativo de  $0.6 (0.3-1.2)$  para aquellos con la exposición más elevada a campos magnéticos (superior a  $0.27 \mu T$ ).
  - un riesgo relativo de  $0.8 (0.5-1.5)$  para aquellos con la exposición más elevada a campos eléctricos (superior a  $25 V/m$ ).
- Los campos reales medidos en las viviendas no estaban asociados con leucemia infantil, sino con:
  - un riesgo relativo de  $0.7 (0.4-1.3)$  para aquellos con la exposición más elevada a campos magnéticos (superior a  $0.27 \mu T$ ).
- Las reconstrucciones históricas del campo magnético no estaban asociadas con leucemia infantil, sino con:
  - un riesgo relativo de  $0.6 (0.3-1.1)$  para aquellos con la exposición más elevada 2 años antes del diagnóstico (superior a  $0.27 \mu T$ ).
  - un riesgo relativo de  $1.0 (0.6-1.9)$  para aquellos con la exposición media durante toda la vida más alta (superior a  $0.27 \mu T$ ).
- Los códigos de cables no están asociados con leucemia infantil, sino con:
  - un riesgo relativo de  $1.2 (0.6-2.3)$  para aquellos que residían en el momento del diagnóstico en una vivienda con una "configuración de muy alta intensidad" (según lo definen Wertheimer y Leeper).
  - un riesgo relativo de  $0.8 (0.4-1.6)$  para aquellos que residían 2 años antes del diagnóstico en una vivienda con una "configuración de muy alta intensidad" (según lo definen Wertheimer y Leeper).
  - un riesgo relativo de  $1.2 (0.7-1.9)$  para aquellos que residían en el momento del diagnóstico en una vivienda con una "configuración de alta intensidad" (según lo definen Kaune y Savitz ).

**El informe del NIEHS de 1999**

La revisión de 1999 de la Academia Nacional de las Ciencias proporciona una visión de conjunto del amplio trabajo de laboratorio realizado en el programa **EMF-RAPID** de Estados Unidos, gran parte del cual no ha sido publicado todavía. El informe de 1999 del **NIEHS** para el Congreso de los Estados Unidos proporciona una compacta revisión de los campos de frecuencia industrial y la salud (**NIEHS1999.PDF**).

**Del resumen ejecutivo:**

La evidencia científica que sugiere que la exposición [a campos de frecuencia industrial] supone un riesgo para la salud es débil. La evidencia más fuerte de efectos en la salud proviene de asociaciones observadas en poblaciones humanas con dos formas de cáncer: leucemia infantil y leucemia linfocítica crónica en adultos profesionalmente expuestos. Mientras que el apoyo por parte de estudios individuales es débil, los estudios epidemiológicos muestran, para algunos métodos de medir la exposición, un patrón claramente consistente de un pequeño incremento del riesgo con el incremento de la exposición, que es algo más débil para la leucemia linfocítica crónica que para la leucemia infantil. Por el contrario, los estudios sobre mecanismos y la literatura sobre toxicología animal no consigue mostrar ningún patrón consistente a lo largo de los estudios, aunque se ha informado de hallazgos esporádicos de efectos biológicos (incluyendo un incremento de cáncer en animales). No se ha observado ningún incremento de leucemias en animales de experimentación...

Los estudios epidemiológicos tienen serias limitaciones en su capacidad para demostrar una relación causa-efecto, mientras que los estudios de laboratorio, por su diseño, pueden mostar claramente que causa y efecto son posibles. Virtualmente toda la evidencia de laboratorio en animales y humanos y la mayor parte del trabajo sobre mecanismos realizado en células no consigue apoyar una relación causal entre exposición a niveles ambientales [de campos de frecuencia industrial] y cambios en la función biológica o enfermedades. La ausencia de hallazgos positivos en animales o en estudios sobre mecanismos debilita la creencia de que esta asociación [epidemiológica] sea realmente debida a campos de frecuencia industrial, pero los hallazgos epidemiológicos no pueden ser completamente desestimados.

El NIEHS concluye que la exposición [a campos de frecuencia industrial] no puede ser reconocida como completamente segura debido a la débil evidencia científica de que puede suponer un riesgo de leucemia. En nuestra opinión, este hallazgo es insuficiente para justificar el establecimiento de regulaciones agresivas. Sin embargo, puesto que virtualmente todo el mundo en Estados Unidos utiliza la energía eléctrica y, por lo tanto, está expuesto de forma rutinaria [a campos de frecuencia industrial], se justifican acciones regulatorias pasivas, como un énfasis continuado en la educación tanto del público como de la comunidad de cara a una reducción de la exposición.

**De las Conclusiones y Recomendaciones del informe del NIEHS para el Congreso:**

Como parte de la evaluación del programa EMF-RAPID sobre los efectos relacionados con la salud [de los campos de frecuencia industrial], un panel internacional de 30 científicos se reunió en junio de 1998 para revisar el peso de las evidencias científicas. Utilizando un criterio desarrollado por la Agencia Internacional para la Investigación sobre el Cáncer, ninguno de los miembros del Grupo de Trabajo consideró que la evidencia fuera suficientemente fuerte para etiquetar la exposición [a campos de frecuencia industrial] como un "conocido cancerígeno para humanos" o "probable cancerígeno para humanos". Sin embargo, la mayoría de los miembros de este grupo de trabajo (19 de los 28 miembros) concluyeron que la exposición a [los campos electromagnéticos generados por] las líneas eléctricas es un "posible cancerígeno para humanos". Esta decisión se basa fundamentalmente en la "limitada evidencia de un incremento del riesgo de leucemia infantil con la exposición residencial y un incremento de la incidencia de leucemias linfociíticas crónicas (CLL) asociado con la exposición laboral". Para otros cánceres o problemas de salud no relacionados con cáncer, el grupo de trabajo catalogó los datos experimentales como que proporcionan una

evidencia mucho más débil o ningún apoyo para efectos debidos a la exposición [a campos de frecuencia industrial].

El NIEHS coincide en que las asociaciones de leucemia infantil y leucemia linfocítica crónica observadas no pueden ser descartadas fácilmente como hallazgos debidos al azar o negativos. La falta de hallazgos positivos en animales o en estudios sobre mecanismos debilita la creencia de que esta asociación sea realmente debida a los campos de frecuencia industrial, pero este hallazgo no puede ser completamente desestimado. El NIEHS también está de acuerdo con la conclusión de que no hay suficiente evidencia de un riesgo de otros cánceres o problemas de salud no relacionados con cáncer para justificar la preocupación...

El Programa Nacional de Toxicología examina periódicamente las exposiciones ambientales para determinar hasta qué punto constituyen un riesgo de cáncer para la salud y genera el "Informe sobre cancerígenos", un listado de agentes que son "conocidos cancerígenos para humanos" o "razonablemente se prevé que sean cancerígenos para humanos". En nuestra opinión, basándonos en la evidencia disponible hasta la fecha, la exposición [a campos electromagnéticos de frecuencia industrial] no estaría incluido en el "Informe sobre cancerígenos" como un agente que "razonablemente se prevé que sea cancerígeno para humanos". Esto se basa en la limitada evidencia epidemiológica y en los hallazgos del programa EMF-RAPID que no indicaban un efecto de la exposición [a campos electromagnéticos de frecuencia industrial] en animales experimentales o una base para un mecanismo para la carcinogénesis.

