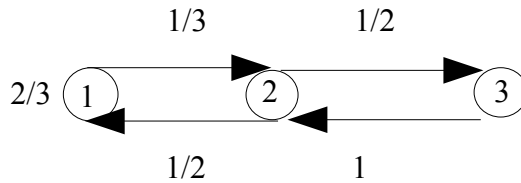


Problème 1

1-



2- Classe : $\{1, 2, 3\}$

3- Oui car la chaîne de Markov a un espace des états fini (nombre fini d'états).

4- Oui car il n'y a qu'une seule classe récurrente.

5- $\pi = \pi P$ ou somme des entrées = somme des sorties pour chaque noeud k

$$\sum_{i \neq k} \pi_i p_{ik} = \pi_k \sum_{i \neq k} p_{ki}$$

avec $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ et $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

résultat $\pi = (1/2, 1/3, 1/6)$

6- D'après le théorème 1 la chaîne de Markov converge.

$$P: \begin{pmatrix} + & + & 0 \\ + & 0 & + \\ 0 & + & 0 \end{pmatrix} \quad P^2: \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{pmatrix} \quad P^4: \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

Pour le théorème 2 on calcule $\det(P - xI)$ en développant par rapport à la dernière ligne.

$$\begin{vmatrix} 2/3-x & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -x & 1/2 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2/3-x & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 2/3-x & 1/3 \\ 1/2 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Le polynôme caractéristique est divisible par $x-1$ car 1 est toujours racine (1 valeur propre de P).

Une division euclidienne par $x-1$ donne

$$-x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = (x-1)(-x^2 - x/3 + 1/3) = (1-x)\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6} - x\right)\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6} - x\right)$$

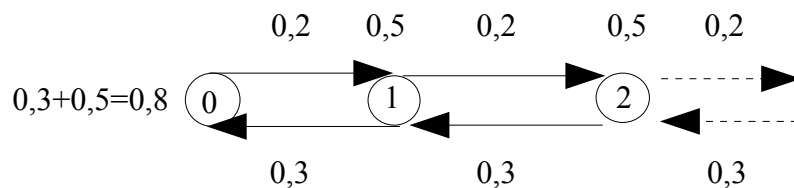
et la valeur absolue des deux dernières racines vérifie

$$0 < \frac{2}{6} = \frac{-1+\sqrt{9}}{6} < \frac{-1+\sqrt{13}}{6} < \frac{1+\sqrt{13}}{6} < \frac{1+\sqrt{16}}{6} = \frac{5}{6} < 1 \quad \text{donc la chaîne de Markov converge.}$$

7- C'est la distribution stationnaire de la question 5 et P^* a toutes ses lignes égales à ce vecteur de probabilités.

Problème 2

1-



Le nombre d'états est infini.

2- Oui, X_{n+1} (futur) ne dépend que de X_n (présent) et non du passé X_{n-p} ($p > 0$).

3- A l'équilibre les sorties compensent les entrées (ici $p(k) = \pi_k$ vecteur de probabilités stationnaires)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,2 p(0) = 0,3 p(1) \\ (0,2 + 0,3) p(k) = 0,2 p(k-1) + 0,3 p(k+1) \end{array} \right\} \quad \text{pour } k > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = \frac{2}{3} p(0) \\ 3 p(k+1) - 5 p(k) + 2 p(k-1) = 0 \end{array} \right\}$$

4- Equation caractéristique $3x^2 - 5x + 2 = 0$ racines $2/3$ et 1 donc

$$p(k) = a(2/3)^k + b1^k = a(2/3)^k + b$$

5- Les $p(k)$ sont des probabilités donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1 \text{ série convergente, ce qui implique } \lim_{k \rightarrow \infty} p(k) = 0 \text{ et } b = 0$$

mais aussi

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) = a \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = a \frac{1}{1-2/3} = 3a$$

donc $a = 1/3$ et

$$p(k) = 1/3 (2/3)^k \text{ avec } p(0) = 1/3 \text{ et } p(1) = 1/3 (2/3) = 2/9$$

les équations initiales sont vérifiées.

