Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P2.20.**
Redukcja macierzy metodą Gaussa

Prowadzący: dr Witold Karczewski

Aleksander Balicki, nr indeksu: 220989
Dominika Rogozińska, nr indeksu: 221094

Wrocław, 5 grudnia 2010r.

1. Wstęp

Metodę Gaussa redukcji macierzy wykorzystuje się do rozwiązywania takich problemów jak znajdowanie macierzy odwrotnej, obliczanie rzędu macierzy, a także rozwiązywanie układów równań z wieloma niewiadomymi. Efektywność tej metody zależy od szczegółów implementacji i modyfikacji algorytmu oraz wskaźnika uwarunkowania macierzy. Poniżej zostały zaprezentowane wyniki otrzymane dla eliminacji Gaussa bez i z następującymi modyfikacjami: wybór największego(co do modułu) «««««¡reduktora»»»»» z wiersza, z kolumny, z podmacierzy(wybór pełny). Badania zostały przeprowadzone dla kilku rodzajów macierzy: macierzy Hilberta, macierzy Pei, macierzy losowej z dominującą przekątną oraz macierzy oraz macierzy losowej, w ktorej większość elementów należy do przedziału $(-1, 1)$, a kilka jest wybranych z zakresu $(-1000, 1000)$.

2. Definicje

Definicja 1. *Macierzą o wymiarach m x n (macierzą o m wierszach i n kolumnach), nad ciałem K nazywamy każdą funkcję typu $\{1, \cdots, m\} \times \{1, \cdots, n\} \to K$.*

Interesują będą nas macierze o rozmiarach n x n, które przedstawiają układy n równań z n niewiadomymi. Przykładowymi danymi do badań sposobów rozwiązania takich układów były macierze rzędu n, które są nieosobliwe, więc układy te zawsze mają rozwiązanie. Macierz zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Weźmy przykładowy układ równań:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Z tym układem wiążemy macierz układu A oraz wektor wyrazów wolnych b:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Definicja 2. *Macierzą Hilberta nazywamy macierz n x n, w której*

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

Definicja 3. *Macierzą Pei nazywamy macierz n x n, w której*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ d & i = j \end{cases}$$

gdzie d jest parametrem.

Definicja 4. *Macierzą o dominującej przekątnej nazywamy macierz, w której*

$$\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \leqslant |a_{i,i}|$$

Definicja 5. *Normę maksimum dla wektora* $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ *definiujemy jako*

$$\|x\|_\infty = max\{|x_i| : i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Normy maksimum użyjemy jako wskaźnika numerycznej poprawności metody Gaussa, porównując wartości $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$ dla wszystkich prób. $\tilde{x}$ to nasze przybliżone rozwiązanie, więc $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$ oznacza największy spośród błędów przybliżeń x_i.

3. Metoda eliminacji Gaussa

Metoda ta została stworzona przez Carla Friedricha Gaussa. Daje ona algorytm do rozwiązania układu równań liniowych, obliczenia rzędu macierzy i znalezienia macierzy odwrotnej do danej. Algorytm składa się z 2 kroków, najpierw doprowadzamy macierz do postaci schodkowej, a następnie znajdujemy wynik układu poprzez podstawienie w tył(funkcja back substitution). W metodzie Gaussa stososuje się 3 operacje elementarne na wierszach macierzy. Te operacje to:

1. Zamiana kolejności wierszy
2. Pomnożenie wszystkich wartości w wierszu przez niezerowy skalar λ
3. Dodanie do dowolnego wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy

Operacje elementarne mają ciekawe własności, mianowicie:

- Nie zmieniają rzędu macierzy
- Dowolną macierz można za pomocą skończonej liczby kroków doprowadzić do macierzy w postaci schodkowej

3.1. Metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych

3.2. Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głownych z wiersza

3.3. Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych z kolumny

3.4. Metoda eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementów głównych(z podmacierzy)

Nasz algorytm zauważy zero na pozycji $Z_{1,1}$. Zamieni pierwszy wiersz z drugim. Uzna, że wartość $Z_{1,1}$ jest niezerowa i przejdzie do następnego kroku. W trakcie algorytmu wykona się dzielenie 45/0.0000000000001. Wiemy, z [2], że przy dzieleniu przez liczby bliskie zeru następuje utrata cyfr dokładnych wyniku. Algorytm zachowywałby się zdecydowanie lepiej, jeżeli dzielilibyśmy przez większą liczbę. Algorytm wyboru elementu głównego w kolumnie:

```
for k from 1 to N-1
    znajdz wiersz, w którym jest maksymalna wartość |M[i,k]| dla wszystkich i > k
    zamień wiersz z tą maksymalną wartością z k-tym wierszem
    for i from k+1 to N
        odejmij od i-tego wiersza k-ty wiersz (M[i,k]/M[k,k]) razy
zwróć ilość niezerowych wierszy
```