### **En relación a posibles acciones regulatorias, el informe del NIEHS para el Congreso indica:**

El NIEHS sugiere que el nivel y la fuerza de la evidencia que apoya que la exposición [a campos de frecuencia industrial] es un peligro para la salud humana son insuficientes para justificar acciones regulatorias agresivas; por lo tanto, no recomendamos acciones como una normativa estricta sobre electrodomésticos y un programa nacional para enterar todas las líneas de transporte y distribución. En su lugar, la evidencia sugiere medidas pasivas como un énfasis continuado en la educación tanto del público como de la comunidad de cara a una reducción de la exposición. El NIEHS sugiere que la industria eléctrica continúe con sus prácticas actuales al instalar líneas eléctricas para reducir la exposición y continúe investigando maneras de reducir la generación de campos magnéticos alrededor de las líneas de transporte y distribución sin crear nuevos riesgos. También alentamos el uso de tecnologías que reduzcan la exposición debida a líneas de distribución locales, siempre que no se incrementen otros riesgos, como los de electrocución accidental o fuego.

### **Conclusiones**

De los estudios científicos se pueden extraer ciertas conclusiones:

- Existe un amplio consenso en la comunidad científica de que no se ha establecido una relación causal entre exposición residencial a campos de frecuencia industrial y riesgos para la salud humana.
- Existe un amplio consenso respecto a que **no ha sido y no puede ser demostrado que la exposición a estos campos sea absolutamente segura**.
- También existe un creciente consenso de que si hay un peligro para la salud, éste es muy pequeño o está restringido a pequeños subgrupos; es decir, la posibilidad de un riesgo grande y generalizado ha sido descartada.
- La controversia científica se centra en si la peligrosidad de los campos de frecuencia industrial puede ser demostrada en futuros estudios; y otros aspectos, como qué estudios adicionales deben realizarse y qué prioridad hay que dar a estos estudios.

Un cierto número de organizaciones profesionales y gubernamentales han publicado recomendaciones de exposición. Las más relevantes son las emitidas por el Consejo Nacional de Protección Radiológica del Reino Unido (National Radiological Protection Board, **NRPB-UK**), la Comisión Internacional de Protección Contra la Radiación No Ionizante (International Commission on Non Ionizing Radiation Protection, **ICNIRP**), y la Conferencia Americana de Higie-

nistas Industriales Gubernamentales (American Conference of Governmental Industrial Hygienists, ACGIH).

Un resumen de estas recomendaciones es:

- Residencial
  - NRPB-UK:
    - 50 Hz: 1600  $\mu T$  (16 G) y 12 kV/m
    - 60 Hz: 1330  $\mu T$  (13.3 G) y 10 kV/m
    - Este documento también contiene recomendaciones para otras frecuencias.
  - ICNIRP
    - 50 Hz: 100  $\mu T$  (1 G) y 5 kV/m
    - 60 Hz: 84  $\mu T$  (0.84 G) y 4.2 kV/m
    - Este documento también contiene recomendaciones para otras frecuencias
- Industrial
  - NRPB-UK:
    - 50 Hz: 1600  $\mu T$  (16 G) y 12 kV/m
    - 60 Hz: 1330  $\mu T$  (13.3 G) y 10 kV/m
    - Este documento también contiene recomendaciones para otras frecuencias.
  - ACGIH:
    - A 60 Hz: 1000  $\mu T$  (10 G)
    - Este documento también contiene recomendaciones para otras frecuencias.
  - ICNIRP
    - 50 Hz: 500  $\mu T$  (5 G) y 10 kV/m
    - 60 Hz: 420  $\mu T$  (4.2 G) y 8.3 kV/m
    - Este documento también contiene recomendaciones para otras frecuencias.

El funcionamiento de los marcapasos puede verse afectado por campos de frecuencia industrial. En algunos ambientes laborales pueden existir campos lo suficientemente elevados como para interferir con el funcionamiento de los marcapasos, y puede que incluso existan en algunos ambientes no laborales. La sensibilidad de los marcapasos cardíacos y la gravedad de los efectos dependen mucho del diseño y modelo. Esta es probablemente una situación en la que el campo eléctrico es por lo menos tan importante como el campo magnético.

ICNIRP calculó que campos de frecuencia industrial de 15  $\mu T$  podían originar interferencias, pero declaró que sólo existe una "pequeña probabilidad" de un mal funcionamiento por debajo de 100-200  $\mu T$ . NRPB-UK declaró que "es poco probable que ocurran interferencias" por debajo de 20  $\mu T$ . ACGIH establece un límite laboral formal para portadores de marcapasos de 100  $\mu T$ . Basándonos en estas fuentes, parece poco probable que una línea eléctrica produzca interferencias.

Sin embargo, por lo menos un estudio de marcapasos muestra que campos elevados de frecuencia industrial de 5000 V/m podrían causar interferencias en algunos modelos]; y otro sugiere que puede haber interferencias con un campo eléctrico de 1500 V/m. Campos eléctricos tan altos no se dan en la gran mayoría de las viviendas o en las cercanías de una línea de distribución, pero este nivel podría sobrepasarse justo debajo de una línea de transporte a alta tensión.

Los portadores de marcapasos que trabajen o vivan en ambientes donde haya instalaciones capaces de producir una interferencia significativa deberían informar al médico que les realizó el implante. Debe aconsejarse a los portadores de marcapasos que tengan cierta precaución cuando estén cerca de líneas de transporte de energía eléctrica, en especial líneas con voltajes

de 230 KV o superiores. Las mismas precauciones son, probablemente, aplicables a defibriladores y dispositivos biomédicos implantables.

En 1999 la Academia Nacional de las Ciencias de Estados Unidos hizo unos comentarios adicionales sobre el tema, cuando se les pidió que revisaran la investigación dirigida por NIEHS bajo la Energy Policy Act de 1992 (el programa denominado **EMF-RAPID**). En este informe la Academia Nacional de las Ciencias concluyó:

- "El programa de investigación biológica de NIEHS llegó a dos importantes conclusiones que reducen en cierta manera la preocupación sobre si el uso de la energía eléctrica podría tener efectos nocivos para la salud..."
  - La primera contribución fue el esfuerzo para replicar los informes anteriores de efectos biológicos... Todos los intentos de replicación en el programa EMF-RAPID han dado resultados negativos o equívocos...
  - La segunda contribución importante fue la finalización de varias investigaciones sobre la relación entre exposición a campo magnético y cáncer a través de experimentos controlados de laboratorio en animales. Casi todos los estudios en animales relevantes para la cuestión del cáncer [y los campos de frecuencia industrial] han aportado resultados negativos incluso a niveles de campo varios órdenes de magnitud más elevados que los niveles típicos de exposición humana."
- "La investigación biológica del EMF-RAPID ha aportado poca evidencia que apoye la hipótesis de que existe una relación entre campos de frecuencia industrial y cáncer..."
  - Los resultados *in vivo* no apoyan la existencia de un efecto [de los campos de frecuencia industrial] en la iniciación, promoción o progresión del cáncer...
  - No existe evidencia ningún efecto fuerte y replicado sobre el desarrollo del cáncer."
- "Los resultados del programa EMF-RAPID no apoyan la suposición de que el uso de la energía eléctrica suponga un gran riesgo no reconocido para la salud pública."
- "El comité recomienda que se financie ningún programa de investigación especial adicional sobre los posibles efectos en la salud de los campos magnéticos de frecuencia industrial."

