Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année
http://www.isima.fr/~leborgne

Intégrale sur les courbes et surfaces

Gilles Leborgne

1er février 2010

Table des matières

0 Prérequis

0.1 Dérivée de l'inverse

Soit $\varphi : t \in [a,b] \to u = \varphi(t) \in [c,d]$ un difféomorphisme (une application bijective C^1 d'inverse C^1). Son inverse $\varphi^{-1} : u \in [c,d] \to t = \varphi^{-1}(u) \in [a,b]$ est donc dérivable et, pour tout $u \in [c,d]$:

$$\frac{d\varphi^{-1}}{du}(u) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}(t)} \quad \text{quand} \quad t = \varphi^{-1}(u).$$

En effet, $(\varphi \circ \varphi^{-1})(u) = u$ donne par dérivation $\varphi'(t).\varphi^{-1\prime}(u) = 1$ où on a posé $t = \varphi^{-1}(u)$. On a donc, pour tout $u \in [c,d]$, posant $t = \varphi^{-1}(u)$:

$$\frac{d\varphi^{-1}}{du}(u) = \Big(\frac{d\varphi}{dt}(t)\Big)^{-1},$$

i.e. $(\varphi^{-1})'(u) = \big(\varphi'(t)\big)^{-1}$ quand $u = \varphi(t)$.

Notation. On note $u = u(t) = \varphi(t)$ et $t = t(u) = \varphi^{-1}(u)$, ce qui donne :

$$\forall u \in [c,d], \quad \frac{dt}{du}(u) = \frac{1}{\frac{du}{dt}(t)} \quad \text{où on a posé} \quad t = \varphi^{-1}(u) = t(u), \tag{0.1}$$

ou encore $t'(u) = \dfrac{1}{u'(t(u))}$ pour tout $u \in [c,d]$. Et c'est noté de manière abusive :

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\dfrac{du}{dt}}. \tag{0.2}$$

Remarque 0.1 Cette notation abusive peut être vue comme le passage à la limite dans $\mathbb{R}$ de :

$$\frac{\Delta t}{\Delta u} = \frac{1}{\frac{\Delta u}{\Delta t}},$$

qui représentent les pentes approchées "$\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$", soit pente de la fonction $\varphi^{-1}{=}t : u \to t(u)$ (membre de gauche), soit pente de la fonction inverse $\varphi{=}u : t \to u(t)$ donné par son inverse (membre de droite). ■

Notation. Quand $u = \varphi(t)$, on a $\dfrac{du}{dt}(t) = \varphi'(t)$, et on notera $du = \varphi'(t)dt = d\varphi$. Cette notation permet en particulier de manipuler simplement les changements de variables dans les intégrales.

Exercice 0.2 Montrer que $\dfrac{d^2t}{du^2}(u) = -\dfrac{d^2u}{dt^2}(t)\,(\dfrac{dt}{du}(u))^3$. Vérifiez-le pour $t = u^2$.

Réponse. $\frac{dt}{du}(u) = \frac{1}{\frac{du}{dt}(t(u))}$ donne : $\dfrac{d^2t}{du^2}(u) = \dfrac{-\frac{d^2u}{dt^2}(t)\frac{dt}{du}(u)}{(\frac{du}{dt}(t))^2}$. ■

0.2 Changement de variable dans une intégrale

Soit $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\varphi : x \in [a,b] \to y = \varphi(x) \in [c,d]$ une application bijective C^1 d'inverse C^1 (un changement de variable), les notations $[a,b]$ et $[c,d]$ imposants $a < b$ et $c < d$. On rappelle la formule de changement de variables :

$$\int_{y\in[c,d]} f(y)\,dy = \int_{x\in[a,b]} f(\varphi(x))\,|\varphi'(x)|\,dx. \tag{0.3}$$

En particulier, si φ est strictement croissante, i.e. $\varphi' > 0$, on a $a = \varphi^{-1}(c)$ et $b = \varphi^{-1}(d)$ et :

$$\int_{y=c}^{d} f(y)\,dy = \int_{x=a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \qquad (\text{car } = \int_{x=\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx).$$

(Avec $dy = \varphi'(x)\,dx$.)

Et si φ est strictement décroissante, i.e. $\varphi' < 0$, on a $b = \varphi^{-1}(c)$ et $a = \varphi^{-1}(d)$ et :

$$\int_{y=c}^{d} f(y)\,dy = -\int_{x=a}^{b} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx, \qquad (\text{car } = \int_{x=\varphi^{-1}(c)=b}^{\varphi^{-1}(d)=a} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx).$$

(Toujours avec $dy = \varphi'(x)\,dx$.)

Et pour $f \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, on a pour D et E domaines dans $\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\vec{y}\in E} f(\vec{y})\,dy = \int_{\vec{x}\in D} f(\vec{\varphi}(\vec{x}))\,|J(\vec{x})|\,dx,$$

où $\vec{\varphi} : D \to E$ est une application bijective C^1 d'inverse C^1 et $J = \det(d\vec{\varphi}) : D \to \mathbb{R}$ est le jacobien de $\vec{\varphi}$ (déterminant de la matrice jacobienne). Et on ne doit pas oublier la valeur absolue du jacobien : contrairement au cas des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on ne peut pas parler de fonction $\vec{\varphi} : D \to E$ croissante ou décroissante : cela n'a pas de sens.

1 Intégrales sur des courbes de $\mathbb{R}^2$

On se donne un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$ éventuellement non borné, i.e. de la forme $[a,b]$ ou $]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$ ou $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,b[$ ou $]a,\infty[$ ou $[a,\infty[$ ou $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$, où on a supposé $a<b$.

1.1 Définition : courbe (géométrique) Γ

On munit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de sa base canonique $(\vec{e}_1{=}(1,0), \vec{e}_2{=}(0,1))$ et du produit scalaire euclidien :

$$(\vec{x},\vec{y}) = (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + y_1y_2 \in \mathbb{R},$$

quand $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ et $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$.

Soit $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$, de composantes (x,y), i.e. $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On appellera $\vec{r}$ "vecteur de position" ou "rayon vecteur". La norme (longueur) associée est définie par son carré (théorème de Pythagore) :

$$||\vec{r}||^2 = (\vec{r},\vec{r})_{\mathbb{R}^2} = x^2 + y^2. \tag{1.1}$$

Et, si $\vec{r}{\neq}0$, le vecteur $\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$ est le rayon vecteur unitaire.

Si $\vec{r}$ donne une "position à un instant t", on parle de fait de la fonction à valeurs vectorielles :

$$\vec{r} : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longrightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.2}$$

définie à l'aide de ses composantes = les deux fonctions à valeurs scalaires $r_1, r_2 : I \to \mathbb{R}$ notées $r_1{=}x$ (abscisse) et $r_2{=}y$ (ordonnée).

Définition 1.1

1- On appelle "arc géométrique" ou bien "courbe géométrique" ou bien "courbe" ou bien "trajectoire" l'ensemble image :

$$\Gamma = \operatorname{Im}(\vec{r}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :\ \exists t \in I,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{r}(t)\} \quad \subset \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

2- La variable t est appelée paramètre de la courbe et

3- la fonction $\vec{r}$ est appelée une paramétrisation de la courbe Γ.

Une courbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ définie comme étant l'image d'une fonction $\vec{r} : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ est également image de la fonction $\vec{q} : u \in [0,2L] \to \vec{q}(u) = \vec{r}(\frac{u}{2})$, ou de toute fonction $\tilde{\vec{q}} : v \in [a,b] \to \tilde{\vec{q}}(v) = \vec{r}(\varphi(v))$ où $\varphi : [a,b] \to [0,L]$ est une fonction bijective quelconque. Le choix de $\vec{r}$ (ou de $\vec{q}$) détermine le "paramétrage choisi pour la courbe".

Exemple 1.2 Le cercle de rayon R centré en $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ peut être représenté par $t \in [0, 2\pi[\to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a + R\cos t \\ b + R\sin t \end{pmatrix}$ ou par $t \in [0, \pi[\to \begin{pmatrix} a + R\cos 2t \\ b + R\sin 2t \end{pmatrix}$ ou par $t \in [0, 2\pi[\to \begin{pmatrix} a + R\cos(2\pi - t) \\ b + R\sin(2\pi - t) \end{pmatrix}$ ou par tout autre paramétrage $u \in [a, b[\to \vec{q}(u) = \vec{r}(\varphi(u))$ où $\varphi : [a, b[\to [0, 2\pi[$ est bijective. ▪

Exercice 1.3 Que représente la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$?

Réponse. C'est le cercle qui commence au "sommet" $(0, 1)$ parcouru en sens inverse : en effet on a $\vec{r}(0) = R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ -R\sin(t) \end{pmatrix}$ (la vitesse) vérifie $\vec{r}\,'(0) = R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on part "vers la droite"), et $\vec{r}\,'$ est C^∞ et ne s'annule jamais. ▪

Exercice 1.4 Que représente la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R - R\cos(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$?

Réponse. On a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\sin(\theta) \\ R\cos(\theta) \end{pmatrix} = \vec{q}(\theta)$ pour $\theta = t - \pi \in [-\pi, \pi]$. C'est le cercle de rayon R de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$ qui commence en "bas" (au point $(0, 0)$) parcouru en sens inverse.

N.B. : c'est à partir de cette représentation du cercle qu'on décrit souvent une cycloïde, i.e. le mouvement d'une roue sur le sol qui se déplace vers la droite, voir plus loin exercice 1.40. ▪

Exemple 1.5 Le graphe $G(f) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = f(x)\}$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définit la courbe $\vec{r} : x \in [a, b] \to \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$. ▪

Exemple 1.6 Par contre, une courbe est un ensemble beaucoup plus général que le graphe d'une fonction. Par exemple, le cercle de rayon R et de centre $(0, 0)$ est défini en coordonnées cartésiennes par l'équation "$x^2 + y^2 = R^2$" et ce n'est pas le graphe d'une fonction : à un point d'abscisse $x \in]-R, R[$ correspondent deux images : $f_1(x) = y_1 = +\sqrt{R^2 - x^2}$ et $f_2(x) = y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Écrit ainsi, le cercle est défini à l'aide des 2 fonctions f_1 et f_2. Il est souvent plus pratique de décrire un cercle à l'aide d'un unique paramètre $t \in [0, 2\pi[$ qui est l'angle :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

le paramètre t étant exprimé ici en radian (voir plus loin, exercice 1.36).

Notez que dans un logiciel de dessin, le graphe $G(f) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = f(x)\}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est "dessiné" à l'aide de sa représentation paramétrique $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x = t \\ y = f(t) \end{pmatrix}$. Par exemple dans MatLab, la commande pour dessiner $\Gamma = G(f)$ est `plot(x,y)`, qui signifie donc `plot(r1(t),r2(t))` où ici on a simplement $r_1(t) = t$ et $r_2(t) = f(t)$. Et un cercle est dessiné comme $\begin{pmatrix} r_1(t) = R\cos t \\ r_2(t) = R\sin t \end{pmatrix}$, qui ne nécessite qu'une fonction $\vec{r}$ et non les deux fonctions f_1 et f_2 où on doit séparer les cas $y \geq 0$ et $y < 0$ par exemple. ▪

1.2 Définition : courbe $\vec{r}$

Définition 1.7 On appelle également courbe la fonction $\vec{r}$ elle-même.

Remarque 1.8 Cette deuxième définition à l'avantage de décrire la "courbe" à l'aide d'un paramétrage donné a priori. Par exemple, on peut très bien définir le cercle comme étant $t \in [0, 4\pi[\to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$, et ici le cercle est "parcouru 2 fois" : l'image $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$ est toujours "le cercle", mais le but cherché dans ce genre de paramétrage est d'insister sur le fait que le cercle est parcouru 2 fois, ce qui est invisible si on ne regarde que la "courbe Γ". Dans ce cas, on a tout intérêt à appeler courbe la fonction $\vec{r}$ et non uniquement l'image $\mathrm{Im}(\vec{r}) = \Gamma$.

Nous utiliserons cette définition dans ce cours. ▪

Remarque 1.9 Soit une route Γ reliant une ville A à une ville B. Soit la fonction associée, une courbe $\vec{r} : t \in [0,T] \to \vec{r}(t)$ telle que $\vec{r}(0) = A$ et $\vec{r}(T) = B$, et $\mathrm{Im}\vec{r} = \Gamma$. Cette courbe $\vec{r}$ représente par exemple la position $\vec{r}(t)$ d'une voiture à l'instant t, et sa vitesse est donnée par $\vec{r}\,'(t)$.

Maintenant on suit cette route avec un vélo, qui va également de A à B en empruntant Γ ; supposons que ce vélo aille trois fois moins vite que la voiture : il faut trois fois plus de temps pour atteindre B, et la position du vélo à l'instant u est celle qu'avait la voiture à l'instant $\frac{u}{3}$. La trajectoire du vélo est alors représentée par la courbe $\vec{q} : u \in [0, U{=}3T] \to \vec{q}(u) = \vec{r}(\frac{u}{3})$:

On a toujours $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r}) = \mathrm{Im}(\vec{q})$, mais $\vec{q}$ permet de connaître la position $\vec{q}(u)(= \vec{r}(\frac{u}{3}))$ et la vitesse $\vec{q}\,'(u)$ du vélo à l'instant u, et de remarquer que $\vec{q}\,'(u) = \frac{1}{3}\vec{r}\,'(\frac{u}{3})$: le vélo va trois fois moins vite que la voiture en chaque point $P = \vec{q}(u)(= \vec{r}(\frac{u}{3}))$ du parcours Γ.

Ainsi, il est intéressant d'appeler "courbe" une fonction $\vec{r}$ décrivant la "courbe Γ" : cela permet la description du parcours de Γ en termes de position $\vec{r}(t)$ et de vitesse $\vec{r}\,'(t)$ à différents instants t. ▟

On adopte les définitions classiques : la fonction vectorielle $\vec{r} : t \in I \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est dite continue si ses composantes x et y sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est dite dérivable si x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et C^1 si x' et y' sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\vec{r}\,' : I \to \mathbb{R}^2$ la dérivée de $\vec{r}$, et pour $t \in I$ on a bien sûr :

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Exercice 1.10 Les paramétrages suivants définissent-ils le même arc géométrique (i.e. le même ensemble image) ?

1- $I_1 = [0,1]$, $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$, et $I_2 = [0,\pi]$, $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$, et $I_3 = [0, \frac{\pi}{2}]$, $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$.

2- $I_1 = [1,4]$, $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, et $I_2 = [1,2]$, $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$, et $I_3 = [-2,-1]$, $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}$. ▟

1.3 Courbes simples et régulières

Définition 1.11 La courbe $\vec{r}$ est dite simple si $\vec{r}$ est injective (ne se coupe pas) : si $t_1 \neq t_2$, alors $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ (on ne passe jamais deux fois au même endroit).

Et elle est dite fermée si $I = [a,b]$ et si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Et elle est dite simple et fermé si elle est fermé et si sa restriction $\vec{r}_{|[a,b[}$ à l'intervalle $[a,b[$ est simple.

Remarque 1.12 Ces définitions ont l'air incompatibles ! En effet, une courbe ne peut pas être à la fois fermée et simple, puisque si elle est fermée alors $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ et $\vec{r}$ n'est pas injective. Mais pour simplifier le langage, on dit quand même qu'elle est "simple et fermée" quand sa restriction à $[a,b[$ est simple, et qu'elle est fermée. Par exemple, le cercle $\vec{r} : t \in [0,2\pi] \to \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ est dit "simple et fermé" alors qu'il n'est simple que pour $\vec{r}_{|[0,2\pi[}$. ▟

Définition 1.13 $\vec{r}$ est dite régulière (ou lisse) si $\vec{r}$ est $C^1(I;\mathbb{R}^2)$ et si $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ (i.e. si $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $t \in I$). Et dans ce cas $\vec{r}$ est appelée une paramétrisation régulière de $\Gamma = \mathrm{Im}(\vec{r})$.

Remarque 1.14 Si ponctuellement $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ (i.e. il existe $t_0 \in I$ tel que $\vec{r}\,'(t_0) = 0$), la courbe n'est pas régulière et on est en présence d'un point d'arrêt (vitesse nulle). En particulier si $\vec{r}\,'(t) = 0$ dans un voisinage ouvert d'un t_0 alors $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ dans ce voisinage, et la courbe est réduite au point $\vec{r}(t_0)$ dans ce voisinage de t_0.

Exemple : une voiture roule d'une ville A à une ville B. Sa position à l'instant t est représenté sur la carte par le point $\vec{r}(t)$. Et sa trajectoire est la courbe $\mathrm{Im}(\vec{r})$. Au point $\vec{r}(t)$ de la trajectoire, un vecteur tangent est représenté par $\vec{r}\,'(t) \simeq \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$ qui donne la vitesse (direction et norme=valeur instantanée de la vitesse). Si la voiture s'arrête au temps t_0, on a $\vec{r}\,'(t_0) = 0$, et pendant l'intervalle de temps que dure l'arrêt, on a $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$, et pendant ce temps on ne peut pas étudier la courbe. ▟

On supposera dans la suite que $\vec{r}(t)$ est une paramétrisation régulière.

1.4 Vecteurs tangents et normaux

Soit $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière.

Définition 1.15 Le vecteur dérivé $\vec{r}\,'$ est appelé vecteur vitesse (implicitement le paramètre t est appelé “temps”). Son module $||\vec{r}\,'|| = ||\frac{d\vec{r}}{dt}||$ est la vitesse (= “distance parcourue par unité de temps”).

Proposition 1.16 *Le vecteur vitesse* $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ *est un vecteur tangent en* $\vec{r}(t)$ *à la courbe* Γ.

Preuve. C'est par définition d'un vecteur tangent à une courbe $\mathrm{Im}(\vec{r}) \subset \mathbb{R}^2$, rappelée annexe A : pour $t \in I$, un vecteur $\vec{v}$ est tangent à la courbe régulière $\vec{r}$ au point $\vec{r}(t)$ ssi il est parallèle au vecteur dérivé $\vec{r}\,'(t)$. ∎

On déduit :

Corollaire 1.17 *Soit* $t \in I$ *(quelconque mais fixé). Un vecteur normal à la courbe régulière* $\vec{r}$ *au point* $\vec{r}(t)$ *est par exemple* $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$ *(non unitaire a priori). Et tout vecteur normal est de la forme* $\lambda\tilde{\vec{n}}(t)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. En effet, le produit scalaire donne $\vec{r}\,'(t).\tilde{\vec{n}}(t) = 0$, i.e. $\vec{r}\,'(t) \perp \tilde{\vec{n}}(t)$. ∎

Proposition 1.18 *Soit* $\vec{r}$ *une courbe régulière. Pour* $t \in I$ *on considère les vecteurs tangents* $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ *et normaux* $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$. *Alors au point* $\vec{r}(t)$ *le repère* $(\vec{r}\,', \tilde{\vec{n}})$ *est indirect : on passe de* $\vec{r}\,'$ *à* $\tilde{\vec{n}}$ *par une rotation de* $-\pi/2$.

(Attention aux notations, $||\tilde{\vec{n}}|| \neq 1$ en général).

Preuve. Comme la courbe est régulière, $\vec{r}\,'(t) \neq 0$ pour tout t donc $\tilde{\vec{n}}(t) \neq 0$ pour tout t. Fixons un $t \in I$. Posons $R = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ et choisissons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}$ (un tel θ existe, voir les coordonnées polaires). Il vient $\begin{pmatrix} R\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ R\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(\theta) \\ -R\cos(\theta) \end{pmatrix} = \tilde{\vec{n}}(t)$. ∎

Exercice 1.19 1- Donner un vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$ au cercle C de centre 0 et de rayon R. Est-il unitaire ? Donner le vecteur normal défini ci-dessus. Le vecteur normal pointe-t-il vers l'intérieur ou vers l'extérieur du cercle ?

2- Et si on change le sens de la paramétrisation, i.e. on pose $u = -t$, la normale pointe-t-elle toujours dans la même direction ?

Réponse. 1-On se donne une paramétrisation du cercle. Par exemple :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Et donc un vecteur tangent en t est donné par $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) = x'(t) \\ R\cos(t) = y'(t) \end{pmatrix}$.

Le vecteur normal $\tilde{\vec{n}}(t)$ est défini par $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) = R\cos(t) \\ -x'(t) = R\sin(t) \end{pmatrix}$. Il pointe vers l'extérieur : on remarque que dans ce cas particulier on a $\tilde{\vec{n}}(t) = \vec{r}(t)$, et la base $(\vec{r}\,'(t), \tilde{\vec{n}}(t))$ est indirecte.

2- On change le sens de la paramétrisation, i.e. on pose $\vec{q}(t) = \vec{r}(-t)$:

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x_{\vec{q}}(t) \\ y_{\vec{q}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(-t) \\ R\sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ -R\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Le vecteur tangent est $\vec{q}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ -R\cos(t) \end{pmatrix}$ au point $\vec{r}(t)$. Donc le vecteur normal considéré est $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} -R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix}$ au point $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ -R\sin(t) \end{pmatrix}$. Donc $\tilde{\vec{n}}(t) = -\vec{q}(t)$ pointe vers l'intérieur du cercle : la base $(\vec{r}\,'(t), \tilde{\vec{n}}(t))$ est toujours indirecte. ∎

Exercice 1.20 Soit $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ une courbe donnée. Soit $u = u(t)$ une fonction affine de t, i.e. $u(t) = \alpha t + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1- Définir le paramètre u en fonction de t tel que la fonction $\vec{q} : u \in [0,1] \to \vec{q}(u)$ représente la même courbe que $\vec{r}$ (i.e. calculer α, β).

2- En un $u \in]0,1[$ donné, calculer le vecteur tangent $\vec{q}\,'(u)$ en fonction du vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$, et vérifier qu'ils sont colinéaires.

Réponse. 1- On pose $u = \frac{t-a}{b-a} = u(t)$ et $u : t \in]a,b[\to u(t) = \alpha t + \beta \in]0,1[$ définit un changement de variable (difféomorphisme). Ici $\alpha = \frac{1}{b-a}$ et $\beta = \frac{-a}{b-a}$. Et on a la fonction inverse $t = (b-a)u + a = t(u)$.

Et on pose $\vec{q}(u) = \vec{r}(t) = \vec{r}(t(u)) = (\vec{r} \circ t)(u)$ (changement de fonction), i.e. $\vec{q}(u) = \vec{r}((b-a)u + a)$. Et il est immédiat que $\mathrm{Im}(\vec{q}) = \mathrm{Im}(\vec{r})$, i.e. que $\vec{q}$ et $\vec{r}$ définissent la même courbe dans l'espace image $\mathbb{R}^2$.

On note abusivement $\vec{q}(u) = \vec{r}(t)$, où on précise bien que $t = t(u)$, ici $= (b-a)u + a$.

2- On en déduit que $\vec{q}\,'(u) = \vec{r}\,'(t(u))\,t'(u) = (b-a)\,\vec{r}\,'(t(u))$ pour tout $u \in [0,1]$, soit $\vec{q}\,'(u) = (b-a)\,\vec{r}\,'(t)$ où on a posé $t = (b-a)u + a$. En particulier, les vecteurs tangents sont colinéaires. ▪

Exercice 1.21 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Donner les coordonnées des points pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et donner le vecteur vitesse et un vecteur normal en ces points. Tracer Γ. ▪

Exercice 1.22 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Donner les coordonnées des points pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et donner le vecteur vitesse et un vecteur normal en ces points. Tracer Γ. ▪

Exercice 1.23 Soit la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Donner les coordonnées des points pour $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et donner le vecteur vitesse et un vecteur normal en ces points. Tracer Γ.

Indication : poser $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et montrer que "$x + y = 1$". ▪

Exercice 1.24 Soit la courbe décrivant une ellipse : $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ où $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\vec{r}\,'(t)$ et $\tilde{\vec{n}}(t)$. ▪

Exercice 1.25 Soit la courbe décrivant une parabole : $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2 + bt + c \end{pmatrix}$, où $a, b, c, t \in \mathbb{R}$. Calculer $\vec{r}\,'(t)$ et $\tilde{\vec{n}}(t)$. ▪

Exercice 1.26 Soit la courbe $\vec{r}([0, 4\pi])$ représentant un cercle, $\vec{r} : t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Tracer le graphe de $\vec{r}$, i.e. l'ensemble des points $\begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$, pour $t \in [0, 4\pi]$ (c'est une hélice qu'on dessinera dans les axes (t, x, y) de $\mathbb{R}^3$).

En déduire que la courbe $\Gamma = \vec{r}([0, 4\pi])$ est la projection dans la plan (x, y) du graphe de $\vec{r}$. ▪

1.5 Orientation du bord d'un domaine

Définition 1.27 Soit Ω un ouvert borné simplement connexe du plan $\mathbb{R}^2$, et soit $t \to \vec{r}(t)$ une paramétrisation de son bord Γ (courbe fermée simple).

En un point $\vec{r}(t)$, on dit qu'un vecteur $\vec{v}$ est orienté vers l'intérieur, ou "pointe" vers l'intérieur, quand le point $P(t, \varepsilon) = \vec{r}(t) + \varepsilon \vec{v}$ est dans Ω pour $\varepsilon > 0$ assez petit (i.e. si il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on ait $P(t, \varepsilon) \in \Omega$).

Et il pointe vers l'extérieur sinon.

Définition 1.28 Pour Ω un ouvert borné simplement connexe du plan $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ paramétrée par une courbe régulière $\vec{r}$, lorsque $\tilde{\vec{n}}$ pointe vers l'extérieur de Ω, on dit que Γ est orienté dans le sens trigonométrique. Et dans ce cas $\tilde{\vec{n}}$ est appelé vecteur normal extérieur, et $\dfrac{\tilde{\vec{n}}}{||\tilde{\vec{n}}||}$ est appelé vecteur normal extérieur unitaire.

Exercice 1.29 On se donne une courbe $\vec{r} : t \in [a,b] \to \mathbb{R}^2$ qui va du point $P_1 = \vec{r}(a)$ au point $P_2 = \vec{r}(b)$. Donner un paramétrage de cette courbe $\vec{q} : u \in [a,b] \to \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{q}(a) = P_2$ et $\vec{q}(b) = P_1$ (courbe parcourue en sens inverse). Montrer que pour une courbe fermée simple, si un paramétrage est trigonométrique, l'autre ne l'est pas, et que les normales associées pointent l'une vers l'intérieur et l'autre vers l'extérieur.

Réponse. On utilise le changement de variable $u = -t + a + b = u(t)$, et $\vec{q}(u) = \vec{r}(t) = \vec{r}(-u+a+b)$. D'où $\vec{q}\,'(u) = -\vec{r}\,'(t)$ (les vecteurs tangents sont opposés), et les courbes sont parcourues en sens opposées.

D'où $\tilde{\vec{n}}_q(u) = \begin{pmatrix} q_2'(u) \\ -q_1'(u) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix} = -\tilde{\vec{n}}_r(t)$, et les vecteurs normaux sont opposés : quand $\tilde{\vec{n}}_q(u)$ pointe vers l'intérieur (resp. vers l'extérieur), $\tilde{\vec{n}}_r(t) = -\tilde{\vec{n}}_q(u)$ pointe vers l'extérieur (resp. vers l'intérieur). ▪

1.6 Vecteur tangent unitaire

Notation. On note, pour $t \in I$:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} \tag{1.6}$$

le vecteur unitaire tangent à la courbe $\vec{r}$ au point $\vec{r}(t)$, de même sens que $\vec{r}\,'(t)$.

Proposition 1.30 *Pour tout $t \in I$, le vecteur $\vec{T}\,'(t)$ est orthogonal à $\vec{T}(t) = \vec{r}\,'(t)$ (vecteur tangent). Par contre, en général, $\vec{r}\,''(t)$ n'est pas orthogonal à $\vec{r}\,'(t)$.*

Donc $\vec{T}\,'(t)$ est parallèle à $\tilde{\vec{n}}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$ (vecteur normal), et sur l'intervalle I on a :

$$\vec{T}\,' = \frac{(x''y' - x'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,\tilde{\vec{n}}, \tag{1.7}$$

(attention, $\tilde{\vec{n}}$ n'est pas unitaire en général) et avec $\vec{n} = \frac{\tilde{\vec{n}}}{||\tilde{\vec{n}}||}$ vecteur normal unitaire on a :

$$\vec{T}\,' = \frac{(x''y' - x'y'')}{(x'^2 + y'^2)}\,\vec{n}. \tag{1.8}$$

N.B. : “sur l'intervalle I” signifie “pour tout $t \in I$”.

Preuve. On a $||\vec{T}(t)|| = 1$, d'où $||\vec{T}(t)||^2 = 1$, i.e. $(\vec{T}(t), \vec{T}(t)) = 1$.

D'où par dérivation $2(\vec{T}\,'(t), \vec{T}(t)) = 0$, d'où $\vec{T}\,'(t) \perp \vec{T}(t)$. Comme $\tilde{\vec{n}} \perp \vec{T}$, on a $\tilde{\vec{n}}(t) // \vec{T}\,'(t)$ (on est dans $\mathbb{R}^2$).

Dérivons la première composante $T_1(t) = \frac{x'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}}$ de $\vec{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$:

$$T_1'(t) = \frac{x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}} - x'(t)\frac{\frac{1}{2}(2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t))}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = y'(t)\frac{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcul similaire pour $T_2'(t)$. D'où (1.7). Puis $\tilde{\vec{n}} = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,\vec{n}$, d'où (1.8).

Et en général on a pas $\vec{r}\,''(t) \perp \vec{r}\,'(t)$: exemple, soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ (courbe= parabole graphe de “$y = x^2$”). On a $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \not\perp \vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (sauf en $t = 0$), alors que $\vec{T}(t) \perp \vec{T}\,'(t)$. ▪

Exemple 1.31 Soit le cercle $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Alors $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et $\vec{T}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -\frac{1}{R}\vec{r}(t)$ est au point $\vec{r}(t)$ orienté vers l'intérieur du cercle. Et on a $\tilde{\vec{n}} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$. Et on vérifie $x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) = R^2(-\cos^2 t - \sin^2 t) = -R^2$. ▪

1.7 Application aux courbes sous forme “explicite”

Soit $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. On rappelle que :

$$\mathrm{Im}(\vec{r}) = \bigcup_{t\in I}\{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \exists t \in I \text{ et } \begin{pmatrix} x = r_1(t) \\ y = r_2(t) \end{pmatrix}\}.$$

On se place ici dans l'espace image $\mathbb{R}^2$, et on regarde si la courbe $\mathrm{Im}(\vec{r})$ est le graphe d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On rappelle que le graphe d'une telle fonction f est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \bigcup_{x\in I}\{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}\} = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \;\text{ t.q. }\; y = f(x)\}.$$

Proposition 1.32 *Soit* $\vec{r} : t \in I \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) = x(t) \\ r_2(t) = y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *une courbe régulière. Si* $t_0 \in I$ *est tel que* $x'(t_0) = r_1'(t_0) \neq 0$ *(dérivée de la première composante de* $\vec{r}(t)$ *en* t_0*) alors la courbe géométrique* $\mathrm{Im}(\vec{r}) \subset \mathbb{R}^2$ *s'écrit localement* $y = f(x)$ *(graphe de la fonction* f*).*

I.e. il existe $\varepsilon{>}0$ *tel que la fonction* $r_1 : t \in]t_0{-}\varepsilon, t_0{+}\varepsilon[\to x = r_1(t)$ *(première composante de* $\vec{r}$ *restreinte à l'intervalle* $]t_0{-}\varepsilon, t_0{+}\varepsilon[$*) définit un changement de variable (et donc* $t = r_1^{-1}(x)$*), tel que* $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (r_2 \circ r_1^{-1})(x) \end{pmatrix} =^{\text{noté}} \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) = x \\ q_2(x) = f(x) \end{pmatrix}$.

Et la pente $f'(x)$ *de la courbe en* x *est* $f'(x) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{r_2'(t)}{r_1'(t)}$ $(= \dfrac{q_2'(x)}{q_1'(x)} = q_2'(x))$*.*

Démarche similaire si $y'(t_0) \neq 0$ *avec le changement de variable* $r_2 : t \to y = r_2(t)$*.*

Preuve. Supposons $x'(t_0) \neq 0$ (le cas $y'(t_0) \neq 0$ se traite de la même manière). Alors le théorème d'inversion locale indique que la fonction $C^1(I;\mathbb{R}) : r_1 : t \to x = r_1(t) = x(t)$ est localement inversible dans un voisinage U de t_0, d'inverse $r_1^{-1} : x \to t = r_1^{-1}(x) = t(x)$ défini dans $V = \varphi(U)$.

