Espaces de configuration de variétés compactes

Najib Idrissi

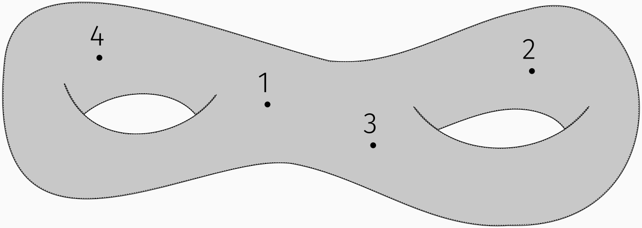
Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Laboratoire Paul Painlevé

But

Étudier les espaces de configuration des variétés :

$$\mathrm{Conf}_k(M) := \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}$$



Idée

Utiliser la « formalité des opérades E_n » : résultats pour $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

Modèles

On se place dans le cadre des modèles rationnels/réels :

$$A \simeq \Omega^*(M) \text{ « formes sur } M \text{ »}$$ (de Rham, polynomiales par morceaux…)

où A est une CDGA « explicite »

algèbre différentielle graduée commutative

M simplement connexe $\implies$ A contient tout le type d'homotopie rationnel/réel de M

On cherche une CDGA $\simeq \Omega^*(\mathrm{Conf}_k(M))$ construite à partir de A

$\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ est un espace « formel » sur $\mathbb{Q}$:

$$H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \Omega^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$$

$\implies$ détermine entièrement son type d'homotopie $/\mathbb{Q}$

Théorème (Arnold 1969, Cohen 1976)

- $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = S(\omega_{ij})_{1 \le i \ne j \le k}/I$
- $\deg \omega_{ij} = n - 1$
- $I = \big(\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}\,,\ \omega_{ij}^2 = 0\,,\ \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0\big)$

Modèles à dualité de Poincaré

CDGA à dualité de Poincaré (A, ε) (exemple : $A = H^*(M)$)

- A : CDGA connexe de type fini ;
- $\varepsilon : A^n \to \mathbb{k}$ t.q. $\varepsilon \circ d = 0$;
- t.q. $A^k \otimes A^{n-k} \to \mathbb{k}$, $a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$ est non-dégénéré

Théorème (Lambrechts–Stanley 2008)

Toute variété simplement connexe admet un tel modèle

$$\begin{tikzcd} \Omega^*(M) \arrow[dr, "\int_M"'] & \cdot \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \exists A \arrow[dl, "\exists\varepsilon"] \\ & \mathbb{k} & \end{tikzcd}$$

Remarque

D'après un résultat de Longoni–Salvatore (2005), $\exists L \simeq L'$ non simplement connexe t.q. $\mathrm{Conf}_k(L) \not\simeq \mathrm{Conf}_k(L')$ $\forall k \geq 2$.

Le modèle de Lambrechts–Stanley

$\mathsf{G}_A(k)$ modèle conjectural de $\mathrm{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$

$\Delta_{ij} := \{x_i = x_j\}$

- « Générateurs » : $A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k}$
- Relations :
  - Relations d'Arnold ; $(\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}\,, \omega_{ij}^2 = \omega_{ij}\,\omega_{jk} + \omega_{jk}\,\omega_{ki} + \omega_{ki}\,\omega_{ij} = 0)$
  - $p_i^*(a) \cdot \omega_{ij} = p_j^*(a) \cdot \omega_{ij}$. $(p_i^*(a) := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$
- $d\,\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A) \rightarrow$ tue le dual de $[\Delta_{ij}]$.

Théorème (Lambrechts–Stanley)

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathrm{Conf}_k(M)) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathsf{G}_A(k))$$

Premiers exemples

$$\mathsf{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1\le i<j\le k}/\text{relations}\,,\ d\,\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A))$$

$$\mathsf{G}_A(0) = \mathbb{Q} \to \ \text{modèle de } \mathrm{Conf}_0(M) = \{\varnothing\} \quad \checkmark$$

$$\mathsf{G}_A(1) = A \to \ \text{modèle de } \mathrm{Conf}_1(M) = M \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{G}_A(2) &= \left(\frac{A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes A \otimes \omega_{12}}{1 \otimes a \otimes \omega_{12} \equiv a \otimes 1 \otimes \omega_{12}}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1 \right) \\
&\cong (A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes_A A \otimes \omega_{12},\ d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\
&\cong (A \otimes A \otimes 1 \ \oplus \ A \otimes \omega_{12},\ d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\
&= \mathrm{cone}(A \xrightarrow{\cdot \Delta_A} A^{\otimes 2}) \\
&\xrightarrow{\sim} A^{\otimes 2}/(\Delta_A)
\end{aligned}$$