**Más información y citas bibliográficas sobre la influencia de los campos electromagnéticos de baja frecuencia sobre la salud en:**

<http://www.mcw.edu/gcrc/cop/powerlines-cancer-FAQ/QandA.html>

de donde se ha tomado el texto (copyright © 1996-1999 de [John Moulder, Ph.D.](#) y el Medical College of Wisconsin)

### Campos electromagnéticos de alta frecuencia (RF)

Existe gran cantidad de estudios sobre los efectos biológicos y sobre la salud de la exposición a campos de RF. De estos estudios existe un consenso científico sobre los siguientes puntos clave:

- La investigación sobre ondas de radio es amplia y adecuada para establecer normas de seguridad.
- La exposición a ondas de radio puede ser peligrosa si es lo suficientemente intensa. Los posibles daños incluyen cataratas, quemaduras de piel, quemaduras internas y golpes de calor.
- La mayoría, si no todos los efectos biológicos conocidos por exposición a fuentes de radiofrecuencias de alta potencia son debidos al calentamiento. Ha habido algunos informes aislados de efectos que no parecen ser debidos al calentamiento, los denominados **efectos no térmicos**. Ninguno de estos efectos han sido replicados de forma independiente, y ninguno tiene conexiones obvias con riesgos para la salud humana.
- Los efectos biológicos de las ondas de radio dependen de la tasa de energía absorbida; y dentro de un amplio rango de frecuencias (de 1 a 10000 MHz), la frecuencia no tiene casi importancia.
- Los efectos biológicos de las ondas de radio son proporcionales a la tasa de energía absorbida; y la duración de la exposición no tiene casi importancia.
- No se han detectado efectos reproducibles por debajo de una cierta tasa de energía absorbida en todo el cuerpo.

Basándose en este consenso científico, diferentes organismos y países han tomado diferentes enfoques para establecer normas de seguridad. Un enfoque típico es el usado por **ANSI/IEEE** y por **FCC**.

**ANSI/IEEE** y **FCC** aplican un factor de seguridad de 10 para establecer recomendaciones de exposición laboral. Y después aplican un factor de seguridad adicional de 5 para exposición continua del público en general. Finalmente, se ha llevado a cabo estudios detallados para establecer una relación entre densidad de potencia, que puede ser medida de forma rutinaria, y absorción de energía, que realmente es lo que importa.

El resultado fue una recomendación de exposición muy conservadora, que fija un nivel que tan sólo es el 2% del nivel en el que se han observado realmente efectos biológicos reproducibles.

Para el caso de la telefonía celular (antenas y aparatos), otras normas han sido producidas por la Comisión Internacional sobre Radiación No Ionizante (International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection - **ICNIRP**), y el Consejo Nacional de Protección Radiológica y Medidas (National Council on Radiation Protection and Measurements - **NCRP**).

Estas normas sobre radiofrecuencias se expresan en densidad de potencia en onda plana, que se mide en  $mW/cm^2$  (milivatios por centímetro cuadrado). Para antenas de PCS, la norma **ANSI/IEEE** de 1992 sobre exposición del público en general es  $1.2\text{ }mW/cm^2$ . Para teléfonos celulares, la norma **ANSI/IEEE** para exposición del público en general es  $0.57\text{ }mW/cm^2$ . Las normas de **ICNIRP** son ligeramente más bajas y las de **NCRP** son esencialmente idénticas.

En 1996, la Comisión Federal de Comunicaciones de Estados Unidos (U.S. Federal Communications Commission - **FCC**) publicó unas recomendaciones para las radiofrecuencias que ellos regulan, incluyendo antenas de estaciones base de telefonía celular y PCS, esencialmente idénticas a las de **ANSI/IEEE**.

Las normas de exposición pública afectan sólo a las densidades de potencia promediadas sobre períodos de tiempo relativamente cortos, 30 minutos en el caso de las normas de **ANSI/IEEE**,

**NCRP** y **FCC** (a frecuencias de telefonía celular y PCS<sup>10</sup>). Si hay múltiples antenas, estas normas se aplican a la potencia total producida por todas las antenas.

Con un diseño adecuado, las antenas de estaciones base de telefonía celular y PCS pueden cumplir todas las normas de seguridad con un amplio margen.

Una antena de estación base de PCS y/o celular, instalada a 40 pies [12.2 m] por encima del suelo y funcionando a la máxima intensidad posible, podría producir una densidad de potencia de hasta  $0.02 \text{ mW/cm}^2$  en el suelo cerca del emplazamiento de la antena; pero las densidades de potencia a nivel de suelo generalmente estarán en el rango de  $0.0001$  a  $0.005 \text{ mW/cm}^2$ . Estas densidades de potencia están muy por debajo de todas las normas de seguridad, y las propias normas están muy por debajo de los niveles donde se ha observado peligros potenciales.

A menos de unos 500 pies [152.4 m] del emplazamiento de la antena la densidad de potencia puede ser mayor en sitios más elevados que la base de la antena (por ejemplo, en el segundo piso de un edificio o en una colina). Incluso con múltiples antenas, y con antenas tanto de telefonía celular como de PCS en la misma torre, las densidades de potencia estarán por debajo del 2% de las recomendaciones para todas las alturas y distancias a partir de 170 pies [51.8 m] del emplazamiento de la antena.

A partir de 500 pies [152.4 m] del emplazamiento de la antena la densidad de potencia no se incrementa al aumentar la elevación.

La densidad de potencia en el interior de un edificio será de 3 a 20 veces más baja que en el exterior.

Peterson y col. han medido la densidad de potencia alrededor de estaciones base de telefonía móvil. Las mediciones se realizaron en antenas de baja ganancia de 1600 W (ERP) instaladas en torres entre 120 y 250 pies [entre 36.6 y 76.2 m] de altura. La máxima densidad de potencia en el suelo era  $0.002 \text{ mW/cm}^2$ , y estaba a una distancia de 50-200 pies [15.2-61.0 m] de la base de las torres. A menos de 300 pies [91.4 m] de la base de las torres la densidad de potencia media estaba por debajo de  $0.001 \text{ mW/cm}^2$ .

Hay algunas circunstancias en las cuales un diseño inapropiado de las antenas de estaciones base de telefonía celular y PCS podrían incumplir las normas de seguridad.

Las normas de seguridad para exposición incontrolada (público) podrían incumplirse si las antenas se instalaran de tal manera que el público tuviera acceso a zonas situadas a menos de

---

<sup>10</sup> Los teléfonos PCS (Personal Communication System) son radioteléfonos portátiles que utilizan un sistema de transmisión digital en vez de analógico, utilizado por la mayoría de los teléfonos celulares. En Estados Unidos, los teléfonos celulares operan a 860-900 MHz, mientras que los teléfonos PCS operan a 1.800-2.200 MHz. En apariencia, los teléfonos celulares y PCS y sus antenas de estaciones base son similares. En EEUU, los teléfonos inalámbricos operan a 46-60 MHz y los emisores/receptores en "banda ciudadana (BC)" operan a unos 27 MHz.

