

# Espaces de configuration de variétés compactes

---

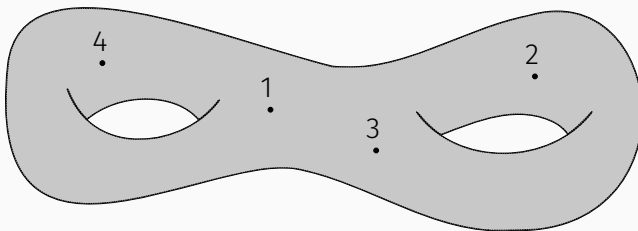
Najib Idrissi



# But

Étudier les espaces de configuration des variétés :

$$\text{Conf}_k(M) := \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$



## Idée

Utiliser la « formalité des opérades  $E_n$  » : résultats pour  $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

On se place dans le cadre des modèles rationnels/réels :

$$A \simeq \Omega^*(M) \text{ « formes sur } M \text{ » (de Rham, polynomiales par morceaux...)}$$

où  $A$  est une CDGA « explicite »

→ algèbre différentielle graduée commutative

$M$  nilpotente de type finie  $\implies A$  contient tout le type d'homotopie rationnel/réel de  $M$

On cherche une CDGA  $\simeq \Omega^*(\text{Conf}_k(M))$  construite à partir de  $A$

# Formalité de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

[Kontsevich]  $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$  est un espace « formel » sur  $\mathbb{Q}$ , c.-à-d. :

$$H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) \simeq \Omega^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n))$$

$\implies$  détermine entièrement son type d'homotopie  $/\mathbb{Q}$

## Théorème (Arnold 1969, Cohen 1976)

- $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k} / I$
- $\deg \omega_{ij} = n - 1$
- $I = (\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ij} \omega_{jk} + \omega_{jk} \omega_{ki} + \omega_{ki} \omega_{ij} = 0)$

# Modèles à dualité de Poincaré

## CDGA à dualité de Poincaré $(A, \varepsilon)$

(p.ex.  $M$  est comp. or. sans bord)

- $A$  : CDGA connexe de type fini; (p.ex.  $(H^*(M), d = 0)$ )
- $\varepsilon : A^n \rightarrow \mathbb{k}$  t.q.  $\varepsilon \circ d = 0$ ; (p.ex.  $\int_M (-)$ )
- $A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{k}, a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$  est non-dégén. (p.ex.  $H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{k}$ )

## Théorème (Lambrechts–Stanley 2008)

Toute variété **simplement connexe** admet un tel modèle

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) & \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} & \exists A \\ & \searrow f_M & \swarrow \exists \varepsilon \\ & \mathbb{k} & \end{array}$$

## Remarque

D'après un résultat de Longoni–Salvatore (2005),  $\exists L \simeq L'$  non simplement connexe t.q.  $\text{Conf}_k(L) \not\simeq \text{Conf}_k(L') \forall k \geq 2$ .

# Le modèle de Lambrechts–Stanley

$\mathbf{G}_A(k)$  modèle conjectural de  $\text{Conf}_k(M) = M^{\times k} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$   
 $\searrow := \{x_i = x_j\}$

- « Générateurs » :  $A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k}$
- Relations :
  - Relations d'Arnold ;  $(\omega_{ji} = \pm \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = \omega_{ij} \omega_{jk} + \omega_{jk} \omega_{ki} + \omega_{ki} \omega_{ij} = 0)$
  - $p_i^*(a) \cdot \omega_{ij} = p_j^*(a) \cdot \omega_{ij}$ .  $(p_i^*(a) := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$
- $d \omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A) \rightarrow$  tue le dual de  $[\Delta_{ij}]$ .

## Théorème (Lambrechts–Stanley)

$$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(\text{Conf}_k(M)) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbf{G}_A(k))$$

# Premiers exemples

$$G_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i < j \leq k} / \text{relations}, d\omega_{ij} = (p_i^* \cdot p_j^*)(\Delta_A))$$

$$G_A(0) = \mathbb{Q} \rightarrow \text{modèle de } \text{Conf}_0(M) = \{\emptyset\} \quad \checkmark$$

$$G_A(1) = A \rightarrow \text{modèle de } \text{Conf}_1(M) = M \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} G_A(2) &= \left( \frac{A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes A \otimes \omega_{12}}{1 \otimes a \otimes \omega_{12} \equiv a \otimes 1 \otimes \omega_{12}}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1 \right) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes_A A \otimes \omega_{12}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &\cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes \omega_{12}, d\omega_{12} = \Delta_A \otimes 1) \\ &= \text{cone}(A \xrightarrow{\cdot \Delta_A} A^{\otimes 2}) \\ &\xrightarrow{\sim} A^{\otimes 2} / (\Delta_A) \end{aligned}$$