Ayant $(r_1^{-1} \circ r_1)(t) = t$, par dérivation de fonctions composées on obtient :

$$(r_1^{-1})'(r_1(t)).r_1'(t) = 1, \quad \forall t \in U,$$

ou encore, sachant $r_1'(t) = x'(t) \neq 0$, pour tout $t \in U$ et avec $x = r_1(t)$:

$$(t'(x) =) \qquad (r_1^{-1})'(x) = \frac{1}{r_1'(t)} \qquad (= \frac{1}{x'(t)}). \tag{1.9}$$

Effectuons alors le changement de fonction $\vec{q} = \vec{r} \circ r_1^{-1} =^{\text{noté}} \vec{r} \circ t$:

$$\vec{q}(x) = \vec{r}(t(x)), \quad \forall x \in V,$$

i.e. $\vec{q}(x) = \begin{pmatrix} r_1(t(x)) \\ r_2(t(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(r_1^{-1}(x)) = x \\ r_2(r_1^{-1}(x)) =^{\text{noté}} y(t(x)) \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Im}(\vec{q}) = \mathrm{Im}(\vec{r})$ définissent la même courbe image, relativement aux restrictions $\vec{q}_{|V}$ et $\vec{r}_{|U}$.

Il reste à poser $f = r_2 \circ r_1^{-1}$. Et, la courbe $\mathrm{Im}(\vec{q}) = \{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in V\}$ est le graphe de f (restreint à V). Enfin, la pente en $x \in V$ est donnée par :

$$f'(x) = y'(t(x))t'(x) = y'(t)\frac{1}{x'(t)}, \tag{1.10}$$

lorsque $r_1^{-1}(x) = t(x) =^{\text{noté}} t$. ∎

Remarque 1.33 Noter que la formule (1.9) est souvent écrite sous la forme : $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = (\dfrac{dx}{dt})^{-1}$.

Attention néanmoins : il faut lire $\dfrac{dt}{dx}(x) = \dfrac{1}{\frac{dx}{dt}(t)}$ où x et t sont liés par le changement de variables $x = x(t)$ ou encore $t = t(x)$. ∎

Exemple 1.34 Donner une représentation cartésienne '$y = f(x)$' du cercle (1.4).

Réponse. L'équation (1.4) donne $x = R\cos t$. Et la fonction cos est strictement décroissante et inversible de $]0,\pi[$ dans $]-R,R[$. D'où $t = \arccos\frac{x}{R} \in]0,\pi[$ pour $x \in]-R,R[$.

Et alors : $y = R\sin(\arccos\frac{x}{R}) = \sqrt{R^2-x^2}$.

Puis la fonction cos est strictement croissante de $]\pi,2\pi[$ dans $]-R,R[$ et $t = \pi + \arccos\frac{x}{R} \in]\pi,2\pi[$ pour $x \in]-R,R[$.

Et alors : $y = R\sin(\pi + \arccos\frac{x}{R}) = -R\sin(\arccos\frac{x}{R}) = -\sqrt{R^2-x^2}$.

On retrouve les deux fonctions qui déterminent le cercle.

(On peut également noter que l'équation (1.4) paramétrée du cercle donne $x^2+y^2 = R^2$. D'où directement : $y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$.) ▪

1.8 Longueur d'une courbe

On se donne une courbe paramétrée $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le calcul de la longueur d'une courbe découle de l'application du théorème de Pythagore : supposons pour commencer que Γ soit une courbe polygonale définie sur les n segments définis sur $\bigcup_{i=1,n}[t_{i-1},t_i]$ où $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, commençant aux points $\vec{r}(t_{i-1})$ et se terminant aux points $\vec{r}(t_i)$. Chaque segment a sa longueur donnée par Pythagore :

$$\Delta s_i = ||\vec{r}(t_{i-1}) - \vec{r}(t_i)|| = \sqrt{(\Delta x)_i^2 + (\Delta y)_i^2},$$

où on a noté $(\Delta x)_i = x(t_i) - x(t_{i-1})$ et $(\Delta y)_i = y(t_i) - y(t_{i-1})$.

Et, sur chaque segment de droite, $\vec{r}\,'$ est constant, d'où :

$$\vec{r}(t_{i-1}) - \vec{r}(t_i) = (t_i - t_{i-1})\,\vec{r}\,'(t_{i-\frac{1}{2}}),$$

où on a noté $t_{i-\frac{1}{2}} = \frac{t_{i-1}+t_i}{2}$ (point milieu). Si on note également $(\Delta t)_i = t_i - t_{i-1}$, on obtient :

$$\Delta s_i = (\Delta t)_i\,||\vec{r}\,'(t_{i-\frac{1}{2}})|| = \sqrt{(\Delta x)_i^2 + (\Delta y)_i^2} = (\Delta t)_i \sqrt{\Big(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}\Big)^2 + \Big(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}\Big)^2}.$$

Donc la longueur de la courbe polygonale est donnée par :

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n ||\vec{r}\,'(t_{i-\frac{1}{2}})||\,(\Delta t)_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)_i^2 + (\Delta y)_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Big(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}\Big)^2 + \Big(\frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}\Big)^2}(\Delta t)_i.$$

Et toute courbe régulière peut être approximée par une ligne polygonale, l'approximation étant d'autant meilleur que n est grand. À la limite on obtient pour une courbe Γ donnée :

$$L = \int_\Gamma ds = \int_{t=a}^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_\Gamma \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{t=a}^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt. \qquad (1.11)$$

Définition 1.35 La longueur de la courbe Γ est par définition (quand l'intégrale existe) :

$$L \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma ds, \qquad (1.12)$$

ou par l'une des expressions dans (1.11). Et $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ est appelé élément de longueur. (On note également souvent $L = |\Gamma|$ la longueur de Γ).

Exercice 1.36 1- Retrouver le périmètre d'un cercle de rayon R.

2- Quel est l'angle t_0 tel que la longueur du morceau de cercle défini par $t \in [0,t_0]$ soit R ?

3- Préciser ce que sont les coordonnées en termes de radian et en termes de degré.

4- Quel paramétrage $s = s(t)$ faut-il choisir pour que la courbe $\vec{r}(t) = \vec{q}(s)$ donne $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout s, i.e. pour que la courbe soit parcourue à la vitesse unité ?

Réponse. 1- On utilise le paramétrage en coordonnées du radian (le paramétrage usuel), i.e. $t \in [0,2\pi]$ et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$. D'où le périmètre du cercle : $L([0,2\pi]) = \int_0^{2\pi} ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$.

2- Et l'angle t_0 tel que $L([0,t_0]) = t_0R = R$ est donné par $t_0 = 1$: on parcourt la distance R le long du cercle lorsqu'on a tourné d'un angle de 1 radian.

3- Le paramétrage du cercle en degrés est donné par un angle de $u = 360$ lorsque $t = 2\pi$, i.e. on fait le changement de variables $u = 360\frac{t}{2\pi} \in [0,360]$, i.e. on paramètre le cercle par $\vec{q}(u) = \vec{r}(t(u)) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{2\pi}{360}u \\ R\sin\frac{2\pi}{360}u \end{pmatrix}$.

4- On veut que la courbe soit parcourue à une vitesse de norme 1. Essayons un changement de paramètre linéaire $s = \alpha t$, et posons $\vec{q}(s) = \vec{r}(t) = \vec{r}(\frac{s}{\alpha})$. Il vient $\vec{q}\,'(s) = \frac{1}{\alpha}\vec{r}\,'(t)$, avec $||\vec{r}\,'(t)|| = R$. On prend donc $\alpha = R$ et on propose le paramétrage $\vec{q} : s \in [0,2\pi R] \to \vec{q}(s) = \begin{pmatrix} R\cos\frac{s}{R} \\ R\sin\frac{s}{R} \end{pmatrix}$. On vérifie que ce paramétrage convient car $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$. Et on retrouve que le périmètre du cercle est bien donné par $L = \int_{s=0}^{2\pi R} ||\vec{q}\,'(s)||\,ds = \int_{s=0}^{2\pi R} ds = 2\pi R$.

Notez que $ds = s'(t)\,dt = R\,dt = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$, et ds est l'élément de longueur. ▲

Exercice 1.37 Donner la longueur de la courbe définie par $t \in [0,4\pi]$ et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$. (Cercle parcouru deux fois). ▲

Exercice 1.38 Donner la longueur de la courbe définie par $t \in [0,2\pi]$ et $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ (ellipse). (Ne pas essayer de calculer l'intégrale lorsque $a \neq b$: on trouve une intégrale elliptique qui constitue en elle-même une fonction, et dont la valeur est donnée par approximation numérique.) ▲

Exercice 1.39 Paramétrer le segment de droite d'extrémités les points $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer l'élément de longueur $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ et la longueur de ce segment.

Réponse. Le segment de droite a son équation donnée par $A + t\vec{AB}$, i.e. $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 1+t \end{pmatrix}$, pour $t \in [0,1]$. Le vecteur dérivé est constant et vaut $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où $ds = \sqrt{5}\,dt$. D'où $L = \int_{t=0}^{1} \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}$.

Ce résultat était donné directement par Pythagore : $L = \sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2} = \sqrt{5}$. ▲

Exercice 1.40 Soit la cycloïde $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,2\pi]$. (On a $x'(t) = y(t)$). Calculer l'élément de longueur $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ et la longueur de la cycloïde.

Réponse. On a $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} a(1-\cos t) \\ a\sin t \end{pmatrix}$. D'où $ds = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} = 2a|\sin\frac{t}{2}| = 2a\sin\frac{t}{2}$ (≥ 0 pour $t \in [0,2\pi]$). D'où $L = 2a\int_{t=0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2a[-2\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8a$.

On rappelle que la cycloïde est obtenue en faisant rouler une roue de rayon a sur le sol, et que la longueur demandée est la distance parcourue par un point de la roue après un tour de celle-ci. En effet, la cycloïde s'écrit : $\vec{q}(t) = \vec{r}(t) - \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix}$ qui est un cercle de rayon a vu dans le repère mobile d'origine le point $P(t) = \begin{pmatrix} at \\ a \end{pmatrix}$ (position du centre de la roue se déplaçant donc à la vitesse $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$). De plus, la roue se déplace sans glisser, car après un tour de roue (t incrémenté de 2π), le centre de la roue s'est déplacé de $P(2\pi) - P(0) = \begin{pmatrix} a2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ et a donc parcouru la distance $2a\pi$ qui est le périmètre du cercle. ▲

Exercice 1.41 Changement d'unités de mesure : exercice donné ici un peu hors contexte, principalement pour montrer que ce problème n'est pas un problème de changement de paramétrage mais un problème de changement de base.

Soit une courbe $\vec{r} : t \in [0,T] \to \vec{r}(t)$. Elle est parcourue à la vitesse $\vec{r}\,'(t)$. Montrer que la longueur L_m de la courbe exprimée en miles anglais est égale à $\frac{1}{1.609}$ fois L_k où L_k est la longueur de la courbe exprimée en km.

Réponse. On note $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$, exprimée dans une base orthogonale $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ telle que $||\vec{e}_1|| =$ 1km$= ||\vec{e}_2||$. Les valeurs $x(t)$ et $y(t)$ sont donc exprimées en km. On note $R(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la représentation de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Et 1.609 km = 1.0 miles. Notons $\alpha = 1.609 = \frac{mile}{km}$ (nombre de km pour un mile).

Changement d'unité : soit $\vec{a}_1 = \alpha\vec{e}_1$ et $\vec{a}_2 = \alpha\vec{e}_2$, avec donc $||\vec{a}_1|| =$ 1.609km$= ||\vec{a}_2|| =$ 1mile. La courbe $\vec{r}$ s'exprime dans la base $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ comme $\vec{r}(t) = \frac{1}{\alpha}x(t)\vec{a}_1 + \frac{1}{\alpha}y(t)\vec{a}_2$. Notons $Q(t) = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la représentation de $\vec{r}$ dans la base $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$.

Il vient $Q(t)=\frac{1}{\alpha}R(t)$, donc $Q'(t)=\frac{1}{\alpha}R'(t)$, d'où $L_m=\int_{t=0}^{T}||Q'(t)||\,dt=\frac{1}{\alpha}\int_{t=0}^{T}||R'(t)||\,dt=\frac{1}{\alpha}L_k$. ∎

1.9 La longueur est indépendante du paramétrage

Soit une courbe régulière $\vec r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, avec $a<b$.

Soit $\varphi\in C^1([a,b];[c,d])$, avec $c<d$, un difféomorphisme (une fonction scalaire bijective C^1 d'inverse C^1) :

$$\varphi:\begin{cases}[a,b] & \to [c,d]\\ t & \to u=\varphi(t)=u(t)\end{cases}\qquad \text{d'inverse}\quad \varphi^{-1}:\begin{cases}[c,d] & \to [a,b]\\ u & \to t=\varphi^{-1}(u)=t(u).\end{cases}\tag{1.13}$$

En particulier, si φ est croissante, alors $\varphi(a)=c$ et $\varphi(b)=d$ et $u'(t)=\varphi'(t)>0$ sur $[a,b]$. Et si φ est décroissante, alors $\varphi(a)=d$ et $\varphi(b)=c$ et $u'(t)=\varphi'(t)<0$ sur $[a,b]$.

On pose $\vec q(u)\overset{\text{déf}}{=}\vec r(t)$ où $t=\varphi^{-1}(u)=t(u)$ pour tout $u\in[c,d]$, i.e. $\vec q=\vec r\circ\varphi^{-1}=\vec r\circ t$.

φ étant bijective, tout point $\vec r(t)\in \mathrm{Im}\vec r$ est le point $\vec q(u)\in\mathrm{Im}\vec q$ où $u=\varphi(t)$, et on a $\mathrm{Im}\vec r=\mathrm{Im}\vec q=^{\text{noté}}\Gamma$:

$$\Gamma=\{\vec q(u):u\in[c,d]\}=\{\vec r(t):t\in[a,b]\}.$$

Et on a :

Théorème 1.42 *Pour toute fonction continue $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et tout changement de variable (croissant ou décroissant) :*

$$\int_{t=a}^{b} f(\vec r(t))||\vec r\,'(t)||\,dt=\int_{u=c}^{d} f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,du,\tag{1.14}$$

Cette valeur étant indépendante de la paramétrisation t ou u choisie, on la note :

$$\int_\Gamma f\,d\Gamma=\int_\Gamma f\,ds.\tag{1.15}$$

Preuve. C'est une application directe de la formule (0.3) de changement de variables :

On a $\vec r(t)=\vec q(u)=\vec q(\varphi(t))$, d'où $\vec r\,'(t)=\vec q\,'(\varphi(t))\,\varphi'(t)=^{\text{noté}}\vec q\,'(u)\,u'(t)$, d'où :

$$f(\vec r(t)||\vec r\,'(t)||=f(\vec q(u))\,||\vec q\,'(u)\,u'(t)||=f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,|u'(t)|.$$

Avec $\varphi'(u)=\frac{1}{(\varphi-1)'(t)}$, noté $t'(u)=\frac{1}{u'(t)}$, on a $|t'(u)|=\frac{1}{|u'(t)|}$. Et on applique la formule (0.3) :

$$\int_{t=a}^{b} f(\vec r(t))||\vec r\,'(t)||\,dt=\int_{u=c}^{d}\big(f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,|u'(t)|\big)\,(|t'(u)|\,du)=\int_{u=c}^{d} f(\vec q(u))||\vec q\,'(u)||\,du.$$

∎

Et en prenant $f=1$ on obtient :

Corollaire 1.43 *La longueur de la courbe Γ ne dépend pas du paramétrage choisi :*

$$|\Gamma|=\int_a^b ||\vec r\,'(t)||\,dt=\int_c^d ||\vec q\,'(\tau)||\,d\tau.\tag{1.16}$$

Exercice 1.44 Soit une courbe $\vec r:[0,T]\to\vec r(t)\in\mathbb{R}^2$. Définir une courbe $\vec q$ telle que $\mathrm{Im}(\vec r)=\mathrm{Im}(\vec q)$ parcourue à une vitesse deux fois plus grande. On impose $\vec q(u)=\vec r(t(u))$ où la fonction $u\to t(u)$ est linéaire. Vérifier que la longueur est indépendante de la vitesse de parcours.

Réponse. On pose $t(u)=\alpha u$, avec $\alpha>0$, d'où la courbe $\vec q(u)=\vec r(\alpha u)$ pour $u\in[0,\frac{T}{\alpha}]$. On en déduit $\vec q\,'(u)=\alpha\vec r\,'(\alpha u)$, et l'exercice impose donc $\alpha=2$. On vérifie que, avec $t=\alpha u$:

$L=\int_{u=0}^{\frac{T}{\alpha}}||\vec q\,'(u)||\,du=\int_{t=0}^{T}||\alpha\vec r\,'(t)||\,\frac{dt}{\alpha}=\int_{t=0}^{T}||\vec r\,'(t)||\,dt.$

Ainsi la longueur de la courbe est indépendante de la vitesse à laquelle on la parcourt ! ∎

Exercice 1.45 On se donne une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $a < b$ on considère la courbe Γ_+ donnée par, $\vec{r} : t \in [0,1] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (b-a)t+a \\ \varphi((b-a)t+a) \end{pmatrix}$. Montrer que cette courbe a également pour paramétrage $x \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ (graphe de la fonction φ), pour $x = (b-a)t+a$, et que :

$$\int_{\Gamma_+} f\,d\Gamma = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx,$$

ce qui permet de calculer la longueur $\int_{x=a}^{b} \sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$ du graphe d'une fonction φ.

Réponse. On pose $\vec{q} : x \in [a,b] \to \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$, et on pose $x = (b-a)t+a$. Le théorème (1.42) donne $\int_\Gamma f\,d\Gamma = \int_{t=0}^{1} f(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_{x=a}^{b} f(\vec{q}(x))\,||\vec{q}\,'(x)||\,dx$. ∎

Exercice 1.46 (Suite) Toujours pour $a < b$, on considère la courbe Γ_- donnée par $\vec{r} : t \in [0,1] \to \begin{pmatrix} (a-b)t+b \\ \varphi((a-b)t+b) \end{pmatrix}$. Montrer que c'est la courbe Γ_+ précédente parcourue en sens inverse et que :

$$\int_{\Gamma_-} f\,d\Gamma = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx = \int_{\Gamma_+} f\,d\Gamma.$$

Réponse. La fonction $t \to u(t) = (a-b)t+b$ est décroissante : en particulier $b = u(0) > u(1) = a$, et on ne peut pas définir sans précaution $\vec{q} : u \in [b,a] \to \vec{q}(u) = \begin{pmatrix} u \\ \varphi(u) \end{pmatrix}$. Un changement de variable direct donne :

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1} f(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt &= \int_{t=0}^{1} f((a-b)t+b, \varphi((a-b)t+b)\,\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2\varphi'^2((a-b)t+b)}\,dt \\ &= \int_{u=b}^{a} f(u,\varphi(u))\,|a-b|\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\,\frac{du}{a-b},\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché. ∎

Exercice 1.47 (Suite) Toujours pour $a < b$, on généralise l'exercice précédent : on considère la courbe Γ donnée par $\vec{r} : t \in [0,1] \to \begin{pmatrix} u(t) \\ (\varphi \circ u)(t) \end{pmatrix}$ avec $u : t \in [0,1] \to \mathbb{R}$ décroissante stricte, $u(0) = b$ et $u(1) = a$. Montrer que :

$$\int_{\Gamma} f\,d\Gamma = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx..$$

Réponse. Un changement de variable direct donne :

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{1} f(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt &= \int_{t=0}^{1} f(u(t),\varphi(u(t))\,\sqrt{u'^2(t)+\varphi'^2(u(t)).u'^2(t)}\,dt \\ &= \int_{u=b}^{a} f(u,\varphi(u))\,|u'(t)|\sqrt{1+\varphi'^2(u)}\,\frac{du}{u'(t)},\end{aligned}$$

ce qui est le résultat cherché, sachant que $|u'(t)| = -u'(t)$ (car u décroissante). ∎

1.10 Coordonnée curviligne intrinsèque

On se donne une courbe régulière $\vec{r} : t \in I = [a,b] \to \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$. En particulier on sait calculer la longueur $L = \int_a^b ||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ de la courbe.

Soit la fonction $s : t \in [a,b] \to s(t) \in [0,L]$ (changement de variable de t vers s) définie par :

$$t \longrightarrow s(t) = \int_a^t ||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau. \tag{1.17}$$

On a donc $s(a) = 0$ et $s(b) = L = |\Gamma|$, et $s(t)$ représente la longueur de la courbe entre a et t. Comme la courbe est régulière, $||\vec{r}\,'(t)|| > 0$ et la fonction $s : t \to s(t)$ est une fonction strictement croissante, et est donc inversible, d'inverse $t : s \in [0, L] \to t(s) \in [a, b]$ qui est également inversible avec $t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{||\vec{r}\,'(t)||}$ quand $s = s(t)$.

On dispose donc du changement de variable $t \to s$ et de la courbe $\vec{q} = \vec{r} \circ t$:

$$\vec{q}(s) \overset{\text{déf}}{=} \vec{r}(t) \qquad \text{quand} \qquad t = t(s).$$

Un point de la courbe $\Gamma = \text{Im}(\vec{r}) = \text{Im}(\vec{q})$ est donc repéré par ses coordonnées $\vec{r}(t) = \vec{q}(s)$ si $s = s(t)$.

Définition 1.48 La variable s est appelée coordonnée curviligne intrinsèque de la courbe $\vec{r}$, et la courbe $s \to \vec{q}(s)$ est un paramétrage intrinsèque de la courbe image $\Gamma = \vec{r}([a, b])$.

Proposition 1.49 *On a, pour tout $t \in [a, b]$:*

$$s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||, \quad ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt, \quad L = \int_0^L ds, \tag{1.18}$$

et, pour tout $s \in [0, L]$:

$$||\vec{q}\,'(s)|| = 1, \tag{1.19}$$

i.e. la vitesse à laquelle on parcourt la courbe paramétrée par la coordonnée curviligne intrinsèque est 1 (vitesse de norme unité).

Preuve. On a avec la définition 1.17 : $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$ pour tout $t \in [a, b]$, d'où (1.18).

On a avec (1.18), pour tout $s \in [0, L]$:

$$\vec{q}\,'(s) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s))\,\frac{dt}{ds}(s) = \vec{r}\,'(t)\,\frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)} = \vec{r}\,'(t)\frac{1}{||\vec{r}\,'(t)||},$$

où on a posé $t = t(s)$, d'où (1.19). ∎

Remarque 1.50 Le choix de la nouvelle variable s correspond à un changement de vitesse de parcours de la courbe $\text{Im}(\vec{q}) = \text{Im}(\vec{r})$: cette courbe est soit parcourue à la vitesse $1 = ||\vec{q}\,'(s)||$ si on la suit à l'aide de $\vec{q}$, soit est parcourue à la vitesse $||\vec{r}\,'(t)||$ si on la suit à l'aide de $\vec{r}$. Dans les deux cas, la même courbe est parcourue, mais pas à la même vitesse.

Ainsi, si la courbe est paramétrée par s, et si on utilise les dimensions internationales, il faut L secondes pour aller de $\vec{r}(a) = \vec{q}(0)$ à $\vec{r}(b) = \vec{q}(L)$, et cela correspond à un déplacement à la vitesse de 1 m/s (mètre par seconde). Ce paramétrage intrinsèque (avec s) donnera des définitions très simples des normales et des rayons de courbure, ce que ne permet pas un paramétrage par un t quelconque. ∎

Exemple 1.51 Donner la représentation intrinsèque du cercle (1.4).

Réponse. On se donne la paramétrisation avec la coordonnée t = angle en radian : $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi[$.

Par définition de s on a $s = \int_0^t ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_0^t R\,dt$ soit $s = Rt$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Et l'équation du cercle est donnée par :

$$\vec{q}(s) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(\frac{s}{R}) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 2\pi R[.$$

On retrouve en particulier que $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ qui est bien un vecteur tangent au cercle qui est unitaire : $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout $s \in [0, 2R\pi[$. Alors que $\vec{r}\,'(t) = R$ pour $t \in [0, 2\pi[$. ∎

Exemple 1.52 Donner la représentation intrinsèque du segment de droite.

Réponse. On suppose le segment non vertical (ce cas est laissé au lecteur), et on se donne la paramétrisation avec la coordonnée $t \in [a, b]$: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \alpha t \end{pmatrix}$. On a $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, et on pose $p = ||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{1 + \alpha^2}$.

Par définition de s on a $s = \int_a^t ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \int_a^t p\,dt = p(t-a)$, d'où $t = a + \frac{s}{p}$. Et l'équation du segment est donnée par :

$$\vec{q}(s) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(a + \frac{s}{p}) = \begin{pmatrix} a + \dfrac{s}{p} \\ \alpha(a + \dfrac{s}{p}) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, p(b-a)].$$

On a donc $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ \frac{\alpha}{p} \end{pmatrix}$ qui est bien un vecteur tangent (au segment de droite) unitaire : $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$ pour tout $s \in [0, p(b-a)]$. ▪

1.11 Centre de gravité

On se donne une coordonnée curviligne intrinsèque, pour une courbe $\Gamma : s \in [O, L] \to \vec{q}(s) \in \mathbb{R}^2$. Et on se donne une fonction $\rho : \vec{r} \in \mathbb{R}^2 \to \rho(\vec{r}) \in \mathbb{R}_+^*$ (à valeurs scalaires positives).

Définition 1.53 Le poids d'une courbe (poutre) qui en $\vec{q}(s)$ a pour densité $\rho(\vec{q}(s))$ est :

$$m(\Gamma) = \int_{s=0}^{L} \rho(\vec{q}(s))\,ds \overset{\text{noté}}{=} \int_\Gamma \rho\,ds. \tag{1.20}$$

ρ est appelée densité de masse, $\rho(\vec{q}(s))$ est appelée densité de masse au point $\vec{q}(s)$, et on note :

$$dm = \rho\,ds; \tag{1.21}$$

dm est appelée la mesure massique. Ainsi :

$$m(\Gamma) = \int_\Gamma dm.$$

Exemple 1.54 Si $\rho = c > 0$ (densité constante), la masse est donnée par $m = \int_{s=0}^L c\,ds = cL$, i.e. la masse vaut c fois la longueur de la courbe. ▪

Remarque 1.55 Si on dispose de k masses ponctuelles m_i aux positions $\vec{r}_i$, la masse totale est donnée par $\sum_{i=1}^k m_i$. Si on approxime une courbe $\vec{r}$ donnée par une courbe polygonale de k segments de droite, et que chaque segment de cette courbe a pour masse $m_i = \rho_i \Delta s_i$ où Δs_i est la longueur du segment i, alors la masse vaut approximativement $\sum_{i=1}^k \rho_i \Delta s_i$. A la limite quand $k \to \infty$ et $\Delta s_i \to 0$, on obtient la masse $m = \int_{s=0}^L \rho(\vec{q}(s))\,ds$, d'où (1.20). ▪

Définition 1.56 Le centre de gravité de la courbe Γ est donné par le point G tel que :

$$\vec{OG} = \frac{\int_\Gamma \vec{q}\,dm}{\int_\Gamma dm} \qquad (= \frac{\int_\Gamma \vec{q}\,dm}{m}). \tag{1.22}$$

Ou encore G est le point donné par :

$$\int_\Gamma \vec{OG}\,dm = \int_\Gamma \vec{q}\,dm. \tag{1.23}$$

G permet de modéliser la courbe pesante à l'aide d'un seul point qui concentrerait la masse totale de la courbe.

Donc avec le paramétrage curviligne intrinsèque, on a :

$$\vec{OG} = \frac{\int_{s=0}^L \vec{q}(s)\,\rho(\vec{q}(s))\,ds}{\int_{s=0}^L \rho(\vec{q}(s))\,ds} \qquad (\overset{\text{noté}}{=} \frac{\int_\Gamma \vec{q}\,\rho\,ds}{\int_\Gamma \rho\,ds} = \frac{1}{m}\int_\Gamma \vec{q}\,\rho\,ds \quad \in \mathbb{R}^2).$$

Pour un paramétrage non intrinsèque $t \in [a,b] \to \vec{r}(t)$, la masse est donnée par :

$$m(\Gamma) = \int_{t=a}^{b} \rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt \qquad (= \int_\Gamma dm), \tag{1.24}$$

et le centre de gravité de la courbe Γ est donné par le point G tel que :

$$\vec{OG} = \frac{\int_{t=a}^b \vec{r}(t)\,\rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt}{\int_{t=a}^b \rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt} \qquad (= \frac{\int_{t=a}^b \vec{r}(t)\,\rho(\vec{r}(t))\,||\vec{r}\,'(t)||\,dt}{m}). \tag{1.25}$$

Remarque 1.57 Si on dispose de 2 masses ponctuelles m_i aux positions $\vec{r}_i$, la masse totale est donnée par m_1+m_2, et le centre de gravité est donné par $(m_1+m_2)\vec{OG} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$, soit encore $\vec{OG} = \lambda_1\vec{r}_1 + \lambda_2\vec{r}_2$ où les $\lambda_i = \frac{m_i}{m_1+m_2}$ sont les coordonnées barycentriques.

Si on dispose de k masses ponctuelles m_i aux positions $\vec{r}_i$, la masse totale est donnée par $\sum_{i=1}^k m_i$, et le centre de gravité est donné par $\sum_i m_i\vec{OG} = \sum_i m_i\vec{r}_i$, soit encore $\vec{OG} = \sum_i \lambda_i\vec{r}_i$ où $\lambda_i = \frac{m_i}{\sum_j m_j}$ sont les poids relatifs.

Si on approxime une courbe $\vec{r}$ donnée par une courbe polygonale de k segments de droite, et que chaque segment de cette courbe a pour masse $\Delta m_i = \rho_i\Delta s_i$ où Δs_i est la longueur du segment i, alors la masse vaut approximativement $\sum_{i=1}^k \rho_i\Delta s_i$. Et le centre de gravité est donné par $\sum_i \rho_i\Delta s_i\vec{OG} = \sum_i \rho_i\Delta s_i\vec{r}_i$. A la limite quand $k\to\infty$ et $\Delta s_i \to 0$, on obtient (1.23). ▪

Exemple 1.58 Calculer le centre de gravité du demi-cercle supérieur $y = \sqrt{R^2-x^2}$ chargé de manière uniforme par une densité massique $\rho(\vec{r}) = c > 0$.

Réponse. On a $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t\end{pmatrix}$ pour $t\in[0,\pi]$. D'où $ds = R\,dt$, d'où $m = \int_\Gamma \rho\,ds = \int_{t=0}^\pi cR\,dt = c\pi R$. Puis notant $\vec{OG} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2\end{pmatrix}$ on a $mg_1 = \int_{t=0}^\pi (R\cos t)\,cR\,dt = 0$ et $mg_2 = \int_{t=0}^\pi (R\sin t)\,cR\,dt = cR^2[-\cos t]_0^\pi = 2cR^2$. D'où $\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2cR^2}{c\pi R}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2R}{\pi}\end{pmatrix}$. ▪

Exemple 1.59 Calculer le centre de gravité de la parabole $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{a}{2}t^2\end{pmatrix}$ pour $t\in[\alpha,\beta]$ de densité massique c. On prendra en particulier $\alpha=-1$ et $\beta=1$.

Réponse. On a $ds = \sqrt{1+a^2t^2}\,dt$. D'où $m = \int_{t=\alpha}^\beta \sqrt{1+a^2t^2}\,dt$. On fait le changement de variables $\mathrm{sh}u = at$ qui donne $\mathrm{ch}u\,du = a\,dt$, d'où $m = \frac{1}{a}\int_{u=\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)} \mathrm{ch}^2u\,du = \frac{1}{2a}\int_{u=\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)} \mathrm{ch}(2u)+1\,du$, et donc $m = \frac{1}{a}[\mathrm{sh}(2u)]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)} + \frac{1}{2a}[u]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}$, avec $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ et donc $m = 2(\beta\sqrt{1+a^2\beta^2} - \alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2}) + \frac{1}{2a}(\mathrm{argsh}(a\beta) - \mathrm{argsh}(a\alpha))$.

En particulier pour $\beta = 1 = -\alpha$ on obtient $m = 4\sqrt{1+a^2} + \frac{1}{a}\mathrm{argsh}a$.

Et pour le centre de gravité, notant $\vec{OG} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2\end{pmatrix}$ on a $mg_1 = \int_{t=\alpha}^\beta t\sqrt{1+a^2t^2}\,dt = [\frac{2}{3(2a^2)}(1+a^2t^2)^{\frac32}]_\alpha^\beta = \frac{1}{3a^2}((1+a^2\beta^2)^{\frac32} - (1+a^2\alpha^2)^{\frac32})$. En particulier pour $\beta=-\alpha$ on a $g_1=0$. Et on a $mg_2 = \frac{a}{2}\int_{t=\alpha}^\beta t^2\sqrt{1+a^2t^2}\,dt$, ce qui par intégration par parties en posant $u=t$ et $v' = t\sqrt{1+a^2t^2}$ donne $mg_2 = \frac{a}{2}[t\frac{1}{3a^2}(1+a^2t^2)^{\frac32}]_\alpha^\beta - \frac{a}{2}\frac{1}{3a^2}\int_{t=\alpha}^\beta (1+a^2t^2)^{\frac32}\,dt$.

