

Homotopie réelle des espaces de configuration

Cours Peccot – Collège de France

Najib Idrissi

Dernière mise à jour : 1^{er} septembre 2020

À Ayman

Résumé

Les espaces de configuration consistent en des collections de points deux à deux distincts dans une variété donnée. Une question importante à leur sujet est celle de l'invariance homotopique, qui reste ouverte si l'on se restreint aux variétés compactes sans bord simplement connexes. Dans ce cours, nous verrons comment démontrer cette conjecture en caractéristique nulle, c'est-à-dire si l'on considère uniquement les invariants algébro-topologiques à coefficients réels. Nous considérerons ensuite une généralisation aux variétés à bord. La preuve fait intervenir des idées de la théorie des opérades, qui sera introduite à la fin du cours.

Abstract

Configuration spaces consist in collections of pairwise distinct points in a given manifold. An important question about configuration spaces is homotopy invariance, which remains open when restricted to simply connected closed manifolds. In this course, we will see how to prove this conjecture in characteristic zero, i.e. if we only consider algebro-topological invariants with real coefficients. We will then consider a generalization to manifolds with boundary. The proof involves ideas from the theory of operads, which will be introduced at the end of the course.

Najib Idrissi. Université de Paris, Sorbonne Université, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, F-75013 Paris, France.

Email : najib.idrissi-kaitouni@imj-prg.fr.

Page web du cours : <https://idrissi.eu/fr/cours/peccot/>

Table des matières

Introduction	1
1 Espaces de configuration de variétés	7
1.1 Espaces de configuration	7
1.2 Invariance homotopique	10
1.3 Théorie de l'homotopie rationnelle	12
1.4 Formalité de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$	17
2 Modèle de Lambrechts–Stanley	21
2.1 Définition du modèle	21
2.2 Énoncé du théorème et idée de la preuve	24
2.3 Compactification de Fulton–MacPherson	25
2.3.1 Cas de \mathbb{R}^n	26
2.3.2 Cas de M	29
2.4 Ensembles semi-algébriques et formes PA	30
2.4.1 Ensembles SA	31
2.4.2 Formes PA	31
2.5 Complexes de graphes	34
2.5.1 Idée informelle	35
2.5.2 Définition du complexe de graphes	36
2.5.3 Propagateur	38
2.5.4 Fonction de partition	41
2.5.5 Simplification de la fonction de partition	43
2.6 Fin de la preuve	46
3 Variétés à bord	51
3.1 Motivation	51
3.2 Modèles à dualité de Poincaré–Lefschetz	53
3.3 Modèle graphique	58
3.3.1 Compactifications	58
3.3.2 Propagateurs	62
3.3.3 Complexes de graphes	64
3.3.4 Simplification de w et W	65
3.3.5 Quasi-isomorphisme	67
3.4 Modèle de Lambrechts–Stanley perturbé	68
3.4.1 Calcul de l'homologie	69
3.4.2 Modèle perturbé	71

4 Opérades	73
4.1 Motivation : homologie de factorisation	73
4.2 Introduction aux opérades	74
4.2.1 Définition	75
4.2.2 Algèbres	78
4.2.3 Modules sur les opérades	79
4.3 Espaces de configuration et opérades	80
4.3.1 Opérades des petits disques	80
4.3.2 Lien avec les espaces de configuration	82
4.3.3 Structures opéradiques sur les compactifications	84
4.4 Formalité et modèles des espaces de configuration	87
4.5 Exemple de calcul	93
Bibliographie	99

Introduction

Ce document est un résumé du cours donné par l’auteur au Collège de France en 2020 pour la Fondation Claude-Antoine Peccot. Les vidéos des cours sont disponibles sur le [site du Collège de France](#). L’objectif du cours était l’étude du type d’homotopie réelle des espaces de configuration des variétés. Nous allons ici introduire le contexte de ce cours et énoncer les résultats principaux.

Espaces de configuration Soit M un espace topologique fixé et $r \geq 0$ un entier. Le r ème espace de configuration (ordonné) $\text{Conf}_M(r)$ de M consiste en les collections ordonnées de r points deux à deux distincts dans M . Plus précisément, on pose :

$$\text{Conf}_M(r) = \{(x_1, \dots, x_r) \in M^r \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}.$$

Ces espaces sont des objets classiques en topologie algébrique et sont étudiés depuis les années 1960 [FN62a; FN62b] et apparaissent déjà implicitement dans les travaux de Hurwitz [Hur91] en 1891 (cf. [Mag74]). Bien qu’initialement introduits dans le cadre de l’étude des groupes de tresses, les espaces de configuration se sont révélés utiles dans de nombreux contextes, et notamment pour définir des invariants des variétés.

Malgré la simplicité apparente de la définition, les espaces de configuration sont des objets intrigants. Une des principales questions à leur sujet est de savoir en quoi la structure de $\text{Conf}_M(r)$ dépend de celle de M . Par exemple, si une variété N peut être obtenue à partir d’une variété M en la déformant continûment, c.-à-d. par une équivalence d’homotopie, est-ce que les espaces de configuration de N peuvent être obtenus à partir de ceux de M en les déformant continûment ? Posée ainsi, la réponse à cette question est non : les espaces de configuration de la droite réelle n’ont pas le même type d’homotopie que les espaces de configuration d’un singleton (qui sont vides). Il a longtemps été conjecturé que si l’on se restreignait aux variétés compactes sans bord, alors la réponse à la question précédente était positive. Après la découverte d’un contre-exemple par Longoni et Salvatore [LS05], la conjecture a encore été restreinte aux variétés compactes sans bord simplement connexes et reste ouverte à ce jour. Une conjecture similaire sur les espaces de configuration de variétés compactes à bord simplement connexes est également ouverte.

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur une partie seulement des types d’homotopie des espaces qui apparaissent : leurs types d’homotopie *rationnelle* ou *réelle*. L’idée derrière la théorie de l’homotopie rationnelle consiste à étudier les espaces topologiques « modulo la torsion ». Elle remonte aux travaux de Serre [Ser53] et fut développée par Quillen [Qui69] et Sullivan [Sul77]. Si l’on obtient moins d’informations sur les espaces topologiques dans le cadre de cette théorie, les objets considérés ont l’avantage d’être

explicitement calculables. En effet, le type d'homotopie rationnelle d'un espace topologique est, sous de bonnes conditions, entièrement déterminé par une donnée purement algébrique appelée « modèle ». Un modèle de X est une algèbre différentielle graduée commutative (ADGC) à coefficients rationnels qui est quasi-isomorphe à l'ADGC $\Omega_{\text{PL}}^*(X)$ des formes polynomiales par morceaux sur X . On peut montrer que deux espaces ont le même type d'homotopie rationnelle si et seulement si ils admettent des modèles quasi-isomorphes. Ces modèles permettent d'effectuer de nombreux calculs : la cohomologie de l'espace en question et son cup-produit, ses groupes d'homotopie rationnelle et leur crochet de Whitehead, les produits de Massey, etc. Dans la théorie de l'homotopie réelle, les coefficients rationnels sont remplacés par des coefficients réels. Les modèles réels contiennent souvent légèrement moins d'information que les modèles rationnels, mais ils restent suffisants pour les calculs en général.

Les variétés sans bord sont toutes construites avec les espaces euclidiens \mathbb{R}^n comme briques de base. Les cohomologies des espaces de configuration de \mathbb{R}^n sont connues depuis les travaux d'Arnold [Arn69]. L'algèbre graduée $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r))$ possède une présentation qui reflète le fait que $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ est obtenu à partir de $(\mathbb{R}^n)^r$ en retirant les $\binom{r}{2}$ diagonales $\Delta_{ij} = \{x_i = x_j\}$ dont les intersections vérifient $\Delta_{ij} \cap \Delta_{jk} = \Delta_{jk} \cap \Delta_{ki} = \Delta_{ki} \cap \Delta_{ij}$. Plus précisément, $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r))$ est engendré par des classes ω_{ij} ($1 \leq i \neq j \leq r$) de degré $n - 1$ vérifiant les relations $\omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij}$ et, pour $i \neq j \neq k \neq i$, les relations à trois termes souvent appelées « relations d'Arnold » :

$$\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0.$$

Arnold [Arn69] a montré que $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r))$ est un modèle de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r)$. Ce résultat a été largement généralisé par Kontsevich [Kon99] (voir aussi Lambrechts et Volić [LV14]) qui a montré que cela restait vrai pour tout n .

Modèle de Lambrechts–Stanley Ce modèle de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ a servi de base pour élaborer un modèle potentiel pour les espaces de configuration des variétés compactes sans bord simplement connexes. Ce dernier est apparu sous diverses formes dans les travaux de plusieurs auteurs [CT78; Kri94; Tot96; BG91; LS04; FT04; BMP05; LS08a; Cor15] (voir la Section 2.1 pour plus de détails). Il est construit de la façon suivante. Si M est une variété compacte sans bord simplement connexe de dimension n , on peut trouver un modèle A de M qui vérifie dualité de Poincaré au niveau des cochaînes [LS08b]. Le modèle conjectural de $\text{Conf}_M(r)$, noté $G_A(r)$ est construit à partir de $H^*(\text{Conf}_M(r))$ en rajoutant un facteur $A^{\otimes r}$ et en quotientant par les relations $p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}$ (pour $1 \leq i \neq j \leq r$), ce qui reflète le fait que les deux projections canoniques $p_i, p_j : M^r \rightarrow M$ sont égales quand on les restreint à Δ_{ij} . La différentielle est la somme de la différentielle induite par celle de A et de l'unique dérivation qui envoie ω_{ij} sur la classe de la diagonale $\Delta_{ij} \in A^{\otimes r}$. Ce modèle $G_A(r)$ est conjecturé être un modèle rationnel de $\text{Conf}_M(r)$ [FOT08, Conjecture 9.9]. Le résultat principal du Chapitre 2, qui provient de l'article [Idr19], est le suivant.

Théorème A. *Soit M une variété compacte lisse sans bord simplement connexe et $r \geq 0$ un entier. Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M . L'ADGC $G_A(r)$ est un modèle réel de $\text{Conf}_M(r)$.*

Corollaire B. *Si deux variétés compactes lisses sans bord simplement connexes ont le même type d'homotopie réelle, alors leurs espaces de configuration aussi.*

Des résultats similaires ont été obtenus simultanément par Campos et Willwacher [CW16]. La preuve, qui occupe la majeure partie du Chapitre 2, est une adaptation et généralisation de la preuve de Kontsevich mentionnée ci-dessus. L'un des ingrédients principaux de cette preuve est les complexes de graphes. Les complexes de graphes tels que nous les utilisons ont été introduits par Kontsevich [Kon93] dans le contexte des invariants des variétés de dimension 3. Depuis, l'intérêt pour les complexes de graphes a connu un essor considérable. Pour nous, un de leurs intérêts majeurs est de pouvoir fournir une résolution (au sens de l'algèbre homologique) des relations d'Arnold. Les graphes qui apparaissent sont des graphes décorés avec deux types de sommets, les sommets «externes» qui représentent des points fixes sur la variété, et les sommets «internes» qui représentent des points mobiles. La différentielle consiste essentiellement à contracter les arêtes incidentes aux sommets internes. Le modèle $G_A(r)$ est un quotient d'un tel complexe de graphes.

La preuve utilise une procédure d'intégration (sur toutes les positions possibles des points mobiles) pour démontrer qu'ils forment un modèle de $\text{Conf}_M(r)$. Pour démontrer que ces intégrales convergent, il est nécessaire de compactifier les espaces de configuration. Ces compactifications, appelées compactifications de Fulton–MacPherson, sont obtenues en rajoutant des configurations virtuelles où les points sont autorisés à être infinitésimalement proches les uns des autres. Les intégrales sont alors calculées le long des fibres des projections entre les compactifications qui oublient les points mobiles. Ces projections ne sont pas des submersions mais simplement des fibrés semi-algébriques (SA). Pour résoudre cette difficulté, nous utilisons les formes semi-algébriques par morceaux, dont la théorie a été initiée par Kontsevich et Soibelman [KS00] et développée par Hardt, Lambrechts, Turchin et Volic [HLTV11].

Le modèle en complexes de graphes ci-dessus dépend d'intégrales. Ces intégrales dépendent a priori de la structure semi-algébrique de la variété, et il n'est pas clair que deux variétés homotopiquement équivalentes auront les mêmes intégrales. L'un des points-clés de notre preuve est de démontrer que ces intégrales s'annulent dans de nombreux cas, ce qu'il est possible de faire quand la variété est simplement connexe et de dimension au moins 4. Cela permet de déduire l'invariance homotopique (réelle) de nos modèles. Le cas de la dimension ≤ 3 se traite de manière complètement différente : les seules variétés simplement connexes possibles sont des sphères (classification des surfaces, conjecture de Poincaré).

Variétés à bord Dans le Chapitre 3, qui relate principalement les résultats de l'article [CILW18] (avec Campos, Lambrechts et Willwacher), nous généralisons les résultats précédents aux variétés à bord. L'un des objectifs principaux de ce chapitre est de fournir une manière de reconstituer les espaces de configuration de variétés compliquées à partir des espaces de configuration de sous-variétés plus simples. Le cas classique est celui d'une variété du type $M \cup_N M'$ obtenue en recollant deux sous-variétés M, M' le long de leur bord commun $N = \partial M = \partial M'$ (Figure 3.2). La collection des espaces de configura-

tion $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}} = \{\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(r)\}_{r \geq 0}$ forme un monoïde à homotopie près (Figure 3.3), et la collection Conf_M (resp. $\text{Conf}_{M'}$) forme un module à droite (resp. à gauche) sur $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ à homotopie près en choisissant un collier autour de N (Figure 3.4). Le « produit tensoriel à homotopie près » $\text{Conf}_M \otimes_{\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}}^{\mathbb{L}} \text{Conf}_{M'}$ a le type d'homotopie de $\text{Conf}_{M \cup_N M'}$. Cette procédure permet de calculer les types d'homotopie des espaces de configuration de manière inductive.

Après quelques préliminaires, dans une première partie, nous introduirons un modèle des espaces de configuration qui reflète cette structure algébrique de monoïde/module. Nous commençons par introduire des compactifications de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ et Conf_M , similaires aux compactifications de Fulton–MacPherson. Ces compactifications forment respectivement un monoïde et un module strict, et elles permettent de plus de calculer les intégrales le long des fibres des projections. Comme dans le Chapitre 2, nous définissons des modèles de ces compactifications basés sur des complexes de graphes. Ces modèles sont formés par des combinaisons linéaires de graphes dirigés dont les sommets sont décorés par un modèle de la paire $(M, \partial M)$ qui vérifie la dualité de Poincaré–Lefschetz au niveau des cochaînes. La structure de monoïde/module est donnée, sur les complexes de graphes, par les opérations qui consistent à partitionner les graphes en deux parties et à remplacer les arêtes coupées par des décorations appropriées.

Ces modèles dépendent également d'intégrales. Nous pouvons montrer que les intégrales qui servent à définir le modèle de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ s'annulent toujours à homotopie près, ce qui est cohérent avec d'autres résultats qui montrent que le type d'homotopie de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ ne dépend probablement que de celui de N (voir par exemple Raptis et Salvatore [RS18]). Pour le modèle de M , nous avons besoin de conditions supplémentaires sur la dimension et la connexité de M , comme dans le Chapitre 2.

Théorème C. *Soit M une variété compacte de bord N . Les modèles en complexes de graphes du Chapitre 3 sont des modèles réels de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ et Conf_M qui sont compatibles avec les structures algébriques de monoïde/module.*

Corollaire D. *Soit M une variété compacte de bord N . Le type d'homotopie réelle de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$, en tant que monoïde dans les collections d'espaces topologiques, ne dépend que du type d'homotopie réelle de N . Si M est simplement connexe et $\dim M \geq 4$, alors le type d'homotopie réelle de Conf_M , en tant que module à droite sur $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ dans les collections d'espaces topologiques, ne dépend que du type d'homotopie réelle de la paire (M, N) .*

Si l'on rajoute l'hypothèse que le bord de M est simplement connexe, alors en dimension ≤ 3 les seules variétés possibles sont des disques – par la conjecture de Poincaré et la classification des surfaces – et la conclusion du corollaire ci-dessus devient vraie en toute dimension.

Dans une seconde partie, nous introduirons un autre modèle de Conf_M qui est défini de façon analogue au modèle G_P du Chapitre 2. Soit M une variété compacte à bord. Nous commençons par montrer qu'il existe un modèle de la paire $(M, \partial M)$ qui vérifie strictement la dualité de Poincaré–Lefschetz au niveau des cochaînes si M et ∂M sont simplement connexes et $\dim M \geq 7$. Nous définissons ensuite une ADGC G_P de façon analogue au cas sans bord. Si $\partial M = \emptyset$, cette ADGC est identique à celle du Chapitre 2.

Supposons que M et ∂M sont simplement connexes. En réutilisant des arguments de Lambrechts et Stanley [LS08a] et Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley [CLS18], nous montrons que la cohomologie de $G_P(r)$ est isomorphe à la cohomologie rationnelle de $\text{Conf}_M(r)$ en tant que représentation graduée du groupe symétrique Σ_r .

Cette ADGC n'est cependant pas toujours un modèle de Conf_M , comme nous pouvons le constater heuristiquement sur des exemples simples (p.ex. $M = S^1 \times [0, 1]$). Nous définissons alors une ADGC « perturbé » \tilde{G}_P qui est isomorphe à G_P en tant que complexe de cochaînes mais pas en tant qu'ADGC. Cette terminologie vient du fait que les parties de plus haut poids dans les relations de \tilde{G}_P sont les relations de G_P . Dans de nombreux cas (p.ex. si M est obtenue en épointant une variété compacte sans bord), \tilde{G}_P et G_P sont égales. Nous pouvons montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que \tilde{G}_P est un modèle de Conf_M sous conditions :

Théorème E. *Soit M une variété compacte lisse simplement connexe à bord simplement connexe de dimension au moins 5 et supposons que M admet un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz P . Pour tout $r \geq 0$, l'ADGC $\tilde{G}_P(r)$ est un modèle réel de $\text{Conf}_M(r)$. Le même résultat est valable si $\dim M \in \{4, 5, 6\}$ avec $P = H^*(M)$.*

Les résultats ci-dessus ne donnent pas beaucoup d'informations en basse dimension : le modèle du Théorème C dépend d'intégrales que l'on ne sait pas calculer, et le Théorème E ne s'applique pas. Dans l'article [CIW19], avec Campos et Willwacher, nous fournissons un modèle pour les espaces de configuration des surfaces orientées par des méthodes assez différentes.

Opérades Les preuves des résultats qui précèdent font appel à des idées qui proviennent de la théorie des opérades.



Reste de l'introduction à venir.

Plan du cours Ces notes de cours sont divisées en quatre chapitres (qui ne correspondent pas exactement au découpage en quatre leçons du Cours Peccot).

- Dans le Chapitre 1, nous introduirons plus précisément les espaces de configuration. Nous listerons quelques unes de leurs applications et nous présenterons la conjecture de l'invariance homotopique. Nous ferons également quelques rappels sur la théorie de l'homotopie rationnelle. Enfin, nous étudierons le cas basique des espaces de configuration des espaces euclidiens.
- Dans le Chapitre 2, nous présenterons le modèle conjecturé par Lambrechts et Stanley. Nous démontrerons leur conjecture sur \mathbb{R} pour une grande classe de variétés compactes sans bord. Pour ce faire, nous introduirons la compactification de Fulton–MacPherson des espaces de configuration, ainsi que la théorie des formes semi-algébriques par morceaux. Nous expliquerons comment les complexes de graphes interviennent dans la preuve. Ce résultat aura pour corollaire l'invariance homotopique réelle des espaces de configuration.

- Dans le Chapitre 3, nous étendrons les résultats du Chapitre 2 aux variétés à bord. Nous commencerons par la motivation, à savoir le calcul du type d'homotopie des espaces de configuration « par récurrence », c.-à-d. en reconstruisant les espaces de configuration de grosses variétés à l'aide d'espaces de configuration de sous-variétés plus petites recollées le long de leurs bords. Nous présenterons ensuite deux modèles, un premier qui se porte bien à ce calcul par récurrence, et un second inspiré par le modèle de Lambrechts–Stanley.
- Dans le Chapitre 4, nous introduirons la théorie des opérades. Nous expliquerons comment les espaces de configuration (compactifiés) de \mathbb{R}^n forment une opérade et comment ceux d'une variété compacte sans bord parallélisée forment un module à droite sur cette opérade. Nous conclurons par une application au calcul de l'homologie de factorisation.

Remerciements Je remercie le Collège de France et la Fondation Claude-Antoine Peccot pour cet honneur et cette opportunité unique.

Une bonne partie des résultats exposés durant ce cours sont issus de ma thèse de doctorat, et je remercie mon directeur de thèse, Benoit Fresse, pour son soutien et ses conseils. Certains des résultats présentés ici ont été obtenus conjointement avec d'autres chercheurs : Ricardo Campos, Julien Ducoulombier, Pascal Lambrechts et Thomas Willwacher. Je suis ravi d'avoir eu la chance de travailler avec eux. Je voudrais également remercier Muriel Livernet pour son soutien.

Les travaux dont il est question dans ces notes ont été réalisés au Laboratoire Paul Painlevé de l'Université de Lille, au Département de Mathématiques de l'ETH Zurich, ainsi qu'à l'Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche et l'Université de Paris. Je voudrais remercier ces institutions et mes collègues qui m'ont toujours fourni un bon accueil. Certains des travaux ont été notamment soutenus par le projet ERC StG 678156–GRAPHCPX.

1 Espaces de configuration de variétés

1.1 Espaces de configuration

Définition 1.1.1. Soit M un espace topologique et $r \geq 0$ un entier. Le *rième espace de configuration* (ordonné) de M est le sous-espace de M^r donné par :

$$\text{Conf}_M(r) := \{(x_1, \dots, x_r) \in M^r \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}. \quad (1.1.2)$$

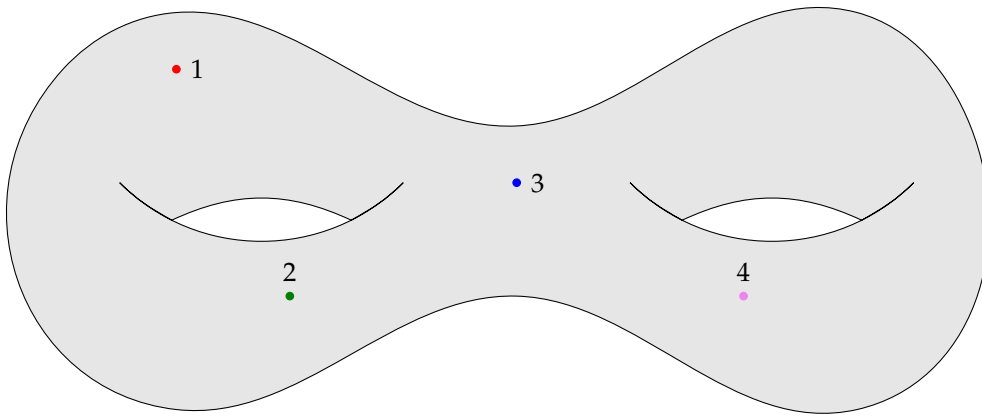


FIG. 1.1 : Un élément de $\text{Conf}_{\Sigma_2}(4)$, où Σ_2 est la surface orientée de genre 2.

Ces espaces apparaissent dans de nombreux contextes. On peut notamment citer :

Exemple 1.1.3. Le groupe de tresses pures à r brins PB_r est le groupe fondamental de l'espace de configuration de r points dans le plan : $PB_r \cong \pi_1(\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r))$. Il y a une action évidente du groupe symétrique Σ_r sur $\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r)$, et le groupe de tresse « standard » B_r est le groupe fondamental du quotient : $B_r \cong \pi_1(\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r)/\Sigma_r)$, cf. Figure 1.2.

Ces espaces sont des espaces d'Eilenberg–MacLane de type $K(\pi, 1)$. On peut donc par exemple calculer la (co)homologie du groupe de tresses en calculant la (co)homologie des espaces de configuration du plan. On peut également définir les groupes de tresses des surfaces comme les groupes fondamentaux des espaces de configuration des surfaces et obtenir des calculs similaires.

Exemple 1.1.4. Les espaces de lacets et les espaces de modules de courbes complexes. Ces applications sont liées à la théorie des opérades, voir le Chapitre 4.

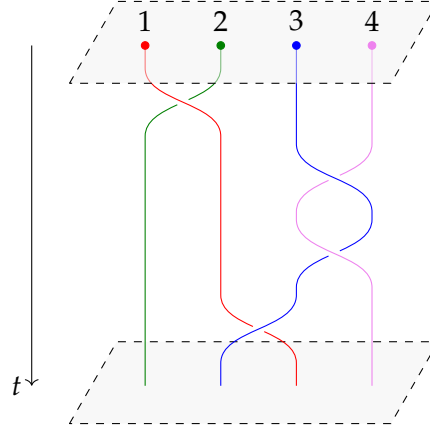


FIG. 1.2 : Tresse vue comme un chemin dans $\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}$.

Exemple 1.1.5. Le calcul des plongements de Goodwillie et Weiss [GW99] (voir p.ex. Boavida de Brito et Weiss [BW18] pour le lien avec les espaces de configuration). L'objet de ce calcul est l'espace des plongements $\text{Emb}(M, N)$ entre deux variétés fixées. Un plongement $f : M \hookrightarrow N$ est en particulier injectif et induit donc une suite d'applications

$$f_k : \text{Conf}_M(k) \rightarrow \text{Conf}_N(k), (x_1, \dots, x_k) \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_k)) \quad (1.1.6)$$

qui sont toutes « compatibles » entre elles en un sens précis. Dans le calcul des plongements, l'espace $\text{Emb}(M, N)$ est approximé à l'aide de suites similaires d'applications $f_k : \text{Conf}_M(k) \rightarrow \text{Conf}_N(k)$ qui sont compatibles « à homotopie près ». Sous de bonnes conditions (notamment $\dim N - \dim M \geq 3$) ce processus permet de retrouver le type d'homotopie de l'espace $\text{Emb}(M, N)$.

(Pour être précis, les espaces de configuration Conf_M permettent de retrouver le type d'homotopie de l'espace des plongements parallélisés $\text{Emb}^{\text{fr}}(M, N)$ entre deux variétés parallélisées; pour retrouver le type d'homotopie de $\text{Emb}(M, N)$ il faut utiliser des espaces de configuration à repère, cf. Section 4.3.2.)

Exemple 1.1.7. La cohomologie de Gelfand–Fuks $H_{\text{cont}}^*(\Gamma_c(M, TM))$ est un invariant qui apparaît dans l'étude des classes caractéristiques des foliations (cf. p.ex. Morita [Mor01]). Cohen et Taylor [CT78] ont construit une suite spectrale dont la page E^2 s'exprime à l'aide de la cohomologie des espaces de configuration (décorés) de M et qui converge vers la cohomologie de Gelfand–Fuks de M .

Exemple 1.1.8 (Snaith [Sna74]). L'espace des fonctions à support compact $\text{Map}_c(\mathbb{R}^d, -)$ se scinde stablement en termes de suspensions d'espaces de configuration de \mathbb{R}^d décorés. Plus précisément, si X est une variété compacte à bord, alors il y a une équivalence d'homotopie stable (c.-à-d. une application qui induit un isomorphisme sur chaque groupes d'homotopie après avoir appliqué le foncteur « suspension » suffisamment de fois) entre Map_c et le bouquet des espaces de configurations de \mathbb{R}^d décorés par X :

$$\text{Map}_c(\mathbb{R}^d, \Sigma^d(X/\partial X)) \underset{\text{st}}{\simeq} \bigvee_{n \geq 0} \text{Conf}_{\mathbb{R}^d}(n; X). \quad (1.1.9)$$

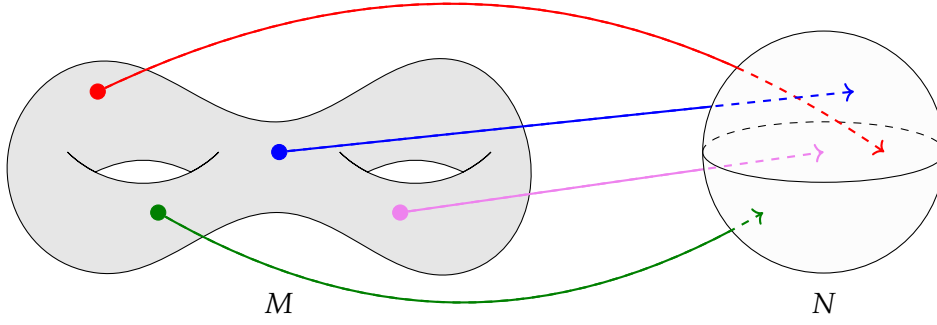


FIG. 1.3 : Calcul des plongements : on approxime $\text{Emb}(M, N)$ par des applications entre espaces de configuration avec des relations de compatibilité et on considère la limite quand le nombre de points tend vers l'infini.

Exemple 1.1.10. En mécanique, les espaces de configuration tels que présentés ci-dessus sont un cas particulier de la notion plus générale d'espace de configuration d'un système physique (dans le cas où le système se compose simplement de particules discrètes).

Exemple 1.1.11 (Planification de trajets). Supposons que l'on se donne un ensemble de robots dans un espace M dirigés par un ordinateur central, et que l'on souhaite déplacer tous les robots en même temps depuis une position de départ vers une position d'arrivée. Les robots ne pouvant pas occuper le même espace en même temps, il s'agit donc essentiellement de trouver un chemin dans l'espace de configuration $\text{Conf}_M(r)$, où r est le nombre de robots. Plus précisément, si l'on note $P\text{Conf}_M(r) = \text{Map}([0, 1], \text{Conf}_M(r))$ l'espace de tous les chemins possibles dans $\text{Conf}_M(r)$ et que l'on note

$$p : P\text{Conf}_M(r) \rightarrow \text{Conf}_M(r) \times \text{Conf}_M(r), \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1)), \quad (1.1.12)$$

il s'agit de trouver une section de p . À moins que $\text{Conf}_M(r)$ soit contractile – ce qui est que rarement le cas – une telle section ne peut être continue. Cependant, il existe un invariant homotopique, la complexité topologique, qui permettra de trouver le nombre minimal de domaines de continuité pour une telle section (cf. Farber [Far03]).

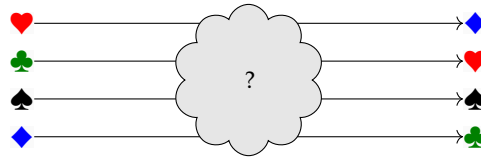


FIG. 1.4 : Planification de trajet : comment trouver des chemins qui ne s'intersectent pas et qui dépendent continûment des positions de départ de tous les points ?

1.2 Invariance homotopique

Dans toutes ces applications, connaître le type d'homotopie de $\text{Conf}_M(r)$ est crucial. Rappelons ce que l'on entend par « type d'homotopie ».

Définition 1.2.1. Deux applications $f, g : A \rightarrow X$ sont *homotopes* s'il existe une application $H : A \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$. On note alors $f \simeq g$.

Définition 1.2.2. Une application $f : A \rightarrow X$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : X \rightarrow A$ telle que $f \circ g \simeq \text{id}_X$ et $g \circ f \simeq \text{id}_A$. Si une telle équivalence d'homotopie existe, on dit que A et X ont le même *type d'homotopie*, ou encore que A et X sont *homotopiquement équivalents*.

Exemple 1.2.3. On voit par exemple que \mathbb{R} a le même type d'homotopie qu'un singleton. Soit $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'inclusion et $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ l'application constante. Alors $g \circ f = \text{id}_{\{0\}}$, et $H : (x, t) \mapsto tx$ est une homotopie entre $f \circ g$ et $\text{id}_{\mathbb{R}}$.

Considérons maintenant les espaces de configuration. Il est clair que deux espaces homéomorphes ont des espaces de configuration homéomorphes. Une question très naturelle est la suivante : si deux espaces sont homotopiquement équivalents, est-ce que leurs espaces de configuration le sont ? Ce n'est pas une question facile : dans la définition, rien n'indique qu'une équivalence d'homotopie est injective. Il n'est donc même pas évident de construire une application entre les espaces de configuration d'espaces homotopiquement équivalents.

En fait, l'Exemple 1.2.3 permet immédiatement de donner une réponse négative à cette question. En effet, $\text{Conf}_{\{0\}}(2)$ est vide, alors que $\text{Conf}_{\mathbb{R}}(2)$ ne l'est pas ; ces deux espaces ne sont donc pas homotopiquement équivalents.

La plupart des applications ci-dessus concernent les espaces de configuration de *variétés*. Parmi les variétés, les variétés compactes sans bord se comportent généralement mieux que les autres et il existe un contre-exemple immédiat dans le cas à bord : $[0, 1] \simeq \{0\}$ mais $\text{Conf}_{[0,1]}(r) \neq \text{Conf}_{\{0\}}(r)$. Il pourrait donc être tentant de penser que si l'on se restreint aux variétés compactes sans bord, alors la réponse à la conjecture pourrait être positive.

La conjecture est vraie jusqu'en dimension 2 pour des raisons triviales. En effet, si deux variétés compactes sans bord M et N de dimension ≤ 2 sont homotopiquement équivalentes, alors elles sont homéomorphes : c'est évident en dimension 0, il n'existe qu'une seule variété compacte sans bord en dimension 1, et en dimension 2 cela résulte de la classification des surfaces. Sous ces conditions, les espaces de configuration sont donc homéomorphes et donc en particulier homotopiquement équivalents.

Plusieurs résultats laissaient penser que cette conjecture pouvait être vraie en dimension plus grande. Des résultats de Bödigheimer, Cohen et Taylor [BCT89] et Bendersky et Gitler [BG91] montrent que l'homologie de $\text{Conf}_M(r)$ ne dépend que du type d'homotopie de M (sous certaines hypothèses de dimension et/ou de caractéristique du corps de base). Levitt [Lev95] a montré que l'espace des lacets $\Omega\text{Conf}_M(r)$ est un invariant d'homotopie, donc en particulier les groupes d'homotopie de $\text{Conf}_M(r)$ ne dépendent que du type d'homotopie de M . Aouina et Klein [AK04] ont montré que le type d'homotopie stable de $\text{Conf}_M(r)$ est aussi un invariant d'homotopie.

Un contre-exemple à la conjecture a cependant été trouvé il y a quelques années :

Théorème 1.2.4 (Longoni et Salvatore [LS05]). *Il existe deux variétés compactes sans bord $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ de dimension 3 qui ont le même type d'homotopie mais dont les espaces de configuration n'ont pas le même type d'homotopie.*

Le contre-exemple en question est donné par des espaces lenticulaires. Voyons \mathbb{S}^3 comme la sphère unité de \mathbb{C}^2 et notons $\zeta = e^{2i\pi/p}$. On peut alors définir une action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur \mathbb{S}^3 par $(z, z') \mapsto (\zeta z, \zeta^q z')$. Cette action est libre si p et q sont premiers entre eux. Le quotient $L_{p,q}$, appelé espace lenticulaire, est donc encore une variété de dimension 3 dans ce cas.

Exemple 1.2.5. L'espace $L_{2,1}$ est l'espace projectif réel \mathbb{RP}^3 .

On peut également voir $L_{p,q}$ comme un quotient de la boule \mathbb{D}^3 , voir la Figure 1.5. Commençons par découper son bord $\partial\mathbb{D}^3 = \mathbb{S}^2$ en $2p$ triangle : la moitié des triangles partent du pôle nord, l'autre moitié du pôle sud, et ils se rejoignent par paires à l'équateur (qui est lui même découpé en p segment). On identifie ensuite le triangle i du nord avec le triangle $i + q$ du sud pour obtenir $L_{p,q}$.

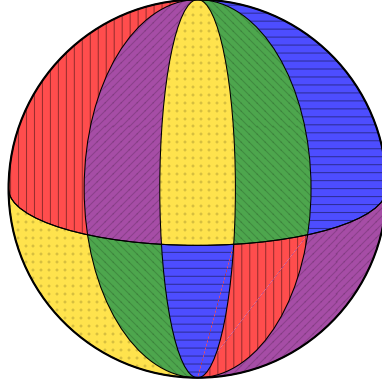


FIG. 1.5 : Triangles identifiés dans $\partial\mathbb{D}^3 = \mathbb{S}^2$ pour donner $L_{5,3}$.

La preuve de Longoni et Salvatore fait appel aux produits de Massey.

Définition 1.2.6. Soit X un espace topologique et $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in H^*(X)$ trois classes telles que $[\alpha \smile \beta] = 0 = [\beta \smile \gamma]$. Le produit de Massey $\langle [\alpha], [\beta], [\gamma] \rangle$ est la classe $[\lambda\gamma - (-1)^{|\alpha|}\alpha\mu]$, où $d\lambda = \alpha \smile \beta$ et $d\mu = \beta \smile \gamma$. Ce produit est bien défini modulo l'idéal $[\alpha] \cdot H^*(X) + H^*(X) \cdot [\gamma] \subset H^*(X)$.

Longoni et Salvatore ont montré que le revêtement universel de $\text{Conf}_{L_{7,1}}(r)$ a le type d'homotopie de $(S^2)^{\vee 6} \vee S^3$. On peut donc en déduire par un calcul simple que tous ses produits de Massey sont nuls. Ils ont d'autre part trouvé un produit de Massey non trivial dans le revêtement universel de $\text{Conf}_{L_{7,2}}(2)$. Ces deux espaces de configuration ne peuvent donc pas avoir le même type d'homotopie, ce qui permet de conclure.

Les espaces lenticulaires ne sont pas simplement connexes : il existe des lacets que l'on ne peut pas contracter en un point. Plus précisément, leur groupe fondamental est

$\pi_1(L_{p,q}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (voir Section 1.3 pour la définition de π_1). La conjecture suivante reste donc ouverte :

Conjecture 1.2.7. *Soit M et N deux variétés compactes sans bord simplement connexes. Si M et N ont le même type d'homotopie, alors $\text{Conf}_M(r)$ et $\text{Conf}_N(r)$ ont le même type d'homotopie pour tout r .*

Remarque 1.2.8. Deux variétés compactes sans bord simplement connexes ont le même type d'homotopie si et seulement si elles ont le même type d'homotopie *simple*. Une conjecture plus générale dirait que si deux variétés compactes sans bord ont le même type d'homotopie simple, alors leurs espaces de configuration aussi.

1.3 Théorie de l'homotopie rationnelle

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur la théorie de l'homotopie *rationnelle*, et plus tard réelle. En schématisant, cela consiste à étudier le type d'homotopie d'un espace topologique « modulo la torsion ». Cette théorie perd une quantité non-négligeable d'information au sujet des espaces topologiques, mais elle a l'avantage indéniable d'être *calculable* : le type d'homotopie rationnelle d'un espace est complètement décrit par un « modèle » algébrique.

Pour motiver les définitions suivantes, commençons par quelques rappels.

Définition 1.3.1. Soit X un espace topologique. On définit $\pi_0(X)$ comme l'ensemble des composantes connexes par arcs de X . Soit $n \geq 1$ est un entier et $x_0 \in X$ est un point base. On définit $\pi_n(X, x_0)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'application pointées $(\mathbb{S}^n, *) \rightarrow (X, x_0)$. Cet ensemble forme un groupe via la concaténation des chemins, qui est abélien si $n \geq 2$.

Définition 1.3.2. Une *équivalence d'homotopie faible* est une application $f : X \rightarrow Y$ si $\pi_0(f)$ est une bijection et pour tout $x \in X$, $\pi_n(f, x)$ est un isomorphisme. On dit alors que X et Y ont le même *type d'homotopie faible* et on note $X \simeq Y$.

On notera généralement les équivalences d'homotopie faible par le symbole \sim au-dessus de la flèche, par exemple $f : X \xrightarrow{\sim} Y$.

Remarque 1.3.3. Une équivalence d'homotopie est toujours une équivalence d'homotopie faible. La réciproque est fautive : une équivalence d'homotopie faible n'est pas nécessairement inversible à homotopie près. Pour obtenir une relation d'équivalence dans la définition précédente, il est donc nécessaire de considérer des zigzags d'équivalences faibles. On dit donc plus généralement que deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie s'il existe un diagramme de la forme :

$$X \xleftarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} X_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} Y. \quad (1.3.4)$$

Théorème 1.3.5 (Whitehead [Whi49]). *Si X et Y sont deux complexes CW, alors ils ont le même type d'homotopie si et seulement s'ils ont le même type d'homotopie faible.*

À partir de maintenant, nous allons nous concentrer sur les espaces simplement connexes :

Définition 1.3.6. Un espace X est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si $\pi_1(X) = 0$ (pour n'importe quel point base).

Remarque 1.3.7. Tout ce qui suit peut se faire dans un cadre plus général. La théorie «classique» s'applique aux espaces nilpotents de type fini, voir Sullivan [Sul77] pour les fondations ou Félix, Halperin et Thomas [FHT01] pour un texte de référence. Depuis peu, la théorie a été étendue aux espaces connexes par arcs (Félix, Halperin et Thomas [FHT15]).

Dans ces notes, nous nous concentrons sur les espaces simplement connexes car les théorèmes sont plus simples à énoncer et nos applications se situent dans ce cadre. Notons que dans ce cadre, il n'est plus nécessaire de se préoccuper des points base.

En s'inspirant de la Définition 1.3.2, on obtient la définition suivante qui fonde la théorie de l'homotopie rationnelle :

Définition 1.3.8. Soit X et Y deux espaces simplement connexes et de type fini. Une *équivalence (d'homotopie) rationnelle* est une application $f : X \rightarrow Y$ telle que $\pi_n(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 2$. On dit alors que X et Y ont le même *type d'homotopie rationnelle* et on note $X \simeq_{\mathbb{Q}} Y$.

Remarque 1.3.9. Comme pour les équivalences faibles, il faut en général considérer des zigzags de telles applications.

Remarque 1.3.10. On peut montrer que si les espaces concernés sont simplement connexes et de type fini, alors f est une équivalence rationnelle si et seulement si $H_*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme, si et seulement si $H^*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

En revenant aux espaces de configuration, on peut énoncer la conjecture suivante, voir par exemple Félix, Halperin et Thomas [FHT01, Section 39, Problem 8] :

Conjecture 1.3.11. Soit M et N deux variétés compactes sans bord simplement connexes. Si $M \simeq_{\mathbb{Q}} N$ alors $\text{Conf}_M(r) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Conf}_N(r)$ pour tout $r \geq 0$.

Remarque 1.3.12. Même si la Conjecture 1.2.7 s'avérait être vraie, cela ne résoudrait pas automatiquement la Conjecture 1.3.11. En effet, la conclusion de la seconde conjecture ($\text{Conf}_M(r) \simeq_{\mathbb{Q}} \text{Conf}_N(r)$) est plus faible que celle de la première, mais son hypothèse ($M \simeq_{\mathbb{Q}} N$) est plus faible aussi.

Passons maintenant à la partie algébrique de la théorie de l'homotopie rationnelle, ce qui nous permettra de raffiner la conjecture ci-dessus. L'idée fondatrice de Sullivan [Sul77] est que le type d'homotopie rationnelle d'un espace (simplement connexe de type fini) est encodé par une donnée purement algébrique, à savoir une certaine algèbre différentielle-graduée commutative.

Remarque 1.3.13. Il existe une théorie due à Quillen [Qui69] qui encode les types d'homotopie rationnelles via des algèbres de Lie différentielles-graduées. Cette théorie est, en un certain sens, duale – de Koszul – à celle de Sullivan.

Définition 1.3.14. Une *algèbre différentielle graduée commutative* (ADGC) est un complexe de cochaînes $A = \{A^n\}_{n \geq 0}$ avec une différentielle $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$, une unité $1 \in A^0$ et un produit $A \otimes A \rightarrow A$ qui est unitaire, associatif et gradué-commutatif. Si V est un complexe de cochaînes, on note $S(V)$ l'ADGC libre sur V .

Définition 1.3.15. Un *quasi-isomorphisme* d'ADGC est un morphisme d'ADGC qui induit un isomorphisme en cohomologie. Si deux ADGC A et B sont quasi-isomorphes, on note $A \simeq B$.

Exemple 1.3.16. Une algèbre classique est une ADGC concentrée en degré zéro. La cohomologie d'un espace topologique est une ADGC dont la différentielle est nulle.

Nous allons maintenant définir l'ADGC des formes polynomiales par morceaux sur un espace topologique. La définition est similaire à la définition de la cohomologie singulière. On commence par définir d'abord les formes sur le simplexe Δ^n (cf. Figure 1.6). Une forme sur un espace X est ensuite définie en considérant toutes les manières d'envoyer le simplexe dans X .

