TP3 - Filtrage d'image dans le domaine fréquentiel

Vincent Barra - Christophe Tilmant

2010-2011

1 Aspects théoriques

1.1 Introduction

Les filtres linéaires sont caractérisés, dans le domaine spatial (cf TP2), par leur réponse impulsionnelle ($h(t)$), et dans le domaine fréquentiel (dit aussi spectral ou de Fourier), par leur **fonction de transfert** ($H(f)$), qui sont transformées de Fourier l'une de l'autre ($H(f) = TF(h(t))$). De la même façon que pour les filtres spatiaux, on retrouve les notions de filtres lissants et réhausseurs de contours. Cependant dans le domaine fréquentiel ces notions sont plus facilement compréhensibles. En effet, le contenu fréquentiel (obtenu par l'utilisation de la transformée de Fourier) peut être décomposé en domaine de basses fréquences et de hautes fréquences. La première fait référence au domaine de faibles variations saptiales (les zones homogènes), tandis que la seconde fait référence aux fortes variations spatiales (les contours).
On va donc retrouver les filtres dits **passe-bas** qui atténuent ou éliminent les hautes fréquences dans le domaine de Fourier sans modifier les basses fréquences. Les composantes hautes fréquences caractérisant les contours et autres détails abrupts dans l'image, l'effet global du filtre est un lissage.
De la même manière, un filtre **passe-haut** atténue ou élimine les composantes basses fréquences. Du fait que ces fréquences sont responsables des variations lentes dans l'image comme le contraste global ou l'intensité moyenne, l'effet global de ce filtre est la réduction de ces caractéristiques et donc un renforcement apparent des contours. Le troisième type de filtres dits passe-bande élimine les composantes de fréquences intermédiaires.

1.2 La transformée de Fourier : Rappels (j'espère ...)

La transformation de Fourier projette une image dans un espace fréquentiel caractérisé par des fréquences spatiales f_x et f_y. Elle permet d'analyser les propriétés de l'image dans ce nouvel espace. La définition de base de la transformée de Fourier bidimensionnelle est donnée pour une image $I(x,y)$ continue, en la supposant à support infini :

$$\Gamma(f_x, f_y) = \iint I(x,y)e^{-j(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)}dxdy$$

La transformée de Fourier est une fonction bidimensionnelle dans l'espace des fréquences. étant donné que la transformée est une grandeur complexe, sa représentation graphique se fait :

- soit par module (appelé aussi spectre d'energie) et argument (appelé aussi phase)
- soit par parties réelle et imaginaire

Pour les images discrétisées, on exprime souvent les dimensions spatiales x et y en pixels. Les fréquences correspondantes seront exprimées en $pixel^{-1}$. La définition de la transformée reste la même.

A partir de la transformée inverse, il est possible de retrouver l'image originale :

$$I(x,y) = \iint \Gamma(f_x, f_y)e^{j(2\pi f_x x + 2\pi f_y y)}dxdy$$

Sur la figure 2 est représenté le module de la transformée de Fourier de la fonction porte bidimensionnelle. On reconnaît alors aisément la forme en sinus cardinal du résultat. De plus il est possible

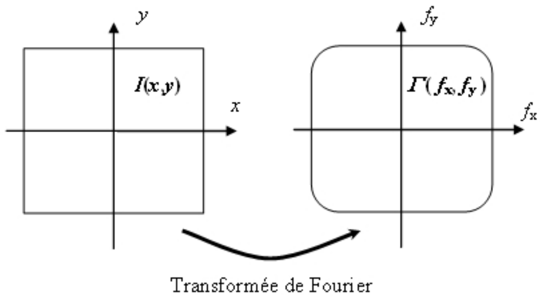

FIGURE 1 – Passage du domaine spatial au domaine fréquentiel

d'identifier l'orientation de la forme. En effet dans le second jeu de figures, cette même fonction est tournée de 45 degrés et on s'aperçoit que ce changement de variations spatiales se répercute sur le contenu fréquentiel en terme d'orientation.