Pour l'intégrale qui reste on pose $\mathrm{sh}u = at$, d'où $\int_{t=\alpha}^\beta (1+a^2t^2)^{\frac32}\,dt = \frac{1}{a}\int_{t=\alpha}^\beta \mathrm{ch}^4u\,du$, avec $\mathrm{ch}^4u = (\mathrm{ch}^2u)^2 = \frac14(\mathrm{ch}2u+1)^2 = \frac14(\mathrm{ch}^22u + 2\mathrm{ch}2u + 1) = \frac18(\mathrm{ch}4u+1) + \frac12\mathrm{ch}2u + \frac14 = \frac18\mathrm{ch}4u + \frac12\mathrm{ch}2u + \frac38$. D'où $\int_{t=\alpha}^\beta (1+a^2t^2)^{\frac32}\,dt = \frac1a[\frac{1}{32}\mathrm{sh}4u + \frac14\mathrm{sh}2u + \frac38 u]_{\mathrm{argsh}(a\alpha)}^{\mathrm{argsh}(a\beta)}$.

Puis on a $\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x)) = 2\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ et $\mathrm{ch}(2\mathrm{argsh}x) = 1+2\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}x) = 1+2x^2$, d'où $\mathrm{sh}(4\mathrm{argsh}x)) = 2\mathrm{sh}(2\mathrm{argsh}x)\mathrm{ch}(2\mathrm{argsh}x) = 4x\sqrt{1+x^2}(1+2x^2)$.

Et finalement :

$$\begin{aligned} mg_2 = {} & \frac{1}{6a}[\beta(1+a^2\beta^2)^{\frac32} - \alpha(1+a^2\alpha^2)^{\frac32}] \\ & - \frac{1}{6a^2}[\frac18 a\beta\sqrt{1+a^2\beta^2}(1+2a^2\beta^2) + \frac12 a\beta\sqrt{1+a^2\beta^2} + \frac38\mathrm{argsh}(a\beta) \\ & \quad - \frac18 a\alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2}(1+2a^2\alpha^2) - \frac12 a\alpha\sqrt{1+a^2\alpha^2} - \frac38\mathrm{argsh}(a\alpha)]. \end{aligned}$$

En particulier pour $\beta = 1 = -\alpha$ on obtient :

$$mg_2 = \frac{1}{3a}(1+a^2)^{\frac32} - \frac{1}{3a^2}(\frac18 a\sqrt{1+a^2}(1+2a^2) + \frac12 a\sqrt{1+a^2} + \frac38\mathrm{argsh}a).$$

D'où g_2 connaissant m. ▪

1.12 Courbure, rayon de courbure, repère de Frénet

On se donne une courbe régulière $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. On prend le paramètre $s\in[0,L]$ curviligne intrinsèque de cette courbe, et soit $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s)\end{pmatrix}$ la paramétrisation intrinsèque associée. On note :

$$\vec{T}_s(s) = \vec{q}\,'(s), \qquad (\text{on a } ||\vec{T}_s(s)|| = 1) \tag{1.26}$$

le vecteur tangent unitaire à Γ.

Proposition 1.60 *Le vecteur dérivé $\vec{T_s}'(s) = \frac{d\vec{T_s}}{ds}(s) = \vec{q}''(s)$ est normal à la courbe $\vec{q}$ au point $\vec{q}(s)$.*

Preuve. Notant $||\vec{T_s}|| : s \to ||\vec{T_s}(s)||$, on a $||\vec{T_s}(s)|| = 1 = ||\vec{T_s}(s)||^2 = (\vec{T_s}(s), \vec{T_s}(s))$, et par dérivation, on a :

$$\frac{d||\vec{T_s}||}{ds}(s) = 0 = 2(\vec{T_s}'(s), \vec{T_s}(s)).$$

Donc $\frac{d\vec{T_s}}{ds} \perp \vec{T_s} = 0$ comme annoncé. ∎

Définition 1.61 On pose :

$$k_s(s) = ||\vec{q}''(s)|| \overset{\text{déf}}{=} \text{courbure au point } \vec{q}(s) = ||\vec{T_s}'(s)||. \tag{1.27}$$

(La courbure est donc toujours ≥ 0.) Et lorsque $||\vec{T_s}'(s)|| \neq 0$, on note :

$$R_s(s) = \frac{1}{k_s(s)} \overset{\text{déf}}{=} \text{rayon de courbure au point } \vec{q}(s), \tag{1.28}$$

Et si $||\vec{T_s}'(s)|| = 0$, on pose $R_s(s) = \infty$. Enfin, on note, si $k_s(s) \neq 0$,

$$\vec{n}_s(s) = \frac{\vec{q}''(s)}{||\vec{q}''(s)||} \qquad (= R_s(s)\vec{q}''(s) = R_s(s)\vec{T_s}'(s)), \tag{1.29}$$

le vecteur normal unitaire au point $\vec{q}(s)$. Et si $k_s(s) = 0$, on prend $\vec{n}_s(s) = \pm \begin{pmatrix} -T_{s2}(s) \\ T_{s1}(s) \end{pmatrix}$.

Définition 1.62 Et $(P{=}\vec{q}(s), (\vec{T_s}(s), \vec{n}_s(s))) = (\vec{q}(s), (\vec{q}'(s), \frac{\vec{q}''(s)}{||\vec{q}''(s)||}))$ est appelé repère de Frénet en $P = \vec{q}(s)$ lorsque $\vec{n}_s(s) \neq 0$: repère donné par la base $(\vec{T_s}(s), \vec{n}_s(s))$ au point $P = \vec{q}(s)$.

Définition 1.63 On appelle cercle osculateur le cercle tangent à la courbe qui a même courbure, i.e. le cercle de rayon $R_s(s)$ et de centre positionné en $\vec{q}(s) + R_s(s)\vec{n}(s)$.

Remarque 1.64 Pour un segment de droite : soit sa paramétrisation $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \alpha t \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $t \in [a, b]$, on a $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} a + \frac{s}{p} \\ \alpha(a + \frac{s}{p}) \end{pmatrix}$ pour $s \in [0, p(b-a)]$, où on a posé $p = \sqrt{1+\alpha^2}$. Et donc que $\vec{q}''(s) = \vec{T_s}'(s) = 0$: donc $R = \infty$ en tout point. ∎

Exemple 1.65 Calculer le rayon de courbure $\mathcal{R}(s)$ d'un cercle de rayon R centré au point $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Donner son cercle osculateur.

Réponse. Un tel cercle centré au point $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour équation

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a + R\cos(t) \\ b + R\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Et en coordonnées intrinsèques :

$$\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} a + R\cos(\dfrac{s}{R}) \\ b + R\sin(\dfrac{s}{R}) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 2\pi R].$$

D'où $\vec{q}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{s}{R}) \\ \cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ (vecteur tangent unitaire) et $\vec{q}''(s) = -\frac{1}{R}\begin{pmatrix} \cos(\frac{s}{R}) \\ \sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$. On en déduit la courbure $k(s) = ||\vec{q}''(s)|| = \frac{1}{R}$, le rayon de courbure $\mathcal{R}(s) = R$, et $\vec{n} = \frac{\vec{q}''(s)}{||\vec{q}''(s)||}$. Le centre du cercle osculateur est donné par $\vec{q}(s) + R\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le cercle osculateur est le cercle lui-même. ∎

Exercice 1.66 Le calcul ci-dessus montre que $\vec{n}$ est orienté vers l'intérieur du cercle. Est-ce encore le cas pour la paramétrisation initiale $t \in [0, 2\pi[\to \begin{pmatrix} a + R\cos(-t) \\ b + R\sin(-t) \end{pmatrix}$ (cercle parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre) ?

Réponse. Oui : on a $s = \int_0^t R\,d\tau = Rt \in [0, 2\pi R]$. D'où $\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} a + R\cos(-\frac{s}{R}) \\ b + R\sin(-\frac{s}{R}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + R\cos(\frac{s}{R}) \\ b - R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$, d'où $\vec{q}''(s) = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} -\cos(\frac{s}{R}) \\ \sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix}$ pour $s \in [0, 2\pi R]$, d'où $\vec{q}''.(\vec{q} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) < 0$, d'où $\vec{n}$ est orienté vers l'intérieur. D'ailleurs le centre du cercle est toujours donné par le point $\vec{q}(s) + R_s(s)\vec{n}(s)$ avec $R_s(s)$ toujours ≥ 0. ▪

Remarque 1.67 Il est fondamental pour le calcul de $\vec{n}_s$ de considérer les coordonnées curvilignes, le calcul étant basé sur la constance du vecteur tangent : $||\vec{q}'(s)||^2 = 1$. Par dérivation on obtient bien la relation d'orthogonalité $\vec{q}' \perp \vec{q}''$.

Si on ne dispose pas des coordonnées curvilignes, on peut calculer le vecteur normal à l'aide du vecteur unitaire tangent (proportionnel à $\vec{r}'$) :

$$\vec{U}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} \quad \text{pour } t \in [a, b].$$

En effet, on a $||\vec{U}|| = 1$ et donc $(\frac{d\vec{U}}{dt}, \vec{U}) = 0$ et donc $\frac{d\vec{U}}{dt} \perp \vec{U}$. On définit alors le vecteur normal unitaire comme étant :

$$\vec{n}(t) = R_t(t)\frac{d\vec{U}}{dt}, \qquad R_t(t) = \frac{1}{||\frac{d\vec{U}}{dt}||}.$$

Mais attention : le scalaire $R_t(t)$ n'est pas le rayon de courbure de la courbe. Par exemple pour le cercle de rayon R avec la paramétrisation classique (1.4) on a :

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow ||\vec{r}'(t)|| = R \Rightarrow \vec{U}(t) = \frac{1}{R}\vec{r}'(t), \Rightarrow \vec{U}'(t) = -\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

D'où $\vec{n}(t) = \vec{U}'(t)$ et $R_t(t) = 1$ n'est pas le rayon de courbure (sauf si $R = 1$). ▪

Exercice 1.68 Montrer que $\vec{n}_s{}'(s) = -k_s(s)\vec{T}_s(s)$, i.e. que la dérivée du vecteur normal $\vec{n}_s$ est un vecteur tangent à la courbe.

Réponse. Puisque $||\vec{n}_s(s)|| = 1$, on a $(\vec{n}_s{}'(s), \vec{n}_s(s)) = 0$, et le vecteur $\vec{n}_s{}'(s)$ est orthogonal à $\vec{n}_s(s)$ car $||\vec{n}_s(s)|| = 1$ pour tout s. D'où $\vec{n}_s{}'(s) // \vec{T}_s(s)$ et on pose :

$$\vec{n}_s{}'(s) = \alpha\vec{T}_s(s),$$

où α est obtenu par dérivation de $(\vec{T}_s, \vec{n}_s) = 0$. En effet, $\frac{d}{ds}(\vec{T}_s, \vec{n}_s) = 0$ donne $(\vec{T}_s{}', \vec{n}_s) + (\vec{T}_s, \vec{n}_s{}') = 0$, soit $k_s(s)||\vec{n}_s||^2 + \alpha||\vec{T}_s||^2 = 0$. ▪

Exercice 1.69 Montrer qu'en général le vecteur $\vec{r}''(t)$ n'est pas normal à la courbe alors que $\vec{U}'(t) = \frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||})$ l'est. On prendra par exemple le morceau de parabole défini par :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Réponse. On a $\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est le vecteur 'vertical' constant de norme 1 orienté vers le 'haut'. Il est clair que ce vecteur n'est pas normal ('orthogonal') à la parabole en tout point (faire le dessin). Par contre on a vu qu'une fois normalisé à 1, et donc quand on considère le vecteur $\vec{U}(t)$, ce vecteur est tangent à la parabole, car parallèle à $\vec{r}'(t)$, et orthogonal à $\vec{U}'(t)$, puisque $||\vec{U}(t)|| = 1$ pour tout t. ▪

Exercice 1.70 Soit l'ellipse $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et $a, b > 0$. Calculer le rayon de courbure de l'ellipse en un point $\vec{r}(t)$. Quelle est sa valeur en $\vec{r}(0)$ et en $\vec{r}(\frac{\pi}{2})$?

Réponse. On cherche un paramétrage intrinsèque de l'ellipse : on a $ds = ||\vec{r}'(t)||dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$ et donc $t'(s) = \frac{dt}{ds}(s) = (a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}$. Et on aura besoin de $t''(s) = -\frac{1}{2}(2a\cos t\sin t -$

$2b\sin t\cos t)(a^2\sin^2 t{+}b^2\cos^2 t)^{-\frac32}$, i.e. $t''(s) = (b{-}a)\cos t\sin t(a^2\sin^2 t{+}b^2\cos^2 t)^{-\frac32}$. On n'aura pas besoin de calculer $s = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u{+}b^2\cos^2 u}\,du$: on peut d'ailleurs noter que c'est une intégrale elliptique et qu'on ne peut pas simplifier cette expression de s.

On pose $\vec q(s) = \vec r(t(s))$, d'où $\vec q\,'(s) = \vec r\,'(t(s))t'(s)$. Et on peut vérifier que $||\vec q\,'(s)||{=}1$ car $t'(s) = \frac{1}{||\vec r\,'(t)||}$. D'où $\vec q\,''(s) = (\vec r\,''(t(s))t'(s))t'(s) + \vec r\,'(t(s))t''(s)$, i.e., notant $t = t(s)$ et $\alpha = \sqrt{a^2\sin^2 t{+}b^2\cos^2 t}$:

$$\begin{aligned}\vec q\,''(s) &= \alpha^{-2}\begin{pmatrix}-a\cos t\\ -b\sin t\end{pmatrix} + (b{-}a)\cos t\sin t\alpha^{-3}\begin{pmatrix}-a\sin t\\ b\cos t\end{pmatrix}\\ &= \alpha^{-3}\begin{pmatrix}-a\cos t\,(\alpha + (b{-}a)\sin^2 t)\\ -b\sin t\,(\alpha - (b{-}a)\cos^2 t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}R(s) = \alpha^3\Big(\, & a^2\cos^2 t\,(\alpha^2 + (b{-}a)^2\sin^4 t + 2\alpha(b{-}a)\sin^2 t)\\ & + b^2\sin^2 t\,(\alpha^2 + (b{-}a)^2\cos^4 t - 2\alpha(b{-}a)\cos^2 t)\Big)^{-\frac12}.\end{aligned}$$

Si $a = b = R$ (l'ellipse est un cercle), alors $\alpha = R$ et $R(s) = R^3(R^4)^{-\frac12} = R$ comme désiré.

En particulier, en $t{=}0$ on a $\alpha(0){=}b$ et $R(0) = b^3(a^2b^2)^{-\frac12} = \frac{b^2}{a}$, et en $t{=}\frac{\pi}{2}$ on a $\alpha(\frac{\pi}{2}) = a$ et $R(\frac{\pi}{2}) = a^3(b^2a^2)^{-\frac12} = \frac{a^2}{b}$. Et donc, si $b < a$ (ellipse allongée le long de l'axe des x), on a $R(0) < a$ et $R(\frac{\pi}{2}) > b$. ▪

Exemple 1.71 (Pour l'exercice suivant.) Soit le cercle $\vec r(t) = \begin{pmatrix}a + R\cos t\\ b + R\sin t\end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que l'équation du demi-cercle inférieur est donnée par $y = b - \sqrt{R^2 - x^2}$, et que le développement de y au voisinage de $x{=}0$ est $y(x) = b{-}R{+}\frac1R\frac{x^2}{2}{+}o(x^2)$. Et on donnera le développement limité à l'ordre 4 de y au voisinage de $x{=}0$.

Réponse. On a $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ et on s'intéresse à la branche qui passe par le point $(a, b - R)$, d'où $y(x) = b - \sqrt{R^2 - x^2}$. On a $y'(x) = -\frac12(-2x)(R^2 - x^2)^{-\frac12} = x(R^2 - x^2)^{-\frac12}$ et en particulier $y'(0) = 0$ (tangente horizontale). Et $y''(x) = (R^2{-}x^2)^{-\frac12}{+}x(-\frac12)(-2x)(R^2{-}x^2)^{-\frac32} = (R^2{-}x^2)^{-\frac12}{+}x^2(R^2{-}x^2)^{-\frac32}$, et en particulier $y''(0) = \frac1R$. Puis $y'''(x) = (-\frac12)(-2x)(R^2 - x^2)^{-\frac32} + 2x(R^2 - x^2)^{-\frac32} + x^2(-\frac32)(-2x)(R^2 - x^2)^{-\frac52} = 3x(R^2 - x^2)^{-\frac32} + \frac32 x^3(R^2 - x^2)^{-\frac52}$ et en particulier $y'''(0) = 0$ (courbe paire). Puis $y''''(x) = 3(R^2 - x^2)^{-\frac32} + x...$, d'où $y''''(0) = \frac{3}{R^3}$. D'où :
$y(x) = b{-}R + \frac{1}{2R}x^2 + \frac{1}{8R^3}x^4 + o(x^4)$. ▪

Exercice 1.72 Soit la parabole d'équation "$y = x^2$". Soit C le cercle osculateur au point $\vec 0$ de la parabole (le cercle de courbure de la parabole au point $\vec 0$). Donner l'équation du cercle C. Montrer que le cercle est au-dessus de la parabole.

Soit la parabole "$y = -x^2$". Soit C le cercle osculateur au point $\vec 0$ de la parabole (le cercle de courbure de la parabole au point $\vec 0$). Donner l'équation du cercle C. Montrer que le cercle est au-dessous de la parabole.

Réponse. On paramètre la parabole par $\vec r(t) = \begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{R}$, d'où $\vec r\,'(t) = \begin{pmatrix}1\\ 2t\end{pmatrix}$ et $\vec r\,''(t) = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$. D'où $||\vec r\,'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}$ d'où la coordonnée curviligne intrinsèque donnée par $ds = \sqrt{1 + 4t^2}\,dt$ (on n'aura pas à se servir de l'expression $s(t) = \int_{\tau=0}^t ||\vec r\,'(t)||\,dt$ de la coordonnée curviligne intrinsèque). On pose $\vec q(s) = \vec r(t)$, d'où $\vec q\,'(s) = \vec r\,'(t)t'(s) = \vec r\,'(t)\frac{1}{s'(t)} = \frac{\vec r\,'(t)}{\sqrt{1+4t^2}}$.

D'où $\vec q\,''(s) = \frac{\vec r\,''(t)\sqrt{1+4t^2} - \vec r\,'(t).4t.(1+4t^2)^{-\frac12}}{1+4t^2}.\frac{dt}{ds}(s)$. En particulier, $\vec q\,''(0) = \vec r\,''(0) = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$. Et donc $||\vec q\,''(0)|| = 2$ et $R = \frac12$ et $\vec n = \vec e_2$. Le cercle de courbure a donc pour équation $x^2{+}(y{-}\frac12)^2 = \frac14$ et l'équation explicite du demi-cercle inférieur est donc $y(x) = \frac12 - \sqrt{\frac14 - x^2}$. D'où $y'(x) = -\frac12(-2x)(\frac14 - x^2)^{-\frac12} = x(\frac14 - x^2)^{-\frac12}$, d'où $y''(x) = (\frac14 - x^2)^{-\frac12} + x(-\frac12)(-2x)(\frac14 - x^2)^{-\frac32} = (\frac14 - x^2)^{-\frac12} + x^2(\frac14 - x^2)^{-\frac32}$, et en particulier $y''(0) = 2$.

Le développement limité de y au voisinage de 0 est $y(x) = x^2 + 24\frac{x^4}{4!} + o(x^4) = x^2 + x^4 + o(x^4)$ (voir exercice précédent) et le cercle est au dessus de la parabole.

Pour la parabole $y = -x^2$, on fait le changement de base $(\vec e_1, \vec e_2) \to (\vec e_1, -\vec e_2)$. L'équation de la parabole est alors $y = x^2$, cas traité ci-dessus. ▪

Exemple 1.73 Montrer que si $\vec q(s) = \begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix}$ alors $\vec n(s) = \pm\begin{pmatrix}-y'(s)\\ x'(s)\end{pmatrix}$. Que dire du signe ?

Réponse. On a $\vec{q}\,'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$, et $\vec{n}(s) \perp \vec{q}\,'(s)$ d'où $\vec{n}(s) = \pm \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$ (sachant $||\vec{q}\,'(s)|| = 1$). Quant au signe, le calcul donne $\vec{q}\,''(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{R_s(s)}\vec{n}(s)$ avec $R_s(s) > 0$, d'où le signe + pour $\vec{n}$ si par exemple $y''(s)$ à même signe que $x'(s)$ (dépend de la courbe, de sa convexité ou de sa concavité). ▪

Exemple 1.74 Dessiner la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (\cos t)^3 \\ (\sin t)^3 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On calculera la courbure.

Réponse. $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -3\sin t\cos^2 t = x'(t) \\ 3\cos t\sin^2 t = y'(t) \end{pmatrix}$, $||\vec{r}\,'(t)|| = 3(\sin^2 t\cos^2 t)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sin 2t = \frac{ds}{dt}$ (avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$), $\vec{q}\,'(s) = \vec{r}\,'(t(s))t'(s) = \frac{2}{3\sin 2t}\begin{pmatrix} -3\sin t\cos^2 t \\ 3\cos t\sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ quand $t = t(s)$, $\vec{q}\,''(s) = \frac{2}{3\sin 2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, d'où $k(s) = \frac{2}{3\sin 2t}$, $R(s) = \frac{3}{2}\sin 2t$, et $\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, toujours quand $t = t(s)$.

Le centre du cercle osculateur est positionné en $\vec{r}(t) + R(s)\vec{n}(s)$, i.e. “à droite de la courbe” (faire un dessin). Noter que si on prend $t \in [0, \pi]$, alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical, car si $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ alors $\vec{r}(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Et si on prend $t \in [0, 2\pi]$ alors la courbe est symétrique par rapport à l'origine, car $\vec{r}(t + \pi) = -\vec{r}(t)$. Faire un dessin. ▪

1.13 Formule intrinsèque de la courbure en 2-D

Proposition 1.75 *Pour une courbe paramétrée* $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *montrons que la courbure* $k(s) = ||\frac{d\vec{T}}{ds}||$ *est donnée par :*

$$k_s(s) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{\text{noté}}{=} \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}(t), \tag{1.30}$$

où $t = t(s)$ *et* s *est la coordonnée intrinsèque. Et lorsque* $k(s) \neq 0$ *:*

$$R_s(s) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|}(t). \tag{1.31}$$

Preuve. Le paramétrage intrinsèque est donné par $s = \int_a^t ||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau = s(t)$ et réciproquement $t = t(s)$, ce qui donne $s'(t) = ||\vec{r}\,'(t)||$ et :

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)} = \frac{1}{||\vec{r}\,'(t)||}, \quad \text{quand } t = t(s). \tag{1.32}$$

Le vecteur unitaire tangent à la courbe en coordonnées intrinsèques est donné par :

$$\vec{T}_s(s) = \frac{\vec{r}\,'(t(s))}{||\vec{r}\,'(t(s))||}.$$

Et par dérivation :

$$\frac{d\vec{T}_s}{ds}(s) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}\Big).\frac{dt}{ds}(s) = \frac{\vec{r}\,''(t)||\vec{r}\,'(t)|| - \vec{r}\,'(t)\frac{d||\vec{r}\,'(t)||}{dt}}{||\vec{r}\,'(t)||^2}\frac{1}{||\vec{r}\,'(t)||}, \tag{1.33}$$

toujours avec $t = t(s)$. Or $||\vec{r}\,'(t)|| = (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{1}{2}}$, d'où :

$$\frac{d||\vec{r}\,'(t)||}{dt} = \frac{1}{2}\frac{2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t)}{||\vec{r}\,'(t)||} = \frac{x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}, \tag{1.34}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}_s}{ds}(s) &= \frac{1}{||\vec{r}\,'(t)||^4}(\vec{r}\,''(t)||\vec{r}\,'(t)||^2 - \vec{r}\,'(t)(x'x'' + y'y'')) \\ &= \frac{1}{||\vec{r}\,'||^4}\begin{pmatrix} x''(x'^2 + y'^2) - x'(x'x'' + y'y'') \\ y''(x'^2 + y'^2) - y'(x'x'' + y'y'') \end{pmatrix}(t).\end{aligned} \tag{1.35}$$

De plus :

$$\begin{pmatrix} x''(x'^2 + y'^2) - x'(x'x'' + y'y'') \\ y''(x'^2 + y'^2) - y'(x'x'' + y'y'') \end{pmatrix} = (x''y' - x'y'')\begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} = (x''y' - x'y'')||\vec{r}\,'||(\pm\vec{n}), \tag{1.36}$$

(pour $\pm\vec{n}$ voir exemple 1.73) d'où $||\frac{d\vec{T}_s(s)}{ds}|| = \frac{|x''y' - x'y''|}{||\vec{r}\,'||^3}$ ce qui est le résultat annoncé. ▪

Exercice 1.76 Calculer à l'aide de (1.31) le rayon de courbure du cercle de l'exercice 1.72. ▟

Exercice 1.77 Calculer à l'aide de (1.31) le rayon de courbure du graphe d'une fonction "$y{=}f(x)$". Résultat pour la parabole $y=\frac{a}{2}x^2$?

Réponse. On pose $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t=x(t) \\ f(t)=y(t)\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$. D'où $\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix} 1=x'(t) \\ f'(t)=y'(t)\end{pmatrix}$, d'où $\vec{r}\,''(t)=\begin{pmatrix} 0=x''(t) \\ f''(t)=y''(t)\end{pmatrix}$. D'où $R_s(s)=\frac{(1+f'(t)^2)^{\frac32}}{|f''(t)|}$ au point $\vec{r}(t)=\vec{q}(s)$ quand $s=\int_a^t\sqrt{1+f'(\tau)^2}\,d\tau$.

Pour la parabole $y=\frac{a}{2}x^2$, on a $f'(x)=ax$ et $f''(x)=a$, d'où $R_s(s)=\frac{1}{|a|}(1+a^2t^2)^{\frac32}$ quand $s=s(t)=\int_0^t\sqrt{1+a^2\tau^2}\,d\tau$ par exemple. ▟

2 Intégrales sur des courbes de $\mathbb{R}^3$

On considère une fonction vectorielle $\vec{r}:\ [a,b]\to\mathbb{R}^3$, avec $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$, qui est C^1 et régulière, i.e. telle que $\vec{r}\,'(t)\neq 0$ pour tout $t\in[a,b]$. Les résultats précédents sont directement transposables jusqu'au repère de Frénet.

On considère la coordonnée curviligne

$$s(t)=\int_a^t ||\vec{r}\,'(t)||\,dt=\int_a^t\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt,$$

encore donné par Pythagore par la relation :

$$ds=(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac12}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$$

La courbe étant régulière, la fonction $s:t\in[a,b]\to s(t)\in[0,L]$ est bijective, et donc inversible d'inverse noté $t:s\in[0,L]\to t(s)\in[a,b]$, où $L=\int_{t=a}^b||\vec{r}\,'(t)||\,dt$ est la longueur de la courbe.

Et on considère le paramétrage intrinsèque de la courbe $\vec{r}$, i.e. la courbe $\vec{q}:\ s\in[0,L]\to\vec{q}(s)=^{\text{déf}}\vec{r}(t(s))$. On dispose ainsi du vecteur tangent unitaire $\vec{T}(s)=\vec{q}\,'(s)$ à la courbe $\vec{q}$ au point $\vec{q}(s)$, et du vecteur $\vec{q}\,''(s)\perp\vec{q}\,'(s)$, et donc du vecteur $\vec{n}(s)=\frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}$.

On note encore $k(s)=||\vec{q}\,''(s)||$ la courbure et, lorsque $k(s)\neq0$, on note $R(s)=\frac{1}{k(s)}=\frac{1}{||\vec{q}\,''(s)||}$ le rayon de courbure, ce qui donne $\vec{n}(s)=R(s)\vec{q}\,''(s)=R(s)\vec{T}\,'(s)$:

$$k(s)=||\vec{q}\,''(s)||=||\vec{T}\,'(s)||,\qquad R(s)=\frac{1}{k(s)},\qquad \vec{n}(s)=R(s)\vec{T}\,'(s)=\frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}.\tag{2.1}$$

Définition 2.1 On appelle plan osculateur à $\Gamma=\mathrm{Im}(\vec{r})$ en un point $\vec{q}(s)$ tel que $\vec{q}\,''(s)\neq0$: le plan affine passant par $\vec{q}(s)$ et de vecteurs directeurs $\vec{T}(s)$ et $\vec{n}(s)$.

On a eu besoin de supposer $\vec{q}\,''(s)\neq0$ pour avoir $\vec{n}(s)\neq0$ et ainsi définir un plan.

On pose alors, lorsque $\vec{q}\,''(s)\neq0$:

$$\vec{b}(s)=\vec{T}(s)\wedge\vec{n}(s)\qquad(=\vec{q}\,'(s)\wedge\frac{\vec{q}\,''(s)}{||\vec{q}\,''(s)||}),\tag{2.2}$$

appelé vecteur unité binormal. Il est immédiat que $||\vec{b}(s)||=1$ (produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux).

Définition 2.2 $(\vec{T}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s))$ constitue la base (orthonormale) de Serret–Frénet.

Proposition 2.3 et définition. *On suppose qu'en $s\in[0,L]$, on a $\vec{q}\,''(s)\neq0$.*

On a $\vec{b}\,'(s)\perp\vec{b}(s)$ pour tout $s\in[0,L]$.

On a $\vec{b}\,'(s)=\vec{T}(s)\wedge\vec{n}\,'(s)$, et $\vec{b}\,'(s)\perp\vec{T}(s)$.

On a $\vec{b}\,'(s)//\vec{n}(s)$, et on appelle $\tau(s)$ le réel donné par :

$$\vec{b}\,'(s)=\tau(s)\vec{n}(s),\tag{2.3}$$

et $\tau(s)$ est appelé torsion de Γ en s (peut être ≥0 ou bien ≤0).

Si $\vec{b}(s)=\vec{b}(s_0)$ pour tout $s\in[0,L]$, où $s_0\in[0,L]$ est fixé (i.e. $\vec{b}(s)$ est un vecteur constant), alors la torsion est nulle et la courbe est contenue dans le plan $(P{=}\vec{q}(s_0),\vec{T}(s_0),\vec{n}(s_0))$.

Preuve. On a $(\vec{b}(s), \vec{b}(s)) = 1$, d'où $2(\vec{b}\,'(s), \vec{b}(s)) = 0$, i.e. $\vec{b}\,'(s) \perp \vec{b}(s)$. Puis :

$$\vec{b}\,'(s) = \vec{T}\,'(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{T}(s) \wedge \vec{n}\,'(s) = 0 + \vec{T}(s) \wedge \vec{n}\,'(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{n}\,'(s) \tag{2.4}$$

puisque $\vec{n}//\vec{T}'$ (on est en coordonnées intrinsèques). Donc $\vec{b}\,'(s) \perp \vec{T}(s)$.

Donc étant à la fois perpendiculaire à $\vec{T}(s)$ et $\vec{b}(s)$ on en déduit que $\vec{b}\,'(s)$ est parallèle à $\vec{n}(s)$, et on note $\tau(s)$ le réel tel que $\vec{b}\,'(s) = \tau(s)\vec{n}(s)$.

Ayant $\vec{b}(s) = \vec{b}(s_0)$, on déduit $\vec{b}\,'(s) = 0$ pour tout s, et la torsion $\tau(s) = 0$ est nulle pour tout s.

Montrons que si $\vec{b}(s) = \vec{b}(s_0)$ pour tout s, alors la courbe est contenue dans le plan perpendiculaire à $\vec{b}$ passant au point $\vec{q}(s_0)$. On a, développement limité de $\vec{q}$ avec reste intégral :

$$\vec{q}(s) - \vec{q}(s_0) = (s - s_0)\vec{q}\,'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\vec{q}\,''(s_0) + \frac{1}{2}\int_{u=s_0}^{s} \vec{q}\,'''(u)(s - u)\,du,$$

et donc il suffit de montrer que $\vec{q}\,'''(s)$ est combinaison linéaire de $\vec{q}\,'(s) = \vec{T}(s)$ et de $\vec{q}\,''(s)//\vec{n}(s)$.

