Introduction à la théorie de l'homotopie

Notes de cours

Najib Idrissi

Université de Paris & Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche

Dernière mise à jour : 9 septembre 2019

Table des matières

Préface

Ce document donne un résumé rapide du contenu abordé dans le cours *Introduction à la théorie de l'homotopie* donné à l'Université de Paris en 2019–2020 dans le cadre du M2 Mathématiques Fondamentales. Elles ne sont pas complètes et le contenu peut encore changer ou être réorganisé. Pour plus d'informations, se référer à `https ://idrissi.eu/fr/cours/1920-homotopie/`.

Contact : najib.idrissi-kaitouni@imj-prg.fr

1 Motivation

1.1 Espaces topologiques

On note Top la catégorie des espaces topologiques.

Définition 1.1.1. Deux fonctions $f : X \to Y$ sont *homotopes*, noté $f \simeq g$, si $\exists H : X \times [0,1] \to Y$ t.q. $H(-,0) = f$ and $H(-,1) = g$. On note $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'homotopies de fonctions $X \to Y$.

Définition 1.1.2. Deux espaces sont *homotopiquement équivalents* (aussi noté $X \simeq Y$) si $\exists f : X \leftrightarrows Y : g$ t.q. $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.

Cela définit une « relation d'équivalence » sur les espaces topologiques. En théorie de l'homotopie, on étudie les espaces « à homotopie près », c'est-à-dire qu'on considère que deux espaces sont « les mêmes » s'ils sont homotopiquement équivalents.

La Question : étant donnés X, Y, comment tester si $X \simeq Y$? En général, on utilise des *invariants homotopiques*.

Définition 1.1.3. Un *espace pointé* est une paire (X, x_0) où X est un espace et $x_0 \in X$. Une *application pointée* est une application qui préserve le point base. On note Top_* la catégorie des espaces topologiques pointés.

Définition 1.1.4. une *homotopie pointée* est une homotopie qui reste constante sur le point base. On note $[(X,x_0),(Y,y_0)]$ l'ensemble des classes d'homotopies pointées de fonctions pointées $(X,x_0) \to (Y,y_0)$.

Définition 1.1.5. Pour un espace X, on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X. Soit (X,x_0) un espace pointé. On définit $\pi_n(X,x_0) = [(S^n,*),(X,x_0)]$.

On définit ainsi des foncteurs $\pi_0 : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ et $\pi_n : \mathsf{Top}_* \to \mathsf{Set}$. De plus, π_1 est un groupe, et π_n est un groupe abélien pour $n \geq 2$.

Proposition 1.1.6. *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie. Alors $\pi_0(f)$ est une bijection, et pour tout $x \in X$, $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

Définition 1.1.7. Une *équivalence d'homotopie faible* est une application qui vérifie la conclusion de la proposition précédente. On note $\xrightarrow{\sim}$.

Exemple 1.1.8. Une équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible, mais la réciproque est fausse : $\mathbb{N} \to \{0\} \cup \{1/n \mid n > 0\}$ est une équivalence d'homotopie faible mais n'est pas une équivalence d'homotopie.

Définition 1.1.9. Deux espaces X, Y sont dits faiblement équivalents s'il existe un zigzag :

$$X \xleftarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} X_n \xrightarrow{\sim} Y.$$

Proposition 1.1.10. *Deux espaces faiblement équivalents ont les mêmes groupes d'homotopie.*

La réciproque est fausse : par exemple $\mathbf{RP}^2$ et $\mathbf{RP}^\infty$ ont les mêmes groupes d'homotopie, mais ils ne sont pas faiblement équivalents (car sinon ils auraient la même homologie).

Rappel : un CW-complexe X est un espace topologique obtenu de la façon suivante : on démarre d'un espace discret X_0, puis on obtient X_1 à partir de X_0 en recollant des cellules de dimension 1, etc.

Théorème 1.1.11 (Whitehead)**.** *Si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes, alors c'est une équivalence d'homotopie.*

Théorème 1.1.12. *Soit X un espace quelconque. Alors il existe un CW-complexe Z et une équivalence d'homotopie faible $Z \xrightarrow{\sim} X$.*

On a donc deux cadres différents pour la théorie de l'homotopie :

- la catégorie homotopique « forte », où l'on inverse formellement les équivalences d'homotopie ;
- la catégorie homotopique « faible », où l'on inverse formellement les équivalences d'homotopie faible.

Dans le premier cas, on est plus proche de ce que l'on a envie d'étudier, mais c'est plus difficile à tester algébriquement ; dans le deuxième cas, c'est plus faible, mais c'est plus simple à tester algébriquement. Le théorème de Whitehead nous dit que si l'on se restreint aux CW-complexes, les deux notions sont les mêmes.

Dans ce cours, l'objectif est de généraliser ce cadre à une catégorie quelconque :

- on voudra définir ce que cela signifie pour deux objets d'être « les mêmes à homotopie près » ;
- qu'est-ce qu'une homotopie, et une équivalence d'homotopie forte ;
- quels sont les objets « gentils » (modèles) sur lesquels on peut se contenter de ne regarder les choses qu'à homotopie faible près.

Autre problème que nous allons résoudre : les limites et colimites dans Top ne préservent pas les équivalences faibles. Par exemple :

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[d, "\sim"] & S^0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & * \arrow[d, "\sim"] \\
{[0,1]} & S^0 \arrow[l] \arrow[r] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

La colimite du diagramme en haut est $*$, celle de celui du bas est S^1. On verra que celui du dessous est meilleur : les applications qui le composent sont des inclusions de sous-espaces.

1.2 Complexes de chaînes

Voici un autre exemple de cadre où l'on peut faire de l'algèbre homotopique. Soit R un anneau commutatif.

Définition 1.2.1. Un complexe de chaînes est un diagramme de R-modules :

$$\dots \xrightarrow{d} C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \xrightarrow{d} \dots$$

vérifiant $d \circ d = 0$. Un morphisme est un morphisme de diagrammes. On note $\mathsf{Ch}(R)$ la catégorie des complexes de chaînes. On note aussi $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ la sous-catégorie des complexes de chaînes C vérifiant $C_i = 0$ pour $i < 0$.

Définition 1.2.2. Deux morphismes $f, g : C \to D$ sont *homotopes* (noté $f \simeq g$) si il existe une suite d'applications $h : C_n \to D_{n+1}$ t.q. $f - g = hd + dh$.

Définition 1.2.3. Une *équivalence d'homotopie* est une paire d'applications $f : C \leftrightarrows D : g$ t.q. $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$.

Proposition 1.2.4. *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.*

Définition 1.2.5. Un *quasi-isomorphisme* est un morphisme de complexes de chaînes qui induit un isomorphisme en homologie.

Exemple 1.2.6. Un quasi-isomorphisme n'est pas forcément une équivalence d'homotopie ! Considérer par exemple :

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On peut donc étudier les complexes de chaînes à équivalence homotopique près, ou bien à quasi-isomorphismes près. Qui sont les complexes gentils pour lesquels c'est la même chose ?

Définition 1.2.7. On dit qu'un R-module P est projectif si pour toute surjection $p : A \to B$ et pour toute application $f : P \to B$, il existe un relèvement $g : P \to A$ t.q. $p \circ g = f$.

Exemple 1.2.8. Pour $R = \mathbb{Z}$, les R-modules projectifs (de type fini) sont les modules libres $\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.2.9. On dit qu'un R-module I est injectif si pour toute injection $i : A \to B$ et pour toute application $f : A \to I$, il existe une extension $g : B \to I$ t.q. $g \circ i = f$.

Exemple 1.2.10. Pour $R = \mathbb{Z}$, les R-modules injectifs sont les groupes abéliens divisibles.

Proposition 1.2.11. *Soit $f : C \to D$ un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes.*
- *Si C est projectif en tout degré, alors f est un une équivalence d'homotopie.*
- *Si D est injectif en tout degré, alors f est une équivalence d'homotopie.*

On aura donc trois cadres possibles pour la théorie de l'homotopie dans les complexes de chaînes :

- Le cadre « fort », où l'on travaille à équivalence d'homotopie près et tous les objets sont « gentils ».

- Le cadre « projectif », où l'on travaille à quasi-isomorphisme près, les modules « gentils à la source » sont les complexes projectifs et tous les modules sont « gentils au but ». Vous avez vu en cours d'algèbre homologique que tous les R-modules M ont une résolution projective $P_* \to M$, qui jouent le rôle d'un CW-complexe dans ce cadre.

- Le cadre « injectif », où l'on travaille à quasi-isomorphisme près, tous les modules sont « gentils à la source » et les modules « gentils au but » sont les modules injectifs. Vous avez aussi vu que tout module M a une résolution injective $M \to I_*$, qui jouent un rôle dual aux CW-complexes dans ce cadre.

On va également voir comment résoudre les problèmes apparaissent quand certains foncteurs ne préservent pas les quasi-isomorphismes. Vous avez vu que c'était le cas du foncteur $\otimes$, et la version correcte d'un point de vue homotopique était le foncteur Tor (qui fait intervenir une résolution projective, c.-à-d. qu'on se place dans le premier cadre), ainsi que du foncteur Hom dont la version correcte est Ext (qui fait soit intervenir une résolution projective de la source, auquel cas on se place dans le premier cadre, soit une résolution injective du but, auquel cas on se place dans le deuxième cadre).

2 Axiomatique

On a vu précédemment que dans les complexes de chaînes, ce qui importait d'un point de vue homotopique était de savoir si les applications étaient injectives/surjectives et de savoir si on pouvait « relever » une application le long d'une injection/surjection. Nous allons rapidement rappeler l'analogue des injections et surjections dans la catégorie des espaces topologiques, leurs propriétés abstraites, et s'en servir comme base pour définir la notion de catégorie de modèles.

2.1 Fibrations et cofibrations

Définition 2.1.1. Une *fibration* (*de Hurewicz*) est une application continue $p : E \to B$ telle que pour tout espace X et toutes les applications $\tilde{H}_0$ et H dans le diagramme suivant, on peut trouver un relèvement $\tilde{H}$:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook, "\sim"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Concrètement, cela signifie que si l'on a une homotopie $H : X \times I \to B$ entre $f, g : X \to B$ et une application $\tilde{f} : X \to E$ qui relève f (c.à.d. que $p \circ \tilde{f} = f$) alors on peut trouver une homotopie $\tilde{H}$ qui relève H (et donc $\tilde{g} = \tilde{H}(-,1)$ qui relève g).

Définition 2.1.2. Une *fibration de Serre* est une application $p : E \to B$ qui vérifie la propriété de relèvement précédente pour $X = [0,1]^n$ (pour tout $n \geq 0$).

Une fibration (de Hurewicz) est donc une fibration de Serre. La réciproque est fausse.[1]

Exemple 2.1.3. Un revêtement est une fibration de Serre. Une projection $p : F \times B \to B$ est une fibration. Plus généralement, un espace fibré est une fibration de Serre ; si la base est paracompacte[2], alors c'est une fibration de Hurewicz.

Proposition 2.1.4. *Le tiré en arrière d'une fibration (de Serre ou de Hurewicz) est une fibration (de Serre ou de Hurewicz).*

1. P.ex. le « revêtement universel » – construit de la manière habituelle – de la boucle d'oreille hawaïenne.
2. Séparé + tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini.

Exemple 2.1.5 (Espace des chemins au-dessus de f). Soit $f : X \to Y$ une application continu. On définit :

$$P_f = Y^{[0,1]} \times_Y X = \{(\gamma, x) \in Y^{[0,1]} \times X \mid \gamma(0) = f(x)\}$$

Alors $ev_1 : P_f \to Y$, $ev_1(\gamma, x) = \gamma(1)$ est une fibration de Hurewicz. On note que f se factorise comme $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} P_f \xrightarrow{ev_1} Y$: cela permet de « remplacer » n'importe quelle application par une équivalence suivie d'une fibration.

Proposition 2.1.6. *Soit $p : E \to B$ une fibration. Si B est connexe par arcs, alors tous les espaces $E_b = p^{-1}(b)$ sont homotopiquement équivalents.*

On note en général F la fibre de p. La proposition suivante dit grosso modo que les fibrations sont les « suites exactes courtes » dans les espaces topologiques :

Proposition 2.1.7. *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre et supposons que B est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre au-dessus de b_0, et $f_0 \in F$ un point. Alors on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \to \pi_n(F, f_0) \to \pi_n(E, f_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, f_0) \to \ldots$$

Remarque 2.1.8. Cela généralise la suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes de chaînes. En effet, pour une application linéaire surjective $p : X \to Y$, les « fibres » $p^{-1}(Y)$ sont toutes isomorphes au noyau.

Les fibrations sont intéressantes quand on regarde ce qui se passe « à droite » dans le foncteur $\mathrm{Hom}(-,-)$. Regardons maintenant le cas dual, les cofibrations, qui sont intéressantes « à gauche ».

Définition 2.1.9. Une *cofibration* (*de Hurewicz*) est une application continue $i : A \to X$ telle que pour tout espace Y et toutes les applications f, h dans le diagramme suivant, le relèvement H existe :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^{[0,1]} \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

Concrètement, cela signifie que si l'on a une application $f : X \to Y$ est une homotopie entre la « restriction » $f \circ i = f_{|A}$ et une autre application $A \to Y$, alors on peut étendre cette homotopie à X.

Proposition 2.1.10. *Soit $i : A \to X$ une homotopie. Alors c'est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée si X est séparé.*

Proposition 2.1.11. *Une inclusion $i : A \subset X$ est une cofibration si et seulement si $X \times [0,1]$ se rétracte sur $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$.*

Exemple 2.1.12. L'inclusion d'un sous-complexe cellulaire est une cofibration. (En fait toutes les cofibrations sont des rétracts de telles inclusions.)

Exemple 2.1.13. Soit $f : X \to Y$ une application. On définit son cylindre :

$$\mathrm{Cyl}_f = (X \times [0,1] \sqcup Y)/(x,0) \sim f(x).$$

Alors $X \hookrightarrow \mathrm{Cyl}_f$, $x \mapsto (x,1)$ est une cofibration. De plus f se factorise en $X \hookrightarrow \mathrm{Cyl}_f \xrightarrow{\sim} Y$. Cela permet de « remplacer » toute application par une cofibration à équivalence près.

Remarque 2.1.14. Soit $\gamma : X \sqcup X \to X$ l'application évidente. Soit $f, g : X \to Y$ deux applications. Une homotopie entre f et g est exactement la donnée d'une application $H : \mathrm{Cyl}_\gamma \to Y$ telle que la composée $X \sqcup X \to \mathrm{Cyl}_\gamma \to Y$ est donnée par (f,g). Cet énoncé se dualise (cf. plus tard).

Proposition 2.1.15 (Rappel)**.** *Soit (X,A) une paire d'espaces topologiques, alors on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X,A) \to \pi_{n-1}(A) \to \ldots$$

Proposition 2.1.16. *Si $i : A \to X$ est une cofibration, que A est r-connexe et X est s-connexe, alors $\pi_n(X,A) \cong \pi_n(X/A)$ pour $n \leq r+s$ et $\pi_{r+s+1}(X,A) \to \pi_{r+s+1}(X/A)$ est surjectivex.*

2.2 Définition

Remarque 2.2.1. Pour nous, dans une catégorie, les morphismes entre deux objets fixés forment un *ensemble*.

Définition 2.2.2. Un morphisme $f : A \to B$ est un *rétract* de $g : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & Y \arrow[r, "r'"] & B
\end{tikzcd}$$

Définition 2.2.3. Une *catégorie de modèles*[3] est une catégorie C munie de trois classes de morphismes :

Classe	Nom des éléments	Notation
$\mathcal{W}$	Équivalences faibles	$\xrightarrow{\sim}$
$\mathcal{C}$	Cofibrations	$\hookrightarrow$
$\mathcal{F}$	Fibrations	$\twoheadrightarrow$

et qui vérifient les axiomes suivants :

3. Quillen les appellait les catégories de modèles *fermées*.

(MC1) C est complète et cocomplète ;

(MC2) Soit f et g deux morphismes composables, si deux morphismes parmi f, g et $g \circ f$ sont dans $\mathcal{W}$, alors le troisième aussi ;

(MC3) Si f est un rétract de g et que $g \in \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$) alors $f \in \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$) ;

(MC4) Considérons le diagramme commutatif formé par les flèches pleines :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & D \end{tikzcd}$$

Alors :

(i) Si $i \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ alors la flèche en pointillés existe ;

(ii) Si $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ et $p \in \mathcal{F}$ alors la flèche en pointillés existe ;

(MC5) Tout morphisme $f : X \to Y$ admet deux factorisations, fonctorielles en f :

$$X \overset{\sim}{\hookrightarrow} P_f \twoheadrightarrow Y \qquad X \hookrightarrow C_f \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$$

Définition 2.2.4. Les éléments de $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ sont appelés les cofibrations acycliques, ceux de $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ les fibrations acycliques.[4]

Définition 2.2.5. Dans le diagramme de (MC4), si la flèche en pointillés existe toujours, on dit que i a la propriété de relèvement à gauche (LLP) par rapport à p et que p a la propriété de relèvement à droite (RLP) par rapport à i. On note parfois $i \perp p$.

Remarque 2.2.6. Grâce à (MC1), la catégorie C admet un objet initial $\emptyset$ (la colimite vide) et un objet final $*$ (la limite vide).

Définition 2.2.7. Un objet $X \in$ C est dit cofibrant si $\emptyset \to X$ est une cofibration, et fibrant si $X \to *$ est une fibration.

Remarque 2.2.8. Tout objet admet des remplacements fibrants et cofibrants fonctoriels par (MC5) :

$$\emptyset \hookrightarrow Q(X) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X \qquad Y \overset{\sim}{\hookrightarrow} R(Y) \twoheadrightarrow *$$

Exemple 2.2.9. Soit C une catégorie quelconque. Alors pour $\mathcal{W} = \{\text{isomorphismes}\}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{F} =$ C on obtient une catégorie de modèles. On peut également choisir $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\text{isos}, \mathrm{C}, \text{isos})$ ou le dual.

4. On trouve parfois « cofibrations triviales » et « fibrations triviales » mais il vaut mieux éviter car ça fait penser aux fibrés triviaux, c.à.d. les produits.

Exemple 2.2.10. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ une catégorie de modèles.

- Le produit de C avec une autre catégorie de modèles admet une structure de catégorie de modèles évidente.
- $(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ est une catégorie de modèles.

Proposition 2.2.11. *Soit* $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *une catégorie de modèles.*

- *i est une cofibration $\iff$ elle satisfait la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques.*
- *i est une cofibration acyclique $\iff$ elle satisfait la LLP par rapport à toutes les fibrations.*
- *p est une fibration $\iff$ elle satisfait la RLP par rapport à toutes les cofibrations acycliques.*
- *i est une fibration acyclique $\iff$ elle satisfait la RLP par rapport à toutes les cofibrations.*
- *f est une équivalence faible $\iff$ elle se factorise en $p \circ i$ où p est une fibration acyclique et i est une fibration acyclique.*

Corollaire 2.2.12.

- *La donnée de deux des classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ détermine la troisième.*
- *Les classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sont stables par composition.*
- *Les classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ sont stables par poussés en avant, les classes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ sont stables par tirés en arrière.*
- *Les isomorphismes appartiennent aux trois classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.*

Démonstration de la Proposition 2.2.11. Les quatre premiers points se démontrent de façon presque identique. Démontrons le premier. La partie $\implies$ découle de (MC4). Maintenant soit $i : A \to B$ une application qui a la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques. Par (MC5), on peut factoriser i en $A \hookrightarrow X \xrightarrow{\sim} B$. Grâce à la LLP de i, on peut trouver h qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\
B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

Alors on voit que i est un rétract de $A \hookrightarrow X$ et on conclut par (MC3) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] \arrow[rr, bend left] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, "i"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"] & X \arrow[r, two heads, "\sim"] & B
\end{tikzcd}$$

Pour le cinquième point, on utilise (MC2) dans les deux cas. □

Démonstration du Corollaire 2.2.12.