Można też szukać elementu o największym module w całej podmacierzy, wydłuża to czas obliczeń, ale poprawia własności numeryczne. Algorytm z wyborem pełnym:

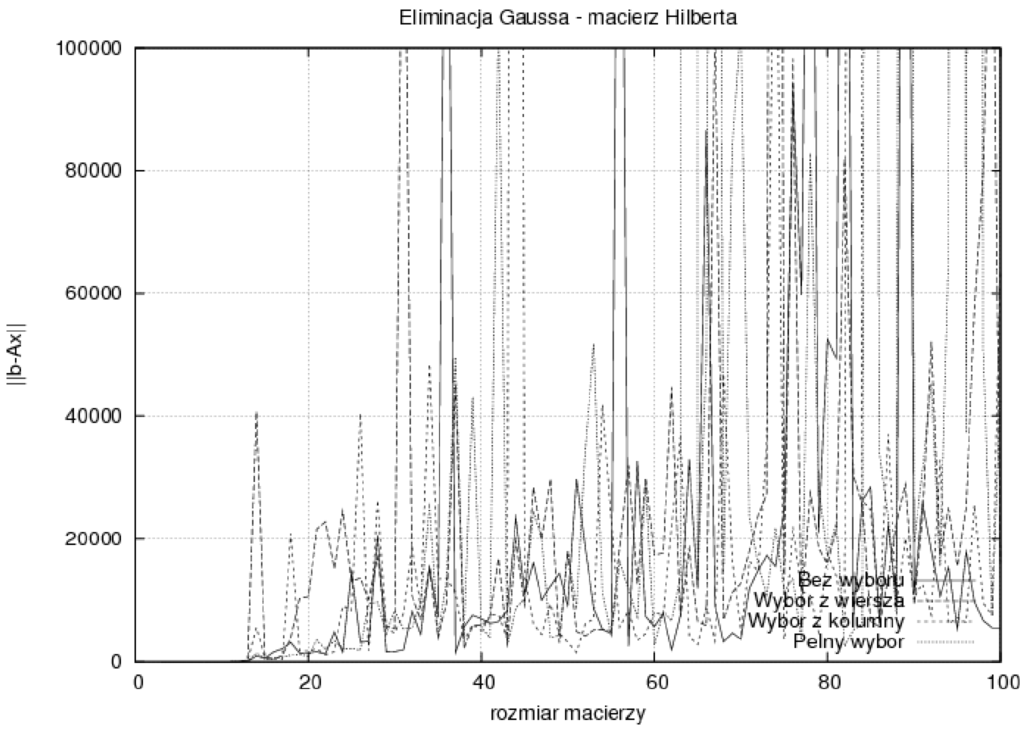
```
for k from 1 to N-1
    znajdz i,l takie, że |M[i,l]| jest maksymalne dla wszystkich i > k, l > k
    zamień l-tą kolumnę z k-tą kolumną
    zamień i-ty wiersze z k-tym wierszem
    zamień wiersz z tą maksymalną wartością z k-tym wierszem
    for i from k+1 to N
        odejmij od i-tego wiersza k-ty wiersz (M[i,k]/M[k,k]) razy
zwróć ilość niezerowych wierszy
```

4. Program

Program testujący jest napisany w języku C++. Użyto typu podwójnej precyzji (double). Wyniki zostały zapisane jako plik z rozszerzeniem .csv, a następnie opracowane graficznie za pomocą programu gnuplot.