L'hypothèse est $\vec{b}$ fonction constante, donc $\vec{b}' = 0$, et donc $\vec{T}(s) \wedge \vec{n}\,'(s) = 0$ d'où $\vec{T}(s)//\vec{n}\,'(s)$. Et comme $\vec{n}\,'(s) = \frac{\vec{q}\,'''(s)||\vec{q}\,''(s)|| - \vec{q}\,''(s)\frac{d||\vec{q}\,''||}{ds}(s)}{||\vec{q}\,''(s)||^2}$, on en déduit que $\vec{q}\,'''(s)$ est dans le plan $\mathrm{Vect}\{\vec{n}\,'(s), \vec{q}\,''(s)\} = \mathrm{Vect}\{\vec{T}(s), \vec{n}(s)\} = \mathrm{Vect}\{\vec{b}(s_0)\}^{\perp}$, pour tout $s \in [0, L]$. D'où le résultat. ▪

Corollaire 2.4 *Avec $s = s(t)$, le vecteur $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t)$ est donné par $(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')(t) = (s'(t))^3 k(s)\vec{b}(s)$ et est donc parallèle à $\vec{b}(s)$, i.e. est un vecteur binormale. Et $(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')' = 0$ implique $\vec{b}\,' = 0$, et dans ce cas la courbe est plane.*

Preuve. On a $\vec{r}(t) = \vec{q}(s)$ et $\vec{r}\,'(t) = \vec{q}\,'(s)s'(t)$ quand $s = s(t)$. D'où $\vec{r}\,''(t) = \vec{q}\,''(s)(s'(t))^2 + \vec{q}\,'(s)s''(t)$ quand $s = s(t)$. D'où $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) = (s'(t))^3\vec{q}\,'(s) \wedge \vec{q}\,''(s) = (s'(t))^3 k(s)T(s) \wedge \vec{n}(s) = (s'(t))^3 k(s)\vec{b}(s)$ quand $s = s(t)$.

D'où $\vec{b}(s) = (\frac{(t'(s))^3}{k(s)})(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')(t)$ et donc $\vec{b}\,'(s) = (\frac{(t'(s))^3}{k(s)})'(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')(t) + (\frac{(t'(s))^3}{k(s)})(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')'(t)t'(s)$. Si $(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')' = 0$, alors $\vec{b}\,'(s) = (\frac{(t'(s))^3}{k(s)})'(\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,'')(t)$. D'où $\vec{b}\,'$ et $\vec{b}$ sont parallèles à $\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''$ en tout point ; or $\vec{b}\,' \perp \vec{b}$ en tout point ; d'où $\vec{b}\,' = 0$ en tout point (puisque $||\vec{b}|| = 1$). ▪

Remarque 2.5 Si $||\vec{b}\,'(s)|| = \tau(s)$ (torsion) est "petite" alors la courbe "s'éloigne peu" du plan osculateur au voisinage de s. Si $\tau(s)$ est "grand", la courbe est "très tordue", i.e. s'éloigne très rapidement du plan osculateur. ▪

Exemple 2.6 Calculer la longueur d'une spirale, le rayon de courbure, la courbure et la torsion d'une hélice de rayon R et de pas p.

Réponse. On prend un paramétrage d'une hélice définie sur une période, avec $R > 0$ et $a = \frac{p}{2\pi}$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \\ at \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ a \end{pmatrix}$ pour $t \in [0, 2\pi]$, d'où l'élément de longueur $ds = ||\vec{r}\,'(t)||\,dt = \sqrt{R^2 + a^2}\,dt$. D'où la longueur d'une spire :

$$L(t \in [0, 2\pi]) = \int_{t=0}^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2}\,dt = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}.$$

On détermine une abscisse curviligne à l'aide de $s = \int_0^t ||\vec{r}\,'(u)||\,du$ ce qui donne $s = t\sqrt{R^2 + a^2}$, d'où l'équation de l'hélice avec les coordonnées curvilignes :

$$\vec{q}(s) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ R\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ a\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}} \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, 2\pi(R^2 + a^2)].$$

D'où :

$$\vec T(s)=\vec q\,'(s)=\begin{pmatrix}-\frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\end{pmatrix},\qquad \frac{d\vec T}{ds}=\vec q\,''(s)=-\frac{R}{R^2+a^2}\begin{pmatrix}\cos(\frac{s}{R^2+a^2})\\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ 0\end{pmatrix}.$$

D'où la courbure $k(s)$, le rayon de courbure $\mathcal{R}(s)$ et la normale :

$$k(s)=\frac{R}{R^2+a^2},\quad \mathcal{R}(s)=\frac{R^2+a^2}{R},\quad \vec n(s)=\begin{pmatrix}-\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ -\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ 0\end{pmatrix}.$$

D'où le vecteur binormal $\vec b=\vec T\wedge\vec n$ et sa dérivée :

$$\vec b(s)=\begin{pmatrix}\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ -\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\end{pmatrix},\quad \vec b\,'(s)=\frac{a}{R^2+a^2}\begin{pmatrix}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}})\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{a}{R^2+a^2}\vec n(s).$$

D'où la torsion :

$$\tau(s)=-\frac{a}{R^2+a^2}.$$

En particulier, si $a=0$, la torsion est nulle, l'hélice est dégénérée (en un cercle plan) et on retrouve les résultats précédents de courbure pour un cercle dans un plan. ▟

Exemple 2.7 Montrer qu'avec les coordonnées curvilignes on a les équations dites de Serret–Frénet :

$$\begin{cases}\vec T\,'(s)=k(s)\vec n(s),\\ \vec b\,'(s)=\tau(s)\vec n(s),\\ \vec n\,'(s)=-k(s)\vec T(s)-\tau(s)\vec b(s).\end{cases}\tag{2.5}$$

Réponse. Les 2 premières équations sont les définitions de k et τ. Et puisque $\vec n=\vec b\wedge\vec T$, on en déduit avec les 2 premières équations :

$$\vec n\,'=\vec b\,'\wedge\vec T+\vec b\wedge\vec T\,'=\tau\vec n\wedge\vec T+\vec b\wedge k\vec n=-\tau\vec b-k\vec T,\tag{2.6}$$

et on obtient le système d'équations différentielles où s est l'abscisse curviligne.

On le vérifie sur l'hélice. ▟

Exercice 2.8 Déterminer le trièdre de Serret-Frénet, le rayon de courbure, la courbure, la torsion de la courbe $\vec r:t\in\mathbb{R}\to\vec r(t)=\begin{pmatrix}a\,\mathrm{ch}t\\ a\,\mathrm{sh}t\\ at\end{pmatrix}$ où $a>0$. ▟

Exercice 2.9 Soit la courbe $\vec r(t)=\begin{pmatrix}a\sin^3 t\\ a\cos^3 t\\ -a\cos 2t\end{pmatrix}$ avec $a>0$ et $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

1- Étudier les projections orthogonales sur les plans (xOy) et (yOz).

2- Donner le trièdre de Serret–Frénet et la torsion.

3- la tangente à $\Gamma=\mathrm{Im}\vec r$ en $\vec r(t)$ coupe $(x0z)$ en $P_1(t)$ et (yOz) en $P_2(t)$. Montrer que le segment $[P_1(t),P_2(t)]$ a une longueur constante.

Réponse. 2- $\vec r\,'(t)=a\begin{pmatrix}3\cos t\sin^2 t\\ -3\sin t\cos^2 t\\ 2\sin 2t\end{pmatrix}$, d'où $s'(t)=||\vec r\,'(t)||=5a\cos t\sin t=\frac{5}{2}a\sin(2t)$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. D'où $s=\int_0^t\frac{5}{2}a\sin(2u)\,du=\frac{5}{4}(\cos 2t-1)$, et on pose $\vec q(s)=\vec r(t)$. D'où $\vec q\,'(s)=\frac{1}{5a\cos t\sin t}\vec r\,'(t)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\sin t\\ -3\cos t\\ 4\end{pmatrix}=\vec T(s)$. D'où $\vec q\,''(s)=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}\frac{1}{5a\cos t\sin t}$. D'où $\vec n(s)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$. D'où $\vec b(s)=\vec T(s)\wedge\vec n(s)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\sin t\\ 4\cos t\\ 3\end{pmatrix}$, d'où $\vec b\,'(s)=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-4\cos t\\ -4\sin t\\ 0\end{pmatrix}$ et la torsion vaut $\tau(s)=-\frac{16}{5}$.

3- La tangente en $\vec{r}(t)$ a pour équation $\tilde{\vec{r}}(t+h) = \vec{r}(t) + h\,\vec{r}\,'(t)$. Le point P_1 est donné par h tel que $\tilde{r}_2(t+h) = 0$ (deuxième composante nulle), i.e. pour h tel que $a\cos^3(t) - 3ah\sin t\cos^2 t = 0$, i.e. pour $h = \frac{1}{3}\frac{\cos t}{\sin t}$ (on suppose $t \neq 0$). Donc $P_1 = \begin{pmatrix} a\sin^3 t \\ a\cos^3 t \\ -a\cos 2t \end{pmatrix} + \frac{a}{3}\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix} 3\cos t\sin^2 t \\ -3\sin t\cos^2 t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\cos^2 t + 1 \end{pmatrix}$.
Le point P_2 est donné par h tel que $\tilde{r}_1(t_0+h) = 0$ (première composante nulle), i.e. pour h tel que $a\sin^3 t + 3ah\cos t\sin^2 t = 0$, i.e. pour $h = \frac{-1}{3}\frac{\sin t}{\cos t}$. Donc $P_2 = \begin{pmatrix} a\sin^3 t \\ a\cos^3 t \\ -a\cos 2t \end{pmatrix} + \frac{-a}{3}\frac{\sin t}{\cos t}\begin{pmatrix} 3\cos t\sin^2 t \\ -3\sin t\cos^2 t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} =$ $a\begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \frac{2}{3}\sin^2 t - 1 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{P_1P_2} = a\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{2}{3} - 2 \end{pmatrix}$ de longueur $\sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$ constante. ∎

Exercice 2.10 Soit la courbe de paramétrage $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = t^2+3t+1 \\ y(t) = 2t^2+2t+2 \\ z(t) = t^2+7t+1 \end{pmatrix}$, pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Im}\vec{r}$ est incluse dans un plan, et que cela reste vrai tant que x, y et z sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Calculer $\vec{r}\,'(0)$ et $\vec{r}\,'(1)$, en déduire un vecteur normal au plan et une équation du plan de la forme "$ax+by+cz=d$".

Réponse. Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a_1+b_1t+c_1t^2 \\ a_2+b_2t+c_2t^2 \\ a_3+b_3t+c_3t^2 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} b_1+2c_1t \\ b_2+2c_2t \\ b_3+2c_3t \end{pmatrix}$, $\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 2c_2 \\ 2c_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}^{(n)}(t) = \vec{0}$ pour tout $n \geq 3$. D'où le développement limité exact $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + t\,\vec{r}\,'(0) + \frac{t^2}{2}\,\vec{r}\,''(0)$ qui indique que, pour tout t, $\vec{r}(t)$ appartient au plan affine passant par $\vec{r}(0)$ de vecteurs générateurs $\vec{r}\,'(0)$ et $\vec{r}\,''(0)$ quand ces vecteurs sont indépendants, sinon $\vec{r}(t)$ appartient à la droite affine passant par $\vec{r}(0)$ de vecteur directeur $\vec{r}\,'(0)$ si $\vec{r}\,'(0) \neq \vec{0}$, sinon $\vec{r}(t) = \vec{r}(0)$.

Autre méthode : montrons que $\vec{r}\,'(t)$ appartient à un plan vectoriel $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, i.e. qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{r}\,'(t) \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. C'est vrai si pour tout t on a $\alpha(b_1+2c_1t)+\beta(b_2+2c_2t)+\gamma(b_3+2c_3t) = 0$, i.e. ssi $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_2 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$. Un tel vecteur (α,β,γ) doit donc être orthogonal à la fois à (b_1,b_2,b_3) et à (c_1,c_2,c_3) : il suffit de choisir par exemple $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Et on vérifie que $\vec{r}(t) - \vec{r}(0) \perp \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, i.e. que la courbe est dans le plan $\alpha(x-a_1)+\beta(y-a_2)+\gamma(z-a_3) = 0$.

Ici on a $\vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ non parallèle à $\vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, et donc un vecteur normal est donné par $\vec{r}\,'(0) \wedge \vec{r}\,'(1) = \begin{pmatrix} -24 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et l'équation du plan est par exemple $-3(x-1)+(y-2)+(z-1) = 0$.

Autre méthode : calculer $\vec{b}(s)$ et montrer que $\vec{b}(s)$ est un vecteur constant : méthode demandant plus de calculs. Par exemple, il faut commencer à calculer $\frac{ds}{dt} = ||\vec{r}\,'(t)|| = ((b_1+2c_1t)^2+(b_2+2c_2t)^2+(b_3+2c_3t)^2)^{\frac{1}{2}}$, puis poser $\vec{q}(s) = \vec{r}(t)$. Plus simplement, on se sert du corollaire 2.4 : ici $\vec{r}\,'(t) \wedge \vec{r}\,''(t) = 2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ est un vecteur constant (indépendant de t), donc la courbe est plane. ∎

3 Travail, gradient

Soit $\vec{r}$ la courbe régulière $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \in \Omega$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$. (Même démarche dans $\mathbb{R}^n$).

On a $\vec{r}\,'(t)\,dt = \begin{pmatrix} x_1'(t)dt \\ x_2'(t)dt \\ x_3'(t)dt \end{pmatrix}$, encore noté $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$.

3.1 Travail (ou circulation)

On considère une fonction de $C^0(\Omega,\mathbb{R}^3)$:

$$\vec{f}:\left\{\begin{array}{cl} \Omega & \to \mathbb{R}^3, \\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \mapsto \vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix}f_1(\vec{x})\\f_2(\vec{x})\\f_3(\vec{x})\end{pmatrix}, \end{array}\right.$$

où les fonctions $f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (à valeurs scalaires) sont des fonctions $C^0(\Omega,\mathbb{R})$, $i=1,2,3$. Et on suppose que $\Gamma=\mathrm{Im}\vec{r}\subset\Omega$ (la courbe est contenue dans Ω).

Définition 3.1 On appelle travail (ou circulation) de $\vec{f}$ le long de Γ la valeur :

$$T(\vec{f},\Gamma)\overset{\text{déf}}{=}\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}=\int_\Gamma (f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+f_3\,dx_3). \tag{3.1}$$

$\vec{f}$ ayant pour domaine de définition $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, cette définition a le sens non ambigu $\int_\Gamma \vec{f}(\vec{r}).d\vec{r}$, i.e. :

$$T(\vec{f},\Gamma)\overset{\text{déf}}{=}\int_{t=a}^b \vec{f}(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)\,dt=\int_{t=a}^b (f_1(\vec{r}(t))\,x_1'(t)+f_2(\vec{r}(t))\,x_2'(t)+f_3(\vec{r}(t))\,x_3'(t))\,dt. \tag{3.2}$$

Remarque 3.2 Noter que si la courbe Γ est dans un plan horizontal ($x_3'(t)=0$ pour tout t), ou bien si $f_3=0$, alors on a simplement :

$$T(\vec{f},\Gamma)=\int_\Gamma (f_1\,dx_1+f_2\,dx_2)=\int_{t=a}^b (f_1(\vec{r}(t))\,x_1'(t)+f_2(\vec{r}(t))\,x_2'(t))\,dt.$$

▪

Exemple 3.3 Le champ de rotation, ou champ de spin, est défini dans $\mathbb{R}^2$ par $\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$. Montrer qu'en chaque point $\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (champ de position), on a $\vec{f}(x,y)\perp\vec{r}(x,y)$. Et calculer le travail de $\vec{f}$ sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique puis dans le sens inverse.

Réponse. On a $\vec{f}(x,y).\vec{r}(x,y)=-yx+xy=0$, d'où $\vec{f}\perp\vec{r}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Puis pour le cercle $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}R\cos t\\R\sin t\end{pmatrix}$ défini pour $t\in[0,2\pi[$, on a $\vec{f}(t).\vec{r}\,'(t)=(-R\sin t)(-R\sin t)+(R\cos t)(R\cos t)=R^2$. D'où le travail $T(\vec{f},\Gamma)=\int_{t=0}^{2\pi}R^2\,dt=2\pi R^2$. Dans les sens inverse on a $\vec{q}(u)=\begin{pmatrix}R\cos u\\-R\sin u\end{pmatrix}$ défini pour $u\in[0,2\pi[$ (on a posé $u=-t+2\pi$), puis $\vec{q}\,'(u)=\begin{pmatrix}-R\sin u\\-R\cos u\end{pmatrix}$, d'où $T(\vec{f},\Gamma)=\int_{u=0}^{2\pi}-R^2\,dt=-2\pi R^2$. ▪

Exercice 3.4 Calculer le travail de la force $\vec{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x-y+z\\x+y-z^2\\3x-2y+4z\end{pmatrix}$ le long du cercle horizontal de centre $(0,0,0)$ et de rayon R.

Réponse. On paramètre le cercle à l'aide de $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}R\cos t\\R\sin t\\0\end{pmatrix}$ et donc $\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix}-R\sin t\\R\cos t\\0\end{pmatrix}$. D'où :

$$\vec{f}.d\vec{r}=R^2[(2\cos t-\sin t+0)(-\sin t)+(\cos t+\sin t-0)(\cos t)+(...)(0)]\,dt=[1-\cos t\sin t]\,R^2\,dt.$$

D'où $T(\vec{f},\Gamma)=R^2\int_{t=0}^{2\pi}(1-\frac12\sin(2t))\,dt=2\pi R^2$. ▪

Exercice 3.5 Calculer le travail du champ de vecteur $\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$ le long du cercle $C(0,1)$. ▪

Exercice 3.6 Calculer le travail du champ de vecteur $\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}y^2\\0\end{pmatrix}$ le long de la courbe $\begin{pmatrix}x(t)=\cos^2 t\\y(t)=\sin^2(t)\end{pmatrix}$, pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$. ▪

Exercice 3.7 Calculer $\int_\Gamma x^3\,dy - y^3\,dx$ où Γ est le cercle $C(\vec{0},R)$ paramétré dans le sens trigonométrique. C'est le travail de quelle force ?

Exercice 3.8 Calculer le travail de $\vec{f} = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ sur :

1- la courbe $x^2+y^2-ax=0$,
2- la courbe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,
3- la courbe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2x}{a}-\frac{2y}{b}=0$.

Réponse. 1- : courbe $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, i.e. cercle de centre $(\frac{a}{2},0)$ et rayon $\frac{a}{2}$; 2- : ellipse d'axes a et b ; 3- courbe $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=2$, i.e. ellipse centrée en (a,b) d'axe $\sqrt{2}a$ et $\sqrt{2}b$.

Exercice 3.9 On considère le carré Γ de sommets $[a,a],[a,-a],[-a,a],[-a,-a]$ parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_\Gamma \frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{x^2+y^2}$.

Réponse. Ici $f_1(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$, C^∞ pour $(x,y)\neq\vec{0}$. Segment du bas de $[-a,-a]$ à $[a,-a]$: $x(t)=-a+t$ et $y(t)=-a$ pour $t\in[-a,a]$. d'où $x'(t)=1$ et $y'(t)=0$;...

Exercice 3.10 Soit $\vec{v}=\begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$, et soit une courbe Γ fermée donnée. Montrer que les travaux de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$ sont égaux.

Réponse. $T(\vec{v},\Gamma)=\int_{t=a}^b 2x(t)y(t)x'(t)\,dt=\int_{t=a}^b (x^2)'(t)y(t)\,dt=-\int_{t=a}^b x^2(t)y'(t)\,dt+[x^2(t)y(t)]_a^b$. La courbe étant fermée, on a $x(a)=x(b)$ et $y(a)=y(b)$, d'où $[x^2(t)y(t)]_a^b=0$.

Exercice 3.11 Soit Γ la lemniscate $\rho=\sqrt{\cos(2\theta)}$ pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$. Calculer $T=\int_\Gamma(e^x\cos y+xy^2)\,dx-(e^x\sin y+x^2y)\,dy$.

Réponse. L'expression en polaire d'un vecteur position générique est : $\vec{r}(\rho,\theta)=\begin{pmatrix} x(\rho,\theta)=\rho\cos\theta \\ y(\rho,\theta)=\rho\sin\theta \end{pmatrix}$. La lemniscate est donnée ici comme étant la courbe $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t)=\sqrt{\cos(2t)}\cos t \\ y(t)=\sqrt{\cos(2t)}\sin t \end{pmatrix}$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$. On n'aura cependant pas besoin de calculer $\vec{r}\,'(t)$.

1- $xy^2\,dx-x^2y\,dy=xy(y\,dx-x\,dy)=xy^3d(\frac{x}{y})=\cos^2(2t)\cos t\sin^3 t\,d(\frac{\cos t}{\sin t})$ avec $d(\frac{\cos t}{\sin t})=\frac{-1}{\sin^2 t}\,dt$, d'où $xy^2\,dx-x^2y\,dy=-\cos^2(2t)\frac{1}{2}\sin(2t)\,dt=\frac{1}{12}(\cos^3(2t))'\,dt$.

2- $e^{x(t)}x'(t)\cos(y(t))-e^{x(t)}\sin(y(t))y'(t)=(e^{x(t)})'\cos(y(t))+e^{x(t)}(\cos(y(t))'=(e^{x(t)}\cos(y(t)))'$.

D'où $T=[\frac{1}{12}(\cos^3(2t))]_0^{\frac{\pi}{4}}+[e^{x(t)}\cos(y(t))]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{12}+1-e$ puisque $x(0)=1$, $x(\frac{\pi}{4})=0$, $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{4})=0$.

Proposition 3.12 *Si $\vec{f}(\vec{r}(t))\perp\vec{r}\,'(t)$ pour tout t, i.e. si la force $\vec{f}$ est perpendiculaire au déplacement (i.e. perpendiculaire au vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$), alors le travail est nul :*

$$\vec{f}(\vec{r}(t))\perp\vec{r}\,'(t) \quad\Longrightarrow\quad T(\vec{f},\Gamma)=0.$$

Preuve. C'est trivial car alors $T(\vec{f},\Gamma)=\int_a^b 0\,dt=0$.

Exemple 3.13 Le champ de position est défini dans $\mathbb{R}^2$ par $\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer le travail de $\vec{f}$ sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R.

Réponse. Pour le cercle $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} R\cos t=x(t) \\ R\sin t=y(t) \end{pmatrix}$ défini pour $t\in[0,2\pi[$, on a

$\vec{f}(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)=(R\cos t)(-R\sin t)+(R\sin t)(R\cos t)=0$.

D'où le travail $T(\vec{f},\Gamma)=\int_{t=0}^{2\pi}0\,dt=0$. Ici le champ $\vec{f}$ est orthogonal en tout point au vecteur tangent au cercle : $\vec{f}(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)=0$, et donc le travail est nul.

Exercice 3.14 Calculer la circulation de $\vec{v}=\begin{pmatrix} z\cos x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$ le long de la courbe $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^2+2t \\ \sin t+t^2 \end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$.

3.2 Dépendance du paramétrage : suivant le sens de parcours

On se donne donc deux paramétrages réguliers de Γ, i.e. :

1- une fonction régulière $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$,

2- un changement de variables $\varphi : t \in [a,b] \to u = \varphi(t) =^{\text{noté}} u(t) \in [c,d]$ bijectif C^1 d'inverse $\varphi^{-1} : u \in [c,d] \to t = \varphi^{-1}(u) =^{\text{noté}} t(u) \in [a,b]$ C^1, et

3- la courbe régulière $\vec{q} : u \in [c,d] \to (q_1(u), q_2(u), q_3(u)) = \vec{q}(u) =^{\text{déf}} \vec{r}(t(u))$.

L'intégration par parties (0.3) donne :

Proposition 3.15 *Soit $f \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ et $i = 1, 2$ ou 3.*

On a, pour un changement de variable $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ strictement croissant :

$$\int_{t=a}^{b} f(\vec{r}(t))\, r_i'(t)\, dt = \int_{u=c}^{d} f(\vec{q}(u))\, q_i'(u)\, du. \tag{3.3}$$

Et pour un un changement de variable $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ strictement décroissant :

$$\int_{t=a}^{b} f(\vec{r}(t))\, r_i'(t)\, dt = -\int_{u=c}^{d} f(\vec{q}(u))\, q_i'(u)\, du. \tag{3.4}$$

Ce résultat est à comparer avec le théorème 1.42 d'invariance de la longueur en fonction du paramétrage : ici, ce n'est pas $|r_i'(t)|$ qui est pris en compte (par l'intermédiaire de $||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{r_1'(t)^2+...}$), mais uniquement $r_i'(t)$ (sans les valeurs absolues). D'où le changement de signe suivant le sens de parcours de Γ (même sens si φ est croissante, sens inverse si φ est décroissante).

Corollaire 3.16 *Soit $\vec{f} \in C^0(\Omega;\mathbb{R}^3)$.*

On a pour un changement de variables φ strictement croissant :

$$\int_{t=a}^{b} \vec{f}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_{u=c}^{d} \vec{f}(\vec{q}(u))\, \vec{q}\,'(u)\, du. \tag{3.5}$$

Et pour un un changement de variables $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ strictement décroissant :

$$\int_{t=a}^{b} \vec{f}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt = -\int_{u=c}^{d} \vec{f}(\vec{q}(u))\, \vec{q}\,'(u)\, du. \tag{3.6}$$

Exemple 3.17 Soit le champ de pesanteur $\vec{f}(\vec{x}) = -g\vec{e}_3$ (champ constant vertical vers le bas). Alors pour aller du point $P_1 = (0,0,0)$ au point $P_2 = (0,0,1)$, le travail est négatif et vaut $-g$, tandis que pour aller du point P_2 au point P_1, le travail est positif et vaut $+g$. ▪

Notation générique. On se donne une courbe $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$. On note :

$$\Gamma_+$$

cette courbe, dite parcourue dans le sens positif, i.e. parcourue dans le sens donnée par $\vec{r}\,'$. On notera Γ_- la courbe parcourue en sens inverse.

Donc, soit un changement de variable $\varphi : t \in [a,b] \to u = \varphi(t) \in [c,d]$, et soit $\vec{q} : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\vec{q}(u) = \vec{r}(t) = \vec{r}(\varphi^{-1}(u))$.

Si ce changement de variable est croissant, on note encore Γ_+ la courbe Im$\vec{q}$, car (3.5) donne :

$$\int_{t=a}^{b} \vec{f}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_{u=c}^{d} \vec{f}(\vec{q}(u))\, \vec{q}\,'(u)\, du \overset{\text{noté}}{=} \int_{\Gamma_+} \vec{f}.d\vec{r},$$

quantité indépendante d'un changement de variable croissant.

Et si ce changement de variable est décroissant, on note Γ_- la courbe Im$\vec{q}$, car (3.6) donne :

$$\int_{\Gamma_+} \vec{f}.d\vec{r} = \int_{t=a}^{b} \vec{f}(\vec{r}(t))\, \vec{r}\,'(t)\, dt = -\int_{u=c}^{d} \vec{f}(\vec{q}(u))\, \vec{q}\,'(u)\, du = -\int_{u=c}^{d} \vec{f}\, d\vec{q} \overset{\text{noté}}{=} -\int_{\Gamma_-} \vec{f}.d\vec{r},$$

quantité indépendante d'un changement de variable décroissant.

Attention à cette notation abusive : le $d\vec{r}$ du membre de gauche correspond à une courbe $\vec{r}_1$ paramétrant Γ_+, alors que le $d\vec{r}$ du membre de droite correspond à une autre courbe $\vec{r}_2$ paramétrant Γ_-. Le $d\vec{r}$ est une notation générique, se référant à un paramétrage de la courbe Γ. Cette notation n'a de sens non ambigu qu'écrite sous les formes non abusive (3.5) ou (3.6) (paramétrage explicite).

Corollaire 3.18 *En particulier pour le paramétrage curviligne intrinsèque* $s = \int_{\tau=a}^{t} ||\vec{r}\,'(\tau)||\,d\tau$ *(changement de variable croissant s=s(t)), posant* $\vec{q}(s) = \vec{r}(t)$*, et si on note* $\vec{T}(s) = \vec{q}\,'(s)$ *le vecteur unitaire tangent au point* $\vec{r}(t) = \vec{q}(s)$*, alors :*

$$T(\vec{f},\Gamma) = \int_{s=0}^{L} \vec{f}(\vec{q}(s)).\vec{T}(s)\,ds \overset{\text{noté}}{=} \int_{\Gamma_+} \vec{f}.\vec{T}\,ds \overset{\text{noté}}{=} \int_{\Gamma} \vec{f}.\vec{T}\,ds.$$

Exercice 3.19 On se donne une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour $a < b$ on considère la courbe Γ_+ donnée par, $\vec{r} : t \in [0,1] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = (b-a)t + a \\ \varphi(x(t)) = \varphi((b-a)t + a) \end{pmatrix}$. Montrer que cette courbe à également pour paramétrage $x \in [a,b] \to \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$ (donnant le graphe de φ), et que :

$$\int_{\Gamma_+} f(x,y)\,dx = \int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,dx.$$

Réponse : on pose $\vec{q} : x \in [a,b] \to \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$, et on pose $x = (b-a)t + a$, soit $t = \frac{x-a}{b-a}$. La proposition 3.15 donne : $\int_{t=0}^{1} f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt = \int_{x=a}^{b} f(\vec{q}(x))\,dx$.

Commentaire : on pose $g(x) = f(x,\varphi(x))$, et on vient de montrer que :
$\int_\Gamma f(x,\varphi(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx =$ “aire sous la courbe graphe de g”, le paramétrage en x allant de gauche à droite. ▪

Exercice 3.20 (suite) Toujours pour $a < b$, on considère la courbe Γ_- donnée par le paramétrage $\vec{r} : t \in [0,1] \to \begin{pmatrix} x(t) = (a-b)t + b \\ \varphi(x(t)) = \varphi((a-b)t + b) \end{pmatrix}$. Montrer que c'est la courbe Γ_+ précédente parcourue en sens inverse et que :

$$\int_{\Gamma_-} f(x,y)\,dx = \int_{x=b}^{a} f(x,\varphi(x))\,dx \quad \text{et donc } = -\int_{x=a}^{b} f(x,\varphi(x))\,dx.$$

Réponse : La fonction $t \to x(t) = (a-b)t + b$ est décroissante : en particulier $b = x(0) > x(1) = a$, et on ne peut pas définir sans précaution $\vec{q} : x \in [a,b] \to \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$. Un changement de variable direct donne :

$$\int_{t=0}^{1} f(\vec{r}(t))\,x'(t)\,dt = \int_{t=0}^{1} f((a-b)t + b, \varphi((a-b)t + b)\,(a-b)\,dt = \int_{x=b}^{a} f(x,\varphi(x))\,(a-b)\,\frac{dx}{a-b},$$

ce qui est le résultat cherché, sachant que “$\int_b^a g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx$”.

Commentaire : on pose $g(x) = f(x,\varphi(x))$, et on vient de “montrer” que :
$\int_\Gamma f(x,\varphi(x))\,dx = \int_b^a g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx = -$ “aire sous la courbe graphe de g”, le paramétrage en x allant de droite à gauche. ▪

3.3 Gradient, travail et potentiel

On suppose $\mathbb{R}^n$ (ici on aura $n = 2$ ou 3) muni de son produit scalaire euclidien et de sa base canonique orthonormée $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. En particulier, un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sera noté $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit :

$$\varphi : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto \varphi(\vec{x}) \end{cases}$$

une fonction $C^1(\Omega,\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires). On rappelle :

Définition 3.21 On appelle gradient de φ la fonction $\vec{\text{grad}}\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (à valeurs vectorielles) définie par :

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{\text{grad}}\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\vec{x})\,\vec{e}_i \overset{\text{noté}}{=} \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}).$$

Exercice 3.22 On note $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $r = ||\vec{r}||$ $(= \sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Montrez que pour $\varphi(x,y,z) \stackrel{\text{déf}}{=} r$ on a $\vec{\text{grad}}\varphi(x,y,z) = \dfrac{\vec{r}}{r}$ (quand $r \neq 0$). ▟

Exercice 3.23 Et montrer que pour $\varphi(x,y,z) \stackrel{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{r}$, on a $\vec{\text{grad}}\varphi(x,y,z) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ (quand $r \neq 0$). ▟

Définition 3.24 On dit que $\vec{f}$ dérive d'un potentiel s'il existe une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est C^1 qui vérifie $\vec{f} = \vec{\text{grad}}\varphi$ dans Ω.

(I.e. si $\vec{f}$ a une "primitive" φ au sens "dérivée de φ" = "gradient de φ" = $\vec{f}$.)

Exemple 3.25 $\vec{f} = \vec{r}$ dérive du potentiel $\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. ▟

Exercice 3.26 Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel φ qu'on calculera.