- Clair grâce à la proposition.
- Le fait que $\mathcal{W}$ est stable par composition découle de (MC2). Montrons par exemple que $\mathcal{C}$ est stable par composition. Soit $A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{j}{\hookrightarrow} C$ deux cofibrations. Montrons que $j \circ i$ a la LLP par rapport aux fibrations acycliques. On trouve des relèvements dans le diagramme suivant en deux étapes (d'abord l puis l') :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[dd, two heads, "\sim"] \\
B \arrow[ur, dashed, "l"] \arrow[d, hook, "j"] & \\
C \arrow[r] \arrow[uur, dashed, "l'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

- Pour la stabilité par pushouts et pullbacks, la preuve est similaire (faire les diagrammes s'il y a le temps).
- Il est clair qu'un isomorphisme a la LLP et la RLP par rapport à n'importe quelle application. □

On ne démontrera pas les exemples suivants tout de suite.

Exemple 2.2.13 (Quillen). Top a une structure de catégorie de modèles où les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie, les fibrations sont les fibrations de Serre, et les cofibrations sont les rétracts d'inclusions cellulaires généralisées.[5] Tous les objets sont fibrants, les objets cofibrants sont les rétracts de CW-complexes généralisés.

Exemple 2.2.14 (Strøm). Top a une autre structure de catégorie de modèles où les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie, les cofibrations sont les rétracts de cofibrations de Hurewicz d'image fermée, et les fibrations sont les fibrations de Hurewicz. Tout objet est fibrant et cofibrant

Exemple 2.2.15. La catégorie $\mathsf{Ch}(R)$ a plusieurs structures de catégories de modèles :

- $\mathcal{W} = \{\text{q.isos}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{injections de conoyau projectif}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{surjections}\}$[6] ;
- $\mathcal{W} = \{\text{q.isos}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{injections}\}$[7], $\mathcal{F} = \{\text{surjections de noyau injectif}\}$;
- $\mathcal{W} = \{\text{éqv. d'homotopies}\}$, $\mathcal{C} = \mathrm{LLP}(B^I \xrightarrow{ev_0} B)$, $\mathcal{F} = \mathrm{RLP}(A \xrightarrow{i_0} A \otimes I)$.[8]

5. C'est-à-dire les applications $i : A \to B$ où $B = \operatorname{colim} B_n$, $B_0 = A$, et B_{n+1} est obtenue à partir de B_n en recollant des cellules.
6. Idem.
7. En degré ≥ 1 si les complexes sont bornés.
8. $I = N_*(\Delta^1)$.

3 Catégorie homotopique

3.1 Localisation

Soit C une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de morphismes.

Définition 3.1.1. Une *localisation* de C par rapport à $\mathcal{W}$ est une catégorie $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ munie d'un foncteur $\lambda : C \to C[\mathcal{W}^{-1}]$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, si F envoie les morphismes de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes, alors il existe un unique (à isomorphisme naturel près) foncteur $G : \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{D}$ tel que $G \circ \lambda = F$.

Proposition 3.1.2. *La localisation* $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ *existe et est unique à équivalence près. On la note aussi* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ *si* $\mathcal{W}^{-1}$ *est implicite.*

Remarque 3.1.3. Cette proposition n'est qu'approximativement vraie. En effet, dans la preuve qui suit, les morphismes entre deux objets ne forment pas nécessairement un ensemble ! On verra plus tard que dans une catégorie de modèles, les morphismes dans la catégorie homotopique forment toujours un ensemble.

Remarque 3.1.4. En particulier, les morphismes de $\mathcal{W}$ sont envoyés sur des isomorphismes dans $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. La réciproque est en général fausse, mais on verra que c'est vrai pour les catégories de modèles.

Démonstration. Décrivons explicitement la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$. Ses objets sont les mêmes que ceux de C. Les morphismes de $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ sont donnés par le quotient

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(X, Y) = \mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(X, Y)/\sim,$$

où :

- $\mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(X, Y)$ est la classe des « chemins » entre X et Y et formés par des morphismes de C et des morphismes de $\mathcal{W}$ dans le sens inverse ;
- la relation $\sim$ est engendrée par $X \xrightarrow{f} Y \underset{\sim}{\xleftarrow{f}} X \sim X$ et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \sim X \xrightarrow{g \circ f} Y$.

La composition est donnée par la concaténation des chemins. On vérifie que cela forme une catégorie et que $\mathsf{C} \to \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ (qui envoie les morphismes sur les chemins de longueur 1) est un foncteur qui vérifie la propriété universelle. $\square$

Le problème avec cette construction (outre le problème de théorie des ensembles) est qu'il est très difficile de faire des calculs. Par exemple, déterminer si deux morphismes sont égaux dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ est un problème non-trivial.

Définition 3.1.5. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ une catégorie de modèles. On définit sa localisation $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}) = \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Remarque 3.1.6. Cela ne dépend évidemment que de la classe $\mathcal{W}$, pas de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.

3.2 Homotopies

On va maintenant montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X)$ forme un ensemble que l'on peut décrire comme un quotient d'un ensemble de morphismes dans C par une relation d'homotopie. Il faut noter qu'il y a deux notions duales d'homotopie, une à gauche (pour la source) et une à droite (pour le but).

3.2.1 À gauche

Définition 3.2.1. Un *cylindre* de $A \in \mathsf{C}$ est une factorisation

$$A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$$

de l'application canonique $A \sqcup A \to A$. On note $i_0, i_1 : A \to C$ les deux composantes de la cofibration.

Définition 3.2.2. Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes. Une *homotopie à gauche* entre f et g est la donnée d'un cylindre $A \sqcup A \xhookrightarrow{(i_0,i_1)} C \xrightarrow{\sim} A$ et d'une application $H : C \to X$ telle que $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$. Si H existe, on note $f \overset{l}{\simeq} g$.

Exemple 3.2.3. Dans Top avec la structure de Quillen, on peut par exemple choisir $C = A \times [0, 1]$. Une homotopie à gauche est exactement ce qu'on appelle habituellement une homotopie.

Exemple 3.2.4. Dans $\mathsf{Ch}(R)$ avec la structure injective, on peut choisir $C_n = A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1}$ avec $d(x, y, z) = (dx + (-1)^n z, dy - (-1)^n z, dz)$. Une homotopie $f \simeq g : A \to X$ est équivalente à la donnée de $h : A_{n-1} \to X_n$ t.q. $dh \pm hd = f - g$ (exactement la définition habituelle).

Remarque 3.2.5. En général il n'est pas possible de choisir un cylindre une fois pour toute ; deux applications peuvent être homotopes à gauche en choisissant un certain cylindre mais sans qu'il soit possible d'en choisir un autre qu'on s'est fixé à l'avance.

Proposition 3.2.6. *Si $f \overset{l}{\simeq} g : A \to X$ alors $h \circ f \overset{l}{\simeq} h \circ g : X \to Z$ pour tout morphisme $h : X \to Y$.*

Démonstration. Soit $H : C \to X$ une homotopie entre f et g. Alors $h \circ H$ est une homotopie entre $h \circ f$ et $g \circ f$. $\square$

Lemme 3.2.7. *Si $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ est un cylindre et que A est cofibrant, alors $i_0, i_1 : A \to C$ sont des cofibrations acycliques.*

Démonstration. On remarque déjà que $A \to A \sqcup A$ est une cofibration, car c'est le poussé en avant de :

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \sqcup A \end{tikzcd}$$

Comme i_0 est la composée de deux cofibrations, c'est une cofibration. L'axiome (MC2) entraîne qu'elle est acyclique :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend left, equal] \arrow[rr, bend right, "i_0"'] & A \sqcup A \arrow[r, hook] & C \arrow[r, "\sim"] & A \end{tikzcd}$$

□

Proposition 3.2.8. *Si A est cofibrant, alors $\overset{l}{\simeq}$ définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)$.

Démonstration. Vérifions les propriétés une par une.

Réflexivité Soit $f : A \to X$ et soit $A \sqcup A \to C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre quelconque, obtenu p.ex par (MC5). Alors $H : C \xrightarrow{\sim} A \xrightarrow{f} X$ est une homotopie entre f et f.

Symétrie Si $f \overset{l}{\simeq} g$ via une homotopie $H : C \to X$, alors on définit un nouveau cylindre $A \sqcup A \cong A \sqcup A \hookrightarrow C \to A$ où le premier morphisme échange les deux facteurs. Le morphisme H' obtenu en composant H avec cet échange définit alors une homotopie entre g et f : $H' \circ i_0 = H \circ i_1 = g$ et $H' \circ i_1 = H \circ i_0 = f$.

Transitivité C'est là qu'on a besoin de l'hypothèse « A est cofibrant ». Supposons $f \overset{l}{\simeq} g$ et $g \overset{l}{\simeq} g$ via des homotopies $H : C \to X$ et $H' : C' \to X$. On construit un nouveau cylindre C'' comme un poussé en avant (faire un dessin : on recolle deux cylindres) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i'_0", "\sim"'] \arrow[d, hook, "i_1", "\sim"'] & C' \arrow[d] \\ C \arrow[r] & C'' \end{tikzcd}$$

Les morphismes $C \to C''$ et $C' \to C''$ sont des cofibrations acycliques (car poussés en avant de cofibrations acycliques). La propriété universelle induit un morphisme $C'' \to A$, qui est une équivalence faible par (MC2) ($C \xrightarrow{\sim} C'' \to X$ est une équivalence faible). On vérifie que ça donne un cylindre avec (i_0, i'_1). De plus, toujours par propriété universelle, H et H' induisent $H'' : C'' \to X$ qui se restreint à f et h, c.à.d. c'est une homotopie $f \overset{l}{\simeq} h$.

□

Proposition 3.2.9. *Soit A un objet cofibrant et $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ une équivalence faible. Si h est une fibration (acyclique) ou si X et Y sont fibrants, alors h_* est une bijection :*

$$h_* : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)/ \overset{l}{\simeq} \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, Y)/ \overset{l}{\simeq} .$$

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, $h_*(f) = h \circ f$ passe au quotient.

- Supposons que $h : X \twoheadrightarrow \sim Y$ est une fibration acyclique. La surjectivité de h_* découle immédiatement de (MC4). Pour l'injectivité, supposons que $f, g : A \to X$ sont deux morphismes tels que $h \circ f \overset{l}{\simeq} h \circ g$. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre et $H : C \to Y$ une homotopie entre $h \circ f$ et $h \circ g$. On peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, two heads, "h", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "K"] & Y \end{tikzcd}$$

  et K est une homotopie entre f et g.

- Supposons maintenant que X et Y sont fibrants. On va déduire la bijectivité du cas précédent à l'aide du « Lemme de Brown » (qu'on démontrerons en toute généralité plus tard). On vient de démontrer que $F = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, -)/ \overset{l}{\simeq}$ envoie les fibrations acycliques sur des bijections. Montrons qu'alors il envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des bijections aussi. On peut factoriser le morphisme $(\mathrm{id}_X, h) : X \to X \times Y$ en $X \hookrightarrow W \xrightarrow{\sim} X \times Y$. Comme X et Y sont fibrants, les morphismes $X \leftarrow X \times Y \to Y$ sont des fibrations (car tirés en arrière de fibrations). On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, hook, "i"', "\sim"] \arrow[ddl, "h"', "\sim"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}_X", "\sim"'] & \\ & W \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \\ Y & X \times Y \arrow[l, two heads, "p_Y"] \arrow[r, two heads, "p_X"] & X \end{tikzcd}$$

  - $p_Y \circ \pi$ est une fibration acyclique par (MC2) donc $F(p_Y \circ \pi) : F(W) \to F(Y)$ est une bijection ;
  - de même $F(p_X \circ \pi) : F(W) \to F(X)$ est une bijection ;
  - $p_X \circ \pi \circ i$ est l'identité donc $F(p_X \circ \pi \circ i)$ est l'identité, donc en particulier une bijection ; comme $F(p_X \circ \pi)$ est une bijection, on en déduit que $F(i)$ est une bijection ;
  - finalement, $F(h) = F(p_X \circ \pi) \circ F(i)$ est une bijection car composée de deux bijections. □

Proposition 3.2.10. *Si X est fibrant, $f \overset{l}{\simeq} g : A \to X$ et $h : B \to A$ est un morphisme, alors $f \circ h \overset{l}{\simeq} g \circ h$.*

Démonstration. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre et $H : C \to X$ une homotopie entre f et g. Factorisons $C \xrightarrow{\sim} A$ comme $C \overset{\sim}{\hookrightarrow} C' \xrightarrow{\sim} A$ par (MC5) (et par (MC2) les deux morphismes sont des équivalences faibles). Comme X est fibrant, on peut trouver H' tel que :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "\sim"] & X \arrow[d, two heads] \\ C' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "H'"] & * \end{tikzcd}$$

Alors $H' : C' \to X$ est toujours une homotopie entre f et g. L'avantage étant qu'on a un cylindre du type $A \sqcup A \hookrightarrow C' \xrightarrow{\sim} A$.

Maintenant, soit $B \sqcup B \hookrightarrow D \xrightarrow{\sim} B$ un cylindre pour B. On peut trouver un relèvement G :

$$\begin{tikzcd} B \sqcup B \arrow[r, "h \sqcup h"] \arrow[d, hook] & A \sqcup A \arrow[r, hook] & C' \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ D \arrow[r, "\sim"] \arrow[urr, dashed, "G"] & B \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$

On vérifie alors que $H \circ G$ est une homotopie entre $f \circ h$ et $g \circ h$. □

3.2.2 À droite

On peut également tout dualiser.

Définition 3.2.11. Un *objet chemin* de $X \in \mathsf{C}$ est une factorisation

$$X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$$

de l'application canonique $X \to X \times X$. On note $p_0, p_1 : P \to X$ les deux composantes de la fibration.

Définition 3.2.12. Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes. Une *homotopie à droite* entre f et g est la donnée d'un objet chemin $X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow (p_0, p_1) X \times X$ et d'une application $H : A \to P$ telle que $p_0 \circ H = f$ et $p_1 \circ H = g$. Si H existe, on note $f \overset{r}{\simeq} g$.

Proposition 3.2.13. *Si $f \overset{r}{\simeq} g : A \to X$ alors $f \circ h \overset{l}{\simeq} g \circ h : B \to A$ pour tout morphisme $h : B \to A$.*

Lemme 3.2.14. *Si $X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$ est un objet chemin et que X est cofibrant, alors $p_0, p_1 : P \to X$ sont des fibrations acycliques.*

Proposition 3.2.15. *Si X est fibrant, alors $\overset{r}{\simeq}$ définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)$.

Proposition 3.2.16. *Soit X un objet fibrant et $h : A \xrightarrow{\sim} B$ une équivalence faible. Si h est une cofibration (acyclique) ou si A et B sont cofibrants, alors h^* est une bijection :*

$$h^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(B, X)/ \overset{r}{\simeq} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(A, X)/ \overset{r}{\simeq} .$$

Proposition 3.2.17. *Si A est cofibrant, $f \overset{r}{\simeq} g : A \to X$ et $h : X \to Y$ est un morphisme, alors $h \circ f \overset{l}{\simeq} h \circ g$.*

3.3 Catégorie homotopique

Proposition 3.3.1. *Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes.*

- *Si A est cofibrant alors $f \overset{l}{\simeq} g \implies f \overset{r}{\simeq} g$.*
- *Si X est fibrant alors $f \overset{r}{\simeq} g \implies f \overset{l}{\simeq} g$.*

Démonstration. On démontre le premier point, l'autre est dual. Supposons que $f \overset{l}{\simeq} g$. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \underset{\sim}{\xrightarrow{j}} A$ un cylindre pour A et $H : C \to X$ une homotopie. On a vu que i_0 est une cofibration acyclique. Choisissons un objet chemin $X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$ quelconque pour X. On peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_0", "\sim"'] & X \arrow[r, "\sim"] & P \arrow[d, two heads] \\
C \arrow[rru, dashed, "K"] \arrow[rr, "(fj{,}H)"'] & & X \times X
\end{tikzcd}$$

Alors $Ki_1 : A \to P$ est une homotopie à droite entre f et g. □

Définition 3.3.2. Soit A un objet cofibrant et X un objet fibrant. On note $[A, X]$ le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(A, X)$ par la relation d'équivalence de la proposition précédente.

Définition 3.3.3. La catégorie $\pi\mathrm{C}_{cf}$ a pour objets les objets fibrants et cofibrants de C, et pour morphismes entre A et X on prend $[A, X]$.

Théorème 3.3.4 (Analogue du théorème de Whitehead)**.** *Soit $f : A \to X$ un morphisme entre deux objets fibrants et cofibrants. Alors f est une équivalence faible si et seulement si il existe $g : X \to A$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes aux identités de X et A.*

Démonstration. Tout d'abord, supposons que f est une équivalence faible. On peut le factoriser en $A \underset{\sim}{\overset{i}{\hookrightarrow}} W \underset{\sim}{\overset{p}{\twoheadrightarrow}} X$. Comme i est une cofibration acyclique et que A est fibrant, on en déduit qu'il existe un inverse à droite $r : W \to A$ (c.à.d. $ri = \mathrm{id}_A$). Comme W est fibrant et que i est une cofibration acyclique, on en déduit que $i^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(W, W)/ \overset{r}{\simeq} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(A, W)/ \overset{r}{\simeq}$ est une bijection. Or, $i^*([ir]) = [iri] = [i] = i^*([\mathrm{id}_W])$, d'où $ir \overset{r}{\simeq} \mathrm{id}_W$.

On en déduit que r est un inverse de i à homotopie (à droite) près. Un argument dual donne un $s : X \to W$ qui est un inverse de p à homotopie (à gauche) près.

Réciproquement, supposons que f est une équivalence d'homotopie. On factorise f comme $A \overset{i}{\hookrightarrow} W \overset{p}{\underset{\sim}{\twoheadrightarrow}} X$; il suffit de montrer que p est une équivalence faible. Notons que W est bifibrant. Soit $g : X \to A$ un inverse homotopique de f et $H : C \to X$ une homotopie entre fg et id_X (où C est un cylindre de X). Alors on peut trouver un relèvement H' dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "ig"] \arrow[d, hook, "i_0", "\sim"'] & C \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "H'"] & X \end{tikzcd}$$

Soit $s = H' \circ i_1$, qui est homotopie à ig grâce à H'. Comme i est une équivalence faible, c'est une équivalence d'homotopie par ce qu'on vient de montrer ; soit r un inverse homotopique de i. Comme $pi = f$, on a $p \sim pir = fr$. De plus $s \sim ig$ donc $sp \sim igp \sim igfr \sim ur \sim \mathrm{id}_C$. On en déduit que sp est une équivalence faible, et p est un rétract de sp :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "sp"] & C \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

□

Pour rappel, on note $Q(X) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ (resp. $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} R(X)$) le remplacement cofibrant (resp. fibrant) fonctoriel.

Théorème 3.3.5 (Description de la catégorie homotopique).

- *La catégorie* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ *est équivalente à* $\pi\mathsf{C}_{cf}$.
- *Soit* $A, X \in \mathsf{C}$ *deux objets. Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Q(A), R(Y))/\sim$.
- *Si* $f : A \to X$ *est un morphisme qui devient un isomorphisme dans* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$, *alors c'est une équivalence faible.*

Démonstration. Nous allons définir un foncteur $\lambda : \mathsf{C} \to \pi\mathsf{C}_{cf}$ et montrer qu'il vérifie la propriété universelle de la localisation. On définit simplement $\lambda X = RQX$ sur les objets. L'objet RQX est fibrant par définition ; comme QX est cofibrant et que $QX \to RQX$ est une cofibration, on trouve aussi que RQX est cofibrant. Sur les morphismes, $f : A \to X$ est envoyé sur la classe de $RQf : RQA \to RQX$ dans $[RQA, RQX]$.

Vérifions la propriété universelle de λ. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur qui envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes. On veut montrer qu'il existe un unique foncteur $\bar{F} : \pi\mathsf{C}_{cf} \to \mathsf{D}$ tel que $\bar{F} \circ \lambda = F$. Sur les objets, on doit poser $\bar{F}(X) = F(X)$. Montrons que F passe au quotient, c.à.d. que si $f, g : A \to X$ sont deux morphismes homotopes entre objets fibrants et cofibrants, alors $F(f) = F(g)$. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow[\sim]{j} A$ un cylindre pour A et $H : C \to X$ une homotopie entre f et g, c.à.d. $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$. (C est cofibrant, on a vu dans la preuve de Proposition 3.2.10 qu'on pouvait également le choisir tq. j est une fibration donc C est fibrant aussi car A l'est.) On va montrer que $F(i_0) = F(i_1)$. Comme $j : C \to A$ est une équivalence faible, on en déduit que $F(j)$ est un isomorphisme. Or, $j \circ i_0 = j \circ i_1 = \mathrm{id}_A$ donc $F(j) \circ F(i_0) = F(j) \circ F(i_1)$, d'où $F(i_0) = F(i_1)$. On en déduit alors que $F(f) = F(H \circ i_0) = F(H \circ i_1) = F(g)$.