Définition 1.3.17. Le *simplexe standard* Δ^n est l'espace topologique donné par :

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i, t_i \geq 0; t_0 + \dots + t_n = 1\}. \quad (1.3.18)$$

Les cofaces et codégénérescences sont données par (où $0 \leq i, j \leq n$) :

$$\begin{aligned} \delta^i : \Delta^{n-1} &\rightarrow \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}), \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma^j : \Delta^{n+1} &\rightarrow \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_{n+1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

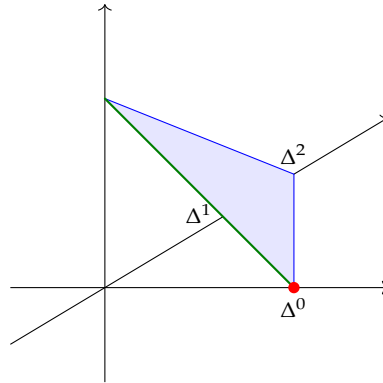


FIG. 1.6 : Les trois premiers simplexes standards $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.3.21. L'*algèbre des formes polynomiales* sur Δ^n , notée Ω_n , est le quotient de l'algèbre graduée-commutative libre engendrée par les symboles $t_0, \dots, t_n, dt_0, \dots, dt_n$ par l'idéal engendré par les relations $t_0 + \dots + t_n = 1$ et $dt_0 + \dots + dt_n = 0$. La différentielle est donnée sur les générateurs par $d(t_i) = dt_i$ et $d(dt_i) = 0$.

La collection $\Omega_\bullet = \{\Omega_n\}_{n \geq 0}$ est une ADGC *simpliciale* : il existe des opérations, duales aux opérations δ^i et σ^j ci-dessus et qui vérifient un certain nombre de relations :

$$\begin{aligned} d_i : \Omega_n &\rightarrow \Omega_{n-1} \quad (0 \leq i \leq n) & s_j : \Omega_n &\rightarrow \Omega_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n) \\ t_k &\mapsto \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ 0, & \text{si } k = i, \\ t_{k-1}, & \text{si } k > i; \end{cases} & t_k &\mapsto \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ t_k + t_{k+1}, & \text{si } k = i, \\ t_{k+1}, & \text{si } k > i. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Définition 1.3.23. Soit X un espace quelconque. L'ADGC des formes polynomiales par morceaux sur X est dénotée par $\Omega_{\text{PL}}^*(X)$. Elle est donnée en degré k par

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PL}}^k(X) &= \text{Mor}_{\text{sSet}}(S_\bullet(X), \Omega_\bullet^k) \\ &= \{(\omega_f)_{f:\Delta^n \rightarrow X} \mid \omega_f \in \Omega_n^k, d_i(\omega_f) = \omega_{f \circ \delta^i}, s_j(\omega_f) = \omega_{f \circ \sigma^j}\}. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

La différentielle et le produit sont défini terme à terme.

Exemple 1.3.25. Si X est triangulé, on peut définir une ADGC quasi-isomorphe à $\Omega_{\text{PL}}^*(X)$ de manière plus simple : un élément de degré n est donné par une forme de degré n sur chaque simplexe de X , en imposant la condition que si deux simplexes se touchent le long d'une face, alors les deux formes correspondantes coïncident sur cette face.

Théorème 1.3.26 (Sullivan [Sul77]). Soit X un espace topologique simplement connexe de type fini. Alors $\Omega_{\text{PL}}^*(X)$ est quasi-isomorphe, en tant qu'ADG (non-commutative), à l'algèbre des cochaînes singulières de X à coefficients rationnels $C^*(X; \mathbb{Q})$.

Théorème 1.3.27 (Sullivan [Sul77]). Le foncteur Ω_{PL}^* induit une équivalence entre

- la catégorie des espaces topologiques simplement connexes de type fini, à équivalences rationnelles près;
- la catégorie des ADGC de type fini A telles que $A^0 = \mathbb{Q}$ et $A^1 = 0$, à quasi-isomorphismes près.

Remarque 1.3.28. Pour rendre ce théorème précis, il est nécessaire de passer par la catégorie des ensembles simpliciaux. Cela est notamment dû au fait que même si un espace X est simplement connexe, on n'a pas nécessairement $\Omega_{\text{PL}}^0(X) = \mathbb{Q}$ et $\Omega_{\text{PL}}^1(X) = 0$ avec la définition ci-dessus.

Corollaire 1.3.29. Soit X et Y deux espaces topologiques simplement connexes de type fini. Alors

$$X \simeq_{\mathbb{Q}} Y \iff \Omega_{\text{PL}}^*(X) \simeq \Omega_{\text{PL}}^*(Y). \quad (1.3.30)$$

Définition 1.3.31. Soit X un espace topologique. Un *modèle* (de Sullivan) de X est une ADGC A quasi-isomorphe à $\Omega_{\text{PL}}^*(X)$.

Grâce au théorème de Sullivan, un modèle de X « connaît » complètement le type d'homotopie rationnelle de X . En particulier, si deux espaces ont le même modèle, alors ils sont rationnellement équivalents. Il est possible de faire de nombreux calculs grâce à un modèle A de X , par exemple :

1 Espaces de configuration de variétés

- il y a un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(A)$;
- les produits de Massey de X peuvent se calculer en utilisant le théorème du transfert homotopique ;
- les groupes d'homotopie rationnelles $\pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sont donnés par la cohomologie de Harrison $H_{\text{Harr}}^*(A)$ de l'ADGC A ;
- le crochet de Lie naturel qui existe sur la cohomologie de Harrison de A correspond au crochet de Whitehead sur les groupes d'homotopie.

Exemple 1.3.32. Considérons la sphère \mathbb{S}^n de dimension n . On peut démontrer assez facilement qu'un modèle de \mathbb{S}^n est donné par sa cohomologie $H^*(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Q}1 \oplus \mathbb{Q}v$ où $\deg v = n$ et $v^2 = 0$. La sphère est donc un exemple d'espace formel (voir Section 1.4). On peut aussi calculer la cohomologie de Harrison de $H^*(\mathbb{S}^n)$ pour retrouver un théorème de Serre : si n est impair alors $\pi_n(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et tous les autres groupes d'homotopie sont de torsion ; si n est pair alors $\pi_n(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \pi_{2n-1}(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et tous les autres groupes d'homotopie sont de torsion.

En revenant une fois de plus aux espaces de configuration, on arrive à une version plus fine de la conjecture précédente :

Conjecture 1.3.33. *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Il est possible de trouver un modèle explicite de $\text{Conf}_M(r)$ qui ne dépend que d'un modèle de M .*

On peut affaiblir encore un peu cette conjecture en considérant le type d'homotopie réelle.

Définition 1.3.34. Deux espaces simplement connexes de type fini X et Y ont le même *type d'homotopie réelle* si $\Omega_{\text{PL}}^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $\Omega_{\text{PL}}^*(Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ sont quasi-isomorphes. Un *modèle réel* d'un tel espace X est une ADGC (à coefficients réels) quasi-isomorphe à $\Omega_{\text{PL}}^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Cette notion est légèrement plus faible que la notion de type d'homotopie rationnelle. On peut néanmoins faire les mêmes calculs avec un modèle réel qu'avec un modèle rationnel.

Exemple 1.3.35 ([FOT08, Exemple 2.38]). Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ un paramètre rationnel positif. On définit une ADGC

$$A_{\alpha} = (S(e_2, x_4, y_7, z_9), d_{\alpha}), \quad (1.3.36)$$

où les indices dénotent le degré, en posant comme différentielle :

$$d_{\alpha}e = 0, \quad d_{\alpha}x = 0, \quad d_{\alpha}y = x^2 + \alpha e^4, \quad d_{\alpha}z = e^5. \quad (1.3.37)$$

Alors on peut montrer que A_{α} et $A_{\alpha'}$ sont quasi-isomorphes si et seulement si α/α' est un carré. Elles sont donc toujours quasi-isomorphes sur \mathbb{R} , mais pas sur \mathbb{Q} .

Exemple 1.3.38 ([FOT08, Exemple 3.7]). La théorie se généralise de manière évidente à \mathbb{C} . Les sommes connexes $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ et $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ ont le même type d'homotopie complexe, mais pas réelle. On peut le voir en considérant leurs formes d'intersection, qui sont des formes quadratiques sur leurs cohomologies en degré 2 : elles sont respectivement données par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La Conjecture 1.3.11 peut donc être raffinée sous la forme suivante :

Conjecture 1.3.39. *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Il est possible de trouver un modèle réel explicite de $\text{Conf}_M(r)$ qui ne dépend que d'un modèle réel de M .*

Une réponse positive à cette conjecture permettrait de faire des calculs sur le type d'homotopie rationnelle de $\text{Conf}_M(r)$ (cohomologie, groupes d'homotopie, etc.) simplement en connaissant le type d'homotopie de M .

1.4 Formalité de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$

La brique de base des variétés est l'espace euclidien \mathbb{R}^n . En quelque sorte, $\text{Conf}_M(r)$ peut s'obtenir en recollant des $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(k)$ pour $k \leq r$ de manière assez compliqué, les points pouvant être dans des cartes différentes de la variété. Pour comprendre le type d'homotopie des espaces de configuration de M , nous allons donc commencer par nous intéresser à ceux de \mathbb{R}^n .

La cohomologie des espaces de configuration de \mathbb{R}^n est bien connue :

Théorème 1.4.1 (Arnold [Arn69], Cohen [Coh76]). *La cohomologie de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ admet la présentation suivante, où $\deg \omega_{ij} = n - 1$:*

$$H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)) = \frac{S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r}}{(\omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0)}. \quad (1.4.2)$$

Intuitivement, la classe ω_{ij} « compte » combien de fois les points i et j tournent l'un autour de l'autre. Plus formellement, notons que l'espace $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2)$ est homotopiquement équivalent à une sphère : à homotopie près, on peut fixer le premier point en l'origine et fixer la distance entre les deux points à 1. On obtient ainsi une application quotient $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^{n-1}$ qui est une équivalence d'homotopie. Soit $p_{ij} : \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r) \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ l'application donnée par $p_{ij}(x_1, \dots, x_n) = [x_i, x_j]$. La classe ω_{ij} est le tiré en arrière de la forme volume de la sphère le long de p_{ij} . Les relations peuvent s'interpréter ainsi :

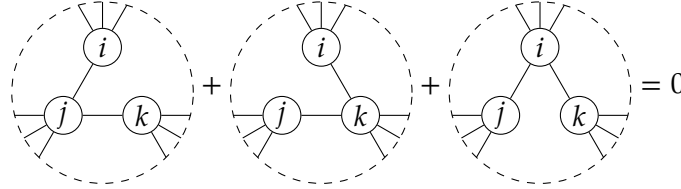
- la relation $\omega_{ij} = (-1)^n \omega_{ji}$ dit que renverser l'orientation de la sphère peut introduire un signe ;
- la relation $\omega_{ij}^2 = 0$ dit que la forme volume est de carré nulle ;
- la relation $\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0$ est en un sens duale à la relation de Jacobi qui décrit ce qui se passe quand trois points interagissent en tournant autour de centres communs (par exemple les points 1, 2 et 4 sur la Figure 1.7)

Esquisse de preuve. Considérons la projection $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r) \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r-1)$ qui oublie le dernier point d'une configuration. Cette application est une fibration [FN62a] dont la fibre est $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1^0, \dots, x_{r-1}^0\}$, où $x^0 \in \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r-1)$ est un point base quelconque. Cette fibre a le type d'homotopie du bouquet de sphères $\bigvee^{r-1} \mathbb{S}^{n-1}$.

Grâce à la suite spectrale de Serre, on peut montrer par récurrence que les nombres de Betti de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ sont majorés par les dimensions du côté droit de l'Équation (1.4.2) en chaque degré. De plus, si l'égalité est atteinte, alors le groupe de cohomologie considéré est libre en tant que groupe abélien.

Considérons l'application entre le côté droit de l'Équation (1.4.2) et $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r))$ qui envoie ω_{ij} sur la forme volume de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2)$ tirée en arrière le long de p_{ij} . On vérifie que les relations entre les générateurs sont bien satisfaites et que l'on a donc bien défini ainsi une application d'algèbres graduées commutatives. En utilisant le résultat sur les nombres de Betti, il suffit de montrer que cette application est injective pour conclure.

On peut interpréter le côté droit de l'équation de la façon suivante. Ses éléments sont les combinaisons linéaires de graphes à r sommets, sans arêtes doubles ni boucles. Un tel graphe d'arêtes $(i_1 j_1), \dots, (i_l j_l)$ correspond au mot $\omega_{i_1 j_1} \dots \omega_{i_l j_l}$. Si n est pair alors l'ensemble des arêtes est ordonné; si n est impair alors les arêtes sont orientées. Un changement d'ordre, resp. un changement d'orientation, induit un changement de signe. Enfin, l'espace est quotienté par la relation locale suivante :



$$(1.4.3)$$

Le produit consiste à recoller les graphes le long de leur sommets.

Pour chacun de ces graphes, on peut fabriquer une classe d'homologie qui s'apparie de façon non nulle avec la classe de cohomologie associée au graphe. La méthode utilise le point de vue des « systèmes solaires » (dû à Cohen, cf. [Sin13, Proposition 2.2]). Étant donnée une forêt binaire à n feuilles, on peut fabriquer une classe d'homologie comme dans la Figure 1.7. L'accouplement homologie-cohomologie induit un accouplement graphes-arbres, et on peut montrer de façon combinatoire que cet accouplement n'est pas dégénéré [Sin13, Theorem 4.7], ce qui permet de conclure. \square

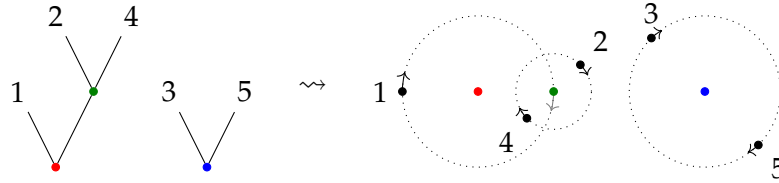


FIG. 1.7 : Systèmes solaires : un arbre à 5 feuilles et 3 sommets internes induit une classe d'homologie dans $H_{3(n-1)}(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(5))$; ici, $n = 2$.

En général, la cohomologie d'un espace topologique ne donne qu'une information partielle sur l'espace en question. Cependant, pour une certaine classe d'espaces, cette information est suffisante pour retrouver le type d'homotopie rationnelle.

Définition 1.4.4. Un espace X est dit *formel* si $H^*(X; \mathbb{Q})$ est un modèle de X .

Exemple 1.4.5. Les sphères sont formelles (Exemple 1.3.32).

Exemple 1.4.6 ([FOT08, Theorem 1.34]). Un H-espace associatif est un espace X muni d’une application $\mu : X \times X \rightarrow X$ qui est associative et unitaire à homotopie près, c.-à-d. $\mu(\mu(-, -), -) \simeq \mu(-, \mu(-, -))$ et il existe un élément $e \in X$ tel que $\mu(-, e) \simeq \mu(e, -) \simeq \text{id}_X$. Un tel espace est formel : la cohomologie d’un H-espace est une algèbre extérieure $\Lambda(z_1, \dots, z_k)$ sur un certain nombre de variables de degrés impairs. Alors on peut définir un quasi-isomorphisme $\Lambda(z_1, \dots, z_k) \rightarrow \Omega_{\text{PL}}^*(X)$ en choisissant n’importe quels représentants fermés des z_i .

Exemple 1.4.7 ([FOT08, Proposition 2.99]). Si M est une variété de dimension $\dim M \leq 4p - 2$ et que M est $(p - 1)$ -connexe, alors M est formelle.

Définition 1.4.8. Une *variété de Kähler* est une variété complexe munie d’une métrique Hermitienne h dont la 2-forme associée $\omega = -\mathcal{I}h$ est fermée.

Théorème 1.4.9 (Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan [DGMS75]). *Les variétés de Kähler compactes sont formelles. (Plus généralement, tout espace vérifiant le lemme $\partial\bar{\partial}$, p.ex. les variétés de Moisëzon, sont formelles.)*

Théorème 1.4.10 (Arnold [Arn69]). *Les espaces de configuration de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sont formels.*

Démonstration. Bien que ces espaces soient des variétés de Kähler, ils ne sont pas compacts, le théorème précédent ne s’applique donc pas. Cependant, il existe une application directe :

$$H^*(\text{Conf}_r(\mathbb{C})) \rightarrow \Omega_{\text{dR}}^*(\text{Conf}_r(\mathbb{C}); \mathbb{C}), \quad \omega_{ij} \mapsto d \log(z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}. \quad (1.4.11)$$

On vérifie par un calcul que les formes qui apparaissent vérifient strictement les relations d’Arnold, et elles sont bien sûr fermées. Cette application est clairement surjective en cohomologie, donc comme les deux ADGC ont évidemment la même cohomologie, on conclut que l’application est un quasi-isomorphisme. Cela montre que $\text{Conf}_r(\mathbb{C})$ est formel sur \mathbb{C} . Grâce à un théorème de descente [Sul77, Theorem 12.7], la formalité sur \mathbb{Q} est équivalente à la formalité sur n’importe quel corps de caractéristique nulle, ce qui permet de conclure. \square

Cette démonstration ne marche pas pour $n \geq 3$. Kontsevich a montré le théorème suivant, par une méthode assez différente (plus tard raffinée par Lambrechts–Volić pour tenir compte du type d’homotopie réelle) :

Théorème 1.4.12 (Kontsevich [Kon99] et Lambrechts et Volić [LV14]). *Les espaces de configuration de \mathbb{R}^n sont formels pour tout $n \geq 2$.*

Nous reverrons la preuve plus en détail par la suite (Section 4.4). En particulier, nous verrons que le résultat de Kontsevich est bien plus profond, et qu’une certaine structure algébrique (d’opérade) sur les espaces de configuration est compatible avec

1 Espaces de configuration de variétés

cette formalité, ce qui a de nombreuses applications. Notons toutefois déjà que la preuve est bien plus compliquée que pour le cas $n = 2$: elle fait intervenir un zigzag :

$$H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)) \leftarrow \cdot \rightarrow \Omega_{\mathrm{PA}}^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)) \quad (1.4.13)$$

où l'ADGC du milieu est une résolution quasi-libre de la cohomologie de $\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)$. Informellement, l'idée est de créer une ADGC où il n'y a plus de relations entre les générateurs, mais où la différentielle encode les relations. Pour construire l'application vers les formes, il ne faut donc plus trouver des formes qui satisfont strictement les relations, mais seulement des formes qui satisfont les relations à homotopie près. C'est cette idée que nous allons utiliser dans le chapitre suivante pour traiter le cas des espaces de configuration des variétés compactes sans bord.

2 Modèle de Lambrechts–Stanley

2.1 Définition du modèle

Nous allons adapter et généraliser le Théorème 1.4.12 aux variétés compactes sans bord. Les espaces de configuration de telles variétés sont rarement formels : les espaces de configuration de surfaces de genre ≥ 2 ne le sont pas, par exemple. Nous allons chercher un modèle de ces espaces de configuration qui est construit de manière similaire au modèle de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ mais qui aura une différentielle non-triviale.

L'idée derrière ce modèle est la suivante. Pour obtenir l'espace de configuration $\text{Conf}_r(M)$, on part du produit cartésien M^r et on retire les diagonales $\Delta_{ij} = \{x \in M^r \mid x_i = x_j\}$. Or, la dualité de Poincaré–Lefschetz nous dit que si W est une variété compacte sans bord orientée de dimension n et $K \subset W$ est un sous-ensemble compact, alors (sous conditions) $H^*(W \setminus K) \cong H_{n-*}(W, K)$. La suite exacte longue en homologie nous dit que $H_{n-*}(W, K)$ est obtenu, en quelque sorte, à partir de l'homologie de W en « tuant » les classes provenant de K . Le modèle que nous allons présenter est construit en appliquant cette idée à $\text{Conf}_r(M)$.

Commençons par quelques prérequis. La dualité de Poincaré nous dit que si M est une variété compacte sans bord orientée, alors il existe une classe $[M] \in H_n(M)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'accouplement $H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{k}, \alpha \otimes \beta \mapsto \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle$ est non-dégénéré (en particulier $H^k(M) = 0$ pour $k > n$). Nous souhaitons généraliser ceci au « niveau des chaînes », plutôt qu'au niveau de la cohomologie :

Définition 2.1.1. Une ADGC à dualité de Poincaré (de dimension formelle n) est une paire (A, ε_A) où :

- A est une ADGC telle que $A^0 = \mathbb{k}$;
- $\varepsilon_A : A^n \rightarrow \mathbb{k}$ est une application linéaire vérifiant $\varepsilon(da) = 0$ pour tout $a \in A^{n-1}$ (« formule de Stokes ») ;
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'accouplement $A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{k}, a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$ est non-dégénéré.

Un modèle à dualité de Poincaré d'une variété compacte sans bord M est un modèle de M munie d'une structure d'ADGC à dualité de Poincaré.

Remarque 2.1.2. Cette définition est une version différentielle-graduée des algèbres de Frobenius commutatives.

Remarque 2.1.3. Dans la notation, on oubliera souvent le ε_A .

Théorème 2.1.4 (Lambrechts et Stanley [LS08b]). Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Il existe un modèle de M qui est une ADGC à dualité de Poincaré sur \mathbb{Q} .

Exemple 2.1.5. Si une variété M est formelle, alors $H^*(M)$ est un modèle à dualité de Poincaré de M .

Définition 2.1.6. Soit A une ADGC à dualité de Poincaré. Soit $\{a_i\}_{i \in I}$ une base graduée de A , et soit $\{a_i^\vee\}_{i \in I}$ sa base duale (c.-à-d. $\varepsilon(a_i a_j^\vee) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in I$). La *classe diagonale* de A est l'élément de $(A \otimes A)^n$ donné par :

$$\Delta_A = \sum_{i \in I} (-1)^{\deg a_i} a_i \otimes a_i^\vee. \quad (2.1.7)$$

Cet élément est un cocycle de degré n ne dépend pas de la base choisie.

En utilisant la notation de Sweedler, nous allons noter $\Delta_A = \sum \Delta'_A \otimes \Delta''_A$.

Exemple 2.1.8. Soit $A = H^*(\Sigma_g)$ la cohomologie d'une surface orientée de genre g , engendrée (linéairement) par les éléments $1, \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, v$. La classe diagonale est alors :

$$\Delta_{H^*(\Sigma_g)} = 1 \otimes v + v \otimes 1 - \sum_{1 \leq i \leq g} (\alpha_i \otimes \beta_i + \beta_i \otimes \alpha_i). \quad (2.1.9)$$

Remarque 2.1.10. Cette classe s'interprète géométriquement. Soit $[M] \in H_n(M)$ la classe fondamentale de M , que l'on pousse en avant le long de l'application $\delta : M \rightarrow M \times M$, $x \mapsto (x, x)$ pour obtenir $\delta_*[M] \in H_n(M \times M)$. Par dualité de Poincaré, cette classe correspond à une classe de cohomologie dans $H^{2n-n}(M \times M)$, qui est la classe diagonale.

Lemme 2.1.11. La classe diagonale vérifie $(1 \otimes a)\Delta_A = (a \otimes 1)\Delta_A$ pour tout $a \in A$. De plus, $\sum \varepsilon(a \Delta'_A) \Delta''_A = a$ pour tout $a \in A$.

Nous aurons besoin de la notation suivante. Soit A une ADGC et $1 \leq i, j \leq r$ des entiers. On définit le morphisme $p_i^* : A \rightarrow A^{\otimes r}$ par

$$p_i^*(a) = 1 \otimes \dots \otimes \underset{\text{position } i}{1 \otimes a \otimes 1} \otimes \dots \otimes 1. \quad (2.1.12)$$

On définit de plus $p_{ij}^* : A \otimes A \rightarrow A^{\otimes r}$ par $p_{ij}^*(a \otimes b) = p_i^*(a) \cdot p_j^*(b)$.

Définition 2.1.13 (Lambrechts et Stanley [LS08a]). Soit A un modèle à dualité de Poincaré d'une variété compacte sans bord simplement connexe M . Le *rième modèle de Lambrechts–Stanley* de M associé à A est l'ADGC :

$$\mathbb{G}_A(r) := (A^{\otimes r} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / I, d). \quad (2.1.14)$$

Le dg-idéal I est engendré par les relations qui apparaissent dans le Théorème 1.4.1 et les relations $p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}$ pour tout $a \in A$ et $1 \leq i \neq j \leq r$. La différentielle $d = d_A + d_{\text{split}}$ est la somme de la différentielle induite par celle de A et de la dérivation qui étend

$$d_{\text{split}}(\omega_{ij}) = p_{ij}^*(\Delta_A). \quad (2.1.15)$$

Exemple 2.1.16. Décrivons $\mathbb{G}_A(r)$ pour r petit :

0. $G_A(0) = \mathbb{Q}$ est effectivement un modèle de $\text{Conf}_M(0) = \{\emptyset\}$.
1. $G_A(1) = A$ est par hypothèse un modèle de $\text{Conf}_M(1) = M$.
2. $G_A(2)$ est donnée par $(A \otimes A \otimes S(\omega_{12}, \omega_{21})/I, d)$. La relation $\omega_{21} = (-1)^n \omega_{12}$ nous permet de nous débarrasser de ω_{21} . Grâce à la relation $\omega_{12}^2 = 0$, on trouve que $G_A(2)$ se décompose en somme directe :

$$G_A(2) \cong ((A \otimes A \otimes \mathbb{Q}1 \oplus A \otimes A \otimes \mathbb{Q}\omega_{12})/I, d). \quad (2.1.17)$$

La dernière relation nous donne $a \otimes 1 \otimes \omega_{12} = 1 \otimes a \otimes \omega_{12}$ pour tout $a \in A$. Comme on considère l'idéal engendré par ces relations, on a donc :

$$G_A(2) \cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes_A A \otimes \omega_{12}, d) \cong (A \otimes A \otimes 1 \oplus A \otimes \omega_{12}, d). \quad (2.1.18)$$

Enfin, la différentielle est donnée par la somme de la différentielle de A et de $d_{\text{split}}(a \otimes \omega_{12}) = (a \otimes 1)\Delta_A = (1 \otimes a)\Delta_A$. En d'autres termes, l'ADGC $G_A(2)$ est le cône de l'application $A \rightarrow A \otimes A$, $a \mapsto (a \otimes 1)\Delta_A = (1 \otimes a)\Delta_A$. Comme cette application est injective, le cône (ou conoyau homotopique) est quasi-isomorphisme au conoyau, c'est-à-dire au quotient $A \otimes A / (\Delta_A)$. Cela fait écho au résultat classique que $H^*(\text{Conf}_M(2)) = H^*(M^2 \setminus \Delta) \cong H^*(M)^{\otimes 2} / (\Delta_M)$.

3. À partir de $r = 3$, l'ADGC $G_A(r)$ n'a plus de description aussi simple. Toutes les classes ne sont plus représentées par des éléments venant de $A^{\otimes r}$: il peut exister des classes non triviales qui doivent se représenter avec des ω_{ij} .

Plus généralement, on peut représenter graphiquement les éléments de $G_A(r)$ par des graphes à r sommets numérotés (sans arêtes doubles ni boucles, les arêtes ne sont pas orientées mais le signe est *a priori* mal défini). Chaque composante connexe du graphe est décoré par un élément de A . La multiplication recolle les graphes le long de leurs sommets et multiplie les décorations des composantes connexes ainsi fusionnées. La différentielle est la somme de toutes les manières de couper une arête en deux, la décoration de la composante connexe correspondante étant multipliée par Δ pour obtenir un élément de $A \otimes A$.

Cette ADGC a déjà beaucoup été étudiée sous une forme ou une autre :

- Cohen et Taylor [CT78] ont décrit une suite spectrale qui converge vers la cohomologie de $\text{Conf}_M(r)$ et dont la page E^2 est précisément $G_{H^*(M)}(r)$. Cette suite spectrale est la suite spectrale de Leray de l'inclusion $\text{Conf}_M(r) \subset M^r$. Interprétées de façon moderne, les différentielles suivantes encodent (informellement) la différence entre $H^*(M)$ et un modèle de M .
- Supposons que M est une variété projective complexe lisse. C'est donc en particulier une variété de Kähler, qui est donc formelle d'après le résultat de Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan [DGMS75]. En s'appuyant sur des travaux préliminaires de Fulton et MacPherson [FM94], Kriz [Kri94] a montré que dans ce cas, $G_{H^*(M)}(r)$ était bien un modèle rationnel de $\text{Conf}_M(r)$. À peu près simultanément, Totaro [Tot96]

a montré que, dans ce cas, la suite spectrale de Cohen–Taylor s’effondre après la page E^2 . Grâce à un résultat de Deligne [Del75], cela entraîne que $H^*(\text{Conf}_r(M))$ est isomorphe à $H^*(G_{H^*(M)}(r))$ en tant qu’algèbre.

- Lambrechts et Stanley [LS04] ont montré que si M est 2-connexe, alors $G_A(2)$ est bien un modèle de $\text{Conf}_M(2)$. Cordova Bulens [Cor15] a généralisé ce résultat aux variétés simplement connexes de dimension paire.
- Bendersky et Gitler [BG91] avaient construit une suite spectrale qui converge vers la cohomologie relative $H^*(M', \Delta_M^{(r)})$, où $\Delta_M^{(r)} = \{x \in M' \mid \exists i \neq j \text{ t.q. } x_i = x_j\}$ est la diagonale épaisse. Par dualité de Poincaré–Lefschetz, cette cohomologie est isomorphe à l’homologie de $\text{Conf}_M(r)$. Félix et Thomas [FT04] et Berceanu, Markl et Papadima [BMP05], ont montré que la page E^2 de cette suite spectrale était isomorphe au dual de $G_{H^*(M)}(r)$.
- Lambrechts et Stanley [LS08a] ont montré par la suite que si M est une variété compacte sans bord simplement connexe, alors la cohomologie de $G_A(r)$ est isomorphe à la cohomologie de $\text{Conf}_M(r)$ comme représentation du groupe symétrique Σ_r , degré par degré.

2.2 Énoncé du théorème et idée de la preuve

Théorème 2.2.1 ([Idr19], voir aussi Campos et Willwacher [CW16]). *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe lisse et soit A n’importe quel modèle à dualité de Poincaré de M . Le modèle de Lambrechts–Stanley $G_A(r)$ est un modèle sur \mathbb{R} de $\text{Conf}_M(r)$ pour tout r .*

Corollaire 2.2.2. *Soit M et N deux variétés comme dans le théorème. Si elles ont le même type d’homotopie réelle, alors leurs espaces de configuration aussi.*

Remarque 2.2.3. Il n’est pas évident que si A et B sont deux ADGC à dualité de Poincaré qui sont quasi-isomorphes, alors $G_A(r)$ et $G_B(r)$ sont quasi-isomorphes. C’est le cas si l’on peut trouver un quasi-isomorphisme direct d’ADGC $f : A \rightarrow B$ vérifiant $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. On notera cependant que l’existence d’un tel quasi-isomorphisme est très contraignante : il doit notamment être injectif, car si $a \neq 0 \in A^k$, alors il existe $a^\vee \in A^{n-k}$ tel que $\varepsilon_A(aa^\vee) = 1$. Mais alors $\varepsilon_B(f(a)f(a^\vee)) = 1$ et donc $f(a) \neq 0$. Lambrechts et Stanley [LS08b] ont montré que si $n \geq 7$, $A^0 = B^0 = \mathbb{k}$, $A^1 = A^2 = B^1 = B^2 = 0$ et $H^3(A) = H^3(B) = 0$, alors il existe un zigzag $A \rightarrow C \leftarrow B$ de quasi-isomorphismes d’ADGC à dualité de Poincaré. Mais ces conditions sont très restrictives.

Stratégie globale. La preuve est une adaptation et généralisation de celle de Kontsevich sur la formalité des espaces de configuration de \mathbb{R}^n . Les grandes étapes sont les suivantes :

1. Il est (probablement) impossible de trouver des formes sur $\text{Conf}_M(r)$ qui vérifient strictement les relations de $G_A(r)$. On commence donc par construire une résolution de $G_A(r)$ qui est libre en tant qu’algèbre. Cela permet de chercher seulement des formes vérifiant les relations à homotopie près. Cette résolution est construite en utilisant des complexes de graphes (comme dans la preuve de Kontsevich) décorés.

2. On montre de manière purement combinatoire que cette résolution est effectivement quasi-isomorphe à $G_A(r)$. On procède exactement comme pour calculer la cohomologie de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$.
3. Pour définir le morphisme $G_A(r) \rightarrow \Omega^*(\text{Conf}_M(r))$, nous voulons utiliser des intégrales, comme dans la preuve de Kontsevich. Or, $\text{Conf}_M(r)$ n'est pas compact pour $r \geq 2$; les intégrales ne convergent donc pas forcément. Une première étape est l'étude de la compactification d'Axelrod–Singer–Fulton–MacPherson [AS94; FM94] de $\text{Conf}_M(r)$.
4. Les intégrales de la preuve de Kontsevich sont des intégrales le long des fibres de la projection $\text{Conf}_M(r+s) \rightarrow \text{Conf}_M(r)$ qui oublie certains points de la configuration. Or, une fois que les espaces de configuration sont compactifiés, ces projections ne sont plus des submersions, ce qui empêche d'utiliser la théorie classique des formes différentielles de de Rham. Si M est semi-algébrique, ces projections sont cependant des fibrés semi-algébriques, ce qui nous permet d'utiliser la théorie des formes semi-algébriques par morceaux [KS00; HLTV11]. Toutes les variétés ne sont pas semi-algébriques, mais c'est le cas des variétés lisses grâce au théorème de Nash [Nas52] et Tognoli [Tog73].
5. Un point clé dans la construction des complexes de graphes est la réduction : il est nécessaire de quotienter par certains graphes pour avoir le bon type d'homotopie. Or, il n'est en général pas clair que la procédure d'intégration le long des fibres respecte ce quotient. Un argument de comptage extrêmement simple montre cependant que si $\dim M \geq 4$, alors c'est le cas.
Notons qu'en dimension ≤ 3 , il n'y a que trois variétés compactes sans bord simplement connexes : le point $\{0\}$, la sphère \mathbb{S}^2 (classification des surfaces) et \mathbb{S}^3 (conjecture de Poincaré). Pour chacun de ces exemples une preuve différente permet de montrer que le modèle de Lambrechts–Stanley est un modèle de l'espace de configuration.
6. Il ne reste plus qu'à montrer que si A et B sont deux modèles à dualité de Poincaré différents de M , alors $G_A(r) \simeq G_B(r)$. La preuve refait intervenir les complexes de graphes mais reste purement algébrique. \square

Remarque 2.2.4. Dans les faits, on ne procède pas dans cet ordre. En effet, la construction complète du complexe de graphes est dépendante des intégrales, qui dépendent elles-mêmes de la compactification choisie.

2.3 Compactification de Fulton–MacPherson

À part si $\dim M = 0$, les espaces de configuration $\text{Conf}_M(r)$ ne sont pas compacts pour $r \geq 2$, même si M l'est. La preuve du théorème fait intervenir des intégrales sur les espaces de configuration. Pour s'assurer que ces intégrales convergent, une possibilité consiste à compactifier les espaces de configuration.

Nous allons définir une variété à coins $\text{FM}_M(r)$ dont l'intérieur est $\text{Conf}_M(r)$. Cette variété fut initialement définie par Fulton et MacPherson [FM94] dans le cadre complexe et Axelrod et Singer [AS94] dans le cadre réel. Elle a par la suite été étudiée en détail dans [Sin04]. Les points du bord de $\text{FM}_M(r)$ consiste informellement en des configurations de points « virtuelles », où certains points se rapprochent infinitésimalement les uns des autres. Pour obtenir un type d'homotopie correct (et pas simplement M^r), on garde dans ces configurations virtuelles une information locale en ces agrégats de points. Cette information locale consiste essentiellement une configuration (qui peut elle-même être virtuelle) dans l'espace tangent de M .

Pour plus de facilité dans les raisonnements, il est pratique d'indexer les points d'une configuration par des éléments d'un ensemble fini quelconque, plutôt que $\{1, \dots, r\}$.

Définition 2.3.1. Soit U un ensemble fini. On définit $\text{Conf}_M(U)$ comme l'ensemble des injections $U \hookrightarrow M$, vu comme un sous-ensemble de M^U .

Un ingrédient important de la preuve est la formule de Stokes, qui nous permettra de vérifier que notre procédure d'intégration préserve la différentielle. Nous allons donc décrire le bord de $\text{FM}_M(r)$, et plus généralement les bords des fibres des projections canoniques $\text{FM}_M(r+s) \rightarrow \text{FM}_M(r)$. Cette description fait intervenir les compactifications de $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$, et c'est donc par cela que nous allons commencer.

2.3.1 Cas de \mathbb{R}^n

Les résultats de cette section proviennent de [LV14, Chapter 5].

Définition 2.3.2. Soit U un ensemble fini et $i \neq j \neq k \neq i \in U$ trois éléments deux à deux distincts. On définit des applications :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} : \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, & \delta_{ijk} : \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) &\rightarrow [0, +\infty], \\ (x_i)_{i \in U} &\mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, & (x_i)_{i \in U} &\mapsto \frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_j - x_k\|}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Le groupe des translations et homothéties positives $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ agit sur $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)$ point par point. Si $\#U \geq 2$, cette action est libre et propre. Le quotient $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ est donc encore une variété. Si $\#U \leq 1$, l'action est transitive et le quotient est réduit à un point. Dans tous les cas, la projection $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ est une équivalence d'homotopie. On peut par exemple représenter les éléments du quotient (pour $\#U \geq 2$) par les configurations « normalisées », c.-à-d. celles dont le barycentre est en $0 \in \mathbb{R}^n$ et dont le rayon est 1.

Les applications de la définition précédente sont compatibles avec le quotient. Elles définissent un plongement, où $\text{Conf}_U(2) = \{(i, j) \in U^2 \mid i \neq j\}$ et $\text{Conf}_U(3) = \{(i, j, k) \in U^3 \mid i \neq j \neq k \neq i\}$:

$$\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) / \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow (\mathbb{S}^{n-1})^{\text{Conf}_U(2)} \times [0, +\infty]^{\text{Conf}_U(3)}. \quad (2.3.4)$$

Définition 2.3.5. La compactification de Fulton–MacPherson $\text{FM}_n(U)$ est l’adhérence de l’image de ce plongement.

On peut imaginer qu’un point de $\text{FM}_n(U)$ est une configuration normalisée de \mathbb{R}^n qui est potentiellement « virtuelle » : certains points peuvent être infinitésimalement proches par rapport aux autres. De tels relations de proximité peuvent être imbriquées. La Figure 2.1 donne un exemple :

- les points 3, 5 et 8 sont infinitésimalement proches entre eux par rapport aux autres ;
- les points 4, 6 et 7 aussi ;
- les points 6 et 7 sont de plus infinitésimalement proches entre eux par rapport au point 4.

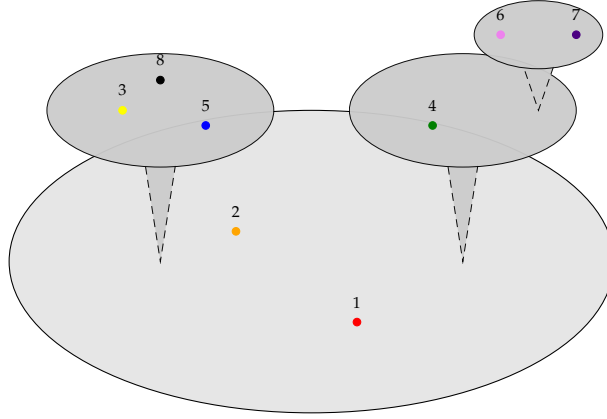


FIG. 2.1 : Un élément de $\text{FM}_2(8)$.

Théorème 2.3.6. L’espace $\text{FM}_n(U)$ est une variété à coins, d’intérieur $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ et de dimension $n\#U - n - 1$ pour $\#U \geq 2$.

Exemple 2.3.7. Les espaces $\text{FM}_n(\emptyset)$ et $\text{FM}_n(\{u\})$ sont des singletons. L’espace $\text{FM}_n(\{u, v\})$ est une sphère \mathbb{S}^{n-1} .

Comme toutes les variétés à coin, $\text{FM}_n(U)$ se rétracte par déformation sur son intérieur. L’application $\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) \rightarrow \text{FM}_n(U)$, donnée par la composition du quotient par l’action $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ et de l’inclusion, est donc une équivalence d’homotopie. Le bord de $\text{FM}_n(U)$ est caractérisé par les éléments dont au moins l’une des coordonnées δ_{ijk} est nulle. Si une configuration $x \in \text{FM}_n(U)$ vérifie $\delta_{ijk}(x) = 0$, on dira que x_i est infinitésimalement proche de x_j par rapport à x_k .

La variété $\text{FM}_n(U)$ étant une variété à coins, son bord $\partial\text{FM}_n(U)$ est lui-même une variété à bord, le bord du bord peut lui-même avoir un bord, etc. Décrivons maintenant les facettes du bord, c’est-à-dire la décomposition du bord en sous-variétés de codimension nulle qui s’intersectent le long de leurs bords. Soit $W \subsetneq U$ un sous-ensemble de cardinal $\#W \geq 2$. On définit le sous-ensemble des configuration virtuelles telles que tous les points indexés par W sont infinitésimalement proches par rapport aux autres par :

$$\partial_W \text{FM}_n(U) := \{x \in \text{FM}_n(U) \mid i, k \in W \wedge j \notin W \implies \delta_{ijk}(x) = 0\}. \quad (2.3.8)$$

Définition 2.3.9. Le quotient U/W est l'ensemble fini $U \setminus W \sqcup \{*\}$. On notera en particulier que $U/\emptyset \cong U \sqcup \{*\}$. Pour $u \in U$, on note $[u] \in U/W$ sa classe, donnée par $[u] = u$ si $u \notin W$, et $[u] = *$ si $u \in W$.

Proposition 2.3.10. L'espace $\partial_W \text{FM}_n(U)$ est homéomorphe à $\text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W)$.

Démonstration. Construisons une application

$$\circ_W : \text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W) \rightarrow \text{FM}_n(U). \quad (2.3.11)$$

Soit $x = (x_u)_{u \in U/W} \in \text{FM}_n(U/W)$ et $y = (y_v) \in \text{FM}_n(W)$ deux configurations. On définit $x \circ_W y \in \text{FM}_n(U)$ dans le système de coordonnées $(\theta_{ij}, \delta_{ijk})$ par :

$$\theta_{ij}(x \circ_W y) = \begin{cases} \theta_{ij}(y), & \text{si } i, j \in W; \\ \theta_{[i][j]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

$$\delta_{ijk}(x \circ_W y) = \begin{cases} \delta_{ijk}(y), & \text{si } i, j, k \in W; \\ 1, & \text{si } i, j \in W \text{ et } k \notin W; \\ +\infty, & \text{si } i \notin W \text{ et } j, k \in W; \\ 0, & \text{si } i, k \in W \text{ et } j \notin W; \\ \delta_{[i][j][k]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3.13)$$

On vérifie sans peine que l'image de \circ est égale à $\partial_W \text{FM}_n(U)$ et que l'application est injective. On conclut par compacité. \square

Remarque 2.3.14. Cette application \circ fait partie de la structure d'opérade de FM_n , que nous allons étudier dans le Chapitre 4.

Proposition 2.3.15. Le bord de $\text{FM}_n(U)$ est recouvert par les $\partial_W \text{FM}_n(U)$. Plus précisément, si on pose $\mathcal{BF}(U) = \{W \subsetneq U \mid \#W \geq 2\}$, on a :

$$\partial \text{FM}_n(U) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}(U)} \partial_W \text{FM}_n(U). \quad (2.3.16)$$

De plus, $\text{codim } \partial_W \text{FM}_n(U) = 1$, et si $W \neq W'$, $\text{codim } \partial_W \text{FM}_n(U) \cap \partial_{W'} \text{FM}_n(U) > 1$.

Démonstration. Le recouvrement est immédiat grâce au fait que $x \in \partial \text{FM}_n(U) \iff \exists i \neq j \neq k \neq i \text{ t.q. } \delta_{ijk} = 0$. Le fait que $\text{codim } \partial_W \text{FM}_n(U) = 1$ découle du fait que \circ est un homéomorphisme et du calcul de la dimension de $\text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W)$. Enfin, le calcul de la codimension de l'intersection est un petit exercice (raisonner au cas par cas : $W \cap W' = \emptyset$, $W \subset W'$ ou l'inverse, ou $W \cap W' \neq \emptyset$ mais pas d'inclusion). \square

Enfin, pour appliquer la formule de Stokes, nous devons connaître le bord de la fibre des projections canoniques.

Définition 2.3.17. Soit $\pi : E \rightarrow B$ un fibré orienté (c.-à-d. les fibres sont des variété compactes munies d'orientations compatibles). Son *bord fibre à fibre* est le fibré $\pi^\partial : E^\partial \rightarrow B$ où E^∂ est défini par :

$$E^\partial := \bigcup_{b \in B} \partial \pi^{-1}(b). \quad (2.3.18)$$

Exemple 2.3.19. Considérons le fibré $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ qui projette sur la première coordonnée. Son bord fibre à fibre est $[0, 1] \times \{0, 1\}$. On remarque que ce n'est pas le bord de l'espace total ou la préimage du bord de la base.

