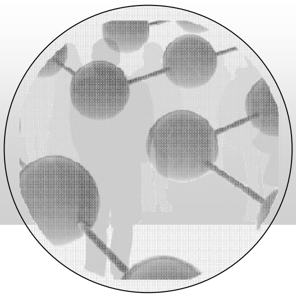
Théorie des graphes



Introduction

par

Andréa C. Santos Duhamel

andrea@isima.fr

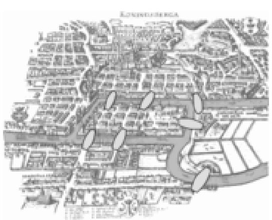
ISIMA – B108

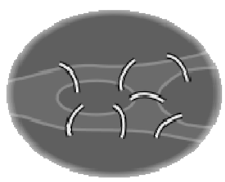
Téléphone : 04 73 40 76 62

année 2009/2010

Origine

- Le fondateur de la théorie des graphes: Euler avec le problème des sept ponts de Königsberg (1941).
- Le problème consiste à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une seule fois par chacun des sept ponts.

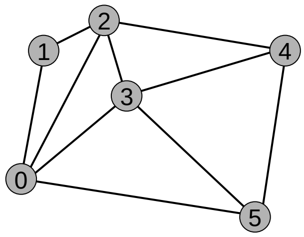




Définition d'un graphe non-orienté

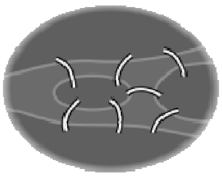
- Ensemble finis de V sommets et E arêtes (non-orienté) ou de A arcs (orienté)
- Les sommets d'un graphe peuvent être étiquetés par des mots, chiffres, etc

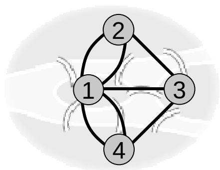
G=(V,E) → [i,j] = [j,i]
V = {0,1,2,3,4,5} → |V|=n →n=6
E = {[0,1], [0,2], [0,3], [0,5], [1,2], [2,3], [2,4], [3,4], [3,5], [4,5]} → |E|=m →m=10



Origine

- Le fondateur de la théorie des graphes: Euler avec le problème des sept ponts de Königsberg (1941).
- Le problème consiste à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une seule fois par chacun des sept ponts.





Il n'existe pas de solution !

Motivation

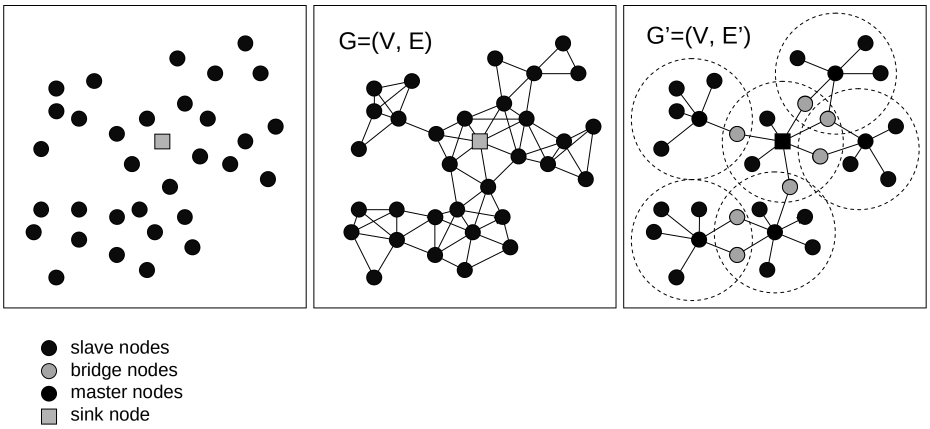
- Structure importante pour modéliser des problèmes combinatoires et représenter des données en informatique.

- Exprimer des relations et dépendences entre éléments :
  – les arbres généalogiques, les successions de tâches en gestion de projet,…

- Représenter la connexité et le cheminement :
  – Réseau électrique, d’eau, routier,…