# Historique de $G_A$

1969 [Arnold, Cohen]  $H^*(\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)) = G_{H^*(D^n)}(k)$

1978 [Cohen & Taylor]  $E^2 = G_{H^*(M)}(k) \implies H^*(\text{Conf}_k(M))$

~1994 Pour les variétés complexes projectives lisses ( $\implies$  Kähler) :

- [Kříž]  $G_{H^*(M)}(k)$  modèle de  $\text{Conf}_k(M)$
- [Totaro] La SS de Cohen–Taylor s’effondre

2004 [Lambrechts & Stanley]  $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$  modèle de  $\text{Conf}_2(M)$  si  $M$  est 2-connexe

~2004 [Félix & Thomas, Berceanu & Markl & Papadima]  $G_{H^*(M)}^\vee(k) \cong$   
page  $E^2$  de la SS de Bendersky–Gitler  $\implies H^*(M^{\times k}, \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij})$

2008 [Lambrechts & Stanley]  $H^*(G_A(k)) \cong_{\Sigma_k\text{-gVect}} H^*(\text{Conf}_k(M))$

2015 [Cordova Bulens]  $A^{\otimes 2}/(\Delta_A)$  modèle de  $\text{Conf}_2(M)$  si  $\dim M = 2m$



# Première partie du théorème

## Théorème

Soit  $M$  une variété lisse, compacte, sans bord, simplement connexe, de dimension  $\geq 4$ . Alors  $G_A(k)$  est un modèle sur  $\mathbb{R}$  de  $\text{Conf}_k(M)$  pour tout  $k \geq 0$ .

## Corollaire

Le type d'homotopie réel de  $\text{Conf}_k(M)$  ne dépend que du type d'homotopie réel de  $M$  :

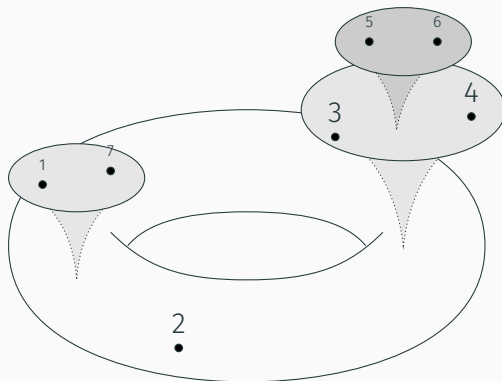
$$M \simeq_{\mathbb{R}} N \implies \text{Conf}_k(M) \simeq_{\mathbb{R}} \text{Conf}_k(N).$$

# Idée de la preuve

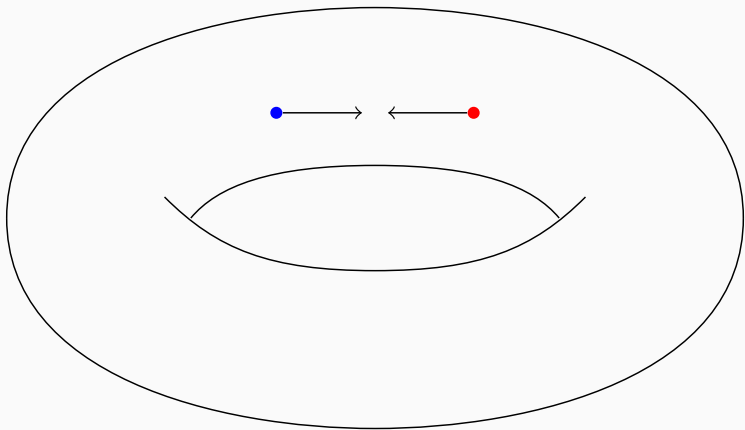
## Idée

Étudier  $\{\text{Conf}_k(M)\}_{k \geq 0}$  : plus de structure  $\rightarrow$  module sur une opérade

Compactification de Fulton–MacPherson  $\text{Conf}_k(M) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_M(k)$