Proposition 2.3.20. *Soit $U \subset A$ une paire d'ensembles finis. La projection $\pi : \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(A) \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)$ qui oublie certains points s'étend en un fibré orienté :*

$$\pi : \text{FM}_n(A) \rightarrow \text{FM}_n(U). \quad (2.3.21)$$

Proposition 2.3.22. *Soit $U \subset A$ une paire d'ensembles finis. On note $\mathcal{BF}(A, U) = \{W \in \mathcal{BF}(A) \mid U \subset A \text{ ou } \#(W \cap A) \leq 1\}$. Alors le bord fibre à fibre de $\pi : \text{FM}_n(A) \rightarrow \text{FM}_n(U)$ est donné par :*

$$\text{FM}_n^\partial(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}(A, U)} \partial_W \text{FM}_n(A). \quad (2.3.23)$$

Démonstration. Comme π est un fibré, il s'agit simplement de vérifier quelles facettes $\partial_W \text{FM}_n(A)$ sont envoyées sur l'intérieur de $\text{FM}_n(U)$ via la projection, car $\text{FM}_n^\partial(A)$ est l'adhérence de $\partial \text{FM}_n(A) \cap \pi^{-1}(\text{FM}_n(U))$. On vérifie facilement que ce sont biens les facettes $W \in \mathcal{BF}(A, U)$. \square

2.3.2 Cas de M

Nous pouvons maintenant effectuer le même travail pour une variété compacte sans bord M . Grâce au théorème de Whitney, on peut plonger M dans un espace euclidien \mathbb{R}^N pour N assez grand. Dans toute la suite, on fixe un tel plongement et on voit implicitement n'importe quel élément de M . comme un vecteur de \mathbb{R}^n .

Définition 2.3.24. Soit U un ensemble fini et $i, j, k \in U$ trois éléments deux à deux distincts. On définit des applications (par abus de notation, nous gardons les mêmes lettres que précédemment) :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} : \text{Conf}_M(U) &\rightarrow \mathbb{S}^{N-1}, & \delta_{ijk} : \text{Conf}_M(U) &\rightarrow [0, +\infty], \\ (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, & (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_j - x_k\|}. \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Ces applications définissent un plongement :

$$\text{Conf}_M(U) \hookrightarrow M^U \times (\mathbb{S}^{N-1})^{\text{Conf}_U(2)} \times [0, +\infty]^{\text{Conf}_U(3)}. \quad (2.3.26)$$

Définition 2.3.27. La compactification de Fulton–MacPherson de $\text{Conf}_M(U)$ est l'adhérence $\text{FM}_M(U)$ de l'image de ce plongement.

On définit comme précédemment les facettes $\partial_W \text{FM}_M(U)$, pour $W \subset U$:

$$\partial_W \text{FM}_M(U) = \{x \in \text{FM}_M(U) \mid i, k \in W \implies (p_i(x) = p_k(x) \text{ et } j \notin W \implies \delta_{ijk}(x) = 0)\}. \quad (2.3.28)$$

Proposition 2.3.29. *Le bord de $\mathrm{FM}_M(U)$ s'exprime comme*

$$\partial \mathrm{FM}_M(U) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}_M(U)} \partial_W \mathrm{FM}_M(U), \quad (2.3.30)$$

où $\mathcal{BF}_M(U) = \{W \subset U \mid \#W \geq 2\}$. Ces facettes sont de codimension 1 et l'intersection de deux facettes différentes est de codimension > 1 .

Remarque 2.3.31. Contrairement au cas de \mathbb{R}^n , le cas $W = U$ est inclus dans le bord. Cela correspond au cas où tous les points sont au même endroit dans M .

Proposition 2.3.32. *Soit $U \subset A$ une paire d'ensembles finis. La projection $\pi : \mathrm{Conf}_M(A) \rightarrow \mathrm{Conf}_M(U)$ qui oublie certains points s'étend à la compactification.*

Proposition 2.3.33. *Le bord fibre à fibre de $\pi : \mathrm{FM}_M(A) \rightarrow \mathrm{FM}_M(U)$ est donné par :*

$$\mathrm{FM}_M^\partial(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}_M(A, U)} \partial_W \mathrm{FM}_M(A), \quad (2.3.34)$$

où $\mathcal{BF}_M(A, U) = \{W \in \mathcal{BF}_M(A) \mid \#(W \cap U) \leq 1\}$.

2.4 Ensembles semi-algébriques et formes PA

Les projections canoniques $\pi : \mathrm{FM}_M(A) \rightarrow \mathrm{FM}_M(U)$ ne sont malheureusement pas des submersions. Un exemple est donné par [LV14, Example 5.9.1]. (Une composante connexe de) l'espace $\mathrm{FM}_1(\{a, b, c\})$ est un segment : ses extrémités sont les deux manières de parenthéser le mot abc , le chemin est un associateur. (Une composante connexe de) l'espace $\mathrm{FM}_1(\{a, b, c, d\})$ est un pentagone. Les sommets de ce pentagone sont les cinq manières de parenthéser le mot $abcd$; les arêtes sont des chemins qui font intervenir un associateur. La projection $\mathrm{FM}_1(\{a, b, c, d\}) \rightarrow \mathrm{FM}_1(\{a, b, c\})$ ressemble, sur les composantes connexes en question, à la Figure 2.2. Un calcul dans une carte montre que π n'est pas une submersion au point qui correspond à $a((bc)d)$.

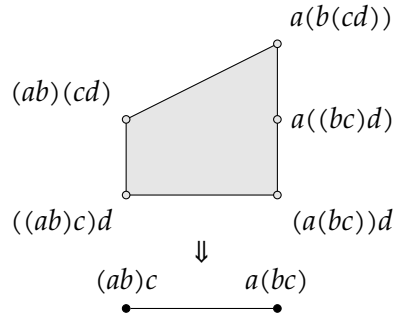


FIG. 2.2 : Projection $\mathrm{FM}_1(\{a, b, c, d\}) \rightarrow \mathrm{FM}_1(\{a, b, c\})$.

Comme ces applications ne sont pas des submersions, il n'est pas possible d'appliquer la théorie standard de l'intégration le long des fibres des formes différentielles.

Cependant, il se trouve que ces fibrés sont des fibrés *semi-algébriques*. Initialement développée par Kontsevich et Soibelman [KS00], la théorie des formes semi-algébriques par morceaux a été raffinée par Hardt, Lambrechts, Turchin et Volić [HLTV11] dans le but de l'appliquer à la preuve de la formalité de l'opérade des petits disques. Rappelons maintenant rapidement les ingrédients principaux de cette théorie.

2.4.1 Ensembles SA

Définition 2.4.1. Un *ensemble semi-algébrique* (SA) est un sous-ensemble de \mathbb{R}^N (pour un certain N) qui est une union finie d'intersections finies d'ensembles de solutions d'inéquations polynomiales. Une *application SA* est une application (continue) entre deux ensembles SA dont le graphe est semi-algébrique. Une *variété SA* de dimension n est un ensemble SA localement homéomorphe à \mathbb{R}^n ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Proposition 2.4.2. Les compactifications de Fulton–MacPherson $\mathrm{FM}_n(k)$ et $\mathrm{FM}_M(k)$ sont des variétés semi-algébriques pour tout $n, k \geq 0$ et toute variété semi-algébrique M .

Démonstration. Les plongements $(\theta_{ij}, \delta_{ijk})$ et $(\iota, \theta_{ij}, \delta_{ijk})$ sont clairement des applications SA, donc leur image est un ensemble SA, donc l'adhérence de cette image est un ensemble SA. Les cartes connues dans la littérature pour les compactifications sont également clairement semi-algébriques. \square

Définition 2.4.3. Un *fibré SA* est une application SA $\pi : E \rightarrow B$ muni d'un ensemble SA F , d'un recouvrement $B = \bigcup \{U_\alpha\}$ par des sous-ensembles SA, et d'homéomorphismes SA $h_\alpha : U_\alpha \times F \cong \pi^{-1}(U_\alpha)$ compatibles avec la projection.

Théorème 2.4.4 (Lambrechts et Volić [LV14]). Les projections canoniques $\pi : \mathrm{FM}_n(A) \rightarrow \mathrm{FM}_n(U)$ sont des fibrés SA.

Démonstration. La preuve est assez complexe. On représente les fibres par des disques auxquels on a retiré des boules. Il faut ensuite construire explicitement les homéomorphismes, ce qui est relativement technique. \square

La preuve du résultat suivant est quasiment identique à celle de Lambrechts et Volić (voire plus simple, car il n'y a pas de quotient par le groupe $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$).

Proposition 2.4.5. Le même résultat est vrai pour FM_M .

2.4.2 Formes PA

Définition 2.4.6. Un *courant* de degré k sur \mathbb{R}^N est un élément du dual des formes différentielles de degré k sur \mathbb{R}^n à support compact, c.-à-d. $D_k(\mathbb{R}^N) = \Omega_c^k(\mathbb{R}^N)^\vee$. Un *courant* de degré k sur $X \subset \mathbb{R}^N$ est un courant dont le support

$$\mathrm{supp}(T) = \bigcap \{Z \subset \mathbb{R}^n \mid \omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^N \setminus Z) \implies \langle T, \omega \rangle = 0\} \quad (2.4.7)$$

est inclus dans X .

Définition 2.4.8. Soit M une variété compacte SA lisse. Une *stratification* de M est une partition finie $M = \bigcup \mathcal{M}$ de M telle que tout $S \in \mathcal{S}$ est une sous-variété lisse connexe dont l’adhérence est l’union de S et d’éléments de \mathcal{S} de dimension $< \dim S$.

Définition 2.4.9. Soit M une variété compacte orientée SA de dimension k et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application SA. Il existe une stratification $M = \bigcup \mathcal{S}$ telle que $f|_S$ soit un fibré trivial pour tout $S \in \mathcal{S}$. Soit S_1, \dots, S_l les strates telles que $f|_{S_i}$ soit de rang k . On définit un courant $f_* \llbracket M \rrbracket$ par

$$\langle f_* \llbracket M \rrbracket, \omega \rangle := \sum_{i=1}^l \int_{S_i} f^* \omega. \quad (2.4.10)$$

Définition 2.4.11. Une *chaîne semi-algébrique* de degré k sur un ensemble SA X est un courant de la forme $f_* \llbracket M \rrbracket$ où $\dim M = k$. On note $C_k^{\text{SA}}(X)$ l’ensemble de ces courants.

Proposition 2.4.12. L’ensemble $C_k^{\text{SA}}(X)$ est un sous-groupe de $D_k(X)$. On a $C_i^{\text{SA}}(X) = 0$ pour $i > \dim X$ et $d(f_* \llbracket M \rrbracket) = f_* \llbracket \partial M \rrbracket$. La collection $C_*^{\text{SA}}(X)$ forme un complexe de chaînes fonctoriel en X par rapport aux applications SA. Il existe une transformation naturelle canonique $\times : C_*^{\text{SA}}(X) \otimes C_*^{\text{SA}}(Y) \rightarrow C_*^{\text{SA}}(X \times Y)$ qui vérifie la formule de Leibniz.

Définition 2.4.13. Soit X un ensemble SA et $f_0, \dots, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions SA. On définit une cochaîne SA $\lambda(f_0; f_1, \dots, f_k) \in C_{\text{SA}}^k(X) := C_k^{\text{SA}}(X)^\vee$ par :

$$\forall \gamma \in C_k^{\text{SA}}(X), \langle \lambda(f_0; f_1, \dots, f_k), \gamma \rangle := \langle (f_0, \dots, f_k)_* \gamma, x_0 dx_1 \dots dx_k \rangle. \quad (2.4.14)$$

Les *formes minimales* sur X sont les éléments du sous-groupe $\Omega_{\min}^k(X)$ engendré par tous les éléments de la forme $\lambda(f_0; f_1, \dots, f_k)$.

Proposition 2.4.15. Les formes minimales forment un sous-complexe de $C_{\text{SA}}^*(X)$. On a :

$$d\lambda(f_0; f_1, \dots, f_k) = \lambda(1; f_0, \dots, f_k). \quad (2.4.16)$$

Il y a une famille d’applications $\times : \Omega_{\min}^k(X) \otimes \Omega_{\min}^l(Y) \rightarrow \Omega_{\min}^{k+l}(X \times Y)$ qui induisent une structure d’ADGC sur $\Omega_{\min}^*(X)$ en utilisant la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times X, x \mapsto (x, x)$:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta^*(\lambda_1 \times \lambda_2). \quad (2.4.17)$$

Ces formes minimales ne forment malheureusement pas un modèle de X . Par exemple, la forme $dt/t = \lambda(f_0; f_1) \in \Omega_{\min}^1([1, 2])$ où $f_0(t) = 1/t$ et $f_1(t) = t$ est fermée mais n’est pas le bord d’une forme de degré 0, car \log n’est pas une application SA. Pour résoudre ce problème, il faut introduire des intégrales formelles le long des fibres de fibrés SA. Plus généralement, il faut pouvoir intégrer le long de n’importe quelle famille continue de chaînes.

Définition 2.4.18. Soit $f : Y \rightarrow X$ une application SA. Une *famille (fortement) continue de chaînes* de degré l sur Y au-dessus de X est une application $\Phi : X \rightarrow C_l(Y)$ telle qu’il existe :

- une stratification SA finie $X = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$;
- des variétés compactes sans bord orientées SA F_α de dimension l ;
- des applications SA $g_\alpha : \bar{S}_\alpha \times F_\alpha \rightarrow Y$ vérifiant :
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \bar{S}_\alpha \times F_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & Y \\ \downarrow p_{\bar{S}_\alpha} & & \downarrow f \\ \bar{S}_\alpha & \hookrightarrow & X, \end{array} \quad (2.4.19)$$

- pour tout α , pour tout $x \in \bar{S}_\alpha$, $\Phi(x) = (g_\alpha)_* \llbracket \{x\} \times F_\alpha \rrbracket$.

Exemple 2.4.20. Soit $\pi : E \rightarrow B$ un fibré SA de rang l . On peut définir une famille continue de chaînes $\Phi : B \rightarrow C_l(E)$ par $\Phi(b) := \llbracket \pi^{-1}(b) \rrbracket$.

Proposition 2.4.21. Soit $\gamma \in C_k^{\text{SA}}(X)$ une chaîne SA et $\Phi : X \rightarrow C_l(Y)$ une famille continue de chaînes, avec les notations ci-dessus. On peut raffiner la stratification pour avoir $\gamma = \sum n_\alpha \llbracket \bar{S}_\alpha \rrbracket$. On peut définir une nouvelle chaîne SA $\gamma \ltimes \Phi \in C_{k+l}^{\text{SA}}(Y)$ par :

$$\gamma \ltimes \Phi := \sum_{\alpha} n_\alpha (g_\alpha)_* \llbracket \bar{S}_\alpha \times F_\alpha \rrbracket. \quad (2.4.22)$$

Définition 2.4.23. Soit $\omega \in \Omega_{\min}^{k+l}(Y)$ une forme minimale sur Y et $\Phi : X \rightarrow C_l^{\text{SA}}(Y)$ une famille continue de chaînes. On définit une cochaîne SA $\int_\Phi \omega$ par :

$$\left\langle \int_\Phi \omega, \gamma \right\rangle := \langle \omega, \gamma \ltimes \Phi \rangle. \quad (2.4.24)$$

Les formes PA («*piecewise (semi-)algebraic*») de degré k sur X sont les cochaînes de cette forme. On note $\Omega_{\text{PA}}^k(X)$ l'ensemble qu'elles forment.

Remarque 2.4.25. Une forme minimale est en particulier une forme PA : si $\omega \in \Omega_{\min}^k(X)$ est une forme minimale, on peut poser $\Phi : X \rightarrow C_0(X)$, $x \mapsto \llbracket \{x\} \rrbracket$. Alors $\int_\Phi \omega = \omega$.

La preuve de la deuxième partie de la proposition suivante est extrêmement difficile.

Proposition 2.4.26. La collection $\Omega_{\text{PA}}^*(X)$ est un sous-complexe de $C_{\text{SA}}^*(X)$ qui s'annule en degré $> \dim X$. Il existe une multiplication sur $\Omega_{\text{PA}}^*(X)$ qui étend celle de $\Omega_{\min}^*(X)$ et qui en fait une ADGC.

Un des résultats principaux de [HLTV11] est le suivant :

Théorème 2.4.27 ([HLTV11, Theorems 6.1, 7.1]). Il existe un zigzag de transformations naturelles, si l'on se restreint à la sous-catégorie des ensembles et applications SA :

$$\Omega_{\text{PA}}^*(X) \leftarrow \cdot \rightarrow \Omega_{\text{PL}}^*(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \quad (2.4.28)$$

qui sont des quasi-isomorphismes si X est un ensemble SA compact. Ce zigzag est de plus compatible avec les morphismes de Künneth.

Exemple 2.4.29. La forme $dt/t \in \Omega_{\min}^1([1, 2])$ est le bord de la forme $\log t := \int_{\Phi} \omega$ où $\omega = \lambda(f_0, f_1) \in \Omega_{\min}^1([1, 2]^2)$ avec $f_0(s, t) = 1/s \cdot \chi_{t < s}$ et $f_1(s, t) = s$, et $\Phi : [1, 2] \rightarrow C_1^{\text{SA}}([1, 2]^2)$ est la famille continue de chaînes associée à la projection sur le deuxième facteur.

Remarque 2.4.30. Hardt, Lambrechts, Turchin et Volic [HLTV11, Section 9.1] conjecturent que le résultat reste vrai si X n'est pas compact.

La preuve de ce théorème fait essentiellement intervenir trois ingrédients :

- le lemme de Poincaré : $\Omega_{\text{PA}}^*(\Delta^n)$ est acyclique pour n fixé ;
- les ensembles simpliciaux $\Omega_{\text{PA}}^k(\Delta^\bullet)$ sont « extensibles » pour k fixé : pour tout sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, n\}$, pour toute collection $\{\beta_i \in \Omega_{\text{PA}}^k(\Delta^{n-1})\}_{i \in I}$ de formes vérifiant $d_i \beta_j = d_{j-1} \beta_i$, il existe une k -forme $\beta \in \Omega_{\text{PA}}^k(\Delta^n)$ vérifiant $d_i \beta = \beta_i$.
- la propriété de Mayer–Vietoris.

En utilisant ces trois propriétés, la preuve du théorème découle de raisons assez formelles.

Rappelons qu'un fibré SA $\pi : E \rightarrow B$ de rang l définit une famille continue de chaînes $\Phi : B \rightarrow C_l(E)$. On peut donc définir l'intégrale le long des fibres de ce fibré d'une forme minimale $\omega \in \Omega_{\min}^{k+l}(E)$ par :

$$\pi_*(\omega) = \int_{\pi:E \rightarrow B} \omega := \int_{\Phi} \omega. \quad (2.4.31)$$

Cette procédure possède de nombreuses propriétés similaires à celles de l'intégrale le long des fibres classiques. Celle qui va nous intéresser le plus est la formule de Stokes. On rappelle que $\pi^\partial : E^\partial \rightarrow B$ est le fibré SA de rang $l - 1$ donné par le bord fibre à fibre de E . Alors la formule de Stokes [HLTV11, Proposition 8.12] dit que :

$$d(\pi_*(\omega)) = \pi_*(d\omega) + (-1)^{\deg \omega - l} \pi_*^\partial(\omega|_{E^\partial}). \quad (2.4.32)$$

Mentionnons également que si $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ se décompose en une réunion de sous-ensembles SA telle que $\pi|_{E_i}$ reste un fibré SA de rang k et que $\dim \pi|_{E_i}^{-1}(x) \cap \pi|_{E_j}^{-1}(x) < k$ pour tout $i \neq j$ et tout $x \in B$, alors $\pi_*(\omega) = \sum_{i \in I} (\pi|_{E_i})_*(\omega|_{E_i})$ [HLTV11, Proposition 8.11].

2.5 Complexes de graphes

Comme dans la Section 2.3, nous allons considérer que nos collections d'ADGC ne sont plus indexées par des entiers mais par des ensembles finis quelconque. En particulier, nous avons $\mathbb{G}_A(r) = \mathbb{G}_A(\{1, \dots, r\})$.

2.5.1 Idée informelle

Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe SA et soit A un modèle à dualité de Poincaré de A . Notre objectif est de démontrer que les ADGC $\mathcal{G}_A(U)$ et $\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ sont quasi-isomorphes. Trouver un quasi-isomorphisme direct relèverait du miracle : l'ADGC $\mathcal{G}_A(U)$ ayant de nombreuses relations, il faudrait trouver des formes PA sur $\text{FM}_M(U)$ qui satisfont strictement ces relations. Comme souvent en algèbre homologique, nous allons définir une *résolution* de $\mathcal{G}_A(U)$, c'est-à-dire une ADGC quasi-isomorphe à $\mathcal{G}_A(U)$ et qui est libre en tant qu'algèbre (on dit aussi une ADGC « *quasi-libre* »). Toute la complexité des relations est alors transférée dans la différentielle. Trouver un morphisme depuis cette résolution vers $\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ ne nécessite plus que de trouver des formes qui sont compatibles avec la différentielle, ce qui consiste essentiellement à trouver des formes qui satisfont les relations à homotopie près.

Les relations dans l'ADGC $\mathcal{G}_A(U)$ sont de trois types :

1. les relations qui existent dans A ;
2. les relations d'Arnold, et notamment la relation à trois termes ;
3. la relation de symétrie $p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}$.

Le première type de relation dépend de la variété M . Étant donné une variété simplement connexe, nous pouvons trouver une résolution quasi-libre $R \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M)$ et appliquer la procédure de Lambrechts et Stanley [LS08b] pour trouver un quasi-isomorphisme $R \rightarrow A$, où A est à dualité de Poincaré.

Pour le deuxième type de relations, nous allons utiliser une idée due à Kontsevich, qui est de remplacer la relation à trois termes $\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij}$ par une différentielle dans un complexe de graphes. Ce complexe de graphes est un espace vectoriel engendré par des graphes dont les sommets sont de deux types : des sommets « externes », en bijection avec l'ensemble fini U fixé ; et des sommets internes, indistinguables. La différentielle consiste à contracter les arêtes incidentes aux sommets internes. On peut alors représenter graphiquement la relation à trois termes par :

$$(2.5.1)$$

L'idée derrière cette différentielle est qu'un graphe avec des sommets externes U et des sommets internes I correspond à une forme sur $\text{FM}_M(U \sqcup I)$ que l'on intègre le long des fibres de la projection $\text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_M(U)$. Le sommet interne dans l'image précédente correspond à un quatrième point dans une éventuelle configuration sur M , et l'intégrale fait une « moyenne » sur toutes les positions possibles de ce quatrième point. Lorsque l'on applique la formule de Stokes, ce quatrième point est restreint au bord fibre à fibre de cette projection. Le bord a trois faces de dimension maximale : quand le quatrième

point devient infinitésimalement proche d'un des trois autres points par rapport aux deux autres. Ces trois faces correspondent exactement aux trois termes de la relation d'Arnold.

Remarque 2.5.2. Cette idée de rajouter des sommets internes pour résoudre une relation à trois termes du type précédent (que l'on peut voir comme le dual d'une relation de Leibniz) a été formalisée et généralisée par la notion de « torsion opéradique », cf. Willwacher [Wil14] et Dolgushev et Willwacher [DW15].

Le dernier type de relation, la symétrie, se gère d'une manière similaire à l'idée de Kontsevich. Plus précisément, cette relation de symétrie devient un bord comme indiqué sur la figure suivante :

$$\begin{array}{c} a \\ \circlearrowleft \\ (i) \text{---} \bullet \text{---} (j) \end{array} \xrightarrow{d} \begin{array}{c} a \\ \circlearrowleft \\ (i) \text{---} (j) \end{array} \pm \begin{array}{c} a \\ \circlearrowleft \\ (i) \text{---} (j) \end{array}. \quad (2.5.3)$$

Bien sûr, dans le complexe de graphe complet, ces deux différentielles sont mélangées. Cela nous poussera à introduire diverses filtrations pour les séparer.

2.5.2 Définition du complexe de graphes

On fixe désormais un zigzag de quasi-isomorphismes

$$A \leftarrow R \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M), \quad (2.5.4)$$

où A est une ADGC à dualité de Poincaré et R est une ADGC quasi-libre engendrée en degrés ≥ 2 . Ce zigzag existe grâce au théorème de Lambrechts et Stanley [LS08b].

On se fixe également un cocycle $\Delta_R \in R \otimes R$ de degré n qui est (anti)symétrique et qui s'envoie sur Δ_A par l'application $R \rightarrow A$. La preuve de l'existence de Δ_R se fait par des arguments élémentaires. Il faut cependant noter qu'il est nécessaire de supposer que $A = H^*(M)$ si $n \leq 6$ (toute variété simplement connexe de dimension ≤ 6 est formelle), ou bien que le zigzag ci-dessus vérifie une relation de compatibilité entre l'intégration $\int_M : \Omega_{\text{PA}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$ et la dualité de Poincaré $\varepsilon : A^n \rightarrow \mathbb{R}$. Cela signifie qu'a priori, nous ne pouvons pas utiliser n'importe quel modèle à dualité de Poincaré de M . Nous démontrerons cependant à la fin que si A' est un autre modèle à dualité de Poincaré, alors $\mathbb{G}_{A'} \simeq \mathbb{G}_A$.

Nous allons construire un premier complexe de graphes, qui n'aura cependant pas le bon type d'homotopie. Ceci sera résolu dans la Section 2.5.4.

Définition 2.5.5. Le complexe de graphes $\text{Graphs}'_R(U)$ est engendré par des classes d'équivalences de graphes du type suivant :

- il n'y a ni arêtes doubles, ni boucles (un graphe qui en contiendrait une est identifié avec 0) ;
- le graphe a des sommets dits « externes » qui sont en bijection avec U ;

- le reste des sommets sont dits « internes » et ils ne sont pas distinguables (formellement, on quotiente par une certaine action du groupe symétrique) ;
- chaque sommet est décoré par un élément de R ;
- si n est impair, les arêtes sont orientées, mais un graphe est identifié avec l'opposé du graphe où l'on a échangé le sens d'une arête ;
- si n est pair, les arêtes sont ordonnées, mais un graphe est identifié avec l'opposé d'un graphe qui en différencierait par une transposition d'arêtes.

Voir la Figure 2.3 pour un exemple.

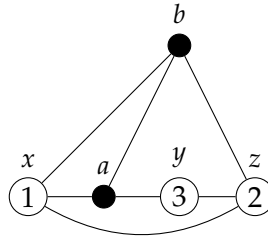


FIG. 2.3 : Exemple de graphe dans $\text{Graphs}'_R(\{1, 2, 3\})$ où $x, y, z, a, b \in R$.

Le degré d'un graphe se calcule en additionnant les degrés de toutes les décorations, en rajoutant $n - 1$ pour chaque arête et en soustrayant n pour chaque sommet interne.

Si $\Gamma, \Gamma' \in \text{Graphs}'_R(U)$ sont deux tels graphes, leur produit $\Gamma \cdot \Gamma'$ est le graphe obtenu en recollant Γ et Γ' le long de leur sommets externes. Les décorations des sommets externes correspondants sont multipliées durant l'opération. Par exemple :

$$\begin{array}{c} x \\ \textcircled{i} \\ j \text{---} k \\ y \quad z \end{array} \cdot \begin{array}{c} x' \\ \textcircled{i} \\ j \text{---} k \\ y' \quad z' \end{array} = \begin{array}{c} xx' \\ \textcircled{i} \\ j \text{---} k \\ yy' \quad zz' \end{array} \quad (2.5.6)$$

Enfin, la différentielle $d = d_R + d_{\text{split}} + d_{\text{contr}}$ est la somme de plusieurs termes :

- la différentielle interne d_R de R , qui agit sur chaque décoration (comme une dérivation) ;
- une partie « coupante » d_{split} , qui est la somme de toutes les manières possibles de découper une arête et de multiplier les décorations des extrémités par Δ_R (les sommets gris peuvent être internes ou externes) :

$$\begin{array}{c} x \quad y \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \xrightarrow{d_{\text{split}}} \sum_{(\Delta_R)} \begin{array}{c} x\Delta'_R \quad y\Delta''_R \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} ; \quad (2.5.7)$$

- une partie « contractante » d_{contr} , qui est la somme sur toutes les manières possibles de contracter une arête incidente à un sommet interne en multipliant les décorations (si les deux sommets incidents à l'arête sont internes, le résultat est un sommet interne, sinon c'est un sommet externe de même numéro que l'unique sommet externe incident à l'arête), cf. l'Équation (2.5.1).

Vérifier la proposition suivante peut se faire assez facilement « à la main » (mais il faut faire attention aux signes) ; on peut également utiliser la théorie de la torsion opéradique pour réduire la quantité de calculs nécessaires.

Proposition 2.5.8. *Ce complexe de graphes $\text{Graphs}'_R(U)$ avec cette différentielle et ce produit forme une ADGC.*

Ce complexe de graphes n'a malheureusement pas le bon type d'homotopie. Le problème provient des composantes « internes » des graphes, c'est-à-dire les composantes connexes qui consiste exclusivement en des sommets internes. Dans le cas non-décoré et pour $n = 2$, cette partie « interne » du complexe de graphes (notée alors GC_2) vérifie $H^0(\text{GC}_2) = \text{grt}_1$, où grt_1 est l'algèbre de Lie de Grothendieck–Teichmüller, voir Willwacher [Wil14]. On est bien éloigné de $H^0(\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(U)) = \mathbb{R} \dots$

On ne peut malheureusement pas simplement quotienter par ces composantes internes, comme le montre l'exemple suivant :

$$\left(\textcircled{1} \text{---} \bullet^x \right) \xrightarrow{d} \left(\textcircled{1} \text{---} \bullet^{d_R x} \right) \pm \sum_{(\Delta_R)} \left(\textcircled{1} \quad \bullet^{x \Delta_R''} \right) \pm \textcircled{1}^x. \quad (2.5.9)$$

Si l'on tuait tous les graphes avec des composantes internes, tous les graphes avec un unique sommet externe de $\text{Graphs}'_R(1)$ (qui correspondent aux éléments de R , donc aux classes de cohomologie de M) deviendraient nuls en cohomologie, ce qui est bien sûr absurde. Cependant, si l'on se rappelle du Lemme (2.1.11), on voit qu'il suffirait d'identifier un sommet interne isolé et décoré par $x \in R$ avec le nombre $\varepsilon(x)$ pour avoir quelque chose de cohérent. Il ne reste alors qu'à s'occuper des composantes internes avec au moins deux sommets. On pourrait choisir de simplement les quotienter. Si l'on procède ainsi, on pourra bien construire une application quotient $\text{Graphs}'_R(U)/\sim \rightarrow \mathcal{G}_A(U)$ et démontrer de façon combinatoire que c'est un quasi-isomorphisme (Section 2.6). Cependant, il ne sera alors pas possible de construire une application $\text{Graphs}'_R(U)/\sim \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ qui préserve la différentielle : la partie « coupante » de la différentielle peut créer des graphes avec des composantes internes, et la formule de Stokes oblige à les identifier avec des intégrales sur $\text{FM}_M(U)$. C'est ce que nous allons expliquer dans la section suivante.

2.5.3 Propagateur

Nous allons maintenant définir un morphisme $\omega : \text{Graphs}'_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$. Comme annoncé plus tôt, l'idée sera de considérer les sommets externes comme des points « fixes » dans une configuration, tandis que les sommets internes correspondront à

des points qui seront « intégrés » sur toutes leurs positions possibles. Nous allons bien sûr utiliser le morphisme $R \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M)$ fixé au début pour savoir où envoyer les décorations des sommets. Il ne reste donc qu'à savoir où envoyer les arêtes : nous devons donc trouver une forme $\varphi \in \Omega_{\text{PA}}^{n-1}(\text{FM}_M(2))$ qui doit satisfaire plusieurs conditions pour que le morphisme $\text{Graphs}'_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ soit bien défini. En physique mathématique, une telle forme est appelée un propagateur.

On trouve les conditions que doit vérifier φ en raisonnant sur les propriétés des arêtes dans le complexe de graphe, ainsi qu'en cherchant à faire en sorte que la compatibilité $\omega d = d\omega$ découle de la formule de Stokes. Notons que les deux fibrés $p_1, p_2 : \text{FM}_M(2) \rightarrow M$ se restreignent en un même fibré $p : \partial\text{FM}_M(2) \rightarrow M$. Ce fibré p est un fibré en sphères de rang $n - 1$; concrètement, c'est le fibré en sphères associé au fibré tangent de M .

Proposition 2.5.10 ([CM10; CW16]). *Il existe une forme $\varphi \in \Omega_{\text{PA}}^{n-1}(\text{FM}_M(2))$ vérifiant les trois conditions suivantes.*

- La forme est antisymétrique : si σ est l'automorphisme de $\text{FM}_M(2)$ qui échange les deux points, alors $\sigma^* \varphi = (-1)^n \varphi$.
- La différentielle de φ est la classe diagonale : $d\varphi = (p_1, p_2)^*(\Delta_M)$, où Δ_M est l'image de Δ_R par l'application $R \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M)$ fixée.
- La restriction de φ à $\partial\text{FM}_M(2)$ est une forme angulaire globale : sur chaque fibre de $p : \partial\text{FM}_M(2) \rightarrow M$, φ se restreint en une forme volume.

Démonstration. La preuve de l'existence d'un tel φ dans notre cadre a été prouvée par Campos et Willwacher [CW16], en s'appuyant sur des calculs précédemment effectués par Cattaneo et Mnëv [CM10]. Pour construire φ , on commence par choisir une forme angulaire globale $\psi \in \Omega_{\text{PA}}^{n-1}(\partial\text{FM}_M(2))$, qui existe de façon générale (voir par exemple Bott et Tu [BT82]) (la preuve standard est dans le cadre lisse mais peut s'adapter aisément au cadre SA). On peut de plus choisir ψ telle que $d\psi$ est « basique », c.-à-d. que c'est le tiré en arrière d'une forme sur M (c'est la classe d'Euler de M). Quitte à (anti)symétriser, on peut supposer que $\sigma^* \psi = (-1)^n \psi$. On peut trouver un voisinage tubulaire $\rho : T \rightarrow \partial\text{FM}_M(2)$ à l'intérieur de $\text{FM}_M(2)$, ce qui nous permet d'étendre ψ en $\rho^* \psi$. En prenant une approximation de l'indicatrice, on peut étendre $\rho^* \psi$ en une forme $\psi' \in \Omega^{n-1}(\text{FM}_M(2))$ qui vaut ψ sur $\partial\text{FM}_M(2)$ et 0 en-dehors de T . Comme $d\psi'|_{\partial\text{FM}_M(2)}$ est basique, la forme $d\psi'$ est le tiré en arrière d'une forme $\alpha \in \Omega_{\text{PA}}^n(M \times M)$ qui est fermée mais pas (forcément) exacte. On peut calculer que $[\alpha] \in H^n(M \times M)$ est la classe diagonale : si β est n'importe quelle autre forme fermée, alors

$$\int_{M \times M} \alpha \wedge \beta = \int_{\text{FM}_M(2)} d\psi' \wedge \beta = \int_{\partial\text{FM}_M(2)} \psi \wedge \beta = \int_{\text{diagonale}} \beta. \quad (2.5.11)$$

Il existe donc une forme γ telle que $\alpha - \Delta_M = d\gamma$ sur $M \times M$. On peut alors définir $\varphi := \psi' - (p_1, p_2)^* \gamma$. On a alors bien $d\varphi = (p_1, p_2)^*(\Delta_M)$. Comme $p^* \gamma|_{\partial\text{FM}_M(2)}$ est basique, la forme φ reste (anti)symétrique et sa restriction au bord reste une forme angulaire globale. \square

Nous pouvons maintenant définir le morphisme $\text{Graphs}'_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$. Soit $\Gamma \in \text{Graphs}'_R(U)$ un graphe dont l'ensemble des arêtes est E et l'ensemble des sommets internes est I . On commence par définir $\omega'(\Gamma) \in \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U \sqcup I))$ par

$$\omega'(\Gamma) := \bigwedge_{v \in U \sqcup I} p_v^*(\alpha_v) \wedge \bigwedge_{e \in E} p_e^*(\varphi). \quad (2.5.12)$$

Dans cette formule, $\alpha_v \in R$ est la décoration du sommet $v \in U \sqcup I$, $p_v : \text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow M$ est la projection qui oublie tous les points sauf v , et $p_e : \text{FM}_M(U) \rightarrow \text{FM}_M(2)$ est la projection qui oublie tous les points sauf les extrémités de l'arête e . Si l'on note $\pi : \text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_M(U)$ la projection canonique, on peut alors définir

$$\omega(\Gamma) := \pi_*(\omega'(\Gamma)) = \int_{\text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_M(U)} \omega'(\Gamma). \quad (2.5.13)$$

Remarque 2.5.14. On peut voir qu'il y a un problème : la forme $\omega'(\Gamma)$ n'étant pas minimale en générale, on ne peut a priori pas calculer son intégrale le long des fibres de π . Campos et Willwacher [CW16] ont défini une sous-ADGC de $\Omega_{\text{PA}}^*(-)$ constituée des formes dites « triviales », c'est-à-dire les formes qui sont obtenues en intégrant des formes minimales le long de fibrés triviaux. Ils ont démontré que cette sous-ADGC était quasi-isomorphe à $\Omega_{\text{PA}}^*(-)$ et que l'on pouvait intégrer une forme triviale le long des fibres de n'importe quel fibré. Ils ont aussi montré que l'on pouvait faire en sorte que $R \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M)$ factorise par les formes triviales et que l'on pouvait choisir un propagateur qui est une forme triviale.

Proposition 2.5.15. *L'application $\omega' : \text{Graphs}'_R(U) \rightarrow \text{FM}_M(U)$ est un morphisme d'ADGC bien défini.*

On vérifie assez facilement que ω' est compatible avec les identifications qui définissent $\text{Graphs}'_R(U)$, directement grâce à la construction. Soit $\Gamma, \Gamma' \in \text{Graphs}'_R(U)$ deux graphes, avec comme ensembles de sommets internes respectifs I et I' , et comparons $\omega(\Gamma \cdot \Gamma')$ avec $\omega(\Gamma) \wedge \omega(\Gamma')$. Il y a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{FM}_M(U \sqcup I \sqcup I') & \xrightarrow{q} & \text{FM}_M(U \sqcup I) \\ \downarrow q' & \searrow \pi & \downarrow p \\ \text{FM}_M(U \sqcup I') & \xrightarrow{p'} & \text{FM}_M(U) \end{array} \quad (2.5.16)$$

Ce carré n'est malheureusement pas cartésien $\text{FM}_M(U \sqcup I \sqcup I')$ n'est pas le produit fibré P des trois autres espaces. On peut interpréter P comme un espace de configuration « virtuel », où les points de $U \sqcup I$ forment une configuration, ceux de $U \sqcup I'$ forment une configuration, mais les points de I et I' peuvent être au même endroit en même temps. Nous avons une application induite $\rho : \text{FM}_M(U \sqcup I \sqcup I') \rightarrow P$ qui est un morphisme de fibrés SA au-dessus de $\text{FM}_M(U)$. Cette application est de degré 1 sur les fibres, donc si $\alpha \in \Omega_{\text{PA}}^*(P)$ est une forme quelconque, l'intégrale le long des fibres de $\rho^*(\alpha)$ est égale à l'intégrale le long des fibres de α . La forme $\omega'(\Gamma \cdot \Gamma')$ est de la forme $\rho^*(q^*(\alpha) \wedge q'^*(\alpha'))$,

donc l'intégrale $\omega(\Gamma \cdot \Gamma')$ se sépare en deux facteurs $p_*(\alpha) \wedge p'_*(\alpha')$ (grâce à un théorème général sur les intégrales le long des fibres), que l'on identifie respectivement à $\omega(\Gamma)$ et $\omega(\Gamma')$. Cela montre que ω est un morphisme d'algèbres.

Il ne reste alors plus qu'à montrer que ω est compatible avec la différentielle. Cela découle de la formule de Stokes et de la description du bord fibre à fibre de la projection $\text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_M(U)$. Par la formule de Stokes, on a

$$d(\pi_*(\omega'(\Gamma))) = \pi_*(d(\omega'(\Gamma))) \pm \pi_*^\partial(\omega'(\Gamma)|_{\text{FM}_M^\partial(U \sqcup I)}). \quad (2.5.17)$$

La première partie du terme de droite correspond à la différentielle interne de R (en agissant sur les décorations) et à la partie coupe d_{split} (grâce à $d\varphi = \Delta_M$). Nous pouvons identifier la seconde partie à la partie contractante. Posons $A = U \sqcup I$ et rappelons que

$$\text{FM}_M^\partial(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}_M(A, U)} \partial_W \text{FM}_M(A), \quad (2.5.18)$$

où $\mathcal{BF}_M(A, U) = \{W \subset A \mid \#W \geq 2 \text{ et } \#(W \cap U) \leq 1\}$. La facette $\partial_W \text{FM}_M(A)$ est donnée par l'ensemble des configurations où les points indexés par W sont infinitésimalement proches les uns des autres par rapport aux points qui ne sont pas dans W . Cette facette est l'espace total d'un fibré de la forme $\text{FM}_n(W) \rightarrow \partial_W \text{FM}_M(A) \rightarrow \text{FM}_M(A/W)$. Grâce à la condition $\#(W \cap U) \leq 1$, on peut identifier A/W avec $U \sqcup J$ pour un certain ensemble J . En notant $\Gamma_W \subset \Gamma$ le sous-graphe plein sur les sommets de W , on voit que $\int_{\partial_W \text{FM}_M(A) \rightarrow \text{FM}_M(U)} \omega'(\Gamma)$ est égal à $c_{\Gamma_W} \omega(\Gamma/\Gamma_W)$, où c_{Γ_W} est un coefficient numérique donné par une intégrale d'une certaine forme (dépendant de Γ_W) sur $\text{FM}_n(W)$.

Ce coefficient numérique avait déjà été étudié dans la preuve de la formalité de \mathbb{R}^n . On peut montrer qu'il s'annule sauf si $\#W = 2$ et que les deux points sont reliés par une seule arête. En effet, des arguments généraux montrent que c_{Γ_W} s'annule

- si Γ_W est déconnecté par un argument sur la dimension;
- si Γ_W contient un sommet univalent, à part si c'est le graphe avec exactement deux sommets;
- si Γ_W contient un sommet bivalent par un argument de symétrie;
- ou si Γ_W contient au moins trois sommets : en général par un comptage de degré (si e est le nombre d'arêtes et v celui de sommets, alors $e \geq 3v/2$, la forme à intégrer est de degré $(n-1)e \geq 3v(n-1)/2 = nv + (n-3)v/2 \geq nv$, et l'espace $\text{FM}_n(v)$ sur lequel on l'intègre est de dimension $nv - n - 1 < nv$) ou par un argument ad-hoc pour $n = 2$.

Il ne reste donc plus que les termes de la forme $\pm \Gamma/e$ pour une arête e : c'est exactement $\omega(d_{\text{contr}}(\Gamma))$.

2.5.4 Fonction de partition

L'application $\omega : \text{Graphs}'_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ ne peut malheureusement pas être un quasi-isomorphisme : le complexe $\text{Graphs}'_R(U)$ est trop gros. Dans le cas extrême où $U = \emptyset$, on a $\text{Conf}_M(\emptyset) = *$ donc $\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(\emptyset)) = \mathbb{R}$ concentré en degré zéro. L'ADGC $\text{Graphs}'_R(\emptyset)$ est cependant loin d'être acyclique : elle contient tous les graphes composés

uniquement de sommets internes, et la cohomologie de ce complexe est a priori non-triviale. Si par exemple $R = \mathbb{R}$ (i.e. les graphes ne sont pas décorés), alors Willwacher [Wil14] a par exemple montré que l'ADGC contenait en degré 0 une copie de l'algèbre de Lie de Grothendieck–Teichmüller grt qui est de dimension infinie.

Une copie de cette algèbre est incluse dans tous les $\text{Graphs}'_R(U)$ et pose problème. Nous devons donc nous débarrasser de toutes les composantes « internes » (composées exclusivement de sommets internes). Il n'est pas possible de simplement quotienter par les graphes qui ont des composantes internes : cela ne serait pas compatible avec la procédure d'intégration.

Définition 2.5.19. On note $\text{fGC}_R = \text{Graphs}'_R(\emptyset)$ l'ADGC des graphes sans sommets externes. Le produit est l'union disjointe des graphes. Elle agit sur tous les $\text{Graphs}'_R(U)$ par l'union disjointe.

L'ADGC fGC_R est quasi-libre : elle est librement engendrée (en tant qu'algèbre) par le sous-module des graphes connexes GC_R .