Historique de G_A

1969 [Arnold, Cohen] $H^*(\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = \mathsf{G}_{H^*(D^n)}(k)$

1978 [Cohen & Taylor] $E^2 = \mathsf{G}_{H^*(M)}(k) \implies H^*(\mathrm{Conf}_k(M))$

~1994 Pour les variétés complexes projectives lisses ($\implies$ Kähler) :

- [Kříž] $\mathsf{G}_{H^*(M)}(k)$ modèle de $\mathrm{Conf}_k(M)$
- [Totaro] La SS de Cohen–Taylor s'effondre

2004 [Lambrechts & Stanley] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\mathrm{Conf}_2(M)$ si M est 2-connexe

~2004 [Félix & Thomas, Berceanu & Markl & Papadima] $\mathsf{G}^\vee_{H^*(M)}(k) \cong$ page E^2 de la SS de Bendersky–Gitler $\implies H^*(M^{\times k}, \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij})$

2008 [Lambrechts & Stanley] $H^*(\mathsf{G}_A(k)) \cong_{\Sigma_k-\mathsf{gVect}} H^*(\mathrm{Conf}_k(M))$

2015 [Cordova Bulens] $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$ modèle de $\mathrm{Conf}_2(M)$ si $\dim M = 2m$

Théorème

Soit M une variété lisse, compacte, sans bord, simplement connexe, de dimension ≥ 4. Alors $\mathsf{G}_A(k)$ est un modèle sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Conf}_k(M)$ pour tout $k \geq 0$.

Corollaire

Le type d'homotopie réel de $\mathrm{Conf}_k(M)$ ne dépend que du type d'homotopie réel de M :

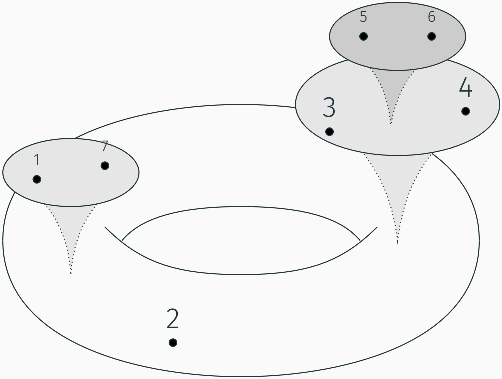
$$M \simeq_{\mathbb{R}} N \implies \mathrm{Conf}_k(M) \simeq_{\mathbb{R}} \mathrm{Conf}_k(N).$$

Idée de la preuve

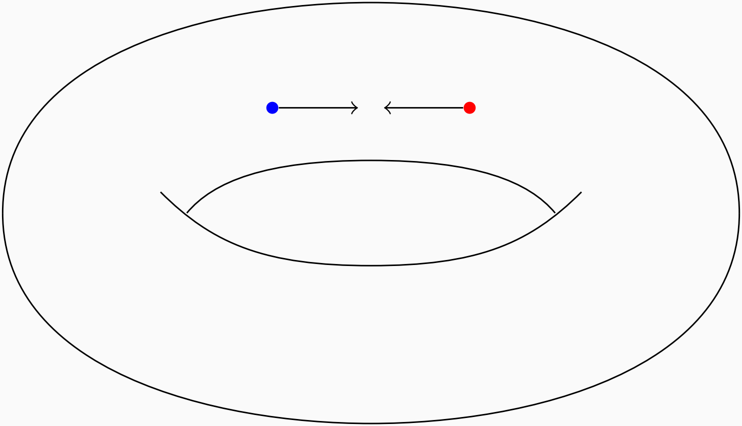
Idée

Étudier $\{\mathrm{Conf}_k(M)\}_{k\geq 0}$: plus de structure $\to$ module sur une opérade