Montrons que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho(C)}}(A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(QA, RX)$. Par ce qu'on vient de montrer, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho(C)}}(A, X) \cong [QRA, QRX] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(QRA, QRX)/\simeq$. Comme QRA est cofibrant et que $QRX \xrightarrow{\sim} RX$ est une équivalence entre objets fibrants, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(QRA, QRX)/\sim \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(QRA, RX)/\sim$. De même, ce dernier est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(QA, RX)/\sim$.

Enfin, supposons que $[f : A \to X]$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho(C)}$. Grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd} QRA \arrow[r, "QR(f)"] \arrow[d, "\sim"] & QRX \arrow[d, "\sim"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

on voit qu'il suffit de montrer que $QR(f)$ est une équivalence faible. Grâce au point 1 du théorème, il existe $g : QRX \to QRA$ tel que $[QRf \circ g] = [\mathrm{id}_{QRX}] \in [QRX, QRX]$ et $[g \circ QRf] = [\mathrm{id}_{QRA}] \in [QRA, QRA]$. Autrement dit, $QRf \circ g \simeq \mathrm{id}_{QRX}$ et $g \circ QRf \simeq \mathrm{id}_{QRA}$. Grâce au théorème de Whitehead, on en déduit que QRf est une équivalence faible. $\square$

4 Engendrement cofibrant

Nous allons commmencer par démontrer que la structure projective définit une catégorie de modèles sur $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$. La preuve fera intervenir des idées que nous allons formaliser sous le nom de « catégories de modèles à engendrement cofibrant » (ou cofibrement engendrée).

4.1 Complexes de chaînes $\mathbb{N}$-gradués

Pour rappel, $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ dénote la catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés positifs. Pour un complexe de chaînes $M = (M_n, d_n)_{n \geq 0}$ on définit :

- les cycles $Z_k(M)$ par $Z_0(M) = M_0$ et $Z_k(M) = \ker(d : M_k \to M_{k-1})$;
- les bords $B_k(M)$ par $B_k(M) = \mathrm{im}(d : M_{k+1} \to M_k)$;
- l'homologie $H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M)$.

Un complexe de chaînes est dit acyclique si $H_k(M) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Rappelons également qu'un R-module P est dit projectif si pour toute surjection $A \to B$, l'application induite $\mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B)$ est surjective. C'est équivalent à demander qu'il existe un module libre R^n qui se décompose en $P \oplus Q$ (pour un certain Q), ou encore que tout morphisme surjectif $A \to P$ aie une section.

Définition 4.1.1. On dit qu'un morphisme $f : M \to N$ de complexes de chaînes est :

- une équivalence faible si c'est un quasi-isomorphisme ;
- une cofibration si pour tout $k \geq 0$, l'application $f_k : M_k \to N_k$ est injective et son conoyau est projectif ;
- une fibration si pour tout $k > 0$, l'application $f_k : M_k \to N_k$ est surjective.

Théorème 4.1.2. *La catégorie* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *munie de ces trois classes de morphismes est une catégorie de modèles, appelée « catégorie de modèles projective ».*

Exemple 4.1.3. Soit A et B deux R-modules. Considérons A comme un complexe concentré en degré m (noté $\Sigma^m A$) et B comme un complexe concentré en degré n (noté $\Sigma^n B$). Alors dans la catégorie homotopique, $[\Sigma^m A, \Sigma^n B] \cong \mathrm{Ext}_R^{n-m}(A, B)$.

Lemme 4.1.4. $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie les axiomes* (*MC1*), (*MC2*), (*MC3*).

Démonstration. Les limites et les colimites se calculent degré par degré dans $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$. L'axiome (MC2) est clair. Pour l'axiome (MC3), on note que le rétract d'un isomorphisme (resp. épimorphisme, monomorphisme) est un isomorphisme (resp. épimorphisme, monomorphisme), et que de plus un rétract d'un module projectif est projectif. □

Lemme 4.1.5. $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie l'axiome* $(MC4(i))$.

Démonstration. Considérons un diagramme commutatif de complexes de chaînes :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Par définition, p_k est surjectif pour tout $k > 0$. Comme de plus $H_0(X) \to H_0(Y)$ est un isomorphisme, une petite chasse au diagramme montre que p_0 est surjectif aussi. Soit $K = \ker(p)$, alors on a une suite exacte courte $0 \to K \to X \to Y \to 0$ donc K est acyclique.

On cherche un relèvement $l : B \to X$ que nous allons construire par récurrence sur k.

- $(k = 0)$ Soit $P_0 = B_0/A_0$. On a une suite exacte courte $0 \to A_0 \to B_0 \to P_0 \to 0$. Comme P_0 est projectif, cette suite est scindée, donc $B_0 \cong A_0 \oplus P_0$ comme R-modules. On définit alors $l_0 : A_0 \oplus P_0 \to X_0$ en prenant f_0 sur A_0 et n'importe quel relèvement $P_0 \to X_0$ et $P_0 \subset B_0 \to Y_0$.
- (récurrence) Soit $k > 0$. Supposons que l'on a construit des applications $l_j : B_j \to X_j$ (pour tout $0 \leq j < k$) vérifiant :
  (i) $dl_j = l_{j-1}d$ pour $1 \leq j < k$,
  (ii) $p_j l_j = g_j$ et $l_j i_j = f_j$ pour $0 \leq j < k$,

  On veut trouver l_k. Comme pour le cas $k = 0$, on a un scindement $B_k \cong A_k \oplus P_k$ et on peut donc définir $\tilde{l}_k : B_k \to X_k$ qui vérifie le deuxième point, mais il n'est pas forcément compatible avec la différentielle. On définit donc $\xi : B_k \to X_{k-1}$ par $\xi(b) = d(\tilde{l}_k(b)) - l_{k-1}(db)$. Alors on vérifie que :
  - $d\xi = 0$, car $dl_{k-1} = l_{k-2}d$,
  - $p_{k-1}\xi = 0$ car $p_k\tilde{l}_k = g_k$ qui commute avec d,
  - $\xi i_k = 0$ car $\tilde{l}_k i_k = f_k$ qui commute avec d.

  En d'autres termes, ξ induit $\xi' : B_k/i_k(A_k) \cong P_k \to Z_{k-1}(K)$. Or, K est acyclique, donc $d : K_k \to Z_{k-1}(K)$ est surjective. Par projectivité de P_k, on peut relever ξ' en $\xi'' : P_k \to K_k$, qu'on peut composer avec l'inclusion pour obtenir $\xi''' : P_k \to X_k$. On vérifie alors aisément que $l_k := \tilde{l}_k - \xi'''$ vérifie les équations demandées. □

Lemme 4.1.6. $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie* $(MC4(ii))$.

L'idée est que le conoyau d'une cofibration acyclique a une forme très particulière.

Définition 4.1.7. Soit A un R-module. Pour $n > 0$, on définit $D_n(A) \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$:

$$\dots \to 0 \to \underbrace{A}_{n} \xrightarrow{\mathrm{id}_A} \underbrace{A}_{n-1} \to 0 \to \dots$$

Lemme 4.1.8. *Pour tout $M \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$, on a une bijection naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)}(D_n(A), M) \cong \mathrm{Hom}_{R-\mathsf{Mod}}(A, M_n).$$

En particulier, si $M \to N$ est surjectif en degré n et que A est projectif, alors toute application $D_n(A) \to N$ se relève à M. □

Lemme 4.1.9. *Soit $P \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ un complexe acyclique qui est projectif en chaque degré. Alors tous les $Z_k(P)$ sont projectifs, et P est isomorphe dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ à $\bigoplus_{k \geq 1} D_k(Z_{k-1}(P))$.*

Démonstration. On définit un sous-complexe (pour $k \geq 1$) :

$$P_n^{(k)} = \begin{cases} P_n & n \geq k \\ B_{k-1}(P) & n = k-1 \\ 0 & n \leq k-2 \end{cases}$$

Comme P est acyclique, on vérifie que $P^{(k)}/P^{(k+1)} \cong D_k(Z_{k-1}(P))$. Comme $Z_0(P) = P_0$ est projectif, en utilisant le lemme précédent on déduit que $P = P^{(1)} \cong P^{(2)} \oplus D_1(Z_0(P))$. On applique maintenant le même argument à $P^{(2)}$ pour trouver $P^{(2)} \cong P^{(3)} \oplus D_2(Z_1(P))$, etc. □

Démonstration du Lemme 4.1.6. On se donne un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i", "\sim"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme i est injectif et son conoyau $P = B/A$ vérifie les hypothèses du lemme précédent. On déduit donc que la suite exacte $0 \to A \to B \to P \to 0$ est scindée, donc $B \cong A \oplus P$ comme complexe de chaînes. On peut donc définir $l : B \to X$ en utilisant f pour le facteur A et en utilisant n'importe quel relèvement de $P \subset B \xrightarrow{g} Y$ pour le facteur P. □

4.1.1 L'axiome (MC5)

Il reste à démontrer (MC5). Plutôt que de le faire directement, nous allons illustrer ce qu'on appelle « l'argument du petit objet », qui permet de fabriquer des factorisations avec de bonnes propriétés de relèvement dans beaucoup de catégories modèles. Cet argument sera formalisé plus tard.

On considère $\mathbb{N}$ comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(m,n) = \begin{cases} * & \text{si } m \leq n, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un foncteur (diagramme) $X : \mathbb{N} \to \mathsf{C}$ n'est rien d'autre qu'une suite d'objets et de morphismes (attention ce n'est pas un complexe de chaînes !) :

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

Les applications naturellees $X_n \to \operatorname{colim} X$ induisent, pour tout objet $A \in \mathsf{C}$, une application :

$$\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} X_n).$$

Définition 4.1.10. Un objet $A \in \mathsf{C}$ est $\mathbb{N}$*-petit* (ou séquentiellement petit) si pour tout diagramme $X : \mathbb{N} \to \mathsf{C}$, l'application ci-dessus est une bijection.

Exemple 4.1.11. Un ensemble est $\mathbb{N}$-petit ssi il est fini. Un R-module est $\mathbb{N}$-petit ssi il est de présentation fini. Un complexe de chaînes $X \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est $\mathbb{N}$-petit ssi $X_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs, et chaque X_n est de présentation finie.

Soit $\mathcal{M} = \{f_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ un *ensemble* de morphismes de C. On se fixe une application $p : X \to Y$. On cherche à factoriser p en $X \to X' \to Y$ de sorte que $X' \to Y$ a la RLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$. Bien sûr, on pourrait prendre $X' = Y$, mais on veut que X' ressemble le plus possible à X.

On définit $S(\mathcal{M}, p)$ comme étant *l'ensemble* de tous les diagrammes commutatifs possibles :

$$S(\mathcal{M},p) = \left\{ (i \in I, g : A_i \to X, h : B_i \to Y) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B_i & \xrightarrow{h} & Y \end{array} \text{ commute} \right\}$$

Le construction de recollement $G^1(\mathcal{M}, p)$ est alors donnée comme le pushout :

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{(i,g,h)\in S(\mathcal{M},p)} A_i \arrow[r, "\sqcup g"] \arrow[d, "\sqcup f_i"'] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dl, phantom, "\ulcorner"] & \\
\bigsqcup_{(i,g,h)\in S(\mathcal{M},p)} B_i \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sqcup h"'] & G^1(\mathcal{M},p) \arrow[r, dashed, "p_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

Le fait que tous les diagrammes de $S(\mathcal{M}, p)$ commutent montrent que l'on a une application induite $p_1 : G^1(\mathcal{M}, p) \to Y$. On peut ensuite définir par récurrence $G^k(\mathcal{M}, p) = G^1(\mathcal{M}, p_{k-1})$. On récupère :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{i_1} & G^1(\mathcal{M},p) & \xrightarrow{i_2} & G^2(\mathcal{M},p) & \xrightarrow{i_2} & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\
Y & = & Y & = & Y & = & \dots
\end{array}$$

On pose $G^\infty(\mathcal{M}, p)$ la colimite de la ligne du dessus. Elle est munie d'applications $i_\infty : X \to G^\infty(\mathcal{M}, p)$ et $p_\infty : G^\infty(\mathcal{M}, p) \to Y$ telles que $p_\infty i_\infty = p$.

Proposition 4.1.12. *Supposons que tous les A sont $\mathbb{N}$-petits dans $\mathcal{M}$. Alors p_∞ a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. On cherche à résoudre le problème de relèvement suivant :

$$\begin{array}{ccc}
A_i & \xrightarrow{g} & G^\infty(\mathcal{M},p) \\
\downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle p_\infty} \\
B_i & \xrightarrow{h} & Y
\end{array}$$

Comme A_i est $\mathbb{N}$-petit, on peut factoriser g comme $A_i \xrightarrow{g'} G^k(\mathcal{M}, p) \to G^\infty(\mathcal{M}, p)$. On obtient donc un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
A_i & \xrightarrow{g'} & G^k(\mathcal{M},p) & \xrightarrow{i_{k+1}} & G^{k+1}(\mathcal{M},p) & \longrightarrow & G^\infty(\mathcal{M},p) \\
\downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle p_k} & & \downarrow{\scriptstyle p_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle p_\infty} \\
B_i & \xrightarrow{h} & Y & = & Y & = & Y
\end{array}$$

Le triplet (i, g', h) indexe un des morphismes dans la colimite qui définit $G^{k+1}(\mathcal{M}, p)$ à partir de $G^k(\mathcal{M}, p)$. Par construction, on trouve donc une application $B_i \to G^{k+1}(\mathcal{M}, p)$ qui fait commuter le diagramme, qu'on peut ensuite post-composer avec le morphisme vers $G^\infty(\mathcal{M}, p)$. On obtient ainsi le relèvement voulu. $\square$

On peut résumer tout ce qui précède (et généralisé à un cardinal quelconque) :

Théorème 4.1.13 (Argument du petit objet)**.** *Soit* C *une catégorie cocomplète et $\mathcal{M} = \{f_i : A_i \to B_i\}$ un ensemble de morphismes de* C*. Supposons que tous les A_i sont κ-petits pour un cardinal κ fixé. Tout morphisme $f : X \to Y$ se factorise en $X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(f, \mathcal{M}) \xrightarrow{p_\infty} Y$ où i_∞ est un complexe $\mathcal{M}$-cellulaire relatif et p_∞ a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$.* $\square$

On va maintenant montrer que les cofibrations et les cofibrations acycliques sont « engendrées » par un petit nombre de cofibrations (acycliques) que l'on va décrire explicitement. On fabriquera la factorisation d'une application quelqu'un en utilisant la construction G^∞, soit par rapport aux cofibrations génératrices, soit par rapport aux cofibrations acycliques génératrices.

Définition 4.1.14. Pour $n \geq 1$, on définit le « n-disque » $D_n(R)$ et pour $n \geq 0$ la « n-sphère » par :

$$D_n(R) : \dots \to 0 \to \underbrace{R}_{n} \xrightarrow{\mathrm{id}_R} \underbrace{R}_{n-1} \to 0 \to \dots$$

$$S_n(R) : \dots \to 0 \to \underbrace{R}_{n} \to 0 \to \dots$$

On définit aussi $D_0(R) = R$ concentré en degré 0, et $S_{-1}(R) = 0$. On a une inclusion évidente $j_n : S_n(R) \to D_n(R)$ (c'est une cofibration). On note aussi $i_n : 0 \to D_n(R)$ pour l'inclusion (c'est une cofibration acyclique).

Lemme 4.1.15 (Exercice)**.** *Un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est :*

- *une fibration $\iff$ il a la RLP par rapport à tous les i_n ;*
- *une fibration acyclique $\iff$ il a la RLP par rapport à tous les j_n.*

Lemme 4.1.16. *La catégorie $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ vérifie (MC5).*

Démonstration. Vérifions d'abord (MC5(i)), c.à.d. on veut factoriser un $f : X \to Y$ en une cofibration acyclique suivie d'une fibration. On considère la classe $\mathcal{J} = \{j_n : S_n(R) \to D_n(R)\}$. L'argument du petit objet donne une factorisation de f en $X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{J}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y$. Grâce au lemme précédent, p_∞ est une fibration. À chaque étape, l'application $G^k(\mathcal{J}, f) \to G^{k+1}(\mathcal{J}, f)$ est obtenue en recollant des cofibrations acycliques (les j_n) donc c'est une cofibration acyclique, donc l'application vers la colimite aussi.

Vérifions maintenant (MC5(ii)). On fait la même chose, à part que l'on utilise la classe $\mathcal{I} = \{i_n : 0 \to D_n(R)\}$ à la place. □

On a fini de démontrer le théorème !

4.2 Catégories de modèles cofibrement engendrées

Les catégories de modèles cofibrement engendrées sont très importantes en théorie de l'homotopie. (On a vue les complexes de chaînes, on peut aussi repérer le fait que les fibrations de Serre sont définies de manière similaire...) En général, démontrer l'axiome MC5 est difficile, mais si on arrive à trouver un ensemble de cofibrations (acycliques) génératrices, alors c'est plus simple, grâce à l'argument du petit objet. Ça permettra également de calculer les (co)limites homotopiques plus simplement par la suite, et de nombreux théorèmes ne s'appliquent qu'à ces catégories.

Soit $\mathcal{M} = \{A_i \xrightarrow{f_i} B_i\}$ un ensemble de morphismes de C. (Il faudra y penser comme la classe des cofibrations génératrices ou bien des cofibrations acycliques génératrices.)

Définition 4.2.1. Un *complexe $\mathcal{M}$-cellulaire relatif* est un morphisme $X \to Y$ qui est obtenu comme une colimite de type $\operatorname{colim}_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ où κ est un ordinal[1], $X_0 = X$, $X_{\alpha+1}$ est obtenu à partir de X_α comme un pushout du type $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup_{A_i} B_i$ pour un morphisme $g : A_i \to X_\alpha$, et si $\lambda \in \kappa$ est un ordinal limite alors $X_\lambda = \operatorname{colim}_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. On note $\mathcal{M}$-cell la classe de tels morphismes. Un *complexe $\mathcal{M}$-cellulaire* est un objet Y tel que $\emptyset \to Y \in \mathcal{M}$-cell.

Exemple 4.2.2. Dans Top, les complexes cellulaires relatifs sont obtenus pour $\mathcal{M} = \{\partial I^n \to I^n\}$.

Définition 4.2.3. Un morphisme $p : X \to Y$ est *$\mathcal{M}$-injectif* si il a la RLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$. On note $\mathcal{M}^\perp$ la classe des morphismes $\mathcal{M}$-injectifs.

Définition 4.2.4. Un morphisme $i : A \to B$ est *$\mathcal{M}$-cofibrant* si il a la LLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}^\perp$. On note ${}^\perp(\mathcal{M}^\perp)$ la classe des morphismes $\mathcal{M}$-cofibrants.

Définition 4.2.5. Une catégorie de modèles $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ est *cofibrement engendrée* si il existe deux ensembles de morphismes $\mathcal{I}$ (« cofibrations génératrices ») et $\mathcal{J}$ (« cofibrations acycliques génératrices ») tels que :

- les fibrations acycliques sont les morphismes $\mathcal{I}$-injectifs ($\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{I}^\perp$) ;
- les fibrations sont les morphismes $\mathcal{J}$-injectifs ($\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp$) ;
- les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ sont petits par rapport à la classe $\mathcal{I}$-cell ;
- les sources des morphismes de $\mathcal{J}$ sont petits par rapport à la classe $\mathcal{J}$-cell.

Remarque 4.2.6. Les deux premiers points entraînent que $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$. Les deux derniers points se vérifient souvent en choisissant $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de manière à ce que leurs sources soient compacts (donc petits par rapport à tout le monde).

Exemple 4.2.7. On a vu que la structure projective sur $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est cofibrement engendrée par $\mathcal{I} = \{S_n(R) \to D_n(R)\}$ et $\mathcal{J} = \{0 \to D_n(R)\}$.

Exemple 4.2.8. La structure de Quillen sur Top est cofibrement engendrée par $\mathcal{I} = \{\partial I^n \hookrightarrow I^n\}$ et $\mathcal{J} = \{I^n \hookrightarrow I^{n+1}\}$. Celle de Strøm ne l'est pas.