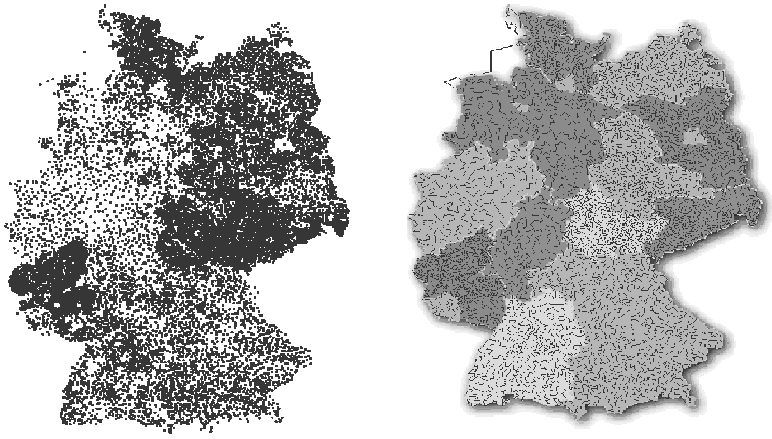
Motivation

Problèmes de conception de réseau
(réseau de capteurs, réseau électrique…)



Motivation

Problèmes de transports – plus court chemin, voyageur de commerce,…

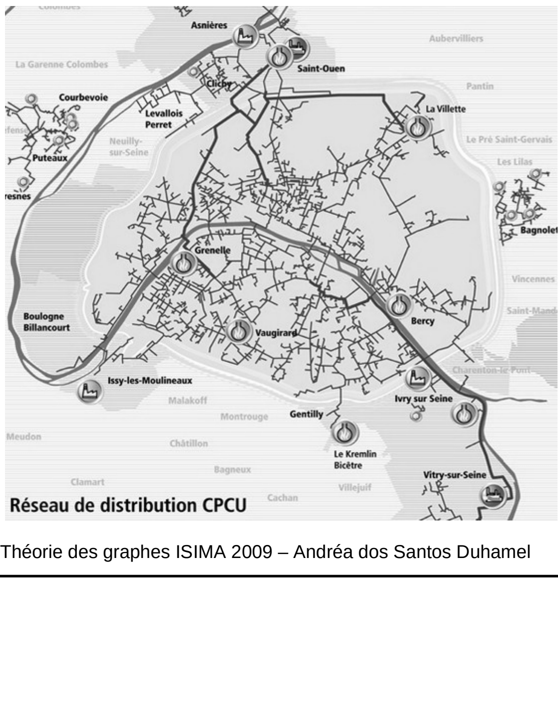


(2001) D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, W. Cook

15112 villes d'Allemagne

Motivation

Problèmes de localisation : réseau de chauffage de Paris, chaufferie…



Installations des antennes de téléphonie mobile,

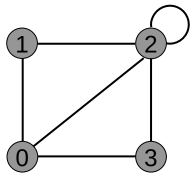
Écoles

Casernes des pompiers, etc…

Définitions

- Boucle: arête [i,i]
- Sommet voisins (adjacents) : s'il existe une arête [i,j] (on dit que l'arête est incident au sommet)
- Le voisinage d'un sommet $N_G(i)$ dans G est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents
- Le degré $d_G(i)$ d'un sommet u de G est le nombre de voisins de i dans G
- Dans les graphes non-orientés :

G=(V, E)

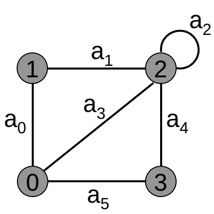


Le sommet 0 a combien de voisins?
Quel est le degré du sommet 0?

Représentation de graphes par matrices

Matrice d'incidence sommet-arc – graphes non-orientés

- taille (n x m) : (1) pour tout sommet-arc dans le graphe, (0) cas contraire.



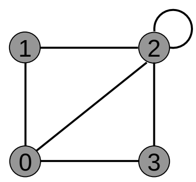
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	0
3	0	0	0	0	1	1

- La somme des valeurs d'une ligne indique le degré d'un sommet.
- Inconvénient : si le graphe est peu dense, on alloue la matrice complète pour utiliser uniquement quelques cases avec 1.

Représentation de graphes par matrices

Matrice d'adjacence sommet-sommet – graphes non-orientés

- taille (n x n): (1) pour tout arête [i,j], (0) cas contraire.



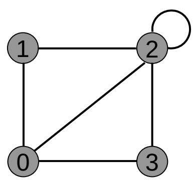
	0	1	2	3
0	0	1	1	1
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1
3	1	0	1	0

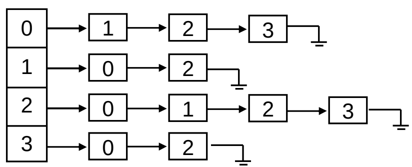
- dans le cas non-orienté la matrice est symétrique
- Inconvénient : si le graphe est peu dense, on alloue la matrice complète pour utiliser uniquement quelques cases avec 1.