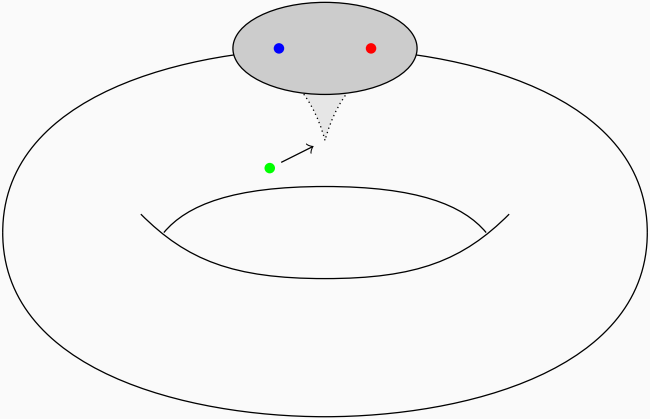
Compactification de Fulton–MacPherson $\mathrm{Conf}_k(M) \xhookrightarrow{\sim} \mathsf{FM}_M(k)$



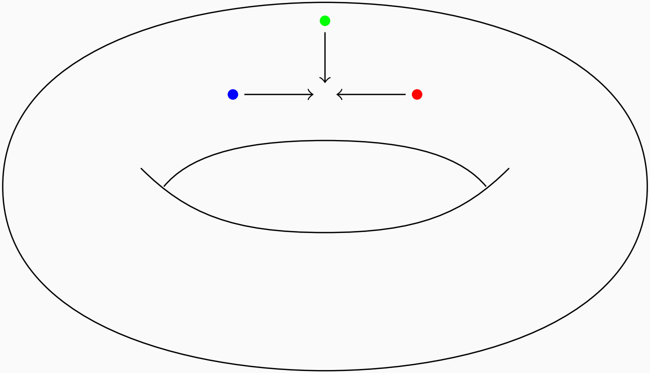
Animation #1



Animation #2

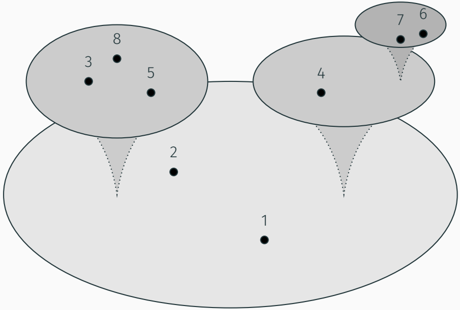


Animation #3



Compactification de $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

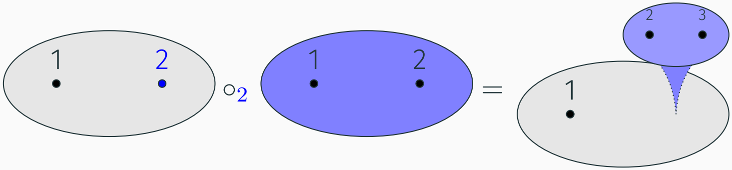
On a aussi $\mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \overset{\sim}{\hookrightarrow} \mathtt{FM}_n(k)$



(+ normalisation parce que $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact)

Opérades

$\mathsf{FM}_n = \{\mathsf{FM}_n(k)\}_{k\geq 0}$ est une opérade : on peut « composer » les configurations



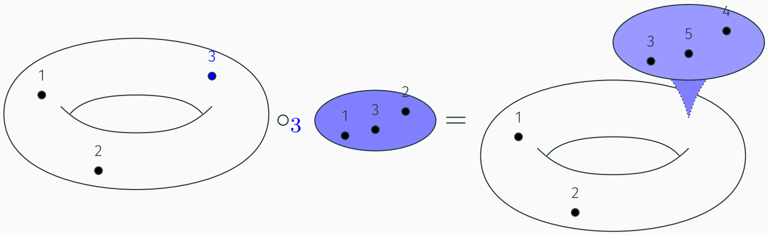
$$\mathsf{FM}_{\mathbb{R}^n}(k) \times \mathsf{FM}_{\mathbb{R}^n}(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathsf{FM}_{\mathbb{R}^n}(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Remarque

Faiblement équivalent à l'opérade des petits disques/cubes.