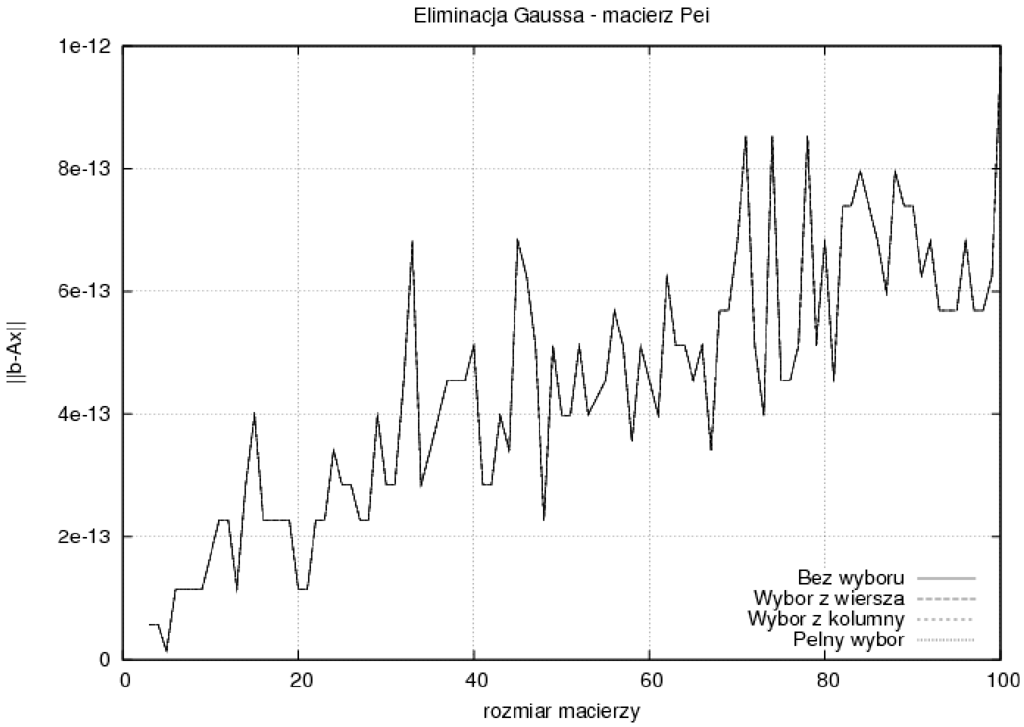
5. Wyniki prób

5.1. Macierz Hilberta



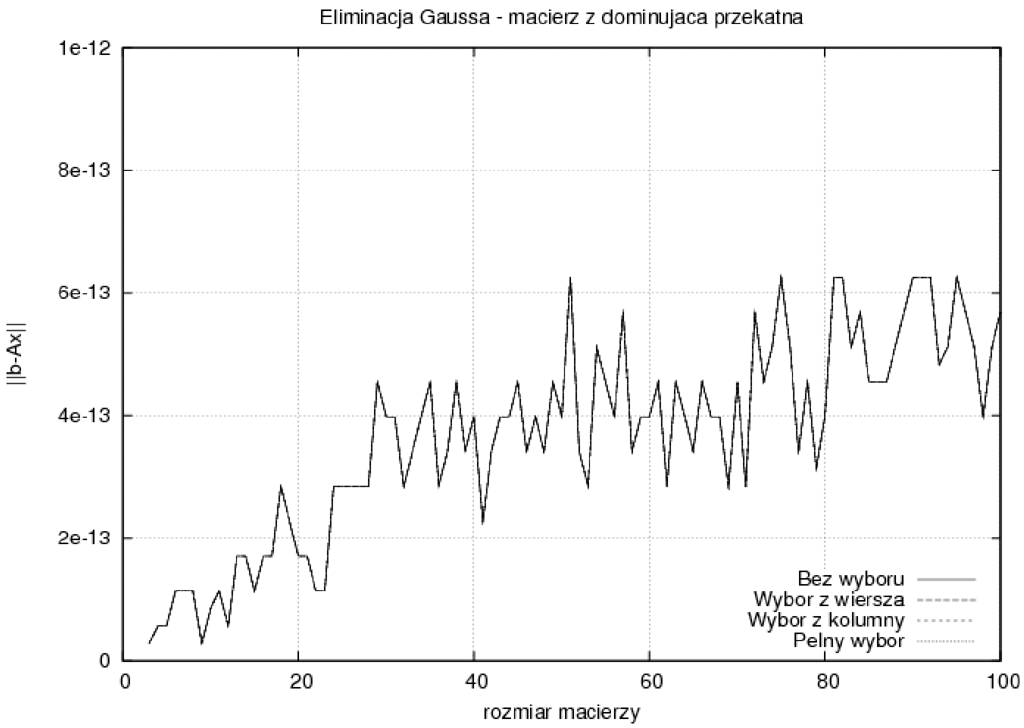
Źle uwarunkowana, leci w kosmos. Wykres nie obejmuje całego zakresu.