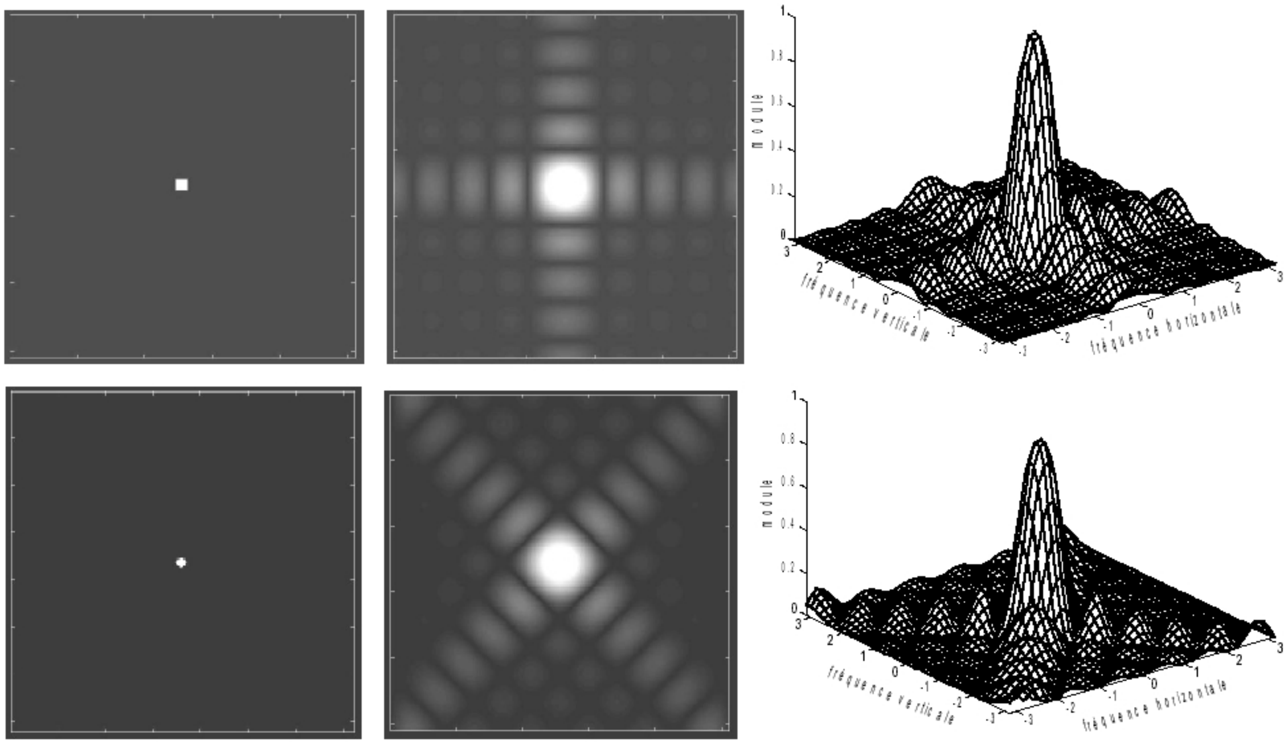

FIGURE 2 – Exemple de spectres d'amplitude dans le cas de la fonction porte pour 2 orientations différentes

Sur la figure 3, on remarque la présence d'énergie dans des directions particulières ; ce phénoméne est caractéristique de la présence de lignes obliques ou de bords, dont la décomposition fréquentielle est a large spectre (f grand dans la direction perpendiculaire à la ligne).

Le fait de travailler dans le domaine fréquentiel d'une image possède de nombreuses applications en traitement d'images (filtrage, analyse de texture, compression).

1.3 Le filtrage fréquentiel

1.3.1 Principe

Le principe du filtrage en fréquences d'une image est simple : prendre la TF de l'image à filtrer, multiplier le spectre obtenu par la fonction de transfert du filtre, puis prendre la TF inverse pour produire