**Nota internacional:** En todo el mundo se utilizan una gama de frecuencias distintas para los transmisores/receptores portátiles y radiomóviles, tanto analógicos como digitales, y se dan distintos nombres a los sistemas. Las frecuencias más comunes para sistemas "celulares" son 800-900 MHz (analógico y digital) y 1.800-2.000 MHz (digital), pero existen transmisores/receptores portátiles que utilizan frecuencias desde 25 MHz hasta 2.500 MHz. La potencia de salida de las unidades portátiles raramente superan 5 W, pero la potencia de salida de las unidades instaladas en vehículos, como los empleados por las fuerzas de seguridad, pueden llegar a 100 W.

**Canadá:** Los teléfonos analógicos y digitales operan desde 824 a 849 MHz. Pronto se pondrá en funcionamiento un sistema digital a 2.000 MHz (similar o idéntico al servicio PCS en EEUU).

**Australia:** Los teléfonos analógicos AMPS operan a 825-890 MHz, y los digitales GSM operan a 890-960 MHz.

**Europa:** Los sistemas analógicos operan a unos 900 MHz, y los sistemas digitales (GSM) operan tanto a 900 MHz como a 1.800 MHz.

3. Las frecuencias específicas utilizadas por teléfonos celulares y PCS pueden denominarse microondas (**MW**), radiofrecuencias (**RF**) u ondas de radio. Para un examen de los efectos en la salud, la distinción entre ondas de radio y microondas es semántica, y el término ondas de radio (o radiofrecuencias o RF) se emplea en este documento para todas las frecuencias entre 3 kHz and 300 GHz.

20 pies [6 m] de las propias antenas. Esto podría producirse en antenas instaladas en, o cerca de, las azoteas de los edificios.

Las normas de seguridad para exposición controlada (laboral) también podrían incumplirse si las antenas se instalaran en una estructura donde se requiera el acceso de trabajadores a zonas situadas a menos de 10 pies [3 m] de la antena. Peterson y col., por ejemplo, han hallado que a 2-3 pies [0.6-0.9 m] de una antena de baja ganancia de 1600 W (ERP) instalada en la azotea, la densidad de potencia alcanzaba 2 mW/cm<sup>2</sup> (comparado con la norma ANSI de exposición del público de 0.57 mW/cm<sup>2</sup>).

En un estudio que recibió una gran atención por parte de la prensa antes de que se publicara, Hardell y col. evaluaron el uso de teléfonos móviles en varios cientos de pacientes suecos con tumores cerebrales. No encontraron un incremento del riesgo de tumores cerebrales entre los usuarios de teléfonos móviles, con una razón de proporciones de 0.8-1.2 (es decir, no hay efecto). No se observó un incremento de la incidencia de tumores cerebrales en usuarios de teléfonos analógicos (NMT) ni digitales (GSM) y no había una tendencia a un incremento del riesgo al aumentar los años de uso o las horas de uso por año. Cuando se analizaron los datos teniendo en cuenta únicamente los tumores cerebrales en el lado de la cabeza en el que se usaba el teléfono, no había un incremento de la incidencia de tumores cerebrales. Los autores informan de que los usuarios de teléfonos móviles tenían más predisposición a contraer ciertos tipos de tumores cerebrales en el lado de la cabeza en el que se usaba el teléfono, pero la tendencia no era estadísticamente significativa, y sólo se halló entre los usuarios de teléfonos analógicos (sólo este último hallazgo fue mencionado en la mayoría de los artículos de prensa).

La ausencia de asociaciones entre exposición a ondas de radio y la tasa global de cáncer, y la falta de asociaciones consistentes entre exposición a ondas de radio y cualquier tipo específico de cáncer, sugiere que no es probable que las ondas de radio tengan una influencia causal fuerte sobre el cáncer.

En su reciente revisión de la literatura epidemiológica sobre radiofrecuencias, Elwood concluyó que:

Se ha informado de varias asociaciones positivas sugiriendo un incremento del riesgo de algunos tipos de cáncer entre aquellos que tienen una mayor exposición a emisiones de radiofrecuencia. Sin embargo, los resultados son inconsistentes: ningún tipo de cáncer ha sido asociado de forma consistente con la exposición a radiofrecuencias. La evidencia epidemiológica no tiene la fuerza y la consistencia necesaria para llegar a una conclusión razonable de que las emisiones de radiofrecuencia son una probable causa de uno o más tipos de cáncer en humanos. La evidencia es débil debido a su inconsistencia, el diseño de los estudios, la falta de detalles sobre la exposición real y las limitaciones de los estudios en lo relativo a su capacidad para tratar otros posibles factores relevantes. En algunos estudios puede haber sesgos en los usos de los datos.

### **Informes de congresos científicos recientes**

En el congreso de 1998 de la Sociedad de Bioelectromagnetismo (Bioelectromagnetics Society, **BEMS**), el principal foro donde se tratan los efectos biológicos y en la salud de las ondas de radio, se presentaron numerosos artículos sobre ondas de radio y/o sistemas de comunicación personal. De igual forma, en el Segundo Congreso Mundial sobre Electricidad y Magnetismo en Medicina y Biología, celebrado en junio de 1997, se presentaron muchos artículos sobre ondas de radio y/o sistemas de comunicación personal. Ninguno de estos artículos informaba de resultados replicados que sugieran que la exposición a ondas de radio de los niveles permitidos por la norma ANSI de 1992 suponga un riesgo para la salud humana.

Algunos trataban temas de dosimetría para los propios teléfonos móviles. Entre ellos:

- Santani y col.: la exposición a radiofrecuencias generadas por los teléfonos digitales GSM europeos (y por analogía por los teléfonos digitales PCS de EEUU) era mayor durante el establecimiento de la llamada y cuando el usuario estaba en un área con mala calidad de recepción.

Algunos informes trataban temas de interferencia electromagnética, pero ninguno añadía mucha más información que la presentada en la publicación de Hayes y col.

Entre los estudios biológicos presentados en el congreso de la BEMS de 1998, los más relevantes para el tema de posibles efectos en la salud humana de las ondas de radio eran:

- Mild y col. y Sandstrom y col.: un estudio epidemiológico en usuarios de teléfonos móviles en Suecia informó de que los usuarios del sistema analógico antiguo (similar al sistema celular de EEUU) se quejaban de más dolores de cabeza que los usuarios del nuevo sistema digital GSM (similar al sistema PCS de EEUU). No había grupo control de no usuarios, ya que los investigadores hallaron que era "absolutamente imposible encontrar controles" con un nivel de vida similar pero que no usaran teléfonos móviles.
- Bastide y col.: se ha observado un incremento de la mortalidad en embriones de pollo expuestos continuamente durante 21 días a radiofrecuencias generadas por teléfonos móviles comerciales. La exposición tuvo lugar 24 horas al día, utilizando teléfonos de 2 W (compañados con los 0.4-0.6 W de la mayoría de los teléfonos celulares y PCS de EEUU) situados a 1 cm de los huevos. No se informa de la densidad de potencia ni del SAR y no se pueden descartar efectos térmicos.

*Lo que sigue es el Resumen Ejecutivo del informe preparado por un panel de expertos a pedido de la Royal Society of Canada (A Review of the Potential Health Risks of Radiofrequency Fields from Wireless Telecommunication Devices) en marzo de 1999.*

"El uso de dispositivos de telecomunicaciones inalámbricas en Canadá se ha incrementado dramáticamente en la década pasada. Con el uso mayor ha ocurrido una mayor visibilidad de la tecnología y un aumento concomitante de la preocupación pública sobre su seguridad.