Remarque 2.5.20. La différentielle $d : \text{fGC}_R \rightarrow \text{fGC}_R$ est quadratique-linéaire en termes des générateurs GC_R . En effet, la différentielle interne d_R et la différentielle contractante d_{contr} préservent la connexité (i.e. elles sont linéaires), tandis que la différentielle coupante transforme en une combinaison linéaire de graphes connexes (linéaire) et de graphes à deux composantes connexes (quadratique).

Considérons alors le module dual GC_R^\vee et sa suspension $\text{GC}_R^\vee[-1]$. La théorie générale de la dualité de Koszul entre l'opérade des algèbres commutatives et l'opérade des algèbres de Lie entraîne alors que $\text{GC}_R^\vee[-1]$ est une algèbre de Lie différentielle-graduée. La différentielle de GC_R^\vee correspond à la partie linéaire de la différentielle d , et le crochet de Lie de $\text{GC}_R^\vee[-1]$ correspond à la partie quadratique de d . Plus précisément, si l'on décompose $d : \text{GC}_R \rightarrow \text{fGC}_R$ en la somme $d = d_1 + d_2$ où $d_1(\text{GC}_R) \subset \text{GC}_R$ et $d_2(\text{GC}_R) \subset S^2(\text{GC}_R)$, alors pour $x, y \in \text{GC}_R^\vee[-1]$ et $\gamma \in \text{GC}_R$, on définit les éléments du dual $\delta x \in \text{GC}_R^\vee$ et $[x, y] \in \text{GC}_R^\vee[-1]$ par :

$$\langle \delta x, \gamma \rangle := \langle x, d_1 \gamma \rangle, \quad \langle [x, y], \gamma \rangle := \langle x \otimes y, d_2 \gamma \rangle. \quad (2.5.21)$$

Le fait que $d : \text{fGC}_R \rightarrow \text{fGC}_R$ est une dérivation de carré nul entraîne que δ et $[-, -]$ vérifient les relations qui définissent une algèbre de Lie différentielle graduée (antisymétrie graduée, Jacobi, Leibniz).

Nous pouvons interpréter graphiquement ces définitions. On peut représenter les éléments de $\text{GC}_R^\vee[-1]$ des sommes potentiellement infinies de graphes connexes décorés par R^\vee (que l'on peut voir comme des éléments de la base duale à celle de GC_R donnée par les graphes décorés par R). La différentielle $\delta : \text{GC}_R^\vee[-1] \rightarrow \text{GC}_R^\vee[-1]$ est la somme de plusieurs termes :

- le dual de la différentielle interne δ_{R^\vee} , qui agit sur les décorations par une dérivation ;
- la différentielle « décontractante » $\delta_{\text{décontr}}$: c'est la somme sur toutes les manières de transformer un sommet interne en une arête et de reconnecter les arêtes incidentes

à l'un ou l'autre des sommets ; sur les décorations, cette différentielle agit par le coproduit $R^\vee \rightarrow R^\vee \otimes R^\vee$ dual au produit $R \otimes R \rightarrow R$;

- la différentielle « connectante » δ_{convec} : c'est la somme sur toutes les manières de connecter deux sommets quelconques par une arête, en envoyant les décorations α, β des extrémités sur l'élément de $R^\vee \otimes R^\vee$ défini par $x \otimes y \mapsto \langle \alpha \otimes \beta, (x \otimes y) \Delta_R \rangle$.

Enfin, le crochet $[\gamma, \gamma']$ de deux graphes γ, γ' est défini de manière similaire à la différentielle connectante. C'est la somme sur toutes les manières de connecter un sommet de γ avec un sommet de γ' (en agissant sur les décorations comme ci-dessus).

On définit l'ensemble des éléments de Maurer–Cartan $\text{MC}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} comme l'ensemble des éléments $x \in \mathfrak{g}^1$ vérifiant $dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0$. La théorie générale entraîne alors que la donnée d'un morphisme d'ADGC $f : \text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$ est équivalente à la donnée d'un élément de Maurer–Cartan $z \in \text{MC}(\text{GC}_R^\vee[-1])$. Cet élément γ est simplement la restriction de f aux graphes connexes. La compatibilité de f avec la différentielle et le produit est encodée dans la relation de Maurer–Cartan.

Définition 2.5.22. La fonction de partition de M est le morphisme $z : \text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$ donné par $\omega : \text{Graphs}'_R(\emptyset) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(\emptyset)) = \mathbb{R}$.

La terminologie « fonction de partition » provient de la physique mathématique. Cette fonction de partition est liée aux invariants de Chern–Simons [AS94 ; BC98 ; CM10]. Par la Remarque 2.5.20, la donnée de $z : \text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$ est équivalente à la donnée d'un élément de Maurer–Cartan, encore dénoté $z \in \text{MC}(\text{GC}_R^\vee)$ par abus de notation.

Définition 2.5.23. Le complexe de graphes réduit $\text{Graphs}_R(U)$ est le produit tensoriel $\text{Graphs}'_R(U) \otimes_{\text{fGC}_R} \mathbb{R}$.

Concrètement, $\text{Graphs}_R(U)$ est le quotient de $\text{Graphs}'_R(U)$ par l'idéal engendré par les relations suivantes : si $\Gamma \in \text{Graphs}'_R(U)$ et $\gamma \in \text{fGC}_R$, alors $\Gamma \sqcup \gamma$ est identifié avec $z(\gamma)\Gamma$.

Proposition 2.5.24. L'application ω induit un morphisme d'ADGC :

$$\omega : \text{Graphs}_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U)). \quad (2.5.25)$$

Démonstration. Soit $\Gamma \in \text{Graphs}'_R(U)$ et $\gamma \in \text{fGC}_R$. On doit vérifier que $\omega(\Gamma \sqcup \gamma) = z(\gamma)\omega(\Gamma)$. Il suffit en fait de vérifier que $\omega(\emptyset \sqcup \gamma) = z(\gamma)$, car $\Gamma \sqcup \gamma = \Gamma \cdot (\emptyset \sqcup \gamma)$ et que ω est compatible avec le produit. Cela découle essentiellement du théorème de Fubini : l'application entre $\text{FM}_M(I)$ la fibre de $\text{FM}_M(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_M(U)$ et est de degré 1. \square

2.5.5 Simplification de la fonction de partition

Nous voulons maintenant définir un morphisme $\text{Graphs}_R(U) \rightarrow \mathbb{G}_A(U)$. L'idée naturelle serait de simplement quotienter par les graphes ayant des sommets internes. Malheureusement, cette opération n'est pas compatible avec la différentielle. En effet, la partie coupante peut déconnecter une composante interne, qui est alors évaluée par la fonction de partition pour donner un nombre, non nul en général.

On note cependant qu’une partie de la fonction de partition est compatible avec la différentielle. Sur un graphe γ avec un unique sommet indexé par $x \in R$, la fonction de partition vaut $z(\gamma) = \int_M x = \varepsilon(x)$. Combiné avec le Lemme 2.1.11 et l’Équation (2.5.9), on voit que cette identification est compatible avec le quotient. Seuls les termes où des graphes avec plus de deux sommets apparaissent posent problème. On définit alors la fonction de partition « triviale » :

$$z_0(\gamma) := \begin{cases} \int_M x = \varepsilon(x), & \text{si } \gamma \text{ est le graphe à un sommet décoré par } x \in R; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5.26)$$

Nous allons montrer que la fonction de partition z est « homotope » (en tant que morphisme d’ADGC $\text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$) à z_0 .

Proposition 2.5.27 ([CM10, Lemma 3]). *Le propagateur φ peut être choisi de manière à ce que l’équation suivante soit vraie pour tout $x \in R$:*

$$\omega\left(\textcircled{1} \text{---} \bullet^x\right) = 0. \quad (2.5.28)$$

Démonstration. On remplace simplement φ par

$$\varphi - \int_3 p_{13}^*(\varphi) p_{23}^*(\Delta_R) - \int_3 p_{23}^*(\varphi) p_{13}^*(\Delta_R) + \int_{3,4} p_{34}^*(\varphi) p_{13}^*(\Delta_R) p_{14}^*(\Delta_R), \quad (2.5.29)$$

où la notation $\int_{i,j,k\dots}$ représente l’intégrale le long des fibres de l’application $\text{FM}_M(n) \rightarrow \text{FM}_M(r)$ qui oublie les points $i, j, k \dots$ \square

Corollaire 2.5.30. *La fonction de partition z s’annule sur tous les graphes contenant un sommet univalent.*

Démonstration. Soit γ un tel graphe, i son sommet univalent, $x \in R$ sa décoration et j l’unique sommet adjacent au sommet univalent. La fonction de partition $z(\gamma)$ se calcule comme l’intégrale $\int_{\text{FM}_M(I)} \omega'(\gamma)$. La forme $\omega'(\gamma)$ se décompose en $\omega'(\gamma') \wedge p_{ij}^*(\varphi) \wedge p_i^*(x)$. L’intégrale sur $\text{FM}_M(I)$ peut se calculer (grâce à une formule classique) en calculant d’abord l’intégrale le long des fibres du fibré $\text{FM}_M(I) \rightarrow \text{FM}_M(I \setminus \{i\})$ puis en calculant l’intégrale sur $\text{FM}_M(I \setminus \{i\})$. L’intégrale le long des fibres en question est exactement celle qui apparaît dans la proposition précédente et vaut donc zéro. \square

L’article de Cattaneo et Mnëv [CM10] contient une propriété supplémentaire : le propagateur φ pourrait être choisi de sorte que la fonction de partition s’annule sur tout graphe ayant un sommet bivalent décoré par $1 \in R$. Cela permettrait de conclure que la fonction de partition est égale à la fonction triviale pour $n \geq 4$.

Proposition 2.5.31. *Soit $\gamma \in \text{GC}_R$ un graphe ayant au moins deux sommets et ne contenant aucun sommet bivalent décoré par l’unité $1 \in R^0$. Supposons que $n \geq 4$. Alors $z(\gamma) = 0$.*

Démonstration. Si γ contient un sommet univalent alors on conclut par le corollaire précédent. Sinon, notons $i + j$ le nombre de sommets de γ , où j est le nombre de sommets bivalents (nécessairement décoré par un élément de degré ≥ 2 , car R est 1-connexe) et i le nombre de sommets au moins trivalents. Le nombre d'arêtes de γ est au moins égal à $\frac{3i+2j}{2}$. Ces arêtes sont toutes de degré $n - 1$. De plus, les décorations des sommets bivalents contribuent au moins 2 au degré chacune, donc la forme $\omega'(\gamma)$ est de degré au moins $\frac{3i+2j}{2}(n - 1) + 2j$. Elle est intégrée sur l'espace $\text{FM}_M(i + j)$ qui est de dimension $(i + j)n$. La différence entre ces deux nombres vérifie :

$$\deg \omega'(\gamma) - \dim \text{FM}_M(i + j) \geq \frac{3i + 2j}{2}(n - 1) + 2j - (i + j)n = \frac{1}{2}((i + j)(n - 3) - j(n - 5)). \quad (2.5.32)$$

Cette dernière expression est strictement positive si $n \geq 4$ et $i + j \geq 2$. La forme $\omega'(\gamma)$ est donc de degré supérieur à la dimension de l'espace sur lequel on l'intègre, elle est donc nécessairement nulle. \square

Malheureusement, le résultat de [CM10] ne s'applique pas au cadre SA (nous n'avons pas réussi à déterminer quel type de formes [CM10] utilisent) : ils utilisent une opération $d_M : \Omega_{\text{PA}}^*(M \times N) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(M \times N)$ qui ne différencie que par rapport aux coordonnées de M (avec $d = d_M + d_N$). Cette opération est bien définie pour les formes de de Rham (il suffit de l'exprimer en coordonnées locales) mais il semblerait qu'elle n'existe pas pour les formes PA. (Plus précisément, il faudrait trouver une opération $d_M : \Omega_{\text{PA}}^*(M \times N) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^{*+1}(M \times N)$ telle que si $\pi : M \times N \rightarrow M$ est la projection, alors $d(\pi_*\alpha) = \pi_*(d_M\alpha)$; cela ne semble pas possible.)

Nous pouvons cependant contourner cette difficulté.

Définition 2.5.33. Soit fGC_R^0 le quotient de fGC_R par la relation $\gamma \sim z(\gamma)$ pour γ un graphe avec un unique sommet.

Notons que $z \in \text{GC}_R^\vee$ factorise évidemment par GC_R^0 , ce qui produit un élément $\bar{z} \in (\text{GC}_R^0)^\vee$. Considérons l'idéal $I \subset \text{fGC}_R^0$ engendré par les graphes ayant au moins un sommet bivalent décoré par $1 \in R$. Par un argument classique en théorie des complexes de graphes, cet idéal est quasi-isomorphe à l'idéal fLoop_R engendré par les graphes circulaires (les graphes connexes sans décoration dont tous les sommets sont bivalents). La fonction de partition s'annule sur ces graphes circulaires, donc $\bar{z} \in (\text{GC}_R^0)^\vee$ est homotope à un élément de la sous-dg-algèbre de Lie $(\text{GC}_R/\text{Loop}_R)^\vee$. L'argument de la proposition précédente montre que cette dg-algèbre de Lie s'annule dans le degré qui nous intéresse, ce qui permet de conclure finalement que \bar{z} est homotope à zéro, ce qui permet de déduire que :

Proposition 2.5.34. Les morphismes d'ADGC associés à z et z_0 sont homotopes.

Nous avons défini $\text{Graphs}_R(U)$ comme le produit tensoriel $\text{Graphs}'_R(U) \otimes_{\text{fGC}_R} \mathbb{R}$. L'ADGC fGC_R est quasi-libre et le fGC_R -module $\text{Graphs}'_R(U)$ sont quasi-libres. Donc si deux morphismes $\text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$ sont homotopes, les ADGC associés $\text{Graphs}'_R(U) \otimes_{\text{fGC}_R} \mathbb{R}$ sont quasi-isomorphes. Cela nous permet donc de conclure que $\text{Graphs}_R(U)$ est quasi-isomorphe

(en tant qu'ADGC) à $\text{Graphs}_R^0(U)$, construit de la même manière que $\text{Graphs}_R(U)$ mais en utilisant z_0 à la place de z ans le produit tensoriel.

2.6 Fin de la preuve

Nous pouvons maintenant nous attaquer à la dernière partie de la preuve. On montre assez facilement que l'application quotient $\text{Graphs}_R^0(U) \rightarrow \mathcal{G}_A(U)$ est compatible avec la différentielle et le produit. Nous allons montrer que c'est un quasi-isomorphisme. Grâce au théorème de Lambrechts et Stanley [LS08a], nous savons que les nombres de Betti de $\mathcal{G}_A(U)$ sont les mêmes que ceux de $\text{FM}_M(U)$. Il suffira alors de montrer que $\text{Graphs}_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ est surjective en cohomologie.

L'assertion contenue dans la définition suivante est claire :

Définition 2.6.1. L'application $\text{Graphs}_R^0(U) \rightarrow \mathcal{G}_A(U)$ factorise par le quotient $\text{Graphs}_A^0(U)$ où l'on remplace toutes les décorations par des éléments de A .

Lemme 2.6.2. L'application $\text{Graphs}_R^0(U) \rightarrow \text{Graphs}_A^0(U)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On filtre les deux complexes par le nombre d'arêtes. Sur la page E^0 de la suite spectrale associée, il ne reste plus que la différentielle interne de R et A . Les deux pages E^1 sont donc données par $\text{Graphs}_{H^*(M)}^0(U)$ et l'application entre les deux est l'identité. Par des théorèmes classiques sur les suites spectrales, le morphisme de départ est donc un quasi-isomorphisme. \square

La proposition suivante va nous occuper presque jusqu'à la fin de la preuve :

Proposition 2.6.3. L'application quotient $\text{Graphs}_A^0(U) \rightarrow \mathcal{G}_A(U)$ est un quasi-isomorphisme.

Filtrons les deux complexes par le nombre d'arêtes moins le nombre de sommets, c'est-à-dire :

$$F_s \text{Graphs}_A^0(U) = \langle \Gamma \mid \#E_\Gamma - \#V_\Gamma \leq s \rangle, \quad (2.6.4)$$

et de même pour $\mathcal{G}_A(U)$ (avec l'interprétation graphique de $\mathcal{G}_A(U)$ présentée plus haut : les relations préservent la filtration). Il est clair que l'application quotient préserve la filtration.

Sur la page $E^0 \text{Graphs}_A^0(U)$, il ne reste plus que la différentielle interne, la différentielle contractante, et la partie coupante de la différentielle qui déconnecte un sommet interne univalent. Cette partie coupante s'annule avec la partie de la différentielle qui contracte l'arête en question grâce au Lemme 2.1.11. Sur la page $E^0 \mathcal{G}_A(U)$, il ne reste que la différentielle interne de A . Nous pouvons donc scinder les complexes en termes de partition de U via les composantes connexes : les parties restantes de la différentielle préservent la connexité.

Définition 2.6.5. Notons $E^0 \text{Graphs}_A^0(U)$ (resp. $E^0 \mathcal{G}_A(U)$) le sous-complexe constitué par les graphes connexes.

Lemme 2.6.6. Il y a un scindage, où la somme est sur toutes les partitions π de U :

$$E^0\text{Graphs}_A^0(U) \cong \bigoplus_{\pi} \bigotimes_{V \in \pi} E^0\text{Graphs}_A^0(V). \quad (2.6.7)$$

Un scindage similaire existe pour $E^0G_A(U)$ et l'application quotient $E^0\text{Graphs}_A^0(U) \rightarrow E^0G_A(U)$ préserve le scindage.

Il nous suffit alors de montrer que :

Lemme 2.6.8. L'application $E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle \rightarrow E^0G_A\langle U \rangle$ est un quasi-isomorphisme.

Grâce à la relation de symétrie, l'ADGC $E^0G_A\langle U \rangle$ est isomorphe au produit tensoriel de A avec la partie connexe de $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U))$, que l'on dénotera par $e_n^\vee\langle U \rangle$ pour des raisons qui seront claires dans le Chapitre 4. On a

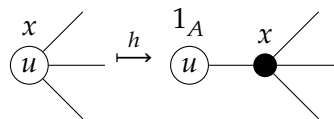
$$\dim H^i(e_n^\vee\langle U \rangle) = \begin{cases} (\#U - 1)!, & \text{si } i = (n - 1)(\#U - 1); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6.9)$$

Les éléments en degré $(n - 1)(\#U - 1)$ se représentent par des graphes connexes sur $\#U$ sommet modulo les relations d'Arnold. Le morphisme $E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle \rightarrow A \otimes e_n^\vee\langle U \rangle$ est clairement surjectif en cohomologie (on représente $a \otimes [\Gamma]$ par $p_1^*(a)\Gamma$ pour n'importe quel représentant fermé de Γ). Il nous suffit donc de montrer que les nombres de Betti coïncident. On peut calculer ces nombres par récurrence sur $\#U$:

$$\dim H^i(E^0G_A\langle U \rangle) = \begin{cases} \dim H^i(A), & \text{si } U \text{ est un singleton;} \\ (\#U - 1) \cdot \dim H^{i-n+1}(E^0G_A\langle U \setminus \{u\} \rangle), & \text{pour } u \in U \text{ et } \#U \geq 2. \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Lemme 2.6.11. Le complexe $E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle$ vérifie les mêmes relations de récurrence.

Démonstration. Pour $\#U = 1$, il y a une homotopie explicite qui montre que $E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle$ a la même cohomologie que A . On peut la représenter graphiquement par :



$$(2.6.12)$$

Soit maintenant U un ensemble fini à au moins deux éléments et fixons $u \in U$. Notons $C_u \subset E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle$ le sous-complexe engendré par les graphes tels que u est univalent, décoré par $1 \in A$ et connecté à un autre sommet externe. Clairement, $C_u \cong \bigotimes_{v \in U, v \neq u} e_{uv} E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \setminus \{u\} \rangle$ qui vérifie la bonne relation de récurrence sur les nombres de Betti. L'inclusion $C_u \subset E^0\text{Graphs}_A^0\langle U \rangle$ est un quasi-isomorphisme : si on note Q le quotient, on a $Q = Q_1 \oplus Q_2$ où

- Q_1 est le sous-module engendré par les graphes où u est univalent, décoré par 1 et connecté à un sommet interne,

- Q_2 est engendré par le reste : u est soit au moins bivalent, soit décoré par $A \in A^{\geq 2}$.

On peut filtrer Q par $F_s Q_1 = \{\Gamma \mid \#E_\Gamma \leq s + 1\}$ et $F_s Q_2 = \{\Gamma \mid \#E_\Gamma \leq s\}$. Alors la différentielle sur la page E^0 de la suite spectrale associée envoie $E^0 Q_1$ sur $E^0 Q_2$ par un isomorphisme, ce qui montre que Q est acyclique et donc que $C_u \simeq E^0 \text{Graphs}_A^0 \langle U \rangle$. Cela permet donc de vérifier que la relation de récurrence sur les nombres de Betti de $E^0 \text{Graphs}_A^0(-)$ est la même que pour $E^0 G_A(-)$. \square

Comme le morphisme est clairement surjectif en homologie, on en conclut que l'application quotient induit un quasi-isomorphisme sur la page E^0 et donc que c'est un quasi-isomorphisme. Cela termine de démontrer la Proposition 2.6.3.

Il ne reste plus qu'à montrer que :

Lemme 2.6.13. *L'application $\text{Graphs}_A(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_M(U))$ est surjective en homologie*

Démonstration. Cela nécessite simplement de représenter n'importe quelle classe par un graphe. \square

Jusqu'à présent, nous avons fixé le modèle à dualité de Poincaré. Pour avoir le résultat complètement général, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.6.14. *Si A et B sont deux ADGC à dualité de Poincaré quasi-isomorphes, alors $G_A(U)$ et $G_B(U)$ le sont aussi.*

Démonstration. La preuve fait encore intervenir les complexes de graphes. Fixons un zig-zag de quasi-isomorphismes $A \leftarrow R \rightarrow B$. On a alors deux applications $\varepsilon_A, \varepsilon_B : R^n \rightarrow \mathbb{R}$ obtenues respectivement en composant le morphisme vers A ou B et l'augmentation décalée de A ou B . On obtient ainsi deux complexes de graphes $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_A}(U)$ et $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_B}(U)$ définis comme $\text{Graphs}_R^0(U)$ précédemment. Les applications quotient $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_A}(U) \rightarrow G_A(U)$ et $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_B}(U) \rightarrow G_B(U)$ étant des quasi-isomorphismes, il suffit simplement de montrer que les deux complexes de graphes sont quasi-isomorphes. Quitte à multiplier l'un des deux par un scalaire (ce qui induit un automorphisme du complexe de graphes associé), on peut supposer que ε_A et ε_B induisent la même application en cohomologie. Les deux applications sont donc homotopes comme morphismes de complexes de chaînes $R \rightarrow \mathbb{R}[-n]$. L'homotopie induit une homotopie entre les morphismes d'ADGC $z_A, z_B : \text{fGC}_R \rightarrow \mathbb{R}$. En réutilisant la technique vue plus tôt, on en déduit que $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_A}$ et $\text{Graphs}_R^{\varepsilon_B}$ sont quasi-isomorphes. \square

En combinant tout ce que nous venons de voir, nous avons terminé de démontrer le Théorème 2.2.1 pour $\dim M \geq 4$. Le cas $\dim M < 4$ se traite complètement différemment :

- En dimension 0, la seule variété compacte sans bord simplement connexe est le singleton $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Le résultat est alors assez clair (voire mal défini car $G_A(U)$ contient des éléments de degré négatif). En effet, $\text{Conf}_{\mathbb{R}^0}(U)$ est vide pour $\#U \geq 2$. On choisit l'ADGC $H^*(\mathbb{R}^0) = (\mathbb{R}, d = 0)$ comme modèle à dualité de Poincaré de \mathbb{R}^0 , avec $\Delta_{\mathbb{R}} = 1 \otimes 1$. Le modèle de Lambrechts–Stanley devient $G_{H^*(\mathbb{R}^0)}(U) = (S(\omega_{ij})_{i \neq j \in U}/I, d\omega_{ij} = 1)$. Cette ADGC est clairement acyclique pour $\#U \geq 2$: en

effet, si α est un cocycle, alors $\alpha = d(\omega_{ij}\alpha)$ est automatiquement un cobord (où $i \neq j \in U$).

- En dimension 1, il n'existe aucune variété compacte sans bord simplement connexe.
- En dimension 2, la seule variété compacte sans bord simplement connexe est la sphère \mathbb{S}^2 . Or cette sphère est aussi la droite projective complexe \mathbb{CP}^1 , qui est une variété projective complexe lisse. On peut donc appliquer le résultat de Kriz [Kri94], qui dit que pour une variété projective complexe lisse M , $G_{H^*(M)}(U)$ est bien un modèle rationnel (donc réel) de $\text{Conf}_M(U)$. Campos et Willwacher [CW16, Appendix B] ont également calculé explicitement la fonction de partition dans ce cas et montré qu'elle est presque triviale par des méthodes analytiques.
- En dimension 3, grâce à la conjecture de Poincaré – désormais un théorème de Perelman [Per02; Per03], voir aussi Morgan et Tian [MT07] et Kleiner et Lott [KL08] – la seule variété compacte sans bord simplement connexe est la sphère \mathbb{S}^3 . Or Cette sphère est un groupe de Lie : c'est le groupe spécial unitaire $\text{SU}(2)$. Pour un groupe de Lie G , la fibration

$$\text{Conf}_{G \setminus *}(r) \hookrightarrow \text{Conf}_G(r+1) \twoheadrightarrow G \quad (2.6.15)$$

qui ne garde que le premier point est scindée [FN62a]. Le scindage est donné explicitement par :

$$\begin{aligned} \text{Conf}_G(r+1) &\xrightarrow{\cong} \text{Conf}_{G \setminus \{1\}}(r) \times G, \\ (x_0, \dots, x_r) &\mapsto ((x_0^{-1}x_1, \dots, x_0^{-1}x_r), x_0). \end{aligned} \quad (2.6.16)$$

Comme la sphère est formelle, on peut choisir sa cohomologie $A = H^*(\mathbb{S}^3) = S(v)/(v^2)$ (avec $\deg v = 3$) pour prendre le rôle de modèle à dualité de Poincaré. Dans notre cas, $\mathbb{S}^3 \setminus * = \mathbb{R}^3$, et on sait que les espaces de configuration de \mathbb{R}^3 sont formels (Section 1.4). Combiné avec le scindage précédent, il suffit donc de montrer que $G_A(U \sqcup \{0\})$ est un modèle de $\mathbb{S}^3 \times \text{Conf}_{\mathbb{R}^3}(U)$ pour tout U . Il existe un quasi-isomorphisme explicite (nous remercions Thomas Willwacher pour nous l'avoir signalé) :

$$\begin{aligned} \pi : A \otimes H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^3}(U)) &\rightarrow G_A(U \sqcup \{0\}), \\ v \otimes 1 &\mapsto p_0^*(v), \\ 1 \otimes \omega_{ij} &\mapsto \omega_{ij} - \omega_{0i} - \omega_{0j}. \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

Comme les deux ADGC ont la même cohomologie, il suffit de vérifier que π est surjectif en cohomologie. Comme la cohomologie de l'ADGC au but est engendré en degrés 2 et 3, il suffit de le vérifier en ces degrés. C'est clair en degré 3 : si $p_0^*(v)$ n'était pas un générateur, on aurait $p_0^*(v) = d\omega$ où ω est une somme de ω_{ij} , mais tous les $p_i^*(v)$ viennent par paires dans $d\omega_{ij}$. En degré 2, c'est l'affaire d'une petite chasse au diagramme en considérant les applications quotient $G_A(U \sqcup \{*\}) \rightarrow H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^3}(U))$ et $A \otimes H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^3}(U)) \rightarrow H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^3}(U))$.

3 Variétés à bord

3.1 Motivation

Il est en général difficile de trouver un modèle à dualité de Poincaré d'une variété M donnée. Une idée très fréquente en topologie algébrique est de « découper » la variété M en sous-variétés plus simples, que l'on recolle ensuite pour reformer M . Les sous-variétés en question sont alors des variétés à bord, et il faut les recoller de composantes communes de bord pour récupérer la variété M . Par exemple, on peut obtenir une surface orientée de genre g en recollant g cylindres sur une sphère à $2g$ trous (voir la Figure 3.1 pour $g = 2$).

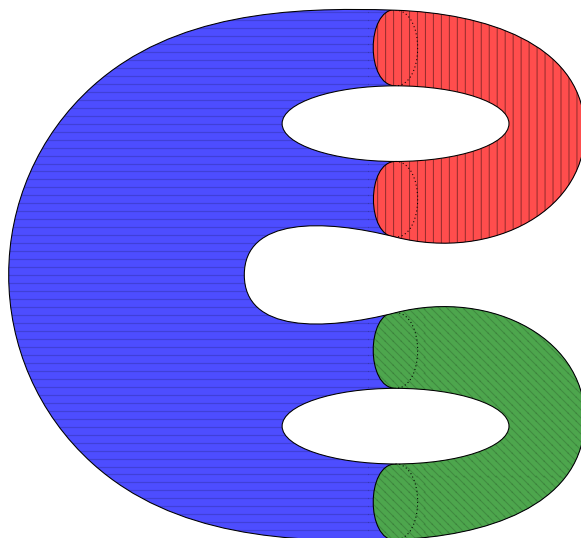


FIG. 3.1 : La surface Σ_2 obtenue en recollant une sphère à quatre trous (bleue) avec deux cylindres (rouge et vert).

Plus formellement, supposons qu'une variété X s'écrive comme la réunion de deux variétés M et M' le long de leur bord commun $\partial M = \overline{\partial M'} = N$. Il existe une formule qui permet d'exprimer les espaces de configuration de X en fonction de ceux de M , M' et N . Supposons que l'on a choisi un voisinage tubulaire $N \times \mathbb{R} \hookrightarrow X = M \cup_N M'$ de N tel que $N \times \{0\}$ est le bord commun de M et M' , $N \times \mathbb{R}_{<0}$ est inclus dans M et $N \times \mathbb{R}_{>0}$ est inclus dans M' (voir Figure 3.2).

Alors la collection la collection $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}} = \{\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(U)\}_{U \text{ fini}}$ est un « monoïde » (à homotopie près dans la catégorie des collections symétriques). Choisissons un plongement $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ (par exemple en identifiant le premier facteur à $\mathbb{R}_{<0}$ et le second à

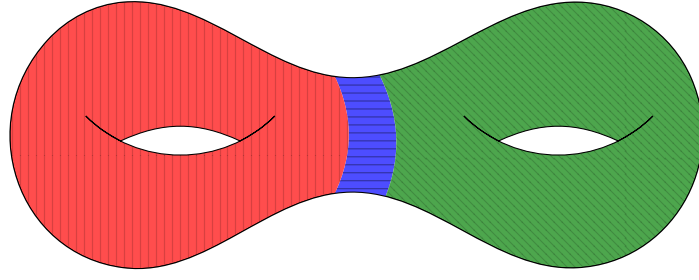


FIG. 3.2 : La surface Σ_2 vue comme $\Sigma_{1,1} \cup_{S^1 \times \mathbb{R}} \Sigma_{1,1}$.

$\mathbb{R}_{>0}$). Alors on a un plongement induit $N \times \mathbb{R} \sqcup N \times \mathbb{R} \hookrightarrow N \times \mathbb{R}$, qui induit, pour des ensembles finis U et V , un plongement :

$$\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(U) \times \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(V) \hookrightarrow \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(U \sqcup V). \quad (3.1.1)$$

On peut représenter cette opération par la Figure 3.3. Cette collection d'applications vérifie des relations de compatibilité avec les bijections $U \rightarrow U$ et $V \rightarrow V$. De plus, elle vérifie une relation d'associativité à homotopie près, et une relation d'unité à homotopie près (l'unité étant la configuration vide).

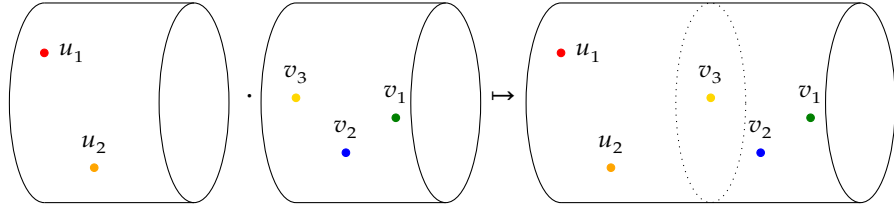


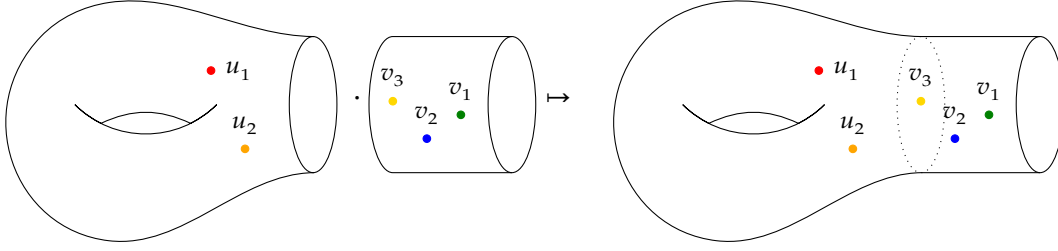
FIG. 3.3 : $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ est un monoïde.

Remarque 3.1.2. La collection $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ ne forme pas un monoïde strict : l'associativité et l'unité ne sont valables qu'à homotopie près (comme dans un espace de lacets, par exemple). Il est possible d'utiliser un point de vue qui règle ce problème grâce à la théorie des opérades (Section 4.3.1). Dans la Section 3.3, nous allons définir des compactifications $\text{aFM}_N(r)$ de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(r)$ telles que aFM_N soit un monoïde strictement associatif et unitaire.

De la même manière, la collection $\text{Conf}_M = \{\text{Conf}_M(U)\}$ est un module à droite (à homotopie près) sur $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ (Figure 3.4). Choisissons un collier autour de $N = \partial M$, c'est-à-dire un plongement $N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow M$ tel que l'image de $N \times \{0\}$ est ∂M . En utilisant ce collier, on obtient des applications, illustrées dans la Figure 3.4 :

$$\text{Conf}_M(U) \times \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(V) \rightarrow \text{Conf}_M(U \sqcup V). \quad (3.1.3)$$

Enfin, $\text{Conf}_{M'}$ est un module à gauche (à homotopie près) sur ce monoïde. Les espaces de configuration de $X = M \cup_N M'$ vérifient alors la formule suivante, qui utilise les


 FIG. 3.4 : Conf_M est un module à droite sur $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$.

structures algébriques que nous venons de définir :

$$\begin{aligned} \text{Conf}_X(U) &\simeq (\text{Conf}_M \otimes_{\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}} \text{Conf}_{M'})(U) \\ &:= \left(\bigsqcup_{U=V \sqcup V'} \text{Conf}_M(V) \times \text{Conf}_{M'}(V') \right) / \sim, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

où la relation \sim est donnée par $(x \cdot y, z) \sim (x, y \cdot z)$ pour tout $x \in \text{Conf}_M$, $y \in \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ et $z \in \text{Conf}_{M'}$, comme dans un produit tensoriel.

Notre objectif, dans ce chapitre, sera de définir un modèle pour le type d'homotopie réelles des objets $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ et Conf_M qui tiennent compte des structures algébriques ci-dessus (Section 3.3). Dans la Section 3.4, nous simplifieront le modèle pour Conf_M pour obtenir un modèle « à la Lambrechts–Stanley ». Sauf mention contraire, les résultats proviennent de l'article [CILW18], en collaboration avec Campos, Lambrechts et Willwacher.

Remarque 3.1.5. Les résultats ci-dessous concernent essentiellement les variétés simplement connexes et ne s'appliquent donc pas aux surfaces compactes autres que \mathbb{S}^2 et \mathbb{D}^2 . Dans [CIW19], avec Campos et Willwacher, nous avons généralisé le résultat de la Section 3.4 aux espaces de configuration à repères (cf. Section 4.3.2) des surfaces orientées.

3.2 Modèles à dualité de Poincaré–Lefschetz

Pour les variétés compactes sans bord, la construction du modèle de Lambrechts–Stanley reposait sur la notion d'ADGC à dualité de Poincaré, qui donne un accouplement non-dégénéré $A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour les variétés compactes à bord, cette dualité est remplacée par la dualité de Poincaré–Lefschetz. Si $(M, \partial M)$ est une variété compacte orientée à bord de dimension n , alors l'évaluation sur la classe fondamentale et le cup-produit induisent un accouplement non-dégénéré $H^k(M) \otimes H^{n-k}(M, \partial M) \rightarrow \mathbb{R}$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Dans cette section, nous allons expliquer comment adapter la définition des ADGC à dualité de Poincaré à ce cadre.

Soit $(M, \partial M)$ une variété compacte orientée à bord de dimension n . Supposons que l'on se donne un modèle de l'inclusion $i : \partial M \rightarrow M$, c'est-à-dire un morphisme d'ADGC $\lambda : B \rightarrow B_\partial$ tel qu'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{\sim} & \cdot & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\text{PA}}^*(M) \\ \downarrow \lambda & & \downarrow & & \downarrow i^* \\ B_\partial & \xleftarrow{\sim} & \cdot & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\text{PA}}^*(M, \partial M) \end{array} \quad (3.2.1)$$

Alors $\Omega_{\text{PA}}^*(M, \partial M)$ est quasi-isomorphe (en tant que complexe de chaînes) au « noyau homotopique » de λ , c'est-à-dire au complexe :

$$\text{hoker}(\lambda) := (B^* \oplus B_\partial^{*-1}, d(x, y) = (dx, \lambda(x) + dy)). \quad (3.2.2)$$

Le noyau « standard » $K := \ker(\lambda)$ s'inclut dans $\text{hoker}(\lambda)$ par $x \mapsto (x, 0)$. Par des arguments généraux, on peut toujours trouver un modèle λ qui est surjectif. Dans ce cas, l'inclusion $\ker(\lambda) \rightarrow \text{hoker}(\lambda)$ est un quasi-isomorphisme.

La dualité de Poincaré–Lefschetz nous dit que la cohomologie de B et celle de K sont duales. Si le bord est non vide, il n'est pas raisonnable de chercher un accouplement non-dégénéré entre B et K . En effet, comme $\dim K < \dim B$, il est impossible que K et B s'accouplent de manière non-dégénérée. Cherchons par quoi nous pourrions remplacer cet accouplement. Dans une ADGC à dualité de Poincaré, l'accouplement est induit par une forme $\varepsilon : A^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est compatible avec la différentielle, c.-à-d. $\varepsilon \circ d = 0$. Cette forme représente l'évaluation sur $[M] \in H_n(M)$, ou encore l'intégrale sur M . Dans une variété à bord, l'intégrale d'une forme exacte n'est pas nécessairement nulle : on a la formule de Stokes, qui dit que $\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha|_{\partial M}$. Une partie de la structure d'ADGC à dualité de Poincaré–Lefschetz devient donc la donnée de deux formes, $\varepsilon : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon_\partial : B_\partial^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, qui représentent respectivement les intégrales sur M et ∂M , et qui doivent vérifier la relation $\varepsilon \circ d = \varepsilon_\partial \circ \lambda$.

La forme ε_∂ induit des accouplements $B_\partial^i \otimes B_\partial^{n-1-i} \rightarrow \mathbb{R}$, et nous allons demander qu'ils soient non-dégénérés pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La forme ε induit des accouplements $B^i \otimes B^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}$, mais ceux-ci ne sont pas compatibles avec la différentielle. On peut cependant restreindre un des deux facteurs au noyau pour obtenir des accouplements $B^i \otimes K^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont bien compatibles avec la différentielle mais qui sont nécessairement dégénérés pour certains i . On est alors amenés à considérer le quotient $P := B/I$ où

$$I = \{b \in B \mid \langle b, k \rangle = 0, \forall k \in K\}. \quad (3.2.3)$$

Les accouplements passent au quotient par définition et induisent de nouveaux accouplements $P^i \otimes K^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}$. Ceux-ci sont potentiellement non-dégénérés : c'est ce que nous allons demander aux paires à dualité de Poincaré–Lefschetz. L'autre condition demande que P reste un modèle de M . On obtient donc la définition suivante :

Définition 3.2.4. Une *paire à dualité de Poincaré–Lefschetz* est la donnée d’un morphisme surjectif d’ADGC $B \xrightarrow{\lambda} B_\partial$ et de deux formes $\varepsilon : B^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varepsilon_\partial : B_\partial^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- la paire $(B_\partial, \varepsilon_\partial)$ est une ADGC à dualité de Poincaré (donc en particulier $\varepsilon_\partial \circ d = 0$) ;
- la formule de Stokes $\varepsilon \circ d = \varepsilon_\partial \circ \lambda$ est vérifiée ;
- le morphisme $\theta_B : B \rightarrow K^\vee[-n]$ (où $K = \ker(\lambda)$ et $[-n]$ est la suspension) défini par $\theta_B(b)(k) := \varepsilon(bk)$ est un quasi-isomorphisme surjectif.

Remarque 3.2.5. Les modèles à dualité de Poincaré–Lefschetz sont inspirés par (et généralisent) les modèles «pretty» surjectifs de Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley [CLS19].

Dans ce cas, on peut noter $P = B/I$ où $I = \ker \theta_B$. Alors d’une part l’application quotient $B \rightarrow P$ est un quasi-isomorphisme, et d’autre part l’accouplement $B^i \otimes K^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}$ passe au quotient et induit un accouplement non-dégénéré $P^i \otimes K^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On peut représenter cette situation par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{accopl.} & & & \\
 & \text{non-dégén.} & & & \\
 & \swarrow & & & \\
 P := B/I & \xleftarrow{\sim \pi} & B & \xleftarrow{\sim} & \Omega^*(M, \partial M) \\
 & & \downarrow \lambda & & \downarrow i^* \\
 & & B_\partial & \xleftarrow{\sim} & \Omega^*(\partial M)
 \end{array} \tag{3.2.6}$$

Exemple 3.2.7. Soit $M = \mathbb{D}^n$ le disque de dimension n . Un modèle surjectif de l’inclusion $\partial M = \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ est donné par la paire $B \xrightarrow{\lambda} B_\partial$ où

- $B_\partial = \mathbb{R}\langle 1, v_{n-1} \rangle$ est de dimension 2 avec $\deg v = n-1$ et $v^2 = 0$;
- $B = \mathbb{R}\langle 1, v_{n-1}, w_n \rangle$ est de dimension 3 avec $\deg w = n$, $dw = w$ et tous les produits non-triviaux s’annulent ;
- $\lambda : B \rightarrow B_\partial$ est défini par $\lambda(1) = 1$, $\lambda(v) = v$ et $\lambda(w) = 0$.

Les orientations $\varepsilon : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon_\partial : B_\partial^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement données par $\varepsilon(w) = 1$ et $\varepsilon_\partial(v) = 1$. Cela définit une paire à dualité de Poincaré–Lefschetz. Le noyau $K = \ker \lambda$ est simplement $\mathbb{R}\langle w \rangle$ concentré en degré n . L’application $\theta_B : B \rightarrow K^\vee[-n]$ est donné par $\theta_B(1) = w^\vee$ et $\theta_B(v) = \theta_B(w) = 0$. On a donc $I = \mathbb{R}\langle v, w \rangle$ et $P = B/I = \mathbb{R}1$. L’accouplement $K \leftrightarrow P$ apparie simplement 1 et w .

Exemple 3.2.8. On peut généraliser cet exemple à toute variété obtenue en retirant un disque à une variété fermée. Si A est une ADGC à dualité de Poincaré, on peut définir une paire à dualité de Poincaré–Lefschetz en posant $B_\partial = \mathbb{R}\langle 1, v_{n-1} \rangle$ et $B = A \oplus \mathbb{R}\langle v_{n-1} \rangle$ avec $dv = \text{vol}_A$.

Proposition 3.2.9 ([CILW18, Proposition 2.5]). *Toute variété compacte simplement connexe à bord simplement connexe de dimension au moins 7 admet un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz.*

Démonstration. La preuve est inspirée de celle du théorème principal de [LS08b]. L'idée est la suivante. Par des arguments standards en théorie de l'homotopie rationnelle, on peut trouver un morphisme surjectif d'ADGC $\rho : R \rightarrow R_\partial$ qui s'insère dans un diagramme comme suit :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*(M) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \text{restriction} \\ R_\partial & \xrightarrow{\sim} & \Omega^*(\partial M). \end{array} \quad (3.2.10)$$

On peut également supposer que R et R_∂ sont simplement connexes ($R^0 = R_\partial^0 = \mathbb{R}$ et $R^1 = R_\partial^1 = 0$), que $R_\partial^2 \subset \ker d$ et que $(\ker \rho)^2 \subset \ker d$. Grâce au théorème de [LS08b], on peut aussi supposer que R_∂ vérifie la dualité de Poincaré de dimension $n - 1$.