Réponse. À une constante près, on trouve $\varphi(x,y,z) = x^2y + xz^3$ (on pourra commencer par intégrer $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2$). ▟

Exercice 3.27 Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel φ qu'on calculera. ▟

Exercice 3.28 Montrer que le champ de spin $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, voir exemple 3.3, n'est pas un champ de potentiel. Montrer par contre que $\vec{g}(x,y) = \frac{\vec{f}(x,y)}{||\vec{r}||^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ en est un sur $(\mathbb{R}^2)^*$, avec pour potentiel $\varphi(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$.

Réponse. Pour $\vec{f}$ on devrait avoir $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -y$ et donc $\varphi(x,y) = -xy + \psi(y)$, et donc $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -x + \psi'(y)$. Et on devrait avoir aussi $\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x$, donc $x = -x + \psi'(y)$, donc $2x = \psi'(y)$, ce pour tout x et tout y, c'est absurde (prendre $x = 0$ puis $x = 1$ avec $y = y_0$ fixé). Donc $\vec{f}$ ne dérive d'aucun potentiel.

Pour $\vec{g}$: on rappelle que la dérivée de $h(z) = \arctan z$ est $h'(z) = \frac{1}{1+z^2}$. En effet $h^{-1}(t) = \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a pour dérivée $(h^{-1})'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{h'(z)}$ quand $z = \tan t$. On cherche $\varphi(x,y)$ telle que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}$. La fonction $\varphi(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ convient. ▟

Proposition 3.29 *Soit $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière, on note $\Gamma = \text{Im}\vec{r}$ et $P_1 = \vec{r}(a)$ et $P_2 = \vec{r}(b)$ les extrémités de Γ. Si Ω est un ouvert contenant Γ et si $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction C^1 alors :*

$$\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi.d\vec{r} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \qquad \big(= (\varphi \circ \vec{r})(b) - (\varphi \circ \vec{r})(a)\big),$$

i.e., la valeur $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi.d\vec{r}$ ne dépend que des extrémités P_1 et P_2 : lorsque $\vec{f}$ dérive d'un potentiel dans Ω, le travail $T(f,\vec{r}) = \int_\Gamma \vec{f}.\,d\vec{r}$ ne dépend que des extrémités de la courbe $\Gamma \subset \Omega$, et pas du chemin qui permet de joindre ces extrémités.

En particulier, pour tout courbe Γ fermée contenue dans Ω, alors $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi.\,d\vec{r} = 0$.

N.B. : ayant $\vec{\text{grad}}\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la notation $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi.d\vec{r}$ est non ambiguë et veut dire $\int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi(\vec{r}).d\vec{r} = \int_a^b \vec{\text{grad}}\varphi(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t)\,dt$.

Preuve. Ce n'est autre que :

$$\int_{t=a}^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a),$$

avec ici $g = \varphi \circ \vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}$. En effet, pour $g = \varphi \circ \vec{r}$, sa dérivée vaut :

$$g'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\vec{r}(t))\frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\vec{r}(t))\frac{\partial y}{\partial t}(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\vec{r}(t))\frac{\partial z}{\partial t}(t) = (\vec{\text{grad}}\varphi)(\vec{r}(t)).\vec{r}\,'(t),$$

et donc :

$$\int_{t=a}^b \vec{\text{grad}}\varphi(\vec{r}(t)).\,\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_{t=a}^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a) = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1),$$

résultat annoncé. ▟

Ce résultat est bien sûr faux si $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel : par exemple, prendre $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) = y \\ f_2(x,y) = 0 \end{pmatrix}$ et le segment horizontal $\Gamma : t \in [-1,1] \to \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{pmatrix}$. On a immédiatement :

$$\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r} = \int_{t=0}^{1} f_1(x(t),y(t)).x'(t) + f_2(x(t),y(t)).y'(t)\,dt = \int_{t=0}^{1} 0.1 + 0.0\,dt = 0.$$

Prendre maintenant la courbe C demi cercle : $t \in [0,\pi] \to \begin{pmatrix} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{pmatrix}$.

$$\int_C \vec{f}.d\vec{r} = \int_{t=0}^{\pi} f_1(x(t),y(t)).x'(t) + f_2(x(t),y(t)).y'(t)\,dt = \int_{t=0}^{\pi} (\sin t).(-\sin t) + 0.\cos t\,dt = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Et donc sur la courbe fermé $\Gamma \bigcup C$ on a $\int_{\Gamma \bigcup C} \vec{f}.d\vec{r} \neq 0$.

Mais on vérifie immédiatement que $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel en vérifiant par exemple que $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{f}) \neq 0$.

Théorème 3.30 *Soit $\vec{f} \in C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, où Ω est un ouvert connexe (deux points quelconques dans Ω peuvent être reliés par une courbe contenue dans Ω, autrement dit, Ω est en un seul morceau).*

Alors $\vec{f}$ dérive d'un potentiel dans Ω ssi pour tous points $A, B \in \Omega$, le travail $\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}$ ne dépend pas de la courbe régulière $\Gamma \subset \Omega$ reliant les deux point A et B.

Preuve. $\Rightarrow$: on sait déjà que si $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$ pour $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ le travail le long d'une courbe Γ ne dépend que des extrémités de cette courbe.

$\Leftarrow$: supposons que $\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}$ ne dépende que des extrémités de Γ. On se place dans $\mathbb{R}^2$ pour simplifier les écritures. Même démarche dans $\mathbb{R}^3$. On se donne un point (x_0, y_0), et pour un point (x,y) et un chemin Γ reliant (x_0,y_0) à (x,y), avec $\Gamma \subset \Omega$, on pose :

$$\varphi(x,y) = \int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}.$$

L'indépendance supposée sur le travail de $\vec{f}$ assure que φ est une fonction ($\varphi(x,y)$ est défini de manière unique). Vérifions que $\vec{\mathrm{grad}}\varphi = \vec{f}$. On a, pour $h \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \int_C \vec{f}.d\vec{r},$$

où on prend pour C le chemin $t \in [0,1] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x + th \\ y \end{pmatrix}$. C'est toujours possible, dans un voisinage de $x \in \Omega$, dès que $|h|$ est suffisamment petit pour que $B(\vec{x}, |h|) \subset \Omega$ (où $B(\vec{x},|h|)$ est la boule de centre $\vec{x}$ et de rayon $|h|$). Donc $d\vec{r} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} dt$, donc :

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \int_{t=0}^{1} f_1(x+th,y)\,h\,dt = h\,f_1(x + t_h h, y),$$

à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires avec $t_h \in]0,1[$.

D'où $\frac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h} = f_1(x + t_h h, y)$ et faisant tendre h vers 0 on obtient $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. De même pour $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$. ∎

4 Rotationnel, divergence, laplacien

4.1 Rotationnel

Le rotationnel n'est défini que dans $\mathbb{R}^3$, ou bien par restriction, dans $\mathbb{R}^2$ (considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}^3$).

Soit donc Ω ouvert de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base euclidienne canonique.

Et soit $\vec{f}:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ une fonction C^1 à valeurs vectorielles :

$$\vec{f}:\left\{\begin{array}{rl}\Omega & \to\mathbb{R}^3\\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \mapsto\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix}f_1(\vec{x})\\f_2(\vec{x})\\f_3(\vec{x})\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

où les fonctions $f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 (à valeurs scalaires).

Définition 4.1 On appelle rotationnel de $\vec{f}$ la fonction $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^3$ (à valeurs vectorielles) :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}:\left\{\begin{array}{rl}\Omega & \to\mathbb{R}^3\\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} & \mapsto\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\vec{x})-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{x})\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{x})-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\vec{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x})-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x})\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Le calcul du rotationnel s'effectue à l'aide de la formule du produit vectoriel utilisée formellement :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}=\vec{\mathrm{grad}}\wedge\vec{f}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}\overset{\text{noté}}{=}\vec{\nabla}\wedge\vec{f},\tag{4.1}$$

ou encore comme, formellement :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1\\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2\\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3\end{pmatrix}$$

où le déterminant est calculé en développant par rapport à la première colonne.

Remarque 4.2 Il est immédiat que l'opérateur $\vec{\mathrm{rot}}$ est linéaire : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{f}+\lambda\vec{g})=\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}+\lambda\vec{\mathrm{rot}}\vec{g}$, car les opérateurs de dérivation sont linéaires. D'où l'idée de représenter $\vec{\mathrm{rot}}$ par une matrice Ω, i.e. d'écrire :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}=\Omega.\vec{f},\qquad\Omega=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x_1}\\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0\end{pmatrix},\tag{4.2}$$

produit d'une matrice antisymétrique et d'un vecteur. Ici Ω est un opérateur de dérivation. ▪

Exercice 4.3 Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$ est la matrice de rotation plane dans $\mathbb{R}^3$ d'axe $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ (dans le cas $(a,b,c)\neq\vec{0}$).

Réponse. Pour tout $\vec{x}=(x,y,z)$, on a $A.\vec{x}=\begin{pmatrix}-cy+bz\\ cx-az\\ -bx+ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, soit $A.\vec{x}=\vec{\omega}\wedge\vec{x}$ où $\vec{\omega}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, à comparer avec les notations (4.1) et (4.2) donnant $\Omega.\vec{f}=\vec{\nabla}\wedge\vec{f}$. En particulier, $A.\vec{\omega}=0$ et $\vec{\omega}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0, et tout vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{\omega}$ est transformé en le vecteur $A.\vec{v}=\vec{\omega}\wedge\vec{v}$ tourné de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan orthogonal à $\vec{\omega}$. En d'autres termes, A est la composée de la projection sur le plan orthogonal à $\vec{\omega}$ et de la rotation d'axe $\vec{\omega}$. ▪

Interprétation du rotationnel. Le rotationnel permet de mesurer "la vitesse de rotation" d'un objet qui tourne sur lui-même : intéressons-nous à un petit objet dans l'espace, assimilé à un petit disque solide $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon R. On prend comme axe de rotation l'axe vertical "$\vec{e}_3$". Un point du bord de l'objet est donc sur une trajectoire décrite par la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$ et sa vitesse est par définition la dérivée $\vec{v}(x,y,z) = \vec{r}\,'(t) = \omega \begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, et on a :

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \omega \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} = 2\omega\vec{e}_3.$$

Donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 2$ fois la vitesse angulaire $\omega\vec{e}_3$ (taux de rotation).

Et lorsque qu'en un point (x,y,z) de l'espace on a $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 0$, cela veut dire que ce point n'est pas sur une trajectoire qui l'emmène dans un mouvement circulaire. Si dans tout un domaine Ω on a $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = 0$, on dit que l'écoulement est irrotationnel dans Ω : les "particules" (= "petits objets solides") ne tournent pas sur elles-mêmes : elles "glissent" les unes sur les autres.

Exemple 4.4 Montrer que dans un mouvement régulier de cisaillement, le rotationnel de la vitesse est nul. (Dans un mouvement de cisaillement, les particules glissent l'une sur l'autre.)

Réponse. Quitte à changer de base, on a localement $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par définition, $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{r}\,'(t)$ est la vitesse au point $\vec{x} = \vec{r}(t) = (x,y,z)$. Ici $x : t \to x(t)$ est un difféomorphisme, car $\vec{r}$ est supposée régulière et donc x est C^1 et $x'(t) \neq 0$ pour tout t. Donc $\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $f(x) = x'(t(x)) = (x' \circ t)(x)$. Et donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(\vec{x}) = \vec{0}$: dans un mouvement de cisaillement, le rotationnel est nul. ∎

Définition 4.5 La restriction au cas $\Omega \in \mathbb{R}^2$ a lieu quand $f_3 = 0$ et f_1 et f_2 ne dépendent que de x_1 et de x_2 (pas de x_3). La seule composante qui reste dans $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f}$ est la dernière, et on la note :

$$\mathrm{rot}\vec{f}(x_1,x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \in \mathbb{R}.$$

Et $\mathrm{rot}\vec{f}$ est donc ici une fonction à valeurs scalaires.

Proposition 4.6 *Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel $\varphi \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ (i.e. $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$ avec $\varphi \in C^2$), alors :*

$$\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\varphi) = \vec{0}.$$

Et si $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \neq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ pour un couple (i,j) donné, $1 \le i,j \le 3$, alors $\vec{f}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Preuve. Un calcul immédiat donne :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

grâce au théorème de Schwarz "$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x}$" pour les fonctions C^2. ∎

Et pour la réciproque :

Proposition 4.7 *Réciproquement, sous la condition supplémentaire Ω ouvert simplement connexe ("sans trou"), si $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \vec{0}$ alors il existe $\varphi \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ telle que $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$.*

Preuve. Ce sera un corollaire du théorème (formule) de Stokes, voir le paragraphe 6.2. ∎

Remarque 4.8 Attention : la condition Ω simplement connexe est essentielle : prendre la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ par (non définie en 0) :

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ f_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

On a effectivement $\text{rot}\vec{f} = 0$ car $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$, mais il n'existe pas de fonction φ tel que $\vec{f} = \vec{\text{grad}}\varphi$. Sinon, prenant Γ le cercle $C(0,R)$ de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$ on aurait :

$$\int_\Gamma \vec{f}\, d\Gamma = \int_\Gamma \vec{\text{grad}}\varphi\, dr = 0,$$

car la courbe est fermée (proposition 3.29), et en même temps :

$$\int_\Gamma \vec{f}\, d\Gamma = \int_\Gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{R^2}\, dt = \frac{2\pi}{R^2}.$$

Et la conclusion $0 = \frac{2\pi}{R^2}$ est absurde. ▪

4.2 Divergence

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ($n = 1$, 2 ou 3 dans ce cours). Et soit $\vec{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 à valeurs vectorielles. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on notera :

$$\vec{f} : \begin{cases} \qquad\qquad \Omega \to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{cases}$$

où les fonctions $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des fonctions $C^1(\Omega;\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires).

Définition 4.9 On appelle divergence de $\vec{f}$ la fonction $\text{div}\vec{f} \in C^0(\Omega;\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires) :

$$\text{div}\vec{f} : \begin{cases} \qquad\qquad \Omega \to \mathbb{R} \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \text{div}\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}). \end{cases}$$

La divergence est obtenue comme produit scalaire (notation formelle) :

$$\text{div}\vec{f} = \vec{\text{grad}}.\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \overset{\text{noté}}{=} \vec{\nabla}.\vec{f}.$$

En particulier, dans le cas $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ on a :

Proposition 4.10 *Pour* $\vec{f} \in C^2(\Omega \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ *:*

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}\vec{f}) = 0.$$

Preuve. Notant $\vec{F} = \vec{\text{rot}}\vec{f}$, on a :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3})}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}.$$

Et donc (avec les permutations circulaires sur les indices) :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

Interprétation. On va voir avec la formule de Gauss paragraphe 7.2 que, pour un domaine (volume) Ω de bord (surface) Σ on a :

$$\int_\Omega \text{div}\vec{f}\, d\Omega = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\Sigma.$$

L'intégrale de surface mesure la quantité qui sort de Ω à travers Σ : c'est le flux de $\vec{f}$ à travers Σ. Et donc, en prenant Ω un "petit" volume fixe autour d'un point (x,y,z), la divergence $\text{div}\vec{f}$ mesure la "dilatation" (cas $\mathrm{div}\vec{f} > 0$) ou la "contraction" (cas $\mathrm{div}\vec{f} < 0$) à laquelle est soumis ce volume : en effet, soit le flux (la matière) sort et $\vec{f}.\vec{n} > 0$ sur Σ, et donc $\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}\,d\Omega > 0$ = dilatation, soit le flux (la matière) rentre et $\vec{f}.\vec{n} < 0$ sur Σ, et donc $\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}\,d\Omega < 0$ = contraction.

Si $\mathrm{div}\vec{f} = 0$ dans tout un domaine Ω, on dit que le mouvement est incompressible.

4.3 Laplacien

Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires), on pose :

$$\Delta f \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}).$$

Exercice 4.11 Calculer $\Delta\varphi$ pour $\varphi(x,y,z) = r$ $(= ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

Réponse. On a en tout $\vec{r} = (x,y,z) \neq \vec{0}$: $\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}}{\partial x} = \frac12 * 2x * (x^2+y^2+z^2)^{-\frac12} = \frac{x}{r}$ d'où $\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}}{\partial x^2} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac12} + x*(-\frac12)*2x*(x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} = \frac{1}{r^3}(r^2-x^2)$, d'où $\Delta r = \frac{1}{r^3}(3r^2-r^2) = \frac{2}{r}$. ▪

Exercice 4.12 Calculer $\Delta\varphi$ pour $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r}$ (où $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

Réponse. On a en tout $\vec{r} = (x,y,z) \neq \vec{0}$: $\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12}}{\partial x} = -\frac12 * 2x * (x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} = -\frac{x}{r^3}$ d'où $\frac{\partial^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac12}}{\partial x^2} = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac32} - x*(-\frac32)*2x*(x^2+y^2+z^2)^{-\frac52} = \frac{1}{r^5}(-r^2+3x^2)$, d'où $\Delta r = 0$. ▪

Et si $\vec{f} \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est une fonction à valeurs vectorielles, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\Delta\vec{f} = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}.$$

(On écrit donc n lignes avec des fonctions à valeurs scalaires.)

4.4 Formulaire

Montrer que, pour trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:
$(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.
$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$.

Montrer que, les fonctions f, g, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ considérées étant suffisamment régulières :
$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x}.\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y}.\vec{e}_2 + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z}.\vec{e}_3$.
$\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} = \vec{e}_1\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + \vec{e}_2\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + \vec{e}_3\wedge\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}} f) = 0$.
$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}) = 0$.
$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}} f) = \Delta f$.
$\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad}g + g\,\mathrm{grad}f$.
$\mathrm{grad}(\vec{v}.\vec{w}) = \vec{v}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{w} + \vec{w}\wedge\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} + \mathrm{grad}\vec{v}.\vec{w} + \mathrm{grad}\vec{w}.\vec{v}$, où $\mathrm{grad}\vec{v}$ et $\mathrm{grad}\vec{w}$ sont les matrices jacobiennes.
$\mathrm{div}(f\vec{v}) = f\,\mathrm{div}\vec{v} + \vec{\mathrm{grad}}f.\vec{v}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(f\vec{v}) = f\,\vec{\mathrm{rot}}\vec{v} + \vec{\mathrm{grad}}f\wedge\vec{v}$.
$\mathrm{div}(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}.\vec{w} - \vec{v}.\vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$.
$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \mathrm{div}(\vec{w})\,\vec{v} - \mathrm{div}(\vec{v})\,\vec{w} + \mathrm{grad}\vec{v}.\vec{w} - \mathrm{grad}\vec{w}.\vec{v}$.
$\Delta\vec{v} = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{v}) - \vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}))$.

Montrer que le laplacien commute avec les autres opérateurs :
$\Delta(\mathrm{div}\vec{v}) = \mathrm{div}(\Delta\vec{v})$.
$\Delta(\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}) = \vec{\mathrm{rot}}(\Delta\vec{v})$.
$\Delta(\vec{\mathrm{grad}}f) = \vec{\mathrm{grad}}(\Delta f)$.

5 Intégrales sur les surfaces

5.1 Introduction

Formellement, une surface peut être définie localement comme un ensemble de courbes de $\mathbb{R}^3$: si $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, une surface est décrite par l'image d'une fonction $\vec{r}$:

$$\vec{r} : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}^3, \\ (u,v) & \mapsto \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = x(u,v)\vec{e}_1 + y(u,v)\vec{e}_2 + z(u,v)\vec{e}_3, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont les trois vecteurs de base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Et, pour $v \in [c,d]$ fixé, la fonction $\vec{r}_v : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\vec{r}_v : \begin{cases} [a,b] & \to \mathbb{R}^3, \\ u & \mapsto \vec{r}_v(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r}(u,v), \end{cases}$$

est une courbe de $\mathbb{R}^3$. Et lorsque v varie, les courbes $\vec{r}_v$ engendrent une surface. Il en est d'ailleurs de même des fonctions (à u fixé) $\vec{r}_u : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ définies par $\vec{r}_u(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{r}(u,v)$.

Exemple 5.1 $\vec{r}(u,v) = \vec{e}_3 + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ est le plan affine horizontal passant par le point d'altitude 1, de vecteurs directeurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. Pour $v = v_0$ fixé, la courbe $\vec{r}_{v_0}(u) = (\vec{e}_3 + v_0\vec{e}_2) + u\vec{e}_1$ est la droite passant par le point $(0, v_0, 1)$ parallèle au premier axe. ♣

Exemple 5.2 $\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$ pour $\rho \in [0,1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ est la boule unité de $\mathbb{R}^2$. Et $\vec{r}_{\rho_0}$ est un cercle, alors que $\vec{r}_{\theta_0}$ est un segment de droite. ♣

Exemple 5.3 $\vec{r}(\theta,\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$. Et $\vec{r}_{\theta_0}$ est un méridien, alors que $\vec{r}_{\varphi_0}$ est un parallèle. ♣

De manière plus générale, au lieu de considérer le pavé $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$, on considère un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$:

Définition 5.4 Si Ω est un fermé borné régulier de $\mathbb{R}^2$ (un domaine), et si l'application $\vec{r}$ donnée par (5.1) est :

1- de classe C^1, et

2- régulière, i.e. telle que $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq 0$ pour tout $(u,v) \in \Omega$,

alors $\vec{r}$ (ou son image $\Sigma = \vec{r}(\Omega)$) est appelée surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

La condition 2- exprime simplement que les vecteurs tangents $\vec{r}_v{}'(u) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)$ et $\vec{r}_u{}'(v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)$ (resp. tangents aux courbes $\vec{r}_v$ et $\vec{r}_u$) ne sont pas parallèles, i.e. que les courbes $\Gamma_u = \mathrm{Im}(\vec{r}_u)$ et $\Gamma_v = \mathrm{Im}(\vec{r}_v)$, images de $\vec{r}_u$ et de $\vec{r}_v$, sont sécantes au point $\vec{r}(u,v)$.

Définition 5.5 On généralise la définition précédente en disant que la surface est régulière par morceaux lorsque le point 1- ci-dessus est remplacé par "de classe C^1 par morceaux", et le point 2- est conservé là où il a un sens.

5.2 Vecteur normal à une surface et orientation d'une surface

Proposition 5.6 *Si $\vec{r}$ est une surface régulière, alors le vecteur $(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v})(u,v)$ est normal à la surface au point $\vec{r}(u,v)$.*

Preuve. Les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) = \vec{r}_v{}'(u)$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v) = \vec{r}_u{}'(v)$ sont tangents à la surface et non parallèles (car la surface est régulière), donc leur produit vectoriel (non nul) est normal à la surface. ♣

Définition 5.7 Un paramétrage (u,v) étant choisi, une orientation de Σ (une face "extérieure") est donnée par le sens de la normale $\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)$ au point $\vec r(u,v)$. (L'orientation dépend donc du paramétrage choisi.)

Définition 5.8 Un vecteur normal unitaire est la fonction $\vec n:\Omega\to\mathbb{R}^3$ donnée dans Ω par :

$$\vec n(u,v)\overset{\text{déf}}{=}\frac{\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)||},\tag{5.2}$$

au point $\vec r(u,v)$. Les composantes de $\vec n=\begin{pmatrix}n_1=\vec n.\vec e_1\\ n_2=\vec n.\vec e_2\\ n_3=\vec n.\vec e_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{pmatrix}$ sont appelées les cosinus directeurs. Et $\vec n$ donne l'orientation de la surface.

Exemple 5.9 Soit la sphère de rayon $R>0$ donnée par :

$$\vec r(t,\varphi)=\begin{pmatrix}x=R\cos t\cos\varphi\\ y=R\sin t\cos\varphi\\ z=R\sin\varphi\end{pmatrix},\qquad\text{où}\qquad(t,\varphi)\in[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\tag{5.3}$$

paramétrage sphérique terrestre. On a :

$$\frac{\partial\vec r}{\partial t}(t,\varphi)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial\varphi}(t,\varphi)=R^2\begin{pmatrix}-\sin t\cos\varphi\\ \cos t\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\cos t\sin\varphi\\ -\sin t\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}=R^2\cos\varphi\begin{pmatrix}\cos t\cos\varphi\\ \sin t\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\tag{5.4}$$

d'où :

$$\vec n=\begin{pmatrix}\cos t\cos\varphi\\ \sin t\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}=\frac{\vec r(t,\varphi)}{R},\tag{5.5}$$

et bien sûr le vecteur normal est parallèle au rayon vecteur, et ici est sortant de la sphère. ▪

Proposition 5.10 *Soit une surface paramétrée en (x,y), i.e. $\vec r(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z=z(x,y)\end{pmatrix}$, et donc $\Sigma=\mathrm{Im}\vec r$ est le graphe de la fonction $(x,y)\to z(x,y)$. Le vecteur unitaire normal à Σ est donnée par :*

$$\begin{aligned}\vec n(x,y)&=\frac{1}{\sqrt{\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)^2+\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)^2+1}}\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\\ -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\ 1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{noté}}{=}\frac{1}{\sqrt{||\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)||^2+1}}\begin{pmatrix}-\vec{\mathrm{grad}}z(x,y)\\ 1\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{5.6}$$

et donc pointe "vers le haut" (orientation d'une surface donnée sous forme explicite).

Preuve. On a $\frac{\partial\vec r}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\\ -\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\ 1\end{pmatrix}$, et $1>0$. ▪

Exercice 5.11 Soit $\vec r(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{pmatrix}$ pour $(x,y)\in B(0,R)$. Calculer $\vec n$. Donner une normale unitaire extérieure à la sphère complète.

Réponse. Réponse. On a décrit la demi-sphère inférieur de rayon R. Regardons le cas $z\neq0$ (on n'est pas sur l'équateur). On a $\frac{\partial\vec r}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -\frac{x}{z}\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec r}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -\frac{y}{z}\end{pmatrix}$, d'où $\frac{\partial\vec r}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ de norme $\frac{R}{-z}$ (pour $z<0$). D'où $\vec n(x,y)=-\frac{1}{R}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, et $\vec n(x,y)$ est la normale unitaire"entrante" (parallèle au rayon vecteur $\vec r(x,y)$, sens inverse, i.e. si on complète la sphère, c'est un "vecteur entrant").

C'est attendu : voir (5.6).

Si $z=0$, on ne peut pas faire le calcul car $z:(x,y)\to z(x,y)=-(R^2-x^2-y^2)^{\frac12}$ n'est pas dérivable : on est en un point t.q. $x^2+y^2=R^2$, et $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-(-2x)\frac12(R^2-x^2-y^2)^{-\frac12}$ n'a pas de sens (on divise par 0). On peut cependant prolonger la valeur de $\vec n=-\frac1R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ trouvée précédemment au cas $z=0$. ∎

Exercice 5.12 Soit $\vec r(x,y)=\begin{pmatrix}-x\\-y\\z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{pmatrix}$. Calculer $\vec n$.

Réponse. Réponse. On a décrit ainsi la demi-sphère supérieure (car $z\geq0$) de rayon R : en effet, $x^2+y^2+z^2=R^2$. Par rapport au paramétrage $\begin{pmatrix}x\\y\\z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{pmatrix}$, on a fait une symétrie par rapport à l'axe vertical.

On a $\frac{\partial\vec r}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix}-1\\0\\-\frac xz\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec r}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-\frac yz\end{pmatrix}$, d'où $(\frac{\partial\vec r}{\partial x}\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial y})(x,y)=\frac1z\begin{pmatrix}-x\\-y\\z\end{pmatrix}$ de norme $\frac Rz$ (pour $z>0$). D'où $\vec n(x,y)=\frac1R\begin{pmatrix}-x\\-y\\z\end{pmatrix}=\frac{\vec r(x,y)}{R}$, et $\vec n$ est la normale extérieure unitaire au point $\vec r(x,y)$, ou encore, $\vec n(-x,-y)=\frac1R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est la normale unitaire extérieure au point $\vec r(-x,-y)$.

Autre démonstration : on pose $\vec q(x,y)=\vec r(-x,-y)$, et on obtient $\vec n_{\vec q}(x,y)=\frac1R\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Et $\frac{\partial\vec r}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial y}(x,y)=(-\frac{\partial\vec q}{\partial x}(-x,-y))\wedge(-\frac{\partial\vec q}{\partial y}(-x,-y))=\frac{\partial\vec q}{\partial x}(-x,-y)\wedge\frac{\partial\vec q}{\partial y}(-x,-y)$, d'où $\vec n_{\vec r}(x,y)=\vec n_{\vec q}(-x,-y)$ d'où une orientation "vers l'extérieure" conservée.

Autre démonstration : on passe en sphérique, i.e. on pose $\vec q(\theta,\varphi)=\vec r(x,y)$ avec $x=R\cos\theta\cos\varphi$ et $y=R\sin\theta\cos\varphi$, pour $\theta\in[-\pi,\pi]$ et $\varphi\in[0,\frac\pi2]$. Par rapport à l'exercice précédent, on a retranché π à θ, d'où le changement de signe pour x et y. Les calculs sont les mêmes que précédemment : $\vec n(\theta,\varphi)=\frac1R\vec q(\theta,\varphi)$, seul le domaine de définition de θ est modifié. ∎

Exercice 5.13 Soit $\vec r(u,v)=(1-u-v)\vec e_1+u\vec e_2+v\vec e_3$ (où $(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)$ sont les trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$). Montrer que la surface image de $\mathbb{R}^2$ par $\vec r$ est un plan de normale $\vec n=\frac{1}{\sqrt3}(\vec e_1+\vec e_2+\vec e_3)$.

Réponse : 1- remarquer que, notant $\vec r(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{pmatrix}$, on a $x+y+z=1$ ce qui est bien l'équation d'un plan, que 2- pour tout point du plan $x+y+z=1$, il existe bien (u,v) tel que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec r(u,v)$, à savoir $u=y$ et $v=z$, et que 3- $\frac{\partial\vec r}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est de norme $\sqrt3$, d'où le vecteur constant $\vec n$ indiqué. ∎

Exercice 5.14 Donner un paramétrage en (r,θ) (polaire) du paraboloïde $z=a(x^2+y^2)$ pour $a\neq0$, et déterminer le vecteur normal unitaire correspondant.

Réponse. $\vec r(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\\z=a\rho^2\end{pmatrix}$ pour $\rho\geq0$ et $\theta\in[0,2\pi[$ par exemple. Et alors :

$$(\frac{\partial\vec r}{\partial\rho}\wedge\frac{\partial\vec r}{\partial\theta})(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\2a\rho\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-\rho\sin\theta\\\rho\cos\theta\\0\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}-2a\rho\cos\theta\\-2a\rho\sin\theta\\1\end{pmatrix},$$

d'où :

$$\vec n(\rho,\theta)=\frac{1}{\sqrt{4a^2\rho^2+1}}\begin{pmatrix}-2a\rho\cos\theta\\-2a\rho\sin\theta\\1\end{pmatrix}.$$

∎

Remarque 5.15 Noter que $\vec{r}$ étant régulière, la normale est une application continue sur Ω qui ne s'annule pas, et donc l'orientation est localement bien déterminée. Par contre, l'orientation n'est pas toujours globalement déterminée. Un exemple est donné par le ruban de Möbius, voir plus loin exemple 5.33. ∴

5.3 Aire d'une surface

On procède comme pour la longueur d'une courbe qui était approchée par des segments de droite, cf. paragraphe 1.8 : ici on approche une surface par des quadrilatères plans (des "facettes").

Rappel : l'aire d'un parallélogramme $P(\vec{a},\vec{b})$ dont les cotés sont représentés par des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ vaut :

$$A(P(\vec{a},\vec{b})) = ||\vec{a}\wedge\vec{b}||.$$

Et un parallélogramme est une surface paramétrée par une fonction $\vec{r}$:

$$\vec{r} : \begin{cases} [a_0,a_1] \times [b_0,b_1] \to \mathbb{R}^3, \\ (u, \quad v) \mapsto \vec{r}(u,v) = u\vec{f_1} + v\vec{f_2}, \end{cases}$$

où $\vec{f_1}\in\mathbb{R}^3$ et $\vec{f_2}\in\mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs donnés indépendants. En particulier, à v fixé, la courbe $u\to\vec{r}_v(u) = \vec{r}(u,v)$ est un segment de droite parallèle à un côté du parallélogramme (idem à u fixé).