Se dan guías de acción para límites de exposición segura a campos de radiofrecuencia (RF) en el Health Canada's Safety Code 6. Se reunió el Panel de Expertos sobre campos de RF de la Royal Society of Canada para examinar los potenciales efectos biológicos y sanitarios de campos de RF resultantes del uso de tecnología de telecomunicaciones inalámbricas para revisar la adecuación del Safety Code 6.

Mediciones realizadas en proximidad a estaciones base que operan en Canadá indican que el público está expuesto a campos de RF de intensidad extremadamente baja en este ambiente. Las exposiciones son típicamente miles de veces menores que los niveles máximos de exposición recomendados en el Safety Code 6. Los trabajadores que realizan mantenimiento en las antenas de estas estaciones base puede experimentar exposiciones algo mayores, aunque éstas pueden controlarse mediante cuidadosas prácticas de trabajo.

Exposiciones que surgen de teléfonos celulares comerciales y dispositivos de comunicaciones inalámbricas están debajo de los límites dados en el Safety Code 6, aunque pueden ocurrir exposiciones cercanas a los niveles límites.

Al preparar este resumen, el panel usó como fuente primaria información obtenida de trabajos científicos publicados con referato. El panel se reunió con representantes de las dos agencias que financiaron el informe (Health Canada e Industry Canada). La Asociación de Telecomunicaciones Inalámbricas del Canadá (Canadian Wireless Telecommunications Association - CWTA) se consultó acerca del uso de dispositivos de telecomunicación inalámbrica en Canadá y por información de ingeniería y técnica. El panel también tomó nota de investigaciones, actualmente en curso, comunicándose con científicos involucrados en estudios de importancia en el tema.

Finalmente, se invitó a sectores interesados a enviar presentaciones escritas al panel. Aproximadamente se recibieron 30 presentaciones de organizaciones e individuos, y fueron vistos por todos los miembros del panel de forma que pudieran tenerse en cuenta al redactar este informe.

Los términos de referencia para el panel fueron especificados en la forma de una serie de preguntas acerca de los efectos potenciales sobre la salud de la exposición a campos de RF. A continuación se presentan estas preguntas, y las respuestas del panel.

***¿Las provisiones del Safety Code 6 protegen a trabajadores en RF workers y a la población en general de los efectos térmicos asociados con la exposición a campos de RF?***

Los efectos térmicos involucran el calentamiento directo de un organismo, tejido o célula por campos de RF. El Safety Code 6 fue explícitamente diseñado para proteger a trabajadores y a la población de exposiciones térmicas con niveles de exposición recomendados colocados a niveles muy por debajo de aquéllos para los cuales tales efectos térmicos podrían ocurrir para exposición de cuerpo entero a una distancia de la fuente radiante. Específicamente, el panel no encontró evidencia de que puedan ocurrir efectos térmicos a o debajo de los límites para exposición de cuerpo entero de  $0.4 \text{ W/kg}$  (trabajadores) o  $0.08 \text{ W/kg}$  (población general).

El panel notó que los límites locales para exposición parcial del cuerpo están situados a niveles mucho más alta: para trabajadores  $8 \text{ W/kg}$  en la cabeza, cuello y tronco, y  $20 \text{ W/kg}$  en las

extremidades. Las fuertes intensidades permitidos por tales exposiciones, aunque locales en naturaleza, y el hecho de que el Safety Code 6 no tiene límites de tiempo sobre tales exposiciones, crea una situación donde los efectos térmicos podrían ocurrir aún dentro de los límites del Safety Code 6. Las exposiciones locales al nivel térmico de estos límites pueden, en ciertos casos, producir efectos adversos a su salud. El panel reconoce que hay solamente datos limitados sobre los que definir los límites biológicos de la absorción de energía local. En ausencia de información adecuada, el panel concluyó que los límites de exposición local puede no proteger completamente de los efectos térmicos asociados a la exposición a RF. Se requiere investigación adicional para determinar si es necesario establecer límites en la duración de las exposiciones locales, particularmente para trabajadores, además de los límites en la intensidad de la exposición.

Debe notarse que diversas aplicaciones diagnósticas de radiación de RF tales como dispositivos de imágenes por resonancia magnética y nuevas terapias para el tratamiento o ablación de tumores benignos y malignos pueden involucrar a pacientes a campos de RF por encima de los límites establecidos en el Safety Code 6. Sin embargo, el panel notó que las regulaciones para tales procedimientos (tales como en Safety Code 26 que se refiere a la exposición de pacientes en imágenes de resonancia magnética) limitan estas exposiciones más intensas a cortos períodos de tiempo. Por ejemplo, la FDA de los Estados Unidos limita exposiciones en la cabeza a  $8 \text{ W/Kg}$ , pero sólo por menos de 5 minutos, y  $12 \text{ W/Kg}$  en las extremidades también hasta 5 minutos. Es importante asegurar que el personal que opera estos dispositivos se hallen adecuadamente protegidos de sobreexposiciones.

***¿Cuáles son los potenciales efectos adversos biológicos y/o de salud asociados con la exposición a campos de RF?***

Se han realizado un número de estudios de laboratorio sobre potenciales efectos biológicos y adversos a la salud de campos de RF. Los efectos biológicos son cambios mensurables en sistemas biológicos que pueden o no estar asociados con efectos adversos a la salud. Un número de efectos biológicos se han observado a intensidades de campos de RF no térmicas que no producen calentamiento mensurable. Al presente, sin embargo, no se ha encontrado que estos efectos biológicos causen efectos adversos a la salud de humanos o animales expuestos. Los siguientes efectos biológicos fueron investigados por el panel:

**Efectos Biológicos**

*Proliferación de Células*

Se ha informado de varios hallazgos de efectos de RF sobre la proliferación celular. Hay evidencia de que la proliferación celular (específicamente células de glioma LN71) pueden incrementarse a través de la exposición a campos de RF de alta intensidad bajo rígidas condiciones de control térmico. Se han observado alteraciones en la cinética del ciclo celular bajo condiciones de exposición similares usando células del ovario de hamsters chinos. Sin embargo, otros estudios no han demostrado incrementos en el crecimiento celular. Se observó un decrecimiento de el crecimiento celular sólo después de 30 minutos de exposición o me-

nos. A bajas intensidades no térmicas los campos de RF no parecen alterar las tasas de proliferación celular.

### *Flujo de Calcio*

Aunque los campos de RF que no están modelados por señales de muy baja frecuencia (ELF) no parecen realizar flujo de  $\text{Ca}_{2+}$  del tejido cerebral, la modulación de baja frecuencia de portadoras de RF y microondas por debajo de los límites dispuestos por el Safety Code 6 altera el flujo de  $\text{Ca}_{2+}$ . Exposiciones de baja densidad de potencia no fueron testeadas para proveer evidencia del efecto sobre el flujo de calcio a frecuencias por encima de 1 GHz. No está claro si la exposición a campos de RF de dispositivos de comunicaciones inalámbricas pueden afectar la regulación de calcio en el cerebro, o que efectos de este tipo tengan consecuencias en la salud.