Modules sur les opérades

M parallélisée $\implies$ $\mathtt{FM}_M = \{\mathtt{FM}_M(k)\}_{k\geq 0}$ est un $\mathtt{FM}_n$-module à droite : on peut insérer une configuration infinitésimale dans une configuration de M



$$\mathtt{FM}_M(k) \times \mathtt{FM}_{\mathbb{R}^n}(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathtt{FM}_M(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

Cohomologie de FM_n et coaction sur G_A

$H^*(\mathsf{FM}_n)$ hérite d'une structure de coopérade de Hopf

On peut réécrire

$$\mathsf{G}_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathsf{FM}_n(k))/\text{relations}, d)$$

Proposition

$\chi(M) = 0 \implies \mathsf{G}_A = \{\mathsf{G}_A(k)\}_{k \geq 0}$ est un $H^*(\mathsf{FM}_n)$-comodule de Hopf à droite

On cherche à remplir ce diagramme :

$$\mathsf{G}_A(k) \xleftarrow{\sim} {\color{orange}?} \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\mathsf{FM}_M(k))$$

Si c'est vrai, on peut s'attendre à pouvoir remplir celui-là :

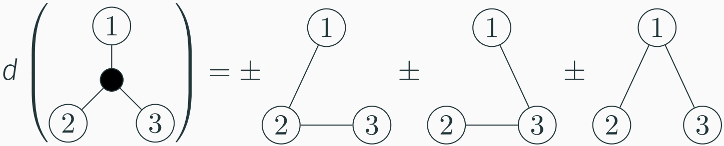
$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{G}_A & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & {\color{orange}?} & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \Omega^*(\mathsf{FM}_M) \\ \circlearrowleft & & {\color{orange}\circlearrowleft} & & \circlearrowleft \\ H^*(\mathsf{FM}_n) & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & {\color{orange}?} & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \Omega^*(\mathsf{FM}_n) \end{array}$$

$$\downarrow$$

Déjà connu : formalité de l'opérade des petits disques

Complexes de graphes de Kontsevich

[Kontsevich] Coopérade de Hopf $\mathtt{Graphs}_n = \{\mathtt{Graphs}_n(k)\}_{k \geq 0}$



Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

$$H^*(\mathsf{FM}_n; \mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} \mathtt{Graphs}_n \xrightarrow{\sim} \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathsf{FM}_n)$$

$$\omega_{ij} \longleftarrow\!\shortmid \quad (i) - (j) \quad \longmapsto \text{représentants explicites}$$

$$0 \longleftarrow\!\shortmid \quad \bullet \quad \longmapsto \text{intégrales «explicites»}$$

Version complète du théorème

Idée

Construire $\mathtt{Graphs}_R$ qui est à $\mathtt{Graphs}_n$ ce que G_A est à $H^*(\mathsf{FM}_n)$

Théorème (Version complète, cas sans bord)

M : variété compacte sans bord, simplement connexe, lisse, $\dim M \geq 4$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathtt{Graphs}_R & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathsf{FM}_M) \\
\circlearrowleft^{\dagger} & & \circlearrowleft^{\dagger} & & \circlearrowleft^{\ddagger} \\
H^*(\mathsf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathtt{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathsf{FM}_n)
\end{array}$$

† Si $\chi(M) = 0$

‡ Si M est parallélisée

Maintenant $\partial M \neq \varnothing \implies H^*(M) \cong H_{n-*}(M, \partial M)$ (si M est orientée)

Paire à dualité de Poincaré–Lefschetz $(B \xrightarrow{\lambda} B_\partial)$:

- $(B_\partial, \varepsilon_\partial)$ CDGA à dualité de Poincaré de dim. $n-1$; (modèle ∂M, $\int_{\partial M}$)
- B : CDGA connexe de t.f. ; (modèle M)
- $\lambda : B \twoheadrightarrow B_\partial$: morphisme surjectif ; (modèle $\partial M \hookrightarrow M$)
- $\varepsilon : B^n \to \mathbb{R}$ t.q. $\varepsilon(dy) = \varepsilon_\partial(\lambda(y))$; (modèle $\int_M(-)$ & Stokes)
- soit $K \coloneqq \ker \lambda$, alors $\theta : B \to K^\vee[-n]$, $b \mapsto \varepsilon(b \cdot -)$ est un quasi-iso surjectif. ($K \simeq \Omega^*(M, \partial M)$)

Dans ce cas, $A \coloneqq B/\ker\theta$ est un modèle de M, et $\theta : A \xrightarrow{\cong} K^\vee[-n]$

Existence & exemple de modèle à DPL

Exemple

Si $M = N \setminus \{*\}$ avec N compacte sans bord, soit P un modèle à DP de N, on pose :

$$B = (P \oplus \mathbb{R}v_{n-1}, dv = \mathrm{vol}_P) \twoheadrightarrow B_\partial = H^*(S^{n-1}) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_{n-1}, d = 0)$$

Proposition

Si M et ∂M sont simplement connexes et $\dim M \geq 7$, alors $(M, \partial M)$ admet un modèle à DPL.

