Homologie, théorèmes de Hurewicz et approximations

jeudi 7 mars 2019 15:42

Objectifs :

Dans Top : sur un corps $\mathbb{K}$,

Thm Toute approximation CW $A \xrightarrow{\sim} X$ possède au moins $b_d(X) = \dim H_d(X;\mathbb{K})$ d-cellules
Si X est splt cx, alors ces bornes sont atteintes

① Structures de modèle

Rappels

$\mathcal{S}$: catégorie simpliciale bicomplète, sym $\otimes$
+ structure de modèle à engendrement cofibrant, $\mathbb{1}$ est cof
$\otimes : \mathcal{S}^2 \to \mathcal{S}$ et $(-)\cdot(-) : sSet \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ sont des bifoncteurs de Quillen
& les équ d'htpie sont des équ faibles

ex $sSet$, Top, $sMod_{\mathbb{K}}$

Rq Si $\mathcal{S}$ vérifie les axiomes, alors $\mathcal{S}_* = * \downarrow \mathcal{S}$ aussi

Structure projective

$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ où $\mathcal{C}$ est une cat modèle

$\rightsquigarrow$ structure proj sur $\mathcal{D}$: $\xrightarrow{\sim}$ & $\twoheadrightarrow$ créés par G

ex : $sSet \rightleftarrows sMod_{\mathbb{k}}$

⚠ $\otimes$ noté $\oplus$

$\mathcal{G}$: petite catégorie sym monoïdal $\quad \mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

$\operatorname{ob}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ induit $\prod_{\mathcal{G}} \mathcal{S} \rightleftarrows \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ adj

Lemme Si $\mathcal{G}$ est $\otimes$ fermée, alors la structure projective sur $\mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ est une structure modèle

$\mathcal{O}$: opérade Σ-cofibrante, $\mathcal{O}(0) = \emptyset$
& augmentation $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{1}$ (mφ de monoïdes)

Thm Pour la structure projective, $Alg_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ forme une catégorie modèle (sous conditions ...)

Foncteurs dérivés

$F \dashv G$ est une adj de Quillen si F préserve $\hookrightarrow$ & $\overset{\sim}{\hookrightarrow}$

$\rightsquigarrow \mathbb{L}F = F \circ \Gamma$

$\hookrightarrow$ remplacement cof

Rq En fait on a juste besoin de $F(\text{cof} \xrightarrow{\sim} \text{cof}) \subset \xrightarrow{\sim}$

ex Soit $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ un mφ de monades
$\Rightarrow Alg_{\mathcal{O}}\mathcal{C} \underset{\varphi^*}{\overset{\varphi_*}{\rightleftarrows}} Alg_{\mathcal{O}'}\mathcal{C}$ adj de Quillen

$\Rightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\mathcal{C} \underset{\varphi^*}{\overset{\varphi_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}'}\mathcal{C}$ adj de Quillen

ex Indécomposables

$Q^{\mathcal{O}} : \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_*$ est ε_* où $\underset{\text{augmentation}}{\varepsilon : \mathcal{O} \longrightarrow +}$

$\Rightarrow$ on peut déf $\mathbb{L}Q^{\mathcal{O}}$

② Homologie des $\mathcal{O}$-algèbres

Chaînes

Foncteur de chaîne : foncteur $C_* : \mathcal{S} \longrightarrow Ch_{\mathbb{k}}$ ($\mathbb{Z}$-gr, struct proj)

tq
- il existe $C_*(X) \otimes C_*(Y) \longrightarrow C_*(X \times Y)$ (EZ)
  lax-monoidal, q iso si X, Y cof
- $C_*(- \times \mathbb{1}) : \mathrm{Set} \longrightarrow Ch_{\mathbb{k}}$ est $\simeq$ au foncteur usuel
- C_* préserve les objets cof, les eqv entre eux, les hocolim

lemme Si C_* est un tel foncteur, alors on peut déf $\widetilde{C}_* : \mathcal{S}_* \longrightarrow Ch_{\mathbb{k}}$ par $\widetilde{C}_*(X) = C_*(X) / C_*(\mathbb{t})$

Rq $C_*(\mathring{\mathbb{i}}) \simeq 0$ car $\mathring{\mathbb{i}} = \emptyset \times \mathbb{1}$

Homologie dans $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

On fixe C_*

Pour $X \in \mathcal{S}$, on déf $H_*(X) = H_*(\mathbb{L}C_*(X))$

Plus généralement, $H_*(X;A) = H_*(\mathbb{L}C_*(X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{k}} A)$

$\hookrightarrow \mathbb{k}$-mod

homologie rel de $X \xrightarrow{f} Y$

$H_*(Y,X;A) = H_*(\text{cône}(\mathbb{L}C_*(X)\otimes^{\mathbb{L}} A \to \mathbb{L}C_*(Y)\otimes^{\mathbb{L}} A))$

Pour $X \in \mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

$H_{g,d}(X;A) = H_d(X_g;A)$

Pour $X \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$:

$H^{\mathcal{O}}_{g,d}(Y,X;A) = H_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathbb{L}}Y, Q^{\mathcal{O}}_{\mathbb{L}}X;A)$