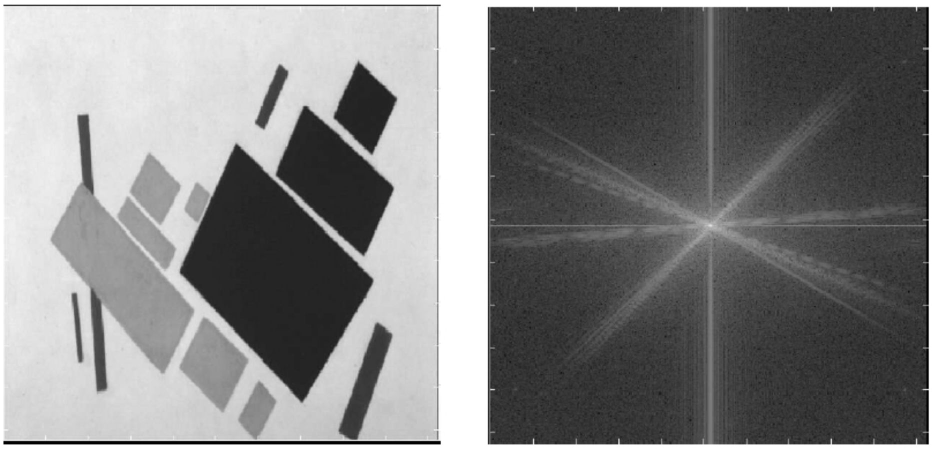

FIGURE 3 – Spectre d'amplitude d'une image réelle

l'image filtrée. Le lissage par réduction du contenu hautes fréquences ou le rehaussement de contours par augmentation des composantes hautes fréquences vis à vis des basses fréquences proviennent de concept directement reliés à la transformée de Fourier. En fait, l'idée de filtrage linèaire est beaucoup plus intuitive dans le domaine fréquentiel. En pratique, les masques spatiaux sont utilisés beaucoup plus que la TF du fait de leur simplicité d'implémentation et de leur rapidité. Mais la compréhension des phénoménes dans le domaine fréquentiel est indispensable pour résoudre des problémes difficilement appréhendables avec des techniques spatiales.

1.3.2 Filtre passe-bas idéal

L'équation générale du filtrage en fréquence est la suivante :

$$G\left(f_x, f_y\right) = H\left(f_x, f_y\right).F\left(f_x, f_y\right)$$

F et G respectivement les spectres en entrée et en sortie et H la fonction de transfert du filtre. Dans la suite, nous allons considérer des filtres qui affectent les parties réelle et imaginaire du spectre de manière identique. Ces filtres conservent donc la phase de la transformée. Un filtre passe-bas idéal satisfait la relation :

$$H(f_x, f_y) = \begin{cases} 1 \text{ si } D(f_x, f_y) \leq D_0 \\ 0 \text{ si } D(f_x, f_y) > D_0 \end{cases}$$

où D_0 constante positive et $D(f_x, f_y)$ distance du point (f_x, f_y) à l'origine du plan des fréquences :

$$D(u, v) = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

La figure 4 est une représentation perspective de $H(f_x, f_y)$.

C'est un filtre idéal parce que toute les fréquences à l'intérieur d'un cercle de rayon D_0 sont restituées sans atténuation, alors que toutes les autres sont annulées. Les filtres passe-bas considérés dans ce chapitre ont une symétrie radiale, il suffit donc de connaître le profil sur un rayon. L'inconvénient du filtre passe-bas idéal est qu'il introduit des rebonds dans le domaine spatial : en effet, sa réponse impulsionnelle n'est autre que la fonction de Bessel d'ordre 1 (TF inverse de la fonction de transfert).

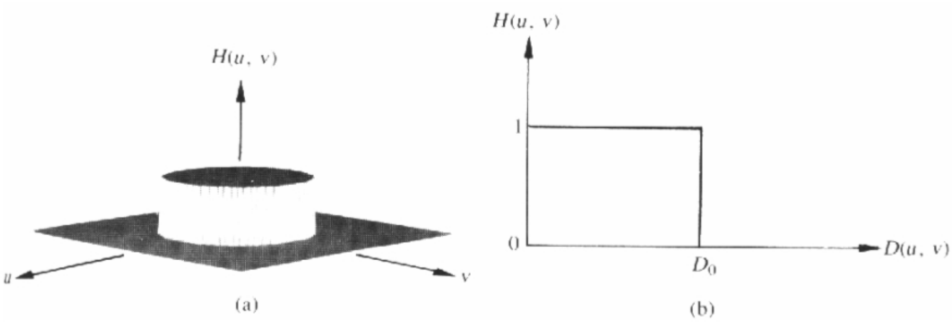

FIGURE 4 – Fonction de transfert du filtre passe bas idéal

1.3.3 Filtre de Butterworth

Le filtre de Butterworth d'ordre n et de fréquence de coupure située à D_c de l'origine est défini par la relation :

$$H(f_x, f_y) = \frac{1}{1 + [D(f_x, f_y)/D_0]^{2n}}$$

où D_0 est lié à la fréquence de coupure du filtre. Au contraire du filtre passe-bas théorique, le filtre