Proposition 4.2.9. *Soit* C *une catégorie de modèles cofibrement engendrée par* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*. Alors les cofibrations (resp. cofibrations acycliques) sont les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires relatifs (resp. complexes $\mathcal{J}$-cellulaires relatifs).*

Démonstration. Démontrons par exemple que $\mathcal{C} = \operatorname{Retract}(\mathcal{I}\text{-cell})$ (l'autre preuve est similaire). Comme les morphismes de $\mathcal{I}$ sont des cofibrations, les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires aussi. Réciproquement, soit $i : A \to B$ une cofibration. En réutilisant l'argument du petit objet, i se factorise en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{I}, i) \xrightarrow{p_\infty} B$. Par construction, i_∞ est un complexe $\mathcal{I}$-cellulaire relatif. On a également démontré que p_∞ a la RLP par

1. en général on peut se restreindre à $\kappa = \mathbb{N}$

rapport à $\mathcal{I}$, donc c'est une fibration acyclique, donc elle a la RLP par rapport à i. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_\infty"] \arrow[d, "i"'] & G^\infty(\mathcal{I}, i) \arrow[d, "p_\infty"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On trouve alors que i est un rétract de i_∞ :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_\infty"] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "p_\infty"] & B \end{tikzcd}$$

□

En théorie, si on se donne une catégorie C, on peut récupérer toute la structure de catégorie de modèles : les cofibrations (acycliques) sont les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires ($\mathcal{J}$-cellulaires) relatifs, les fibrations (acycliques) sont les morphismes $\mathcal{J}$-injectifs ($\mathcal{I}$-injectifs), et les équivalences faibles sont les morphismes obtenus en composant une cofibration acyclique avec une fibration acyclique. Mais toute la question est de savoir si ça fabrique bien une catégorie de modèles !

Théorème 4.2.10. *Soit* C *une catégorie complète et cocomplète,* $\mathcal{W}$*,* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *trois classes de morphismes. Alors* C *est une catégorie de modèles avec* $\mathcal{W}$ *comme équivalences faibles et* $\mathcal{I}$*,* $\mathcal{J}$ *comme cofibrations (acycliques) génératrices si et seulement si :*

(1) $\mathcal{W}$ *vérifie 2-parmi-3 et est stable par rétracts ;*

(2) *les sources des morphismes de* $\mathcal{I}$ *sont petits par rapport à* $\mathcal{I}$*-cell ;*

(3) *les sources des morphismes de* $\mathcal{J}$ *sont petits par rapport à* $\mathcal{J}$*-cell ;*

(4) $\mathcal{J}$*-cell* $\subset \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$ *;*

(5) $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{J}^\perp$ *;*

(6) *soit* ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp) \cap \mathcal{W} \subset {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$*, soit* $\mathcal{J}^\perp \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{I}^\perp$*.*

Démonstration. Les conditions sont clairement nécessaires. Montrons qu'elle sont suffisantes. Rappelons qu'on prend $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp$ et $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. (MC1) est vérifié par hypothèse. (MC2) et la stabilité de $\mathcal{W}$ par rétracts découlent de (1). La stabilité par rétracts de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ viennent du fait qu'on les définit par des propriétés de relèvement, on a donc (MC3).

Les conditions (4) et (5) montrent que les morphismes de $\mathcal{I}^\perp$ sont des fibrations acycliques, et que ceux de $\mathcal{J}$-cell sont des cofibrations acycliques. L'argument du petit objet, qui marche grâce à (3), fournit une factorisation de tout morphisme f :

$A \to X$ en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{M},f) \xrightarrow{p_\infty} X$, où $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$). Le morphisme i_∞ est un complexe $\mathcal{I}$-cellulaire (resp $\mathcal{J}$-cellulaire). Le même argument que dans la proposition précédente montre que c'est donc bien une cofibration (resp. cofibration acyclique). Le morphisme p_∞ est $\mathcal{I}$-injectif (resp $\mathcal{J}$-injectif) donc c'est une fibration acyclique par (5) (resp fibration par définition de $\mathcal{F}$). On a donc bien (MC5).

Reste (MC4), l'axiome de relèvement. On va utiliser (6) ; supposons que $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} := {}^\perp(\mathcal{I}^\perp) \cap \mathcal{W} \subset {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$ (l'autre cas est dual). Alors les cofibrations acycliques sont bien la LLP par rapport aux fibrations, soit la moitié de l'axiome. Supposons maintenant que $f : X \to Y \in \mathcal{J}^\perp \cap \mathcal{W}$ est une fibration acyclique, montrons qu'elle a la RLP par rapport aux cofibrations. Par définition de $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$, il suffit de vérifier que f a la RLP par rapport aux éléments de $\mathcal{I}$. Par l'argument du petit objet, on factorise $f = p_\infty i_\infty$ où $i_\infty \in \mathcal{J}$-cell $\subset \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{I}^\perp) = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ (4), et $p_\infty \in \mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{W}$ (5). On vient de démontrer que f a la RLP par rapport à $i_\infty \in {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$. On a donc un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_\infty"'] & X \arrow[d, "f"] \\
G^\infty(\mathcal{J},f) \arrow[r, "p_\infty"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

et donc f est un rétract de p_∞ :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_\infty"] \arrow[d, "f"] & G^\infty(\mathcal{J},f) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_\infty"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

Comme $p_\infty \in \mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{F}$ par (4), on en déduit par (MC3) que $f \in \mathcal{F}$. □

Exercice : montrer que les cofibrations (acycliques) génératrices de la structure de Quillen vérifient ces hypothèses.

5 Adjonctions de Quillen

5.1 Foncteurs dérivés

On sait maintenant définir la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles et y faire des calculs, notamment quand la catégorie est cofibrement engendrée. Maintenant, si on a un foncteur entre deux catégories de modèles, à quelles conditions a-t'on un foncteur induit entre leur catégorie homotopiques ?

Proposition 5.1.1. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction entre deux catégories de modèles. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *F préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques ;*
- *G préserve les fibrations et les fibrations acycliques ;*
- *F préserve les cofibration et G préserve les fibrations ;*
- *F préserve les cofibrations acycliques et G préserve les fibrations acycliques.*

Définition 5.1.2. Une *adjonction de Quillen* est une adjonction qui vérifie ces propriétés.

Démonstration. Il suffit de jouer un peu avec les propriétés de relèvement. Montrons par exemple que si F préserve les cofibrations alors G préserve les fibrations acycliques. (Tous les autres énoncés sont obtenus de façon similaire.) Soit $p : X \twoheadrightarrow \sim Y$ une fibration acyclique. Montrons que $G(p) : X \to Y$ est une fibration acyclique. Il suffit de montrer que $G(p)$ a la RLP par rapport aux cofibrations. On se donne donc un diagramme et on cherche un relèvement :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & G(X) \arrow[d, "G(p)"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Par adjonction, le relèvement existe si et seulement si un relèvement existe dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r] \arrow[d, "F(i)"] & X \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] \\ F(B) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Or F préserve les cofibrations donc $F(i)$ est une cofibration dans D. Comme p est une fibration acyclique, on en déduit que le relèvement existe. □

Exemple 5.1.3. Soit $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Alors on a une adjonction $f_! : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(S) : f^*$. On vérifie aisément que c'est une adjonction de Quillen pour les structures projectives.

On rappelle qu'on note $\lambda : \mathsf{C} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ le foncteur de localisation.

Définition 5.1.4. Soit C une catégorie de modèles et soit H une catégorie quelconque.[1] Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{H}$ un foncteur.

1. Un *foncteur dérivé à gauche* de F est un foncteur $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}$ et une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{L}F \circ \lambda \Rightarrow F$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute paire $(G : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}', \beta : G \circ \gamma \Rightarrow F)$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : G \to \mathbb{L}F$ telle que β soit la composée
$$G \circ \gamma \overset{\theta \circ \lambda}{\Longrightarrow} \mathbb{L}F \circ \gamma \overset{\alpha}{\Rightarrow} F.$$

2. Un *foncteur dérivé à droite* de F est un foncteur $\mathbb{R}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}$ et une transformation naturelle $\varepsilon : F \Rightarrow \mathbb{L}F \circ \lambda$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute paire $(G : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}', \varphi : F \Rightarrow G \circ \lambda)$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : \mathbb{R}F \to G$ telle que φ soit la composée
$$F \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \mathbb{R}F \circ \gamma \overset{\theta \circ \lambda}{\Longrightarrow} G \circ \gamma.$$

Si un foncteur dérivé (à droite ou à gauche existe), il est unique à isomorphisme près, comme d'habitude avec les propriétés universelles. Un foncteur dérivé à gauche est, en un certain sens, la meilleure approximation possible à gauche de F comme un foncteur qui factorise par λ (en termes savants, c'est une extension de Kan à droite le long de λ).

Proposition 5.1.5. *Soit* C *une catégorie de modèles,* H *une catégorie quelconque, et* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{H}$ *un foncteur.*

1. *Si F envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des isomorphismes, alors* $\mathbb{L}F$ *existe.*

2. *Si F envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des isomorphismes, alors* $\mathbb{R}F$ *existe.*

La preuve fait appel au Lemme de Brown :

Lemme 5.1.6 (Lemme de Brown)**.** *Soit* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *un foncteur entre deux catégories de modèles.*

1. *Si F envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles.*

1. On y pensera comme $\mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

2. *Si F envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors F envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles.*

Remarque 5.1.7. Un adjoint de Quillen à gauche (resp à droite) vérifie la première propriété donc envoie les équivalences entre objets cofibrants (resp fibrants) sur des équivalences faibles.

Démonstration. Soit $f : A \xrightarrow{\sim} B$ une équivalence faible entre objets cofibrants. On a donc un pushout :

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & A \sqcup B \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

Donc les inclusions $i_A : A \to A \sqcup B$ et $i_B : B \to A \sqcup B$ sont des cofibrations.

Le morphisme f induit une application $(\mathrm{id}, f) : A \sqcup B \to B$. Factorisons-là comme une cofibration suivie d'une fibration acyclique. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & B & & \\ & & X \arrow[u, two heads, "p", "\sim"'] & & \\ A \arrow[uurr, "f", "\sim"'] \arrow[r, hook, "i_A"] & & A \sqcup B \arrow[u, hook, "j"] & & B \arrow[uull, equal] \arrow[ll, hook', "i_B"'] \end{tikzcd}$$

- Comme $p \circ (j \circ i_B) = \mathrm{id}_B \in \mathcal{W}$ et que $p \in \mathcal{W}$, on en déduit que $j \circ i_B \in \mathcal{W}$. De plus $j \in \mathcal{C}$ and $i_B \in \mathcal{C}$ donc $j \circ i_B \in \mathcal{C}$. De plus, sa source (B) et son but (X) sont cofibrants. Par hypothèse sur F, on a donc que $F(j \circ i_B)$ est une éqv.

- De la même manière, on en déduit que $F(j \circ i_A)$ est une éqv.

- Comme $F(p) \circ F(j \circ i_B) = F(\mathrm{id}_B)$ est un iso et que $F(j \circ i_B)$ est un iso, on a que $F(p)$ est une éqv.

- Finalement, $F(f) = F(p) \circ F(j \circ i_A)$ est la composée de deux éqv donc c'est une éqv. □

Démonstration de la Proposition 5.1.5. Supposons que F envoie les cofibrations acycliques entre objects cofibrants sur des isomorphismes (l'autre cas est dual). Grâce au Lemme de Brown, on en déduit que F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes.

On rappelle que $Q(X) \underset{\sim}{\xrightarrow{p_X}} X$ est la résolution cofibrante fonctorielle. On pose $\mathbb{L}F(X) := F(Q(X))$. La flèche naturelle $Q(X) \to X$ définit une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{L}F \Rightarrow F$. Comme F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isos, $\mathbb{L}F$ ainsi défini se factorise bien par $\mathrm{Ho}(\mathrm{C})$.

Montrons que la paire $(\mathbb{L}F, \alpha)$ vérifie la propriété universelle. Soit $(G : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}, \beta : G\lambda \Rightarrow F)$ comme dans la définition. On veut fabriquer $\theta_X : G(X) \to \mathbb{L}F(X) = F(Q(X))$ qui est naturel en X et tel que $\beta_X = \alpha_X \circ \theta_{\lambda(X)} : G(\lambda(X)) \to \mathbb{L}F(\lambda(X)) \to F(X)$. On a que $Q(X) \xrightarrow{\sim} X$ devient un iso dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$, donc son image par G est un iso dans H. On peut donc trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
G(Q(X)) \arrow[r, "\beta_{Q(X)}"] \arrow[d, "\cong"', "G(p_X)"] & \mathbb{L}F(X) = F(Q(X)) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
G(X) \arrow[r, "\beta_X"'] \arrow[ur, dashed, "\theta_X"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

Donc non seulement la transformation θ existe, mais en plus elle est unique (on n'a pas eu le choix : c'était forcément $\beta_{Q(X)} \circ G(p_X)^{-1}$). □

Définition 5.1.8. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur entre deux catégories de modèles.

1. Un *foncteur dérivé total à gauche* de F est un foncteur dérivé à gauche de $\lambda F : \mathsf{C} \to \mathsf{D} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

2. Un *foncteur dérivé total à droite* de F est un foncteur dérivé à droite de $\lambda F : \mathsf{C} \to \mathsf{D} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

On notera encore (abusivement...) $\mathbb{L}F$ et $\mathbb{R}F$ pour les foncteurs dérivés totaux.

Théorème 5.1.9. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen entre deux catégories de modèles. Alors les foncteurs dérivés totaux $\mathbb{L}F$, $\mathbb{R}G$ existent et forment une adjonction :*

$$\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathsf{D}) : \mathbb{R}G.$$

Démonstration. Le fait qu'ils existent découlent de la proposition qu'on vient de démontrer et de la définition des adjonctions de Quillen. Dans la preuve, on a vu que

$$\mathbb{L}F(A) = F(Q(A)), \qquad \mathbb{R}G(X) = G(R(X)),$$

où $Q(-)$ est la résolution cofibrante fonctorielle et $R(-)$ la résolution fibrante fonctorielle. On cherche donc une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{D})}(\mathbb{L}F(A), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, \mathbb{R}G(X)).$$

Par la description des morphismes dans la catégorie homotopique, cela revient à chercher une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(Q(A)), R(X))/\sim \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Q(A), G(R(X)))/\sim .$$

Comme $F \dashv G$, on a déjà une bijection avant de passer au quotient. Il faut voir qu'elle passe au quotient. Supposons que $f, g : F(Q(A)) \to R(X)$ sont homotopes. Soit $R(Y) \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow R(Y) \times R(Y)$ un objet chemin et $H : F(Q(A)) \to P$ une homotopie. Comme G

préserve les fibrations et les limites, on a que $G(R(Y)) \to G(P) \twoheadrightarrow R(Y) \times R(Y)$. De plus, $R(Y)$ et P sont fibrants, donc G envoie l'équivalence faible entre les deux sur une équivalence faible, donc $G(P)$ est un objet chemin pour $G(R(Y))$. Le morphisme H est adjoint à $H' : Q(A) \to R(P)$ et on vérifie que c'est une homotopie (à droite) entre les adjoints de f et g. La réciproque est duale. □

Théorème 5.1.10. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen. Les propositions suivantes sont équivalences :*

1. *L'adjonction induite $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathsf{D}) : \mathbb{R}G$ est une équivalence de catégories.*
2. *Pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$ et tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, un morphisme $F(A) \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $A \to G(Y)$ est une équivalence faible.*
3. *Pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$ et tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, les deux flèches :*
$$A \xrightarrow{\eta} G(F(A)) \to G(R(F(A)))$$
$$F(Q(G(Y))) \to F(G(Y)) \xrightarrow{\varepsilon} Y$$
sont des équivalences faibles.

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

2. $\implies$ 3. Le morphisme $A \to GRF(A)$ est adjoint de $F(A) \to RF(A)$, qui est une résolution fibrante, donc une équivalence faible. Grâce à 2, on en déduit que $A \to GRF(A)$ est une équivalence faible. La deuxième partie est duale.

3. $\implies$ 2. Soit A cofibrant, X fibrant, et $f : F(A) \to Y$ un morphisme. On note $\bar{f} : A \xrightarrow{\eta} GF(A) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$ son adjoint. On a un diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & GF(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d] & G(Y) \arrow[d, "\sim"] \\ A \arrow[r, "\sim"] & GRF(A) \arrow[r, "\sim"] & GR(Y) \end{tikzcd}$$
où $A \to GRF(A)$ est une équivalence par hypothèse, $G(Y) \to GR(Y)$ est une équivalence faible car G préserve les équivalences faibles entre objets fibrants, et $GRF(A) \to GR(Y)$ est une équivalence faible pour la même raison. On en déduit grâce à 2-parmi-3 que $\bar{f}$ (la ligne du haut) est une équivalence faible. L'autre cas est dual.

2. $\implies$ 1. L'unité de l'adjonction $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ est $\tilde{\eta} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(A))) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QA, GRFQ(A))$. Elle est adjointe à $FQ(A) \to RFQ(A)$, qui est une équivalence faible dont la source est cofibrante, donc son adjoint est bien une équivalence faible (c.à.d. un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$). Dualement, la counité de l'adjonction est un isomorphisme ; on en déduit que l'adjonction entre catégories homotopiques est une équivalence de catégories.

1. $\implies$ 3. Supposons que A est cofibrant. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} QA \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads, "\sim"] & GRFQ(A) \arrow[d] \\ A \arrow[r] & GRF(A) \end{tikzcd}$$

Comme l'unité de l'adjonction est un isomorphisme, $QA \to GRFQ(A)$ est une équivalence faible (cf. ci-dessus). Comme $QA \to A$ est une équivalence entre cofibrants, $F(QA) \to F(A)$ est une équivalence, donc $RFQ(A) \to RF(A)$ est une équivalence entre fibrants, donc $GRFQ(A) \to GRF(A)$ est une équivalence. On en déduit que la flèche du bas est une équivalence, ce qu'on voulait démontrer. L'autre cas est dual. □

Définition 5.1.11. Une adjonction de Quillen qui vérifie les hypothèses du théorème précédent s'appelle une *équivalence de Quillen*.

On a un critère bien pratique pour vérifier qu'une adjonction de Quillen est une équivalence de Quillen :

Proposition 5.1.12. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen. Les PSSE :*

1. *L'adjonction est une équivalence de Quillen.*
2. *Le foncteur F reflète les équivalences faibles entre objets cofibrants[2] et pour tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, le morphisme $FQG(X) \to X$ est une équivalence faible.*
3. *Le foncteur G reflète les équivalences faibles entre objets fibrants et pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$, le morphisme $A \to GRF(A)$ est une équivalence faible.*

preuve

Démonstration. Exercice. □

Exemple 5.1.13. Il y a une équivalence de Quillen entre la structure projective sur $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ et la structure injective sur $\mathsf{Ch}_{\leq 0}(R)$.

Exemple 5.1.14. L'identité $\mathrm{id} : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) : \mathrm{id}$ est une adjonction de Quillen entre la structure projective et la structure de Strøm. Est-ce que c'est une équivalence de Quillen ?

5.2 Limites et colimites homotopiques

Soit I une petite catégorie (c.à.d. on a un ensemble d'objets et un ensemble de morphismes). Un « diagramme indexé par I » est tout simplement un foncteur $X : I \to \mathsf{C}$, qu'on notera un peu différemment pour insister sur le fait que c'est un diagramme :

2. Cela signifie que si $f : A \to B$ est un morphisme entre objets cofibrants et que $F(f)$ est une équivalence faible, alors f est une équivalence faible.

la valeur en $i \in I$ est notée X_i et l'image de $\alpha : i \to j$ est notée $\alpha_* : X_i \to X_j$. Un morphisme entre diagrammes est une transformation naturelle. On note C^I la catégorie des diagrammes.

On a un foncteur cst : $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ tel que $\mathrm{cst}(A)_i = A$ et $\alpha_* = \mathrm{id}_A$ pour tout i, α.

Proposition 5.2.1.
- *Si* C *est complète alors* cst *a un adjoint à droite* $\lim_I : \mathsf{C}^I \to \mathsf{C}$.
- *Si* C *est cocomplète alors* cst *a un adjoint à gauche* $\mathrm{colim}_I : \mathsf{C}^I \to \mathsf{C}$. □

Si C a une notion d'équivalences faibles $\mathcal{W}$, alors C^I aussi en considérant $\mathcal{W}^I$ (c.à.d. que les équivalences faibles sont définis objet par objet).