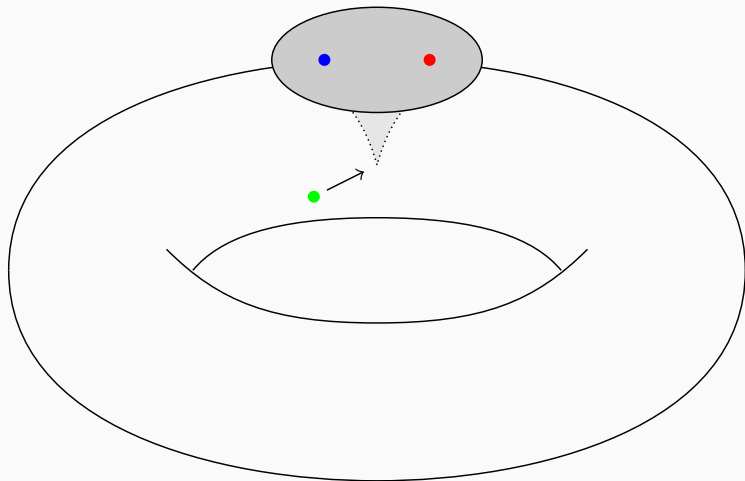


## Animation n° 1



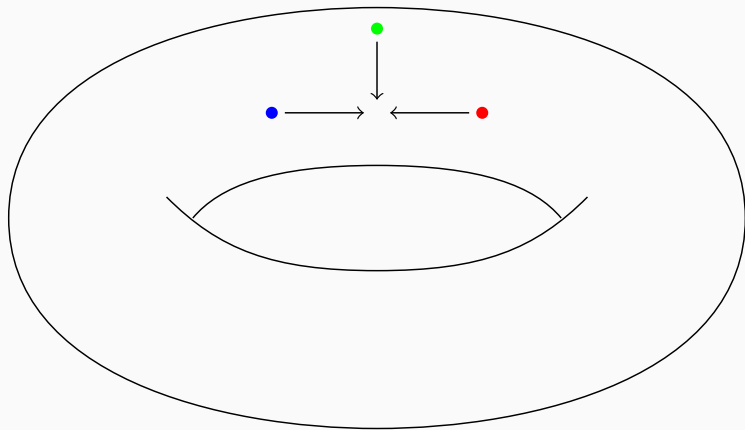


## Animation n° 2





## Animation n° 3

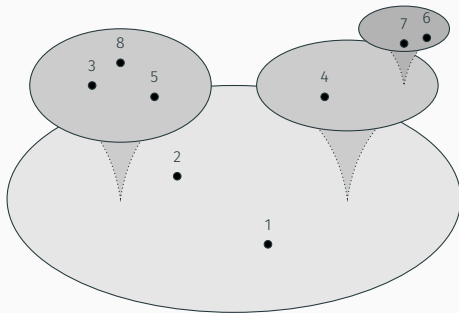






# Compactification de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$

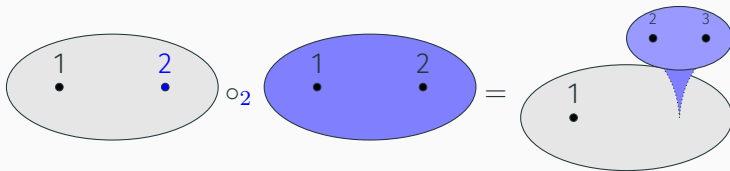
On a aussi  $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)/(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0}) \xrightarrow{\sim} \text{FM}_n(k)$



(+ normalisation parce que  $\mathbb{R}^n$  n'est pas compact)

# Opérades

$\mathbf{FM}_n = \{\mathbf{FM}_n(k)\}_{k \geq 0}$  est une **opérade** : on peut « composer » les configurations



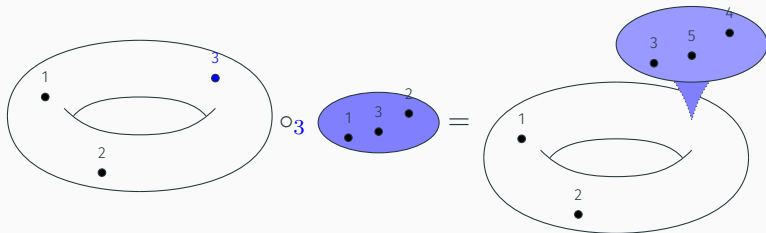
$$\mathbf{FM}_n(k) \times \mathbf{FM}_{\mathbb{R}^n}(l) \xrightarrow{o_i} \mathbf{FM}_n(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

## Remarque

Faiblement équivalent à l'opérade des petits disques/cubes.