Les orientations sont définies par $\varepsilon : R \xrightarrow{\sim} \Omega^*(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R}$ et $\varepsilon_\partial : R_\partial \xrightarrow{\sim} \Omega^*(\partial M) \xrightarrow{\int_{\partial M}} \mathbb{R}$. Elles vérifient la formule de Stokes car les intégrales sur M et ∂M la vérifient, et elles induisent en cohomologie la dualité de Poincaré–Lefschetz. Cependant, en général, elles n'induisent pas une dualité au niveau des chaînes : il peut exister un élément $x \in R$ (resp. $y \in R_\partial$) tel que $\varepsilon(x \cdot -) = 0$ (resp. $\varepsilon_\partial(y \cdot -) = 0$). On appelle ces éléments des orphelins.

L'ensemble des orphelins forme un idéal, et si l'on tue les orphelins, alors le quotient vérifie la dualité de Poincaré–Lefschetz. L'idéal des orphelins n'est toutefois pas acyclique en général, donc le quotient n'a pas nécessairement le bon type d'homotopie. En effet, si o est un cycle orphelin, on sait (par dualité de Poincaré–Lefschetz en cohomologie) qu'il est le bord d'un certain z ; mais z peut ne pas être lui-même un orphelin. L'idée de [LS08b] est de rajouter de nouvelles variables formelles pour chaque orphelin, degré par degré, en ne changeant pas le type d'homotopie mais en faisant en sorte que l'idéal des orphelins soit acyclique dans l'algèbre étendu.

Soit $K_R = \ker \rho$ et $\theta_R : R \rightarrow K^\vee[-n]$ le morphisme donné par $\theta_R(r)(k) = \varepsilon(rk)$. L'idéal des orphelins est donné par :

$$\mathcal{O} = \ker \theta_R^\vee = \{y \in K_R \mid \forall x \in R, \varepsilon_R(xy) = 0\} \subset K_R. \quad (3.2.11)$$

Soit $k \geq 0$. On dit que les orphelins sont k -semi-acycliques si $H^i(\mathcal{O}) = 0$ pour $n/2 + 1 \leq i \leq k$. Cette condition est vide si $k = n/2$. La dualité de Poincaré–Lefschetz en cohomologie entraîne que si \mathcal{O} est $(n + 1)$ -semi-acyclique, alors il est acyclique.

Supposons donc que \mathcal{O} est $(k - 1)$ -semi-acyclique pour $n/2 \leq k - 1 < n + 1$ et montrons que l'on peut remplacer (R, R_∂) par un nouveau modèle dont les orphelins sont k -semi-acycliques. L'objectif sera de construire une extension de la suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_R & \hookrightarrow & R & \twoheadrightarrow & R_\partial \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \hat{K}_R & \hookrightarrow & \hat{R} & \twoheadrightarrow & \hat{R}_\partial \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.2.12)$$

ainsi qu’une extension $\hat{\varepsilon}$ de ε (qui vérifie toujours la formule de Stokes) de sorte que les orphelins de $(\hat{R}, \hat{R}_\partial)$ sont k -semi-acycliques.

Soit $l = \dim(\mathcal{O}^k \cap \ker d) - \dim(d(\mathcal{O}^{k-1}))$ et choisissons des cycles $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathcal{O}^k$ tels que :

$$\mathcal{O}^k \cap \ker d = d(\mathcal{O}^{k-1}) \oplus \langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \rangle. \quad (3.2.13)$$

Ces cycles sont les obstructions à la k -semi-acyclicité de \mathcal{O} . Par définition, $\theta_R^\vee(\alpha_i) = 0$. Comme θ_R^\vee est un quasi-isomorphisme (la paire (R, R_∂) vérifie la dualité de Poincaré–Lefschetz en cohomologie), on peut donc trouver $\gamma'_i \in K_R^{k-1}$ tel que $d\gamma'_i = \alpha_i$.

Soit m la dimension totale de $H^*(R) = H^*(M)$, qui est (par dualité) aussi la dimension totale de $H^*(K_R) = H^*(M, \partial M)$. On choisit des cycles $h_1, \dots, h_m \in R$ qui forment une base en cohomologie. Par dualité, on peut trouver $h'_1, \dots, h'_m \in K_R$ qui forment une base en cohomologie et tels que $\varepsilon(h_i h'_j) = \delta_{ij}$. On définit alors :

$$\gamma_i := \gamma'_i - \sum_j \varepsilon(\gamma'_j h_j) h'_j \in K^{k-1}. \quad (3.2.14)$$

Un petit calcul montre que $d\gamma_i = d\gamma'_i = \alpha_i$ et que pour tout cycle $y \in R$, $\varepsilon(\gamma_i y) = 0$. On peut alors étendre R en posant :

$$\hat{R} := (R \otimes S(\underbrace{c_1, \dots, c_l}_{\deg=k-1}, \underbrace{w_1, \dots, w_l}_{\deg=k-2}), dc_i = \alpha_i, dw_i = c_i - \gamma_i). \quad (3.2.15)$$

On vérifie que l’inclusion $R \subset \hat{R}$ est un quasi-isomorphisme, que ρ s’étend en $\hat{\rho} : \hat{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\hat{\rho}(c_i) = \hat{\rho}(w_i) = 0$. Soit T un complément de $d(A)$ dans A . Alors ε s’étend par (où $x \in A$ et $t \in T$) :

- $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)$;
- $\hat{\varepsilon}(w_i dx) = (-1)^k \varepsilon(\gamma_i x)$;
- $\hat{\varepsilon}(c_i c_j) = -\varepsilon(\gamma_i \gamma_j)$;
- $\hat{\varepsilon}(w_i) = \hat{\varepsilon}(w_i t) = \hat{\varepsilon}(c_i) = \hat{\varepsilon}(c_i x) = \hat{\varepsilon}(c_i c_j x) = \hat{\varepsilon}(c_i w_j) = \hat{\varepsilon}(c_i w_j x) = \hat{\varepsilon}(w_i w_j) = \hat{\varepsilon}(w_i w_j x) = 0$,
- $\hat{\varepsilon}$ s’annule sur les éléments de degré différent de n .

Il ne reste alors plus qu’à montrer que $(\hat{R}, \hat{R}_\partial)$ est tel que son idéal d’orphelins est k -semi-acyclique. On se réfère à [CILW18] pour les détails exacts. \square

Nous avons également un analogue de la classe diagonale : si $\{x_i\}$ est une base graduée de K et $\{x_i^\vee\}$ est la base duale de P , alors on définit un cocycle de degré n par :

$$\Delta_{KP} := \sum_i (-1)^{\deg x_i} x_i \otimes x_i^\vee \in K \otimes P. \quad (3.2.16)$$

Pour plus de simplicité on définit également Δ_P comme étant l’image de Δ_{KP} par l’application $K \otimes P \hookrightarrow B \otimes P \twoheadrightarrow P \otimes P$. On peut également interpréter Δ_P en dualisant la multiplication $K \otimes K \rightarrow K$ en un coproduit $P[-n] \rightarrow P[-n] \otimes P[-n]$; alors Δ_P est l’image de 1 par ce coproduit. On a notamment $(x \otimes 1)\Delta_P = (1 \otimes x)\Delta_P$ pour tout $x \in P$.

Nous aurons également besoin d’un élément particulier. Soit $s : B_\partial \rightarrow B$ une section (linéaire) de λ , qui n’est bien sûr en général pas un morphisme d’algèbre ni un morphisme

de complexes de chaînes. Cependant, on a $s(dx) - ds(x) \in K$ pour tout $x \in B_\partial$ (car $\lambda(s(dx)) = dx = d\lambda(s(x)) = \lambda(ds(x))$). L'élément $s \in B \otimes B_\partial^\vee$ correspond à un élément $\sigma_B \in B \otimes B_\partial$ (de degré $n - 1$) par la dualité de Poincaré de B_∂ tel que $d\sigma_B \in K \otimes B_\partial$. On vérifie facilement que $(\text{id} \otimes \pi)(d\sigma_B) = \Delta_{KP}$.

Exemple 3.2.17. Reprenons l'Exemple 3.2.7. Dans cet exemple, la classe diagonale vaut $\Delta_{KP} = w \otimes 1$ et le seul choix possible de σ_B est $1 \otimes v + v \otimes 1$. La différentielle de σ_B est $1 \otimes w + w \otimes 1$ qui se projette bien sur Δ_{KP} par $\text{id} \otimes \pi : K \otimes B \rightarrow K \otimes P$.

3.3 Modèle graphique

Soit M une variété compacte de bord $\partial M = N$. Notre objectif va être de définir un modèle pour le monoïde $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ et son module Conf_M en termes de complexes de graphes (comme dans la Section 2.5). Pour des raisons de contravariance, le modèle de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$ sera un comonoïde dans la catégorie des collections symétriques d'ADGC, et le modèle de Conf_M sera un comodule sur ce comonoïde.

3.3.1 Compactifications

Soit N une variété compacte sans bord de dimension $n - 1$. Il y a une action naturelle de $\mathbb{R}_{>0}$ sur $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}$ par multiplication sur le deuxième facteur. Nous allons définir une compactification $\text{aFM}_N(U)$ de l'espace $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U)$ telle que la collection aFM_N forme un monoïde strictement associatif et unitaire dans la catégorie des suites symétriques d'espaces topologiques (le symbole «a» est pour «algèbre»). Supposons que N soit plongé comme une sous-variété SA de \mathbb{R}^D pour D assez grand. Alors on définit plusieurs applications :

- Pour $i \in U$,

$$p_i : \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U) \rightarrow N \quad (3.3.1)$$

est simplement la projection sur le i ème point suivie de la projection sur N .

- L'espace $\mathbb{S}^{D-1} \times [0, \infty]$ est quotienté par la relation $(x, 0) \sim (y, 0)$ et $(x, \infty) \sim (y, \infty)$ pour tout $x, y \in \mathbb{S}^{D-1}$. Alors on définit, pour $i \neq j$, $\theta_{ij} : \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U) \rightarrow \mathbb{S}^{D-1} \times [0, \infty]/\sim$ sur un élément $(\underline{x}, \underline{h}) = (x_i, h_i)_{i \in U} \in \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U)$ par :

$$\theta_{ij}(\underline{x}, \underline{h}) := \left(\frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, \frac{h_i}{h_j} \right), \quad (3.3.2)$$

où par convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $0 \times \infty = \infty$.

- Enfin, pour $i \neq j \neq k \neq i$, on définit $\delta_{ijk} : \text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U) \rightarrow [0, +\infty] \times [0, +\infty]$ par :

$$\delta_{ijk}(\underline{x}, \underline{h}) := \left(\frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_j - x_k\|}, \frac{|h_i - h_k|}{|h_j - h_k|} \right). \quad (3.3.3)$$

Ces applications sont clairement invariantes par l'action de $\mathbb{R}_{>0}$ et définissent un plongement :

$$\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U) / \mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow N^U \times (\mathbb{S}^{D-2} \times [0, \infty] / \sim)^{\text{Conf}_U(2)} \times ([0, +\infty] \times [0, +\infty])^{\text{Conf}_U(3)}. \quad (3.3.4)$$

On définit $\text{aFM}_N(U)$ comme étant l'adhérence de ce plongement. On peut vérifier que c'est une variété SA à bord de dimension $n\#U - 1$. Il est instructif d'étudier, par exemple, le cas où $U = \{1, 2\}$ a deux éléments. L'espace $\text{aFM}_N(U)$ a alors quatre « strates », que nous allons numéroté de I à IV (cf. Figure 3.5) :

- I. (codimension 0) l'intérieur, qui est homéomorphe à $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(U) / \mathbb{R}_{>0}$ et contient les configurations « classiques » ;
- II. (codimension 1) les configuration $((x_1, h_1), (x_2, h_2))$ telles que $h_2/h_1 = \infty$, c'est-à-dire que le deuxième point est infinitésimalement proche de $N \times \{\infty\}$ (et donc le premier est infinitésimalement proche de $N \times \{0\}$) – cette strate est homéomorphe à $N \times N$;
- III. (codimension 1) les configuration $((x_1, h_1), (x_2, h_2))$ telles que $h_2/h_1 = 0$, c'est-à-dire que le premier point est infinitésimalement proche de $N \times \{\infty\}$ (et donc le deuxième est infinitésimalement proche de $N \times \{0\}$) – cette strate est homéomorphe à $N \times N$;
- IV. (codimension 1) les configurations $((x_1, h_1), (x_2, h_2))$ telles que $(x_1, h_1) = (x_2, h_2)$, c'est-à-dire que les deux points sont infinitésimalement proches l'un de l'autre – cette strate est homéomorphe au fibré normal de $\Delta_N \times \{1\} \subset N^2 \times \mathbb{R}_{>0}$.

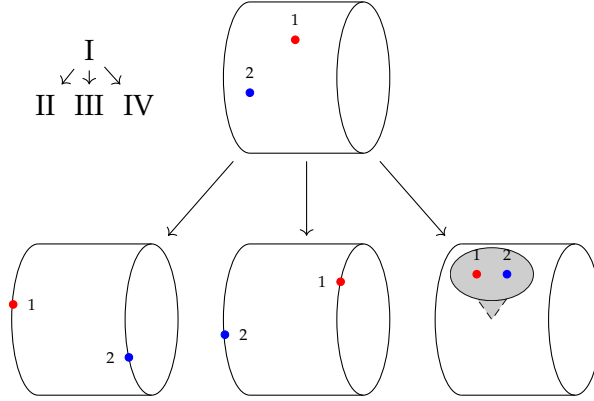


FIG. 3.5 : Strates de $\text{aFM}_N(2)$.

La collection de tous les aFM_N forme un monoïde. Concrètement, si U et V sont deux ensembles finis, on définit une application :

$$\text{aFM}_N(U) \times \text{aFM}_N(V) \rightarrow \text{aFM}_N(U \sqcup V), \quad (3.3.5)$$

visuellement en recollant la composante $N \times \{\infty\}$ du premier terme avec la composante $N \times \{0\}$ du second.

Supposons maintenant que $\partial M = N$. Nous pouvons définir une compactification $\mathfrak{mFM}_M(U)$ de $\text{Conf}_M(U)$ qui est un module à droite sur le monoïde \mathfrak{aFM}_N (le symbole « m » est pour « module »). Dans l'intérieur de M , la compactification est construite comme la compactification \mathfrak{FM}_M de la Section 2.3. Sur le bord, elle est construite en recollant \mathfrak{aFM}_N à l'aide d'un collier $N \times \mathbb{R}_{\geq 0} \hookrightarrow M$. Nous obtenons ainsi une variété compacte SA à bord de dimension $n\#U$. Il y a des applications $\mathfrak{mFM}_M(U) \times \mathfrak{aFM}_N(V) \rightarrow \mathfrak{mFM}_M(U \sqcup V)$ qui en font un module à droite sur \mathfrak{aFM}_N .

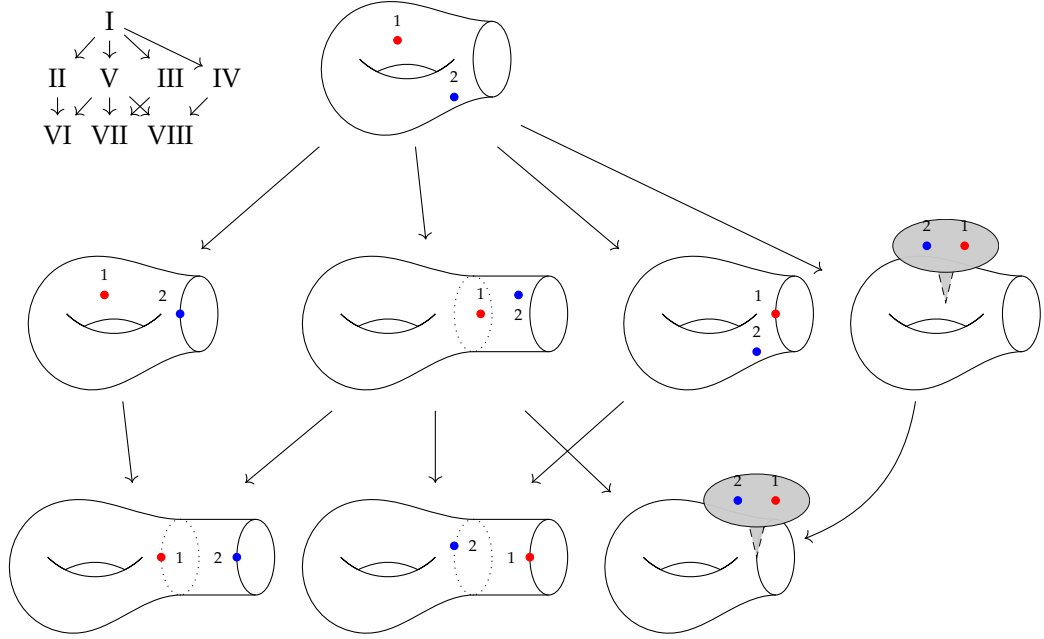


FIG. 3.6 : Strates de $\mathfrak{mFM}_M(2)$.

Il est également intéressant de s'intéresser à la décomposition en strates de la variété à coins $\mathfrak{mFM}_M(\{1, 2\})$. L'espace $\mathfrak{mFM}_M(\{1, 2\})$ a huit strates, numérotées de I à VIII (cf. Figure 3.6) :

- I. (codimension 0) les deux points restent à l'intérieur de M et éloignés l'un de l'autre, homéomorphe à $\text{Conf}_{\mathring{M}}(2)$;
- II. (codimension 1) le deuxième point est infinitésimalement proche du bord, homéomorphe à $\mathring{M} \times \partial M$;
- III. (codimension 1) le premier point est infinitésimalement proche du bord, homéomorphe à $\partial M \times \mathring{M}$;
- IV. (codimension 1) les deux points sont infinitésimalement proches l'un de l'autre mais loin du bord, homéomorphe à $\partial \mathfrak{FM}_{\mathring{M}}(2)$;
- V. (codimension 1) les deux points sont infinitésimalement proches du bord, homéomorphe à $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}}(2) / \mathbb{R}_{>0} = \text{strate I de } \mathfrak{aFM}_N(2)$;
- VI. (codimension 2) les deux points sont infinitésimalement proches du bord mais le

deuxième est infiniment plus proche de $N \times \{\infty\}$ que le premier, homéomorphe à $N \times N = \text{strate II de } \text{aFM}_N(2)$;

VII. (codimension 2) situation inverse de la précédente, homéomorphe à $N \times N = \text{strate III de } \text{aFM}_N(2)$;

VIII. (codimension 2) les deux points sont infiniment proches du bord et infiniment proches l'un de l'autre, homéomorphe à la strate IV de $\text{aFM}_N(2)$.

Il n'est pas aisé de se représenter ces espaces, car leur dimension augmente rapidement : $\dim \text{aFM}_N(U) = n\#U - 1$ et $\dim \text{mFM}_M(U) = n\#U$. Penchons-nous cependant sur le cas $M = [0, 1]$, $N = \partial M = \{0, 1\}$. Nous allons dessiner des espaces homéomorphes à $\text{aFM}_N(2)$ et $\text{mFM}_M(2)$ pour illustrer la manière dont les strates définies précédemment s'intersectent. Les dessins ne seront bien sûr pas complètement fidèles à la réalité : nous projetons des sous-espaces de \mathbb{R}^4 sur une feuille de dimension 2.

L'espace $N \times \mathbb{R}_{>0}$ est une réunion disjointe de deux demi-droites ouvertes. Son carré, $(N \times \mathbb{R}_{>0})^2$, est une réunion disjointe de quatre quarts de plans ouverts, indexés $N^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Pour obtenir l'espace $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(2)$, il faut retirer les diagonales des quarts de plans indexés par $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Cela donne graphiquement la Figure 3.7, où les traits en pointillés représentent des parties manquantes de l'espace (qui est censé s'étendre vers l'infini dans deux directions, ce que nous ne pouvons représenter).

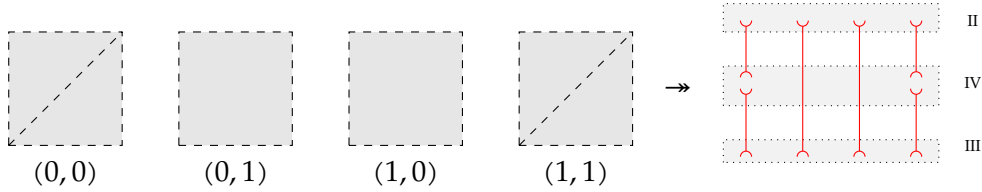


FIG. 3.7 : L'espace $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(2)$ (en noir), son quotient par $\mathbb{R}_{>0}$ (en rouge) et les strates du bord de $\text{aFM}_N(2)$, pour $N = \{0, 1\}$.

L'intérieur de $\text{aFM}_N(2)$ est le quotient de $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(2)$ par l'action de $\mathbb{R}_{>0}$ sur les deuxièmes facteurs (i.e. $\lambda \cdot ((x, t), (x', t')) = ((x, \lambda t), (x', \lambda t'))$). Dans le cas présent, cet espace est la réunion disjointe de six intervalles ouverts, représentés par exemple par les configurations du type $((x, 1), (x', t'))$, cf. la partie rouge de la Figure 3.7.

Finalement, la compactification $\text{aFM}_N(2)$ est obtenue en rajoutant des composantes de bord à $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(2)/\mathbb{R}_{>0}$. Ici, il faut rajouter les deux extrémités de chacun des six intervalles qui composent $\text{Conf}_{N \times \mathbb{R}_{>0}}(2)$, pour un total de douze points : la strate II correspond au cas où le deuxième point part à l'infini ($t'/t \rightarrow +\infty$), la strate III au cas où le premier point part à l'infini ($t'/t \rightarrow 0$), et la strate IV au cas où les deux points convergent vers la même position ($x = x'$ et $t/t' \rightarrow 1$).

Décrivons maintenant $\text{mFM}_M(2)$ pour $M = [0, 1]$. Son intérieur, $\text{Conf}_M(2)$, est un carré ouvert dont la diagonale a été retirée. Son bord $\partial \text{mFM}_M(2)$ est lui-même une variété à bord. L'intérieur du bord est constitué de neuf intervalles :

- les quatre côtés du carrés : deux pour la strate II (le premier point tend vers le

- bord) et deux pour la strate III (le deuxième point tend vers le bord) ;
- deux de chaque « côté » de la diagonale, formant la strate IV ;
- six intervalles qui forment la strate V (les deux points tendent vers le bord à des vitesses différentes pour ne pas se percuter) et qui relient les intervalles précédents selon une combinatoire encodée dans la Figure 3.6.

Nous avons représenté un espace homéomorphe à $\mathfrak{mFM}_M(2)$ avec ses strates sur la Figure 3.8. Pour les besoins de la visualisation, nous avons représentés les deux extrémités des segments qui composent la strate V comme éloignés les uns des autres. Elles se projettent en réalité sur les coins du carré $M^2 = [0, 1]^2$. De même, les deux segments de la diagonale (strate IV) se projettent sur la diagonale $\Delta_M = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M^2$.

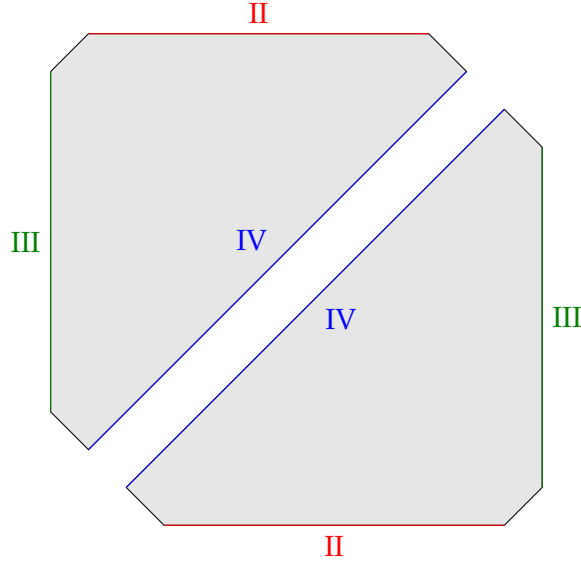


FIG. 3.8 : L'espace $\mathfrak{mFM}_{[0,1]}(2)$ et ses strates de codimension 1. Les petits segments (en noir) font tous partie de la strate V.

3.3.2 Propagateurs

Supposons que la paire $(M, \partial M = N)$ a un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz comme dans la Section 3.2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{accoupl.} & & & & \\
 & & \swarrow \text{non dégen.} & & & & \\
 & & K := \ker \lambda & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 P := B / \ker \theta_B & \xleftarrow{\sim \pi} & B & \xleftarrow{\sim f} & R & \xrightarrow{\sim g} & \Omega_{\text{PA}}^*(M) \\
 & & \downarrow \lambda & & \downarrow \rho & & \downarrow \text{res} \\
 & & B_{\partial} & \xleftarrow{\sim f_{\partial}} & R_{\partial} & \xrightarrow{\sim g_{\partial}} & \Omega_{\text{PA}}^*(\partial M)
 \end{array} \tag{3.3.6}$$

Remarque 3.3.7. Si $(M, \partial M)$ n'admet pas de modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz, il sera quand même possible de définir des complexes de graphes, en décorant les sommets par des éléments de $S(\tilde{H}^*(M) \oplus H^*(M, \partial M))$ et $S(\tilde{H}^*(\partial M))$ au lieu de B et B_∂ [CILW18].

On note $\Delta_{KP} \in K \otimes P$ la classe diagonale, $\Delta_P \in P \otimes P$ son image dans $P \otimes P$ et $\sigma_B \in B \otimes B_\partial$ la «section» (qui vérifie $(\pi \otimes \text{id})(d\sigma_B) = (1 \otimes \lambda)(\Delta_{KP})$). Grâce à des arguments assez simples, on peut relever tous ces éléments en des éléments $\Delta_R \in R \otimes R$ et $\sigma_R \in R_\partial \otimes R$ avec $d\sigma_R \in R_\partial \otimes \ker \rho$. Désormais, on fixe ces relèvements.

Proposition 3.3.8. *Il existe une forme $\varphi_\partial \in \Omega_{\text{PA}}^{n-1}(\text{aFM}_N(2))$ telle que :*

- la forme est fermée : $d\varphi_{\partial*} = 0$;
- la restriction de φ_∂ à la strate IV de $\partial\text{aFM}_N(2)$ (les deux points sont infinitésimalement proches, $x_1 \approx x_2$) est une forme angulaire globale;
- la restriction de φ_∂ à la strate II de $\partial\text{aFM}_N(2)$ (le deuxième point part à l'infini, $x_2 \rightarrow \infty$) est égale à $\sigma_\partial := (\text{id} \otimes \rho)(\sigma_R)$;
- la restriction de φ_∂ à la strate III de $\partial\text{aFM}_N(2)$ (le premier point part à l'infini, $x_1 \rightarrow \infty$) s'annule;
- pour tout élément de $\alpha \in R_\partial$, on a $\int_y \varphi_\partial(x, y)\alpha(y) = 0$.

Démonstration. Soit ψ une forme angulaire globale de la strate IV, étendue en une forme dont le support est contenu dans un voisinage de cette strate. Sa différentielle $d\psi$ est fermée et son support est disjoint de la strate IV et de la diagonale; elle représente donc une classe de

$$H^*(N \times N \times [0, 1], N \times N \times \{0, 1\}) \cong (H^*(M) \otimes H^*(M))[-1]. \quad (3.3.9)$$

On vérifie grâce à la formule de Stokes que $d\psi \pm \sigma_\partial \wedge d(1 - t)$ est le bord d'une forme γ de $M \times M \times [0, 1]$. On pose donc $\psi' := \psi - \gamma \pm \sigma_\partial \wedge (1 - t)$. La forme γ s'annule sur le bord et donc ne change pas le comportement sur les trois strates; les deux autres formes donnent exactement ce que l'on voulait sur les strates II et III, où ψ s'annule. Enfin, pour avoir la dernière propriété, on remplace ψ' par

$$\varphi_\partial := \psi \pm \int_3 \psi'_{13}(\sigma_\partial)_{32} dt \pm \int_3 \psi'_{23}(\sigma_\partial)_{31} dt \mp \int_{3,4} \psi'_{34}(\sigma_\partial)_{23}(\sigma_\partial)_{14}. \quad \square$$

Proposition 3.3.10. *Il existe une forme $\varphi \in \Omega_{\text{PA}}^{n-1}(\text{mFM}_M(2))$ telle que :*

- sa différentielle vérifie $d\varphi = \Delta_R$;
- sur les strates II ($x_2 \rightarrow \partial M$), III ($x_1 \rightarrow \partial M$) et V ($x_1, x_2 \rightarrow \partial M$), on a respectivement :

$$\varphi|_{II} = \sigma_R, \quad \varphi|_{III} = 0, \quad \varphi|_{IV} = \varphi_\partial. \quad (3.3.11)$$
- sur la strate IV ($x_1 \approx x_2$), φ est une forme angulaire globale;
- pour tout $\alpha \in R$, on a $\int_y \varphi(x, y)\alpha(y) = 0$.

Démonstration. La démonstration est similaire aux précédentes; il faut simplement tenir compte de plus de strates. \square

3.3.3 Complexes de graphes

Nous allons maintenant définir des modèles de \mathbf{aFM}_N et \mathbf{mFM}_M , dans la lignée de la Section 2.5.

Soit U un ensemble fini. Le complexe de graphes $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U)$ est engendré par des classes d'équivalences de graphes du type suivant :

- le graphe a un ensemble de sommets dits «externes» en bijection avec U et un ensemble fini quelconque I de sommets dits «internes» ;
- chaque sommet est décoré par un élément de R_∂ ;
- les arêtes sont dirigées ;
- les arêtes sont de degré $n - 1$, les sommets internes de degré $-n$, les décorations ont le même degré que dans R_∂ .

Le produit sur $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}$ consiste à recoller deux graphes le long de leur sommets externes. Le coproduit $\Delta : \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U \sqcup V) \rightarrow \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U) \otimes \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(V)$ consiste à découper le graphe en deux parties (en sommant sur toutes les manières possibles de répartir les sommets internes à gauche et à droite), en remplaçant les arêtes qui connecte des sommets de deux parties différentes par σ_∂ si elles vont dans le bon sens et par 0 sinon.

En utilisant l'action du groupe symétrique, on rend les sommets internes indistinguables. La procédure d'intégration décrite dans la Section 2.5.3 permet de définir un nombre $w(\gamma)$ associé à un graphe γ connexe ne contenant que des sommets internes, et on pose la relation $\Gamma \sqcup \gamma \equiv w(\gamma)\Gamma$. Enfin, la différentielle est la somme de deux termes :

- la différentielle interne d_{R_∂} qui agit sur les décorations comme une dérivation ;
- la différentielle contractante d_{contr} , qui est la somme sur toutes les manières de contracter une arête du graphe en multipliant ses extrémités.

Proposition 3.3.12. *Il existe des morphismes $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U))$ qui sont compatibles avec la structure de monoïde de \mathbf{aFM}_N .*

Démonstration. Très similaire à celle de la Section 2.5. □

Le complexe de graphes $\mathbf{mGraphs}_R(U)$ est engendré par des classes d'équivalences de graphes du type suivant :

- le graphe a un ensemble de sommets dits «externes» en bijection avec U et un ensemble fini quelconque I de sommets dits «internes» ;
- chaque sommet est décoré par un élément de R ;
- les arêtes sont dirigées ;

- les arêtes sont de degré $n - 1$, les sommets internes de degré $-n$, les décorations ont le même degré que dans R_∂ .

Le produit sur $\mathfrak{m}\text{Graphs}_R$ consiste à recoller deux graphes le long de leur sommets externes. La coaction $\Delta : \mathfrak{m}\text{Graphs}_R(U \sqcup V) \rightarrow \mathfrak{m}\text{Graphs}_R(U) \otimes \mathfrak{a}\text{Graphs}_{R_\partial}(V)$ consiste à découper le graphe en deux parties (en sommant sur toutes les manières possibles de répartir les sommets internes à gauche et à droite), en remplaçant les arêtes qui connectent des sommets de deux parties différentes par σ si elles vont dans le bon sens et par 0 sinon, et à appliquer $\rho : R \rightarrow R_\partial$ sur toutes les décorations du graphe de droite.

En utilisant l'action du groupe symétrique, on rend les sommets internes indistinguables. La procédure d'intégration décrite dans la Section 2.5.3 permet de définir un nombre $W(\gamma)$ associé à un graphe γ connexe ne contenant que des sommets internes, et on pose la relation $\Gamma \sqcup \gamma \equiv W(\gamma)\Gamma$. Enfin, la différentielle est la somme de trois termes :

- la différentielle interne d_{R_∂} qui agit sur les décorations comme une dérivation ;
- la différentielle coupante d_{split} qui est la somme sur toutes les manières de découper une arête et de multiplier ses extrémités par Δ_R ;
- la différentielle contractante d_{contr} , qui est la somme sur toutes les manières de contracter une arête du graphe en multipliant ses extrémités.

Proposition 3.3.13. *Il existe des morphismes $\mathfrak{m}\text{Graphs}_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\mathfrak{m}\text{FM}_M(U))$ qui sont compatibles avec la coaction de $\mathfrak{a}\text{FM}_N$.*

3.3.4 Simplification de w et W

La définition des complexes de graphes ci-dessus dépendent d'intégrales (« fonctions de partition ») w et W difficiles à calculer. Comme dans la Section 2.5.5, nous souhaiterions simplifier les expressions de w et W . Malheureusement, il n'y a pas d'argument aussi simple que dans le cas sans bord pour montrer que ces fonctions sont triviales à homotopie près ; des techniques plus sophistiquées sont nécessaires.

Fonction de partition du cylindre sur le bord

Comme dans la Remarque 2.5.20, nous pouvons définir une algèbre de Lie différentielle graduée $\mathfrak{a}\text{GC}_{R_\partial}^\vee[-1]$. En tant qu'espace vectoriel, c'est le dual de l'espace vectoriel engendré par les graphes connexes internes de type $\mathfrak{a}\text{Graphs}_{R_\partial}$. Comme dans la Section 2.5.4, la différentielle quadratique-linéaire de l'algèbre quasi-libre engendré par les graphes internes induit une différentielle et un crochet de Lie sur $\mathfrak{a}\text{GC}_{R_\partial}^\vee$. La différentielle de $\mathfrak{a}\text{GC}_{R_\partial}^\vee$ est le dual de la partie linéaire, tandis que le crochet de Lie est le dual de la partie quadratique. Dans $\mathfrak{a}\text{GC}_{R_\partial}^\vee$, le degré d'un graphe est $(1 - n)$ fois le nombre d'arêtes, plus n fois le nombre de sommets, moins le degré des décorations.

Rappelons qu'il y a une correspondance bijective entre les morphismes dont la source est une ADGC quasi-libre à différentielle quadratique-linéaire et les éléments de Maurer–Cartan du dual du module des générateurs. Appliqué au cas présent, cette correspondance nous dit que w correspond à un élément de Maurer–Cartan $w \in \mathrm{aGC}_{R_\partial}^\vee[-1]$ (c.-à-d. qu'il vérifie $dw + \frac{1}{2}[w, w] = 0$). Dans la base duale de la base des graphes, on peut écrire $w = \sum_\Gamma w(\Gamma)\Gamma$.

La simplification de w se fait alors en plusieurs étapes. Notons que dans ce qui suit, la valence d'un sommet est augmentée de 1 si la décoration de ce sommet est de degré strictement positif.

1. Notons w_0 la fonction de partition triviale, qui est la restriction de w aux singletons.
2. On commence par montrer que $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^\vee$ est quasi-isomorphe à sa sous-dg-algèbre de Lie $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 2, \vee}$ engendrée par les graphes dont tous les sommets sont au moins bivalents. Cela résulte d'un argument classique en théorie des complexes de graphes (cf. [Wil16]). L'élément $w - w_0$ est donc homotope à un élément de $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 2, \vee}$.
3. On montre ensuite que la cohomologie de $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 2, \vee}$ diffère de la cohomologie de $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 3, \vee}$ (avec les notations évidentes) uniquement pour ceux à une boucle (c.-à-d. les graphes en forme de boucle) et que cette partie à une boucle est engendrée par les graphes circulaires définis plus haut (c.-à-d. toutes les décorations sont $1 \in R_\partial$). Cela résulte d'un autre argument classique, en comptant les sommets bivalents. Tous les graphes circulaires sont de degré strictement négatifs, donc $w - w_0$ s'annule dessus et est donc homotope à un élément de $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 3, \vee}$.
4. Enfin, un simple comptage de degré montre que la cohomologie de $\mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 3, \vee}$ s'annule en degré 1 si $n \geq 3 \iff \dim N \geq 2$. Soit $\Gamma \in \mathrm{aGC}_{R_\partial}^{\geq 3, \vee}$ un graphe à l boucles (c.-à-d. $\dim H^1(\Gamma) = l$ si on le voit comme un espace topologique). Montrons que $\deg \Gamma \leq -(l-1)(n-3)$. Dans le pire des cas, tous les sommets de Γ sont exactement trivalents (sinon, on décontracte un sommet ≥ 4 -valent pour obtenir un graphe de degré supérieur). Si le graphe a un sommet bivalent de décoration strictement positive, retirer ce sommet et le remplacer par une arête ne peut qu'augmenter le degré, donc supposons que tous les sommets ont au moins trois arêtes incidentes. Dans le pire des cas, toutes les décorations sont de degré 0. Le degré de Γ est alors $n(2l-2) - (n-1)(3l-3) = -(l-1)(n-3)$, qui est négatif si $l \geq 2$ et $n \geq 3$. Or le degré d'un graphe doit être égal à 1 pour que l'intégrale correspondante soit non nulle (à cause du quotient par $\mathbb{R}_{>0}$ dans la définition de aFM_N). Les cas $l = 0$ et $l = 1$ correspondent respectivement à w_0 et aux boucles, que nous avons déjà traité.
5. On conclut de ce qui précède que $w - w_0$ est homotope à zéro pour $n \geq 3$, donc w est homotope à w_0 . Pour $n = 2$, le bord N est une union de cercles et le résultat avait précédemment été obtenu par Willwacher [Wil16]. Le résultat est de plus clair si $n = 1$, auquel cas N est discret.

On peut donc définir une variante, $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}^0$, qui est définie comme $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}$ à ceci près que l'on utilise w_0 au lieu de w pour identifier une composante interne à un nombre. Le résultat précédent montre que $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}$ est quasi-isomorphe à $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}^0$. Le modèle $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}^0$ ne dépend que de l'ADGC R_∂ , c.-à-d. du type d'homotopie réelle de N . Une fois que nous aurons prouvé que $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}$ est un modèle de aFM_N , nous pourrions en conclure à l'invariance homotopique réelle de $\mathsf{Conf}_{N \times \mathbb{R}}$, sans aucune condition sur N . Cela fait écho à un résultat de Raptis et Salvatore [RS18], qui ont montré que le type d'homotopie de $\mathsf{Conf}_{N \times X}(2)$, où X est un espace contractile différent du singleton, ne dépend que du type d'homotopie de N .

Fonction de partition de la variété à bord

Nous passons maintenant à la simplification de W . L'idée est similaire : nous pouvons voir W comme un élément de Maurer–Cartan dans une certaine algèbre de Lie. Plus précisément, on peut définir mGC_R comme l'espace vectoriel engendré par les composantes internes de graphes de type $\mathsf{mGraphs}_R$. Son dual mGC_R^\vee est une algèbre de Lie qui a une action de $\mathsf{aGC}_{R_\partial}^\vee$; en d'autres termes, nous avons un produit semi-direct $\mathsf{aGC}_{R_\partial}^\vee \ltimes \mathsf{mGC}_R^\vee$ est une algèbre de Lie. Le degré d'un graphe est égal à 1 plus $(1 - n)$ fois le nombre d'arêtes plus n fois le nombre de sommets moins le degré des décorations. L'élément $w + W$ est un élément de Maurer–Cartan dans cette algèbre de Lie, ce qui revient à dire que W est un élément de Maurer–Cartan dans l'algèbre de Lie tordue $(\mathsf{mGC}_R^\vee, [w, -])$. On vérifie qu'en fait, $w_0 + W$ reste un élément de Maurer–Cartan, ou encore que W est un élément de Maurer–Cartan dans $\mathsf{mGC}_R^{\vee, w_0} := (\mathsf{mGC}_R^\vee, [w_0, -])$.

Notons W_0 la partie triviale de W , c.-à-d. sa restriction aux graphes à un seul sommet. Notre objectif est de montrer que $W - W_0$ est homotope à zéro dans l'algèbre de Lie $\mathsf{mGC}_R^{w_0 + W_0} := (\mathsf{mGC}_R^{w_0}, [W_0, -])$ tordue par W_0 . Les étapes sont similaires à la preuve de $w \simeq w_0$: on montre que l'on peut se restreindre aux graphes (≥ 3) -valents modulo les graphes circulaires. Un argument de comptage de degré similaire à celui pour $\mathsf{aGC}_{R_\partial}^\vee$ est utilisé pour montrer que si $R^1 = 0$, alors le degré d'un graphe à l boucles est inférieur à $-(g - 1)(n - 3)$. Il pourrait donc potentiellement y avoir des éléments en degré 0 pour $l \in \{0, 1\}$. Cependant, en reprenant l'argument de comptage de degré, on voit que les graphes à une boucle de plus haut degré ont des décorations de degré 1, ce qui ne peut arriver car $R^1 = 0$.

On en déduit donc que W est homotope à W_0 (relativement à w_0) sous l'hypothèse que $\dim M \geq 4$ et que M est simplement connexe (en choisissant un modèle tel que $R^1 = 0$). Cela nous permet finalement de construire un modèle $\mathsf{mGraphs}_R^0$ qui ne dépend que du type d'homotopie réelle de M .

3.3.5 Quasi-isomorphisme

Il ne reste plus qu'à montrer que $\mathsf{aGraphs}_{R_\partial}(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\mathsf{aFM}_N)$ et $\mathsf{mGraphs}_R(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\mathsf{mFM}_M)$ sont des quasi-isomorphismes. Les preuves sont similaires à celle de la Section 2.6. Elles sont claires pour $\#U = 0$ et le cas $\#U = 1$ se fait par une homotopie explicite.

Pour l'hérédité, supposons que $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U))$ est un quasi-isomorphisme et posons $U_+ = U \sqcup \{u\}$. Considérons le diagramme (où la ligne du bas est la cofibre homotopique) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U_+) & \longrightarrow & \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U_+)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U_+) \otimes_{\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U)}^{\mathbb{L}} \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U_+)) \otimes_{\Omega_{\text{PA}}^*(\mathbf{aFM}_N(U))}^{\mathbb{L}} \mathbb{R}
 \end{array} \tag{3.3.14}$$

Par le lemme des cinq, il suffit de montrer que la ligne du haut et celle du bas sont des quasi-isomorphismes pour que celle du milieu le soit aussi. Pour la ligne du haut, c'est l'hypothèse de récurrence. Concentrons-nous donc sur la ligne du bas. L'ADGC de droite est a priori un modèle pour la fibre homotopique de la projection $\mathbf{aFM}_N(U_+) \rightarrow \mathbf{aFM}_N(U)$. Or, cette projection est une fibration, donc sa fibre homotopique est simplement sa fibre. La fibre est homéomorphe à $(N \times \mathbb{R}) \setminus U$, le cylindre avec $\#U$ points retirés. La cohomologie de cette fibre homotopique est simplement $H^*(N) \oplus \mathbb{R}[1 - n]^{\oplus U}$.

D'autre part, comme $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U_+)$ est un $\mathbf{aGraphs}_{R_\partial}(U)$ -module quasi-libre, le produit tensoriel dérivé est quasi-isomorphe au produit tensoriel usuel. On peut identifier ce produit tensoriel aux graphes sans composantes connexes par l'intérieur qui ne touchent pas le sommet $u \in U_+$. On peut filter ce complexe par le nombre d'arêtes incidentes au sommet u , en notant $V_0 \oplus V_1 \oplus V_{\geq 1}$. On a bien sûr $V_0 = \mathbb{R}$. Sur la première page de la suite spectrale, la différentielle $d : V_1 \rightarrow V_{\geq 1}$ est surjective ; son noyau consiste en les graphes dont le sommet u est soit décoré par $R_\partial^{>0}$, soit de valence 1 et est connecté à un autre sommet externe. On retrouve bien la cohomologie de $N \times \mathbb{R} \setminus U$ sur la page suivante, et comme l'application dans les formes est surjective en cohomologie, aucune de ces classes ne peut disparaître, ce qui nous permet de conclure.