Définition 5.2.2. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W})$ une catégorie avec des équivalences faibles et I une petite catégorie.

- une colimite homotopique est un foncteur dérivé total à gauche $\mathbb{L}\,\mathrm{colim}_I : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C})$.
- une limite homotopique est un foncteur dérivé total à droite $\mathbb{R}\lim_I : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C})$.

On note souvent $\mathrm{hocolim}_I$ et holim_I.

Remarque 5.2.3. $\mathrm{hocolim}_I$ n'est *pas* une colimite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$! La différence vient essentiellement du fait que $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})^I \neq \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I)$. Par exemple, si $I = \{a \leftarrow c \to b\}$, $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$, et $X \in \mathsf{Top}^I$ est défini par $X_a = X_b = *$ et $X_c = \{0, 1\}$ (avec les seules flèches possibles), alors $\mathrm{hocolim}_I X = S^1$ alors que la colimite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})^I$ est contractile. On peut également trouver des exemples où la (co)limite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ n'existe même pas, p.ex. le pushout de $* \leftarrow S^1 \xrightarrow{\times 2} S^1$ (exercice).

On va maintenant donner des conditions pour que holim et hocolim existent. Ce qui suit découle directement de ce qu'on connaît sur les foncteurs dérivés d'adjonctions de Quillen.

Lemme 5.2.4. *Soit* C *une catégorie de modèles et I une petite catégorie.*

1. *Si* C^I *admet une structure de modèles dont les équivalences faibles contiennent* $\mathcal{W}^I$ *et tq* cst : $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ *est adjoint de Quillen à droite, alors* $\mathrm{hocolim}_I$ *existe.*
2. *Si* C^I *admet une structure de modèles dont les équivalences faibles contiennent* $\mathcal{W}^I$ *et tq* cst : $\mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ *est adjoint de Quillen à gauche, alors* holim_I *existe.*

Définition 5.2.5. Soit C une catégorie de modèles et I une petite catégorie.

1. La structure projective sur C^I a pour équivalences faibles $\mathcal{W}^I$ et fibrations $\mathcal{F}^I$. Les cofibrations sont définies par propriété de relèvement.
2. La structure injective sur C^I a pour équivalences faibles $\mathcal{W}^I$ et cofibrations $\mathcal{C}^I$. Les fibrations sont définies par propriété de relèvement.

Lemme 5.2.6. *Si la structure projective (resp. injective) définit une structure de catégorie de modèles sur* C^I*, alors* $\mathrm{hocolim}_I$ *(resp.* holim_I*) existe.*

Remarque 5.2.7. Dans ce cas, pour calculer $\mathrm{hocolim}_I X$, il suffit de remplacer X par un objet cofibrant et de calculer sa limite. De même pour holim.

Définition 5.2.8. Une catégorie I est *très petite* si elle a un nombre fini d'objets et s'il existe $N > 0$ tel que toute suite de morphismes $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \dots A_n$ a au plus N flèches qui ne sont pas des identités.

Exemple 5.2.9. Un ensemble partiellement ordonné fini définit une catégorie très petite.

Théorème 5.2.10. *Si I est très petite alors les structures projective et injective définissent des structures de catégories de modèles sur* C^I.

Démonstration. La preuve complète est laissée en exercice et est un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale, celle des catégories de Reedy (dont les catégories très petites sont des exemples). La preuve marche essentiellement par récurrence. En effet, une catégorie très petite induit un préordre sur les objets de I, en posant $i \leq j \iff \mathrm{Hom}_I(i,j) \neq \emptyset$. Pour montrer que la structure projective est une catégorie de modèles, on procède de la façon suivante. Les axiomes (MC1), (MC2) et (MC3) sont clairs. Comme le poset $ob(I)$ est fini, il a un élément minimal i_0. On pose I' la sous-catégorie pleine sur tous les autres objets et on a un foncteur de restriction $U : \mathrm{C}^I \to \mathrm{C}^{I'}$. Par récurrence, $\mathrm{C}^{I'}$ est une catégorie de modèles. On arrive à décrire les cofibrations de C^I : $f : A \to X$ est une cofibration si et seulement si

- $f_{i_0} : A_{i_0} \to X_{i_0}$ est une cofibration ;
- soit $\{j_1, \dots, j_k\}$ les successeurs immédiats de i_0 dans le poset I, on définit $\partial_k(f)$ comme le pushout :

$$\begin{tikzcd} X_{i_0} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X_{j_k} \arrow[d, dashed] \\ Y_{i_0} \arrow[r, dashed] & \partial_k(f) \end{tikzcd}$$

  on peut alors définir $X'_j = X_j$ si $j \notin \{i_0, j_1, \dots, j_k\}$ et $X'_{i_k} = \partial_k(f)$; on a un morphisme $X' \to U(Y)$ dans $\mathrm{C}^{I'}$ et on demande qu'il soit une cofibration.

Pour démontrer les axiomes de relèvement ou de factorisation, on commence d'abord par s'occuper de i_0, et ensuite on trouve des relèvements/factorisations pour le morphisme $X' \to U(Y)$ compatible avec ce qui se passe en i_0. $\square$

Cela permet par exemple de définir les pushouts et les pullbacks homotopiques. Cependant, toutes les catégories d'indices ne sont pas très petites, par exemple $\mathbb{N}$ ne l'est pas. On va introduire une condition sur C qui permet de mettre une structure de catégorie de modèles sur C^I pour tout catégorie petite I.

Définition 5.2.11. Un objet $X \in \mathsf{C}$ est *compact* si $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,-)$ commute avec les colimites filtrées (c.à.d. les colimites indexées par les catégories qui sont *filtrées*, c.à.d. que tout diagramme fini dans I a un cocône – grosso modo une « borne supérieure »).

Définition 5.2.12. Une catégorie de modèles C est *combinatoire* si elle est cofibrement engendrée et qu'il existe un ensemble S d'objets compacts tel que tout objet de C soit une colimite filtrée d'objets de S.

Exemple 5.2.13. La catégorie $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est combinatoire, engendrée par les $D_n(R)$ et les $S_n(R)$. La catégorie Top n'est pas combinatoire, mais elle est Quillen équivalente à la catégorie des ensembles simpliciaux (voir la suite) qui l'est.

Théorème 5.2.14. *Soit* C *une catégorie de modèles cofibrement engendrée et I une petite catégorie. Alors la structure projective existe sur* C^I (*donc les colimites homotopiques existent*). *Si de plus* C *est combinatoire, alors la structure injective sur* C^I *existe* (*donc les limites homotopiques existent*).

Démonstration. Laissée en exercice, l'idée étant de montrer que C^I est cofibrement engendrée en utilisant les théorèmes qu'on a déjà vus. Le cas injectif est assez compliqué. □

Donnons maintenant quelques examples de colimites homotopiques.

Exemple 5.2.15. Soit $I = \{j \leftarrow i \rightarrow j'\}$, qui est très petite. Un diagramme $X \in \mathsf{C}^I$ est la donnée de trois objets et deux morphismes $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$. Alors $\mathrm{colim}_I X$ est le pushout de f et g, $B \cup_A C$. Cette notion n'est clairement pas invariante par homotopie : par exemple dans Top, $* \cup_{\{0,1\}} * = *$ alors que $[0,1] \cup_{\{0,1\}} [0,1] = S^1$. Pour calculer le pushout homotopique, $\mathrm{hocolim}_I X = B \cup^h_A C$, on doit remplacer notre diagramme par un diagramme cofibrant. On peut montrer qu'un remplacement cofibrant du diagramme est donné par $Q(B) \hookleftarrow Q(A) \hookrightarrow Q(C)$ où les $Q(-)$ sont des résolutions cofibrantes. On calcule alors simplement le pushout de ce nouveau diagramme pour obtenir le pushout homotopique.

Étant donné un diagramme $B \leftarrow A \rightarrow C$, si la catégorie C est *propre à gauche*[3] on peut remplacer $A \rightarrow C$ par une cofibration $A \hookrightarrow C' \xrightarrow{\sim} C$ et calculer $B \cup^h_A C = B \cup^h_A C'$.

Dans Top, une manière standard de remplacer une flèche par une cofibration est de considérer son cylindre d'application, $\mathrm{Cyl}(g) = A \times [0,1] \sqcup C/((a,1) \sim g(c))$. On trouve alors $B \cup^h_A C = B \cup^h_A \mathrm{Cyl}(C)$.

Dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ avec la structure projective, pour remplacer $A \xrightarrow{g} C$ par une cofibration, on peut considérer une construction formellement similaire :

$$\mathrm{Cyl}(g) = (A_n \oplus C_n \oplus A_{n-1}, d(a,c,a') = (da + a', dc - g(a'), da')).$$

Alors le pushout homotopique est donné par :

$$B \oplus^h_A C = (B_n \oplus C_n \oplus A_{n-1}, d(b,c,a) = (db + f(a), dc - g(a), da)).$$

3. Cela signifie que le poussé en avant d'une équivalence faible est une équivalence faible. C'est le cas de Top (avec la structure de Quillen) et de $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$.

Le tiré en arrière homotopique est la version duale. Exercice : calculer le tiré en arrière homotopique dans Top et $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$.

6 Ensembles simpliciaux

6.1 Notions de base

6.1.1 Définition et propriétés

Définition 6.1.1. La « catégorie simpliciale » Δ a pour objets les ensembles finis totalement ordonnées $[n] = \{0 < 1 < \ldots < n\}$ et pour morphismes les applications croissantes.

On notera un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m],[n])$ comme une suite $f(0) \to f(1) \to \ldots \to f(m)$. Par exemple, l'identité est $0 \to 1 \to \ldots \to n$.

Tout morphisme de Δ se factorise uniquement comme une surjection croissante suivie d'une injection croissante. Par ailleurs,

- les injections croissantes sont engendrées par les $\partial^i : [n-1] \to [n]$ (pour $0 \leq i \leq n$) définis par

$$\partial^i = 0 \to 1 \to \ldots \to i-1 \to i+1 \to \ldots \to n$$

- les surjections croissantes sont engendrées par les $\sigma^j : [n+1] \to [n]$ (pour $0 \leq j \leq n$) définis par

$$\sigma^j = 0 \to \ldots \to j \to j \to \ldots \to n$$

On a de plus les « relations cosimpliciales » (qu'il ne faut pas apprendre par cœur... !)

$$\begin{aligned}
\partial^j\partial^i &= \partial^i\partial^{j-1} && \text{si } i < j,\\
\sigma^j\partial^i &= \partial^i\sigma^{j-1} && \text{si } i < j,\\
\sigma^j\partial^i &= \mathrm{id} && \text{si } i = j \text{ ou } j+1,\\
\sigma^j\partial^i &= \partial^{i-1}\sigma^j && \text{si } i < j,\\
\sigma^j\sigma^i &= \sigma^{i-1}\sigma^j && \text{si } i < j.
\end{aligned}$$

Définition 6.1.2. Un *ensemble simplicial* est un foncteur $X_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. On note $s\mathrm{Set}$ la catégorie des ensembles simpliciaux.

Concrètement, un ensemble simplicial est donc la donnée :

- d'une suite d'ensembles, X_0, X_1, X_2...dont les éléments sont appelés les n-simplexes,

- d'applications « faces » $d_i : X_n \to X_{n-1}$ pour $0 \leq i \leq n$,
- d'applications « dégénérescences » $s_j : X_n \to X_{n+1}$ pour $0 \leq j \leq n$,
- vérifiant les relations « simpliciales » qui sont les mêmes que les relations cosimpliciales mais où l'on a inverse l'ordre des compositions (par exemple $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$, etc).

Une application simpliciale $X_\bullet \to Y_\bullet$ est la donnée d'applications $f_n : X_n \to Y_n$ qui commutent avec les faces et les dégénérescences.

Définition 6.1.3. Plus généralement, un *objet simplicial* dans une catégorie C est un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$. On note $s\mathsf{C}$ la catégorie des objets simpliciaux dans C.

Définition 6.1.4 (Duale)**.** Un *ensemble cosimplicial* est un foncteur covariant $\Delta \to \mathsf{Set}$, la catégorie correspondante est notée $c\mathsf{Set}$. On définit aussi la catégorie $c\mathsf{C}$ des objets cosimpliciaux dans une catégorie donnée.

Exemple 6.1.5. Par le Lemme de Yoneda, pour $n \geq 0$ fixé, on a un ensemble simplicial « canonique », le n-simplexe standard $\Delta^n_\bullet$, défini par :

$$\Delta^n_k = \mathrm{Hom}_\Delta([k], [n]).$$

On note par ailleurs que $\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n_\bullet, X_\bullet) \cong X_n$ (toujours le Lemme de Yoneda). On en déduit alors que

$$X_\bullet \cong \mathrm{colim}_{f:\Delta^n_\bullet \to X_\bullet} \Delta^n_\bullet.$$

Exemple 6.1.6. On remarque que $\Delta^\bullet_\bullet$ définit un objet cosimplicial dans les ensembles simpliciaux. Donnons un exemple d'espace cosimplicial qui y ressemble. On définit

$$\mathbb{A}^n := \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, t_i \geq 0, \ \sum t_i = 1\}.$$

Les cofaces et les codégénérescences sont données par :

$$\begin{aligned} \partial^i(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_n), \\ \sigma^j(t_0, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

On voit par exemple que $\mathbb{A}^0$ est un point, $\mathbb{A}^1 = [0,1]$, $\mathbb{A}^2$ est un triangle, etc. Les cofaces sont les inclusions des faces de codimension 1, alors que les codégénérescences « écrasent » une dimension.

Définition 6.1.7. Soit X un ensemble simplicial. Un simplexe $x \in X_n$ est dit *dégénéré* si $x = s_i(y)$ avec $y \in X_{n-1}$. Dans le cas contraire, il est dit *non-dégénéré*.

Lemme 6.1.8. *Un simplexe dégénéré est obtenu en appliquant une suite de dégénérescences à un unique simple non-dégénéré.*

Démonstration. Soit $w = s_{i_0}s_{i_1}\dots s_{i_k}(x) = s_{j_0}s_{j_1}\dots s_{j_l}(y)$ un simplexe dégénéré avec $x \in X_a, y \in X_b$ non dégénéré. Montrons que $x = y$. Grâce aux identités simpliciales,

$$x = d_{i_k}\dots d_{i_0}(w) = d_{i_k}\dots d_{i_0}s_{j_0}\dots s_{j_l}(y).$$

En utilisant les identités simpliciales, on fait passer tous les s à gauche des d et on obtient $x = s_{u_0}\dots s_{u_m}d_{v_1}\dots d_{v_n}(y)$. Or x est non-dégénéré, donc $m = 0$ et $x = d_{v_1}\dots d_{v_n}(y)$. En particulier, $a = b - n \leq b$. Par symétrie, on trouve aussi que $b \leq a$, d'où $a = b$. En reprenant l'égalité ci-dessus, on en déduit $x = y$ (il ne peut pas y avoir de $d_{\dots}$). □

6.1.2 Adjonction avec les espaces topologiques

On rappelle l'espace cosimplicial standard :

$$\mathbb{\Delta}^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \mid t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Définition 6.1.9. Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. Sa *réalisation géométrique* est l'espace topologique quotient :

$$|X_\bullet| := \left(\coprod_{n\geq 0} X_n \times \mathbb{\Delta}^n\right) / \sim,$$

où la relation d'équivalence est donnée par

$$(d_i(x), t) \sim (x, \partial^i(t)), \qquad (s_j(x), t) \sim (x, \sigma^j(t)).$$

Définition 6.1.10. Soit Y un espace topologique. Son *ensemble (simplicial) singulier* est donné par :

$$S_\bullet(Y) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{\Delta}^\bullet, Y),$$

avec les faces et les dégénérescences induites par $\mathbb{\Delta}^\bullet$.

Proposition 6.1.11. *La réalisation géométrique et l'ensemble singulier définissent une adjonction :*

$$|-| : s\mathsf{Set} \leftrightarrows \mathsf{Top} : S_\bullet.$$

Démonstration. Il est clair que $|-|$ et $S_\bullet$ définissent des foncteurs. Montrons qu'ils sont adjoints en définissant des bijections naturelles $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(|X_\bullet|, Y) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(X, S_\bullet(Y)) : \psi$.

- Soit $f : X_\bullet \to S_\bullet(Y)$ une application simplicial. On a donc des applications $f_n : X_n \to S_n(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{\Delta}^n, Y)$ qui commutent avec les faces et les dégénérescences. On va définir une application continue $\psi(f) : |X_\bullet| \to Y$. On commence par définir une application continue

  $$\coprod_{n\geq 0} X_n \times \mathbb{\Delta}^n \to Y$$

  et on montrera qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence. Concrètement, si $(x, t) \in X_n \times \mathbb{\Delta}^n$, on lui associe $f_n(x)(t)$. Cette application est bien continue, et on vérifie aisément la compatibilité avec la relation d'équivalence (car f commute avec d_i et s_j).

- Soit $g : |X_\bullet| \to Y$ une application continue. On définit $\varphi(h) : X_\bullet \to S_\bullet(Y)$ de la façon suivante. Pour $x \in X_n$, on définit $\varphi(h)_n(x) : \mathbb{\Delta}^n \to Y$ par $\varphi(h)_n(x) : t \mapsto h([x,t])$. On vérifie sans peine que $\varphi(h)_n(x)$ est continue et que $\varphi(h)$ est simpliciale.

On vérifie également sans peine que φ et ψ sont naturelles et inverses l'une de l'autre. □

Exemple 6.1.12. Soit E un ensemble. On définit l'ensemble simplicial constant $E_\bullet$ par $E_n = E$, et toutes les faces et dégénérescences sont des identités. Alors $|E_\bullet|$ est simplement E vu comme un espace discret.

Exemple 6.1.13. Grâce au lemme de Yoneda, $|\Delta^n| = \mathbb{\Delta}^n$.

Exemple 6.1.14 (Exercice). Décrire l'unique ensemble simplicial qui possède exactement deux simplexes non-dégénérés en degrés respectifs 0 et 1. Montrer que sa réalisation géométrique est un cercle.

Remarque 6.1.15. On pourrait remplacer $\mathbb{\Delta}^\bullet$ par n'importe quel espace cosimplicial et on obtiendrait une adjonction. Plus généralement, étant donné une catégorie cocomplète C et un objet cosimplicial $A^\bullet \in c\mathsf{C}$, on obtient une adjonction $s\mathsf{Set} \leftrightarrows \mathsf{C}$.

6.2 Structure de modèle

On va définir une structure de modèles sur $s\mathsf{Set}$ telle que l'adjonction précédente est une équivalence de Quillen. Les définitions des équivalences faibles et des fibrations ressemblent à celles des équivalences faibles d'homotopie et des fibrations de Serre.

Définition 6.2.1. Soit $\mathrm{id}_{[n]} = v_n \in \Delta^n_n$ le seul simplexe non-dégénéré. Le bord du simplexe standard $\partial\Delta^n_\bullet \subset \Delta^n_\bullet$ est le plus petit sous-ensemble simplicial qui contient toutes les faces $d_i v_n$ $(0 \le i \le n)$. Concrètement, $\partial\Delta^n_i = \{f : [i] \to [n] \mid f \text{ n'est pas surjective}\}$. On définit aussi (par convention) $\partial\Delta^0 = \emptyset$.

Définition 6.2.2. Soit $n \ge 1$ et $0 \le k \le n$. Le $k$ième cornet $(\Lambda^n_k)_\bullet \subset \Delta^n_\bullet$ est le plus petit sous-ensemble simplicial qui contient les faces $d_i v_n$ pour $i \ne k$. Concrètement, $(\Lambda^n_k)_i$ est composé des applications croissantes $[i] \to [n]$ dont l'image ne contient pas $[n] - \{r\}$.

Lemme 6.2.3. *On a des identifications :*

$$\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Lambda^n_k, X) = \{(y_0, \dots, \hat{y}_k, \dots, y_n) \in (X_{n-1})^{\times n} \mid d_i y_j = d_{j-1} y_i,\ \forall i < j\},$$

$$\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\partial\Delta^n, X) = \{(y_0, \dots, y_n) \in (X_{n-1})^{\times n+1} \mid d_i y_j = d_{j-1} y_i,\ \forall i < j\}.$$

La preuve est laissée en exercice.