### *Actividad de la Decarboxylasa de Ornitina (ODC)*

Se ha observado aumento de la actividad de ODC en experimentos usando campos de RF en el rango de frecuencias de dispositivos de telecomunicaciones inalámbricas estándar a niveles de exposición por debajo de los recomendados por el Safety Code 6. Esta actividad incrementada ocurre solamente cuando la amplitud del campo de RF está modulado por ELF. Campos pulsados de telefonía digital con una componente de baja frecuencia también son capaces de aumentar la actividad de ODC. Se ha demostrado que la actividad de ODC aumenta con la intensidad del campo de RF. El panel notó that, mientras casi todos los factores capaces de causar cáncer llevan a elevada actividad de ODC, no todos los estímulos capaces de aumentar la actividad de ODC promueven el cáncer.

### *Melatonina*

El efecto de campos eléctricos y magnéticos de ELF sobre la melatonina ha sido ampliamente estudiado en humanos y animales. Se ha hecho la hipótesis que campos de ELF podrían alterar procesos de enfermedades humanas a través de cambios en la melatonina. Debido a que los niveles de melatonina se ven fuertemente afectados por la exposición a la luz, y pueden ser afectados por la exposición a campos de ELF, es razonable considerar si la melatonina pueda ser afectada por la exposición a campos de ELF. Sin embargo, ha habido muy poca investigación sobre los efectos de RF sobre la melatonina y los pocos estudios existentes no proveen información clara sobre tales efectos.

### *Efectos sobre la Membrana Celular*

Varios estudios han identificado influencias de la exposición a microondas (MW) sobre la liberación de  $\text{Ca}_{2+}$  desde las membranas celulares.. Estos estudios han documentado un aumento en la liberación de  $\text{Ca}_{2+}$ . Sin embargo, otros estudios no han hallado efecto alguno sobre la liberación de  $\text{Ca}_{2+}$ . También se han documentado efectos de campos de RF/MW sobre el transporte de cationes tales como  $\text{Na}^+$  and  $\text{K}^+$  a través de las membranas celulares. Es posible que estos efectos puedan ocurrir sin cambios mensurables de temperatura. Aunque parece que los campos de RF afectan los canales de la membrana, el mecanismo de interacción biofísico específicamente responsable de este efecto no ha sido descubierto. La manera en que campos de RF/MW interaccionan con las proteínas y lípidos de la membrana necesita ser investigada en mayor detalle.

### *Barrera Sangre-cerebro*

Varios estudios han mostrado que la exposición a radiación de RF por debajo de los límites del Safety Code 6 incrementa la permeabilidad sangre-cerebro. Sin embargo, no todos los estudios han demostrado este efecto. Estas inconsistencias pueden indicar que efectos a exposiciones de bajo nivel de RF no son significativos, o que los cambios en la permeabilidad pueden estar relacionados a específicas frecuencias de RF o a la modulación de ELF de la frecuencia de portadora de RF.

### *Comportamiento*

En algunos estudios, ratas expuestas a campos de RF han realizado no tan bien tareas de memoria espacial. Los investigadores han sugerido que estos efectos de comportamiento posiblemente se pueden relacionar a algún efecto de campos de RF sobre el sistema opioide endógeno.

### *Consideraciones Mecánicas*

Al presente no se entiende bien el mecanismo detrás de los observados efectos no térmicos de la exposición a campos de RF y la influencia de la modulación de baja frecuencia de esos campos. Es importante entender los mecanismos biofísicos subyacentes de las interacciones entre campos de RF y las células y tejidos para aclarar mejor las posibles relaciones entre efectos biológicos y efectos sobre la salud.

### **Efectos sobre la Salud**

Se han realizado también un número de estudios toxicológicos, epidemiológicos y clínicos para investigar potenciales efectos adversos a la salud de la exposición a campos de RF. La revisión del panel de la literatura científica disponible en la actualidad se resume en lo que sigue.

#### *Estudios Toxicológicos*

Tanto estudios *in vitro* como *in vivo* de los efectos de la exposición de ADN a campos de RF han producido resultados conflictivos. Mientras que algunos estudios han mostrado que células y animales expuestos experimentan significativamente más daño en el ADN que células no expuestas, otros no han hallado diferencias significativas. Otros estudios han hallado mucho menor daño en el ADN en células expuestas a señales de comunicaciones inalámbricas. Debido a que el daño en el ADN puede resultar en serias consecuencias para la salud, la posibilidad de que exposiciones a campos de RF de baja energía no térmica pueda producir daños en el ADN sigue siendo una preocupación. Se requiere más investigación para aclarar esta posibilidad. Un número de estudios toxicológicos se han enfocado en la habilidad de los campos de RF para inducir tumores en animales de laboratorio. Aunque algunos pocos estudios han demostrado elevadas tasas de tumores en animales expuestos a campos de RF, la mayoría no han encontrado diferencias significativas en la tasa de ocurrencia de tumores entre animales que han sido expuestos a campos de RF y controles no expuestos. Hay poca evidencia que la exposición a campos de RF a niveles no térmicos aumenta la tumorigénesis en animales. También hay poca evidencia que la exposición a campos de RF a niveles no térmicos promueve el crecimiento de tumores en animales. Aunque unos pocos estudios han encontrado un significativo incremento de la promoción de tumores en los grupos expuestos, la importancia de estos hallazgos no es clara por falta de replicación de estos resultados por otros investigadores. La mayoría de los estudios a la fecha no han encontrado diferencias significativas entre animales expuestos y no expuestos, ni evidencias claras de una relación entre exposición y respuesta.

El comité identificó sólo dos estudios publicados que examinan la relación entre la exposición a RF y la progresión de tumores. Ninguno de estos estudios encontró diferencias significativas en la progresión de tumores entre animales expuestos y no expuestos.

Aunque se ha observado una disminución de la longevidad en algunos estudios de animales expuestos a campos de RF, parece probable que estos efectos están relacionados a efectos térmicos de particulares regímenes de exposición. Reportes esporádicos de longevidad incrementada en animales expuestos a campos de RF puede ser resultado de la reducción de la ingesta calórica que se ha notado en animales expuestos.

#### *Estudios Epidemiológicos*

Los estudios epidemiológicos que examinan los efectos de salud de campos de RF que han sido publicados al presente son de valor limitado, principalmente debido a la dificultad en la medición de la exposición. De los estudios que tuvieron un adecuado diseño de la medición de la exposición no se observaron incrementos significativos consistentes en los riesgos de salud debido a la exposición a campos de RF. Sin embargo, estudios epidemiológicos han demostrado que el uso de teléfonos celulares mientras se conduce está asociado a un incremento en el riesgo de tener un accidente automovilístico.

#### *Estudios Clínicos*

Se han hecho algunos estudios clínicos sobre la relación entre campos de RF y el funcionamiento cerebral y la salud neurológica en humanos. Estos estudios, que han observado crisis epilépticas, desórdenes del sueño y el "síndrome RFR" han fallado en mostrar efectos adversos para la salud de la exposición a RF. Sin embargo, al contrario que en los estudios sobre animales, ciertas exposiciones a campos de RF parecen acortar la latencia de entrada al sueño en los humanos, un interesante efecto biológico, pero un resultado clínicamente irrelevante. En general, los resultados de los estudios epidemiológicos y clínicos actualmente disponibles son inconsistentes y no proveen un patrón claro de efectos adversos a la salud.

relacionados a la exposición a RF. Debido al diseño de los estudios publicados, la información necesaria para describir las relaciones temporales entre la exposición y los efectos no está disponible. La evidencia epidemiológica existente no apoya una asociación entre la exposición a campos de RF y el riesgo de cáncer, problemas reproductivos, anomalías congénitas, epilepsia, jaqueca o suicidio. Al mismo tiempo, esta evidencia es inadecuada para permitir una evaluación comprehensiva de potenciales riesgos a la salud. Por lo tanto se requieren adicionales estudios epidemiológicos con adecuada información sobre la exposición a campos de RF.