Représentation de graphes par liste

Liste d'adjacence – graphes non-orientés

- La somme des longueurs de toutes les listes d'adjacence vaut, dans le pire des cas, 2m (cas non-orienté)
- Intéressant quand le graphe est peu dense car on alloue de la mémoire uniquement pour les arcs (arêtes) présents dans le graphe
- Inconvénient : pour déterminer si un arc existe, il faut parcourir toute la liste

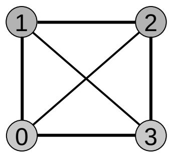




Définitions : chemins

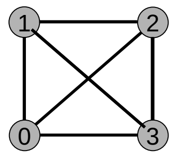
- Un chemin est une suite d'arêtes d'un sommet origine à une sommet destination $[i_1,i_2]$, $[i_2,i_3]$,…$[i_{k-1},i_k]$ (tous les arêtes doivent exister dans le graphe).
- Chemin simple : si chacun des arêtes du parcours est visité une seule fois
- Chemin élémentaire : si chacun des sommets du parcours est visité une seule fois

Exemple de chemin de 0 à 3



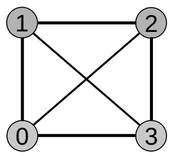
C'est chemin est simple?
Il est élémentaire?

Un chemin élémentaire est simple? Oui
Un chemin simple est élémentaire? Non



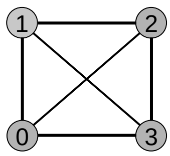
Définitions : longueur d'un chemin et cycle

- La longueur d'un chemin est son nombre d'arêtes



Chemin de longueur 3

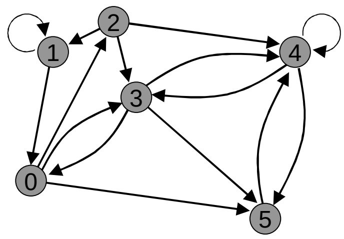
- Cycle est un chemin dont l'origine est aussi la destination



Définition d'un graphe orienté

- Ensemble finis de V sommets et A arcs

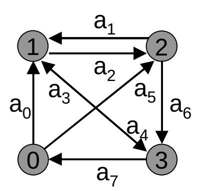
G'=(V,A) → (i,j) ≠ (j,i)
V = {0, 1, 2, 3, 4, 5} → |V|=n → n=6
A = {(0,2), (0,3), (0,5), (1,0), (1,1), (2,1), (2,3), (2,4), (3,0), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,4)} → |A|=m → m=15



Représentation de graphes par matrices

Matrice d'incidence sommet-arc - graphes orientés

- taille (n x m) : (1) sommet origine d'arc k, (-1) sommet destination d'arc k et (0) partout ailleurs.



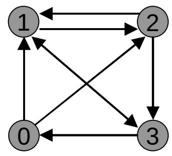
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	1	0	0	0	0	1	0	-1
1	-1	-1	1	-1	1	0	0	0
2	0	1	-1	0	0	-1	1	0
3	0	0	0	1	-1	0	-1	1

- matrice creuse : chaque colonne a uniquement deux éléments
- Inconvenient : si le graphe est peu dense, on alloue la matrice complète pour utiliser uniquement quelques cases avec 1.

Représentation de graphes par matrices

Matrice d'adjacence sommet-sommet – graphes orientés

- taille (n x n): (1) pour tout arc (i,j), (0) cas contraire.



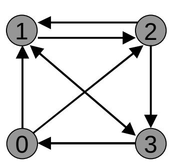
	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	1	1	0	0

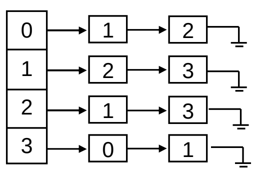
- Inconvenient : si le graphe est peu dense, on alloue la matrice complète pour utiliser uniquement quelques cases avec 1.

Représentation de graphes par liste

Liste d'adjacence – graphes orientés

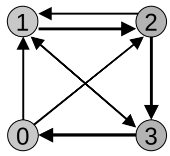
- La somme des longueurs de toutes les listes d'adjacence vaut m
- Intéressant quand le graphe est peu dense car on alloue de la mémoire uniquement pour les arcs présents dans le graphe
- Inconvenient : pour déterminer si un arc existe, il faut parcourir toute la liste



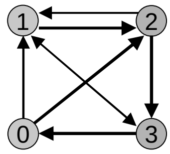


Définitions : chemin et chaîne

- Un chemin est une suite d'arcs tous orientés dans le même sens d'un sommet origine i vers une sommet destination j
- Une chaîne est un chemin sur lequel la contrainte d'orientation est relâchée. Quand les arcs ne sont pas tous orientés dans le même sens…