Définition 6.2.4. Une *fibration de Kan* est une application simplicial $p : X \to Y$ qui a la RLP par rapport à toutes les inclusions $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

Concrètement, un morphisme est une fibration de Kan si pour tout simplexe $y \in Y_n$ et pour tout n-uplet $z_0, \dots, \hat{z}_k, \dots, z_n \in X_{n-1}$ vérifiant $p(z_i) = d_i(y)$ et $d_i z_j = d_{j-1} z_i \ \forall i < j$, alors il existe $x \in X_n$ tel que $p(x) = y$ et $d_i(x) = z_i$. Géométriquement, on peut « remplir » le cornet.

Lemme 6.2.5. *Une application continue $p : X \to Y$ est une fibration de Serre si et seulement si $S_\bullet(p)$ est une fibration de Kan.*

Remarque 6.2.6. Tous les ensembles simpliciaux ne sont pas fibrants. Par exemple, Δ^n ne l'est pas ! Considérons le couple (y_1, y_2) où $y_0 = 0 \to 2$ et $y_2 = 0 \to 1$. Alors il n'existe pas de $x \in \Delta^2_2$ tel que $d_1 x = y_1$ et $d_2 x = y_2$. On aurait nécessairement $x = 0 \to 2 \to 1$, qui n'est pas croissante.

On en arrive au théorème :

Théorème 6.2.7. *Il existe une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée et combinatoire sur* sSet *où :*

- *les équivalences faibles sont les applications simpliciales $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ telles que $|f| : |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$ est une équivalence d'homotopie faible ;*
- *les fibrations sont les fibrations de Kan ;*
- *les cofibrations sont les inclusions.*

Pour démontrer ce théorème, on va appliquer le Théorème 4.2.10 sur les catégories de modèles cofibrement engendrées. On choisit comme cofibrations génératrices $\mathcal{I} = \{\partial\Delta^n \subset \Delta^n\}$ et comme cofibrations acycliques génératrices $\mathcal{J} = \{\Lambda^n_k \subset \Delta^n\}$. On a bien par définition que $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp$. Par ailleurs, les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont bien petits par rapport à tout ensemble simplicial (grâce à la description des morphismes $\partial\Delta^n \to \dots$ et $\Lambda^n_k \to \dots$.)

Vérifions que les cofibrations sont les bonnes.

Lemme 6.2.8. *Une application simpliciale est une inclusion si et seulement si elle est dans ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. De plus toute cofibration est dans $\mathcal{I}$-cell.*

Démonstration. Montrons d'abord que les applications de ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ sont injectives. Grâce à l'argument du petit objet, $f : X \to Y \in {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ se factorise en $p_\infty i_\infty$ où $i_\infty \in \mathcal{I}$-cell et $p_\infty = \mathcal{I}^\perp$ (donc c'est une fibration de Kan). En particulier f a la LLP par rapport à p_∞

et on a vu précédemment qu'en conséquence, f était un rétract de i_∞. Or i_∞ est obtenu comme composée transfinie de pushouts d'injections, donc c'est une injection.

Réciproquement, supposons que $i : A \to X$ est injective et montrons que c'est une composée dénombrable de pushouts de coproduits d'applications de $\mathcal{I}$ et que donc $i \in \mathcal{I}$-cell $\subset {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. Posons $A_{(0)} = A$. Supposons qu'on a définit une injection $i_k : A_{(k)} \to X$ qui est un isomorphisme sur les simplexes de dimension $< k$ et étendons-là en une injection $A_{(k+1)} \to X$ de même type. Soit S_k l'ensemble des k-simplexes de X qui ne sont pas dans l'image de i_k (ils ne peuvent pas être dégénérés), qu'on met en correspondance avec des applications $\Delta^k \to X$. Pour $s \in S_k$, la restriction de s à $\partial\Delta^k$ se factorise par $A_{(k)}$. On définit alors $A_{(k+1)}$ comme le pushout :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{s\in S_k} \partial\Delta^k \arrow[r] \arrow[d, hook] & A_{(k)} \arrow[d, dashed] \\ \coprod_{s\in S_k} \Delta^k \arrow[r, dashed] & A_{(k+1)}. \end{tikzcd}$$

L'application induite $A_{(k+1)} \to X$ est surjective en dimension $\leq k$ par construction. Elle est de plus injective, car on ne rajoute que des simplexes non-dégénérés. □

Lemme 6.2.9. *Un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire relatif est une cofibration acyclique (c.à.d. dans $\mathcal{J}$-cell $\subset \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$).*

Démonstration. Les morphismes de $\mathcal{J}$ sont des injections, c.à.d. ils sont dans ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. Une classe du type ${}^\perp(\ldots)$ est stable par pushouts, donc $\mathcal{J}$-cell $\subset {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$.

La réalisation géométrique de $\Lambda^n_k \to \Delta^n$ est isomorphe à $[0,1]^{n-1} \subset [0,1]^n$, donc $|\mathcal{J}|$ est l'ensemble des cofibrations acycliques de Top. Or la réalisation géométrique est un adjoint à gauche donc $|{}^\perp(\mathcal{J}^\perp)| = {}^\perp(|\mathcal{J}|^\perp)$ (exercice), or ${}^\perp(|\mathcal{J}|^\perp)$ est exactement formé par les cofibrations acyclique de Top. En particulier ce sont des équivalences d'homotopie faibles, donc par définition ${}^\perp(\mathcal{J}^\perp) \subset \mathcal{W}$. On en déduit donc que $\mathcal{J}$-cell $\subset$ ${}^\perp(\mathcal{J}^\perp) \subset \mathcal{W}$. □

Lemme 6.2.10. *Les éléments de $\mathcal{I}^\perp$ sont des fibrations de Kan acycliques.*

Démonstration. Soit $p : X \to Y \in \mathcal{I}^\perp$. On a montré qu'alors p a la RLP par rapport à toutes les inclusions. En particulier elle a la RLP part rapport à $\mathcal{J}$, c.à.d. $p \in \mathcal{J}^\perp$, donc par définition c'est une fibration de Kan. Reste à montrer que $|p|$ est une équivalence d'homotopie faible. Comme p a la RLP par rapport à toutes les inclusions, on peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "i_X"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \times Y \arrow[r, "p_Y"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

Et donc p est un rétract de p_Y :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "p"] & X \times Y \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

En particulier, $|p|$ est un rétract de $|p_Y|$, qui est une fibration de Serre, donc $|p|$ aussi. Notons $F = \Delta^0 \times_Y X$ la fibre de p ; on veut montrer que $|F|$ est contractile. Comme p a la RLP par rapport à $\mathcal{J}$ et que $F \to \Delta^0$ est un pullback de p, alors $F \to \Delta^0$ aussi. Donc $F \to \Delta^0$ a la RLP par rapport à toutes les inclusions. En particulier, F est non vide ; soit $f \in F_0$ un 0-simplexe, et $f : F \to F$ l'application constante égale à f. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "(\mathrm{id}, f)"] \arrow[d, hook] & F \arrow[d] \\ F \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "H"] & \Delta^0 \end{tikzcd}$$

où l'on peut trouver un relèvement, qui est une homotopie entre $\mathrm{id}_{|F|}$ et une application constante. On en déduit que F est contractile, donc par la LES en homotopie, $|p|$ est une équivalence d'homotopie faible, donc p est une équivalence faible. □

Lemme 6.2.11. *Les fibrations acycliques sont dans $\mathcal{J}^{\perp}$.*

Démonstration. C'est le point-clé de la preuve, et le plus difficile. On ira voir les références. La preuve repose sur la théorie des fibrations minimales et des extensions anodines ; □

Démonstration du Théorème 6.2.7. On vient de vérifier toutes les hypothèses du Théorème 4.2.10, donc sSet admet une structure de catégories de modèles cofibrement engendrée. De plus, sSet est combinatoire car $\{\Delta^n, \partial\Delta^n\}$ est un ensemble de petits générateurs. □

6.3 Équivalence avec Top

Théorème 6.3.1. *L'adjonction $|-| : s\mathsf{Set} \leftrightarrows \mathsf{Top} : S_\bullet$ de la Proposition 6.1.11 est une équivalence de Quillen.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire un petit détour par l'enrichissement de sSet dans elle-même et par les groupes d'homotopie simpliciaux.

6.3.1 Enrichissement

Nous allons également avoir besoin du fait que la catégorie sSet est *enrichie* sur elle-même. Cela signifie qu'on peut étendre $\mathrm{Hom}_{sSet}(A, X)$ en un ensemble simplicial dont les sommets sont exactement les applications simpliciales $A \to X$. Les arêtes correspondront aux homotopies entre applications.

Définition 6.3.2. Soit A, X deux ensembles simpliciaux. On définit *l'espace des applications simpliciales* $\mathrm{Map}_\bullet(A, X)$ par :

$$\mathrm{Map}_n(A, X) = \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times \Delta^n, X).$$

Sa structure simpliciale est induite par la structure cosimpliciale de $\Delta^\bullet$.

Lemme 6.3.3. *On a un isomorphisme naturel* $\mathrm{Map}_\bullet(\Delta^0, X) \cong X_\bullet$.

Démonstration. C'est essentiellement le Lemme de Yoneda. En effet, $\Delta^0 \times \Delta^n \cong \Delta^n$. On a donc :

$$\mathrm{Map}_n(\Delta^0, X) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Delta^n, X) \cong X_n.$$

On vérifie aisément que cet isomorphisme est compatible avec les faces et les dégénérescences. □

Lemme 6.3.4. *On a un isomorphisme naturel en* (A, B, X) *:*

$$\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X)) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X).$$

En termes savants, on dit que $s\mathrm{Set}$ est une catégorie enrichie sur $s\mathrm{Set}$ cartésienne fermée.

Démonstration. Définissons une application $\psi : \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X)) \to \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X)$. Pour $f : A \to \mathrm{Map}(B, X)$, on pose :

$$\begin{aligned} \psi(f) : A_n \times B_n &\to X_n, \\ (a, b) &\mapsto \underbrace{f(a)}_{\in \mathrm{Map}_n(B,X) = \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(B \times \Delta^n, X)}(b, \mathrm{id}_{[n]}). \end{aligned}$$

Vérifions que $\psi(f)$ est une application simpliciale. On le vérifie pour les faces, la preuve pour les dégénérescences est identique.

- D'une part, on a $d_i(\psi(f)(a, b)) = d_i(f(a)(b, \mathrm{id}_{[n]}))$. Or $f(a) : B \times \Delta^n \to X$ est simpliciale, donc $d_i(f(a)(b, \mathrm{id}_{[n]})) = f(a)(d_i(b), \partial^i)$ où $\partial^i \in \Delta^n_{n-1}$.
- D'autre part, $\psi(f)(d_i a, d_i b) = f(d_i a)(d_i b, \mathrm{id}_{[n-1]})$. On f est une application simpliciale, donc $f(d_i a)(d_i b, \mathrm{id}_{[n-1]}) = f(a)(d_i b, \partial^i \circ \mathrm{id}_{[n-1]})$. On a bien l'égalité.

Réciproquement, on définit $\varphi : \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X) \to \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X))$ de la manière suivante. Pour $g : A \times B \to X$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi(g)_n : A_n &\to \mathrm{Map}_n(B, X), \\ a &\mapsto \begin{cases} B_k \times \Delta^n_k \to X_k, \\ \quad (b, u) \mapsto g_k(u^*(a), b). \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier (exercice) que $\varphi(g)(a)$ est une application simpliciale $B \times \Delta^n \to X$, que $\varphi(g)$ est une application simpliciale $A \to \mathrm{Map}(B, X)$ et enfin que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. □

On va maintenant montrer que Map se comporte bien par rapport à la structure de modèle. On va utiliser le lemme suivant quand on s'intéressera aux groupes d'homotopie simpliciaux.

Soit $i : A \to B$ et $p : X \to Y$ deux applications simpliciales, alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(B,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Map}(B,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ \mathrm{Map}(A,X) \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Map}(A,Y) \end{tikzcd}$$

qui induit une application canonique

$$(i^*, p_*) : \mathrm{Map}(B,X) \to \mathrm{Map}(A,X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B,Y). \tag{6.1}$$

Proposition 6.3.5. *Soit $i : A \hookrightarrow B$ une cofibration et $p : X \twoheadrightarrow Y$ une fibration. Alors le morphisme canonique (i^*, p_*) (6.1) est une fibration. Si de plus i ou f est acyclique, alors (i^*, p_*) est acyclique.*

Lemme 6.3.6. *Soit $i : A \overset{\sim}{\hookrightarrow} B$ une cofibration acyclique et $j : K \hookrightarrow L$ une cofibration. Alors*

$$i \,\square\, j : (K \times B) \cup_{K\times A} (L \times A) \to L \times B$$

est une cofibration acyclique.

On peut déjà démontrer la Proposition 6.3.5 et un corollaire grâce à ce lemme.

Démonstration de la Proposition 6.3.5. Il faut montrer que (i^*, p_*) a la RLP par rapport aux inclusions $\Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$. Or, un diagramme du type de gauche est équivalent à un diagramme du type de droite :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & \mathrm{Map}(B,X) \arrow[d, "(i^*,p_*)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Map}(A,X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\Lambda^n_k \times B) \cup_{\Lambda^n_k \times A} (\Delta^n \times A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ \Delta^n \times B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Or $\Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$ est une cofibration acyclique et $A \subset B$ est une cofibration, donc j est une cofibration acyclique par le Lemme 6.3.6. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme de droite, qui correspond à un relèvement dans le diagramme de gauche.

Pour montrer que (i^*, f_*) est acyclique si i ou f l'est, on remplace $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$ par $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ et on adapte. □

Corollaire 6.3.7. *Si $i : A \overset{\sim}{\hookrightarrow} B$ une cofibration acyclique et X un ensemble simplicial fibrant, alors* $\mathrm{Map}(B,X) \to \mathrm{Map}(A,X)$ *est une fibration acyclique. Dualement, si $p : X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ est une cofibration acyclique et A est cofibrant, alors* $\mathrm{Map}(A,X) \to \mathrm{Map}(A,Y)$ *est une fibration acyclique.*

Démonstration. Démontrons le premier cas, le deuxième est dual. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $i : A \to B$ et à $p : X \to *$. On a alors $\mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A,*)} \mathrm{Map}(B, *) \cong \mathrm{Map}(A, X)$. □

Démonstration du Lemme 6.3.6. On fixe $j : K \hookrightarrow L$. Comme i est une cofibration acyclique, c'est un rétract d'un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire relatif (où $\mathcal{J} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}$).

Montrons que la classe des morphismes du type $(-) \square j$ est stable par pushouts. Comme il est de plus clair que $(-) \square j$ envoie les rétracts sur les rétracts, il nous suffira alors de montrer que si $i : \Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$ est une cofibration acyclique génératrice, alors $i \square j$ est une cofibration acyclique.

Supposons que $D = B \cup_A C$. On veut montrer qu'on a un pushout :

$$\begin{tikzcd}
(K \times B) \cup_{K \times A} (L \times A) \arrow[r] \arrow[d] & L \times B \arrow[d] \\
(K \times D) \cup_{K \times C} (L \times C) \arrow[r] & L \times D
\end{tikzcd}$$

On remarque que $L \times D = L \times B \cup_{L \times A} L \times D$. De plus, $K \times D = K \times C \cup_{K \times A} K \times B$, donc

$$\begin{aligned}
K \times D \cup_{K \times C} L \times C &= (K \times B \cup_{K \times A} K \times C) \cup_{K \times C} L \times C \\
&= K \times B \cup_{K \times A} L \times C,
\end{aligned}$$

d'où on en déduit que

$$\begin{aligned}
(K \times D \cup_{K \times C} L \times C) \cup_{K \times B \times_{K \times A} L \times A} L \times B &= (K \times B \cup_{K \times A} L \times C) \cup_{K \times B \times_{K \times A} L \times A} L \times B \\
&= L \times C \cup_{L \times A} L \times B = L \times D
\end{aligned}$$

(où l'on a utilisé que $K \subset L$ est une inclusion dans le passage à la dernière ligne).

Soit maintenant $i : \Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$ une cofibration acyclique génératrice. Montrons que

$$i \square j : \underbrace{K \times \Delta^n \cup_{K \times \Lambda^n_k} L \times \Lambda^n_k}_{X^0} \to L \times \Delta^n$$

est une cofibration acyclique. Nous allons montrer que $L \times \Delta^n$ s'obtient à partir de X^0 en effectuant un nombre dénombrable de rattachements de cellules $\Lambda^d_i \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$. □

finir la preuve

6.3.2 Groupes d'homotopie simpliciaux

Explicitons la relation d'homotopie (à gauche) dans $s\mathrm{Set}$. Si A est un ensemble simplicial, un cylindre naturel est donné par $A \sqcup A = A \times \partial\Delta^1 \hookrightarrow A \times \Delta^1 \xrightarrow{\sim} A$. On en déduit la définition suivante :

Définition 6.3.8. Deux applications simpliciales $f, g : A \to X$ sont *homotopes* (à gauche) s'il existe $h : A \times \Delta^1 \to X$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A = A \times \Delta^0 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times \Delta^1 \arrow[r, "h"] & X \\
A = A \times \Delta^0 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait déjà que si X est fibrant, cela donne une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(A, X)$. On peut raffiner légèrement cette notion.

Définition 6.3.9. Soit A un ensemble simplicial et $B \subset A$ un sous-ensemble simplicial. Deux applications simpliciales $f, g : A \to X$ dont les restrictions à B coïncident sont *homotopes relativement à B* s'il existe une homotopie h comme ci-dessus satisfaisant $h_{|B\times\Delta^1}(b, w) = f(b) = g(b)$.

Il n'est pas difficile de voir que si X est fibrant, cela induit une relation d'équivalence sur $\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(A, X) \mid f_{|B} = \varphi\}$ pour $\varphi : B \to X$ fixé.

Définition 6.3.10. Soit X un ensemble simplicial fibrant et $v \in X_0$ un sommet. Pour $n \geq 1$, le *nième groupe d'homotopie simplicial* $\pi_n(X, v)$ est l'ensemble des applications $\Delta^n \to X$ qui sont constamment égales à v sur $\partial\Delta^n$, modulo la relation d'homotopie rel $\partial\Delta^n$.

Définition 6.3.11. On définit aussi $\pi_0(X)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $\Delta^0 \to X$ (c.à.d. les sommets de X modulo la relation « être relié par un chemin »).

Concrètement, $\pi_0(X)$ est le quotient de X_0 par la relation suivante : $x \sim y \iff \exists e \in X_1$ t.q. $d_0 e = x$ et $d_1 e = y$. (Exercice : vérifier « à la main » que c'est une relation d'équivalence.)

Proposition 6.3.12. *Soit X un ensemble simplicial fibrant, $v \in X_0$ un sommet et $n \geq 1$ un entier. Alors $\pi_n(X, v)$ est un groupe, qui est abélien pour $n \geq 2$.*

Démonstration. Soit $\alpha, \beta : \Delta^n \to X$ deux applications qui représentent des classes dans $\pi_n(X, v)$. On définit $[\alpha] \cdot [\beta] \in \pi_n(X, v)$ de la façon suivante. On construit une application $\gamma : \Lambda^{n+1}_n \to X$ en posant $\gamma_i = v$ pour $0 \leq i \leq n-1$, $\gamma_n = \alpha$ et $\gamma_{n+1} = \beta$. (En notation compacte : $\gamma = (v, \dots, v, -, \alpha, \beta)$.) On a bien $d_i \gamma_j = d_{j-1} \gamma_i$. On peut donc trouver une extension $\omega : \Delta^{n+1} \to X$ vérifiant $d_i \omega = \gamma_i$. On pose alors $[\alpha] \cdot [\beta] := [d_n \omega]$.