***¿Cuáles son los efectos biológicos y/o los efectos potencialmente adversos a la salud no térmicos asociados con la exposición a campos de RF emitidos desde dispositivos de telecomunicación inalámbrica como teléfonos inalámbricos y transmisores de estaciones base?***

Debido a la baja intensidad de campos asociada con la exposición pública a campos de RF de transmisores de estaciones base de telecomunicaciones inalámbricas, ni efectos biológicos ni efectos adversos a la salud son de probable ocurrencia. Aunque los campos de RF de teléfonos celulares podrían ser de suficiente intensidad para causar el tipo de efectos biológicos descriptos previamente, no se conoce que tales efectos biológicos estén asociados a efectos adversos a la salud. El panel notó que las características de los campos de RF emitidos por teléfonos celulares, incluyendo la modulación de baja frecuencia de la onda portadora de RF, puede ser importante en definir la naturaleza de los efectos biológicos causados por los campos de RF de dispositivos de telecomunicaciones inalámbricas.

Se ha expresado una preocupación particular acerca del potencial de la exposición a campos de RF de teléfonos celulares para causar riesgo de cáncer. Mientras los estudios toxicológicos y epidemiológicos llevados a la fecha no son definitivos sobre este tema, el peso de la evidencia no apoya la conclusión de que la exposición a campos de RF del tipo e intensidad producidos por dispositivos de telecomunicaciones inalámbricas contribuya a la producción del crecimiento de tumores en animales o humanos. Aunque algunas investigaciones han sugerido que los campos de RF pueden dañar al ADN, la mayoría de los estudios de genotoxicidad realizados a la fecha han sido negativos. Más investigación se debe hacer en esta área para clarificar la potencialidad genotóxica de los campos de RF.

Estudios clínicos han examinado el efecto potencial de los campos de RF sobre la función cerebral y la salud neurológica en humanos. Estos estudios, que han buscado crisis epilépticas, desórdenes del sueño y el síndrome RFR, también han fallado en mostrar efectos adversos a la salud consistentes. La exposición a campos de RF puede acortar el tiempo de entrada al sueño en humanos, aunque este efecto biológico no se considera que sea un efecto adverso.

***¿Hay evidencia de que tales efectos no térmicos pudieran ser mayores para niños u otros subgrupos de la población?***

Hay amplia evidencia de que los niños u otras subpoblaciones (tales como mujeres embarazadas o los ancianos) pueden ser más susceptibles a los efectos de la exposición a peligros químicos y radiológicos que adultos jóvenes y saludables. El tema de las subpoblaciones susceptibles ha recibido muy poco estudio con respecto a la exposición a campos de RF. Por lo tanto, futuros estudios de los riesgos potenciales de la exposición a RF deberían analizar la posibilidad de individuos particularmente susceptibles.

Los estudios epidemiológicos que se han enfocado en niños han sido de diseño ecológico, sin datos a nivel individual de exposición. En consecuencia estos estudios no son particularmente informativos acerca de potenciales riesgos a la salud de RF. Se han realizado ocho estudios clínicos para explorar la existencia de un síndrome de enfermedad de RF. Nadie encontró efecto alguno de los campos de RF en los síntomas asociados con este síndrome. Sin embargo, parece realmente que algunas personas pueden sentir si están expuestas a campos de RF.

***¿Cuáles son las implicancias para el Safety Code 6 de la revisión científica de los datos actualmente disponibles realizada por el panel sobre los efectos biológicos y los potenciales efectos adversos sobre la salud de la exposición a campos de RF? En particular, ¿debería considerarse el fenómeno de los efectos no térmicos en Safety Code 6?***

Basándose en su revisión de los datos científicos actualmente disponibles, el panel concluyó que el Safety Code 6 generalmente protege a trabajadores y la población general de efectos adversos a la salud asociados con exposiciones térmicas a campos de RF. Sin embargo, aunque los límites de exposición de cuerpo entero dados por Safety Code 6 aparecen protectores frente a efectos térmicos, el panel notó que prolongadas exposiciones de trabajadores a los límites locales de 8 W/kg para la cabeza, cuello y tronco y 20 W/kg para las extremidades podría conducir a efectos térmicos. Por lo tanto, el panel recomienda que estos límites de exposición local para trabajadores sean revisados, tanto en términos de la intensidad y duración de la exposición.

El establecimiento de la necesidad para una actualización de los límites de exposición localizada para la protección de los trabajadores requerirán estudios adicionales para definir los efectos conjuntos de la intensidad y la duración de la exposición. Debido a las características fisiológicas únicas del ojo, incluyendo su habilidad limitada para disipar el calor, el panel no está satisfecho de que el límite de exposición local para trabajadores de 8 W/kg para la cabeza, cuello y tronco sea adecuadamente protectora del ojo (El Safety Code 6 reconoce esta preocupación sugiriendo que aún menores exposiciones serían deseables). Aunque los datos disponibles son insuficientes para definir un límite preciso a la exposición localizada para el ojo, el panel sugiere que el límite de exposición local para la población general de 1.6 W/kg para la cabeza, cuello y tronco (incluyendo el ojo) dado en el Safety Code 6 sea considerado como una salvaguarda transitoria para los ojos de los trabajadores en RF. El panel identificó la generación de datos necesarios para aclarar los límites de exposición para el ojo como de alta prioridad.

El panel notó que pueden ocurrir efectos biológicos para exposiciones a niveles no térmicos, incluyendo niveles por debajo de los límites para exposiciones a campos de RF establecidos en el Safety Code 6. Aunque podría concebirse que tales efectos biológicos lleven a efectos adversos sobre la salud, no hay información suficiente para concluir que efectos adversos sobre la salud están asociados a los efectos biológicos causados por exposiciones a niveles no térmicos de campos de RF. El potencial significado sanitario de los efectos biológicos de los campos de RF observados a niveles no térmicos de exposición requiere aclaraciones antes de que efectos biológicos causados por exposiciones a niveles no térmicos sean considerados para su inclusión en el Safety Code 6. El panel recomienda que se realice investigación adicional sobre los efectos biológicos de los campos de RF, incluyendo los mecanismos por los cuales ocurren tales efectos.

### ***¿Qué investigación es necesaria para entender mejor las potenciales consecuencias sobre la salud de los efectos no térmicos?***

El comité ha identificado cuatro distintas líneas experimentales que se requieren para extender nuestro conocimiento de los campos de RF. Estas son:

- experimentos *in vivo* e *in vitro* sobre animales y células, para proveer información básica con la que evaluar cualesquiera efectos potenciales sobre la salud;
- estudios moleculares que examinen los mecanismos de los efectos biológicos;
- estudios clínicos, particularmente para evaluar efectos de subgrupos en humanos; y
- estudios epidemiológicos que monitorean el potencial impacto de la exposición a RF sobre la salud humana.