Et on a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) = \vec{f_1}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v) = \vec{f_2}$. L'aire de la surface décrite par $\vec{r}$ est donc donnée par :

$$A = ||\big((a_1-a_0)\vec{f_1}\big)\wedge\big((b_1-b_0)\vec{f_2}\big)|| = (a_1-a_0)(b_1-b_0)||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||.$$

Notant $\delta u = (a_1-a_0)$ et $\delta v = (b_1-b_0)$, l'aire est donc donnée par :

$$\delta A = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,\delta u\,\delta v.$$

Une surface régulière quelconque peut être en première approximation approchée par une union de parallélogramme, d'où l'aire d'une surface régulière quelconque décrite par (5.1) en sommant les aires élémentaires et en passant à la limite :

$$A = \int_\Omega ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv.$$

Définition 5.16 On appelle élément d'aire ou élément de surface au point $\vec{r}(u,v)$:

$$d\sigma(u,v) = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv. \tag{5.7}$$

Et l'aire est donnée par

$$A = \int_\Omega d\sigma. \tag{5.8}$$

Exemple 5.17 Aire d'une sphère de rayon R : soit la demi-sphère donnée par $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$ pour $\sqrt{x^2+y^2}\le R$, la surface paramétrée correspondante étant donnée par $\vec{r}(x,y) = (x,y,z)$.

On a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{x}{z}\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{y}{z}\end{pmatrix}$, d'où $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}(x,y)|| = \frac{R}{z}$. Il faut donc intégrer $\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$ pour $\sqrt{x^2+y^2}\le R$: on passe en coordonnées polaires, $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $dx\,dy = r\,dr\,dt$, pour $t\in[0,2\pi]$ et $r\in[0,R]$. On obtient :

$$A = \int_{r=0}^R\int_{t=0}^{2\pi}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\,r\,dr\,dt = 2\pi R[-\sqrt{R^2-r^2}]_0^R = 2\pi R^2,$$

aire de la demi-sphère supérieure. Et donc l'aire de la sphère est $4\pi R^2$. ∴

Proposition 5.18 *Si la surface est paramétrée en coordonnées cartésiennes* $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ *(surface explicite en* (x,y)*), alors* $n_3 \neq 0$ *(plus précisément* $n_3 > 0$*, voir proposition 5.10) et :*

$$d\sigma = \sqrt{||\text{grad}z||^2 + 1}\ \ dxdy = \frac{1}{n_3}\,dxdy, \tag{5.9}$$

où $n_3 = \vec{n}.\vec{e}_3$ *est la troisième composante du vecteur normal* $\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{||\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}||}$.

Preuve. Par hypothèse, la surface $\vec{r}$ est de la forme $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ et donc $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$ aux points (x,y), de norme $\sqrt{||\text{grad}z||^2 + 1}$. D'où $d\sigma = \sqrt{||\text{grad}z||^2 + 1}\,dxdy$ et $n_3 = \frac{1}{\sqrt{||\text{grad}z||^2+1}} > 0$ en (x,y). D'où (5.9). ∎

Exercice 5.19 Soit la surface régulière paramétrée en coordonnées cartésiennes $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$. Donner un paramétrage de cette surface de manière à ce que la normale pointe vers le bas.

Réponse. Soit $\vec{q}(u,v) = \vec{r}(v,u) = \begin{pmatrix} v \\ u \\ z(v,u) \end{pmatrix}$. On a $\frac{\partial \vec{q}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{q}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 z(v,u) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 z(v,u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 z(v,u) \\ \partial_2 z(v,u) \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\vec{\text{grad}} z(v,u)\right) \\ -1 \end{pmatrix}$. Et la normale est orientée vers le bas.

Remarque : on a $\vec{q}(u,v) = u\vec{e}_2 + v\vec{e}_1 + (-z(v,u))(-\vec{e}_3) = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 + \tilde{z}(u,v)\vec{f}_3$ avec $(\vec{f}_1 = \vec{e}_2, \vec{f}_2 = \vec{e}_1, \vec{f}_3 = -\vec{e}_3)$ repère direct et avec $\tilde{z}(u,v) = -z(v,u)$. On retrouve le cas des coordonnées cartésiennes et donc $\frac{\partial \vec{q}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{q}}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\left(\vec{\text{grad}} \tilde{z}(u,v)\right) \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$. ∎

Exemple 5.20 Soit $\vec{r}(x,y) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (ax+by+c)\vec{e}_3$ pour $(x,y) \in [0,2]^2$. On a $\vec{r}(x,y) = c\vec{e}_3 + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, dont l'image est un parallélogramme dont un sommet est le point $c\vec{e}_3$ dont deux côtés sont les vecteurs $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et $2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. La surface décrite par $\vec{r}$ a également pour équation $z = ax+by+c$ pour $(x,y) \in [0,2]^2$. On trouve $A = \int_0^2 \int_0^2 \sqrt{a^2+b^2+1}\,dx\,dy = 4\sqrt{a^2+b^2+1}$. Et on a bien $A = ||\vec{t}_1 \wedge \vec{t}_2|| = 4\sqrt{a^2+b^2+1}$. ∎

Corollaire 5.21 *Pour une surface plane dans le plan* (x,y) *:* $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix}$, *on a* $d\sigma = dxdy = |J(u,v)|dudv$ *où* J *est le jacobien du changement de variables* $\vec{\varphi} : (u,v) \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\varphi}(u,v)$, *où* $\vec{\varphi} : (u,v) \to \vec{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ *(les deux premières composantes de* $\vec{r}$*), ce quand* $\vec{\varphi}$ *est un changement de variables (un difféomorphisme).*

Preuve. Surface dans le plan (x,y) : on a $n_3 = 1$, d'où $d\sigma = dxdy$. Puis $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J(u,v) \end{pmatrix}$, d'où le résultat. ∎

Exercice 5.22 Soit le disque $\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, pour $0 \le r \le R$ et $0 \le t \le 2\pi$. Montrer que l'élément d'aire est $d\sigma = r\,dr\,dt$.

Réponse. L'élément d'aire est $d\sigma = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}(r,t) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(r,t)||\,dr\,dt$, et $||\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}(r,t) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(r,t)||$ = jacobien de la transformation dans le plan entre coordonnées polaires et cartésiennes. En effet :

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}(r,t) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(r,t)|| = r.$$

D'où $d\sigma = r\,dr\,dt$. ▪

Exercice 5.23 Soit la sphère de rayon $R > 0$ donnée par $\vec{r}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} x = R\cos t\cos\varphi \\ y = R\sin t\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{pmatrix}$, pour $0 \le t \le 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Montrer que l'élément d'aire est $d\sigma = R^2\cos\varphi\,dt\,d\varphi$.

Donner le lien avec le jacobien de la transformation $(r,t,\varphi) \to (x,y,z)$ (entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques) : on montrera que l'élément de volume vaut $dV = d\sigma dr$.

Réponse. L'élément d'aire est $d\sigma = ||\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(t,\varphi) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(t,\varphi)||\,dt\,d\varphi$, et

$$||\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(t,\varphi) \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(t,\varphi)|| = R^2\ ||\begin{pmatrix} -\sin t\cos\varphi \\ \cos t\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos t\sin\varphi \\ -\sin t\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}|| = R^2\ ||\begin{pmatrix} \cos t\cos^2\varphi \\ \sin t\cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}|| = R^2\cos\varphi.$$

D'où l'élément d'aire $d\sigma = R^2\cos\varphi\,dt\,d\varphi$.

La demi-sphère supérieure est donnée en coordonnées cartésiennes par $(x,y,z) \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = \sqrt{r^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$.

Pour passer aux coordonnées sphériques, on a posé $\begin{pmatrix} x = r\cos t\cos\varphi \\ y = r\sin t\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $0 \le r \le R$, $0 \le t \le 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Et le jacobien de la transformation vaut :

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = r^2\det\begin{pmatrix} \cos t\cos\varphi & -\sin t\cos\varphi & -\cos t\sin\varphi \\ \sin t\cos\varphi & \cos t\cos\varphi & -\sin t\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = r^2\cos\varphi.$$

D'où l'élément de volume $dV = r^2\cos\varphi\,dr\,dt\,d\varphi$ au point (r,t,φ). En particulier, on a $dV = (d\sigma)(dr)$ au point (R,t,φ). ▪

Exercice 5.24 Calculer l'aire de la surface $z = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$ qui se projette sur (xOy) à l'intérieur de la courbe $\rho^2 = \cos(4\theta)$ (en coordonnées polaires) pour $\theta \in [-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}] \cup [\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}] \cup [\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}] \cup [\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}]$.

Réponse. On a 4 branches d'aire égale. D'où l'aire A cherchée vaut :

$$A = 4\int_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy,$$

où $D = \{(x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta) : \theta \in [-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}],\ \rho \le \sqrt{\cos(4\theta)}\}$ (avec $\cos 4\theta > 0$ et donc ce domaine est réel). On passe en coordonnées polaires pour obtenir :

$$A = 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \int_{r=0}^{\sqrt{\cos(4\theta)}} \sqrt{1+\rho^2}\ \rho\,d\rho d\theta = 4\int_{\theta=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \int_{u=0}^{\cos(4\theta)} \sqrt{1+u}\,\frac{1}{2}\,du d\theta = \frac{20}{9} - \frac{\pi}{3}.$$

(Se servir de la formule $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t$.) ▪

Exercice 5.25 Calculer l'aire sous une "arche" de cycloïde $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a(t-\sin t) \\ y(t) = a(1-\cos t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ et $a > 0$ (limitée par l'axe des x). (Voir exercice 6.14 pour une solution plus facile à calculer.)

Réponse. Paramétrage : $\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} x(t) = r(t-\sin t) \\ y(t) = r(1-\cos t) \end{pmatrix}$ pour $r \in [0,a]$ et $t \in [0,2\pi]$. On a $d\sigma = |\det\begin{pmatrix} t-\sin t & r(1-\cos t) \\ 1-\cos t & r\sin t \end{pmatrix}| = |r(t\sin t + 2\cos t - 2)| = r(2 - t\sin t - 2\cos t)$. En effet, la fonction

$f(t) = 2 - t\sin t - 2\cos t$ est positive (calculer $f'(t) = \sin t - t\cos t$, puis $f''(t) = t\sin t$ qui est strictement positive sur $]0,\pi[$ et strictement négative $]\pi, 2\pi[$, d'où f' strictement croissante sur $]0,\pi[$ et strictement décroissante sur $]\pi, 2\pi[$, avec $f'(0) = 0$, $f'(\pi) > 0$, $f'(2\pi) = -2\pi < 0$, d'où f' s'annule en un unique point $t_0 \in]0, 2\pi[$, et f croissante sur $[0, t_0]$ et décroissante sur $[t_0, 2\pi]$, avec $f(0) = 0$ et $f(2\pi) = 0$, d'où $f \geq 0$). D'où l'aire de la cycloïde : $A = \int_{r=0}^{a} r\,dr \int_{t=0}^{2\pi}(2 - t\sin t - 2\cos t)\,dt = 3\pi a^2$. ∎

5.4 Indépendance du paramétrage

Une même surface Σ peut être décrite à l'aide de différentes fonctions. Soit :

$$\vec{r}_1 : \begin{cases} \Omega_1 & \to \mathbb{R}^3, \\ (u,v) & \mapsto \vec{r}_1(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ y_1(u,v) \\ z_1(u,v) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 : \begin{cases} \Omega_2 & \to \mathbb{R}^3, \\ (s,t) & \mapsto \vec{r}_2(s,t) = \begin{pmatrix} x_2(s,t) \\ y_2(s,t) \\ z_2(s,t) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{5.10}$$

deux fonctions telles que $\vec{r}_1(\Omega_1) = \vec{r}_2(\Omega_2)$ (même image=surface). On suppose que l'application de changement de variables $\vec{\varphi}$:

$$\vec{\varphi} : \begin{cases} \Omega_1 & \to \Omega_2, \\ (u,v) & \mapsto (s,t) = \vec{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) = s(u,v) \\ \varphi_2(u,v) = t(u,v) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est bijective, C^1 d'inverse C^1 et telle que son jacobien ne s'annule pas (sa "dérivée" ne s'annule pas) :

$$\forall (u,v) \in \Omega, \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \neq 0.$$

La fonction $\vec{\varphi}$ permet d'écrire $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \vec{\varphi}$:

$$\vec{r}_1(u,v) = \vec{r}_2(s,t) = \vec{r}_2(\vec{\varphi}(u,v)) = \vec{r}_2(\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)).$$

Proposition 5.26 *Si f est une fonction continue sur Σ :*

$$\int_{\Omega_1} f(\vec{r}_1(u,v))\, ||\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}(u,v)||\, du\, dv = \int_{\Omega_2} f(\vec{r}_2(s,t))\, ||\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}(s,t)||\, ds\, dt,$$

i.e., l'intégrale calculée est indépendante du paramétrage. Elle est notée $\int_\Omega f\,d\sigma$.

En particulier, l'aire de la surface $\mathrm{Im}\vec{r}$ est donnée par $\int_{\Omega_1} ||\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}(u,v)||\, du\, dv = \int_{\Omega_2} ||\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}(s,t)||\, ds\, dt = \int_\Sigma d\sigma$.

Preuve. On applique le théorème de changement de variables qui s'écrit de manière générique :

$$\int_{\vec{x} \in \Omega_1} g(\vec{x})\, dx_1\, dx_2 = \int_{\vec{y} \in \Omega_2} g(\vec{x}(\vec{y}))\, |J(\vec{y})|\, dy_1\, dy_2 \tag{5.11}$$

où $J(\vec{y})$ est le jacobien de la transformation $\vec{y} \to \vec{x}(\vec{y})$, i.e. $J(\vec{y}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(\vec{y}) & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}(\vec{y}) \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}(\vec{y}) & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}(\vec{y}) \end{pmatrix}$. Ici on pose $\vec{x} = (u,v)$, $\vec{y} = (s,t)$ et $g(u,v) = (f \circ \vec{r}_1)||\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v}||(u,v)$. Et $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \vec{\varphi}$ donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} = \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial u} + \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial v} + \dfrac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial v}. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v})(u,v) &= 0 + (\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t})(s,t)(\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v})(u,v) + (\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s})(s,t)(\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v})(u,v) \\ &= (\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t})(s,t)\Big((\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v})(u,v) - (\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v})(u,v)\Big), \end{aligned}$$

d'où l'élément d'aire :

$$||(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v})(u,v)|| = ||(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t})(s,t)||\,|J_\varphi(u,v)| = ||(\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s} \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t})(s,t)||\,|J_{\varphi^{-1}}(s,t)|^{-1}.$$

D'où, avec $\vec{r}_1(\vec{x}) = \vec{r}_1(u,v) = \vec{r}_2(s,t) = \vec{r}_2(\vec{y})$:

$$g(\vec{x}(\vec{y})) = f(\vec{r}_2(s,t))\,||\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}(s,t)||\,|J(s,t)|^{-1}.$$

Et donc (5.11) donne :

$$\int_{\vec{x}\in\Omega_1} g(\vec{x})\,du\,dv = \int_{\vec{y}\in\Omega_2} (g(\vec{x}(\vec{y}))\,|J(\vec{y})|\,ds\,dt = \int_{\vec{y}\in\Omega_2} f(\vec{r}_2(s,t))\,||\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial t}(s,t)||\,ds\,dt,$$

ce qui est le résultat cherché. ∴

5.5 Gradient et surface "$z = f(x,y)$"

Rappel du cours sur les fonctions à plusieurs variables.
Une fonction :

$$f : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto z = f(x,y), \end{cases}$$

a pour image $\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : \exists (x,y) \in \Omega,\ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}$. Et f est caractérisée par son graphe qui est la surface $\subset \mathbb{R}^3$:

$$\Sigma = \Omega \times \mathrm{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\} = \bigcup_{(x,y)\in\Omega} \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}\}.$$

On rappelle que le gradient de f est la fonction vectorielle :

$$\vec{\mathrm{grad}} f : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto \vec{\mathrm{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y)$ est dans $\mathbb{R}^2$ et n'a pas d'intérêt immédiat quand on veut le représenter sur le graphe de f qui est la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ (on souhaite représenter sur la surface un vecteur de $\mathbb{R}^3$). On considère alors la fonction :

$$g : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}, \\ (x,y,z) & \mapsto g(x,y,z) = z - f(x,y). \end{cases}$$

Et on a :

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} : g(x,y,z) = 0\}.$$

C'est l'ensemble des points $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liés par l'équation $g(x,y,z) = 0$. Et le gradient de g est défini par :

$$\vec{\mathrm{grad}} g : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Et on a :

Proposition 5.27 *Le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z)$ est un vecteur normal à Σ.*

Preuve. De manière immédiate on a également $\Sigma = \vec{r}(\Omega)$ où $\vec{r}$ est un paramétrage de la surface :

$$\vec{r} : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}^3, \\ (x,y) & \mapsto \vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \in \Omega \times \mathrm{Im}(f) \quad (\subset \mathbb{R}^3). \end{cases}$$

Et le vecteur $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}(x,y)$ est un vecteur normal à Σ (non unitaire). Et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$. D'où $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$ au point $\vec{r}(x,y)$.

Et donc $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \vec{\mathrm{grad}} g(x,y,z)$ pour les $(x,y,z) \in \Sigma$. ∎

5.6 Gradient et courbe de niveau "$c = f(x,y)$"

Rappel du cours sur les fonctions à plusieurs variables.

On revient sur la fonction $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ précédente :

$$f : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto z = f(x,y), \end{cases}$$

Son graphe $= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \}$ est dans $\mathbb{R}^3$, alors que son gradient $= \vec{\mathrm{grad}} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On va donner une interprétation dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.28 Pour $c \in \mathbb{R}$, on appelle courbe de niveau de $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de valeur c l'ensemble :

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = c\} \quad \subset \quad \text{plan horizontal "} z = c \text{"}.$$

Donc, par définition, la courbe de niveau Γ_c est un ensemble tracé dans le plan horizontal $z = c$.

Proposition 5.29 *Si $\vec{x} = (x,y)$ est un point d'une courbe de niveau $f(x,y) = c$, où $c \in \mathbb{R}$, tel que $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \neq 0$, alors le vecteur $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y)$ du plan vectoriel "(x,y)" est perpendiculaire à cette courbe de niveau au point (x,y,c).*

Preuve. Le vecteur $\tilde{\vec{n}}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au graphe de f en $(x,y,c = f(x,y))$, et le vecteur tangent à la courbe de niveau en (x,y,c) est du type $\vec{T} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ car dans le plan horizontal.

D'où $0 = \vec{T}.\tilde{\vec{n}} = \bar{\vec{T}}.\bar{\vec{n}} = -\bar{\vec{T}}.\vec{\mathrm{grad}} f$, où on a noté $\bar{\vec{T}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\bar{\vec{n}} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = -\vec{\mathrm{grad}} f \in \mathbb{R}^2$, ce qui est le résultat cherché : $\bar{\vec{T}} \perp \vec{\mathrm{grad}} f$ au point (x,y,c). ∎

Remarque 5.30 Autre démonstration. Puisque $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \neq 0$, on a par exemple $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$. On peut donc appliquer à $f(x,y) = c$ le théorème des fonctions implicites : localement au voisinage de (x,y), on a l'existence d'une fonction g dérivable telle que $y = g(x)$. Le graphe de g est la courbe $x \to \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ dans le plan horizontal $z = c$ dont un vecteur tangent est $\vec{T}_g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix}$. Mais comme localement $f(x,y) = c = f(x, g(x))$ il vient :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)).g'(x) = \vec{\mathrm{grad}} f(x, g(x)).\vec{T}_g(x).$$

Et donc $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \perp \vec{T}_g(x)$, et $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y)$ est orthogonal à la courbe de niveau $y = g(x)$ (dans le plan horizontal $z = c$).

Si on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ car on a supposé $\vec{\mathrm{grad}} f(x,y) \neq 0$, et la démarche est la même avec une fonction $h(y) = x$. ∎

5.7 Surface orientable

Définition 5.31 Une surface $\vec{r}(u,v)$ est orientable lorsque $\vec{n}(u,v)$ est définie de manière unique en tout point $\vec{r}(u,v)$, i.e.,

1. quel que soit $P \in \Sigma = \vec{r}(\Omega)$ un point de la surface, et
2. quelle que soit la courbe régulière fermée simple $\vec{q} : t \in [0,1] \to \vec{q}(t) \in \Sigma$ (tracée sur Σ) telle que $\vec{q}(1) = P = \vec{q}(0)$, on a :

normale unique $= \vec{n}(\vec{q}(0)) = \vec{n}(\vec{q}(1))$ $(= \vec{n}(P))$.

Exemple 5.32 Sur la surface paramétrée par $\vec{r} : (\theta,\varphi) \to \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$, avec $\theta \in [0,2\pi]$ et $\pi \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (sphère de rayon R), la normale en un point $\vec{x} = \vec{r}(\theta,\varphi)$ est $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{R}$. C'est la normale sortante. Et si on trace une courbe régulière quelconque fermée simple $\vec{q}$ sur cette sphère, en tout point de cette courbe le vecteur normal est toujours sortant, et $\vec{n}(\vec{q}(0)) = \vec{n}(\vec{q}(1))$.

Il est en de même pour toute surface homéomorphe à une sphère (i.e. toute surface qui peut être obtenue par "déformation bicontinue" d'une sphère). ▞

Dans la suite, lorsqu'on utilisera $\vec{n}$ on supposera implicitement la surface orientable. Ainsi en chaque point, une paramétrisation étant choisie, il n'y aura aucune ambiguïté quant au vecteur normal unitaire.

Exemple 5.33 Contre-exemple : le ruban de Möbius n'est pas orientable. Il a pour paramétrisation (par exemple), pour $\theta \in [0,2\pi]$ et $t \in [-1,1]$:

$$\vec{r}(\theta,t) = 2\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} + t(\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} + \sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\cos\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\\ 2\sin\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\\ t\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

(Pour l'obtenir : prendre le ruban de papier cylindrique $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ t\end{pmatrix}$, le couper et le recoller après avoir fait faire un demi-tour à l'un des côtés. Quitte à la prolonger pour $\theta \in \mathbb{R}$, à t fixé, la courbe obtenue est périodique de période 4π ; on pourra dessiner $\vec{r}(-\pi,1) = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{r}(\pi,1) = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, points "côté gauche" du ruban situé sur la même courbe $\vec{r}_{t=1}$ après un tour.)

Et on prend la courbe fermée sur $\vec{r}([0,2\pi]\times[-1,1])$ définie par $\vec{q}(\theta) = \vec{r}(\theta,0) = 2\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}$. Il est immédiat que $\vec{q}(0) = \vec{q}(2\pi) = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} =^{\text{noté}} P$.

On a :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,t) = \begin{pmatrix}-2\sin\theta - \frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - t\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\\ 2\cos\theta - \frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta + t\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\\ t\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \quad\text{et}\quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}(\theta,t) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\\ \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

D'où $(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial t})(0,0) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial t})(2\pi,0) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.
Et donc la normale a changé de sens. La surface n'est pas orientable (elle n'a qu'une seule face). ▞

5.8 Orientation du bord d'une surface

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On se donne une courbe régulière $\Gamma = \vec{q}(I)$ simple dans $\mathbb{R}^3$ sur laquelle s'appuie une surface orientable $\Sigma = \vec{r}(\overline{\Omega})$. Et soit $\vec{n}(u,v)$ le vecteur normal unitaire donné par (5.2) en un point $\vec{r}(u,v)$.

Définition 5.34 Règle du tire-bouchon dans $\mathbb{R}^3$ = règle des trois doigts de la main droite.

On dit que l'orientation du bord de la surface est positive si la courbe $\vec{q}$ et la surface $\vec{r}$ satisfont à la règle du tire-bouchon, i.e. si, en tout point $\vec{q}(t)$ de la courbe égal au point $\vec{r}(u,v)$ (sur le bord de la surface), le vecteur $\vec{T} = \vec{n}(u,v) \wedge \vec{q}\,'(t)$ pointe vers l'intérieur de la surface.

Ou encore, si $\vec{q}\,'(t) \wedge \vec{T}$ est parallèle à $\vec{n}(u,v)$ et de même sens, pour tout vecteur $\vec{T}$ tangent à la surface pointant vers l'intérieur : quand on tourne dans le sens trigonométrique, i.e. de $\vec{q}\,'$ vers $\vec{T}$, alors on visse, i.e. on avance dans le sens de $\vec{n}$, et on dévisse sinon.

Calcul. Soit une courbe $\vec{r} : (u,v) \in [a,b] \times [c,d] \to \vec{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3$. Soit un paramétrage $\vec{q}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ (régulier) de Γ. On a alors $\vec{q}\,'(t) = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u(t),v(t))u'(t) + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u(t),v(t))v'(t)$.

Si $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u(t),v(t))$ n'est pas parallèle à $\vec{q}\,'(t)$ (cas $v'(t) \neq 0$), on peut prendre pour vecteur tangent $\vec{T}$ le vecteur $\pm\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u(t),v(t))$, le signe $\pm$ étant déterminé par le sens de $\vec{T}$ qui doit être orienté vers l'intérieur de cette surface. Sinon on travaille avec $\pm\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u(t),v(t))$.

Exemple 5.35 On considère la demi-sphère supérieure de $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$. Le paramétrage sphérique est donné par $\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [0,2\pi]$ et $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Le bord est donné par $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ (avec ici $\theta(t) = t$ et $\varphi(t) = 0$). Le vecteur $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas parallèle à $\vec{q}\,'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0)$ à sa dernière composante ≥ 0, donc ce vecteur est orienté vers la demi-sphère supérieure.

N.B. : calcul complet : le développement limité au premier ordre (donnant l'équation du plan tangent au point $\vec{q}(t) = \vec{r}(t,0)$) est $\vec{r}(t{+}h,k) = \vec{r}(t,0) + h\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(t,0) + k\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0) + o(||(h,k)||) = \vec{q}(t) + h\,\vec{q}\,'(t) + k\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0) + o(||(h,k)||)$ et n'est considéré que pour $k > 0$ puisque n'est considéré que pour un point de la demi-sphère supérieur ; et donc un vecteur pointant vers l'intérieur est $\vec{T} = +\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0)$.

(Si on avait considérée la demi-sphère inférieure, on aurait considéré les $k < 0$ pour avoir $\vec{r}(t{+}h,k)$ sur la demi-sphère inférieure, et donc un vecteur pointant vers l'intérieur aurait été $\vec{T} = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(t,0)$.) ▪

5.9 Élément d'aire vectoriel et flux à travers une surface

On se donne une surface orientée $\vec{r} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Définition 5.36 On appelle élément d'aire vectoriel ou élément de surface vectoriel :

$$\vec{d\sigma}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\; dudv. \tag{5.12}$$

Soit, sachant que l'élément d'aire est $d\sigma(u,v) =^{\text{déf}} ||\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)||\,du\,dv$:

$$\vec{d\sigma} = \vec{n}\,d\sigma = \begin{pmatrix} n_1 d\sigma \\ n_2 d\sigma \\ n_3 d\sigma \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

le vecteur normal unitaire à la surface défini en (5.2) au point $\vec{r}(u,v)$ étant $\vec{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{||\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}||}(u,v)$.

Définition 5.37 Soit $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ (un champ de vecteurs), et soit $\vec{r} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ une surface orientée. On appelle flux de $\vec{f}$ à travers Σ :

$$F(f,\Sigma) = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\,d\sigma = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma},$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant.

Exemple 5.38 Soit Σ la sphère $S(\vec{0},R)$, et soit $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma}$ le flux de $\vec{f}$ à travers Σ, pour $k=0,1,2$.

Réponse. Paramétrage de la sphère en sphérique, cf. (5.3). On a :

$$\vec{d\sigma} = R^2 \begin{pmatrix} \cos\theta\cos^2\varphi \\ \sin\theta\cos^2\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi, \qquad d\sigma = R^2\cos\varphi\, d\theta d\varphi, \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

cf. (5.4). D'où :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} &= R^{2+k}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k+1}\theta\cos^{k+2}\varphi + \sin^{k+1}\theta\cos^{k+2}\varphi + \sin^{k+1}\varphi\cos\varphi\, d\theta d\varphi \\ &= R^{2+k}((\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\, d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\, d\theta)\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+2}\varphi\, d\varphi + 2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{k+1}\varphi\cos\varphi\, d\varphi)\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k+1}\varphi\cos\varphi\, d\varphi = [\frac{1}{k+2}\sin^{k+2}\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ \frac{2}{k+2} \text{ si } k \text{ impair} \end{pmatrix}.$$

Si k est pair, alors $\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\, d\theta = 0 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\, d\theta$, et donc $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} = 0$.

Si k est impair, alors $\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^{k+1}\theta\, d\theta = 2\pi\frac{k(k-1)...1}{(k+1)(k-1)...2} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\sin^{k+1}\theta\, d\theta$, et $\displaystyle\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+2}\varphi\, d\varphi = 2\frac{(k+1)(k-1)...2}{(k+2)(k)...3}$, voir annexe B, d'où :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} &= R^{2+k}(8\pi\frac{k(k-1)...1}{(k+1)(k-1)...2}\frac{(k+1)(k-1)...2}{(k+2)(k)...3} + 2\pi\frac{2}{k+2}) \\ &= R^{2+k}(8\pi\frac{1}{k+2} + 2\pi\frac{2}{k+2})\end{aligned}$$

Donc :

$$k \text{ pair} : \int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} = 0, \qquad k \text{ impair} : \int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma} = \frac{12}{k+2}\pi R^{2+k}.$$

Pour $k=0$, on a $S_0 = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\sigma = 0$, ce qu'on vérifie car $S_0 = \int_\Sigma (n_1+n_2+n_3)\, R^2\cos\varphi\, d\theta d\varphi = R^2(\int_{\theta=0}^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\, d\theta\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}...d\varphi + 2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi, d\varphi) = R^2(0+0) = 0$.

Pour $k=1$, on a $S_1 = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\sigma = \frac{8\pi+2}{3}R^3$, ce qu'on vérifie car $S_1 = \int_\Sigma (xn_1+yn_2+zn_3)\, R^2\cos\varphi\, d\theta d\varphi = R^3(\int_{\theta=0}^{2\pi}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\, d\theta\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi + 2\pi\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi) = R^3(2\pi\frac{4}{3} + 2\pi[\frac{1}{3}\sin^3\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3$. ▲

Exemple 5.39 Soit Σ l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, et soit $\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma}$ le flux de $\vec{f}$ à travers Σ.

Réponse. $\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ b\sin\theta\cos\varphi \\ c\sin\varphi \end{pmatrix}$.

$$(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi})(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi \\ b\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -a\cos\theta\sin\varphi \\ -b\sin\theta\sin\varphi \\ c\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc\cos\theta\cos^2\varphi \\ ac\sin\theta\cos^2\varphi \\ ab\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$$

D'où calcul similaire au précédent. ▲

Exemple 5.40 Soit Σ la partie de paraboloïde $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ limité par $z \le 1$, et soit $\vec{f} = \frac{1}{x}\vec{e}_1$. Calculer le flux $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma}$ ▲

On rappelle, voir proposition 5.18 : si localement la surface est paramétrée par (x,y), i.e si elle est donnée par $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ où z est une fonction C^1, alors $\vec{d\sigma}(x,y) =$

$\begin{pmatrix} -(\vec{\text{grad}}z)(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} dxdy$, et le vecteur unitaire normal déduit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{||\vec{\text{grad}}z||^1+1}} \begin{pmatrix} -(\vec{\text{grad}}z) \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $n_3 = \frac{1}{\sqrt{||\vec{\text{grad}}z||^1+1}} > 0$: le plan tangent n'est pas vertical et $\vec{n}$ est toujours orienté vers le haut, et donc ce $\vec{n}$ n'indique pas le vecteur normal sortant. Et :

$$dxdy = n_3\, d\sigma \qquad (= \vec{e}_3.\vec{d\sigma}). \tag{5.15}$$

(Faire un dessin, avec $n_3 = \vec{n}.\vec{e}_3 = \cos\gamma$ le "cosinus directeur", et $dxdy = \vec{d\sigma}.\vec{e}_3 =$ la projection de $\vec{d\sigma}$ sur le plan (x,y)).

De même si on a des paramétrages en $x(y,z)$ ou en $y(z,x)$, on obtient respectivement :

$$\begin{cases} dxdy = n_3\, d\sigma, & \text{quand } n_3 > 0, \\ dydz = n_1\, d\sigma, & \text{quand } n_1 > 0, \\ dzdx = n_2\, d\sigma, & \text{quand } n_2 > 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Exemple 5.41 Soit Σ la sphère $S(\vec{0},R)$, et soit $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{d\sigma}$ le flux de $\vec{f}$ à travers Σ, pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide de (5.16) (beaucoup plus rapide que la démarche de l'exercice 5.38).

Réponse. On a $\int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\sigma = \int_\Sigma f_1\, \text{signe}(n_1)\, dydz + f_2\, \text{signe}(n_2)\, dzdx + f_3\, \text{signe}(n_3)\, dxdy$. (Signe pour orientation de la normale qui pointe vers l'extérieure pour le flux : le calcul du flux ne dépend pas de l'orientation de la surface).