⚠ $H^{\mathcal{O}}_{g,d}(X;A) \neq H_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathbb{L}}X;A)$

$= H^{\mathcal{O}}_{g,d}(f_X;A) \cong \tilde{H}_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathbb{L}}X;A)$

$f_X : F^{\mathcal{O}}(\mathring{\mathbb{1}}) \longrightarrow X$

③ Approximations CW

Connectivité

Connectivité abstraite sur $\mathcal{G}$

$=$ foncteur $c : \mathcal{G} \longrightarrow [-\infty, \infty]$

$= $ foncteur $c : \mathcal{G} \longrightarrow [-\infty, \infty]_{\geq}$

⚠ $x \to y$ si $x \geq y$

monoïdal avec $\infty + (-\infty) = \infty$

$[-\infty, \infty]_{\geq}^{\mathcal{G}}$ est sym mon avec la convolution de Day :

$$(c * c')(g) = \inf \{ c(a) + c'(a') \mid \mathcal{G}(a \oplus a', g) \neq \emptyset \}$$

unité : $\mathbb{1}_{conv}(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists\, \mathbb{1}_{\mathcal{G}} \longrightarrow g \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$

$f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ est c-connectif si

$$H_{g,d}(f; \mathbb{K}) = 0 \quad \text{si } d < c(g)$$

lemme Si f est c_f-connectif et g est c_g-connectif alors $g \circ f$ est $(\min(c_f, c_g))$-connectif

lemme Si X & Y sont cof alors $X \otimes Y$ est $c_X * c_Y$-connectifs

Thm de Hurewicz

Désormais, $\mathcal{G}$ est un gpd artinien, i.e. il existe un foncteur "rang" $r : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq}$ lax monoïdal tq si $g \in \mathcal{G}$ n'est pas $\otimes$-inv, alors $r(g) > 0$ (ie $g \notin \mathcal{G}^{\times}$)

(ie $g \notin \mathcal{G}^\times$

Intuition : $\omega(g) = \sup\{ n \mid g \cong g_1 \oplus \cdots \oplus g_n \,,\, g_i \notin \mathcal{G}^\times \}$

$R \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$ est réduite si elle est cof et elle est d-connective où $d(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in \mathcal{G}^\times \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Fixons $f : R \to S$ dans $\mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C})$, R, S réduites

$\mathcal{O}(1)$ est un monoïde augmenté dans $\mathcal{C}$

$\Longrightarrow H_{*,0}(\mathcal{O}(1))$ est un monoïde augmenté dans $\mathrm{Mod}_{\mathbb{K}}^{\mathcal{G}}$

$= \Lambda$

L'unité de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{K}}^{\mathcal{G}}$ est $\mathbb{K}[\mathbb{1}] = \mathbb{K}[\mathcal{G}(\mathbb{1}_{\mathcal{G}}, -)]$

Alors $H_{*,d}(R)$ est un Λ-module

- $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} R \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} S \end{array}$ induit $H_{g,d}(R,S) \longrightarrow H_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} R, Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)} S)$

- $\mathcal{O}(1) \otimes R \longrightarrow R \longrightarrow Q^{\mathcal{O}(1)} R$ se factorise par $\varepsilon : \mathcal{O}(1) \to \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$

$\Longrightarrow$ le mℓ $H_{*,d}(R;\mathbb{K}) \longrightarrow H_{*,d}(\mathbb{L}Q^{\mathcal{O}(1)} R;\mathbb{K})$

se factorise par $\mathbb{K}[\mathbb{1}] \otimes_{\Lambda} H_{*,d}(R;\mathbb{K}) \longrightarrow H^{\mathcal{O}(1)}_{*,d}(R;\mathbb{K})$

Thm Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathcal{G}$. Si $H_{g',d'}(S,R) = 0$

Thm Soit $d \in \mathbb{Z}$ et $g \in \mathcal{G}$. Si $H_{g',d'}(S,R) = 0$ pour tout (g', d') vérifiant $w(g') < w(g)$ et $d' < d$, alors

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[1] \otimes_{\Lambda_g} H_{g,d}(S,R) \arrow[r] \arrow[d] & H^{\mathcal{O}}_{g,d}(S,R) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\ \mathbb{K}[1] \otimes_{\Lambda_g} H_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}R, Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}S) \arrow[r] & H^{\mathcal{O}(1)}_{g,d}(Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}S, Q^{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(1)}R) \end{tikzcd}$$

est un iso

cor Sous hypothèses suppl,

Si $H^{\mathcal{O}}_{g,d}(S,R) = 0$ $\forall d < d'$, alors $H_{g,d}(S,R) = 0$ $\forall d < d'$

cor Si $\mathbb{L}Q^{\mathcal{O}}(f)$ est une équ en homologie, alors f aussi

cor Si f est pointée semistable, alors il existe une approx CW de f minimale

càd $R \longrightarrow \operatorname{colim} sk\, f \xrightarrow{\sim} S$

$sk\, f \in \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leq})$ possède $\dim H_{g,d}(f;\mathbb{K})$ (g,d) - $\mathbb{C}$

[Sur un corps!]