# Modules sur les opérades

$M$  parallélisée  $\implies \mathbf{FM}_M = \{\mathbf{FM}_M(k)\}_{k \geq 0}$  est un  $\mathbf{FM}_n$ -module à droite :  
on peut insérer une configuration infinitésimale dans une configuration de  $M$



$$\mathbf{FM}_M(k) \times \mathbf{FM}_n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathbf{FM}_M(k+l-1), \quad 1 \leq i \leq k$$

$H^*(\mathbf{FM}_n)$  hérite d'une structure de coopérade de Hopf

On peut réécrire

$$G_A(k) = (A^{\otimes k} \otimes H^*(\mathbf{FM}_n(k)))/\text{relations}, d)$$

## Proposition

$\chi(M) = 0 \implies G_A = \{G_A(k)\}_{k \geq 0}$  est un  $H^*(\mathbf{FM}_n)$ -comodule de Hopf à droite

# Motivation

On cherche à remplir ce diagramme :

$$G_A(k) \xleftarrow{\sim} ? \xrightarrow{\sim} \Omega^*(FM_M(k))$$

Si c'est vrai, on peut s'attendre à pouvoir remplir celui-là :

$$\begin{array}{ccccc} G_A & \xleftarrow{\sim} & ? & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*(FM_M) \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ \boxed{H^*(FM_n) \xleftarrow{\sim} ? \xrightarrow{\sim} \Omega^*(FM_n)} & & & & \end{array}$$

Déjà connu : **formalité de l'opérade des petits disques**

# Complexes de graphes de Kontsevich

[Kontsevich] Coopérade de Hopf  $\mathbf{Graphs}_n = \{\mathbf{Graphs}_n(k)\}_{k \geq 0}$

$$d \left( \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right) = \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \end{array} \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \text{---} \textcircled{3} \end{array} \pm \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array}$$

Théorème (Kontsevich 1999, Lambrechts–Volić 2014)

$$H^*(\mathbf{FM}_n; \mathbb{R}) \xleftarrow{\sim} \mathbf{Graphs}_n \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{FM}_n)$$

$$\omega_{ij} \longleftarrow \textcircled{i} \text{---} \textcircled{j} \longrightarrow \text{représentants explicites}$$

$$0 \longleftarrow \bullet \longrightarrow \text{intégrales « explicites »}$$

# Version complète du théorème

## Idée

Construire  $\mathbf{Graphs}_R$  qui est à  $\mathbf{Graphs}_n$  ce que  $\mathbf{G}_A$  est à  $H^*(\mathbf{FM}_n)$

## Théorème (Version complète, cas sans bord)

$M$  : variété compacte sans bord, simplement connexe, lisse,  $\dim M \geq 4$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_R & \dashrightarrow^{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{FM}_M) \\ \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\dagger & & \circlearrowleft^\ddagger \\ H^*(\mathbf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{FM}_n) \end{array}$$

$^\dagger$  Si  $\chi(M) = 0$

$^\ddagger$  Si  $M$  est parallélisée

# Modèles à dualité de Poincaré–Lefschetz

Maintenant  $\partial M \neq \emptyset \implies H^*(M) \cong H_{n-*}(M, \partial M)$  (si  $M$  est orientée)

Paire à dualité de Poincaré–Lefschetz  $(B \xrightarrow{\lambda} B_{\partial})$  :

- $(B_{\partial}, \varepsilon_{\partial})$  CDGA à dualité de Poincaré de dim.  $n - 1$ ; (modèle  $\partial M, \int_{\partial M}$ )
- $B$  : CDGA connexe de t.f.; (modèle  $M$ )
- $\lambda : B \twoheadrightarrow B_{\partial}$  : morphisme surjectif; (modèle  $\partial M \hookrightarrow M$ )
- $\varepsilon : B^n \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $\varepsilon(dy) = \varepsilon_{\partial}(\lambda(y))$ ; (modèle  $\int_M(-)$  & Stokes)
- soit  $K := \ker \lambda$ , alors  $\theta : B \rightarrow K^{\vee}[-n]$ ,  $b \mapsto \varepsilon(b \cdot -)$  est un quasi-iso surjectif. ( $K \simeq \Omega^*(M, \partial M)$ )