Le cas de $\mathbf{mGraphs}_R$ est quasiment identique. Cela nous permet de conclure :

Théorème 3.3.15 ([CILW18]). *Soit M une variété compacte à bord SA . Supposons que $\dim M \geq 4$ et que M est simplement connexe. Soit $(B \xrightarrow{\lambda} B_\partial)$ un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz de la paire $(M, \partial M)$. Alors un modèle pour le monoïde et son module $(\mathbf{mFM}_M, \mathbf{aFM}_N)$ est donné par $(\mathbf{mGraphs}_A^0, \mathbf{aGraphs}_{A_\partial}^0)$. Ce modèle ne dépend que du type d'homotopie réelle de la paire $(M, \partial M)$.*

3.4 Modèle de Lambrechts–Stanley perturbé

Nous allons maintenant définir un analogue du modèle de Lambrechts–Stanley. Soit $(B \xrightarrow{\lambda} B_\partial)$ un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz de $(M, \partial M)$, $K = \ker \lambda$ et $P = B/I$. On rappelle qu'on a une classe diagonale $\Delta_P \in P \otimes P$ qui est l'image de la classe Δ_{KP} induite par la dualité entre K et P .

3.4.1 Calcul de l'homologie

On peut d'abord généraliser la définition du modèle de Lambrechts–Stanley :

Définition 3.4.1. Le modèle de Lambrechts–Stanley associé à $B \xrightarrow{\lambda} B_{\partial}$ est :

$$G_P(U) := (P^{\otimes U} \otimes S(\omega_{ij})_{i \neq j \in U} / I, d) \quad (3.4.2)$$

avec $d\omega_{ij} = p_{ij}^*(\Delta_P)$ et $I = (\omega_{ij}^2, \omega_{ji} - (-1)^n \omega_{ij}, \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij})$.

Exemple 3.4.3. Soit $M = \mathbb{D}^n$, $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}$. Un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz de $(M, \partial M)$ est donné dans l'Exemple 3.2.7. En particulier, on a $P = \mathbb{R}$ et $\Delta_P = 0$. On trouve alors $G_P(U) = H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U))$, ce qui est cohérent avec le fait que $\text{Conf}_{\mathbb{D}^n}(U) \simeq \text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)$.

Théorème 3.4.4 ([CILW18]). *La cohomologie de $G_P(U)$ est isomorphe à la cohomologie de $\text{Conf}_M(U)$ en tant qu'espace vectoriel gradué.*

La preuve de ce théorème repose sur deux autres théorèmes. Nous allons d'une part utiliser un théorème de Lambrechts et Stanley [LS08a], qui permet de calculer l'homologie d'un espace de type « espace de configuration », c.-à-d. obtenu en retirant des sous-espaces indexés par des paires d'entiers et qui s'intersectent comme le font les diagonales. D'autre part, nous allons utiliser un théorème de Cordova Bulens, Lambrechts et Stanley [CLS18], qui permet de calculer l'homologie du complémentaire d'un sous-espace dans une variété à bord. Plus concrètement, le résultat principal de [CLS18] nous dit que si W est une variété compacte à bord et que $X \subset W$ est un sous-polyèdre, alors on peut calculer l'homologie rationnelle de $W \setminus X$ si l'on connaît un modèle rationnel du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \partial W & \hookrightarrow & W \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial_W X := X \cap \partial W & \hookrightarrow & X \end{array} \quad (3.4.5)$$

Dans notre cas, $W = M^U$ et $X = \bigcup_{i \neq j \in U} \Delta_{ij}$. Les méthodes employées dans [LS08a] permettent de simplifier le calcul d'un modèle du carré précédent en l'exprimant comme la « cofibre totale » d'un diagramme indexé par les graphes. L'idée est d'écrire X comme la colimite d'un diagramme indexé par les graphes. Pour simplifier posons $r = \#U$. Soit $E = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq r\}$ et Γ l'ensemble des parties de E , ordonné par l'inclusion renversée. Un élément de Γ peut se voir comme un graphe à r sommets. On a alors un foncteur $\nabla : \Gamma \rightarrow \text{Top}$ donné par $\nabla(\gamma) = \bigcap_{(i,j) \in E_\gamma} \Delta_{ij}$. On a notamment $\nabla(\emptyset) = M^r$ et $\gamma' \supset \gamma \implies \Delta_{\gamma'} \subset \Delta_\gamma$. L'espace $\nabla(\gamma)$ est homéomorphe au produit $M^{\pi_0(\gamma)}$. On voit facilement que $X = \bigcup_{1 \leq i < j \leq r} \Delta_{ij}$ est la colimite $\text{colim}_{\gamma \in \Gamma} \nabla(\gamma) = \text{colim}_{\gamma \in \Gamma} M^{\pi_0(\gamma)}$. Les applications dans le diagramme étant des cofibrations, on en déduit qu'un modèle pour X est donné par $\lim_{\gamma \in \Gamma^{\text{op}}} B^{\otimes \pi_0(\gamma)}$.

3 Variétés à bord

Il ne nous reste donc plus qu'à trouver un modèle pour $\partial_{M^r} X = X \cap \partial M^r$. On voit facilement que

$$X \cap \partial M^r = \operatorname{colim}_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{colim}_{\emptyset \subsetneq S \subset \pi_0(\gamma)} (\partial M)^S \times M^{\pi_0(\gamma) \setminus S}. \quad (3.4.6)$$

Lemme 3.4.7. *Le carré de gauche est un modèle pour le carré de droite :*

$$\begin{array}{ccc} B \xleftarrow{\mu_B^{(i)}} B^{\otimes i} & & M \xleftarrow{\delta} M^i \\ \downarrow & \text{est un modèle de} & \uparrow \\ B/K \xleftarrow{\mu_B^{(i)}} B^{\otimes i}/K^{\otimes i} & & \partial M \xleftarrow{\delta} \partial(M^i) \end{array}. \quad (3.4.8)$$

Démonstration. La preuve est par récurrence. C'est évident pour $i = 1$ (car $B_\partial = B/K$). Pour passer de i à $i + 1$, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} M \times M^i & \xleftarrow{\quad} & & & M \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \partial(M \times M^i) & \xleftarrow{\quad} & M \times \partial(M^i) & & \\ \uparrow & \text{(ho. pushout)} & \uparrow & & \downarrow \\ (\partial M) \times M^i & \xleftarrow{\quad} & (\partial M) \times (\partial(M^i)) & \xleftarrow{\quad} & \partial M \end{array}. \quad (3.4.9)$$

Si on note Q le playback (dans les ADGC) de

$$B_\partial \otimes B^{\otimes i} \rightarrow B_\partial \otimes (B^{\otimes i}/K^{\otimes i}) \leftarrow B \otimes (B^{\otimes i}/K^{\otimes i}), \quad (3.4.10)$$

alors on trouve qu'un modèle du diagramme précédent est donné par :

$$\begin{array}{ccccc} B \otimes B^{\otimes i} & \xrightarrow{\quad} & & & B \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\quad} & B \otimes (B^{\otimes i}/K^{\otimes i}) & & \\ \downarrow & \text{(ho. pullback)} & \downarrow & & \downarrow \\ B_\partial \otimes B^{\otimes i} & \xrightarrow{\quad} & B_\partial \otimes (B^{\otimes i}/K^{\otimes i}) & \xrightarrow{\quad} & B_\partial \end{array}. \quad (3.4.11)$$

L'application naturelle $B^{\otimes(i+1)} \rightarrow Q$ étant surjective de noyau $K^{\otimes(i+1)}$, on en déduit l'hérédité. \square

Corollaire 3.4.12. *Un modèle pour le carré de l'Équation (3.4.5) est donné par :*

$$\begin{array}{ccc} B^{\otimes k} & \xrightarrow{\alpha_k} & B^{\otimes k}/K^{\otimes k} \\ \downarrow \tilde{\zeta}_k & & \downarrow \\ \lim_{\gamma \in \Gamma^{\text{op}}} B^{\otimes \pi_0(\gamma)} & \xrightarrow{\beta_k} & \lim_{\gamma \in \Gamma^{\text{op}}} B^{\otimes \pi_0(\gamma)}/K^{\otimes \pi_0(\gamma)} \end{array}. \quad (3.4.13)$$

En appliquant le théorème de [CLS18], on trouve que la cohomologie (en tant qu'espace vectoriel gradué) de $W \setminus X = \text{Conf}_M(r)$ est calculé par l'homologie du cône de l'application induite :

$$\text{cone}((\text{hoker } \beta_k)^\vee[-nk] \xrightarrow{\tilde{\zeta}_k} (K^{\otimes k})^\vee[-nk]) \quad (3.4.14)$$

En déballant les définitions, on voit que ce cône est quasi-isomorphe à un de ses quotients qui est isomorphe à $G_P(r)$. On en déduit le théorème.

3.4.2 Modèle perturbé

Malheureusement, $G_P(U)$ n'est en général pas un modèle de $\text{Conf}_M(U)$. L'exemple suivant donne une idée de pourquoi (même si bien sûr il ne vérifie pas nos hypothèses de connexité).

Exemple 3.4.15. Soit $M = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ le cylindre, de bord $\mathbb{S}^1 \times \{0, 1\}$. La paire $(M, \partial M)$ admet un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz avec les données suivantes :

- $B_{\partial M} = H^*(\partial M)$ est engendré par $1, t, d\varphi, t d\varphi$, avec $t^2 = t$;
- $B = \langle 1, t, dt, d\varphi, t d\varphi, dt \wedge d\varphi \rangle$ (on a notamment $2t dt = dt$).
- $P = H^*(M) = \langle 1, d\varphi \rangle$;
- $K = H^*(M, \partial M) = \langle dt, dt \wedge d\varphi \rangle$.

Alors la relation de symétrie dit $(d\varphi \otimes 1)\omega_{12} = (1 \otimes d\varphi)\omega_{12}$ n'est intuitivement pas correcte. En effet, M est un plan auquel on a retiré un point, donc on a une fibration de Fadell–Neuwirth :

$$\text{Conf}_M(2) \hookrightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(3) \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.4.16)$$

d'où l'on en déduit $\text{Conf}_M(2) \simeq \text{Conf}_{\mathbb{R}^2}(3)$. La classe $d\varphi \otimes 1$ correspond à ω_{13} et $1 \otimes d\varphi$ correspond à ω_{23} . La relation précédente n'est donc pas la relation d'Arnold habituelle : il faut lui rajouter le terme $d\varphi \otimes d\varphi$.

Heureusement, il y a une manière de modifier $G_P(r)$ pour pallier ce problème. Informellement, on considère le quotient de $\mathfrak{mGraphs}_A^0(r)$ par le dg-idéal engendré par les graphes contenant au moins un sommet interne. Plus concrètement, soit $\sigma \in B \otimes B_\partial$ la «section», que l'on projette en un élément $\sigma_P \in P \otimes B_\partial$. Écrivons $\sigma_P = \sum_i \sigma'_i \otimes \sigma''_i$. Alors le modèle perturbé est :

$$\tilde{G}_P(U) := (P^{\otimes U} \otimes S(\tilde{\omega}_{i,j \in U})/\tilde{I}, d) \quad (3.4.17)$$

où l'idéal \tilde{I} est engendré par les relations $\tilde{\omega}_{ij}^2 = \tilde{\omega}_{ii} = 0$, pour tout $T \subset U$ de cardinal ≥ 2 :

$$\sum_{v \in T} \pm(\iota_v(\pi(b))) \cdot \prod_{v \neq v' \in T} \tilde{\omega}_{vv'} + \sum_{i_1, \dots, i_k} \pm \varepsilon_\partial(\rho(b)) \prod_{v \in T} \sigma''_{i_v} \prod_{v \in T} \iota_v(\sigma'_{i_v}). \quad (3.4.18)$$

Remarque 3.4.19. Pour $\#T = 2$ et $b = 1$, cette relation donne :

$$\tilde{\omega}_{12} - (-1)^n \tilde{\omega}_{21} + \sum_{i,j} \pm \varepsilon_\partial(\sigma''_i \sigma''_j) \sigma'_i \otimes \sigma'_j = 0 \in \tilde{G}P(2). \quad (3.4.20)$$

Plus généralement pour $b \in B$, c'est une perturbation de la relation de symétrie. Pour $\#T = 3$, c'est une perturbation de la relation d'Arnold.

Lemme 3.4.21. *Il y a un isomorphisme de dg-modules $\tilde{G}_P(U) \cong G_P(U)$. En particulier, les cohomologies $H^*(\tilde{G}_P(U))$ et $H^*(\text{Conf}_M(U))$ sont isomorphes comme espaces vectoriels gradués.*

Démonstration. La base standard (PBW) de $H^*(\text{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r))$ est donné par les mots du type :

$$\omega_{i_1 j_1} \dots \omega_{i_k j_k} \quad (3.4.22)$$

avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ et $i_l < j_l$ pour tout l . En choisissant une base de P , on obtient une base de $G_P(r)$. On vérifie sans peine qu'en remplaçant les ω par des $\tilde{\omega}$ on garde une base de $\tilde{G}_P(r)$ et que l'application $G_P(r) \rightarrow \tilde{G}_P(r)$ ainsi obtenue préserve la différentielle. \square

Remarque 3.4.23. Dans de nombreux cas on a $G_P = \tilde{G}_P$. C'est par exemple le cas si $M = N \setminus \mathbb{D}^n$ où N est une variété fermée : en effet, dans ce cas, $\sigma_P = 1 \otimes v$ et $v^2 = 0$ donc tous les termes de bas poids s'annulent dans les relations perturbées.

Proposition 3.4.24. *L'application quotient $\text{mGraphs}_B^0(r) \rightarrow \tilde{G}_P(r)$ est un quasi-isomorphisme d'ADGC.*

Démonstration. La preuve est quasiment la même que dans le cas sans bord. Dès que l'on filtre par $\#E - \#V$, les relations perturbées deviennent les relations usuelles. \square

Théorème 3.4.25 ([CILW18]). *Soit M une variété compacte lisse simplement connexe de dimension au moins 7. Supposons que $(M, \partial M)$ admet un modèle à dualité de Poincaré–Lefschetz P . Alors $\tilde{G}_P(r)$ est un modèle réel de $\text{Conf}_M(r)$.*

Remarque 3.4.26. En dimension ≤ 6 , si la variété et son bord sont simplement connexes, alors la variété et son bord sont formels (même si l'inclusion $\partial M \subset M$ ne l'est pas nécessairement). On peut alors montrer de la même manière que $\tilde{G}_{H^*(M)}(r)$ est un modèle de $\text{Conf}_M(r)$.

4 Opérades

4.1 Motivation : homologie de factorisation

Le type d'homotopie des espaces de configuration produisent des invariants des variétés : si deux variétés sont homéomorphes, alors leurs espaces de configuration le sont aussi et ils ont donc le même type d'homotopie. Si M est une variété, on peut donc étudier les invariants classiques (homologie, groupes d'homotopie...) de $\text{Conf}_M(r)$ pour produire des invariants qui sont en général plus fins que des invariants homotopiques de M . Ces invariants sont de plus fonctoriels par rapport aux plongements de variétés : ce sont les applications qui «préservent» la structure de variété et qui induisent des applications sur les espaces de configuration.

L'objectif de cette section est de fournir d'autres invariants des variétés qui utilisent les espaces de configuration. Ces nouveaux invariants, appelés «homologie de factorisation» de la variété, sont motivés par des considérations physiques, et plus précisément par les théories topologiques des champs quantiques. Informellement, l'idée derrière ces invariants est de rajouter des «décorations» aux points dans une configuration. On peut par exemple penser à la charge électrique : dans ce cas, les décorations sont des invariants numériques. Les coefficients des décorations peuvent bien sûr être plus compliqués, et former par exemple un espace vectoriel ou une autre structure algébrique muni d'une structure monoïdale. Calculer l'homologie de factorisation sur M consiste à «intégrer» toutes les positions possibles des points, avec la règle suivante : si deux points se rencontrent, alors leurs décorations s'ajoutent.

Ces invariants ont des propriétés intéressantes, qui rappellent les axiomes d'Eilenberg–Steenrod de l'homologie standard. Tout d'abord, l'homologie de \mathbb{R}^n est simplement l'espace des coefficients : comme \mathbb{R}^n est contractile, on peut ramener tous les points d'une configuration à l'origine, en additionnant leurs décorations au fur et à mesure. Ensuite, si $M = M' \sqcup M''$ est la réunion disjointe de deux variétés, alors l'homologie de M est le produit (tensoriel) des homologies de M' et M'' . Enfin, essentiellement grâce à la formule qui permet de calculer les espaces de configuration d'une variété obtenue en recollant deux variétés le long de leur bord, cette homologie satisfait un axiome de type «excision».

Une question importante est celle de la structure des coefficients : comment ajouter les décorations de points qui se rencontrent ? En dimension 1, il n'y a que deux manières pour une paire de points de se rencontrer à homotopie près : de gauche à droite ou de droite à gauche. En dimension plus grande, les choses deviennent bien plus compliquées : deux points peuvent se rencontrer, en un certain sens, d'une infinité de manières différentes. Toutes les manières de se rencontrer sont homotopes entre elles, mais il peut exister plusieurs homotopies essentiellement différentes entre deux manières de se rencontrer.

Par exemple, en dimension 2, deux points peuvent se rencontrer de gauche à droite ou de droite à gauche sur l'axe horizontal. Ces deux rencontres possibles sont homotopes, mais il y a deux homotopies différentes (dans le sens horaire ou anti-horaire), et ces deux homotopies ne sont pas homotopes !

Bien sûr, si les coefficients choisis forment un monoïde commutatif, alors on peut déclarer que lorsque deux points se rencontrent, leurs décorations sont additionnées avec le produit commutatif, et toutes les relations seront vérifiées de façon évidente. Cependant, l'un des objectifs de la définition de l'homologie de factorisation est de généraliser les coefficients possibles pour inclure des coefficients non-commutatifs. L'axiomatisation des relations que doivent vérifier les différentes multiplications est encodée par la théorie des opérades, que nous allons brièvement introduire dans la Section 4.2. Nous verrons ensuite comment donner une définition précise de l'homologie de factorisation en utilisant les compactifications de Fulton–MacPherson.

Bref historique L'homologie de factorisation a été étudiée par de nombreux auteurs, dans des cadres différents et sous des noms différents. Elle a été introduite sous ce nom par Francis [Fra13] et développée notamment par Ayala et Francis [AF15] et Ayala, Francis et Tanaka [AFT17]. Elle est inspirée notamment par l'homologie chirale topologique de Lurie [Lur09a; Lur09b], qui est elle-même un analogue homotopique de l'homologie chirale de Beilinson et Drinfeld [BD04] et influencée par les travaux de Segal [Seg73; Seg04]. Elle est par ailleurs liée à l'homologie blob de Morrison et Walker [MW12]. L'idée de l'homologie de factorisation est proche de celle des espaces de configuration à décorations additionnables de Salvatore [Sal01], qui a également démontré le lien avec les compactifications de Fulton–MacPherson. Enfin, l'homologie de factorisation est fortement liée aux algèbres à factorisation, qui sont en quelque sorte une version « cofaisceautique » de l'homologie de factorisation ; voir notamment Costello et Gwilliam [CG17a; CG17b]. On pourra se référer à Ginot [Gin15] pour une vue d'ensemble du sujet.

4.2 Introduction aux opérades

Une opérade est un objet qui gouverne une « catégorie d'algèbres », comme les algèbres associatives, les algèbres commutatives ou les algèbres de Lie. Par analogie, l'opérade est à sa catégorie d'algèbres ce qu'un groupe est à la catégorie de ses représentations. Si un groupe est présenté par générateurs et relations, alors ses représentations peuvent se définir à l'aide d'opérations génératrices qui doivent satisfaire des relations. Une catégorie d'algèbres est souvent définie par générateurs et relations : par exemple, une algèbre associative est donnée par un produit binaire qui doit vérifier la relation d'associativité. Tout comme les groupes sont étudiés en tant que tels, sans nécessairement se préoccuper d'une présentation, la théorie des opérades est l'étude des objets sous-jacents aux catégories d'algèbres, sans nécessairement se préoccuper d'une présentation. Cela permet d'introduire de nombreuses notions dont l'intérêt en théorie des groupes n'est pas à démontrer : morphismes d'opérades, sous-opérades, quotients d'opérades, extensions

d'opérades, etc. Comme pour les groupes, ces notions nous informent sur les catégories d'algèbres.

Nous allons brièvement introduire la théorie des opérades. On pourra se référer à Loday et Vallette [LV12] et Fresse [Fre17a, Part I(a)] pour des références plus complètes.

4.2.1 Définition

Les structures algébriques encodées par les opérades sont d'un type bien précis : ce sont les structures qui peuvent se décrire à l'aide d'opérations ayant plusieurs entrées et exactement une sortie. Commençons par illustrer les opérades par un exemple.

Remarque 4.2.1. La plupart de ce qui suit peut se placer dans le cadre d'une catégorie monoïdale symétrique $(C, \otimes, \mathbb{1})$ quelconque. Les exemples classiques incluent les ensembles, les espaces topologiques, les espaces vectoriels, etc. Nous allons souvent écrire des formules «point par point», comme si nous nous placions dans la catégorie des espaces vectoriels par exemple. Ces formules peuvent se traduire en termes de morphismes : par exemple, $x \otimes y \otimes z \mapsto y \otimes f(x) \otimes z$ est obtenu en composant les associateurs, le tressage et le morphisme f d'une certaine manière (toutes les manières de le faire étant isomorphes grâce aux axiomes de cohérence des catégories monoïdales symétriques).

Le prototype d'une opérade est «l'opérade des endomorphismes» End_X d'un objet $X \in C$. Cette opérade est donnée par une collection d'opérations, graduée par le nombre d'entrées :

$$\text{End}_X(k) := \text{Hom}(X^{\otimes k}, X). \quad (4.2.2)$$

Cette collection est munie de la structure suivante :

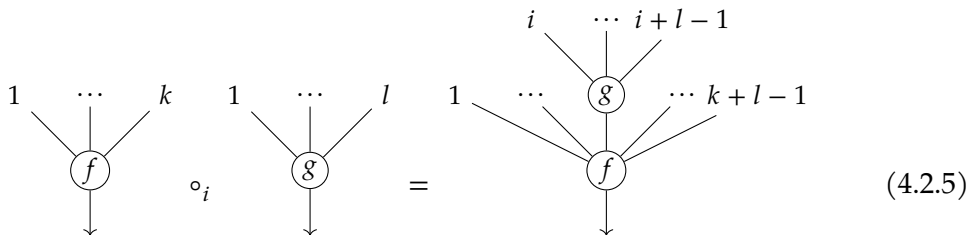
- Une unité $\text{id}_X \in \text{End}_X(1)$.
- Pour chaque entier $k \geq 0$, le groupe symétrique Σ_k agit sur $\text{End}_X(k)$ en permutant les entrées :

$$(f \cdot \sigma)(x_1, \dots, x_k) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}). \quad (4.2.3)$$

- Pour tous les entiers $0 \leq i \leq k$ et $l \geq 0$, on peut composer les opérations avec l'opération $\circ_i : \text{End}_X(k) \otimes \text{End}_X(l) \rightarrow \text{End}_X(k + l - 1)$ définie par :

$$(f \circ_i g)(x_1, \dots, x_{k+l-1}) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+l-1}), x_{i+l}, \dots, x_{k+l-1}). \quad (4.2.4)$$

Il est utile de représenter graphiquement cette opération à l'aide d'arbres :



$$(4.2.5)$$

4 Opérades

Ces opérations vérifient un certain nombre de relations (que nous n'allons pas écrire ici) qui découlent de l'associativité, de l'unitarité et de l'équivariance de la composition de fonctions. Ces relations disent essentiellement que n'importe quel diagramme en forme d'arbre enraciné dont les sommets sont décorés par des éléments de End_X (un sommet ayant k enfants étant décoré par $\text{End}_X(k)$) et dont les feuilles sont décorés par une permutation d'entiers définit un nouvel élément de End_X , et qu'un sommet décoré par id_X peut être retiré. Par exemple, le diagramme suivant correspond à la fonction $(x_1, \dots, x_5) \mapsto f(x_2, g(x_1, x_3, x_4), x_5)$:



Définition 4.2.7. Une *suite symétrique* est une collection d'objets $P = \{P(k)\}_{k \geq 0}$ munie, pour tout $k \geq 0$, d'une action du groupe symétrique Σ_k sur $P(k)$.

Définition 4.2.8. Une *opérade* (symétrique unicolore) est une suite symétrique $P = \{P(k)\}_{k \geq 0}$ munie :

- d'une unité $\eta : \mathbb{1} \rightarrow P(k)$;
- d'opérations de composition, pour $k \geq 0$ et $1 \leq i \leq k$:

$$\circ_i : P(k) \otimes P(l) \rightarrow P(k + l - 1). \quad (4.2.9)$$

Ces opérations doivent vérifier les propriétés suivantes :

- équivariance : pour toutes permutations $\sigma \in \Sigma_k, \tau \in \Sigma_l$,

$$(p \cdot \sigma) \circ_{\sigma(k)} (q \cdot \tau) = (p \circ_k q) \cdot (\sigma \circ_{\sigma(k)} \tau), \quad (4.2.10)$$

où $\sigma \circ_{\sigma(k)} \tau$ est la composition partielle des permutations, définie ci-dessous (Exemple 4.2.15) ;

- unité :

$$p \circ_i \text{id}_p = p = \text{id}_p \circ_1 p ; \quad (4.2.11)$$

- associativité : pour $p \in P(k), q \in P(l), r \in P(m)$:

$$(p \circ_i q) \circ_{i+j-1} r = p \circ_i (q \circ_j r), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l ; \quad (4.2.12)$$

$$(p \circ_i q) \circ_{j+l-1} r = (p \circ_j r) \circ_i q, \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq k. \quad (4.2.13)$$

Les morphismes d'opérades sont définis de la manière évidente.

Exemple 4.2.14. L'opérade des endomorphismes End_X d'un objet X est une opérade.

Exemple 4.2.15. On définit une opérade ensembliste Ass en posant $\text{Ass}(k) = \Sigma_k$ pour tout k . L'action du groupe symétrique est évidente, et l'unité est la permutation triviale $() \in \Sigma_1$. La composition est définie de la façon suivante. Pour $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \Sigma_k$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l) \in \Sigma_l$ et $1 \leq i \leq k$, on pose

$$(\sigma \circ_{\sigma(i)} \tau) := (\sigma'(1), \dots, \sigma'(i-1), \tau'(1), \dots, \tau'(l), \sigma'(i), \dots, \sigma'(k)), \quad (4.2.16)$$

où :

$$\sigma'(j) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{si } \sigma(j) < \sigma(i), \\ \sigma(j) + k - 1, & \text{sinon;} \end{cases} \quad \tau'(j) = \tau(j) + k - 1. \quad (4.2.17)$$

Exemple 4.2.18. On peut définir une opérade Com (dans n'importe quelle catégorie monoïdale symétrique) en posant $\text{Com}(k) = \mathbb{1}$. L'action du groupe symétrique est triviale, l'unité est $\eta = \text{id}_{\mathbb{1}}$, et la composition est l'isomorphisme d'identité de $(C, \otimes, \mathbb{1})$.

Remarque 4.2.19. La définition ci-dessus est la définition d'une opérade en termes de compositions partielles. On peut également définir les opérades à l'aide d'applications de compositions totales (avec des axiomes adaptés) :

$$\gamma : P(k) \otimes P(r_1) \otimes \dots \otimes P(r_k) \rightarrow P(r_1 + \dots + r_k). \quad (4.2.20)$$

Étant donné les opérations de composition partielles, on peut définir les compositions totales par :

$$\gamma(p; q_1, \dots, q_k) := (\dots ((p \circ_k q_k) \circ_{k-1} q_{k-1}) \dots \circ_1 q_1). \quad (4.2.21)$$

Réciproquement, si l'on connaît les compositions totales, on peut retrouver les compositions partielles en posant

$$p \circ_i q := \gamma(p; \text{id}_p, \dots, \text{id}_p, \underbrace{q}_{\text{position } i}, \text{id}_p, \dots, \text{id}_p). \quad (4.2.22)$$

Remarque 4.2.23. Au lieu d'utiliser les suites symétriques, on peut utiliser les *collections symétriques*, c'est-à-dire les foncteurs contravariants $\text{Bij}^{\text{op}} \rightarrow C$ depuis la catégorie des ensembles finis et des bijections. Concrètement, ce sont des collections $P = \{P(U)\}_{U \text{ fini}}$ indexées par les ensembles finis, munies, pour toute bijection $f : U \rightarrow V$, d'un morphisme $f^* : P(V) \rightarrow P(U)$ avec $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. La correspondance avec les suites symétriques est très simple : on peut poser $P(n) = P(\{1, \dots, n\})$. Une structure d'opérade est alors la donnée, pour toute paire $T \subset U$ d'ensembles finis, d'opérations de composition :

$$\circ_T : P(U/T) \otimes P(T) \rightarrow P(U), \quad (4.2.24)$$

où $U/T = U \setminus T \sqcup \{*\}$ est le quotient (Définition 2.3.9).

Remarque 4.2.25. Soit P et Q deux collections symétriques. On définit leur produit de composition comme étant la collection symétrique $P \circ Q$ donnée par :

$$(P \circ Q)(U) := \bigoplus_{r \geq 0} P(\{1, \dots, r\}) \otimes_{\Sigma_r} \left(\bigoplus_{W_1 \sqcup \dots \sqcup W_r = U} Q(U_1) \otimes \dots \otimes Q(W_r) \right), \quad (4.2.26)$$

où \otimes_{Σ_r} – dénote les coinvariants, c.-à-d. le quotient du produit tensoriel par l'idéal engendré par les relations $x \cdot \sigma \otimes y = x \otimes \sigma \cdot y$ pour $\sigma \in \Sigma_r$. L'unité de cette opération est la suite symétrique l donnée par $l(1) = \mathbb{1}$ (l'unité du produit monoïdal \otimes) et $l(k) = 0$ pour $k \neq 1$. Alors une opérade est un monoïde par rapport à cette structure monoïdale, c'est-à-dire une suite symétrique P munie d'un produit $\gamma : P \circ P \rightarrow P$ et d'une unité $\eta : l \rightarrow P$ vérifiant des conditions d'associativité et d'unitalité.

4.2.2 Algèbres

Comme en théorie des groupes, une notion centrale en théorie des opérades est celle des représentations. Ces représentations sont appelées « algèbres » dans le cadre des opérades, pour une raison qui deviendra rapidement claire grâce aux exemples.

Définition 4.2.27. Soit P une opérade. Une *algèbre sur P* (ou P -algèbre) est un objet A muni d'un morphisme d'opérades $P \rightarrow \text{End}_A$.

Si l'on déballe la définition, on voit qu'une algèbre sur P est un objet A muni de morphismes :

$$\gamma_A : P(k) \otimes A^{\otimes k} \rightarrow A \quad (4.2.28)$$

qui sont équivariants, unitaires et associatifs. Ces axiomes sont tel que si l'on se donne un arbre comme dans l'Équation (4.2.6) et que l'on décore les feuilles par des éléments de A , alors on peut évaluer l'arbre de manière unique et obtenir un nouvel élément de A . Pour $p \in P(k)$ et $a_1, \dots, a_k \in A$, on va noter :

$$p(a_1, \dots, a_k) := \gamma(p \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_k). \quad (4.2.29)$$

Définition 4.2.30. Soit P une opérade et A, B deux algèbres sur P . Un *morphisme d'algèbres sur P* $f : A \rightarrow B$ est un morphisme tel que pour tout $p \in P(k)$ et $a_1, \dots, a_k \in A$:

$$f(p(a_1, \dots, a_k)) = p(f(a_1), \dots, f(a_k)). \quad (4.2.31)$$

Exemple 4.2.32. Une algèbre sur l'opérade Ass est une algèbre associative. Une permutation $\sigma \in \text{Ass}(k)$ agit sur l'algèbre en multipliant les éléments dans l'ordre donné par σ .

Exemple 4.2.33. Une algèbre sur l'opérade Com est une algèbre commutative. L'unique élément de $\text{Com}(k)$ agit sur l'algèbre en multipliant k éléments dans n'importe quel ordre.

Comme pour les groupes, il peut être utile de définir une opérade à l'aide d'une présentation par générateurs et relations. Informellement, une telle présentation est la donnée de générateurs en chaque arité $k \geq 0$; d'une action du groupe symétrique Σ_k sur les opérations d'arité k ; et d'un certain nombre de relations entre les composées opéradiques des générateurs (formellement, un idéal dans l'opérade libre sur les générateurs). Il est souvent plus pratique de décrire ces présentations en décrivant la catégorie d'algèbres associées.

Exemple 4.2.34. L'opérade Lie est une opérade dans les espaces vectoriels engendrée par une opération binaire λ qui est antisymétrique ($\lambda \cdot (12) = -\lambda$) et qui vérifie la relation de Jacobi ($\lambda \circ_1 \lambda + (\lambda \circ_1 \lambda) \cdot (123) + (\lambda \circ_1 \lambda) \cdot (132) = 0$).

Une algèbre sur cette opérade est une algèbre de Lie, c.-à-d. un espace \mathfrak{g} muni d'un crochet binaire $[-, -] : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \rightarrow \mathfrak{g}$ antisymétrique ($[y, x] = -[x, y]$) et qui vérifie la relation de Jacobi ($[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$).

Exemple 4.2.35. L'opérade Com a une présentation avec un unique générateur binaire $\mu \in \text{Com}(2)$ qui est symétrique ($\mu \cdot (12) = \mu$) et associatif ($\mu \circ_1 \mu = \mu \circ_2 \mu$).

Exemple 4.2.36. L'opérade Ass a une présentation avec deux générateurs binaires $\mu, \bar{\mu} \in \text{Ass}(2)$ qui sont échangés par l'action du groupe symétrique $\mu \cdot (12) = \bar{\mu}$ et tel que μ est associatif ($\mu \circ_1 \mu = \mu \circ_2 \mu$).

Remarque 4.2.37. Toutes les structures algébriques ne sont pas encodées par des opérades. Par exemple, il n'existe pas d'opérade dont les algèbres seraient les groupes ou les corps. Le problème provient de l'axiome $x \cdot x^{-1} = 1$: la variable x apparaît deux fois, ce qu'il n'est pas possible de représenter avec la structure d'une opérade.

Définition 4.2.38. Soit P une opérade et X un objet. La P -algèbre libre sur X est l'objet donné par :

$$P(X) := \bigoplus_{r \geq 0} P(r) \otimes_{\Sigma_r} X^{\otimes r}. \quad (4.2.39)$$

La structure d'algèbre sur P de $P(X)$ est induite par la structure d'opérade de X .

Exemple 4.2.40. Soit V un espace vectoriel, alors :

- $\text{Ass}(V) = T(V)$ est l'algèbre associative libre sur V , aussi appelée algèbre tensorielle;
- $\text{Com}(V) = S(V)$ est l'algèbre commutative libre sur V , aussi appelée algèbre symétrique;
- $\text{Lie}(V)$ est l'algèbre de Lie libre sur V , engendrée par les mots de Lie sur V .

4.2.3 Modules sur les opérades

Le concept de module sur une opérade généralise le concept d'algèbre sur une opérade, de deux manières : l'action peut être à droite (au lieu d'être toujours à gauche pour une algèbre) et les éléments peuvent eux-mêmes avoir plusieurs entrées (au lieu de zéro pour une algèbre). Ces modules peuvent notamment servir à décrire les foncteurs entre catégories d'algèbres sur des opérades (cf. Fresse [Fre09]).

Définition 4.2.41. Un *module à gauche* sur une opérade P est une collection d'objets $M = \{M(k)\}_{k \geq 0}$ munie de morphismes structurels, pour tous $k, r_1, \dots, r_k \geq 0$:

$$P(k) \otimes M(r_1) \otimes \dots \otimes M(r_k) \rightarrow M(r_1 + \dots + r_k). \quad (4.2.42)$$

Cette structure doit vérifier des axiomes d'équivariance, d'unité et d'associativité analogues à ceux des opérades.

Exemple 4.2.43. Soit P une opérade et A une algèbre sur P . On peut définir un module M_A sur P en posant $M_A(0) = A$ et $M_A(r) = \emptyset$ pour $r \geq 1$.

4 Opérades

Exemple 4.2.44. Soit X et Y deux objets quelconques. On peut définir un End_X -module à gauche par $\text{End}_{X,Y}(k) = \text{Hom}(X^{\otimes k}, Y)$.

Exemple 4.2.45. Si $f : P \rightarrow Q$ un morphisme d'opérades, alors Q est un P -module à gauche.

La définition de module à droite est analogue :

Définition 4.2.46. Un *module à droite* sur une opérade P est une suite symétrique $M = \{M(k)\}_{k \geq 0}$ munie de morphismes structurels, pour tous $k, r_1, \dots, r_k \geq 0$:

$$M(k) \otimes P(r_1) \otimes \dots \otimes P(r_k) \rightarrow M(r_1 + \dots + r_k). \quad (4.2.47)$$

Cette structure doit vérifier des axiomes d'équivariance, d'unité et d'associativité analogues à ceux des opérades.

Exemple 4.2.48. Soit X et Y deux objets quelconques. Alors $\text{End}_{X,Y}$ est un End_Y -module à droite.

Exemple 4.2.49. Si $f : P \rightarrow Q$ un morphisme d'opérades, alors Q est un P -module à droite.

Remarque 4.2.50. Grâce à l'identité de P , la notion de module à droite peut se définir de manière équivalente à l'aide de compositions partielles

$$\circ_i : M(k) \otimes P(l) \rightarrow M(k + l - 1), \text{ pour } 1 \leq i \leq k, l \geq 0. \quad (4.2.51)$$

En revanche, les modules à gauche ne peuvent pas se définir à l'aide de compositions partielles. La notion obtenue avec les compositions partielles pour les modules à gauche est celle des bimodules « infinitésimaux » [MV09, Section 3.1], « faibles » [Tur10, Définition 4.1] ou « abéliens » [Fre17b, Section 2.1.1].

Remarque 4.2.52. Considérons le produit de composition \circ défini dans la Remarque 4.2.25. Si l'on voit une opérade P comme un monoïde pour ce produit de composition, alors un module à gauche sur l'opérade P est un module à gauche sur ce monoïde (au sens classique), et un module à droite est un module à droite sur le monoïde.

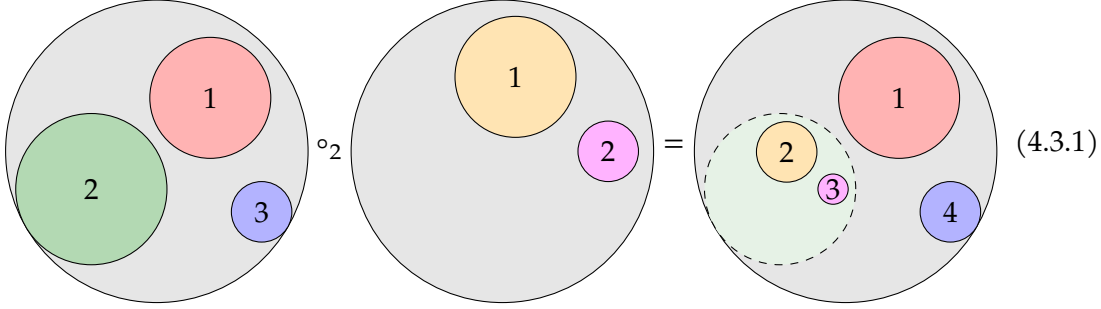
4.3 Espaces de configuration et opérades

4.3.1 Opérades des petits disques

Les opérades des petits disques sont une famille d'opérades qui jouent un rôle central dans la théorie. Ce sont elles qui apparaissent dans la première application des opérades, le principe de reconnaissance (voir ci-dessous), et elles se sont révélées utiles dans de nombreuses autres applications depuis. Elles ont par ailleurs un lien très fort avec les espaces de configuration.

Pour chaque dimension n , on définit l'opérade des petits n -disques \mathcal{D}_n de la façon suivante. Un élément $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathcal{D}_n(k)$ est une configuration de k petits n -disques numérotés, d'intérieurs disjoints, plongés dans le n -disque unité \mathbb{D}^n . Chaque disque de cette configuration est l'image de la composée d'une translation et d'une homothétie

$c_i : \mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$. L'espace de tous ces plongements est muni de la topologie compacte-ouverte. L'action du groupe symétrique réordonne les disques d'une configuration, et la composition opéradique est donnée par la composition des plongements :



$$(4.3.1)$$

Remarque 4.3.2. On peut définir une opérade faiblement équivalente à \mathcal{D}_n en utilisant des parallélépipèdes plutôt que des disques. On obtient ainsi l'opérade des petits n -cubes. Plus généralement, toute opérade faiblement équivalente à \mathcal{D}_n s'appelle une « opérade E_n ».

Comme mentionné plus tôt, la première application de ces opérades fut le principe de reconnaissance.

Définition 4.3.3. Soit X un espace topologique pointé. Son $n^{\text{ième}}$ espace de lacets itérés est :

$$\Omega^n X := \{\gamma : \mathbb{D}^n \rightarrow X \mid \gamma(\partial \mathbb{D}^n) = *\}. \quad (4.3.4)$$

Presque par définition, $\Omega^n X$ est une algèbre sur l'opérade \mathcal{D}_n . En effet, étant donné une configuration $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathcal{D}_n(k)$ et des n -lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Omega^n X$, on peut définir :

$$c(\gamma_1, \dots, \gamma_k) : \mathbb{D}^n \rightarrow X$$

$$x \mapsto \begin{cases} \gamma_i(y), & \text{si } x = c_i(y) ; \\ *, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Le principe de reconnaissance [BV68; May72] dit que la réciproque est partiellement vraie : si Y est une algèbre sur \mathcal{D}_n «group-like» (p.ex. simplement connexe), alors Y a le type d'homotopie faible d'un espace de lacets itéré d'ordre n .

Depuis cette première application, les opérades des petits disques ont connu de nombreux autres usages. Mentionnons notamment la conjecture de Deligne [KS00; MS02], qui dit que les cochaînes de Hochschild $C^*(A; A)$ d'une algèbre associative sont munies d'une action de \mathcal{D}_2 ; le théorème de formalité des cochaînes de Hochschild et ses applications à la quantification des variétés de Poisson [Kon99; Tam98; Kon03]; le calcul de Goodwillie–Weiss et le calcul des espaces de plongements et des espaces de longs nœuds [Sin06; LTV10; AT14; DH12; BW13]; l'homologie de factorisation [BD04; Lur09b; Lur17; AF15; CG17a] (voir Section 4.1).

Nous avons par ailleurs déjà vu un autre exemple d'algèbre sur l'opérade des petits disques dans la Section 3.1.

Proposition 4.3.6. *Soit X un espace topologique. La collection $\text{Conf}_{X \times \mathbb{R}}$ forme une algèbre sur l'opérade \mathcal{D}_1 dans la catégorie des collections symétriques.*

Démonstration. Soit U un ensemble fini et $I \in \mathcal{D}_1(U)$ un élément de l'opérade des petits intervalles (1-disques). Cet élément est la donnée de plongements affines $I_u : [0, 1] \hookrightarrow [0, 1]$ indexés par les éléments de U , d'intérieurs deux à deux disjoints.

Pour chaque $u \in U$, on se donne un ensemble fini V_u et une configuration $c^u \in \text{Conf}_{X \times \mathbb{R}}(V_u)$. Cette configuration est la donnée, pour chaque $v \in V_u$, d'un point $c_v^u = (x_v^u, t_v^u) \in X \times \mathbb{R}$, que l'on suppose deux à deux distincts.

On peut alors définir une nouvelle configuration $I(\{c^u\}_{u \in U}) \in \text{Conf}_{X \times \mathbb{R}}(\bigsqcup_{u \in U} V_u)$ de la façon suivante. Le point de $X \times \mathbb{R}$ indexé par $v \in V_u$ dans cette configuration est donné par $(x_v^u, I_u(t_v^u))$. Visuellement, cette opération est donnée par la Figure 3.3, qui correspondrait au cas $X = \mathbb{S}^1$, $U = \{1, 2\}$, $I_1 = [0, 1/2]$, $I_2 = [1/2, 1]$, $V_1 = \{u_1, u_1\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$. On vérifie alors que les axiomes d'une algèbre sur l'opérade \mathcal{D}_1 (dans la catégorie des collections symétriques) est vérifiée. \square

La proposition suivante justifie alors la terminologie « monoïde à homotopie près » :

Proposition 4.3.7. *L'opérade \mathcal{D}_1 est faiblement équivalente à l'opérade Ass (vue comme une opérade topologiques dont toutes les composantes sont discrètes).*

Démonstration. L'application quotient $\mathcal{D}_1 \rightarrow \text{Ass}$ qui envoie une configuration d'intervalles sur l'ordre des numéros des intervalles est clairement une équivalence d'homotopie sur chaque composante. \square

Nous verrons dans la Section 4.4 comment se comporte l'opérade \mathcal{D}_n en caractéristique nulle.