Chemin de 1 à 0

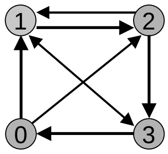


Chaîne de 1 à 3

Définitions : circuit, …

- Un circuit est un chemin dont l'origine est aussi la destination (dans un graphe non-orienté, on parle de cycle)
- Chemin simple : si chacun des arcs du parcours est visité une seule fois
- Chemin élémentaire : si chacun des sommets du parcours est visité une seule fois

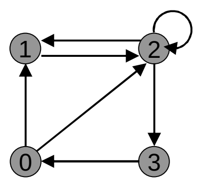
Circuit



Sommet « 0 » est l'origine et la destination

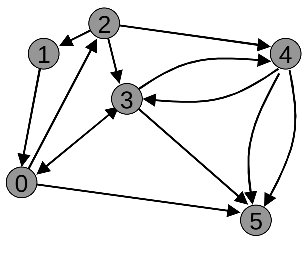
Définitions : voisinage, degré, …

- Boucle: arc (i,i)
- Sommet voisins (adjacents): s'il existe arc (i,j) ou (j,i) (On dit que l'arc est incident au sommet)
- Les voisins sortants $N_G^+(i)$ et les voisins entrants $N_G^-(i)$
- Degré sortant $d_G^+(i)$: nombre d'arcs qui sortent d'un sommet
- Degré entrant $d_G^-(i)$: nombre d'arcs qui entrent en un sommet

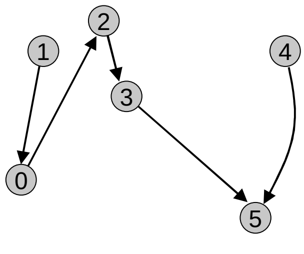


Définitions : graphe partiel

- Quand on supprime certains arcs d'un graphe G=(V, A), on obtient un « graphe partiel » $G_p=(V,A_p)$, $A_p \subset A$ de G.
- Intérêt : par exemple, dans le réseaux routier, on peut extraire le graphe partiel associé aux autoroutes.



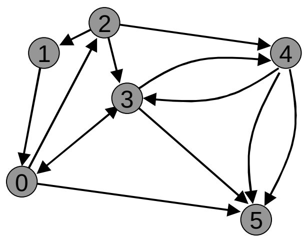
Graphe G



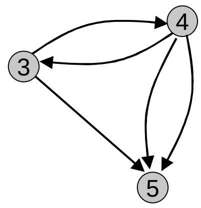
Graphe partiel G_p de G

Définitions : sous-graphe

- Quand on extrait un sous-ensemble de sommets d'un graphe G=(V, A) et on retient uniquement les arcs qui relient ces sommets, on obtient un **« sous graphe »** G_s de G.
- Intérêt : par exemple, dans le réseau routier français, on peut extraire le sous-graphe qui correspond à l'île de France avec ses villes et son réseau routier.



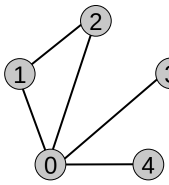
Graphe G



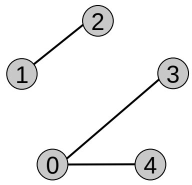
Sous graphe G_s de G

Sous-graphe et graphe partiel

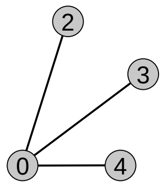
Dans le cas non-orienté



Graphe G



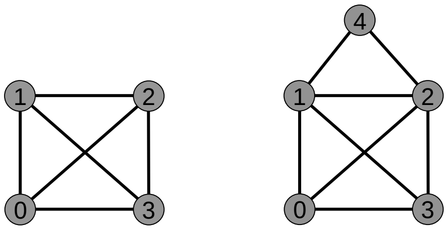
Graphe partiel de G



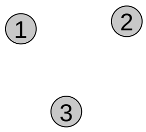
Sous graphe de G

Graphes particuliers : complet et vide

- Graphe complet : si tous les sommets sont voisins (adjacents)

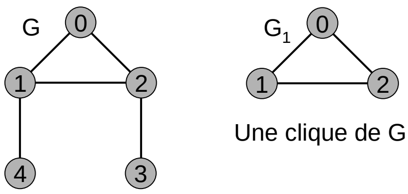


- Graphe vide : si le graphe ne contient aucun arc (arête)



Définitions : clique et stable

- Une clique d'un graphe G est un sous-graphe complet de G



Une clique de G

- Un stable est un ensemble de sommet deux à deux non voisins (adjacents) d'un graphe G. Exemple d'ensembles stables de G:

  {0}, {1}, {2}, {3}, {4},

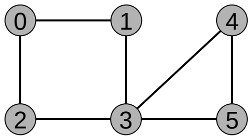
  {0,3}, {0,4}, {1,3}, {2,4}, {3,0}, {3,1}, {3,4}, {4,0}, {4,2}, {4,3},

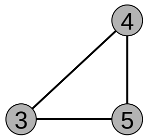
  {0,3,4} ensemble stable (indépendant) maximal

Clique et stables

- Il y a une clique dans ce graphe?