Remarque

Également vrai si M admet un « *surjective pretty model* », cf. résultats de Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley.

Le dg-module G_A « naïf »

Soit (B, B_∂) un modèle à DPL et $A = B/\ker\theta \simeq B \implies$ même définition de $\mathsf{G}_A(k)$

Théorème

$$\dim H^i(\mathrm{Conf}_k(M)) = \dim H^i(\mathsf{G}_A(k))$$

Idée de la preuve

On combine :

- Des techniques de Lambrechts–Stanley pour calculer l'homologie d'espaces du type $M^k \setminus \bigcup_{i\neq j} \Delta_{ij}$;
- Des techniques de Cordova Bulens–Lambrechts–Stanley pour calculer l'homologie de $M = N \setminus X$ où N est une variété sans bord et $X \subset N$ est un sous-polyhèdre.

Le vrai modèle

En général, $\mathsf{G}_A(k)$ n'est pas un modèle de $\mathrm{Conf}_k(M)$.

Motivation

$M = S^1 \times (0\,,1) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \implies \mathrm{Conf}_2(M) \simeq \mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$

Alors $A = H^*(M) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\eta$.

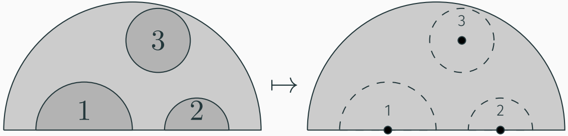
- dans $\mathsf{G}_A(2)$: $(1 \otimes \eta)\,\omega_{12} = (\eta \otimes 1)\,\omega_{12}$.
- dans $\mathrm{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$ (Arnold) : $(1 \otimes \eta)\,\omega_{12} = (\eta \otimes 1)\,\omega_{12} \pm (\eta \otimes \eta)$.

$\implies$ on définit un « modèle perturbé » $\tilde{\mathsf{G}}_A(k)$

Proposition

Isomorphisme de dg-modules $\mathsf{G}_A(k) \cong \tilde{\mathsf{G}}_A(k)$

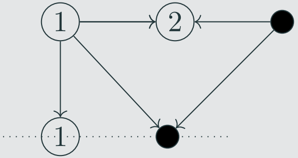
M ressemble (localement) à $\mathbb{H}^n \implies$ opérade Swiss-Cheese



$\mathsf{SC}_2(2,1)$ $\qquad$ $\mathrm{Conf}_{2,1}(\mathbb{H}^2)$

Théorème (Willwacher 2015)

Modèle $\mathtt{SGraphs}_n$ de $\mathsf{SFM}_n = \overline{\mathrm{Conf}_{\bullet,\bullet}(\mathbb{H}^n)} \simeq \mathsf{SC}_n$:



$\in \mathtt{SGraphs}_n(1,2)$

Théorème pour les variétés à bord

Avec des techniques similaires :

Théorème

M : variété lisse, compacte, de dimension ≥ 7, M et ∂M simplement connexes :

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathtt{G}}_A \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathtt{Graphs}_R^{z_\varepsilon} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, dashed, "\sim"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathtt{SFM}_M(\varnothing, -)) \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft^\dagger"] \\ H^*(\mathtt{FM}_n) & \mathtt{Graphs}_n \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \Omega^*_{\mathrm{PA}}(\mathtt{FM}_n) \end{tikzcd}$$

En plus : modèle $\mathtt{SGraphs}_{R,R_\partial}^{c_M, z_\varphi^S}(k, l)$ de $\mathtt{SFM}_M(k, l)$, compatible avec la (co)action de $\mathtt{SGraphs}_n$ / $\mathtt{SFM}_n$

Merci de votre attention !

Ces diapos, ma thèse : `https ://operad.fr/`