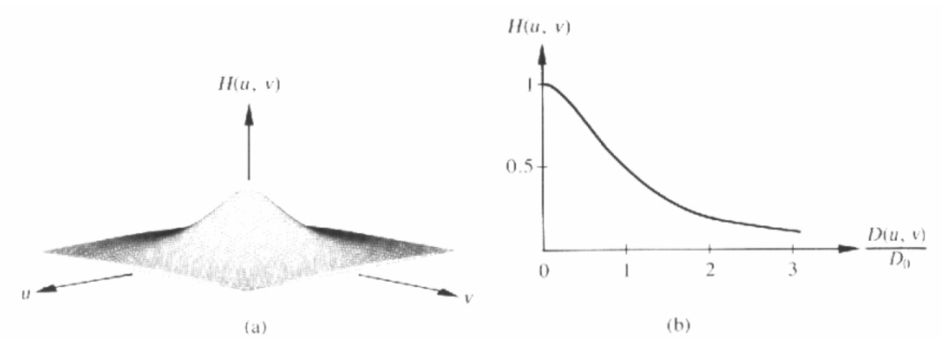

FIGURE 5 – Filtre passe bas de Butterworth

de Butterworth ne présente pas une coupure franche entre les fréquences basses et hautes. En général, on définit la fréquence de coupure au point où la fonction de transfert passe en dessous de 1/2 du maximum (équivalent à -3dB en échelle logarithmique). On peut modifier l'équation précédente de manière à l'exprimer en fonction de la fréquence de coupure D_c :

$$H(f_x, f_y) = \frac{1}{1 + [\sqrt{2} - 1][D(f_x, f_y)/D_c]^{2n}}$$

Les images filtrées présentes moins de rebonds que dans le cas du filtre idéal. De plus, le taux de lissage varie plus lentement lorsque la fréquence de coupure D_c diminue.

1.3.4 Le filtrage Gaussien

Le filtre Gaussien est le filtre qui possède dans le cas isotrope la réponse impulsionnelle :

$$h\left(x, y\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

On montre aisément que celui-ci possède une fonction de transfert du type :

$$H\left(f_x, f_y\right) = 2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2\left(f_x^2+f_y^2\right)}$$

Dans le cas d'un bruit additif gaussien ce filtre est l'opération optimale pour le supprimer.

2 Partie pratique

2.1 Travail demandé

Vous trouverez sur http ://ent.univ-bpclermont.fr/ dans la rubrique "Ressources Pédagogiques" ce sujet, ainsi qu'un squelette du TP.

- Dans un premier temps il vous est demandé de créer une image à partir du module de la transformée de Fourier d'une première image ("clown.bmp") et de l'argument de la transformée de Fourier d'une deuxième image ("gatlin.bmp"). Qu'en concluez vous ?
- Vous avez à votre disposition une image de Lena tramée ("lena_tramee.bmp"). A priori, est-t-il possible de séparer l'image de la trame ? Si oui, pourquoi ? Mettez en oeuvre une méthode basée sur du filtrage fréquentiel pour arriver à vos fins.
- Mettez en oeuvre une procédure pour effectuer un filtrage Gaussien de l'image avec pour paramètre l'écart-type **spatial** du filtre. Pour tester votre procédure vous avez à votre disposition la traditionnelle image "lena.bmp" que vous bruiterez à votre guise.

2.2 Quelques fonctions utiles

Vous trouverez dans la référence de Cimg la description complète des fonctions suivantes :

- get_FFT : qui permet de calculer la transformée de Fourier
```
CImgList< typename cimg::largest<T, float >::type >
               get_FFT (const bool inverse=false) const
```
- get_noise : qui permet de bruiter une image
```
CImg  get_noise (const double sigma=-20, const unsigned int ntype=0) const
```

3 Références

[1] J.P. Cocquerez and S. Philipp, Analyse d'images : Filtrage et segmentation, Masson, 1995
[2] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, Digital Image Processing, Addison-Wesley, 1992
[3] W. K. Pratt, Digital Image Processing, Wiley Interscience, 2001
[4] The Quantitative Imaging Group, An interactive image processing course