Dans ce cas,  $A := B / \ker \theta$  est un modèle de  $M$ , et  $\theta : A \xrightarrow{\cong} K^{\vee}[-n]$



# Existence & exemple de modèle à DPL

## Exemple

Si  $M = N \setminus \{*\}$  avec  $N$  compacte sans bord, soit  $P$  un modèle à DP de  $N$ , on pose :

$$B = (P \oplus \mathbb{R}v_{n-1}, dv = \text{vol}_P) \rightarrow B_{\partial} = H^*(S^{n-1}) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}v_{n-1}, d = 0)$$

## Proposition

Si  $M$  et  $\partial M$  sont simplement connexes et  $\dim M \geq 7$ , alors  $(M, \partial M)$  admet un modèle à DPL.

## Remarque

Également vrai si  $M$  admet un « *surjective pretty model* », cf. résultats de Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley.

# Le dg-module $G_A$ « naïf »

Soit  $(B, B_\partial)$  un modèle à DPL et  $A = B / \ker \theta \simeq B \implies$  même définition de  $G_A(k)$

## Théorème

$$\dim H^i(\mathrm{Conf}_k(M)) = \dim H^i(G_A(k))$$

## Idée de la preuve

On combine :

- Des techniques de Lambrechts–Stanley pour calculer l’homologie d’espaces du type  $M^k \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}$  ;
- Des techniques de Cordova Bulens–Lambrechts–Stanley pour calculer l’homologie de  $M = N \setminus X$  où  $N$  est une variété sans bord et  $X \subset N$  est un sous-polyèdre.

# Le vrai modèle

En général,  $G_A(k)$  n'est pas un modèle de  $\text{Conf}_k(M)$ .

## Motivation

$$M = S^1 \times (0, 1) \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \implies \text{Conf}_2(M) \simeq \text{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{Alors } A = H^*(M) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\eta.$$

- dans  $G_A(2) : (1 \otimes \eta) \omega_{12} = (\eta \otimes 1) \omega_{12}$ .
- dans  $\text{Conf}_3(\mathbb{R}^2)$  (Arnold) :  $(1 \otimes \eta) \omega_{12} = (\eta \otimes 1) \omega_{12} \pm (\eta \otimes \eta)$ .

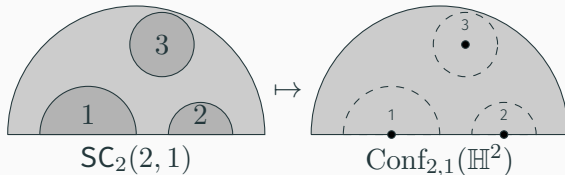
$\implies$  on définit un « modèle perturbé »  $\tilde{G}_A(k)$

## Proposition

Isomorphisme de dg-modules  $G_A(k) \cong \tilde{G}_A(k)$

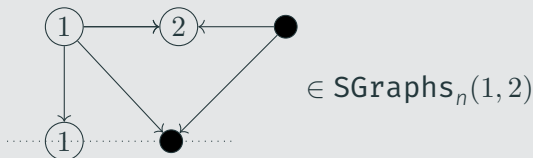
# Swiss-Cheese & graphs

$M$  ressemble (localement) à  $\mathbb{H}^n \implies$  opérade Swiss-Cheese



## Théorème (Willwacher 2015)

Modèle  $S\text{Graphs}_n$  de  $SFM_n = \overline{\text{Conf}_{\bullet, \bullet}(\mathbb{H}^n)} \simeq SC_n$  :



# Théorème pour les variétés à bord

Avec des techniques similaires :

## Théorème

$M$  : variété lisse, compacte, de dimension  $\geq 7$ ,  $M$  et  $\partial M$  simplement connexes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{G}_A & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_R^{\mathbb{Z}_\varepsilon} & \dashrightarrow^{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{SFM}_M(\emptyset, -)) \\
 \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft^\dagger \\
 H^*(\mathbf{FM}_n) & \xleftarrow{\sim} & \mathbf{Graphs}_n & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PA}^*(\mathbf{FM}_n)
 \end{array}$$

En plus : modèle  $\mathbf{SGraphs}_{R, R_\partial}^{C_M, \mathbb{Z}_\varphi^S}(k, l)$  de  $\mathbf{SFM}_M(k, l)$ , compatible avec la (co)action de  $\mathbf{SGraphs}_n / \mathbf{SFM}_n$

# Merci de votre attention !

Ces diapos, ma thèse : <https://operad.fr/>