4.3.2 Lien avec les espaces de configuration

Les opérades des petits n -disques sont liées aux espaces de configuration de la manière suivante. On a une application $\mathcal{D}_n(r) \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{D}^n}(r)$ définie par $c \mapsto (c_1(0), \dots, c_r(0))$, qui oublie le rayon de chaque disque d'une configuration et ne garde que les centres. Cette application est une équivalence d'homotopie, l'information du rayon (un élément de $[0, 1]$) étant contractile. À homotopie près, la collection des espaces de configuration de \mathbb{D}^n possède donc une structure supplémentaire d'opérade.

Cette structure opéradique peut s'étendre aux espaces de configuration des variétés. Soit M une variété lisse et $\mathcal{D}'_M(r)$ l'espace des plongements de r disques d'intérieurs disjoints dans M , muni de la topologie compacte-ouverte. Alors \mathcal{D}'_M forme un module à droite sur \mathcal{D}_n en utilisant la composition des plongements : si $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathcal{D}'_M(k)$ est une collection de plongements $c_i : \mathbb{D}^n \hookrightarrow M$ et $(d_1, \dots, d_l) \in \mathcal{D}_n(l)$ est une autre collection de plongements $d_i : \mathbb{D}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$, alors on peut définir

$$c \circ_i d := (c_1, \dots, c_{i-1}, c_i \circ d_1, \dots, c_i \circ d_l, c_{i+1}, \dots, c_k) \in \mathcal{D}'_M(k + l - 1). \quad (4.3.8)$$

Cependant, l'espace $\mathcal{D}'_M(k)$ n'a pas le type d'homotopie de $\text{Conf}_M(k)$ en général. L'espace $\mathcal{D}_M(1)$ a le type d'homotopie de Fr_M , le fibré des repères de M , que nous allons maintenant

définir. Notons $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ l'espace tangent de M . Alors Fr_M est un $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré principal défini par :

$$\text{Fr}_M := \{(x, \xi) \mid x \in M, \xi \text{ base de } T_x M\}. \quad (4.3.9)$$

L'équivalence d'homotopie $\pi : \mathcal{D}'_M(1) \rightarrow \text{Fr}_M$ est donnée par

$$\pi(c) = (c(0), (dc(0)(1, 0, \dots, 0), \dots, dc(0)(0, \dots, 0, 1))), \quad (4.3.10)$$

où $dc : T\mathbb{D}^n \cong \mathbb{D}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ est la différentielle du plongement $c : \mathbb{D}^n \hookrightarrow M$. Plus généralement, $\mathcal{D}'_M(r)$ a le type d'homotopie de l'espace des configuration à repères de M (Figure), donné par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_M^{\text{fr}}(r) & \dashrightarrow & \text{Fr}_M^r \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{Conf}_M(r) & \hookrightarrow & M^r. \end{array} \quad (4.3.11)$$

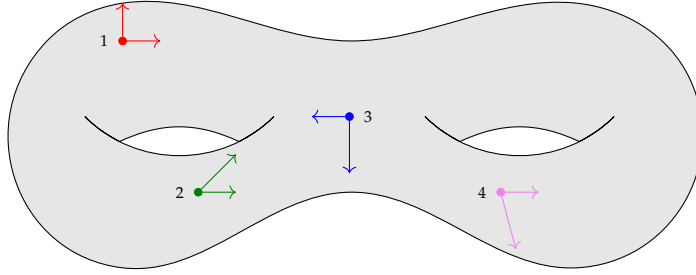


FIG. 4.1 : Espaces de configuration à repères $\text{Conf}_M^{\text{fr}}$ (les deux flèches représentent une base de l'espace tangent au point donné).

Remarque 4.3.12. Dans un travail en collaboration avec Campos, Ducoulombier et Willwacher [CDIW18], nous avons obtenu un modèle réel des espaces de configuration à repère. Ce modèle est basé sur des complexes de graphes décorés. Il n'est cependant pas aussi explicite que le modèle de Lambrechts–Stanley : il dépend d'intégrales (fonction de partition) que nous ne savons pas calculer à l'heure actuelle.

Pour obtenir quelque chose d'équivalent aux espaces de configuration de M , il est donc nécessaire de trivialisier l'information tangente. Supposons donc que M est parallélisée, c.-à-d. que son fibré tangent est trivial, et fixons-nous un isomorphisme $\tau : TM \cong M \times \mathbb{R}^n$. On peut alors définir le sous-espace des plongements de disques qui respectent la parallélisation à l'origine :

$$\mathcal{D}_M(r) := \{c \in \mathcal{D}'_M(r) \mid \forall i, \exists \lambda > 0 \text{ t.q. } \tau(c_i(0)) \circ dc_i(0) = \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^n}\}. \quad (4.3.13)$$

Alors $\mathcal{D}_M(r)$ a bien le type d'homotopie de $\text{Conf}_M(r)$, et la structure de module à droite sur \mathcal{D}_n se restreint à \mathcal{D}_M .

Ce point de vue n'est cependant pas très pratique : $\mathcal{D}_M(r)$ n'est pas une variété, par exemple, et les espaces $\mathcal{D}_n(r)$ et $\mathcal{D}_M(r)$ ne sont pas compacts. Dans la section suivante, nous allons voir que nous pouvons utiliser les compactifications de Fulton–MacPherson à la place de \mathcal{D}_n et \mathcal{D}_M .

4.3.3 Structures opéradiques sur les compactifications

On rappelle que les espaces de configuration de \mathbb{R}^n ont le même type d'homotopie que les compactifications de Fulton–MacPherson (voir Section 2.3). Ces compactifications ont une structure d'opérade, qui est de plus faiblement équivalente à l'opérade des petits n -disques, comme nous allons le voir.

Proposition 4.3.14. *Soit $n \geq 1$ un entier. La collection symétrique $\mathcal{FM}_n = \{\mathcal{FM}_n(U)\}$ a une structure d'opérade définie comme suit. Soit $x \in \mathcal{FM}_n(U/T)$ et $y \in \mathcal{FM}_n(T)$ deux configurations. Alors la configuration $x \circ_T y \in \mathcal{FM}_n(U)$ est définie par :*

$$\theta_{ij}(x \circ_T y) := \begin{cases} \theta_{ij}(y), & \text{si } i, j \in T ; \\ \theta_{[i][j]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

$$\delta_{ijk}(x \circ_T y) := \begin{cases} \delta_{ijk}(y), & \text{si } i, j, k \in T ; \\ 0, & \text{si } i, k \in T \text{ et } j \notin T ; \\ 1, & \text{si } i, j \in T \text{ et } k \notin T ; \\ \infty, & \text{si } j, k \in T \text{ et } i \notin T ; \\ \delta_{[i][j][k]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3.16)$$

Remarque 4.3.17. Ce sont précisément les applications qui sont apparues dans la preuve de la Proposition 2.3.10.

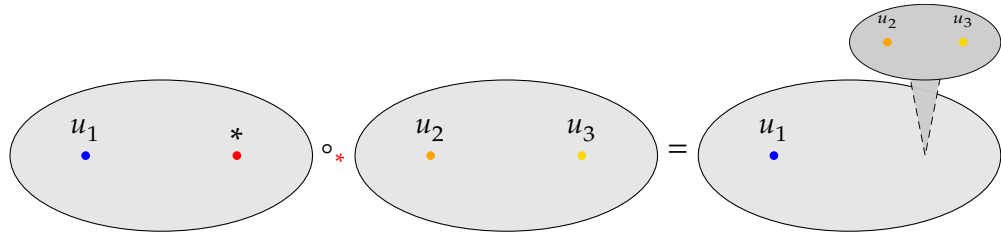


FIG. 4.2 : Exemple de composition dans \mathcal{FM}_2 .

On peut vérifier facilement que ces opérations induisent les mêmes opérations en cohomologie que celle du Théorème 4.4.6, mais ce n'est bien sûr pas suffisant.

Théorème 4.3.18 (Salvatore [Sal01, Proposition 3.9]). *Les opérades \mathcal{D}_n et \mathcal{FM}_n sont faiblement équivalentes. En d'autres termes, il existe un zigzag de morphismes d'opérades :*

$$\mathcal{D}_n \xleftarrow{\sim} \cdot \xrightarrow{\sim} \mathcal{FM}_n \quad (4.3.19)$$

qui sont des équivalences faibles d'homotopie en chaque composante.

Esquisse de démonstration. On commence par construire un «remplacement cofibrant» explicite de l'opérade \mathcal{D}_n grâce à la construction de Boardman–Vogt. On définit une nouvelle opérade $W\mathcal{D}_n$ telle que les points de $W\mathcal{D}_n(k)$ sont des arbres planaires enracinés à k feuilles dont les sommets internes sont décorés par des éléments de \mathcal{D}_n (d'arité égale au nombre d'arêtes entrantes en ce sommet) et dont les arêtes internes sont décorées par éléments du segment $[0, 1]$. On peut se référer à la Figure 4.3.

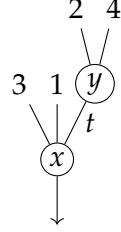


FIG. 4.3 : Un élément de $W\mathcal{D}_n$, où $x \in \mathcal{D}_n(3)$, $y \in \mathcal{D}_n(2)$ et $t \in [0, 1]$.

L'ensemble de ces arbres est quotienté par la relation d'équivalence suivante (Figure 4.4) :

- si un sommet est décoré par $x \cdot \sigma$ pour $\sigma \in \Sigma_k$, alors l'arbre est identifié avec le même arbre où le sommet est décoré par x et les sous-arbres partant de x sont réordonnés selon σ ;
- si une arête est décorée par $t = 0$, alors l'arbre est identifié avec le même arbre où l'arête est contractée et les décorations des sommets correspondants sont composées en utilisant la structure opéradique de \mathcal{D}_n ;
- si un sommet est décoré par $\text{id}_{\mathcal{D}_n}$, alors l'arbre est identifié par le même arbre où ce sommet est retiré ; s'il était entre deux arêtes internes décorées respectivement par s et t , alors la décoration de la nouvelle arête est $s + t - st$.

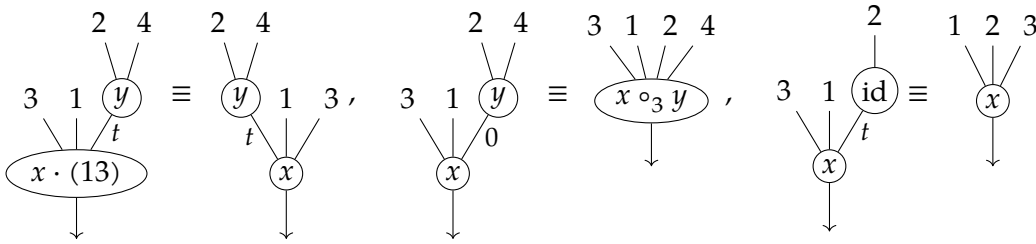


FIG. 4.4 : Relations dans $W\mathcal{D}_n$.

Cette collection a une structure d'opérade : pour composer deux arbres, on greffe le second sur une des feuilles du premier et on décore la nouvelle arête interne par

4 Opérades

$t = 1$. Il existe un morphisme d'opérades $WD_n \rightarrow D_n$ qui consiste simplement à oublier les décorations et à composer suivant les éléments de l'opérade suivant l'arbre. Ce morphisme est une rétraction par déformation en chaque arité.

Il ne reste alors plus qu'à construire une équivalence faible $\tilde{\pi} : WD_n \rightarrow FM_n$. Cette équivalence étend les applications $\pi : D_n \rightarrow \text{Conf}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow FM_n$ obtenues en composant l'application qui oublie les rayons des disques avec l'application quotient sur l'intérieur de FM_n .

Soit \mathcal{T} un élément de WD_n . On peut représenter \mathcal{T} par un arbre dont toutes les arêtes sont décorées par un t strictement positif. Commençons par le cas où tous les t sont différents de 1. Alors chaque arête interne correspond de manière unique à un plongement affine $\mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ (qui correspond à un disque dans l'élément de D_n qui décore le sommet sortant de l'arête). On applique une homothétie de rapport $1 - t$, où t est la décoration de l'arête, à tous ces plongements, et on les compose tous en suivant l'arbre pour obtenir un nouvel élément de D_n à partir de \mathcal{T} , qui ne dépend pas de la classe d'équivalence de \mathcal{T} . On définit alors un élément de FM_n en oubliant les rayons des disques de cette configuration. On peut se référer à la Figure 4.5 pour un exemple.

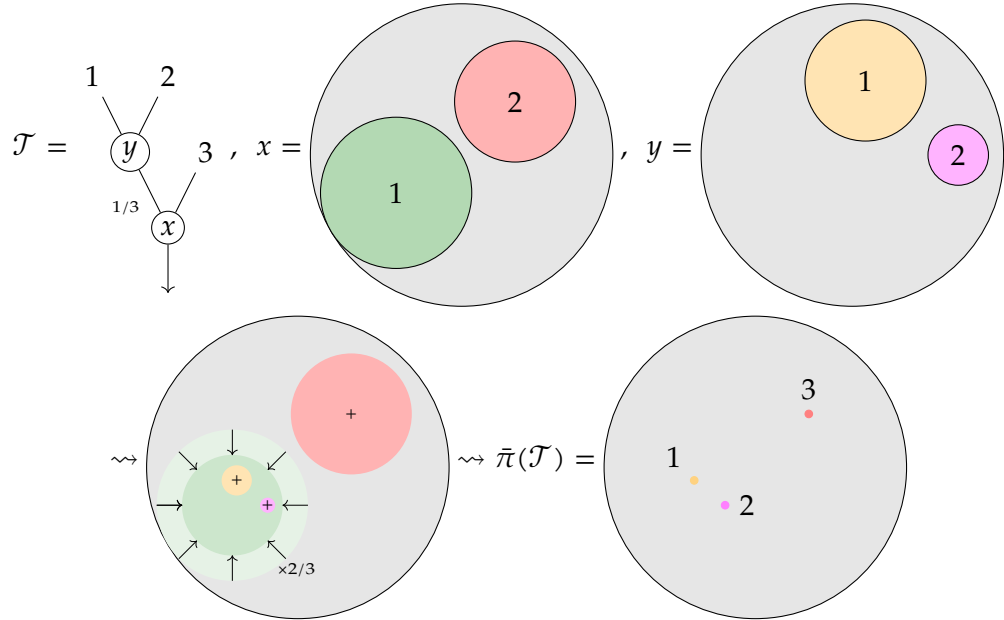


FIG. 4.5 : Construction du morphisme $\tilde{\pi} : WD_n \rightarrow FM_n$.

Si \mathcal{T} a des arêtes décorées par 1, on découpe l'arbre suivant ces arêtes. On applique ensuite la procédure ci-dessus à chacun des sous-arbres ainsi obtenus, pour obtenir plusieurs éléments de FM_n . Enfin, on compose ces éléments en utilisant la structure d'opérade de FM_n selon l'arbre de départ. Cette procédure est bien définie et continue. C'est par définition un morphisme d'opérades $\tilde{\pi} : WD_n \rightarrow FM_n$. Comme $\tilde{\pi}$ étend π , que π est une équivalence d'homotopie et que l'inclusion $D_n \rightarrow WD_n$ est une équivalence d'homotopie, on en déduit que $\tilde{\pi}$ est une équivalence d'homotopie. \square

Remarque 4.3.20. On peut appliquer la même procédure à FM_n pour obtenir une opérade WFM_n . Salvatore [Sal01; Sal19] a montré que WFM_n est isomorphe à FM_n . Cela entraîne notamment que cette opérade est cofibrante, c.-à-d. qu'elle possède une propriété de relèvement par rapport à certains morphismes d'opérades (les fibrations acycliques).

Remarque 4.3.21. En collaboration avec Campos et Ducoulombier [CDI19], nous avons développé des versions «à niveau» de la construction de Boardman–Vogt pour les opérades, leurs modules, les coopérades de Hopf et leurs cobimodules.

Passons maintenant aux configurations dans une variété compacte sans bord M . Comme dans la Section 2.3, on choisit un plongement $M \subset \mathbb{R}^N$ pour N grand, ce qui permet de définir la compactification FM_M . On suppose de plus que M est parallélisable, c'est-à-dire que son fibré tangent TM est trivial. Choisissons une trivialisatation de TM , que nous voyons comme une fonction continue $\tau : M \rightarrow \text{Emb}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ qui représente la différentielle de l'inclusion $M \subset \mathbb{R}^N$ après trivialisatation.

Avec ces données, on peut définir une structure de FM_n -module à droite sur la collection FM_M comme suit. Soit $x \in \text{FM}_M(U/T)$ et $y \in \text{FM}_n(T)$. On considère le point $p_{[T]}(x) \in \mathbb{R}^n$, qui induit un plongement $\tau(p_{[T]}(x)) : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ via notre parallélisation τ . Ce plongement induit un nouveau plongement $\text{FM}_n \hookrightarrow \text{FM}_N$ que l'on note encore $\tau(p_{[T]}(x))$ par abus de notation. On peut donc considérer la configuration $\tau(p_{[T]}(x))(y) \in \text{FM}_N(T)$. On définit alors une nouvelle configuration $x \circ_T y \in \text{FM}_M(U)$ dans les «coordonnées» de l'Équation (2.3.26) par :

$$\begin{aligned} - p_u(x \circ_T y) &:= p_{[u]}(x); \\ - \theta_{ij}(x \circ_T y) &:= \begin{cases} \theta_{ij}(\tau(p_{[T]}(x))(y)), & \text{si } i, j \in T; \\ \theta_{[i][j]}(x), & \text{sinon;} \end{cases} \\ - \delta_{ijk}(x \circ_T y) &:= \begin{cases} \delta_{ijk}(\tau(p_{[T]}(x))(y)), & \text{si } i, j, k \in T; \\ 0, & \text{si } i, k \in T \text{ et } j \notin T; \\ 1, & \text{si } i, j \in T \text{ et } k \notin T; \\ \infty, & \text{si } j, k \in T \text{ et } i \notin T; \\ \delta_{[i][j][k]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 4.3.22. La collection FM_M munie de cette structure forme un FM_n -module à droite, et la paire $(\text{FM}_M, \text{FM}_n)$ est faiblement équivalente à la paire (D_M, D_n) .

Remarque 4.3.23. La structure de module à droite sur FM_n dépend du choix de la parallélisation τ . Dans [CDIW18, Section 5.2], avec Campos, Ducoulombier et Willwacher, nous avons notamment étudié l'effet d'un changement de parallélisation sur les modèles en complexes de graphes.

4.4 Formalité et modèles des espaces de configuration

Revenons maintenant sur la formalité des espaces de configuration de \mathbb{R}^n (Section 1.4). Nous savons désormais qu'à homotopie près, ces espaces de configuration ont une

4 Opérades

structure algébrique : ils forment une opérade (topologique).

Définition 4.4.1 ([Fre17a, Section 3.2]). Une *coopérade de Hopf* est une collection symétrique $\mathbb{C} = \{\mathbb{C}(U)\}$ dans la catégorie opposée des ADGC munie d'une counité $\varepsilon : \mathbb{C}(\{*\}) \rightarrow \mathbb{k}$ et de morphismes de cocomposition, pour toute paire d'ensembles finis $W \subset U$:

$$\circ_W^\vee : \mathbb{C}(U) \rightarrow \mathbb{C}(U/W) \otimes \mathbb{C}(W) \quad (4.4.2)$$

vérifiant des propriétés d'équivariance, de counitalité et de coassociativité duales à celles des opérades.

Proposition 4.4.3. Soit P une opérade topologique. Son homologie (sur n'importe quel anneau) est une opérade linéaire. Sa cohomologie sur un corps $H^*(P; \mathbb{k})$ forme une coopérade de Hopf.

Démonstration. Cela découle de la fonctorialité de la (co)homologie et, sur un corps, du fait que le morphisme de Künneth est un isomorphisme. Les opérations de (co)composition sont respectivement données par :

$$\circ_W : H_*(P(U/W)) \otimes H_*(P(W)) \xrightarrow{\kappa} H_*(P(U/W) \times P(W)) \xrightarrow{(\circ_W)_*} P(U), \quad (4.4.4)$$

$$\circ_W^\vee : H^*(P(U); \mathbb{k}) \xrightarrow{\circ_W^*} H^*(P(U/W) \times P(W); \mathbb{k}) \xleftarrow[\cong]{\kappa} H^*(P(U/W); \mathbb{k}) \otimes H^*(P(W); \mathbb{k}). \quad (4.4.5)$$

On vérifie aisément que tous les axiomes sont vérifiés. \square

Nous pouvons appliquer ceci à l'opérade des petits disques :

Théorème 4.4.6 (Cohen [Coh76]). L'homologie de D_1 est l'opérade $e_1 := \text{Ass}$ qui gouverne les algèbres associatives.

Pour $n \geq 2$, l'homologie de D_n est l'opérade $e_n := \text{Pois}_n$ qui gouverne les n -algèbres de Poisson, c'est-à-dire les algèbres commutatives unitaires munies d'un crochet de Lie de degré $1 - n$ qui est une bidérivation par rapport au produit commutatif. La structure de coopérade de sa cohomologie $e_n^\vee := H^*(D_n; \mathbb{Q})$ se décrit comme suit. Pour $T \subset U$ une paire d'ensembles finis, la cocomposition est donnée sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} \circ_T^\vee : e_n^\vee(U) &\rightarrow e_n^\vee(U/T) \otimes e_n^\vee(T) \\ \omega_{ij} &\mapsto \begin{cases} 1 \otimes \omega_{ij}, & \text{si } i, j \in T; \\ \omega_{[i][j]} \otimes 1, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Nous savons (Théorème 1.4.12) que les espaces de configuration de \mathbb{R}^n sont formels, et que ces espaces ont le type d'homotopie des espaces qui composent l'opérade D_n . Est-ce que cette formalité est compatible, en un sens, avec la structure d'opérade ? Il faut déjà préciser la question : le morphisme de Künneth n'est qu'un quasi-isomorphisme au niveau des chaînes, pas un isomorphisme. On n'a donc pas une structure de coopérade sur la collection $\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n)$, seulement des « zigzag de cocomposition » :

$$\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(U)) \xrightarrow{\circ_W^*} \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W)) \xleftarrow{\sim} \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(U/W)) \otimes \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(W)). \quad (4.4.8)$$

Nous introduisons donc la définition ad-hoc suivante :

Définition 4.4.9. Soit P une opérade en ensembles SA compacts. Un *modèle réel* de P est une coopérade de Hopf C telle qu'il existe des zigzags de quasi-isomorphismes d'ADGC :

$$C(U) \xleftarrow{\sim} D(U) \xrightarrow{\sim} \Omega_{PA}^*(P(U)), \quad (4.4.10)$$

où D est une coopérade de Hopf, tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc} C(U) & \xleftarrow{\sim} & D(U) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PA}^*(P(U)) \\ \downarrow \circ_W^\vee & & \downarrow \circ_W^\vee & & \downarrow \circ_W^* \\ & & & & \Omega_{PA}^*(P(U/W) \times P(W)) \\ & & & & \uparrow \sim \kappa \\ C(U/W) \otimes C(W) & \xleftarrow{\sim} & D(U/W) \otimes D(W) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{PA}^*(P(U/W)) \otimes \Omega_{PA}^*(P(W)) \end{array} \quad (4.4.11)$$

Remarque 4.4.12. Cette définition ad-hoc a des fondements théoriques. Fresse [Fre17b] a développé la théorie de l'homotopie rationnelle des opérades et a montré que la définition précédente (avec Ω_{PL}^* au lieu de Ω_{PA}^*) donnait effectivement une théorie de l'homotopie rationnelle des opérades topologiques qui a des propriétés analogues à la théorie de l'homotopie rationnelle des espaces topologiques. Cette théorie s'adapte au cas réel en remplaçant Ω_{PL}^* par Ω_{PA}^* grâce aux propriétés homotopiques que vérifie Ω_{PA}^* . Il existe notamment une « version opéradique » du foncteur Ω^* (PL ou PA), qui produit une véritable coopérade de Hopf $\Omega_{\#}^*P$ à partir d'une opérade topologique ou SA P , tel que si P est cofibrante alors $(\Omega_{\#}^*P)(r) \simeq \Omega^*(P(r))$.

Définition 4.4.13. Une opérade P en ensembles SA compacts est *formelle* (sur \mathbb{R}) si $H^*(P; \mathbb{R})$ est un modèle réel de P .

Remarque 4.4.14. Il existe une notion plus faible de formalité dans la littérature. Notons que $C_*(P)$ forme toujours une dg-opérade linéaire grâce au morphisme de Künneth. La formalité que nous allons appeler « faible », par opposition à la formalité « forte » définie ci-dessus, demande que les dg-opérades $C_*(P)$ et $H_*(P)$ soient quasi-isomorphes. Si une opérade est fortement formelle, alors elle est faiblement formelle.

Théorème 4.4.15 (Kontsevich [Kon99], Tamarkin [Tam03], Lambrechts et Volic [LV14], Petersen [Pet14], Fresse et Willwacher [FW20] et Boavida de Brito et Horel [BH19]). *L'opérade FM_n est formelle pour tout n .*

Ce théorème a connu plusieurs variantes :

- Kontsevich [Kon99] a montré la formalité faible sur \mathbb{R} . Grâce à un résultat ultérieur de Guillén Santos, Navarro, Pascual et Roig [GNPR05], la formalité faible sur \mathbb{R} s'est avérée être équivalente à la formalité faible sur \mathbb{Q} .
- Tamarkin [Tam03] a montré la formalité faible sur \mathbb{Q} pour $n = 2$. Sa preuve est complètement différente de celle de Kontsevich : comme mentionné dans le

Chapitre 1, les espaces $\text{Conf}_{\mathbb{R}^2}$ sont des espaces d'Eilenberg–MacLane et on peut donc les étudier complètement à l'aide de leur group(oïde) fondamental. Celui-ci s'exprime en termes de tresses, sur lesquelles il existe une opération de « câblage » qui décrit la structure opéradique. En utilisant un associateur de Drinfel'd [Dri90], Tamarkin en déduit la formalité de FM_2 sur \mathbb{Q} . Nous pouvons nous référer également à [Fre17b] pour un raffinement de cette preuve qui permet de déduire la formalité forte.

- Lambrechts et Volić [LV14] ont détaillé la preuve de Kontsevich et l'ont généralisée pour démontrer la formalité forte pour $n \geq 3$. Nous allons la rappeler rapidement ci-dessous.
- Petersen [Pet14] a montré la formalité faible de FM_2 en utilisant l'action du groupe de Grothendieck–Teichmüller qui existe sur cette opérade.
- Fresse et Willwacher [FW20] ont montré que l'opérade FM_n est *intrinsèquement* formelle sur \mathbb{Q} pour $n \geq 3$: sous certaines hypothèses techniques, si P est n'importe quelle opérade topologique qui a la même cohomologie que FM_n (plus une condition en dimension divisible par 4), alors P est formelle sur \mathbb{Q} , et est donc rationnellement équivalente à FM_n .
- Boavida de Brito et Horel [BH19] ont construit une action du groupe de Grothendieck–Teichmüller sur FM_n pour prouver la formalité faible sur \mathbb{Q} pour $n \geq 2$. Ils ont par ailleurs des résultats de formalité partielle en caractéristique non-nulle.

Ce théorème a des conséquences importantes. Nous pouvons notamment mentionner la quantification par déformation des variétés de Poisson [Kon03] et la conjecture de Deligne [KS00; Tam98] (qui a également plusieurs autres démonstrations).

Rappelons maintenant rapidement la preuve de Kontsevich et Lambrechts–Volić. Comme le Chapitre 1 est inspiré par cette preuve, nous nous contenterons d'une ébauche, les définitions et démonstrations étant analogues.

Démonstration. Il y a un complexe de graphes $\text{Graphs}_n(r)$ qui s'insère dans un zigzag de quasi-isomorphismes :

$$e_n^\vee(U) \xleftarrow{\sim} \text{Graphs}_n(U) \xrightarrow{\sim} \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(U)). \quad (4.4.16)$$

Comme espace vectoriel, $\text{Graphs}_n(r)$ est engendré par des classes d'isomorphismes de graphes Γ du type suivant. Le graphe Γ a des sommets dits externes en bijection avec U et un nombre fini arbitraire de sommets internes. Les arêtes sont soit orientées soit numérotés avec des conventions de signes similaires à celles du Chapitre 2. Le degré de Γ est $(n-1)\#E - n\#I$, où E est l'ensemble des arêtes et I l'ensemble des sommets internes. Le produit consiste à recoller les graphes le long de leurs sommets, et la différentielle est la somme de toutes les manières de contracter une arête incidente à un sommet interne (sauf les « culs-de-sacs », c.-à-d. les arêtes incidentes à un sommet interne univalent). Enfin, on quotiente par les graphes ayant des composantes constituées entièrement de sommets internes.

Le morphisme $\text{Graphs}_n(U) \rightarrow e_n^\vee(U)$ est l'application quotient qui envoie les graphes contenant des sommets internes sur zéro. On vérifie que c'est un quasi-isomorphisme de manière purement combinatoire. Le morphisme $\text{Graphs}_n(U) \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n(U))$ est défini par des intégrales, comme dans le Chapitre 2. Le « propagateur » φ sur $\text{FM}_n(2) \cong S^{n-1}$ est simplement la forme volume de la sphère. On vérifie que c'est un morphisme d'ADGC, et il est clairement surjectif en cohomologie, d'où le résultat.

Le point nouveau par rapport au Chapitre 2 est la structure opéradique. Nous avons décrit la structure de coopérade de e_n^\vee dans le Théorème 4.4.6, et celle de $\Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n)$ est définie à partir de celle de FM_n par contravariance. Décrivons maintenant celle de Graphs_n . Soit $W \subset U$ une paire d'ensembles et $\Gamma \in \text{Graphs}_n(U)$ un graphe. La cocomposition $\circ_W^\vee(\Gamma)$ est une somme de plusieurs termes, indexée par tous les sous-graphes $\Gamma' \subset \Gamma$ dont l'ensemble des sommets externes est W . Pour un tel sous-graphe, on définit un graphe quotient Γ/Γ' dont les sommets externes sont U/W et dont les sommets internes sont ceux de Γ qui ne sont pas dans Γ' . Les arêtes de Γ/Γ' sont les arêtes de Γ qui ne sont pas dans Γ' ; si une extrémité d'une arête était un sommet de Γ' , alors son extrémité dans Γ/Γ' devient $*$ $\in U/W$. Si cette procédure crée des arêtes multiples ou des boucle alors le résultat est nul. On définit ainsi une opération

$$\begin{aligned} \circ_W^\vee : \text{Graphs}_n(U) &\rightarrow \text{Graphs}_n(U/W) \otimes \text{Graphs}_n(W) \\ \Gamma &\mapsto \sum_{\substack{\Gamma' \subset \Gamma \\ V_{\text{ext}}(\Gamma')=W}} \pm \Gamma/\Gamma' \otimes \Gamma', \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

où le signe est défini par la règle de Koszul. On pourra se référer à la Figure 4.6 pour un exemple.

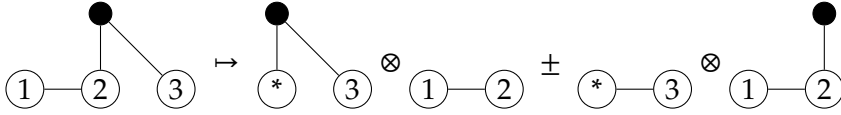


FIG. 4.6 : Exemple de $\circ_{\{1,2\}}^\vee : \text{Graphs}_n(\{1,2,3\}) \rightarrow \text{Graphs}_n(\{*,3\}) \otimes \text{Graphs}_n(\{1,2\})$.

On vérifie sans peine que l'application quotient $\text{Graphs}_n \rightarrow e_n^\vee$ respecte cette structure d'opérade. Le fait que les intégrales $\text{Graphs}_n \rightarrow \Omega_{\text{PA}}^*(\text{FM}_n)$ la respecte aussi découle d'un calcul similaire au niveau des formes. Le point essentiel de la preuve réside dans la décomposition du produit fibré $\text{FM}_n(U \sqcup I) \times_{\text{FM}_n(U)} (\text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W))$ où $\text{FM}_n(U \sqcup I) \rightarrow \text{FM}_n(U)$ est la projection canonique et $\text{FM}_n(U/W) \times \text{FM}_n(W) \rightarrow \text{FM}_n(U)$ est la composition opéradique. On vérifie qu'il se décompose en une réunion de sous-variétés de $\text{FM}_n(U \sqcup I)$ de codimension 1 (qui correspondent aux différentes manières d'inclure ou non les sommets internes dans le sous-graphe). \square

Intéressons-nous maintenant aux espaces de configuration d'une variété compacte sans bord parallélisée M . On définit la notion de modèle pour un module à droite sur une opérade de manière analogue à la Définition 4.4.9. Nous savons qu'ils ont le

type d'homotopie des espaces $\text{FM}_M(r)$, qui forment un module à droite sur l'opérade FM_n . Décrivons maintenant quelle est la contrepartie de cette structure au niveau des modèles :

Proposition 4.4.18. *Soit A une ADGC à dualité de Poincaré dont la caractéristique d'Euler $\chi(A) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim A^i$ est nulle. Alors la collection \mathbb{G}_A des modèles de Lambrechts–Stanley associée à A est un comodule de Hopf à droite sur la coopérade de Hopf \mathbf{e}_n^\vee avec les opérations suivantes, pour $W \subset U$:*

$$\begin{aligned} \circ_W^\vee : \mathbb{G}_A(U) &\mapsto \mathbb{G}_A(U/W) \otimes \mathbf{e}_n^\vee(W), \\ p_i^*(a) &\mapsto p_{[i]}^*(a) \quad (i \in U, a \in A), \\ \omega_{ij} &\mapsto \begin{cases} 1 \otimes \omega_{ij}, & \text{si } i, j \in W; \\ \omega_{[i][j]} \otimes 1, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

Démonstration. Soit $\text{vol}_A \in A^n$ la forme volume de A , c'est-à-dire l'unique élément vérifiant $\varepsilon_A(\text{vol}_A) = 1$. Un petit calcul montre que si l'on applique le produit $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ à la classe diagonale $\Delta_A \in (A \otimes A)^n$, on obtient la classe d'Euler $\chi(A) \cdot \text{vol}_A = 0$.

Vérifions maintenant que la structure ci-dessus définit un comodule de Hopf à droite. La compatibilité avec le produit et la structure coopéradique est immédiate. Pour la différentielle, il est clair que $d(\circ_W^\vee(p_i^*(a))) = \circ_W^\vee(d(p_i^*(a)))$ pour $a \in A$ et $i \in U$. Si $i \notin W$ ou $j \notin W$, cette relation est aussi claire pour ω_{ij} . Enfin, si $i, j \in W$,

$$\begin{aligned} d(\circ_W^\vee(\omega_{ij})) &= d(1 \otimes \omega_{ij}) \\ &= 0, \\ \circ_W^\vee(d(\omega_{ij})) &= \circ_W^\vee(p_{ij}^*(\Delta_A)) \\ &= \sum_{(\Delta_A)} p_{[i]}^*(\Delta'_A) \cdot p_{[j]}^*(\Delta''_A) \otimes 1 \\ &= \chi(A) \cdot p_*^*(\text{vol}_A) \otimes 1 = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Théorème 4.4.20. *Soit M une variété compacte sans bord, simplement connexe, lisse, parallélisée, de dimension au moins 4. Soit A un modèle à dualité de Poincaré de M . La paire $(\mathbb{G}_A, \mathbf{e}_n^\vee)$ est un modèle réel de la paire $(\text{FM}_M, \text{FM}_n)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que le zigzag construit dans le Chapitre 2 est compatible avec la structure de comodule. On construit une structure de Graphs_n -comodule de Hopf sur les complexes de graphes qui apparaissent dans ce zigzag en s'inspirant de la structure de coopérade de Graphs_n : quand on contracte un sous-graphe, on multiplie ensemble les décorations de ses sommets. On vérifie sans peine que cette structure est compatible avec tous les morphismes du zigzag. \square

Dans le cas des variétés à bord, des résultats similaires sont vrais (avec des preuves similaires) :

Proposition 4.4.21. Soit $(M, \partial M)$ une variété compacte à bord. Si M et $N = \partial M$ sont parallélisées, alors \mathbf{aFM}_N et \mathbf{mFM}_M forment des modules à droite sur l'opérade \mathbf{FM}_n , et l'action de \mathbf{aFM}_N sur \mathbf{mFM}_M est compatible avec cette structure de module à droite.

Théorème 4.4.22 ([CILW18]). Soit M une variété compacte à bord vérifiant les hypothèses du Théorème 3.3.15. Supposons de plus que M et $N = \partial M$ sont parallélisées. Alors avec les notations de ce théorème, les collections $\mathbf{aGraphs}_{A_\partial}^0$ et $\mathbf{mGraphs}_A^0$ forment des comodules de Hopf à droite sur \mathbf{Graphs}_n , et la coaction de $\mathbf{aGraphs}_{A_\partial}^0$ sur $\mathbf{mGraphs}_A^0$ est compatible avec cette structure de comodule. Le triplet $(\mathbf{mGraphs}_A^0, \mathbf{aGraphs}_{A_\partial}^0)$ est un modèle réel pour $(\mathbf{mFM}_M, \mathbf{aFM}_N, \mathbf{FM}_n)$ avec leurs structures algébriques.

Théorème 4.4.23 ([CILW18]). Soit M une variété compacte à bord vérifiant les hypothèses du Théorème 3.4.25. Avec les notations de ce théorème, $\tilde{\mathbf{G}}_P$ est un comodule de Hopf à droite sur \mathbf{e}_n^\vee si $\partial M \neq \emptyset$. Si de plus M est parallélisée, alors la paire $(\tilde{\mathbf{G}}_P, \mathbf{e}_n^\vee)$ est un modèle pour la paire $(\mathbf{mFM}_M, \mathbf{FM}_n)$ compatible avec la structure de module à droite.

4.5 Exemple de calcul

Concluons par un exemple de calcul d'homologie de factorisation (cf. Section 4.1). Commençons par en donner une définition plus précise. Nous avons défini dans la Remarque 4.2.25 le produit de composition $P \circ Q$ de deux collections symétriques P et Q . Soit M une variété compacte sans bord parallélisée. La collection \mathbf{FM}_n est alors un monoïde pour le produit \circ (Remarque 4.2.25), et la collection \mathbf{FM}_M est un module à droite sur ce monoïde (Remarque 4.2.52). Une algèbre A sur \mathbf{FM}_n définit un module à gauche sur \mathbf{FM}_n concentré en arité 0 (Exemple 4.2.43), que nous allons continuer à noter abusivement A . Nous avons donc deux applications de structure :

$$\rho_M : \mathbf{FM}_M \circ \mathbf{FM}_n \rightarrow \mathbf{FM}_M, \quad \lambda_A : \mathbf{FM}_n \circ A \rightarrow A. \quad (4.5.1)$$

En combinant des résultats de Salvatore [Sal01], Francis [Fra13] et Turchin [Tur13], nous obtenons la définition suivante :

Définition 4.5.2. Soit M une variété compacte sans bord parallélisée et A une algèbre sur \mathbf{FM}_n . L'homologie de factorisation de M à coefficients dans A est l'espace topologique donné par le coégalisateur homotopique :

$$\int_M A := \text{hocoeq} \left(\mathbf{FM}_M \circ \mathbf{FM}_n \circ A \xrightarrow[\text{id}_{\mathbf{FM}_M} \circ \lambda_A]{\rho_M \circ \text{id}_A} \mathbf{FM}_M \circ A \right). \quad (4.5.3)$$

Concrètement, l'espace $\int_M A$ est un quotient de l'espace $\mathbf{FM}_M \circ A$. Les points de $\mathbf{FM}_M \circ A$ sont du type $x(a_i)_{i \in U}$, où U est un ensemble, $x \in \mathbf{FM}_M(U)$ est une configuration virtuelle dans M et les $a_i \in A$ sont des éléments de A . Le quotient est obtenu en quotientant par la relation engendré par les identifications suivantes. Tout d'abord, si $\sigma : U \rightarrow V$ est une bijection, nous avons une identification :

$$(x \cdot \sigma)(a_i)_{i \in U} = x(a_{\sigma(i)})_{i \in U}. \quad (4.5.4)$$

Cela nous permet essentiellement de voir les points de $\text{FM}_M \circ A$ comme des configurations non-ordonnées décorées par des éléments de A . Nous avons ensuite une autre identification, qui utilise la structure d'algèbre de A et la structure de module à droite de FM_M . Pour une configuration $x \in \text{FM}_M(U)$, des configurations $y_i \in \text{FM}_n(V_i)$ (pour $i \in U$) et des éléments $a_{i,j} \in A$ pour $i \in U$ et $j \in V_i$, nous avons l'identification :

$$(\gamma(x; y_i))(a_{i,j})_{i \in U, j \in V_i} = x(y_i(a_{i,j})_{j \in V_i})_{i \in U}. \quad (4.5.5)$$

Graphiquement, cela signifie que si des points sont infinitésimalement proches dans une configuration de M décorée par A , alors on identifie cette configuration décorée avec la configuration obtenue en remplaçant ces points infinitésimalement proches par un unique point décoré par l'action de la configuration infinitésimale (qui vit dans FM_n) sur les éléments de A correspondants. En tant qu'ensemble, on peut donc identifier $\int_M A$ avec $\bigsqcup_{k \geq 0} \text{Conf}_M(k) \times_{\Sigma_k} A^k$. La topologie est cependant plus compliquée qu'une simple réunion disjointe.

Exemple 4.5.6. Prenons $M = S^1$ et soit $x \in S^1$ un point, A une algèbre associative (qui devient une algèbre sur FM_1 grâce au morphisme canonique $\text{FM}_1 \rightarrow \text{Ass}$) et $a, b \in A$ deux éléments. Alors dans $\int_{S^1} A$, il existe un chemin entre $(x)(ab) \in \text{Conf}_M(1) \times A$ et $(x)(ba) \in \text{Conf}_M(1) \times A$ qui passe par $\text{Conf}_{S^1}(2) \times_{\Sigma_2} A^2$, cf. Figure 4.7.

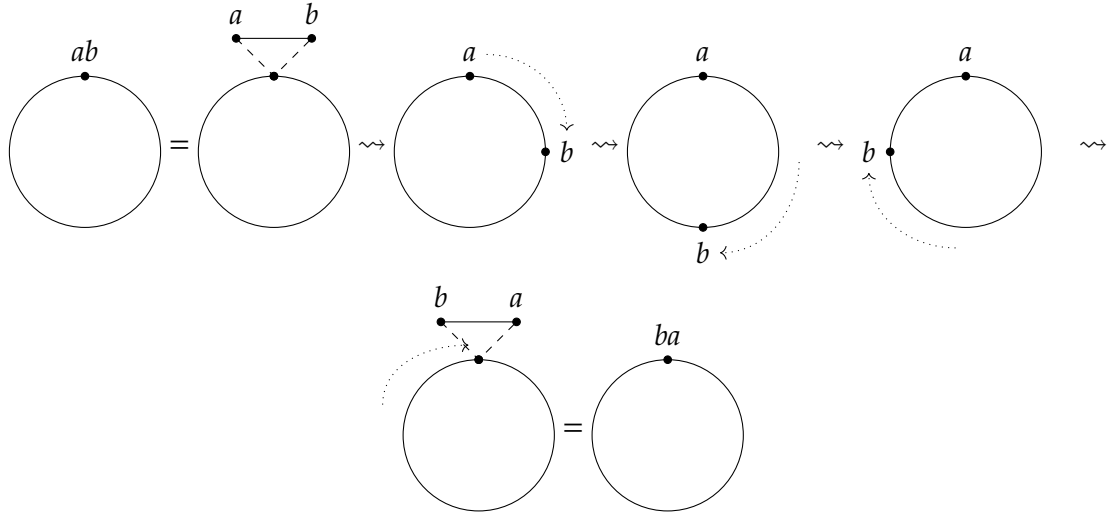


FIG. 4.7 : Chemin dans $\int_{S^1} A$, où $a, b \in A$.

Remarque 4.5.7. Nous avons utilisé le fait que FM_M est cofibrant en tant que module à droite sur FM_n [Tur13, Lemma 2.3]. Cette propriété nous permet de savoir que le coégalisateur homotopique de la Définition 4.5.2 est faiblement équivalent au coégalisateur strict. C'est ce coégalisateur strict que nous avons décrit ci-dessus.

Passons maintenant au point de vue algébrique. Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe lisse parallélisée. Choisissons un modèle à dualité de Poincaré

de M , que nous allons noter P pour le distinguer de l'algèbre A ci-dessus. Alors on sait que la collection G_P formée par les modèles de Lambrechts–Stanley de M est un modèle pour FM_M en tant que module à droite sur FM_n . En particulier, la paire (G_P^\vee, e_n) (formée par le dual de G_P et l'opérade e_n) est quasi-isomorphe à la paire $(C_*(FM_M), C_*(FM_n))$.