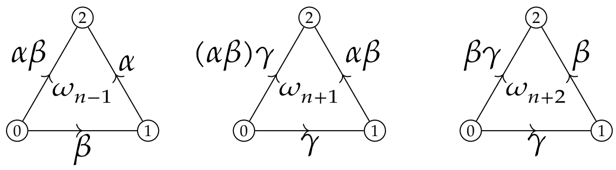
Montrons que cette opération est associative. Le reste des propriétés se prouve exactement comme dans Top (exercice). Soit $\alpha, \beta, \gamma : \Delta^n \to X$ des applications représentant des éléments de $\pi_n(X, v)$. On peut trouver des simplexes $\omega_{n-1}, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
\partial\omega_{n-1} &= (v, \dots, v, \alpha, d_n\omega_{n-1}, \beta), \\
\partial\omega_{n+1} &= (v, \dots, v, d_n\omega_{n-1}, d_n\omega_{n+1}\gamma), \\
\partial\omega_{n+2} &= (v, \dots, v, \beta, d_n\omega_{n+2}, \gamma).
\end{aligned}$$

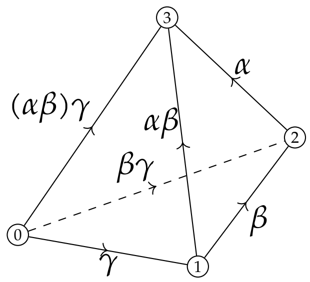
Cela définit une application $(v, \dots, v, \omega_{n-1}, -, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}) : \Lambda^{n+2}_{n+1} \to X$, qu'on étend à Δ^{n+2}. On note ζ la $n$ième face du simplexe trouvé. Alors $\partial\zeta = (v, \dots, v, x, d_n\omega_{n+1}, d_n\omega_{n+2})$, donc :

$$\begin{aligned}
([\alpha][\beta])[\gamma] &= [d_n\omega_{n-1}][\gamma] \\
&= [d_n\omega_{n+1}] \\
&= [d_n\zeta] \\
&= [\alpha][d_n\omega_{n+2}] \\
&= [\alpha]([\beta][\gamma]).
\end{aligned}$$

Avec des dessins, pour $n = 1$:



et :



□

Lemme 6.3.13. *Soit X un ensemble simplicial fibrant. Alors $\pi_0(X) \cong \pi_0(|X|)$.*

Démonstration. On a une application naturelle $\pi_0(X) \to \pi_0(|X|)$ qui envoie un sommet sur la composante connexe par arcs de $|X|$ qui le contient. Elle passe au quotient par définition de $|X|$. Elle est clairement surjective (car $\mathbb{\Delta}^n$ est connexe par arcs). Montrons qu'elle est aussi injective. Pour $\alpha \in \pi_0(X)$, on note X_α le sous-ensemble simplicial formé des simplexes de X dont tous les sommets sont dans α. On vérifie aisément que $X = \bigsqcup_{\alpha\in\pi_0(X)} X_\alpha$. La réalisation géométrique est un adjoint à gauche, donc elle préserve les coproduits. Or le coproduit dans Top est l'union disjointe, donc deux sommets dans des classes différentes de $\pi_0(X)$ différentes sont envoyés dans des composantes connexes différentes de $|X|$. □

Proposition 6.3.14. *Soit X un ensemble simplicial fibrant, $v \in X_0$ un sommet et $n \geq 1$ un entier. Alors $\pi_n(X, v) \cong \pi_n(|X|, |v|)$.*

Démonstration. La preuve fonctionne par récurrence. On vient de démontrer le cas $n = 0$. Supposons maintenant que l'on a montré que $\pi_n(X, v) \cong \pi_n(|X|, |v|)$ pour tout ensemble simplicial fibrant. L'astuce est de traduire le fait que $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_n(X)$ dans le cadre simplicial. On a besoin de quelques lemmes sur les fibrations et les groupes d'homotopie simpliciaux.

Lemme 6.3.15. *Soit $p : X \to Y$ une fibration acyclique entre ensembles simpliciaux fibrants. Alors $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection, et pour tout $v \in X_0$ et $n \geq 1$, $\pi_n(X, v) \to \pi_n(Y, f(v))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. . □ preuve

Lemme 6.3.16. *Soit $p : X \to Y$ une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. Soit $v \in X_0$ un sommet et $F = Y \times_X \{p(v)\}$ la fibre de p. Alors on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \to \pi_n(F, v) \to \pi_n(X, v) \to \pi_n(Y, p(v)) \to \pi_{n-1}(F, v) \to \ldots$$

Démonstration. . □ preuve

Lemme 6.3.17 (Utile par ailleurs)**.** *La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre.*

Démonstration. Voir les références. □

On peut maintenant finir de démontrer la proposition. Soit $v \in X_0$ fixé. On définit l'espace des chemins en v par le pullback :

$$\begin{tikzcd}
PX \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\pi"] & \mathrm{Map}(\Delta^1, X) \arrow[d, "(d_0^*, d_1^*)"] \\
X \arrow[r, "(v \times \mathrm{id}_X)"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $PX \to X \to \{v\}$ est une fibration acyclique, car elle est tirée en arrière de $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \to \mathrm{Map}(\Delta^0, X)$ qui en est une. On en déduit que $\pi_n(PX) = 0$ pour $n > 0$. Posons $\Omega X = PX \times_X \{v\}$; alors la suite exacte longue en homotopie nous dit que $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_n(X)$ pour $n > 0$. Par ailleurs, $|PX| \to *$ est la réalisation géométrique d'une fibration acyclique, et on a vu dans le Lemme 6.2.10 que c'était donc une fibration acyclique, en particulier c'est donc une équivalence faible. Comme $|\pi|$ est une fibration de Serre, on récupère une suite exacte longue, qui donne (combiné avec l'isomorphisme précédent) $\pi_{n-1}(|\Omega X|, |v|) \cong \pi_n(|X|, |v|)$. On conclut par l'hypothèse de récurrence. □

6.3.3 Fin de la preuve

Terminons de démontrer que Top et sSet sont équivalentes de Quillen.

Démonstration du Théorème 6.3.1. La réalisation géométrique des cofibrations génératrices (resp. cofibrations acycliques génératrices) sont des cofibrations (resp. cofibrations acycliques), donc l'adjonction est bien une adjonction de Quillen.

On va utiliser le critère de la Proposition 5.1.12 pour montrer que c'est une équivalence. La réalisation géométrique reflète les équivalences faibles par définition. Il nous reste donc à montrer que pour un espace topologique $X \in \mathsf{Top}$,[1] le morphisme $\varepsilon : |S_\bullet(X)| \to X$[2] est une équivalence d'homotopie faible. En d'autres termes, il faut montrer que $\pi_0(|S_\bullet(X)|) \to \pi_0(X)$ est une bijection et que $\pi_n(|S_\bullet(X)|, |x|) \to \pi_n(X, x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

Or, comme $S_\bullet(X)$ est fibrant, on a $\pi_n(|S_\bullet(X)|, |v|) \cong \pi_n(S_\bullet(X), v)$. Une classe de $\pi_n(S_\bullet X, v)$ est représenté par une application simpliciale $\alpha : \Delta^n \to S_\bullet X$ telle que $\alpha(\partial\Delta^n) = v$. Par adjonction, l'ensemble de ces morphismes est en bijection avec les $\bar{\alpha} : \mathbb{\Delta}^n \to X$ qui vérifie $\bar{\alpha}(\partial\mathbb{\Delta}^n) = |v|$. Ces $\bar{\alpha}$ correspondent exactement aux applications continues qui représentent des éléments de $\pi_n(X, x)$. On vérifie par ailleurs que $\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n \times \Delta^1, S_\bullet(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{\Delta}^n \times [0,1], X)$, donc les relations d'équivalences sont exactement les mêmes et on a l'isomorphisme voulu. □

6.4 Correspondance de Dold–Kan

Comme mentionné au début du chapitre, on peut définir les objets simpliciaux et cosimpliciaux dans n'importe quelle catégorie C (respectivement comme la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ et $\Delta \to \mathsf{C}$). On peut par exemple considérer la catégorie Ab des groupes abéliens. Un groupe abélien simplicial $A_\bullet$ n'est rien d'autre qu'une suite de groupes abéliens $\{A_n\}_{n\geq 0}$ munie de morphismes de groupes $d_i : A_n \to A_{n-1}$ et $s_j : A_n \to A_{n+1}$ vérifiant les relations simpliciales.

Théorème 6.4.1 (Dold–Kan)**.** *La catégorie des groupes abéliens simpliciaux* sAb *est équivalente à la catégorie des complexes de chaînes gradués positivement* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Nous allons définir une équivalence de catégories

$$N_* : s\mathsf{Ab} \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) : \Gamma_\bullet.$$

Soit $A_\bullet \in s$Ab un groupe abélien simplicial. On définit le complexe de chaînes $N_*(A_\bullet)$ des « chaînes normalisées » de la façon suivante. En degré n, $N_n(A_\bullet)$ est le groupe abélien

$$N_n(A_\bullet) := A_n / \bigsqcup_{j=0}^{n-1} s_j(A_{n-1}).$$

1. Quelconque, car tous les espaces topologiques sont fibrants.
2. Pas besoin de prendre un remplacement cofibrant de $S_\bullet(X)$ car tous les ensembles simpliciaux sont cofibrants.

La différentielle $d : N_n(A_\bullet) \to N_{n-1}(A_\bullet)$ est donnée par la somme $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$. On vérifie que d passe au quotient et que $d \circ d = 0$ grâce aux identités simpliciales.

Remarque 6.4.2. Soit X un espace topologique. Alors le complexe des chaînes singulières de X n'est autre que $N_*(S_\bullet(X))$.

Réciproquement, soit $C_* \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ un complexe de chaînes. On définit le groupe abélien simplicial $\Gamma_\bullet(C_*)$ de la manière suivante. En dimension n, on a :

$$\Gamma_n(C_*) = \bigoplus_{\varphi:[n]\twoheadrightarrow[p]} C_p.$$

Soit $f \in \Delta_m^n$ une application croissante $[m] \to [n]$. Décrivons l'application de structure

$$f^* : \bigoplus_{\varphi:[n]\twoheadrightarrow[p]} C_p \to \bigoplus_{\varphi:[m]\twoheadrightarrow[q]} C_q$$

sur le facteur correspondant à $\varphi : [n] \twoheadrightarrow [p]$. Le morphisme $\varphi \circ f$ se factorise de manière unique en une surjection suivie d'une injection $[m] \xrightarrow{\psi} [q] \xhookrightarrow{\partial} [p]$.

- Si $p = q$ (et donc $\partial = \mathrm{id}_{[p]}$), alors f^* envoie C_p (indexé par φ) sur $C_q = C_p$ (indexé par ψ).
- Si $p = q + 1$ et $\partial = \partial^p$, alors f^* envoie C_p (indexé par φ) sur $C_q^{(\psi)} = C_{p-1}^{(\psi)}$ (indexé par ψ)avec la différentielle.
- Dans les autres cas, f^* s'annule sur le C_p indexé par φ.

Exemple 6.4.3. Tentons de comprendre $d_2 : \Gamma_2 C \to \Gamma_1 C$. On rappelle que $d_0 = (\partial^0)^*$ où $\partial^0 = 1 \to 2 \in \Delta_1^2$.

- On a $\Gamma_1 C = C_1 \oplus C_0$ où le premier facteur est indexé par $\psi_1 = 0 \to 1 \in \Delta_1^1$ et le second par $\psi_0 = 0 \to 0 \in \Delta_1^0$.
- On a aussi $\Gamma_2 C = C_2 \oplus C_1 \oplus C_1 \oplus C_0$, où les facteurs sont indexés par $\varphi_2 = 0 \to 1 \to 2 \in \Delta_2^2$, $\varphi_1 = 0 \to 1 \to 1 \in \Delta_2^1$, $\varphi_1' = 0 \to 0 \to 1 \in \Delta_2^1$, et $\varphi_0 = 0 \to 0 \to 0 \in \Delta_2^0$.

On peut alors décrire d_2 sur chaque facteur de $\Gamma_2 C$:

- Sur $x \in C_2$ indexé par $\varphi_2 = 0 \to 1 \to 2$, on a $\varphi_1 \circ \partial^2 = 0 \to 1 \in \Delta_1^2$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_1} [1] \xrightarrow{\partial^2} [2]$. On a donc $d_2 x = dx \in C_1$ indexé par ψ_1.
- Sur $x \in C_1$ indexé par φ_1, on a $\varphi_1 \circ \partial^2 = 0 \to 1 \in \Delta_1^2$. Cette application se factorise encore $[1] \xrightarrow{\psi_1} [1] \xrightarrow{\partial^2} [2]$, donc $d_2 x = x \in C_1$ indexé par ψ_1.
- Sur $x \in C_1$ indexé par φ_1', on a $\varphi_1' \circ \partial^2 = 0 \to 0 \in \Delta_1^2$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_0} [0] \xrightarrow{\partial^2\partial^1} [2]$. On a donc $d_2 x = 0$.
- Sur $x \in C_0$ indexé par φ_0, on a $\varphi_0 \circ \partial^2 = 0 \to 0 \in \Delta_{01}^2$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_0} [0] \xrightarrow{\partial^2\partial^1} [2]$, donc encore une fois $d_2 x = 0$.

Il faut ensuite vérifier que ces deux constructions définissent des foncteurs, et que ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre (exercice). □

Théorème 6.4.4 (Quillen). *La catégorie* sAb *admet une structure de catégorie de modèle où les équivalences faibles et les fibrations sont définies en considérant les ensembles simpliciaux* *sous-jacents, et les cofibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques. Avec cette structure sur* sAb *et la structure projective sur* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$*, l'adjonction* $N \dashv \Gamma$ *est une équivalence de Quillen.*

On se réfère par exemple à [GJ99, p. III.2] pour la preuve. Cette équivalence de Quillen a des propriétés sympathiques. Par exemple :

Proposition 6.4.5. *Soit* $A_\bullet$ *un groupe abélien simplicial. Alors on a des isomorphismes pour tout* $n \geq 0$ *:*

$$\pi_n(A, 0) \cong H_n(N_*(A_\bullet)).$$

On peut donc facilement construire un espace de type $K(A, n)$: il suffit de considérer le complexe de chaînes C_* avec $C_n = A$ et $C_k = 0$ pour $k \neq n$; alors $|\Gamma_\bullet(C_*)|$ est un espace topologique de type $K(A, n)$. En jouant avec les adjonctions et le fait que $C_*(X) = N_*(S_\bullet(X))$, on peut également montrer que $[X, |\Gamma_\bullet(C_*)|] \cong H^n(X; A)$.

7 Homotopie rationnelle

La théorie de l'homotopie est une théorie puissante, mais les calculs peuvent s'avérer extrêmement complexes. Par exemple, le calcul des groupes d'homotopie d'espaces simples (p.ex. des sphères) reste à l'heure actuelle une tâche inaccessible.

La théorie de l'homotopie rationnelle offre un compromis entre la calculabilité et la quantité d'information donnée sur un espace. Dans cette théorie, on « oublie » la torsion et la non-commutativité dans les groupes d'homotopie d'un espace. Ce faisant, on perd beaucoup d'informations (le plan projectif devient contractile sur $\mathbb{Q}$, par exemple) mais on gagne en calculabilité : les groupes d'homotopie rationnelle des sphères sont complètement déterminés.

L'idée est la suivante. On considère pour simplifier des espaces simplement connexes. On peut détecter le fait qu'une application continue $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible en considérant les applications induites sur $\pi_*(-)$, ou bien (comme les espaces sont simplement connexes) sur $H_*(-;\mathbb{Z})$. Or, les groupes d'homotopie $\pi_{\geq 2}$ et les groupes d'homomologie $H_*(-;\mathbb{Z})$ sont abéliens, et l'on peut donc les « rationaliser » en appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Cette opération tue la torsion et ne conserve que les rangs des groupes abéliens (s'ils sont de type fini). On peut donc introduire une nouvelle classe « d'équivalences », les équivalences d'homotopie rationelle, qui sont les applications induisant un isomorphisme sur $\pi_*(-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ou de façon équivalente sur $H_*(-;\mathbb{Q})$.

La théorie de l'homotopie rationnelle s'intéresse à la question de savoir quand deux espaces sont rationnellement équivalents. Pour cela, on se pose la question de savoir quels invariants sont préservés par les équivalences d'homotopie rationnelle. La théorie fondatrice de Sullivan donne la réponse : tous les invariants rationnels possibles de X sont contenus dans l'algèbre différentielle-graduée commutative (CDGA) des formes polynomiales par morceaux $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$. Cette CDGA est analogue à celle des formes différentielles de de Rham sur une variété lisse, $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(X)$, cette dernière étant d'ailleurs quasi-isomorphe à $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Plus précisément, le théorème principal de ce chapitre énonce qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur les espaces topologiques simplement connexes dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie rationnelle, et une équivalence de Quillen entre cette catégorie et les CDGA simplement connexes incarnée par le foncteur Ω^*_{PL}.

Convention 7.0.1. Dans tous ce chapitre, le corps de base sera $\mathbb{Q}$.

7.1 Algèbres différentielles graduées commutatives

7.1.1 Définitions

Définition 7.1.1. Un *complexe de cochaînes* (gradué positivement) est un espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{n \geq 0} V^n$ muni de différentielles $d : A^n \to A^{n+1}$ vérifiant $d \circ d = 0$. On note $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ la catégorie des complexes de cochaînes et de leurs morphismes.

On note $|a| = p$ le degré d'un élément homogène $a \in V^p$. Si la notation $|a|$ apparaît dans une équation, on suppose par défaut que l'élément est homogène (quitte à étendre linéairement à tout l'espace).

Définition 7.1.2. Une *algèbre différentielle graduée* (*DGA* en anglais) est un complexe de cochaînes A muni d'une application bilinéaire $\mu : A \otimes A \to A$ et d'une unité $\eta : \mathbb{Q} \to A$ qui est associative et unitaire :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1\otimes\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[l, "\eta\otimes 1"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

et qui vérifie la relation de Leibniz :

$$d(\mu(a \otimes b)) = \mu(da \otimes b) + (-1)^{|a|}\mu(a \otimes db).$$

Par la suite, on notera simplement $a \cdot b$ (voire ab) le produit $\mu(a \otimes b)$, et $1 = \eta(1) \in A^0$ sera l'unité. L'associativité s'écrit alors $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, l'unitalité $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, et la relation de Leibniz $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot db$.

Proposition 7.1.3. *Soit A une DGA. Alors la cohomologie $H^*(A)$ est une algèbre graduée.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la relation de Leibniz. □

Définition 7.1.4. Une *algèbre différentielle graduée commutative* (*CDGA* en anglais) est une DGA qui vérifie la propriété suivante : si $a \in A^p$ et $b \in A^q$ sont des éléments homogènes, alors $b \cdot a = (-1)^{|a||b|}(a \cdot b)$. On note CDGA la catégorie des CDGA et de leurs morphismes.

Proposition 7.1.5. *La cohomologie d'une CDGA est une algèbre graduée commutative.* □

Remarque 7.1.6. Si $a \in A$ est de degré impair, alors l'équation $a \cdot a = -a \cdot a$ entraîne $a^2 = 0$. En revanche, si $b \in A$ est de degré pair, alors il commute avec tous les éléments de a (y compris ceux de degré impair).

Soit V un complexe de cochaînes. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $V^{\otimes n}$ avec la « règle des signes de Koszul » (inspirée par la définition d'une algèbre graduée commutative). Concrètement, si $\sigma_i = (i\ i{+}1) \in \mathfrak{S}_n$ est une transposition (avec $i < j$), alors :

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n) \cdot \sigma_i = (-1)^{|v_i||v_{i+1}|} v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n.$$

On étend cette action à $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = 1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle$ en vérifiant qu'elle est compatible avec les relations. On notera parfois abusivement le signe par $\pm$.

Définition 7.1.7. Soit V un complexe de cochaînes. L'*algèbre symétrique* sur V, notée $S(V)$, est donnée par :

$$S(V) := \bigoplus_{r \geq 0} S^{(r)}(V) := \bigoplus_{r \geq 0} (V^{\otimes r})_{\mathfrak{S}_r},$$

où les coinvariants $(-)_G$ sont le quotient par la relation d'équivalence $x \sim g \cdot x$. La différentielle est donnée par la relation de Leibniz :

$$d(v_1 \ldots v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1| \ldots |v_{i-1}|} v_1 \ldots v_{i-1} (dv_i) v_{i+1} \ldots v_n.$$

Concrètement, $S(V)$ est le tenseur $\mathbb{Q}[V^{\mathrm{pair}}] \otimes \Lambda(V^{\mathrm{impair}})$ de l'algèbre polynomiale sur les éléments pairs et de l'algèbre extérieure sur les degrés impairs. Pour calculer la différentielle, on utilise la règle des signes de Koszul en supposant que le symbole d est de degré 1.

Proposition 7.1.8. *On a une adjonction :*

$$S : \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q}) \leftrightarrows \mathsf{CDGA} : U,$$

où S est le foncteur « algèbre symétrique » et U est le « foncteur oubli » qui associe le complexe de cochaînes sous-jacent à une CDGA. □

Concrètement, cela signifie qu'un morphisme de CDGA $f : S(V) \to A$ est uniquement déterminé par sa restriction à $V \subset S(V)$.