G





Clique maximal

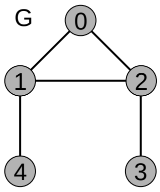
- Fournir des ensembles stables pour G

{0}, {1}, {2}, {3}, {4}, {5}
{0,3}, {0,4}, {0,5}, {1,2}, {1,4}, {1,5}, {2,4}, {2,5},
{1,2,4}, {1,2,5} Stable maximal

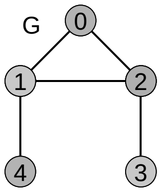
Coloration

- Coloration : on associe à tout sommet une couleur, telle que deux sommets adjacents ont une couleur différente. On partitionne donc les sommets en ensembles stables.
- Le problème de coloration d’une carte géographique consiste à colorier chaque pays de façon à ce que les pays voisins n’ont pas la même couleur.
- C’est un problème est facile ou difficile de résoudre?
- Un problème important et difficile consiste à déterminer la quantité minimale de couleurs à utiliser pour colorier un graphe

G

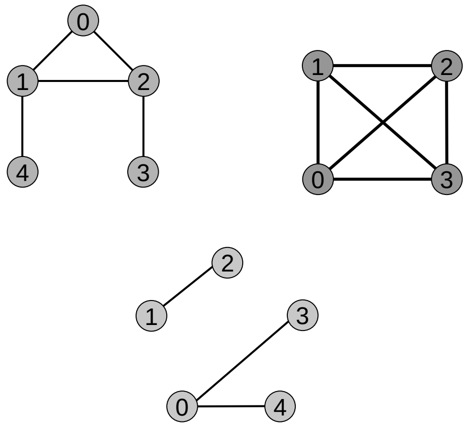


G



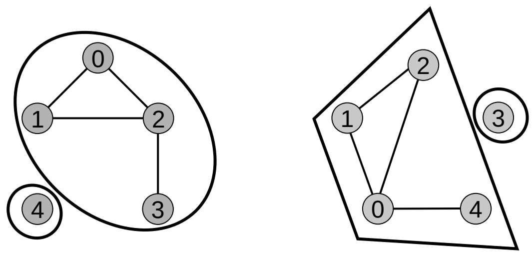
Définition : connexité…

- Un graphe est connexe s'il existe un chemin entre toute paire de sommets.



Définition : connexité…

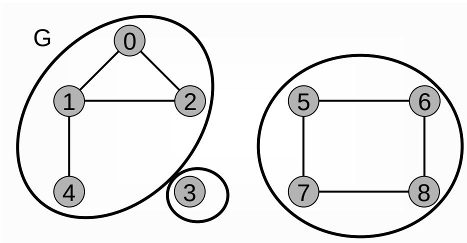
- Les composantes connexes sont des sous-graphe connexes **maximaux.**



Maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe connexe plus grand **contenant les sommets de la composante**.

Définition : connexité…

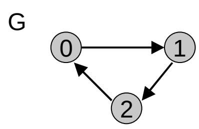
- C'est graphe est-il connexe? Il a des composantes connexes ? Si oui, combien?



Graphe non-connexe avec 3 composantes connexes

Définition : forte connexité…

- Un graphe G=(V,A) orienté est fortement connexe si et seulement si tout couple de sommets (i,j) ∈ A x A est relié par un chemin.
- Une composante fortement connexe est un sous-graphe fortement connexe maximal.

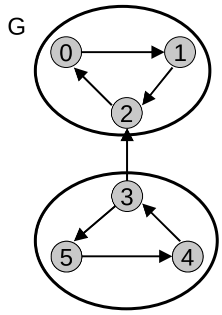


Connexe et
fortement connexe

Maximal signifie qu'il n'y a pas de sous-graphe connexe plus grand **contenant les sommets de la composante**.

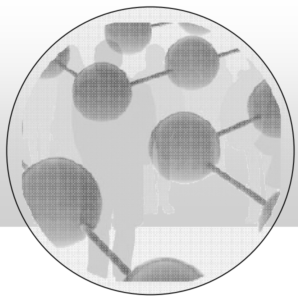
Définition : forte connexité …

- Il est fortement connexe? Il a des composantes fortement connexes?



non fortement connexe
deux composantes fortement connexes

Théorie des graphes



Exercises

année 2009/2010