Soit maintenant A une algèbre sur FM_n . Grâce au morphisme de Künneth, les chaînes $C_*(A)$ (à coefficients réels) forment une algèbre sur $C_*(FM_n)$. La formalité de FM_n entraînent que les opérades $C_*(FM_n)$ et $e_n = H_*(FM_n)$ sont faiblement équivalentes. En utilisant des théorèmes généraux sur les opérades, leurs catégories d'algèbres ont les mêmes catégories homotopiques. Cela entraîne que la classe de quasi-isomorphisme de $C_*(A)$ correspond à une unique classe de quasi-isomorphismes d'algèbre sur e_n . Notons cette classe $[\tilde{A}]$, où \tilde{A} est une algèbre sur e_n représentative. Le fait que le foncteur des chaînes commute avec les colimites entraîne alors que :

$$C_*\left(\int_M A\right) \cong C_*(FM_M) \circ_{C_*(FM_n)} C_*(A) \simeq G_P^\vee \circ_{e_n}^{\mathbb{L}} \tilde{A}. \quad (4.5.8)$$

Ce nouveau complexe, $G_P^\vee \circ_{e_n} \tilde{A}$, est le coégalisateur homotopique de $G_P^\vee \circ e_n \circ \tilde{A} \rightrightarrows G_P^\vee \circ \tilde{A}$. On peut explicitement décrire G_P^\vee comme module à droite sur e_n en dualisant la description de la Proposition 4.4.18. Ce nouveau complexe est donc beaucoup plus simple à calculer que $C_*\left(\int_M A\right)$.

Calculons-le maintenant dans un cas simple pour retrouver un théorème de Knudsen [Knu17, Theorem 3.16]. Soit \mathfrak{g} une dg-algèbre de Lie. L'algèbre graduée commutative libre sur sa désuspension,

$$\tilde{A} := S(\mathfrak{g}[1 - n]), \quad (4.5.9)$$

est une algèbre e_n , c'est-à-dire une algèbre de Poisson décalée (cf. Théorème 4.4.6). Le produit commutatif est simplement le produit de l'algèbre libre. Le crochet de Lie décalé est étendu à partir de celui de $\mathfrak{g}[1 - n]$ comme une bidérivation, c'est-à-dire qu'on utilise les relations suivantes jusqu'à obtenir des générateurs :

$$[a, bc] = [a, b]c + \pm b[a, c], \quad [ab, c] = a[b, c] + \pm [a, c]b. \quad (4.5.10)$$

Cette algèbre e_n est une version « stricte » de la n -algèbre enveloppante supérieure définie par Knudsen [Knu18]. En effet, on a une inclusion d'opérades $\iota_n : \text{Lie}_n \rightarrow e_n$, où Lie_n est l'opérade dont les algèbres sont les algèbres de Lie avec un crochet de degré $1 - n$. Étant donné une algèbre de Lie \mathfrak{g} , l'algèbre $\tilde{A} = S(\mathfrak{g}[1 - n])$ est obtenue en appliquant le foncteur d'extension $(\iota_n)_*$ à $\mathfrak{g}[1 - n]$. C'est l'analogue en dimension supérieure du foncteur d'extension associé au morphisme $\iota : \text{Lie} = \text{Lie}_1 \rightarrow \text{Ass} = e_1$ (qui envoie le crochet sur le commutateur) : ce foncteur d'extension $\iota_!$ envoie une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur son algèbre enveloppante $\iota_!(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$.

Nous pouvons maintenant calculer explicitement $G_P^\vee \circ_{e_n} \tilde{A}$. Commençons par noter que P^{-*} , le complexe de chaînes obtenu en renversant la graduation de P , est une algèbre graduée commutative dans la catégorie des complexes de chaînes. Le produit tensoriel $P^{-*} \otimes \mathfrak{g}$ est donc une dg-algèbre de Lie en posant $[a \otimes x, b \otimes y] = \pm ab \otimes [x, y]$.

Définition 4.5.11. Soit \mathfrak{h} une dg-algèbre de Lie Son complexe de Chevalley–Eilenberg $C_*^{CE}(\mathfrak{h})$ est donné en tant qu’espace vectoriel gradué par l’algèbre graduée commutative libre $S(\mathfrak{h}[-1])$ sur la suspension de \mathfrak{h} . La différentielle $d_{\mathfrak{h}} + d_{CE}$ est la somme de la différentielle de \mathfrak{h} (étendue comme une dérivation) et de la différentielle de Chevalley–Eilenberg, définie par :

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i < j} \pm x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n. \quad (4.5.12)$$

Proposition 4.5.13 ([Idr19, Proposition 81]). Soit \mathfrak{g} une dg-algèbre de Lie et soit P une algèbre à dualité de Poincaré en dimension $n > 1$. Soit $\tilde{A} = S(\mathfrak{g}[1-n])$ l’algèbre sur e_n associée à \mathfrak{g} . Le complexe $G_P^\vee \circ_{e_n}^{\mathbb{L}} \tilde{A}$ est quasi-isomorphe au complexe de Chevalley–Eilenberg de $P^{-*} \otimes \mathfrak{g}$:

$$G_P^\vee \circ_{e_n}^{\mathbb{L}} \tilde{A} \simeq C_*^{CE}(P^{-*} \otimes \mathfrak{g}). \quad (4.5.14)$$

Esquisse de preuve. On peut définir une algèbre de Lie dans la catégorie des modules à droite sur Lie_n par :

$$L_n := \text{Lie}[1-n] = \{\text{Lie}(k)[1-n]\}_{k \geq 0}. \quad (4.5.15)$$

Comme P^{-*} est une algèbre commutative graduée, le produit tensoriel $P^{-*} \otimes L_n = \{P^{-*} \otimes L_n(r)\}_{r \geq 0}$ reste une algèbre de Lie dans la catégorie des modules à droite sur Lie_n . La preuve est identique à celle du résultat analogue classique dans la catégorie des espaces vectoriels. Le crochet de Lie est donné par la formule $[a \otimes x, b \otimes y] = \pm ab \otimes [x, y]$ où $a, b \in P^{-*}$, $x \in L_n(r)$, $y \in L_n(s)$. On peut donc définir le complexe de Chevalley–Eilenberg $C_*^{CE}(P^{-*} \otimes L_n)$ de façon formellement analogue à la Définition 4.5.11.

La preuve est maintenant très similaire à celle d’un théorème de Félix et Thomas [FT04, Section 2], qui ont démontré que les suites spectrales de Bendersky–Gitler et Cohen–Taylor étaient duales l’une de l’autre (cf. la fin de la Section 2.1). La collection G_P^\vee forme un module à droite sur e_n . En restreignant la structure, elle forme donc un module à droite sur Lie_n . En réinterprétant la preuve de Félix et Thomas et en réutilisant les arguments, on peut démontrer que G_P^\vee est isomorphe, en tant que module à droite sur Lie_n , à $C_*^{CE}(P^{-*} \otimes L_n)$.

Le produit de composition relatif $C_*^{CE}(P^{-*} \otimes L_n) \circ_{\text{Lie}} \mathfrak{h}$ avec une algèbre de Lie \mathfrak{h} est isomorphe à $C_*^{CE}(P^{-*} \otimes \mathfrak{h})$. En utilisant le fait que $e_n = \text{Com} \circ \text{Lie}_n$ se décompose en termes des opérades Com et Lie_n par une loi distributive (cf. [LV12, Section 13.3]), on obtient que

$$G_P^\vee \circ_{e_n} S(\mathfrak{h}[1-n]) \cong G_P^\vee \circ_{\text{Lie}_n} \mathfrak{h}[1-n] \cong C_*^{CE}(P^{-*} \otimes \mathfrak{h}). \quad (4.5.16)$$

Pour calculer le produit de composition *dérivé* de l’énoncé, il faut remplacer \mathfrak{h} par une résolution cofibrante de \mathfrak{g} dans l’expression ci-dessus. Or, le complexe de Chevalley–Eilenberg préserve les quasi-isomorphismes, donc cela ne change pas le type de quasi-isomorphisme. On obtient donc le résultat voulu. \square

La Proposition 4.5.13 nous permet de calculer les chaînes de l’homologie de factorisation sur une variété compacte sans bord simplement connexe lisse de dimension ≥ 4 à coefficients dans une n -algèbre enveloppante.

Remarque 4.5.17. Comme le foncteur Ω_{PA}^* envoie les colimites sur les limites, nous pouvons également calculer le type d'homotopie réelle de $\int_M A$. Le résultat est simplement plus facile à énoncer dans le cadre dual.

Remarque 4.5.18. Dans la preuve précédente, nous avons décrit G_P^\vee comme module à droite sur Lie_n . Or cette collection forme un module sur $e_n = \text{Com} \circ \text{Lie}_n$. La structure de module à droite sur Com a été décrite dans l'article [Idr18, Section 4.4] et nous allons la rappeler ici. Il nous suffit de décrire l'action des générateurs : l'unité $\eta \in \text{Com}(0)$ et le produit $\mu \in \text{Com}(2)$.

Soit U un ensemble et $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ une partition de U . Soit $X = (a_i \otimes \lambda_i) \in G_P^\vee(U)$ un élément, où $a_i \in P$, et $\lambda_i \in \text{Lie}_n(V_i)$. Soit $j \in V_i \subset U$ un indice.

- L'élément $X \circ_j \eta$ est obtenu en insérant l'unité dans λ_i . Si λ_i a au moins un crochet (c.-à-d. $\#V_i \geq 2$) alors le résultat est nul. Sinon, λ_i est un multiple scalaire de l'identité (on ne peut pas avoir $\#V_i = 0$ car $j \in V_i$). Le facteur correspondant à V_i disparaît dans $X \circ_j u$ et on multiplie le résultat par l'application de l'augmentation $\varepsilon : P^{-*} \rightarrow \mathbb{R}$ (dual de Poincaré de l'unité $1 \in P$) à a_i .
- L'élément $X \circ_j \mu$ est obtenu en insérant le produit dans λ_i . En utilisant la loi distributive $\text{Lie}_n \circ \text{Com} \rightarrow \text{Com} \circ \text{Lie}_n$ qui sert à définir la structure d'opérade de e_n , on obtient ainsi une somme de produits de deux éléments de Lie_n qui partitionnent V_i en deux sous-ensembles. On applique alors le coproduit $\Delta : P^{n-*} \rightarrow (P^{n-*})^{\otimes 2}$, le dual de Poincaré du produit $P^{\otimes 2} \rightarrow P$, à la décoration a_i pour obtenir un élément de $P \otimes P$ qui décorera les deux sous-ensembles ainsi obtenus.

Exemple 4.5.19. Considérons l'élément $X = a \otimes \text{id}(u_1) \otimes b \otimes \lambda(u_2, u_3) \in \text{Lie}_n(\{u_1, u_2, u_3\})$, où $a, b \in P^{-*}$, $\text{id}(u_1) \in \text{Lie}_n(\{u_1\})$ est l'identité, et $\lambda(u_2, u_3) \in \text{Lie}_n(\{u_2, u_3\})$ est le crochet de Lie. Alors :

- On a $X \circ_{u_1} \eta = \varepsilon(a)b \otimes \lambda(u_2, u_3)$ et $X \circ_{u_2} \eta = X \circ_{u_3} \eta = 0$.
- Utilisons la notation de Sweedler pour les coproduits $\Delta(a), \Delta(b) \in (P^{n-*})^{\otimes 2}$ et notons $\mu \in \text{Com}(\{v_1, v_2\})$. Alors :

$$X \circ_{u_1} \mu = \sum_{(a)} a' \otimes \text{id}(v_1) \otimes a'' \otimes \text{id}(v_2) \otimes b \otimes \lambda(u_2, u_3),$$

$$X \circ_{u_2} \mu = \sum_{(b)} a \otimes \text{id}(u_1) \otimes (b' \otimes \text{id}(v_1) \otimes b'' \lambda(v_2, u_3) \pm b' \otimes \lambda(v_1, u_3) \otimes b'' \text{id}(v_2)),$$

et $X \circ_{u_3} \mu$ a une description similaire à $X \circ_{u_2} \mu$.

Remarque 4.5.20. Dans [Idr18], en se servant de la structure de module sur e_n ci-dessus, nous avons étendu le calcul de la Proposition 4.4.18 au cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie « unitaire », c'est-à-dire munie d'un élément c vérifiant $[c, x] = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. L'analogue de la n -algèbre enveloppante est alors le quotient $S(\mathfrak{g}[1-n])/(c=1)$. Nous trouvons un résultat analogue à celui énoncé ci-dessus.

Bibliographie

- [AK04] Mokhtar AOUINA et John R. KLEIN. «On the homotopy invariance of configuration spaces». In : *Algebr. Geom. Topol.* 4 (2004), p. 813-827. issn : 1472-2747. doi : [10.2140/agt.2004.4.813](https://doi.org/10.2140/agt.2004.4.813). arXiv : [math/0310483](https://arxiv.org/abs/math/0310483).
- [Arn69] Vladimir I. ARNOLD. «The cohomology ring of the colored braid group». In : *Math. Notes* 5.2 (1969), p. 138-140. issn : 0025-567X. doi : [10.1007/BF01098313](https://doi.org/10.1007/BF01098313).
- [AT14] Gregory ARONE et Victor TURCHIN. «On the rational homology of high dimensional analogues of spaces of long knots». In : *Geom. Topol.* 18.3 (2014), p. 1261-1322. issn : 1465-3060. doi : [10.2140/gt.2014.18.1261](https://doi.org/10.2140/gt.2014.18.1261). arXiv : [1105.1576](https://arxiv.org/abs/1105.1576).
- [AS94] Scott AXELROD et Isadore M. SINGER. «Chern–Simons perturbation theory II». In : *J. Differential Geom.* 39.1 (1994), p. 173-213. issn : 0022-040X. doi : [10.4310/jdg/1214454681](https://doi.org/10.4310/jdg/1214454681). arXiv : [hep-th/9304087](https://arxiv.org/abs/hep-th/9304087).
- [AF15] David AYALA et John FRANCIS. «Factorization homology of topological manifolds». In : *J. Topol.* 8.4 (2015), p. 1045-1084. issn : 1753-8416. doi : [10.1112/jtopol/jtv028](https://doi.org/10.1112/jtopol/jtv028). arXiv : [1206.5522](https://arxiv.org/abs/1206.5522).
- [AFT17] David AYALA, John FRANCIS et Hiro Lee TANAKA. «Factorization homology of stratified spaces». In : *Selecta Math.* Nouv. sér. 23.1 (2017), p. 293-362. issn : 1022-1824. doi : [10.1007/s00029-016-0242-1](https://doi.org/10.1007/s00029-016-0242-1). arXiv : [1409.0848v3](https://arxiv.org/abs/1409.0848v3).
- [BD04] Alexander BEILINSON et Vladimir DRINFELD. *Chiral algebras*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 51. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2004. 375 p. isbn : 0-8218-3528-9. doi : [10.1090/coll/051](https://doi.org/10.1090/coll/051).
- [BG91] Martin BENDERSKY et Sam GITLER. «The cohomology of certain function spaces». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 326.1 (1991), p. 423-440. issn : 0002-9947. doi : [10.2307/2001871](https://doi.org/10.2307/2001871).
- [BMP05] Barbu BERCEANU, Martin MARKL et Ștefan PAPADIMA. «Multiplicative models for configuration spaces of algebraic varieties». In : *Topology* 44.2 (2005), p. 415-440. issn : 0040-9383. doi : [10.1016/j.top.2004.10.002](https://doi.org/10.1016/j.top.2004.10.002). arXiv : [math/0308243](https://arxiv.org/abs/math/0308243).
- [BV68] J. Michael BOARDMAN et Rainer M. VOGT. «Homotopy-everything H -spaces». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), p. 1117-1122. issn : 0002-9904. doi : [10.1090/S0002-9904-1968-12070-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1968-12070-1).
- [BH19] Pedro BOAVIDA DE BRITO et Geoffroy HOREL. *On the formality of the little disks operad in positive characteristic*. 2019. arXiv : [1903.09191](https://arxiv.org/abs/1903.09191). Prépubl.
- [BW13] Pedro BOAVIDA DE BRITO et Michael WEISS. «Manifold calculus and homotopy sheaves». In : *Homology Homotopy Appl.* 15.2 (2013), p. 361-383. issn : 1532-0073. doi : [10.4310/HHA.2013.v15.n2.a20](https://doi.org/10.4310/HHA.2013.v15.n2.a20). arXiv : [1202.1305](https://arxiv.org/abs/1202.1305).
- [BW18] Pedro BOAVIDA DE BRITO et Michael S. WEISS. «Spaces of smooth embeddings and configuration categories». In : *J. Topol.* 11.1 (2018), p. 65-143. issn : 1753-8416. doi : [10.1112/topo.12048](https://doi.org/10.1112/topo.12048). arXiv : [1502.01640](https://arxiv.org/abs/1502.01640).

- [BCT89] Carl-Friedrich BÖDIGHEIMER, Frederick COHEN et Laurence TAYLOR. «On the homology of configuration spaces». In : *Topology* 28.1 (1989), p. 111-123. ISSN : 0040-9383. DOI : [10.1016/0040-9383\(89\)90035-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(89)90035-9).
- [BC98] Raoul BOTT et Alberto S. CATTANEO. «Integral invariants of 3-manifolds». In : *J. Differential Geom.* 48.1 (1998), p. 91-133. ISSN : 0022-040X. DOI : [10.4310/jdg/1214460608](https://doi.org/10.4310/jdg/1214460608).
- [BT82] Raoul BOTT et Loring W. TU. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics 82. New York : Springer, 1982. 331 p. ISBN : 978-1-4419-2815-3. DOI : [10.1007/978-1-4757-3951-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3951-0).
- [CDI19] Ricardo CAMPOS, Julien DUCOULOMBIER et Najib IDRISSE. *Boardman–Vogt resolutions and bar/cobar constructions of (co)operadic (co)bimodules*. 2019. arXiv : [1911.09474](https://arxiv.org/abs/1911.09474). Prépubl.
- [CDIW18] Ricardo CAMPOS, Julien DUCOULOMBIER, Najib IDRISSE et Thomas WILLWACHER. *A model for framed configuration spaces of points*. 2018. arXiv : [1807.08319](https://arxiv.org/abs/1807.08319). Prépubl.
- [CILW18] Ricardo CAMPOS, Najib IDRISSE, Pascal LAMBRECHTS et Thomas WILLWACHER. *Configuration Spaces of Manifolds with Boundary*. 2018. arXiv : [1802.00716](https://arxiv.org/abs/1802.00716). Prépubl.
- [CIW19] Ricardo CAMPOS, Najib IDRISSE et Thomas WILLWACHER. *Configuration Spaces of Surfaces*. 2019. arXiv : [1911.12281](https://arxiv.org/abs/1911.12281). Prépubl.
- [CW16] Ricardo CAMPOS et Thomas WILLWACHER. *A model for configuration spaces of points*. 2016. arXiv : [1604.02043](https://arxiv.org/abs/1604.02043). Prépubl.
- [CM10] Alberto S. CATTANEO et Pavel MNĚV. «Remarks on Chern-Simons invariants». In : *Comm. Math. Phys.* 293.3 (2010), p. 803-836. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/s00220-009-0959-1](https://doi.org/10.1007/s00220-009-0959-1). arXiv : [0811.2045](https://arxiv.org/abs/0811.2045).
- [Coh76] Frederick R. COHEN. «The homology of C_{n+1} spaces, $n \geq 0$ ». In : Frederick R. COHEN, Thomas J. LADA et J. Peter MAY. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics 533. Berlin-Heidelberg : Springer, 1976. Chap. 3, p. 207-351. ISBN : 978-3-540-07984-2. DOI : [10.1007/BFb0080467](https://doi.org/10.1007/BFb0080467).
- [CT78] Frederick R. COHEN et Laurence R. TAYLOR. «Computations of Gelfand–Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces». In : *Geometric applications of homotopy theory I* (Evanston, IL, 21-26 mar. 1977). Sous la dir. de M. G. BARRATT et M. E. MAHOWALD. Lecture Notes in Math. 657. Berlin : Springer, 1978, p. 106-143. DOI : [10.1007/BFb0069229](https://doi.org/10.1007/BFb0069229).
- [Cor15] Hector CORDOVA BULENS. «Rational model of the configuration space of two points in a simply connected closed manifold». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.12 (2015), p. 5437-5453. ISSN : 0002-9939. DOI : [10.1090/proc/12666](https://doi.org/10.1090/proc/12666). arXiv : [1505.06290](https://arxiv.org/abs/1505.06290).
- [CLS18] Hector CORDOVA BULENS, Pascal LAMBRECHTS et Donald STANLEY. «Rational models of the complement of a subpolyhedron in a manifold with boundary». In : *Can. J. Math* 70.2 (2018), p. 265-293. DOI : [10.4153/CJM-2017-021-3](https://doi.org/10.4153/CJM-2017-021-3). arXiv : [1505.04816](https://arxiv.org/abs/1505.04816).
- [CLS19] Hector CORDOVA BULENS, Pascal LAMBRECHTS et Donald STANLEY. «Pretty rational models for Poincaré duality pairs». In : *Algebr. Geom. Topol.* 19 (2019), p. 1-30. DOI : [10.2140/agt.2019.19.1](https://doi.org/10.2140/agt.2019.19.1). arXiv : [1505.04818](https://arxiv.org/abs/1505.04818).
- [CG17a] Kevin COSTELLO et Owen GWILLIAM. *Factorization algebras in quantum field theory*. T. 1. New Mathematical Monographs 31. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2017. 387 p. ISBN : 978-1-107-16310-2. DOI : [10.1017/9781316678626](https://doi.org/10.1017/9781316678626).

- [CG17b] Kevin COSTELLO et Owen GWILLIAM. *Factorization algebras in quantum field theory*. T. 2. Cambridge Univ. Press, 2017. URL : <https://people.math.umass.edu/~gwilliam/vol2may8.pdf>. À para.
- [Del75] Pierre DELIGNE. « Poids dans la cohomologie des variétés algébriques ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, BC, 1974). T. 1. 1975, p. 79-85. ISBN : 0-919558-04-6. URL : <https://www.mathunion.org/icm/proceedings>.
- [DGMS75] Pierre DELIGNE, Phillip GRIFFITHS, John MORGAN et Dennis SULLIVAN. « Real homotopy theory of Kähler manifolds ». In : *Invent. Math.* 29.3 (1975), p. 245-274. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01389853](https://doi.org/10.1007/BF01389853).
- [DW15] Vasily DOLGUSHEV et Thomas WILLWACHER. « Operadic twisting. With an application to Deligne’s conjecture ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 219.5 (2015), p. 1349-1428. ISSN : 0022-4049. DOI : [10.1016/j.jpaa.2014.06.010](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.06.010).
- [Dri90] Vladimir G. DRINFEL’D. « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ». In : *Algebra i Analiz* 2.4 (1990), p. 149-181. ISSN : 0234-0852.
- [DH12] William DWYER et Kathryn HESS. « Long knots and maps between operads ». In : *Geom. Topol.* 16.2 (2012), p. 919-955. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2012.16.919](https://doi.org/10.2140/gt.2012.16.919). arXiv : [1006.0874](https://arxiv.org/abs/1006.0874).
- [FN62a] Edward FADELL et Lee NEUWIRTH. « Configuration spaces ». In : *Math. Scand.* 10 (1962), p. 111-118. ISSN : 0025-5521. DOI : [10.7146/math.scand.a-10517](https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10517).
- [Far03] Michael FARBER. « Topological complexity of motion planning ». In : *Discrete Comput. Geom.* 29.2 (2003), p. 211-221. ISSN : 0179-5376. DOI : [10.1007/s00454-002-0760-9](https://doi.org/10.1007/s00454-002-0760-9).
- [FHT01] Yves FÉLIX, Stephen HALPERIN et Jean-Claude THOMAS. *Rational homotopy theory*. Graduate Texts in Mathematics 205. New York : Springer, 2001. 535 p. ISBN : 0-387-95068-0. DOI : [10.1007/978-1-4613-0105-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0105-9).
- [FHT15] Yves FÉLIX, Steve HALPERIN et Jean-Claude THOMAS. *Rational homotopy theory. II*. Hackensack, NJ : World Scientific, 2015. 412 p. ISBN : 978-981-4651-42-4. DOI : [10.1142/9473](https://doi.org/10.1142/9473).
- [FOT08] Yves FÉLIX, John OPREA et Daniel TANRÉ. *Algebraic models in geometry*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 17. Oxford : Oxford Univ. Press, 2008. 460 p. ISBN : 978-0-19-920651-3.
- [FT04] Yves FÉLIX et Jean-Claude THOMAS. « Configuration spaces and Massey products ». In : *Int. Math. Res. Not.* 33 (2004), p. 1685-1702. ISSN : 1073-7928. DOI : [10.1155/S1073792804140270](https://doi.org/10.1155/S1073792804140270). arXiv : [math/0304226](https://arxiv.org/abs/math/0304226).
- [FN62b] Ralph FOX et Lee NEUWIRTH. « The braid groups ». In : *Math. Scand.* 10 (1962), p. 119-126. ISSN : 0025-5521. DOI : [10.7146/math.scand.a-10518](https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10518).
- [Fra13] John FRANCIS. « The tangent complex and Hochschild cohomology of \mathcal{E}_n -rings ». In : *Compos. Math.* 149.3 (2013), p. 430-480. ISSN : 0010-437X. DOI : [10.1112/S0010437X12000140](https://doi.org/10.1112/S0010437X12000140).
- [Fre09] Benoit FRESSE. *Modules over operads and functors*. Lecture Notes in Mathematics 1967. Berlin : Springer, 2009, p. x+308. ISBN : 978-3-540-89055-3. DOI : [10.1007/978-3-540-89056-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-89056-0). arXiv : [0704.3090](https://arxiv.org/abs/0704.3090).
- [Fre17a] Benoit FRESSE. *Homotopy of Operads and Grothendieck–Teichmüller Groups*. T. 1 : *The Algebraic Theory and its Topological Background*. Mathematical Surveys and Monographs 217. Providence, RI : American Mathematical Society, 2017. 532 p. ISBN : 978-1-4704-3481-6.

Bibliographie

- [Fre17b] Benoit FRESSE. *Homotopy of Operads and Grothendieck–Teichmüller Groups*. T. 2 : *The Applications of (Rational) Homotopy Theory Methods*. Mathematical Surveys and Monographs 217. Providence, RI : American Mathematical Society, 2017. 704 p. ISBN : 978-1-4704-3482-3.
- [FW20] Benoit FRESSE et Thomas WILLWACHER. «The intrinsic formality of E_n -operads». In : *J. Eur. Math. Soc.* 22.7 (2020), p. 2047-2133. DOI : [10.4171/JEMS/961](https://doi.org/10.4171/JEMS/961). arXiv : [1503.08699](https://arxiv.org/abs/1503.08699).
- [FM94] William FULTON et Robert MACPHERSON. «A compactification of configuration spaces». In : *Ann. of Math.* 2^e sér. 139.1 (1994), p. 183-225. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/2946631](https://doi.org/10.2307/2946631).
- [Gin15] Grégory GINOT. «Notes on Factorization Algebras, Factorization Homology and Applications». In : *Mathematical Aspects of Quantum Field Theories*. Sous la dir. de Damien CALAQUE et Thomas STROBL. Mathematical Physics Studies. Cham : Springer, 2015, p. 429-552. ISBN : 978-3-319-09948-4. DOI : [10.1007/978-3-319-09949-1_13](https://doi.org/10.1007/978-3-319-09949-1_13). arXiv : [1307.5213](https://arxiv.org/abs/1307.5213).
- [GW99] Thomas G. GOODWILLIE et Michael WEISS. «Embeddings from the point of view of immersion theory : Part II». In : *Geom. Topol.* 3 (1999), p. 103-118. DOI : [10.2140/gt.1999.3.103](https://doi.org/10.2140/gt.1999.3.103). arXiv : [math/9905203](https://arxiv.org/abs/math/9905203).
- [GNPR05] F. GUILLÉN SANTOS, V. NAVARRO, P. PASCUAL et A. ROIG. «Moduli spaces and formal operads». In : *Duke Math. J.* 129.2 (2005), p. 291-335. ISSN : 0012-7094. DOI : [10.1215/S0012-7094-05-12924-6](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-05-12924-6).
- [HLTV11] Robert HARDT, Pascal LAMBRECHTS, Victor TURCHIN et Ismar VOLIĆ. «Real homotopy theory of semi-algebraic sets». In : *Algebr. Geom. Topol.* 11.5 (2011), p. 2477-2545. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2011.11.2477](https://doi.org/10.2140/agt.2011.11.2477). arXiv : [0806.0476](https://arxiv.org/abs/0806.0476).
- [Hur91] Adolf HURWITZ. «Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten». In : *Math. Ann.* 39.1 (1891), p. 1-60. ISSN : 0025-5831. DOI : [10.1007/BF01199469](https://doi.org/10.1007/BF01199469).
- [Idr18] Najib IDRISSE. *Curved Koszul Duality for Algebras over Unital Operads*. 2018. arXiv : [1805.01853](https://arxiv.org/abs/1805.01853). Prépubl.
- [Idr19] Najib IDRISSE. «The Lambrechts–Stanley Model of Configuration Spaces». In : *Invent. Math.* 216.1 (2019), p. 1-68. ISSN : 1432-1297. DOI : [10.1007/s00222-018-0842-9](https://doi.org/10.1007/s00222-018-0842-9). arXiv : [1608.08054](https://arxiv.org/abs/1608.08054).
- [KL08] Bruce KLEINER et John LOTT. «Notes on Perelman's papers». In : *Geom. Topol.* 12.5 (2008), p. 2587-2855. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2008.12.2587](https://doi.org/10.2140/gt.2008.12.2587). arXiv : [math/0605667](https://arxiv.org/abs/math/0605667).
- [Knu17] Ben KNUDSEN. «Betti numbers and stability for configuration spaces via factorization homology». In : *Algebr. Geom. Topol.* 17.5 (2017), p. 3137-3187. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2017.17.3137](https://doi.org/10.2140/agt.2017.17.3137). arXiv : [1405.6696](https://arxiv.org/abs/1405.6696).
- [Knu18] Ben KNUDSEN. «Higher enveloping algebras». In : *Geom. Topol.* 22.7 (2018), p. 4013-4066. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2018.22.4013](https://doi.org/10.2140/gt.2018.22.4013). arXiv : [1605.01391](https://arxiv.org/abs/1605.01391).
- [Kon93] Maxim KONTSEVICH. «Formal (non)commutative symplectic geometry». In : *The Gel'fand Mathematical Seminars. 1990–1992*. Sous la dir. d'Israel M. GELFAND, Lawrence CORWIN et James LEPOWSKY. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1993, p. 173-187. DOI : [10.1007/978-1-4612-0345-2_11](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0345-2_11).

- [Kon99] Maxim KONTSEVICH. « Operads and motives in deformation quantization ». In : *Lett. Math. Phys.* 48.1 (1999), p. 35-72. ISSN : 0377-9017. DOI : [10.1023/A:1007555725247](https://doi.org/10.1023/A:1007555725247). arXiv : [math/9904055](https://arxiv.org/abs/math/9904055).
- [Kon03] Maxim KONTSEVICH. « Deformation quantization of Poisson manifolds ». In : *Lett. Math. Phys.* 66.3 (2003), p. 157-216. ISSN : 0377-9017. DOI : [10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf](https://doi.org/10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf). arXiv : [q-alg/9709040](https://arxiv.org/abs/q-alg/9709040).
- [KS00] Maxim KONTSEVICH et Yan SOIBELMAN. « Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture ». In : *Quantization, deformation, and symmetries*. Conférence Moshé Flato (Dijon, 5-8 sept. 1999). Sous la dir. de Giuseppe Dito et Daniel STERNHEIMER. T. 1. Math. Phys. Stud. 21. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 255-307. arXiv : [math/0001151](https://arxiv.org/abs/math/0001151).
- [Kri94] Igor KRIZ. « On the rational homotopy type of configuration spaces ». In : *Ann. of Math.* 2^e sér. 139.2 (1994), p. 227-237. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/2946581](https://doi.org/10.2307/2946581).
- [LS04] Pascal LAMBRECHTS et Don STANLEY. « The rational homotopy type of configuration spaces of two points ». In : *Ann. Inst. Fourier* 54.4 (2004), p. 1029-1052. ISSN : 0373-0956. DOI : [10.5802/aif.2042](https://doi.org/10.5802/aif.2042).
- [LS08a] Pascal LAMBRECHTS et Don STANLEY. « A remarkable DGmodule model for configuration spaces ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 8.2 (2008), p. 1191-1222. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2008.8.1191](https://doi.org/10.2140/agt.2008.8.1191). arXiv : [0707.2350](https://arxiv.org/abs/0707.2350).
- [LS08b] Pascal LAMBRECHTS et Don STANLEY. « Poincaré duality and commutative differential graded algebras ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* 4^e sér. 41.4 (2008), p. 495-509. ISSN : 0012-9593. DOI : [10.24033/asens.2074](https://doi.org/10.24033/asens.2074). arXiv : [math/0701309](https://arxiv.org/abs/math/0701309).
- [LTV10] Pascal LAMBRECHTS, Victor TURCHIN et Ismar VOLIĆ. « The rational homology of spaces of long knots in codimension > 2 ». In : *Geom. Topol.* 14.4 (2010), p. 2151-2187. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2010.14.2151](https://doi.org/10.2140/gt.2010.14.2151). arXiv : [math/0703649](https://arxiv.org/abs/math/0703649).
- [LV14] Pascal LAMBRECHTS et Ismar VOLIĆ. « Formality of the little N -disks operad ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 230.1079 (2014), p. viii+116. ISSN : 0065-9266. DOI : [10.1090/memo/1079](https://doi.org/10.1090/memo/1079). arXiv : [0808.0457](https://arxiv.org/abs/0808.0457).
- [Lev95] Norman LEVITT. « Spaces of arcs and configuration spaces of manifolds ». In : *Topology* 34.1 (1995), p. 217-230. ISSN : 0040-9383. DOI : [10.1016/0040-9383\(94\)E0012-9](https://doi.org/10.1016/0040-9383(94)E0012-9).
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. *Algebraic operads*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 346. Berlin-Heidelberg : Springer, 2012. 634 p. ISBN : 978-3-642-30361-6. DOI : [10.1007/978-3-642-30362-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30362-3).
- [LS05] Riccardo LONGONI et Paolo SALVATORE. « Configuration spaces are not homotopy invariant ». In : *Topology* 44.2 (2005), p. 375-380. ISSN : 0040-9383. DOI : [10.1016/j.top.2004.11.002](https://doi.org/10.1016/j.top.2004.11.002). arXiv : [math/0401075](https://arxiv.org/abs/math/0401075).
- [Lur09a] Jacob LURIE. *Derived Algebraic Geometry VI. $\mathbb{E}[k]$ -Algebras*. 2009. arXiv : [0911.0018](https://arxiv.org/abs/0911.0018).
- [Lur09b] Jacob LURIE. « On the classification of topological field theories ». In : *Current developments in mathematics 2008*. Sous la dir. de David JERISON, Barry MAZUR, Tomasz MROWKA, Wilfried SCHMID, Richard P. STANLEY et Shing-Tung YAU. Somerville, MA : Int. Press, 2009, p. 129-280. DOI : [10.4310/CDM.2008.v2008.n1.a3](https://doi.org/10.4310/CDM.2008.v2008.n1.a3). arXiv : [0905.0465](https://arxiv.org/abs/0905.0465).
- [Lur17] Jacob LURIE. « Higher Algebra ». 18 sept. 2017. URL : <http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf>.

- [Mag74] Wilhelm MAGNUS. « Braid Groups. A Survey ». In : *Proceedings of the Second International Conference on the Theory of Groups* (Australian National University, 13-24 août 1973). Sous la dir. de M. F. NEWMAN. Lecture Notes in Math. 372. Berlin-Heidelberg : Springer, 1974, p. 463-487. DOI : [10.1007/978-3-662-21571-5_49](https://doi.org/10.1007/978-3-662-21571-5_49).
- [May72] J. Peter MAY. *The Geometry of Iterated Loop Spaces*. Lectures Notes in Mathematics 271. Berlin : Springer, 1972. 175 p. ISBN : 978-3-540-05904-2. DOI : [10.1007/BFb0067491](https://doi.org/10.1007/BFb0067491).
- [MS02] James E. McCLURE et Jeffrey H. SMITH. « A solution of Deligne’s Hochschild cohomology conjecture ». In : *Recent progress in homotopy theory* (Baltimore, MD, 17-27 mar. 2000). Sous la dir. de Donald M. DAVIS, Jack MORAVA, Goro NISHIDA, W. Stephen WILSON et Nobuaki YAGITA. Contemp. Math. 293. Providence, RI : American Mathematical Society, 2002, p. 153-193. DOI : [10.1090/conm/293/04948](https://doi.org/10.1090/conm/293/04948).
- [MV09] Sergei MERKULOV et Bruno VALLETTE. « Deformation theory of representations of prop(erad)s. I ». In : *J. Reine Angew. Math.* 634 (2009), p. 51-106. ISSN : 0075-4102. DOI : [10.1515/CRELLE.2009.069](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2009.069).
- [MT07] John MORGAN et Gang TIAN. *Ricci flow and the Poincaré conjecture*. Clay Mathematics Monographs 3. Providence, RI et Cambridge, MA : Amer. Math. Soc. et Clay Mathematics Institute, 2007. 521 p. ISBN : 978-0-8218-4328-4. arXiv : [math/0607607](https://arxiv.org/abs/math/0607607).
- [Mor01] Shigeyuki MORITA. *Geometry of characteristic classes*. Translations of Mathematical Monographs 199. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2001. 185 p. ISBN : 0-8218-2139-3. Trad. de japonais. Iwanami Series in Modern Mathematics. 1999.
- [MW12] Scott MORRISON et Kevin WALKER. « Blob homology ». In : *Geom. Topol.* 16.3 (2012), p. 1481-1607. ISSN : 1465-3060. DOI : [10.2140/gt.2012.16.1481](https://doi.org/10.2140/gt.2012.16.1481).
- [Nas52] John NASH. « Real algebraic manifolds ». In : *Ann. of Math.* 2^e sér. 56 (1952), p. 405-421. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/1969649](https://doi.org/10.2307/1969649).
- [Per02] Grisha PERELMAN. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. 2002. arXiv : [math/0211159](https://arxiv.org/abs/math/0211159).
- [Per03] Grisha PERELMAN. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. 2003. arXiv : [math/0303109](https://arxiv.org/abs/math/0303109).
- [Pet14] Dan PETERSEN. « Minimal models, GT-action and formality of the little disk operad ». In : *Selecta Math.* Nouv. sér. 20.3 (2014), p. 817-822. ISSN : 1022-1824. DOI : [10.1007/s00029-013-0135-5](https://doi.org/10.1007/s00029-013-0135-5). arXiv : [1303.1448](https://arxiv.org/abs/1303.1448).
- [Qui69] Daniel QUILLEN. « Rational homotopy theory ». In : *Ann. of Math.* 2^e sér. 90 (1969), p. 205-295. ISSN : 0003-486X. JSTOR : [1970725](https://www.jstor.org/stable/1970725).
- [RS18] George RAPTIS et Paolo SALVATORE. « A remark on configuration spaces of two points ». In : *Proc. Edinb. Math. Soc.* 2^e sér. 61.2 (2018), p. 599-605. ISSN : 0013-0915. DOI : [10.1017/s0013091517000384](https://doi.org/10.1017/s0013091517000384). arXiv : [1604.01558](https://arxiv.org/abs/1604.01558).
- [Sal01] Paolo SALVATORE. « Configuration spaces with summable labels ». In : *Cohomological methods in homotopy theory*. Barcelona conference on algebraic topology (Bellaterra, Spain, 5-10 juin 1998). Sous la dir. de Jaume AGUADÉ, Carles BROTO et Carles CASACUBERTA. Progr. Math. 196. Basel : Birkhäuser, 2001, p. 375-395. ISBN : 978-3-0348-9513-2. DOI : [10.1007/978-3-0348-8312-2_23](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8312-2_23). arXiv : [math/9907073](https://arxiv.org/abs/math/9907073).
- [Sal19] Paolo SALVATORE. *The Fulton MacPherson operad and the W-construction*. 2019. arXiv : [1906.07696](https://arxiv.org/abs/1906.07696). Prépubl.

- [Seg73] Graeme SEGAL. « Configuration-spaces and iterated loop-spaces ». In : *Invent. Math.* 21 (1973), p. 213-221. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01390197](https://doi.org/10.1007/BF01390197).
- [Seg04] Graeme SEGAL. « The definition of conformal field theory ». In : *Topology, geometry and quantum field theory*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 308. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2004, p. 421-577.
- [Ser53] Jean-Pierre SERRE. « Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens ». In : *Ann. of Math.* 2^e sér. 58 (1953), p. 258-294. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/1969789](https://doi.org/10.2307/1969789). JSTOR : [1969789](https://www.jstor.org/stable/1969789).
- [Sin04] Dev P. SINHA. « Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces ». In : *Selecta Math.* Nouv. sér. 10.3 (2004), p. 391-428. ISSN : 1022-1824. DOI : [10.1007/s00029-004-0381-7](https://doi.org/10.1007/s00029-004-0381-7). arXiv : [math/0306385](https://arxiv.org/abs/math/0306385).
- [Sin06] Dev P. SINHA. « Operads and knot spaces ». In : *J. Amer. Math. Soc.* 19.2 (2006), p. 461-486. ISSN : 0894-0347. DOI : [10.1090/S0894-0347-05-00510-2](https://doi.org/10.1090/S0894-0347-05-00510-2).
- [Sin13] Dev P. SINHA. « The (non-equivariant) homology of the little disks operad ». In : *Proceedings of the school and conference. Operads 2009* (Luminy, 20-30 avr. 2009). Sous la dir. de Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE. Sémin. Congr. 26. Paris : Soc. Math. France, 2013, p. 253-279. ISBN : 978-2-85629-363-8. arXiv : [math/0610236](https://arxiv.org/abs/math/0610236).
- [Sna74] Victor P. SNAITH. « A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$ ». In : *J. London Math. Soc.* 2^e sér. 7 (1974), p. 577-583. ISSN : 0024-6107. DOI : [10.1112/jlms/s2-7.4.577](https://doi.org/10.1112/jlms/s2-7.4.577).
- [Sul77] Dennis SULLIVAN. « Infinitesimal computations in topology ». In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 47 (1977), p. 269-331. ISSN : 0073-8301. URL : http://www.numdam.org/item/PMIHES_1977__47__269_0.
- [Tam98] Dmitry E. TAMARKIN. *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*. 1998. arXiv : [math/9803025](https://arxiv.org/abs/math/9803025).
- [Tam03] Dmitry E. TAMARKIN. « Formality of chain operad of little discs ». In : *Lett. Math. Phys.* 66.1-2 (2003), p. 65-72. ISSN : 0377-9017. DOI : [10.1023/B:MATH.0000017651.12703.a1](https://doi.org/10.1023/B:MATH.0000017651.12703.a1).
- [Tog73] Alberto TOGNOLI. « Su una congettura di Nash ». In : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.* 3^e sér. 27 (1973), p. 167-185. URL : http://www.numdam.org/item/ASNSP_1973_3_27_1_167_0.
- [Tot96] Burt TOTARO. « Configuration spaces of algebraic varieties ». In : *Topology* 35.4 (1996), p. 1057-1067. ISSN : 0040-9383. DOI : [10.1016/0040-9383\(95\)00058-5](https://doi.org/10.1016/0040-9383(95)00058-5).
- [Tur10] Victor TURCHIN. « Hodge-type decomposition in the homology of long knots ». In : *J. Topol.* 3.3 (2010), p. 487-534. ISSN : 1753-8416. DOI : [10.1112/jtopol/jtq015](https://doi.org/10.1112/jtopol/jtq015).
- [Tur13] Victor TURCHIN. « Context-free manifold calculus and the Fulton–MacPherson operad ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 13.3 (2013), p. 1243-1271. ISSN : 1472-2747. DOI : [10.2140/agt.2013.13.1243](https://doi.org/10.2140/agt.2013.13.1243). arXiv : [1204.0501](https://arxiv.org/abs/1204.0501).
- [Whi49] J. H. C. WHITEHEAD. « Combinatorial homotopy. I ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 55 (1949), p. 213-245. ISSN : 0002-9904. DOI : [10.1090/S0002-9904-1949-09175-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1949-09175-9).
- [Wil14] Thomas WILLWACHER. « M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra ». In : *Invent. Math.* 200.3 (2014), p. 671-760. ISSN : 1432-1297. DOI : [10.1007/s00222-014-0528-x](https://doi.org/10.1007/s00222-014-0528-x). arXiv : [1009.1654](https://arxiv.org/abs/1009.1654).
- [Wil16] Thomas WILLWACHER. « The Homotopy Braces Formality Morphism ». In : *Duke Math. J.* 165.10 (2016), p. 1815-1964. DOI : [10.1215/00127094-3450644](https://doi.org/10.1215/00127094-3450644). arXiv : [1109.3520](https://arxiv.org/abs/1109.3520).