5.2. Macierz Pei



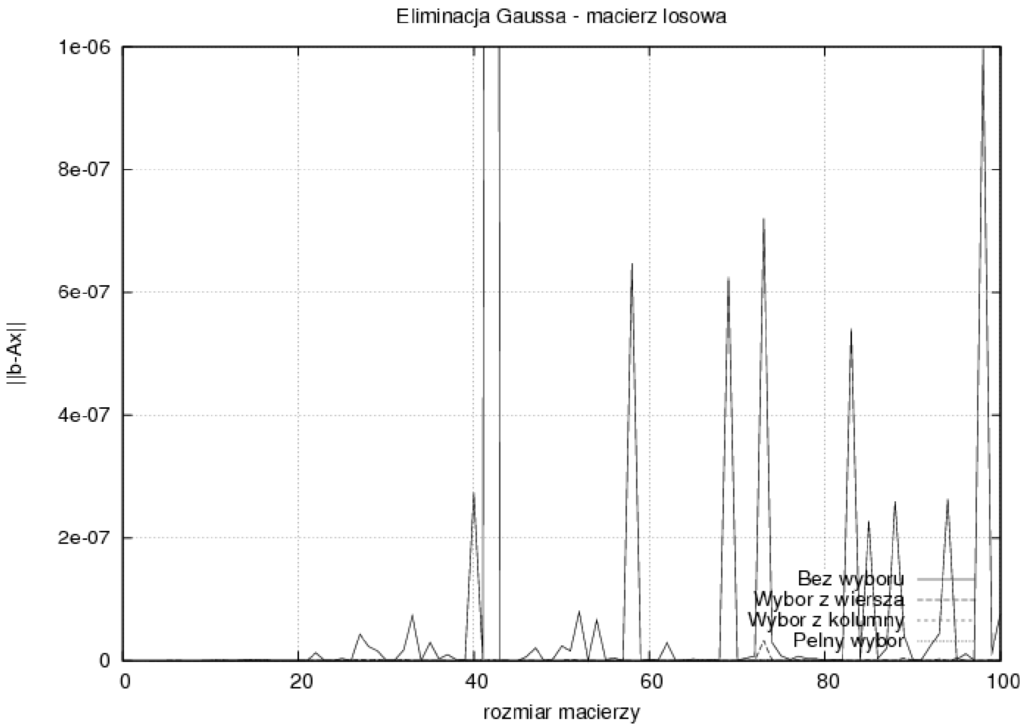
Dobrze uwarunkowana, wygląda tak samo dla każdej modyfikacji algorytmu -¿ na przekątnej sa największe liczby i są równe.

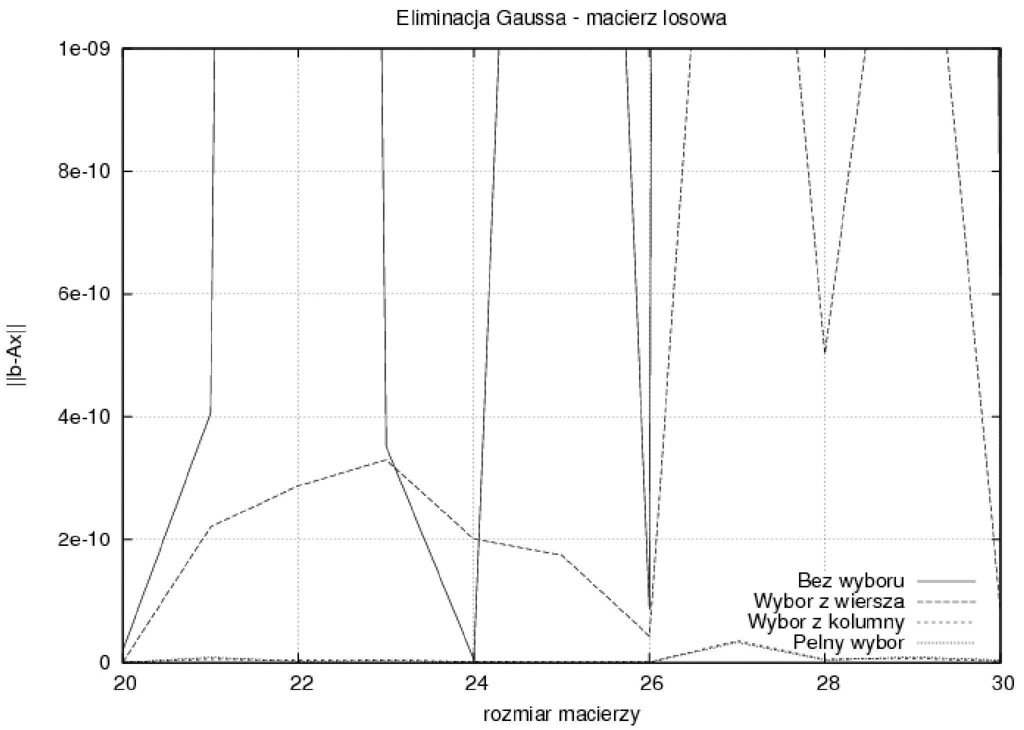
5.3. Macierz z dominującą przekątną



Dobrze uwarunkowana, dla metody bez modyfikacji i wyboru z wiersza(po którym zmieniamy kolumny) nie za dobrze, dla wyboru z kolumn i full lepiej i prawie tak samo.

5.4. Macierz losowa





6. Wnioski

Literatura

[1] Notatki z wykładu Algebra Emanuela Kierońskiego

[2] Notatki z wykładu Analiza Numeryczna Stanisława Lewanowicza

[3] Kincaid David, Cheney Ward, Analiza numeryczna

[4] J. M. Jankowscy, Przegląd metod i algorytmów numerycznych

[5] http://wolframalpha.com/

[6] http://en.wikipedia.org/

[7] http://wazniak.mimuw.edu.pl/