6- Rendre l'état 3 absorbant et calculer n_0

$$\begin{cases} n_0 = 1 + 0,8 n_0 + 0,2 n_1 \\ n_1 = 1 + 0,3 n_0 + 0,5 n_1 + 0,2 n_2 \\ n_2 = 1 + 0,2 n_1 + 0,5 n_2 \end{cases} \text{ puis résolution avec la triangularisation de Gauss}$$

$$\begin{cases} 0,2 n_0 - 0,2 n_1 = 1 \\ -0,3 n_0 + 0,5 n_1 - 0,2 n_2 = 1 \\ -0,2 n_1 + 0,5 n_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 n_0 - 2 n_1 = 10 \\ +4 n_1 - 4 n_2 = 50 \\ -2 n_1 + 5 n_2 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} n_0 - n_1 = 5 \\ n_1 - n_2 = 25/2 \\ 3 n_2 = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} n_0 = 175/6 \\ n_1 = 145/6 \\ n_2 = 35/3 \end{cases}$$

7- Rendre les états 0 et 3 absorbants et calculer b_{20}

$$\begin{cases} b_{20} = 0,5 b_{20} + 0,3 b_{10} \\ b_{10} = 0,3 + 0,5 b_{10} + 0,2 b_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} 3 b_{10} = 5 b_{20} \\ 5 b_{10} = 3 + 2 b_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} b_{10} = 5/3 b_{20} \\ 25/3 b_{20} = 3 + 2 b_{20} \end{cases} \quad \begin{cases} b_{10} = 5/3 b_{20} \\ 19/3 b_{20} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{10} = 15/19 \\ b_{20} = 9/19 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_{13} = 4/19 \\ b_{23} = 10/19 \end{cases}$$

Problème 3

1- Le nombre de pannes N suit une loi de Poisson de durée 2

$$P(N > 3) = 1 - [P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) + P(N=3)]$$

$$P(N > 3) = 1 - [e^{-2} + 2e^{-2} + 2e^{-2} + 4/3 e^{-2}] = 1 - [19/3] e^{-2} \approx 0,15$$

2- L'instant T de la première panne suit une loi exponentielle

$$P(T \leq t \mid t \leq 3) = P(T \leq t \text{ et } t \leq 3) / P(t \leq 3) \text{ en considérant 1 panne sur } [0, t] \text{ et 0 sur } [t, 3]$$

$$= (e^{-\lambda t} \lambda t e^{-\lambda(3-t)}) / (3\lambda e^{-3\lambda}) = t/3 \text{ c'est la fonction de répartition } F(t).$$

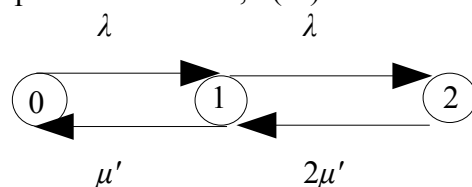
Pour obtenir la densité il faut dériver $F(t)$, on a $f(t) = 1/3$.

La distribution de T est uniforme sur $[0, 3]$

Problème 4

On considère que les arrivées et les services suivent des lois exponentielles. La station est une M/M/2/2 donc $\lambda(0) = \lambda(1) = \lambda$ et 0 sinon ; $\mu(1) = \mu'$, $\mu(2) = 2\mu'$, processus de naissance et de mort.

1- Diagramme simplifié sans boucle, $o(\Delta t)$ ni Δt



Le nombre d'états est fini.

2- Supposons l'équilibre atteint, les probabilités $p(k) = \pi_k$ sont constantes

$$\begin{cases} \lambda p(0) = \mu' p(1) \\ (\lambda + \mu') p(1) = \lambda p(0) + 2\mu' p(2) \\ 2\mu' p(2) = \lambda p(1) \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda p(0) = \mu' p(1) \\ 2\mu' p(2) = \lambda p(1) \\ p(0) + p(1) + p(2) = 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(1) = p(0) \lambda / \mu' \\ p(2) = p(0) (\lambda / \mu')^2 / 2 \\ p(0) = 1 / (1 + \lambda / \mu' + (\lambda / \mu')^2 / 2) \end{array} \right\} \text{ pour } \lambda = \mu' \quad \left\{ \begin{array}{l} p(1) = 2/5 \\ p(2) = 1/5 \\ p(0) = 2/5 \end{array} \right\}$$

4- Pas de condition de stabilité car la capacité est limitée (donc pas de débordement et les probabilités $p(k)$ sont toujours définies).

5- $L = p(1) + 2 p(2)$, remarquons qu'il n'y a pas d'attente.

6- Les états 0 et 1 autorisent l'arrivée d'un nouvel appel et donc son traitement.

La probabilité de rejet est donc $p(2) = 1 - [p(0) + p(1)]$

Problème 5

Résolu en cours.