Una agenda de investigación más detallada se incluye en la Sección 10 de este informe.

Se requerirá mayor investigación a medida que surjan nuevas tecnologías que usen frecuencias y modulaciones que no han sido estudiadas adecuadamente. Un hueco mayor en el conocimiento que el panel identificó es la falta de información sobre el rol de los efectos de la modulación de RF a frecuencias ELF.

Es esencial realizar continuos estudios epidemiológicos ya que éstos proveen los medios primarios de identificar y caracterizar directamente los efectos potenciales de los campos de RF en el medio ambiente sobre la salud humana. Los teléfonos celulares y dispositivos similares no han sido de uso general por un periodo de tiempo suficiente para permitir una investigación completa de todos los potenciales efectos sobre la salud. Más aún, no solamente está en expansión el uso de esta forma de comunicación, sino que sistemas futuros usarán diferentes frecuencias y protocolos. Se anticipa que en el futuro la exposición a campos de RF se verá reducida como consecuencia de la tendencia actual hacia la reducción de la po-

tencia de las emisiones de dispositivos de telecomunicaciones inalámbricas. Sin embargo, es probable que el rango de radiofrecuencias y las características de transmisión de futuros sistemas de comunicación serán diferentes de los actualmente en uso, y requerirán mayor evaluación para garantizar la seguridad. A la fecha, no se ha informado de estudios epidemiológicos rigurosos sobre los potenciales efectos adversos sobre la salud del uso de teléfonos celulares. El panel recomienda que los resultados de estudios en curso sean examinados cuidadosamente a medida que se hallen disponibles, incluyendo cualquier consecuencia sobre el Safety Code 6. El panel notó que faltan estudios epidemiológicos de poblaciones que viven cerca de estaciones base, pero considera tales estudios de menor prioridad debido a las muy bajas intensidades de campo en la vecindad de estaciones base transmisoras.

## RESUMEN

- En relación al campo radiado por aberturas, se presenta el método de Kirchhoff-Huygens para el cálculo del campo lejano emitido por una abertura en función del campo sobre la abertura. Este método surge del teorema de Green y establece que el campo en un punto cualquiera interior a un recinto cerrado se puede expresar en términos de los valores del campo y su derivada normal sobre la frontera del recinto, si el campo cumple la ecuación de las ondas de Helmholtz:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \mathbf{E} - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} \right) dS'$$

Utilizando este resultado se puede relacionar el campo lejano emitido por la abertura con el campo sobre la abertura misma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{i(k + k_z)}{2\pi r} \hat{x} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \int_{S_1} E_s(x', y') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} dS'$$

y se observa que ambos campos están asociados por una **transformación de Fourier**. Esta relación es extremadamente importante para el cálculo del campo cercano de cualquier estructura radiante a partir de su campo lejano.

- Se introduce la noción de corrientes equivalentes, que se utiliza para lograr un esquema de cálculo general y optimizado en el análisis numérico de las estructuras radiantes.

Las ecuaciones de Maxwell del rotor pueden escribirse:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{donde } \mathbf{J} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad \text{es una densidad de corriente eléctrica, y}$$

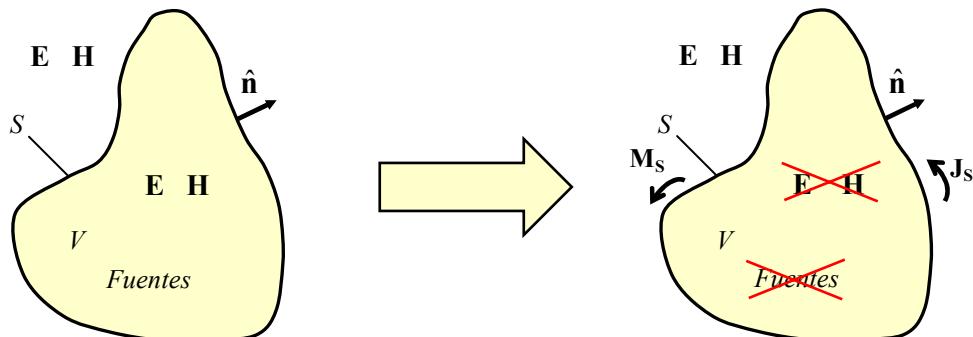
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} \quad \text{donde } \mathbf{M} = \partial \mathbf{B} / \partial t \quad \text{es una densidad de corriente magnética.}$$

Entonces los campos se pueden calcular a partir de "potenciales":

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad \text{con} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} dV' \quad \text{y}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \quad \text{con} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t')}{R} dV'$$

Las corrientes equivalentes se definen de manera de eliminar la necesidad de considerar las fuentes y campos internos al radiador para calcular los campos externos o radiados, usando el **principio de equivalencia**:



- Se introduce la fórmula de Friis para el cálculo de un enlace sencillo (LOS) de comunicaciones:  $\frac{P_R}{P_T} = \frac{A_T A_R}{\lambda^2 d^2}$  donde  $A_T$  y  $A_R$  son respectivamente las aberturas de

*la antena transmisora y receptora,  $\lambda$  la longitud de onda de la radiación y d la distancia.*

*Se presentan diversos enlaces a sitios Web que analizan el problema de las radio-comunicaciones.*

- *Se presenta una muy breve introducción a los problemas de compatibilidad electromagnética (EMC) que surgen de los fenómenos de interferencia. Las ideas esenciales son:*

- *Noción de susceptibilidad o inmunidad electromagnética.*
- *Fuentes de interferencia: naturales (ruido térmico, campos atmosféricos, ruido cósmico) y artificiales.*
- *Modos de interferencia: radiada o conducida. En la interferencia radiada se distinguen los campos cercanos (inducción) y los campos lejanos. La interferencia radiada se previene con apantallamientos y blindajes y la interferencia conducida con técnicas de filtrado. Se dan diversos ejemplos.*
- *Finalmente se mencionan brevemente algunas de las normas internacionales sobre el tema y se presentan varios enlaces con mayor información.*

- *Se presenta una introducción a los efectos biológicos de los campos electromagnéticos, en particular sobre la salud humana. Se describen las distintas regiones del espectro electromagnético y se explica la diferencia entre la radiación ionizante y no ionizante.*

*Se presentan algunos organismos internacionales y organizaciones no gubernamentales que estudian los efectos de los campos electromagnéticos sobre la salud humana y sus planes de trabajo.*

*Se discuten brevemente los criterios metodológicos para el estudio científico y la evaluación del riesgo de agentes ambientales sobre la salud humana.*

*Se presenta un resumen de las pautas para limitar la exposición a campos electromagnéticos entre 30 Hz y 300 GHz elaboradas por la ICNIRP en 1998, y que son la base para la mayoría de las normas nacionales en vigencia.*

*Se comenta brevemente la declaración del IEE (Institution of Electrical Engineers - UK) de mayo de 2002 sobre la evaluación de trabajos científicos sobre el impacto de campos electromagnéticos de baja frecuencia sobre la salud humana publicados en los últimos dos años.*

*Se presenta información más detallada sobre posibles efectos, mecanismos de acoplamiento y estudios epidemiológicos en tres casos: campos estáticos, campos de frecuencia industrial y campos asociados a la telefonía celular, que se están estudiando con gran detenimiento en los últimos años.*