On a $\int_\Sigma f_3\, dxdy = \int_{\Sigma_+} f_3\, dxdy + \int_{\Sigma_-} f_3(x,y,z)\,(-)dxdy$. Pour Σ_+ donné par $z(x,y) = (R^2-x^2-y^2)^{\frac12}$ où $x^2+y^2 \le R^2$, on a :

$$\int_{\Sigma_+} z^k\, dxdy = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} (R^2-r^2)^{\frac{k}{2}}\, rdrd\theta = \frac{-2\pi}{k+2}[(R^2-r^2)^{\frac{k+2}{2}}]_0^R = \frac{2\pi}{k+2} R^{k+2}.$$

Pour Σ_-, $z = -(R^2-x^2-y^2)^{\frac12}$, et donc :

$$k \text{ pair : } z^k = (R^2-x^2-y^2)^{\frac{k}{2}}, \qquad \int_{\Sigma_-} z^k\, dxdy = \frac{2\pi}{k+2} R^{k+2},$$
$$k \text{ impair : } z^k = -(R^2-x^2-y^2)^{\frac{k}{2}}, \qquad \int_{\Sigma_-} z^k\, dxdy = -\frac{2\pi}{k+2} R^{k+2},$$

Idem pour les autres intégrales. D'où :

$$k \text{ pair : } \int_\Sigma z^k\, dxdy = 0,$$
$$k \text{ impair : } \int_\Sigma z^k\, dxdy = \frac{4\pi}{k+2} R^{k+2}.$$

Finalement

$$\int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair}, \\ \frac{12}{k+2}\pi R^{k+2} & \text{si } k \text{ impair}. \end{cases}$$

On retrouve le résultat précédent. ∎

6 Formules de Green–Riemann et de Stokes ("courbe – surface")

6.1 Cas $\mathbb{R}^2$: formule de Green–Riemann

Dans $\mathbb{R}$ on a le résultat $\int_a^b \frac{df}{dx}(x)\, dx = f(b) - f(a)$: la valeur de l'intégrale d'une dérivée ne dépend que des valeurs au bord. Ici on généralise ce résultat dans $\mathbb{R}^2$: l'intégrale sur une surface d'une dérivée partielle peut être ramenée à l'intégrale sur le bord de la surface sous des conditions assez générales :

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On considère une surface Ω régulière décrite par un paramétrage $\vec{r} : (u,v) \to \begin{pmatrix} r_1(u,v) \\ r_2(u,v) \end{pmatrix}$ dont le bord Γ est décrit à l'aide d'une courbe régulière $\vec{q} : t \in [a,b] \to$

$\vec{r}(t) \in \Gamma$ qui est simple et fermée. (On est donc dans le cas où Ω est simplement connexe, i.e. "en un seul morceau et sans trou".)

On suppose de plus que Γ est décrite dans le sens trigonométrique par le paramétrage choisi. On note $dxdy$ l'élément d'aire, i.e., si on a un paramétrage $\vec{r}(u,v)$ de la surface, on a noté $dxdy = |J(u,v)|dudv = ||(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\vec{r}}{\partial v})(u,v)||\, dudv$.

Exemple 6.1 Le disque $D(\vec{0},R)$ paramétré par $\vec{r} : (r,\theta) \in [0,R] \times [0,2\pi[\to \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ a son bord paramétré par $\vec{q}(\theta) = \vec{r}(R,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi[$, paramétrage qui donne bien le sens trigonométrique. Et pour ce paramétrage du disque, on a $dxdy = rdrd\theta$. ▲

Rappel : on appelle domaine régulier dans $\mathbb{R}^2$ un ensemble Ω ouvert dans $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est paramétrable par une courbe régulière simple (de type $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ avec $\vec{r} \in C^1$ avec $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$). Et un tel domaine est simplement connexe ssi il est "sans trou".

N.B. : on appelle également domaine régulier le fermé adhérence d'un ouvert comme ci-dessus.

Théorème 6.2 *(Formule de Green–Riemann.) Soit Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ simplement connexe dont la frontière Γ est paramétrée dans le sens trigonométrique (le sens de parcours de Γ est tel que Ω est "à gauche").*

On notera $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de Ω ou de Γ, (x,y) désignant les coordonnées cartésiennes.

Si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction $C^1(\Omega;\mathbb{R})$, alors en intégrant en x on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_\Gamma g(x,y)\,dy, \tag{6.1}$$

et en intégrant en y on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int_\Gamma g(x,y)\,dx. \tag{6.2}$$

En particulier, si $h : \Omega \to \mathbb{R}$ est une autre fonction $C^1(\Omega)$, alors :

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_\Gamma g(x,y)\,dy + h(x,y)\,dx, \tag{6.3}$$

formule de Green–Riemann, notée $\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\Gamma g\,dy + h\,dx$. Cela s'écrit également, si $\vec{f} = \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}$ est $C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$:

$$\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r} = \int_\Omega \mathrm{rot}(\vec{f})\,dxdy. \tag{6.4}$$

C'est la formule du rotationnel dans le plan : le travail effectué par une fonction $\vec{f}$ le long d'une courbe Γ (parcourue dans le sens trigonométrique) est égal à l'intégrale de son rotationnel sur la surface Ω de frontière Γ.

Preuve. Montrons (6.2). On suppose d'abord que Γ peut être décrit par la réunion de deux fonctions :

$$\varphi : x \in [a,b] \to y = \varphi(x), \quad \psi : x \in [a,b] \to y = \psi(x), \quad \varphi(x) < \psi(x),\ \forall x \in]a,b[,$$

telles que $(a,\varphi(a)) = \vec{r}(a) = (a,\psi(a))$ et $(b,\varphi(b)) = \vec{r}(b) = (b,\psi(b))$. Donc Γ n'a pas de bord "vertical" et Ω est compris entre les graphes de φ et de ψ.

On a $\Omega = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi(x),\psi(x)]\}$, d'où :

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^b \Big(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_{x=a}^b \Big(g(x,\psi(x)) - g(x,\varphi(x))\Big)\,dx.$$

Et (parcours dans le sens trigo) :

$$\int_\Gamma g(x,y)\,dx = \int_{x=a}^b g(x,\varphi(x))\,dx + \int_{x=b}^a g(x,\psi(x))\,dx = \int_{x=a}^b g(x,\varphi(x))\,dx - \int_{x=a}^b g(x,\psi(x))\,dx.$$

D'où le résultat (6.2).

(La partie inférieure Γ_φ de Γ donné par φ est paramétrée par exemple par (de gauche à droite) : $\vec{r} : t \in [0,1] \to \begin{pmatrix} x = (b-a)t + a \\ y = \varphi(x) = \varphi((b-a)t+a) \end{pmatrix}$. Et la partie supérieure Γ_ψ de Γ donnée par ψ est paramétrée par (de droite à gauche pour respecter le sens trigo) : $\vec{q} : t \in [0,1] \to \begin{pmatrix} x = (a-b)t + b \\ y = \psi(x) = \psi((a-b)t+b) \end{pmatrix}$, cf. exemple 3.20).

Les cas où il y a un bord vertical est facile : le long d'un tel bord, "$dx = x'(t)dt = 0\,dt = 0$", car la fonction $x(t) = x$ est constante en t, et l'intégrale sur Γ est inchangée.

Maintenant, si Ω est quelconque, on l'écrit comme réunion de domaine ci-dessus, faire un dessin.

Même démarche pour le résultat (6.1).

Et (6.3) n'est que la somme des 2 résultats précédents, et (6.4) est une réécriture de (6.3). ▪

Corollaire 6.3 *Flux d'une fonction $\vec{f} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ à travers Γ : on suppose Γ paramétrée comme $\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ dans le sens trigonométrique par la coordonnée curviligne intrinsèque s (unité de longueur). Soit $\vec{n}(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) \\ n_2(s) \end{pmatrix}$ le vecteur normal unitaire sortant (orienté vers l'extérieur) au point $(x,y) \in \Gamma$. On a :*

$$\begin{cases} n_1(s) = y'(s), \\ n_2(s) = -x'(s). \end{cases} \tag{6.5}$$

Le flux de $\vec{f}$ est donné par, avec un paramétrage intrinsèque de Γ :

$$F(\vec{f},\Gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\Gamma \vec{f}.\vec{n}\,ds = \int_\Omega \text{div}(\vec{f})\,dxdy \tag{6.6}$$

(formule de la divergence) où on a noté $\int_\Gamma \vec{f}.\vec{n}\,ds = \int_\Gamma \vec{f}(\vec{r}(s)).\vec{n}(s)\,ds$.

Et la formule du rotationnel (6.4) se réécrit aussi :

$$\int_\Gamma \vec{n} \wedge \vec{f}\,ds = \int_\Omega \text{rot}(\vec{f})\,dxdy. \tag{6.7}$$

Preuve. On prend un paramétrage intrinsèque $\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ de Γ (pour $s \in [a,b]$). On a $\vec{r}\,'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ est vecteur tangent unitaire et $\vec{n}(x) = \pm \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$. Le paramétrage de Γ est dans le sens trigonométrique : $\vec{r}\,'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$ donne le sens de parcours trigonométrique et le signe de $\vec{n}$ est choisi de telle sorte que $\vec{n}$ pointe vers l'extérieur, i.e. tel que $(\vec{n},\vec{r}\,')$ soit un repère direct. D'où $\vec{n}(s) = +\begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$ (cas où plongé dans $\mathbb{R}^3$, on a $\vec{n} \wedge \vec{r}\,' = \alpha \vec{e}_3$ avec $\alpha = y'^2 + x'^2 > 0$). D'où (6.5). Et donc :

$$f_1(x(s),y(s))n_1(s) + f_2(x(s),y(s))n_2(s) = f_1(x(s),y(s))y'(s) - f_2(x(s),y(s))x'(s).$$

Et la formule de Green-Riemann donne (6.6). Et

$$n_1(s)f_2(x(s),y(s)) - n_2(s)f_1(x(s),y(s)) = f_1(x(s),y(s))x'(s) + f_2(x(s),y(s))y'(s).$$

Et la formule de Green-Riemann donne (6.7). ▪

Corollaire 6.4 *Aire d'un domaine Ω :*

$$Aire(\Omega) = \int_\Omega dx\,dy = \int_\Gamma x\,dy = -\int_\Gamma y\,dx = \frac{1}{2}(\int_\Gamma x\,dy - y\,dx).$$

Preuve. On veut $1 = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$, On a donc posé $g(x,y) = x$ et $h(x,y) = y$. Et on applique les formules (6.1) et (6.2). Et la demi somme donne :

$$Aire(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx).$$

▲

Exemple 6.5 Pour le disque Ω de rayon R, $\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} x(r,t) = r\cos t \\ y(r,t) = r\sin t \end{pmatrix}$ où $r \in [0,R]$ et $t \in [0,2\pi]$, on a l'aire du disque :

$$\int_\Gamma x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} R\cos(t)\,(R\cos(t))\,dt = \frac{R^2}{2}\int_{t=0}^{2\pi}[1+\cos(2t)]\,dt = \pi R^2,$$

ce qui est déjà connu... Et $\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}R^2\int_{t=0}^{2\pi}\cos^2(t) + \sin^2(t)\,dt = \pi R^2$. ▲

Exemple 6.6 Pour Ω l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} x(r,t) = ra\cos t \\ y(r,t) = rb\sin t \end{pmatrix}$ où $r \in [0,1]$ et $t \in [0,2\pi]$, son bord est donné par la courbe $\Gamma : t \in [0,2\pi] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{pmatrix}$. D'où l'aire de l'ellipse :

$$\int_\Gamma x\,dy = \int_{t=0}^{2\pi} a\cos(t)\,(b\cos(t))\,dt = \frac{ab}{2}\int_{t=0}^{2\pi}[1+\cos(2t)]\,dt = \pi ab,$$

ce qui est déjà connu... Et $\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}ab\int_{t=0}^{2\pi}\cos^2(t) + \sin^2(t)\,dt = \pi ab$. ▲

Exercice 6.7 Soit R le rectangle de sommet $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(0,3)$ (faire un dessin). Calculer le travail de $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y - x^2e^x \\ \cos(y^2) - x \end{pmatrix}$ le long du bord de R.

Réponse. On peut toujours essayer de calculer directement $\int_{\partial R}\vec{f}.d\vec{r}$... Plus simplement, on a $\mathrm{rot}\vec{f} = -2$ et donc $\int_{\partial R}\vec{f}.d\vec{r} = \int_R \mathrm{rot}\vec{f}.dxdy = -2\int_R dxdy = -4$. ▲

Exercice 6.8 Calculer $I = \int_\Gamma xy(x\,dx + y\,dy)$ où Γ est "$x^2 + y^2 - 2ay = 0$", à l'aide de Green–Riemann.

Réponse. Γ est le cercle $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. Équation paramétrique $\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a + a\sin\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$.

Le long de Gamma, par dérivation on a $2x\,dx + 2y\,dy - 2a\,dy = 0$ (le vérifier sur un paramétrage du cercle Γ). Donc $x\,dx + y\,dy = a\,dy$, et on doit calculer $I = \int_\Gamma xy(a\,dy)$.

1- calcul direct : paramétrage de Γ : $I = \int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(a + a\sin\theta)(a^2\cos\theta\,d\theta) = a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta + a^4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = a^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)\,d\theta + a^4[-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{2\pi} = \pi a^4$.

2- Par Green–Riemann : on a $\frac{\partial xy}{\partial x} = y$, d'où $I = a\int_\Gamma xy\,dy = a\int_\Omega y\,dxdy$. Paramétrage de Ω : $\vec{r}(r,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ a + ar\sin\theta \end{pmatrix}$ pour $r \in [0,a]$ et $\theta \in [0,2\pi]$. D'où $I = a\int_{r=0}^a\int_{\theta=0}^{2\pi}(a + ar\sin\theta)\,rdrd\theta = a^2[\frac{r^2}{2}]_0^a 2\pi + 0 = \pi a^4$ comme précédemment. ▲

Exercice 6.9 Calculer $I = \int_\Gamma(x^3 - 3xy^2)\,dx + (3x^2y - y^3)\,dy$ pour Γ le quart de cercle $\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}]$. On posera $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ et $Q(x,y) = 3x^2y - y^3$ et on appliquera Green-Riemann. Faire les deux calculs.

Réponse. 1- $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -6xy$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6xy$, d'où $I = \int_\Omega 12xy\,dxdy = 12\int_{r=0}^R\int_{\theta=\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\sin\theta\,rdrd\theta = 12\frac{R^4}{4}[-\frac{\cos(2\theta)}{4}]_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}R^4\cos(2\theta_0)$.

2- Paramétrage du quart de cercle : 21- partie arrondie $\Gamma_1 : \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$ pour $t \in [\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}]$. 22- segment de droite Γ_2 qui part de $\vec{0}$ pour aller à $\vec{r}_1(\theta_0) = \begin{pmatrix} R\cos\theta_0 \\ R\sin\theta_0 \end{pmatrix}$: $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} Rt\cos\theta_0 \\ Rt\sin\theta_0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,1]$. 23- segment de droite Γ_3 qui part de $\vec{r}_1(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta_0 \\ R\cos\theta_0 \end{pmatrix}$ pour aller à $\vec{0}$: $\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} -Rt\sin\theta_0 \\ Rt\cos\theta_0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,1]$, parcouru en sens inverse.

Puis

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} (x^3{-}3xy^2)\,dx + (3x^2y{-}y^3)\,dy\\
&= R^3 \int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta{-}3\cos\theta\sin^2\theta)(-R\sin\theta\,d\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta{-}\sin^3\theta)(R\cos\theta\,d\theta)\\
&= -R^4 \int_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta == -R^4[-\frac{\cos 2\theta}{2}]_{\theta_0}^{\theta_0+\frac{\pi}{2}} = R^4\cos 2\theta_0
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\\
&= R^3 \int_{t=0}^{1} (t^3\cos^3\theta_0{-}3t^3\cos\theta_0\sin^2\theta_0)(R\cos\theta_0\,dt) + (3t^3\cos^2\theta_0\sin\theta_0{-}t^3\sin^3\theta_0)(R\sin\theta_0\,dt)\\
&= R^4(\cos^4\theta_0 - \sin^4\theta_0)\int_{t=0}^{1} t^3\,dt = \frac{1}{4}R^4\cos 2\theta_0.
\end{aligned}$$

(car $\cos^4\theta_0-\sin^4\theta_0 = \cos^2\theta_0(1-\sin^2\theta_0)-\sin^2\theta_0(1-\cos^2\theta_0) = \cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0 = \cos 2\theta_0$.) Puis (attention au sens de parcours) :

$$-\int_{\Gamma_3} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{1}{4}R^4\cos 2\theta_0$$

D'où $I = (\int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3})... = (1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})R^4\cos 2\theta_0 = \frac{3}{2}R^4\cos 2\theta_0$ comme précédemment.

Exercice 6.10 Calculer $I = \int_\Omega y^2\,dxdy$ où Ω est dans $y \geq 0$, limité supérieurement par $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin^2 t)\\ a\sin^2 t\end{pmatrix}$ pour $t \in [0,\pi]$. On appliquera Green–Riemann.

Exemple 6.11 Si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel (paragraphe 3.3), $\vec{f} = \vec{\text{grad}}\varphi$ pour φ une fonction C^2, alors sur une courbe fermée son travail est nul car $\text{rot}\vec{\text{grad}} = 0$.

On a déjà vu ce résultat au paragraphe 3.3 : $\int_\Gamma \text{grad}\varphi.d\vec{r} = \varphi(P_2)-\varphi(P_1)$ ne dépend que de la valeur aux extrémités qui sont égales dans le cas d'une courbe fermée.

Exercice 6.12 Soit Ω un domaine de frontière simple Γ. Exprimer $\int_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy$ à l'aide d'une intégrale curviligne $\int_\Gamma P(y)\,dx + Q(x)\,dy$ où $P(x,y) = P(y)$ ne dépend que de y et $Q(x,y) = Q(x)$ ne dépend que de x.

Réponse. Notons $\vec{f} = \begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}$. On doit avoir $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x^2+y^2$, i.e. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-x^2$. On suppose $P(x,y) = P(y)$ indépendant de x et $Q(x,y) = Q(x)$ indépendant de y. Dans ce cas, on a $P'(y)+y^2 = Q'(x)-x^2 = k$ constante (une fonction de y étant égale à une fonction de x). D'où les solutions générales à une constante près $P(y) = ky - \frac{y^3}{3}$ et $Q(x) = kx + \frac{x^3}{3}$.

Cependant, sur un contour fermé, on a $\int_\Gamma ky\,dx + kx\,dy = \int_\Gamma kd(xy)$ est l'intégrale d'un potentiel et est donc nul. Il reste $\int_\Omega (x^2+y^2)\,dxdy = \int_\Gamma \frac{x^3}{3}\,dy - \frac{y^3}{3}\,dx$.

Exercice 6.13 Démontrer la formule de la divergence en utilisant des coordonnées curvilignes intrinsèques parcourant Γ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Idem si on utilise des coordonnées non intrinsèques (dans ce cas "$ds = ||\vec{r}'(t)||\,dt$").

Exercice 6.14 Calculer l'aire sous une "arche" de cycloïde $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a(t-\sin t)\\ y(t) = a(1-\cos t)\end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ et $a > 0$ (limitée par l'axe des x).

Réponse. On paramètre Γ : bord inférieur, $y = 0$ et $x \in [0,2\pi a]$, bord supérieur $\vec{r}(t)$ pour t variant de $+2\pi$ à 0 (parcours dans le sens trigonométrique). Sur l'arche on a $x'(t) = y(t) = a(1-\cos t)$, et on se sert de $A = -\int_\Gamma y\,dx = -\int_{t=0}^{2\pi a} 0\,dx - \int_{t=2\pi}^{0} a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\int_{t=0}^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = 3\pi a^2$.

Remarque 6.15 Dans l'exercice précédent (6.14), l'arche est obtenue en faisant rouler une roue sur le sol "$y = 0$" : la trace d'une tache sur le pneu donne la cycloïde, donnée dans le repère mobile lié à la roue par $\begin{pmatrix} x(t)-at = -a\sin t\\ y(t)-a = -a\cos t\end{pmatrix}$ (noter qu'au voisinage de $t = 0$ y est une fonction croissante de t).

A quoi correspond l'équation $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) = a(t-\cos t) \\ y(t) = a(1-\sin t) \end{pmatrix}$? (Noter qu'au voisinage de $t=0$, y est une fonction décroissante de t et que $\begin{pmatrix} x(t)-at = -a\cos t \\ y(t)-a = -a\sin t \end{pmatrix}$.) Réponse : à une roue qu'on fait rouler sur le plafond "$y = 2a$". En effet, la courbe symétrique par rapport à l'axe $y=0$ (l'axe des x) est donnée par $\begin{pmatrix} x(t) = a(t-\cos t) \\ y(t) = -a(1-\sin t) \end{pmatrix}$. Effectuons une translation de $\frac{\pi}{2}$ en temps pour obtenir : $\begin{pmatrix} x(t-\frac{\pi}{2}) = a(t-\frac{\pi}{2}-\cos(t-\frac{\pi}{2})) \\ y(t-\frac{\pi}{2}) = -a(1-\sin(t-\frac{\pi}{2})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t-\frac{\pi}{2}) - a\sin t \\ -a - a\cos t \end{pmatrix}$. On prendra dans ce cas $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ pour le paramétrage de $\vec{q}(t)$ si on veut partir du point le plus haut (tache du pneu sur le plafond). ▪

Exercice 6.16 "Contre-exemple". Soit $\vec{v} = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r^2} \\ \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$, et soit C_R le cercle $C(\vec{0}, R)$. On notera D_R le disque de frontière C_R.

1- Calculer directement $\int_{C_R} \vec{v}.d\vec{r}$.

2- Appliquer la formule de Green–Riemann. Où est le problème ?

3- Soit $\Omega = D_R - D_\varepsilon$. Comment appliquer la formule de Green-Riemann à cet ouvert ne contenant pas 0, et conclure que $\int_{C_R} \vec{v}.d\vec{r} = +\int_{C_\varepsilon} \vec{v}.d\vec{r}$ pour l'orientation usuelle de ces cercles dans le sens trigonométrique ?

Réponse. 1- On trouve $\int_{C_R} \vec{v}.d\vec{r} = 2\pi$.

2- On a $\text{rot}\vec{v} = 0$ uniquement défini pour $\vec{r} \neq 0$: $\vec{v}$ n'est pas C^1 et donc la formule de Riemann n'a pas de sens : $\int_{D_R} \text{rot}\vec{v}(\vec{x})\,dxdy$ n'a pas de sens puisque $\vec{0} \in D_R$ et que $\text{rot}\vec{v}$ n'est pas défini en $\vec{0}$.

3- La frontière de Ω n'est pas simple : elle est constituée de 2 courbes distinctes, les cercles C_R et C_ε. On ne peut pas appliquer directement le théorème de Green-Riemann. On commence par considérer la courbe simple reliant ces deux cercles auxquels on a enlevé les morceaux correspondant à $x > 0$ et $y \in]-\eta, \eta[$ pour $\eta << \varepsilon$, et où on a rajouté les segments de droite horizontaux $y = \pm\eta$. Faire le dessin. Et conclure. Attention au sens de parcours. ▪

Exercice 6.17 Montrer (6.1) sachant (6.2) à l'aide de la fonction $g(x,y) = h(y,x)$. Commencer par montrer que si Γ_+ est la courbe $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [a,b]$, si Γ_+ est parcourue dans le sens trigonométrique, alors la courbe C_- définie par $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [a,b]$ est parcourue en sens inverse. Faire un dessin : dessiner par exemple Γ_+ le cercle "$x^2 + (y-2)^2 = 1$".

Réponse. La courbe C_- est symétrique de la courbe Γ_+ par rapport à la droite $y = x$, et C_- est parcourue dans le sens inverse. En effet, soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [a,b]$ est un paramétrage de Γ_+. Donc $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) = r_2(t) \\ q_2(t) = r_1(t) \end{pmatrix}$ pour $t \in [a,b]$ est un paramétrage de C_-. Posant $\vec{n}_{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} r_2'(t) \\ -r_1'(t) \end{pmatrix}$, on a $(\vec{n}_{\vec{r}}, \vec{r}\,')$ repère direct, et la paramétrisation dans le sens trigo implique que $\vec{n}$ est normale extérieure. Donc, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\vec{r}(t)+\varepsilon\vec{n}_{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t)+\varepsilon y'(t) \\ y(t)-\varepsilon x'(t) \end{pmatrix} \notin \Omega$ (est extérieur), alors que $\vec{r}(t)-\varepsilon\vec{n}_{\vec{r}}(t)$ est intérieur.

De même, posant $\vec{n}_{\vec{q}}(t) = \begin{pmatrix} q_2'(t) = r_1'(t) \\ -q_1'(t) = -r_2'(t) \end{pmatrix}$, $(\vec{n}_{\vec{q}}, \vec{q}\,')$ est repère direct, mais le point $\vec{q}(t)+\varepsilon\vec{n}_{\vec{q}}(t) = \begin{pmatrix} y(t)+\varepsilon x'(t) \\ x(t)-\varepsilon y'(t) \end{pmatrix}$ est symétrique (par rapport à la droite $y = x$) du point $\begin{pmatrix} x(t)-\varepsilon y'(t) \\ y(t)+\varepsilon x'(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t)-\varepsilon\vec{n}_{\vec{r}}(t)$ qui est intérieur, et est donc intérieur : la paramétrisation par $\vec{q}$ est inverse trigonométrique.

Puis avec $h(x,y) = g(y,x)$, si g est définie sur Ω alors h est définie sur D le symétrique de Ω par rapport à la droite $y = x$. Et on a, notant C_+ une paramétrisation de $\vec{q}([a,b])$ dans le sens trigonométrique :

$$\begin{aligned} \int_{C_+} h(q_1,q_2)\,dq_2 &= -\int_{C_-} h(q_1,q_2)\,dq_2 = -\int_{t=a}^{b} h(q_1(t),q_2(t))\,q_2'(t)\,dt \\ &= -\int_{t=a}^{b} g(q_2(t),q_1(t))\,q_2'(t)\,dt = -\int_{t=a}^{b} g(r_1(t),r_2(t))\,r_1'(t)\,dt \\ &= -\int_{\Gamma_+} g(r_1,r_2)\,dr_1. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Si on note $\vec{\varphi} : (x,y) \in D \to (u,v) = \vec{\varphi}(x,y) =^{\text{déf}} (y,x) \in \Omega$ le changement de variables donnant la symétrie par rapport à l'axe $y = x$, le jacobien de ce changement de variables est $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$, donc de valeur absolue $+1$, de même que le jacobien de la transformation inverse $\vec{\varphi}^{-1}$. Et on a $h(x,y) = (g \circ \vec{\varphi})(x,y) = g(u,v)$ et donc $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ quand $(u,v) = \vec{\varphi}(x,y) = (y,x)$, ce qui s'écrit encore $(\frac{\partial h}{\partial x} \circ \vec{\varphi}^{-1})(u,v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$, d'où :

$$\int_{(x,y)\in D} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,dxdy = \int_{(u,v)\in\Omega} \frac{\partial h}{\partial x}(\vec{\varphi}^{-1}(u,v))(1)\,dudv = \int_{(u,v)\in\Omega} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,dudv$$

Avec (6.2) on obtient $\int_{(x,y)\in D} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,dxdy = -\int_{\Gamma_+} g(u,v)\,du$, donc $= +\int_{C_+} h(x,y)\,dy$ grâce à (6.8). ■

On obtient immédiatement le corollaire :

Théorème 6.18 *Soit $\vec{f}$ une fonction $C^1(U;\mathbb{R}^2)$ où U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ (ouvert "sans trou"). $\vec{f}$ dérive d'un potentiel dans U ssi $\mathrm{rot}\vec{f} = 0$.*

Preuve. On sait déjà que si $\vec{f}$ dérive d'un potentiel, i.e. s'il existe $\varphi \in C^2(U;\mathbb{R}^3)$ telle que $\vec{f} = \vec{\mathrm{grad}}\varphi$, alors $\mathrm{rot}\vec{f} = 0$ (car "$\mathrm{rot}\vec{\mathrm{grad}} \equiv 0$").

Réciproquement. Supposons $\mathrm{rot}\vec{f} = 0$. Alors quelle que soit la courbe Γ régulière simple et fermée dans U, on a $\int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r} = \int_U \mathrm{rot}\vec{f}\,dxdy = 0$ grâce à la formule de Stokes applicable dans un ouvert simplement connexe. Et donc, U étant connexe, $\vec{f}$ dérive d'un potentiel, cf théorème 3.30. ■

6.2 Cas $\mathbb{R}^3$: formule de Stokes (ou du rotationnel)

On généralise la formule de Green–Riemann.

Soit une surface paramétrée Σ de $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$, pour $(u,v) \in [a,b]\times[c,d]$.

On suppose que Σ a un bord Γ (non vide). Ou si on préfère, on se donne une courbe Γ régulière, simple et fermée dans $\mathbb{R}^3$, et on se donne une surface régulière Σ s'appuyant sur Γ (exemple Γ est l'équateur et Σ est la demi-sphère "hémisphère nord").

Donc Γ admet un paramétrage : $\tilde{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) = x(u(t),v(t)) \\ \tilde{y}(t) = y(u(t),v(t)) \\ \tilde{z}(t) = z(u(t),v(t)) \end{pmatrix}$, de vecteur tangent $\tilde{\vec{r}}'(t) = \begin{pmatrix} d\tilde{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t) \\ d\tilde{y}(t) = \frac{\partial y}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}v'(t) \\ d\tilde{z}(t) = \frac{\partial z}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial z}{\partial v}v'(t) \end{pmatrix}$. Et on note :

$$d\tilde{\vec{r}} = \tilde{\vec{r}}(t)'\,dt.$$

On impose à l'orientation du bord de la surface d'être positive : si $\vec{n}(u,v)$ est le vecteur normal à Σ dans la paramétrisation $\vec{r}(u,v)$, le vecteur $\tilde{\vec{r}}'(t)$ tangent au bord est tel que la règle du tire-bouchon s'applique (i.e. $\vec{n}$ a même sens que $\tilde{\vec{r}}'(t) \wedge \vec{T}(t)$ où $\vec{T}(t)$ tangent à la surface pointe vers l'intérieur de celle-ci, i.e. le tire-bouchon avance dans le sens de $\vec{n}$). I.e, l'orientation du bord de la surface est positive si le repère $\big(\tilde{\vec{r}}'(t), \vec{T}(t), \vec{n}(u(t),v(t))\big)$ est direct, où $\vec{T}(t)$ est un vecteur tangent à la surface pointant vers l'intérieur de celle-ci.

Théorème 6.19 *(Formule de Stokes.) Soit $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$ (à valeurs scalaires) où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient Σ. Alors, pour une orientation positive du bord Γ de la surface Σ :*

$$\int_\Sigma (\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_2).\vec{d\sigma} = \int_\Gamma f\,\vec{e}_3.d\vec{r} \qquad (= \int_\Gamma f\,dz), \tag{6.9}$$

ainsi que les deux autres formules par permutation circulaire sur les indices.

Donc, si $\vec{f} \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$ (un champ de vecteurs), on a pour le travail de $\vec{f}$ le long de Γ :

$$\int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}.\vec{d\sigma} = \int_\Gamma \vec{f}.d\vec{r}, \tag{6.10}$$

(formule de Stokes ou formule du rotationnel), i.e. :

$$\int_\Sigma (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})n_1 + (\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x})n_2 + (\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})n_3\,d\sigma = \int_\Gamma f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz.$$

Preuve. Montrons (6.9).

1- On suppose que la surface est paramétrée par $(u,v)=(x,y)$, i.e. est du type $\vec{r}(x,y)=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z(x,y)\end{pmatrix}$ (facilite les calculs). D'où :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial z}{\partial x}\\ -\frac{\partial z}{\partial y}\\ 1\end{pmatrix}\quad (=\begin{pmatrix}-\vec{\text{grad}}z\\ 1\end{pmatrix}),$$

et donc :

$$\int_\Sigma(\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_1-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_2).\vec{d\sigma}=\int_\Sigma -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\,dxdy.$$

On suppose le bord Γ de Σ orienté positivement par le paramétrage $\tilde{\vec{r}}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(x(t),y(t))\end{pmatrix}$ pour $t\in[a,b]$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\vec{e}_3.\vec{dr}=\int_\Gamma f\,dz&=\int_{t=a}^b f(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\,(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}y'(t))\,dt,\\ &=\int_\Gamma f\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\int_\Gamma f\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.\end{aligned}$$

Soit $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))\,\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ la fonction définie dans le plan (x,y), et soit $\text{tr}(\Gamma)$ la trace de Γ (projection) sur le plan (x,y). Alors :

$$\int_{t=a}^b g(x(t),y(t))\,x'(t)\,dt=\int_{\text{tr}(\Gamma)}g\,dx=\int_\Gamma f\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dx,$$

et on peut appliquer le théorème de Green–Riemann à g, et sachant que $\frac{\partial g}{\partial y}=(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y})(\frac{\partial z}{\partial x})+f\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, on obtient :

$$\int_\Gamma f\,\frac{\partial z}{\partial x}\,dx=\int_{\text{tr}(\Gamma)}g\,dx=-\int_{\text{tr}(\Sigma)}\frac{\partial g}{\partial y}\,dxdy=-\int_\Sigma\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+f\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy.$$

(Où $\text{tr}(\Sigma)$ est la projection (l'ombre verticale) de Σ sur le plan horizontal (x,y).)

