Traitement du Signal - DM
ZZ1 Année 2009-2010

Exercice Signal des télégraphistes (bascule poissonienne)

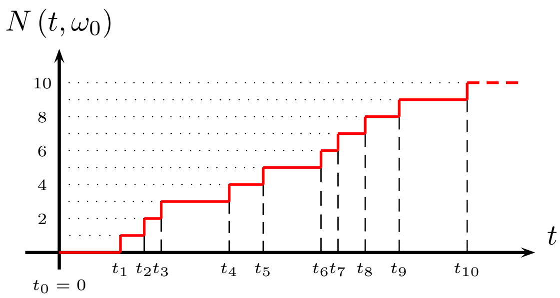
Le signal du télégraphiste est un processus aléatoire simple couramment utilisé pour modéliser des signaux de télécommunication. Le but de cet exercice est d'identifier les principales caractéristiques de ce signal, notamment son espérance (moyenne statistique), sa fonction d'autocorrélation et son spectre. Le signal du télégraphiste prend alternativement les valeurs 1 et -1, les bascules ayant lieu à des instants aléatoires au cours du temps. Le nombre de ces bascules est décrit par un processus de Poisson que nous décrivons succinctement ci-dessous.

Introduction au processus de Poisson

Le processus de Poisson est utilisé pour décrire une succession aléatoire d'événements dans le temps (émission de particules radioactives, arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur, arrivée de clients vers un guichet, arrivée de photons lumineux sur un capteur,...). Un processus de Poisson est un processus de comptage à temps continu $t \in \mathbb{R}^+$. Par définition, $N(0,\omega) = 0$. Nous noterons $N(t,\omega)$ le nombre d'événements comptés pendant la durée t, par exemple sur l'intervalle $[0,t[$ ou sur l'intervalle $[\alpha, \alpha+t[$ pour α fixé. À t fixé, la variable aléatoire $N(t,\omega)$ est distribuée par une loi de Poisson de paramètre λt :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}\left\{N\left(t,\omega\right) = k\right\} = e^{\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!} = \mathcal{P}_{\lambda t}\left(k\right).$$

Le processus $N\left(t,\omega\right)$ est appelé processus de Poisson d'intensité λ. En effet, il se produit en moyenne λ événements par unité de temps ; par conséquent il se produit en moyenne λt événements pendant la durée t. La figure ci-dessous représente un exemple de réalisation de ce processus :

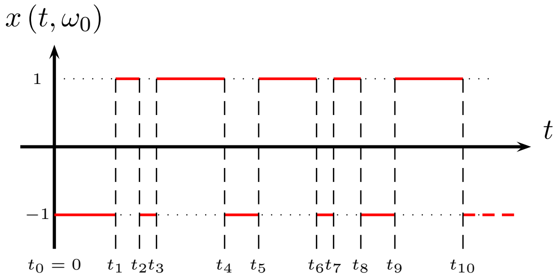


Définition du signal des télégraphistes

On construit alors le processus aléatoire $\left\{x\left(t,\omega\right), t \in \mathbb{R}^+\right\}$ où $x\left(t,\omega\right)$ est **le signal des télégraphistes** défini par :

- $x\left(t,\omega\right)$ vaut -1 ou 1, autrement dit $x\left(t,\omega\right) \in \{-1, 1\}$;
- les instants auxquels $x\left(t,\omega\right)$ bascule de -1 à 1 ou de 1 à -1 sont notés t_j pour $j \geq 1$; $x\left(t,\omega\right)$ est constant sur les intervalles $[t_j, t_{j+1}[$ et par convention $t_0 = 0$;
- le nombre $N(t,\omega)$ de changements intervenus pendant une durée t (par exemple sur $[0,t[$ ou $[\alpha, \alpha+t[$) est un processus de Poisson d'intensité λ ;
- la condition initiale est donnée par $x\left(0,\omega\right) = A\left(\omega\right)$, où $A\left(\omega\right)$ est une variable aléatoire indépendante du processus de Poisson, et prenant les valeurs $+1$ et -1 avec les probabilités p et $1-p$ avec $0 < p < 1$.

La figure ci-dessous représente un exemple de réalisation de ce processus :



Questions

1. Tracez une autre réalisation du processus $x(t,\omega)$ en mettant en évidence l'aléa. Bien repérer les quantités qui varient d'une réalisation à l'autre.
2. **Calcul de la fonction d'espérance du signal des télégraphistes** $\mathbb{E}[x(t,\omega)]$:
   a) Montrez que $\mathbb{E}[x(t,\omega)] = 2 \times \mathbb{P}(x(t,\omega) = 1) - 1$
   b) Calcul de $\mathbb{P}(x(t,\omega) = 1)$:
      i – Identifiez les scénarios (condition initiale $A(\omega)$ et nombre de bascules $N(t,\omega)$) pour lesquels $x(t,\omega) = 1$.
      ii – Montrez que $\mathbb{P}(N(t,\omega) \text{ est pair}) = e^{-\lambda t}\text{ch}(\lambda t)$ et $\mathbb{P}(N(t,\omega) \text{ est impair}) = e^{-\lambda t}\text{sh}(\lambda t)$.
      Rappel : Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies par $\text{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
      iii – Montrez que $\mathbb{P}(x(t,\omega) = 1) = \frac{1}{2} + (p - \frac{1}{2})e^{-2\lambda t}$.
   c) Déterminez $\mathbb{E}[x(t,\omega)]$.
3. **Calcul de la fonction d'autocorrélation statistique** $R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t,\omega)\,x(t-\tau,\omega)]$:
   a) Quelles valeurs peut prendre le produit $x(t,\omega)\,x(t-\tau,\omega)$?
   b) Identifiez les scénarios pour lesquels $x(t,\omega)\,x(t-\tau,\omega) = 1$.
   Rappel : Le nombre de bascules pendant la durée $|\tau|$ est donné par $N(|\tau|,\omega)$ qui est distribué par une loi de Poisson de paramètre $\lambda|\tau|$, notée $\mathcal{P}_{\lambda|\tau|}$.
   c) Montrez que $\mathbb{E}[x(t,\omega)\,x(t-\tau,\omega)] = 2 \times \mathbb{P}(N(|\tau|,\omega) \text{ est pair}) - 1$.
   d) En déduire que $\mathbb{E}[x(t,\omega)\,x(t-\tau,\omega)] = e^{-2\lambda|\tau|}$ et donnez une allure graphique.
4. Quelle est la condition pour que ce processus soit stationnaire au second ordre ? Commentez le cas où cette condition n'est pas satisfaite (que se passe-t-il lorsque $t \gg \frac{1}{\lambda}$?).
5. Calculez et tracez la densité spectrale de puissance $S_x(\nu)$ du signal des télégraphistes.
6. On s'intéresse à un réseau de capteurs de comptage utilisés pour surveiller le niveau de radioactivité en différents points d'une centrale nucléaire. Les événements comptés sont des émissions radioactives qui obéissent à un processus de Poisson d'intensité λ comprise généralement entre 106 et 107 désintégrations par seconde (l'unité correspondante est le Becquerel, noté Bq). Quelle bande de fréquence doit être réservée à chaque capteur pour la transmission des mesures au poste de télésurveillance ?