Corollaire 7.1.9. *On a un isomorphisme naturel $S(V \oplus W) \cong S(V) \otimes S(W)$.*

Démonstration. Le foncteur S étant un adjoint à gauche, il préserve les colimites, qui sont respectivement $\oplus$ dans $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ et $\otimes$ dans CDGA. □

Proposition 7.1.10. *Soit $A = S(V)$ la CDGA libre sur un complexe de cochaînes V. Alors $H^*(A)$ est l'algèbre symétrique libre sur $H^*(V)$.*

Démonstration. Nous ne démontrerons pas cette proposition. Il néanmoins est important de noter que celle-ci n'est vraie qu'en caractéristique nulle. En caractéristique p, le fait que la caractéristique divise le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq p$ pose en effet problème. □

Définition 7.1.11. Soit A une CDGA et $k \in \mathbb{Z}$ un entier. Une *dérivation* (de degré k) $\delta : A \to A$ est une application linéaire de degré k vérifiant la relation de Leibniz $\delta(ab) = \delta a \cdot b + (-1)^{k|a|} a \cdot \delta b$.

Exemple 7.1.12. La différentielle d'une CDGA est une dérivation de degré 1.

Proposition 7.1.13. *Soit $A = S(V)$ une CDGA libre sur un complexe de cochaînes V. Une dérivation $\delta : A \to A$ est uniquement déterminée par sa restriction à $V \subset A$.*

Démonstration. Quasiment identique à la preuve que S est adjoint de U. □

Décrivons maintenant une généralisation des CDGA libres. Cette généralisation servira à décrire les objets cofibrants de CDGA dans la section suivante.

Définition 7.1.14. Une CDGA A est dite *quasi-libre* si son algèbre graduée commutative sous-jacente est libre.

Cela signifie que $A = (S(V), d)$ où V est un espace vectoriel gradué et $d : S(V) \to S(V)$ est une dérivation de degré 1 vérifiant $d \circ d = 0$. Comme dans le cas des CDGA libres, cette dérivation d est uniquement déterminée par sa restriction $d_{|V}$ à $V \subset S(V)$. Cependant, l'image de $d_{|V}$ n'est pas nécessairement inclus dans V et peut faire intervenir des polynômes de poids supérieur. Cette différentielle restreinte $d_{|V}$ se décompose en fait en $d_0 + d_1 + \dots$ où $d_i : V \to S^{(i)}(V) = (V^{\otimes i})_{\mathfrak{S}_i}$ est le terme de poids i.

Exemple 7.1.15. On considère l'espace vectoriel gradué V engendré par deux variables $x = x_2$ et $y = y_3$, de degrés respectifs 2 et 3. L'algèbre symétrique sur V est le produit tensoriel $S(V) = \mathbb{Q}[x] \otimes \Lambda(y)$. On définit une dérivation $d : S(V) \to S(V)$ par $dx = 0$ et $dy = x^2$, étendue par la relation de Leibniz. On calcule plus précisément que $d(x^k) = 0$ et $d(x^k y) = x^{k+2}$. On vérifie alors aisément que $d \circ d = 0$, donc $(S(V), d)$ est une CDGA quasi-libre. Elle n'est pas libre sur V, car $dy = x^2$ n'est pas linéaire.

L'équation $d \circ d$ se transforme en une suite d'équations compliquées en terme des d_i. On remarque en particulier que d_1 est une différentielle sur V. Un morphisme $f : (S(V), d) \to (S(W), d)$ entre deux CDGA quasi-libres est entièrement déterminé par sa restriction $f_{|V} : V \to S(W)$, qui se décompose en $f_0 + f_1 + \dots$ où $f_i : V \to S^{(i)}(W)$. L'équation $f \circ d = d \circ f$ devient elle aussi une suite d'équations compliquées. L'une de ces relations dit que $f_1 d_1 = d_1 f_1$. On peut donc définir :

Définition 7.1.16. Soit $f : (S(V), d) \to (S(W), d)$ un morphisme entre CDGA quasi-libres. La *partie linéaire* de f est l'application induite :

$$f_1 : (V, d_1) \to (W, d_1).$$

On peut définir un analogue de cette partie linéaire pour les CDGA augmentées.

Définition 7.1.17. Une *augmentation* d'une CDGA A est un morphisme de CDGA $\varepsilon : A \to \mathbb{Q}$ (qui vérifie donc $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$, $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(da) = 0$). Une CDGA *augmentée* est une CDGA A munie d'une augmentation ε. Si A est une CDGA augmentée, on note $\bar{A} = \ker \varepsilon$ son *idéal d'augmentation*.

Définition 7.1.18. Soit A une CDGA augmentée. Son *complexe des indécomposables QA* est le quotient $QA = \bar{A}/\bar{A} \cdot \bar{A}$ muni de la différentielle induite. On note alors les « groupes d'homotopie de A »[1]

$$\pi_n(A) = H^n(QA).$$

Exemple 7.1.19. Si $A = (S(V), d)$ est quasi-libre, alors $QA \cong (V, d_1)$.

7.1.2 Transfert de la structure de catégorie de modèles

Nous allons chercher à appliquer le théorème suivant à la Proposition 7.1.8.

Définition 7.1.20. Soit $F : \mathsf{D} \leftrightarrows \mathsf{C} : U$ une adjonction, où D est une catégorie de modèles. On dit qu'un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ est une fibration (resp. une équivalence faible) si $U(f)$ en est une, et que c'est une cofibration si f a la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques. La structure de catégorie de modèles ainsi définie sur C – si elle existe – est appelée la *structure transférée à droite*.

Théorème 7.1.21 (Quillen)**.** *Soit D une catégorie de modèles cofibrement engendrée par $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$. Supposons que les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont κ-petits pour un cardinal κ donné. Soit $F : \mathsf{D} \leftrightarrows \mathsf{C} : U$ une adjonction, où C est une catégorie complète et cocomplète.*

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *le foncteur U préserve les colimites κ-séquentielles ;*
2. *l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée :*
   a) *si un morphisme de C a la LLP par rapport à toutes les fibrations, alors c'est une équivalence faible ;*
   b) ou *pour tout $A \in \mathsf{C}$ et tout $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{J}$, l'application canonique $A \to A \sqcup_{F(X)} F(Y)$ s'envoie sur une équivalence faible par le foncteur U ;*

alors la structure transférée à droite sur C définit bien une structure de catégorie de modèles, cofibrement engendrée par $(F(\mathcal{I}), F(\mathcal{J}))$ (dont les sources sont κ-petits), et l'adjonction $F \dashv U$ est de Quillen.

Avant de démontrer le théorème, donnons d'abord l'application. Pour rappel, $S^n(\mathbb{Q}) \in \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ est le complexe donné par $\mathbb{Q}$ concentré en degré n, et $D^n(\mathbb{Q}) = \ldots \to 0 \to \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q} \to 0 \to \ldots$ concentré en degrés $n-1, n$.

Proposition 7.1.22. *Il existe une structure de catégorie de modèles sur $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ (appelée* structure projective*) dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les fibrations sont les morphismes surjectifs en tout degré, et les cofibrations sont les morphismes injectifs à conoyau projectif en degré strictement positif. Elle est cofibrement engendré par $\mathcal{I} = \{S^n(\mathbb{Q}) \to D^n(Q)\}$ et $\mathcal{J} = \{0 \to D^n(R)\}$.*

1. Il s'agit plutôt de son homologie d'André–Quillen. On verra dans la Section 7.3 que cela correspond effectivement aux groupes d'homotopie d'un espace topologique.

Démonstration. Identique à ce qu'on peut trouver dans le Chapitre 4. □

Corollaire 7.1.23. *L'adjonction* $S : \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q}) \leftrightarrows \mathsf{CDGA} : U$ *vérifie les hypothèses du Théorème 7.1.21. La structure de catégorie de modèles transférée à droite sur* CDGA *existe donc.*

Démonstration. Une colimite κ-séquentielle dans CDGA se calcule comme une colimite κ-séquentielle dans $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ qui est munie d'une structure de CDGA canonique. La condition 1. du théorème est donc vérifiée.

Nous allons maintenant vérifier la condition 2.b) du théorème. On doit donc vérifier que pour tout CDGA A et pour tout $n \geq 0$, l'application canonique (dans la catégorie des CDGAs) $A \to A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))$ est un quasi-isomorphisme. Grâce à la formule de Künneth, $H^*(A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))) = H^*(A) \otimes H^*(S(D^n(\mathbb{Q})))$. Grâce à la Proposition 7.1.10, $H^*(S(D^n(\mathbb{Q}))) = S(H^*(D^n(\mathbb{Q})))$ et il est immédiat que $D^n(\mathbb{Q})$ est acyclique. On en déduit donc que $H^*(A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))) = H^*(A)$, et on vérifie sans peine que $A \to A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))$ induit l'identité en cohomologie. □

Remarque 7.1.24. Nous avons utilisé deux fois l'hypothèse que le corps de base était $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement un corps de caractéristique zéro) :

- pour appliquer la formule de Künneth, il est nécessaire de se placer au-dessus d'un corps ;
- pour $H^*(S(V)) = S(H^*(V))$, il est nécessaire d'avoir un corps de caractéristique zéro.

Démonstration du Théorème 7.1.21. Vérifions que C est une catégorie de modèles avec les classes considérées. L'axiome (MC1) – complète + cocomplète – est vrai par hypothèse. L'axiome (MC2) – 2 parmi 3 – est vrai car U est un foncteur et que D vérifie (MC2). De même, les fibrations et les équivalences faibles de C sont stables par rétracts ; comme les classes de morphismes définies par propriété de relèvement sont stables par rétract, on en déduit que les cofibrations de C sont également stables par rétract et que l'axiome (MC3) est vérifié.

L'axiome (MC4)(i) – $\mathcal{C} \perp \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ – est vrai par définition des cofibrations de C. Reste à vérifier (MC4)(ii) – $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \perp \mathcal{F}$ – et (MC5) – les factorisations. On aura besoin de quelques lemmes.

Lemme 7.1.25. *Un morphisme* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ *est une fibration (resp. fibration acyclique) si et seulement si il a la RLP par rapport à* $F(\mathcal{I})$ *(resp.* $F(\mathcal{J})$*).*

Démonstration. Exercice (découle du fait que $F \dashv U$ et que D est cofibrement engendrée par $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$). □

Lemme 7.1.26. *Les rétracts de complexes* $F(\mathcal{I})$*-cellulaire (resp.* $F(\mathcal{J})$*-cellulaire) ont la LLP par rapport aux fibrations acycliques (resp. aux fibrations).*

Démonstration. Découle du point précédent et de la stabilité des classes de type ${}^{\perp}(-)$ par pushouts et rétracts. □

Lemme 7.1.27. *Tout rétract d'un complexe $F(\mathcal{J})$-cellulaire est une équivalence faible dans* C.

Démonstration. Corollaire du lemme précédent et de la condition 2. du théorème. □

On peut maintenant démontrer (MC5) grâce à l'argument du petit objet. Étant donné $f :\in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$, on peut le factoriser en $X \to G^\infty(F(\mathcal{I}), f) \to Y$. Dans le premier cas, $X \to G^\infty(F(\mathcal{I}), f)$ est un complexe $F(\mathcal{I})$-cellulaire, donc une cofibration ; de plus $G^\infty(F(\mathcal{I}), f) \to Y$ a la RLP par rapport à $F(\mathcal{I})$, donc c'est une fibration acyclique. L'autre partie de (MC5) est similaire en remplaçant $\mathcal{I}$ par $\mathcal{J}$.

Démontrons finalement (MC4)(ii). Soit $i : A \to B$ une cofibration acyclique, i.e. i a la LLP par rapport aux fibrations acyclique et $U(i)$ est une équivalence faible. Montrons que i a la LLP par rapport aux fibrations. Grâce à l'argument du petit objet, on peut factoriser i en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(F(\mathcal{J}), i) \xrightarrow{p_\infty} B$, où i_∞ est un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire et p_∞ est une fibration. Grâce à 2 parmi 3, p est en fait une fibration acyclique. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j", "\sim"'] \arrow[d, hook, "i_\infty"] & G^\infty(F(\mathcal{J}), i) \arrow[d, "p_\infty"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "l"] & B \end{tikzcd}$$

On obtient alors que i est un rétract de i_∞. Or i_∞ est un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire et a donc la LLP par rapport aux fibrations par l'un des lemmes ci-dessus, ce qui permet de conclure. □

7.1.3 Théorie de Sullivan

Tous les CDGA sont fibrantes. Dans cette section, nous allons décrire les objets cofibrants. Nous allons également décrire explicitement comment représenter les homotopies entre morphismes de CDGA.

Définition 7.1.28. Une *algèbre de Sullivan* est une CDGA quasi-libre $A = (S(V), d)$ où $V = V^{\geq 1}$ et qui est munie d'une filtration du complexe de cochaînes V par des sous-complexes :

$$0 \subset V(0) \subset V(1) \subset V(2) \subset \ldots \subset V,$$

telle que $d(V(0)) = 0$ et $d(V(k+1)) \subset S(V(k))$ pour $k \geq 0$.

Une *algèbre relative de Sullivan* est une inclusion $A \to (A \otimes S(V), d)$ où $V = V^{\geq 1}$ est filtré $V(0) \subset V(1) \subset \ldots V$ tel quel $d(V(0)) \subset A$ et $d(V(k+1)) \subset A \otimes S(V(k))$.

Définition 7.1.29. Une *algèbre minimale* est une algèbre de Sullivan $A = (S(V), d)$ telle que $d(V(k)) \subset S^{(\geq 2)}(V(k-1))$, i.e. la différentielle est décomposable. Une *algèbre relative minimale* est une algèbre de Sullivan relative qui vérifie une condition analogue.

Exemple 7.1.30. La CDGA $A = (S(x_2, y_3), dy = x^2)$ est une algèbre minimale. En effet, on peut poser $V(0) = \langle x \rangle$, $V(1) = \langle x, y \rangle$.

Exemple 7.1.31. Les CDGA $S(D^n(\mathbb{Q}))$ et $S(S^n(\mathbb{Q}))$ sont des algèbres de Sullivan. La première n'est pas minimale mais la seconde l'est. L'inclusion $S(S^n(\mathbb{Q})) \to S(D^n(\mathbb{Q}))$ est une algèbre relative minimale.

Exemple 7.1.32. L'algèbre $A = (S(x_1, y_1, z_1), dx = yz, dy = zx, dz = xy)$ n'est pas de Sullivan.

Proposition 7.1.33. *Une CDGA A est cofibrante si et seulement si c'est un rétract d'une algèbre de Sullivan. De même, $i : A \to B$ est une cofibration si et seulement si c'est un rétract d'une algèbre relative de Sullivan.*

Démonstration. Les cofibrations génératrices $\mathcal{J} = \{S(S^n(\mathbb{Q})) \to S(D^n(\mathbb{Q}))\}$ sont des algèbres relatives de Sullivan donc toutes les cofibrations sont des algèbres relatives de Sullivan.[2] □

Remarque 7.1.34. Une algèbre minimale $A = (S(V), d)$ est automatiquement augmentée, et ses groupes d'homotopie (Définition 7.1.18) sont donnés par $\pi_n(A) = V^n$.

Proposition 7.1.35. *Soit $f : A = (S(V), d) \to B = (S(W), d)$ un morphisme entre algèbres de Sullivan. Alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $f_1 : (V, d_1) \to (W, d_1)$ en est un. Si de plus les deux algèbres sont minimales, alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si c'est un isomorphisme.*

Démonstration. La preuve du premier énoncé repose sur des arguments de suite spectrale que nous ne détaillerons pas (exercice).

Pour le deuxième énoncé, il est clair que si f est un isomorphisme alors c'est un quasi-isomorphisme. Réciproquement, si f est un quasi-isomorphisme, alors par le premier point f_1 est un quasi-isomorphisme. Comme les algèbres sont minimales, $d_1 = 0$, donc f_1 est en fait un isomorphisme. On a un morphisme de suites exactes longues (associées aux suites exactes courtes du type $\bar{A}^2 \to \bar{A} \to QA$) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\bar{A}^2) = 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\bar{A}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"', "f_1"] & H^1(QA) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f_1"] & H^2(\bar{A}^2) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\bar{A}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(QA) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & H^1(\bar{B}^2) = 0 \arrow[r] & H^1(\bar{B}) \arrow[r, equal] & H^1(QB) \arrow[r] & H^2(\bar{B}^2) \arrow[r] & H^2(\bar{B}) \arrow[r] & H^2(QB) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On applique alors le lemme des cinq par récurrence et on utilise le fait que $H^n(\bar{A}^2)$ s'exprime uniquement en termes de $V^{<n}$ (grâce à $V = V^{\geq 1}$) pour conclure. □

Définition 7.1.36. Un *modèle de Sullivan* (resp. *minimal*) d'une CDGA A est une algèbre de Sullivan (resp. minimale) $(S(V), d)$ munie un quasi-isomorphisme $(S(V), d) \xrightarrow{\sim} A$. Un modèle de Sullivan (resp. minimal) d'un morphisme $f : A \to B$ est une factorisation $A \to (A \otimes S(V), d) \xrightarrow{\sim} B$ où $A \to (A \otimes S(V), d)$ est une algèbre relative de Sullivan (resp. minimale).

2. Pour trouver la filtration, on considère la filtration $G^0(\mathcal{J}, -) \subset G^1(\mathcal{J}, -) \subset \dots \subset G^\infty(\mathcal{J}, -)$ dans l'argument du petit objet.

En utilisant les axiomes de catégories de modèles, toute CDGA a un modèle de Sullivan, et tout morphisme a un modèle de Sullivan. Deux modèles minimaux d'une même CDGA sont isomorphes.

7.2 Localisation de Bousfield

7.3 Comparaison avec $\mathsf{Top}[\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}^{-1}]$

7.4 Digression : modèles de Quillen

8 Infini-catégories

8.1 Nerf d'une catégorie

8.2 Quasi-catégories

8.3 Structure de modèles de Joyal

8.4 Catégories simpliciales

8.5 Quasi-catégorie associée à une catégorie de modèles

Bibliographie

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*. Graduate Texts in Mathematics 139. New York : Springer-Verlag, 1993, p. xiv+557. isbn : 0-387-97926-3. doi : 10.1007/978-1-4757-6848-0.

[DS95] William G. Dwyer et Jan Spaliński. « Homotopy theories and model categories ». In : *Handbook of algebraic topology*. Amsterdam : North-Holland, 1995, p. 73-126. doi : 10.1016/B978-044481779-2/50003-1.

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin et Jean-Claude Thomas. *Rational homotopy theory*. Graduate Texts in Mathematics 205. New York : Springer-Verlag, 2001, p. xxxiv+535. isbn : 0-387-95068-0. doi : 10.1007/978-1-4613-0105-9.

[Gin19] Grégory Ginot. *Introduction à l'homotopie*. Notes de cours. 2019. 210 p. url : https://www.math.univ-paris13.fr/%7Eginot/Homotopie/Ginot-homotopie2019.pdf.

[GJ99] Paul G. Goerss et John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Progress in Mathematics 174. Basel : Birkhäuser Verlag, 1999, p. xvi+510. isbn : 3-7643-6064-X. doi : 10.1007/978-3-0348-8707-6.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002, p. xii+544. isbn : 0-521-79160-X.

[Hes07] Kathryn Hess. « Rational homotopy theory : a brief introduction ». In : *Interactions between homotopy theory and algebra*. Contemp. Math. 436. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2007, p. 175-202. doi : 10.1090/conm/436/08409.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs 63. Providence, RI : American Mathematical Society, 1999, p. xii+209. isbn : 0-8218-1359-5.

[Lur09] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Annals of Mathematics Studies 170. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2009, p. xviii+925. isbn : 978-0-691-14049-0. url : http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HTT.pdf.

[Sai17] Henri Paul de Saint-Gervais. *Analysis Situs*. 2017. url : http://analysis-situs.math.cnrs.fr.

[Sch15] Pierre Schapira. *Categories and homological algebras*. Lecture notes. 2015. url : https://webusers.imj-prg.fr/%7Epierre.schapira/lectnotes/HomAl.pdf.

[Spa95] Edwin Spanier. *Algebraic topology*. Berlin : Springer-Verlag, 1995, p. xiv+528. isbn : 978-1-4684-9322-1. doi : 10.1007/978-1-4684-9322-1.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38. Cambridge : Cambridge University Press, 1994, p. xiv+450. isbn : 0-521-43500-5.