Et on a $\frac{\partial g}{\partial x}=(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x})(\frac{\partial z}{\partial y})+f\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, on obtient :

$$\int_\Gamma f\,\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=\int_{\text{tr}(\Gamma)}g\,dy=\int_{\text{tr}(\Sigma)}\frac{\partial g}{\partial x}\,dxdy=\int_\Sigma\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+f\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dxdy.$$

D'où, en faisant la somme :

$$\int_\Gamma f\,\vec{e}_3.\vec{dr}=\int_\Sigma\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\,dxdy$$

D'où (6.9). Enfin, par permutation circulaire, on obtient les autres relations, et en sommant les trois relations, on obtient (6.10).

2- Cas d'une surface générale. Exercice : démontrer (6.9).

Indications : posez $\vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix}$ et $g(u,v)=f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$. Montrer que $\int_\Sigma\vec{\text{rot}}\vec{f}.\vec{d\sigma}=\int_\Sigma(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u})\,dudv$. Quitte à partager le bord Γ en plusieurs morceaux (voir corollaire 3.16), revenir au cas où Γ admet un paramétrage en $(u(t),v(t))=(x(t),y(t))$, ou bien en $(u(t),v(t))=(y(t),z(t))$..., calculer $\int_\Gamma f\,\vec{e}_3.\vec{dr}$, et conclure. ∎

On obtient immédiatement :

Théorème 6.20 *Soit $\vec{f}$ une fonction $C^1(U;\mathbb{R}^3)$ où U est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ (ouvert "sans trou"). $\vec{f}$ dérive d'un potentiel dans U ssi $\vec{\text{rot}}\vec{f}=0$.*

Preuve. Similaire à la démonstration du théorème 6.18. ∎

Corollaire 6.21 *Si $\vec{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dérive d'un rotationnel $\vec{H}$, alors le flux de $\vec{J}$ à travers Σ est égal à la circulation de $\vec{H}$ le long de Γ :*

$$\vec{J} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{H} \quad \Rightarrow \quad \textit{flux}(\vec{J}) = \int_\Sigma \vec{J}.\vec{d\sigma} = \int_\Gamma \vec{H}.\,\vec{dr} = \textit{circulation}(\vec{H}).$$

En électromagnétisme, $\vec{H}$ est le champ magnétique et $\vec{J}$ est la densité de courant électrique.

Remarque 6.22 On retrouve bien sûr la formule de Green-Riemann dans le cas d'une surface horizontale où $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$ ne dépend que de (x,y). En effet, dans ce cas, $\vec{\mathrm{rot}}\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{rot}\vec{f} \end{pmatrix} = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\vec{e}_3$, l'élément de surface est $\vec{d\sigma} = dxdy\,\vec{e}_3$ (avec le paramétrage trigonométrique, la normale est verticale vers le haut), et $\vec{f}.\vec{dr} = f\,dx + g\,dy$. ∎

Exercice 6.23 Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{v}(x,y,z) = (2x-y)\vec{e}_1 - yz^2\vec{e}_2 - y^2z\vec{e}_3$ et Σ la demi-sphère supérieure "$x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$".

Réponse. On a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -yz^2 \\ -y^2z \end{pmatrix}$ et donc $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On paramètre la surface par $\vec{r}(\theta,\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$ et $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Et on a $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\theta,\varphi) = R\begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) = R\begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$, d'où $\vec{d\sigma} = R^2\cos\varphi\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi$.

D'où $\int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}.\vec{d\sigma} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = 2\pi R^2\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin2\varphi\,d\varphi = \pi R^2[\frac{-\cos2\varphi}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2$.

On paramètre Γ par $\vec{q}(t) = R\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi[$, et donc $\vec{dq} = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$. Avec $\vec{v}(\vec{q}(t)) = R\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où le travail $T(\vec{v},\vec{q}) = \int_0^{2\pi} R^2(2\cos t - \sin t)(-\sin t)\,dt = R^2(\int_0^{2\pi} -\sin2t\,dt + \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos2t}{2}\,dt) = \pi R^2$. ∎

Exercice 6.24 Soit Σ la demi-sphère supérieure "$x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \geq 0$", D sa projection sur le plan $(x0y)$, et Γ le bord de D orienté positivement. Et soit $\vec{v}(x,y,z) = \vec{e}_1 + x^2\vec{e}_3$. Calculer $I = \int_\Sigma \vec{v}.\vec{d\sigma}$ de trois manières différentes.

Réponse. 1- Calcul direct : surface $\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$ et $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$. D'où $\vec{d\sigma} = \begin{pmatrix} R^2\cos\theta\cos^2\varphi \\ R^2\sin\theta\cos^2\varphi \\ R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} d\theta d\varphi$. On a $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$. D'où $I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\theta\cos^2\varphi\,d\theta d\varphi + \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}(R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi)R^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta d\varphi = 0 + R^4\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi = R^4\pi[\frac{-\cos^4\varphi}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}}$, i.e. $I = \frac{R^4}{4}\pi$.

2- D est le disque $\begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\rho \in [0,R]$ et $\theta \in [0,2\pi]$ et $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$ dérive d'un rotationnel : $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}$ où $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = \frac{x^3}{3} \\ f_3(x,y,z) = y \end{pmatrix}$. Avec Stokes, on a donc $I = \int_\Sigma \vec{v}.\vec{d\sigma} = \int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}.\vec{d\sigma} = \int_\Gamma \vec{f}.\vec{dr} = \int_D \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}.\vec{d\sigma} = \int_D \vec{v}.\vec{d\sigma}$.

21- $I = \int_D \vec{v}.\vec{d\sigma}$: avec $dxdy = \rho\,d\rho d\theta$ et $\vec{d\sigma} = \vec{e}_3 dxdy$ on a $I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho d\theta = \frac{R^4}{4}\pi$.

22- $I = \int_\Gamma \vec{f}.\vec{dr}$: avec $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $t \in [0,2\pi]$ et donc $\vec{r}\,'(t) = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $I = \int_{t=0}^{2\pi}\frac{R^4}{3}\cos^4 t\,dt = \frac{R^4}{3}\int_{t=0}^{2\pi}(\frac{\cos2t+1}{2})^2\,d\theta = \frac{R^4}{3}\int_{t=0}^{2\pi}\frac{1}{4}(\cos^2(2t) + 2\cos2t + 1) = \frac{R^4}{4}\pi$. ∎

Exercice 6.25 Soit Σ le (demi-)cône "$z = \frac{1}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $z \le 3$" de frontière Γ, et soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -xyz \end{pmatrix}$. Calculer $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r}$ et calculer $\int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}.\vec{d\sigma}$. Vérifier la formule de Stokes. Pourquoi n'y-a-t-il pas de problème bien que la surface ne soit pas régulière (la normale n'est pas définie en $\vec{0}$) ?

Réponse. On a $\sqrt{x^2+y^2} = Rz$, i.e. à z constant, la courbe de niveau est un cercle de rayon Rz (le rayon du cercle à l'altitude z est proportionnel à cette altitude). Un paramétrage du cône est donc donné par : $\vec{r}(\theta,z) = \begin{pmatrix} zR\cos\theta \\ zR\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ pour $z \ge 0$ et $\theta \in [0,2\pi]$. Le bord Γ du cône limité par l'altitude z_0=3 est paramétré par exemple par $\vec{q}(\theta) = \vec{r}(\theta,z_0) = \begin{pmatrix} z_0R\cos\theta \\ z_0R\sin\theta \\ z_0 \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0,2\pi]$. Attention, problème éventuel d'orientation trigonométrique du bord du cône d'altitude z_0=3 : le vecteur normal $\vec{n}$ au cône est parallèle et de même sens que :

$$\vec{d\sigma} = \begin{pmatrix} -zR\sin\theta \\ zR\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} d\theta dz = zR \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -R \end{pmatrix} d\theta dz.$$

Et $\vec{q}\,'(\theta) = \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{n}(\theta,z_0) \wedge \vec{q}\,'(\theta)$ de même sens que $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est orienté le long du cône mais vers l'extérieur de celui-ci (vers le haut). Donc $\vec{q}$ est un paramétrage de Γ dans le sens inverse trigonométrique (voir règle du tire-bouchon). Pour vérifier la formule de Stokes, on calcule donc : $\int_\Gamma \vec{v}.d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ -z_0R\cos\theta z_0R\sin\theta z_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -z_0R\sin\theta \\ z_0R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = -\int_0^{2\pi} z_0^2R^2\,d\theta = -2\pi z_0^2R^2$. On a $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^2R\cos\theta \\ z^2R\sin\theta \\ 2 \end{pmatrix}$ quand $(x,y,z) = \vec{r}(\theta,z)$, d'où $\vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z).\vec{d\sigma} = z^3R^2(-\cos^2\theta+\sin^2\theta) - 2zR^2\,d\theta dz = -z^3R^2\cos(2\theta) - 2zR^2\,d\theta dz$, d'où $\int_\Sigma \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}(x,y,z).\vec{d\sigma} = 0 + \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{z_0} -2zR^2\,d\theta dz = -2\pi z_0^2R^2$. ▪

7 Formules de Gauss ou d'Ostrogradski ("surface – volume")

On note $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

7.1 Introduction

Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne un domaine Ω simple régulier : fermeture d'un ouvert simplement connexe de bord une surface Σ régulière. Exemple de la boule $\Omega = B(0,R)$ de centre $\vec{0}$ et de rayon R, de bord la sphère $\Sigma = S(0,R)$.

Et soit $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire sortant de Σ (i.e. si $\vec{r}(\vec{x})$ est sur Σ alors il existe h_0 tel que $\vec{r}+h\vec{n} \notin \Omega$ pour tout $h \le h_0$).

On notera $d\sigma$ l'élément de surface, $\vec{d\sigma} = \vec{n}d\sigma$ l'élément de surface vectoriel, et $d\Omega = dxdydz$ l'élément de volume.

7.2 Formule de Gauss (ou d'Ostrogradski ou de la divergence)

Théorème 7.1 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ (fonction à valeurs scalaires). Alors, pour $i = 1,2,3$:*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,d\Omega = \int_\Sigma f\,n_i\,d\sigma \qquad \left(= \int_\Sigma f\,\vec{e}_1.\vec{d\sigma}\right) \tag{7.1}$$

Preuve. La démonstration est semblable à celle de Green–Riemann, et se sert de (5.16).

Quitte à partager Ω en plusieurs morceaux, on considère Ω domaine à bord vertical de type $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ où $D = \mathrm{tr}(\Omega)$ est la projection de Ω sur le plan (x,y), et établissons le cas $i = 3$ (les autres sont traitées de manière similaire).

Sur la surface inférieure Σ_{inf} on a, en un point $\vec{r}(x,y)$:

$$\vec{d\sigma}.\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} (...) \\ -1 \end{pmatrix} .\vec{e}_3\, dxdy = -dxdy,$$

(la normale est orientée vers le bas pour être extérieure au volume, voir exemple 5.19) et donc :

$$\int_{\Sigma_{inf}} f\, \vec{e}_3.\vec{d\sigma} = -\int_{\Sigma_{inf}} f(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy.$$

Sur les surfaces latérales, $\vec{e}_3.\vec{d\sigma} = 0$ et aucun terme n'intervient. Et sur la surface supérieur Σ_{sup} on a :

$$\int_{\Sigma_{sup}} f\, \vec{e}_3.\vec{d\sigma} = +\int_{\Sigma_{sup}} f(x,y,\psi(x,y))\, dxdy.$$

Par ailleurs :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\, d\Omega = \int_D \int_{z=\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz\, dxdy = \int_D f(x,y,\psi(x,y)) - f(x,y,\varphi(x,y))\, dxdy.$$

De même lorsque $i = 1,2$, d'où le résultat (7.1). ∎

Corollaire 7.2 *Formule de la divergence : si $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$:*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\vec{f}\, d\Omega = \int_\Sigma \vec{f}.\vec{n}\, d\sigma \qquad (= \int_\sigma f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}). \tag{7.2}$$

Formule du rotationnel :

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{f}\, d\Omega = -\int_\Sigma \vec{f} \wedge \vec{n}\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}^3. \tag{7.3}$$

Formule d'intégration par parties, avec $g \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ (fonction à valeurs scalaires), pour $i = 1,2,3$:

$$\int_\Omega f\, \frac{\partial g}{\partial x_i}\, d\Omega = -\int_\Omega g\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\Omega + \int_\Sigma f\, g\, n_i\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Si de plus $f,g \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$: deuxième formule d'intégration par parties (on rappelle que $\Delta = \mathrm{div}(\vec{\mathrm{grad}})$) :

$$\int_\Omega (\Delta f)\, g\, d\Omega = -\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}} f.\vec{\mathrm{grad}} g\, d\Omega + \int_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n}\, g\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}, \tag{7.5}$$

où on a noté $\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{\mathrm{grad}} f.\vec{n}$.

Et formule de Green :

$$\int_\Omega (f\, \Delta g - g\, \Delta f)\, d\Omega = \int_\Sigma (f\, \frac{\partial g}{\partial n} - g\, \frac{\partial f}{\partial n})\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Remarque 7.3 Les formules (7.1) s'écrivent également (trois équations = formule du gradient) :

$$\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}} f\, d\Omega = \int_\Sigma f\, \vec{n}\, d\sigma \quad (= \int_\Sigma f\, \vec{d\sigma}) \quad \in \mathbb{R}^3. \tag{7.7}$$

Et les formules d'intégration par parties (7.4) s'écrivent également (trois équations) :

$$\int_\Omega f\, \vec{\mathrm{grad}} g\, d\Omega = -\int_\Omega g\, \vec{\mathrm{grad}} f\, d\Omega + \int_\Sigma f\, g\, \vec{n}\, d\sigma \quad \in \mathbb{R}^3. \tag{7.8}$$

∎

Exemple 7.4 Calculer sur la sphère $S = S(\vec{0}, R)$ l'intégrale $J = \int_S x^3\, dydz + y^3\, dxdz + z^3\, dxdy$.

Réponse. On a $J = \int_S \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} d\sigma$, voir (5.16). D'où avec le théorème de Gauss : $J = \int_B 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (3r^2)\, (r^2 \sin\varphi\, dr d\theta d\varphi) = \frac{12\pi}{5} R^5$. ∎

Exercice 7.5 Montrer que $\frac{1}{2}\int_\Sigma \cos(\vec{r},\vec{n})\,d\sigma = \int_\Omega \frac{d\Omega}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, quand $\Sigma = \partial\Omega$. Le calculer pour la sphère.

(Indication : le cosinus $\cos(\vec{a},\vec{b})$ est le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs et est donné par $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}\cdot\frac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$. Et on calculera $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}$.)

Réponse. On pose $\vec{r} = (x,y,z)$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La fonction $\frac{1}{r}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$ (l'élément de volume est $dxdydz = r^2\cos\varphi\,drd\theta d\varphi$), et $\int_\Omega \frac{d\Omega}{r}$ a un sens. On a $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{2}{r}$ en tout $\vec{r} \neq \vec{0}$, et donc la fonction $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$. D'où $\int_\Omega \frac{2}{r}d\Omega = \int_\Sigma \frac{\vec{r}}{r}.\vec{n}\,d\sigma$. ▪

Exercice 7.6 Montrer que $\int_\Sigma \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{||\vec{r}||}\,d\sigma = \int_\Omega \frac{d\Omega}{x^2+y^2+z^2}$, quand $\Sigma = \partial\Omega$. (On calculera $\mathrm{div}(\frac{\vec{r}}{r^2})$.)

Réponse. On pose $\vec{r} = (x,y,z)$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. La fonction $\frac{1}{r^2}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$ (l'élément de volume est $dxdydz = r^2\cos\varphi\,drd\theta d\varphi$), et $\int_\Omega \frac{d\Omega}{r^2}$ a un sens. On a $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}$ en tout $\vec{r} \neq \vec{0}$, et donc la fonction $\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r^2}$ est intégrable dans tout ouvert de $\mathbb{R}^3$. D'où $\int_\Omega \frac{1}{r^2}d\Omega = \int_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^2}.\vec{n}\,d\sigma$.

Remarque : le calcul est ici formel, car $\vec{f}$ n'est pas C^1, mais peut être justifié. ▪

Exercice 7.7 Montrer que si $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$ pour $\vec{w} \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, alors avec Σ surface fermée on a $\int_\Sigma \vec{v}.\vec{d\sigma} = 0$.

Réponse. Si $\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{w}$ alors $\mathrm{div}\vec{v} = 0$. ▪

Exercice 7.8 Soit $\vec{v}$ un champ de vecteurs (application de $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$) tel $\vec{v} \perp \vec{n}$ en tout point d'une surface Σ fermée, bord de Ω. Montrer que $\int_\Omega \vec{\mathrm{rot}}\vec{v}\,d\Omega = 0$. ▪

Exercice 7.9 Soit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = ||\vec{r}||$, soit $\vec{v}(x,y,z) = \vec{\mathrm{grad}}(\frac{1}{r})$, et soit Σ_R la sphère $S(\vec{0},R)$ de centre $\vec{0}$ et de rayon R. On notera B_R la boule contenue dans Σ..

Montrer que $\vec{v}(x,y,z) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ en tout point $\vec{r} = (x,y,z)$ non nul.

Calculer directement $\int_\Sigma \vec{v}.\vec{n}\,d\sigma$.

Montrer que $\mathrm{div}\vec{v}(x,y,z) = 0$ en tout point $\vec{r} = (x,y,z)$ non nul. Pourquoi la formule de la divergence est prise en défaut ?

Réponse. Les calculs de $\frac{\partial}{\partial x_i}((x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})$ donnent $\vec{v} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ pour $r \neq 0$.

Puis sur la sphère, on a $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, d'où $\vec{v}.\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2}$, et en passant en coordonnées sphériques, avec l'élément de surface $d\sigma = R^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$ il vient $\int_{\Sigma_R} \vec{v}.\vec{n}\,d\sigma = -\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\theta\,d\varphi = -4\pi$.

Puis la dérivée de la première composante de $\vec{v}$ par rapport à x donne $\frac{\partial}{\partial x}(-x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}) = -r^{-3} + \frac{3}{2}x2x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} = -r^{-3} + 3x^2r^{-5}$ en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$. D'où $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$. En particulier, ou aurait envie d'écrire $\int_{B_R} \mathrm{div}\vec{v}\,d\Omega = 0$: mais alors la formule de la divergence est fausse.

Mais cette formule n'est pas applicable car $\vec{v}$ n'est pas C^1 dans la boule Ω de frontière Σ, et en particulier $\int_{B_R} \mathrm{div}\vec{v}\,d\Omega$ n'a pas de sens ($\mathrm{div}\vec{v}$ n'est intégrable dans aucun ouvert contenant $\vec{0}$). ▪

Exercice 7.10 (Suite) On considère le volume $C = B_R - B_\varepsilon$ ou $0 < \varepsilon < R$, de bord $\Sigma_R \cup \Sigma_\varepsilon$. Et soit $\vec{v} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ pour $r \neq 0$. Vérifier que la formule de la divergence est applicable (attention au sens de $\vec{n}$). ▪

Exercice 7.11 Soit le problème de Dirichlet pour Ω ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ : trouver $u \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ tel que, la fonction $f \in C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R})$ étant donnée :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \overline{\Omega}, \\ u_{|\Sigma} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Montrer que ce problème ne peut admettre qu'une solution.

Réponse. S'il y a deux solutions u_1 et u_2, alors $w = u_1 - u_2$ satisfait au problème $-\Delta w = 0$ dans $\overline{\Omega}$ et $w_{|\Sigma} = 0$ sur Γ. D'où par intégration par parties, ayant au préalable multiplié par w :

$$0 = \int_\Omega (\Delta w)(w)\,d\Omega = -\int_\Omega \vec{\mathrm{grad}}w.\vec{\mathrm{grad}}w\,d\Gamma + 0.$$

D'où $||\vec{\mathrm{grad}}w|| = 0$, d'où $\vec{\mathrm{grad}}w = 0$, d'où $w =$ constante, et ayant w nul sur le bord, on déduit $w = 0$, i.e. $u_1 = u_2$. ▪

Exercice 7.12 Soit $\vec{f}(x,y,z) = (3x^2z^3, 9x^2yz^2, -4xy^2)$ Calculer le flux de $\vec{f}$ à travers S le bord du cube de sommets $(\pm1,\pm1,\pm1)$ en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Réponse. $\mathrm{div}\vec{f}(x,y,z) = 6xz^3 + 9x^2z^2$,

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} 6xz^3 + 9x^2z^2\,dxdydz = 2(6[\frac{x^2}{2}]_{-1}^{1}[\frac{z^4}{4}]_{-1}^{1} + 9[\frac{x^3}{3}]_{-1}^{1}[\frac{z^3}{3}]_{-1}^{1}) = 8.$$

Exercice 7.13 Prouvez le théorème d'Archimède : "tout corps plongé dans un fluide de densité constante subit une force égale au poids du volume de fluide déplacé".

Réponse. Soit Ω le volume occupé par le corps. Il est soumis à une force surfacique de pression $p(\vec{r}) = -\rho z(\vec{r})$ où ρ est la densité du fluide et au point $\vec{r}$ et z est la hauteur de fluide au dessus du point $\vec{r}$, avec un signe $-$ car on prend implicitement l'axe des z orienté vers le haut et l'origine des z à la surface du fluide (ainsi la pression est positive comme il se doit).

La force locale est $p\,\vec{n} = -\rho z\,\vec{n}$ en $\vec{r}$, et la force résultante est verticale :

$$\vec{F} = \int_\Sigma p\,\vec{n}\,d\sigma = \int_\Sigma -\rho z\,\vec{n}\,d\sigma = \begin{pmatrix} \int_\Sigma -\rho z\,n_1\,d\sigma \\ \int_\Sigma -\rho z\,n_2\,d\sigma \\ \int_\Sigma -\rho z\,n_3\,d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ F_3 = -\int_\Sigma \rho z\,n_3\,d\sigma \end{pmatrix}.$$

En effet, les deux premières composantes sont nulles : par exemple pour la première, en intégrant d'abord à hauteur constante, il vient $F_1 = \int_z \rho z(\int_{\Gamma(x,y)} n_1\,ds)\,dz$, et l'intégrale sur la courbe $\Gamma(x,y)$ est nulle. En effet notant $\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r_3(x,y) \end{pmatrix}$, on a $\vec{n} = \pm c\begin{pmatrix} -\vec{\mathrm{grad}}r_3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où $n_1 = -c\frac{\partial r_3}{\partial x}$ et $\int_{\Gamma(x,y)} n_1\,ds = -\int_{\Gamma(x,y)} c\frac{\partial r_3}{\partial x}ds = 0$ car la courbe $\Gamma(x,y)$ est fermée.

La fonction $\vec{f}(\vec{r}) = (0,0,\rho z)$ est $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ avec $\mathrm{div}\vec{f}(\vec{r}) = \rho$, et on peut appliquer le théorème de la divergence :

$$F_3 = -\int_\Omega \rho\,d\Omega.$$

Et cette force est égale au poids du volume de fluide déplacé.

A Annexe : différentiabilité et vecteurs tangents

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition A.1 Deux fonctions $\vec{f}$ et $\vec{g}$ de Ω dans $\mathbb{R}^m$ sont tangentes en un point $\vec{x}_0 \in \Omega$ si :

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x})||_{\mathbb{R}^m}}{||\vec{x} - \vec{x}_0||_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Définition A.2 On note $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Une fonction $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ a un (hyper-)plan tangent en $\vec{x}_0 \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $\vec{\ell} \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ tangente à $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$. I.e., s'il existe $\vec{\ell} \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ telle que la fonction $\vec{g}_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par :

$$\vec{g}_L(\vec{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{\ell}(\vec{x} - \vec{x}_0),$$

est tangente à $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.

S'il existe une telle $\vec{\ell}$, on dit que $\vec{f}$ est différentiable en $\vec{x}_0$. Dans ce cas, on note $\vec{\ell} = df(\vec{x}_0)$ ($\in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$), ce qui définit une fonctionnelle $df : \Omega \to L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Et f est dite C^1 si df est continue.

Définition A.3 Si $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $\vec{x}_0$, on appelle hyper-plan tangent en $\vec{x}_0$ le sous espace de $\mathbb{R}^m$ défini par $\mathrm{Im}(d\vec{f}(\vec{x}_0)) = d\vec{f}(\vec{x}_0)(\mathbb{R}^n)$ (espace image de $d\vec{f}(\vec{x}_0)$).

Dans le cas où $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^3$, un hyper-plan tangent (de $\mathbb{R}^3$) est appelé plan tangent.

Dans le cas où $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2$, un hyper-plan tangent (de $\mathbb{R}^2$) est appelé droite tangente.

Définition A.4 Si $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $\vec{x}_0$, un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ est dit tangent à $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ s'il est dans l'hyper-plan tangent, i.e. si $\vec{v} \in \mathrm{Im}(d\vec{f}(\vec{x}_0))$.

Exemple A.5 Pour une courbe régulière $\vec{r} : t \in [a,b] \to \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)$ et donc l'application linéaire en $t_0 \in]a,b[$ est

$\vec{\ell} : t \in]a,b[\to \vec{\ell}(t) = t\,\vec{r}\,'(t_0) = t \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.

Et $\mathrm{Im}(\vec{\ell})$ est la droite "$t \to t\,\vec{r}\,'(t_0)$" (qui passe par le point $\vec{0}$ et de vecteur directeur $\vec{r}\,'(t_0)$). Un vecteur tangent à la courbe $\vec{r}$ au point $\vec{r}(t_0)$ est donc un vecteur parallèle à $\vec{r}\,'(t_0)$. ▟

Cas particulier des courbes : pour $a < b$, $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et une courbe régulière $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en tout point $t_0 \in]a,b[$, i.e. il existe une application linéaire $\vec{\ell}_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ non nulle telle que $d\vec{r}(t_0) = \vec{\ell}_{t_0}$.

Ayant $]a,b[\subset \mathbb{R}$ de dimension 1, l'espace image $\mathrm{Im}(\vec{\ell}_{t_0}) = \vec{\ell}_{t_0}(\mathbb{R})$ est de dimension 1 et définit une droite : en effet, par linéarité, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\ell}_{t_0}(a) = a\vec{\ell}_{t_0}(1) \in \mathbb{R}^m,$$

i.e. tout vecteur $\vec{\ell}_{t_0}(a)$ de l'espace image est colinéaire au vecteur $\vec{\ell}_{t_0}(1)$. Donc, toute courbe régulière a en tout point une droite tangente et est parfaitement déterminée par son vecteur directeur tangent :

$$\vec{\ell}_{t_0}(1) = d\vec{r}(t_0)(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h} = \vec{r}\,'(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) \quad \in \mathbb{R}^m.$$

Et toutes ses notations peuvent être choisies indifféremment.

Dans le cours, on utilise la notation $\vec{r}\,'(t_0)$, qui correspond à l'usage : si $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}$ (formé des n fonctions scalaires $r_i :]a,b[\to \mathbb{R}$), la dérivée de $\vec{r}$ est donnée par la dérivée de ses n composantes : $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ \vdots \\ r_n'(t) \end{pmatrix}$.

B Annexe : primitive de $\cos^m$ et de $\sin^m$

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Exercice B.1 Calculer une primitive $\int (\cos^m t)(\sin^2 t)\,dt$. Puis calculer une primitive $\int \cos^{m+2} t\,dt$. Donner une relation pour les intégrales $\int_0^{2\pi} \cos^{m+2} t\,dt$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} t\,dt$

Réponse. On pose $u'(t) = \cos^m t \sin t$ de primitive $u(t) = -\frac{1}{m+1}\cos^{m+1} t$, et on pose $v(t) = \sin t$ de dérivée $v'(t) = \cos t$, pour l'intégration par parties (à une constante près) :

$$\int \cos^m t \sin^2 t\,dt = \int \frac{1}{m+1}\cos^{m+2} t - \frac{1}{m+1}\cos^{m+1} t \sin t.$$

Puis $\cos^{m+2} t = \cos^m t(1-\sin^2 t)$, d'où :

$$\int \cos^{m+2} t\,dt = \int \cos^m t\,dt - \int \frac{1}{m+1}\cos^{m+2} t + \frac{1}{m+1}\cos^{m+1} t \sin t,$$

d'où la primitive cherchée :

$$\int \cos^{m+2} t\,dt = \frac{m+1}{m+2}\int \cos^m t\,dt + \frac{1}{m+2}\cos^{m+1} t \sin t. \tag{B.1}$$

Si les bornes d'intégrations sont a et b du type 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ et de manière générale $k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$I_m = \int_a^b \cos^m t\,dt,$$

on a la relation de récurrence :

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m,$$

et donc :

$$\begin{cases} m \text{ pair : } I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2} I_0, \\ m \text{ impair : } I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3} I_1. \end{cases} \tag{B.2}$$

Cas $a = 0$ et $b = 2\pi$: on a $I_0 = \int_0^{2\pi} \cos^0 t\, dt = 2\pi$ et $I_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{m+2} t\, dt = 2\pi \frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{m+2} t\, dt = 0. \end{cases} \tag{B.3}$$

(On retrouve $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t+1}{2}\, dt = \pi$).
Cas $a = -\frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$: on a $I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t\, dt = \pi$ et $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = [\sin t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} t\, dt = \pi \frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} t\, dt = 2 \frac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3}. \end{cases} \tag{B.4}$$

Exercice B.2 Calculer une primitive $\int (\sin^n t)(\cos^2 t)\, dt$. Puis calculer une primitive $\int \sin^{m+2} t\, dt$. Donner une relation pour les intégrales $\int_0^{2\pi} \sin^{m+2} t\, dt$ et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} t\, dt$

Réponse. On pose $u'(t) = \sin^m t \cos t$ de primitive $u(t) = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} t$, et on pose $v(t) = \cos t$, de dérivée $v'(t) = -\sin t$, pour l'intégration par parties (à une constante près) :

$$\int \sin^m t \cos^2 t\, dt = \int \frac{1}{m+1} \sin^{m+2} t + \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} t \cos t.$$

Puis $\sin^{m+2} t = \sin^m t(1 - \cos^2 t)$, d'où :

$$\int \sin^{m+2} t\, dt = \int \sin^m t\, dt - \int \frac{1}{m+1} \sin^{m+2} t - \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} t \cos t,$$

d'où la primitive cherchée :

$$\int \sin^{m+2} t\, dt = \frac{m+1}{m+2} \int \sin^m t\, dt - \frac{1}{m+2} \sin^{m+1} t \cos t. \tag{B.5}$$

Si les bornes d'intégrations sont a et b du type 0, $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$ et de manière générale $k\frac{\pi}{2}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$I_m = \int_a^b \sin^m t\, dt,$$

on a la relation de récurrence :

$$I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m,$$

et donc :

$$\begin{cases} m \text{ pair : } I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2} I_0, \\ m \text{ impair : } I_{m+2} = \dfrac{(m+1)(m-1)...2}{(m+2)(m)...3} I_1. \end{cases} \tag{B.6}$$

Cas $a = 0$ et $b = 2\pi$: on a $I_0 = \int_0^{2\pi} \sin^0 t\, dt = 2\pi$ et $I_1 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{m+2} t\, dt = 2\pi \frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{m+2} t\, dt = 0. \end{cases} \tag{B.7}$$

(On retrouve $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{-\cos 2t+1}{2}\, dt = \pi$).
Cas $a = -\frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$: on a $I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t\, dt = \pi$ et $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = [\cos t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$:

$$\begin{cases} m \text{ pair : } \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} t\, dt = \pi \frac{(m+1)(m-1)...1}{(m+2)(m)...2}, \\ m \text{ impair : } \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2} t\, dt = 0. \end{cases} \tag{B.8}$$

Références

[1] Avez A. : *Calcul différentiel*. Masson, 1983.

[2] Hurley J. : *Calculus*. Wadsworth Publishing Company,S 1987.

[3] Lang S. : *Calculus of Several Variables*. Springer–Verlag, 1987.

[4] O'Neil P. : *Advanced Engineering Mathematics*. PWS, 1995.

[5] Strang G. : *Calculus*. Wellesley Cambridge Press, 1992.