Algèbres W_k

jeudi 4 avril 2019 15:41

$\mathcal{S} = Top, Sp, Ch_*(\mathbb{F})$ $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_\ell$

$\to$ foncteur $C_*(-;\mathbb{F}) : \mathcal{S} \to Ch_*(\mathbb{F})$

Q Quelle est la structure sur $H_*(E_k\text{-algèbre})$?

$\hookrightarrow$ il suffit de comprendre la structure sur $H_*(A)$ où $A \in Alg_{E_k}(Ch_*(\mathbb{F}))$

$\mathcal{G}$: gpd sym mon discret $\Rightarrow$ l'homologie est bigraduée

Thm (Cohen) Si $A \in Alg_{E_k}(Ch_*^{\mathcal{G}})$, alors $H_*(A)$ est une algèbre W_{k-1} dans $Vect^{\mathcal{G}\times\mathbb{Z}}$

Plus précisément, $H_*(\underbrace{E_k(X)}_{\in Ch_*}) \cong W_{k-1}(H_*(X))$

Où W_{k-1} est une monade sur $Vect^{\mathcal{G}\times\mathbb{Z}}$

Sur $\mathbb{Q}$, $W_{k-1} = P_k$ algèbres k-Poisson, $k \geq 2$

Obs Pour $A \in Alg_{E_k}$,

$$\bigoplus_{n\geq 0} H_*(E_k(n)) \otimes_{\Sigma_n} H_n(A)^{\otimes n}$$

[iso e. caractéristique zéro]

$$\Sigma_n$$

$$\downarrow \qquad \text{[iso si caractéristique zéro]}$$

$$\bigoplus_{n\geq 0} H_*(E_k(n) \underset{\Sigma_n}{\otimes} A^{\otimes n})$$

$$\cong$$

$$H_*\Big(\bigoplus_{n\geq 0} E_k(n) \underset{\Sigma_n}{\otimes} A^{\otimes n}\Big) \longrightarrow H_*(A)$$

$\Rightarrow H_*(A)$ a la structure d'une algèbre $H_*(E_k) =: P_k$

Et en caract zéro, $H_*(E_k(A)) \cong P_k(H_*(A))$

Thm (Cohen) $P_k = H_*(E_k ; \mathbb{F})$ est l'opérade qui contrôle les k-algèbres de Poisson.

Une k-algèbre de Poisson est la donnée :

- d'un e.v. $V \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}^{\times\mathbb{Z}}$
- d'une unité $1 : \mathbb{F} \longrightarrow V$
- un produit comm $V_g \otimes V_h \longrightarrow V_{g\oplus h}$
- un crochet de Lie $V_g \otimes V_h \longrightarrow V_{g\oplus h}[k-1]$

avec les relations :

- $[-,-]$ est bilinéaire
- $[x,y] = (-1)^{|x|\cdot|y| + (k-1)(|x|+|y|+1)}[y,x]$
- Jacobi $[x,[y,z]] \pm [y,[z,x]] \pm [z,[x,y]] = 0$
- la multiplication est commutative graduée

- la multiplication est commutative graduée
- $[x, yz] = [x,y]z \pm y[x,z]$
- $[1,x] = 0$

D'où viennent ces opérations ?

$$\left.\begin{array}{l} H_*(E_k(0)) \cong \mathbb{F}\cdot 1 \\ H_*(\underbrace{E_k(2)}_{\simeq \text{ sphère } S^{k-1}}) \cong \mathbb{F}\cdot\mu \oplus \mathbb{F}\lambda[k-1] \end{array}\right) \text{ engendrent } H_*(E_k)$$

$$\begin{cases} H^*(E_k(n)) = \mathbb{F}[a_{ij}]_{1\leq i\neq j\leq n} \Big/ \begin{pmatrix} a_{ji} = \pm a_{ij} \,;\; a_{ij}^2 = 0 \\ a_{ij}a_{jk} + a_{jk}a_{ki} + a_{ki}a_{ij} = 0 \end{pmatrix} \\ \text{où } a_{ij} = p_{ij}^*(vol_{S^{k-1}}) \end{cases}$$

Opérations puissantes

Si P est une dg-opérade et R est une P-algèbre

on note $S_n(P;X) = P(n) \overset{h}{\underset{\Sigma_n}{\otimes}} X^{\otimes n}$

Pour $\begin{cases} e \in H_i(S_n(P;\mathbb{F}[m])) \\ x \in H_m(R) \end{cases}$, on définit :

$$\begin{array}{ccccc} H_i(S_n(P;\mathbb{F}[m])) & \xrightarrow{x} & H_i(S_n(P,X)) & \xrightarrow{\text{struct}} & H_i(R) \\ e & \longmapsto & & \longrightarrow & A^e(x) \end{array}$$

$$e \longmapsto \Theta^e(x)$$

On obtient ainsi $\Theta^e : H_m(R) \longrightarrow H_i(R)$

⚠ Θ^e n'est pas linéaire !

<u>ex</u> $P = \mathrm{Com}$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\Theta^{\mu_n} : H_m(R) \longrightarrow H_{mn}(R)$

$$x \longmapsto x^n$$

<u>But</u> : Comprendre $H_*\left(E_k(\ell) \underset{\Sigma_\ell}{\otimes} \mathbb{F}_\ell[m]^{\otimes \ell}\right)$

On $\mathbb{F}_\ell[m]^{\otimes \ell} \cong \mathbb{F}_\ell[m\ell]$ avec action de Σ_ℓ $\begin{cases} \text{triviale si } m \text{ pair} \\ \text{signe si } m \text{ impair} \end{cases}$

$\Rightarrow$ on en revient à devoir calculer :

$$H_*\left(E_k(\ell) \underset{\Sigma_\ell}{\otimes} \mathbb{F}_\ell^{\text{triv}}\right) \cong H_*\left(F_\ell(\mathbb{R}^k) ; \mathbb{F}_\ell\right)$$

où $F_\ell(X) = \{(x_1 \dots x_\ell) \in X^\ell \mid \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\} / \Sigma_\ell$

et $H_*\left(E_k(\ell) \underset{\Sigma_\ell}{\otimes} \mathbb{F}_\ell^{\text{sgn}}\right) \cong H_*\left(F_\ell(\mathbb{R}^k) ; \mathbb{F}_\ell^{\text{sgn}}\right)$

<u>Rq</u> Pourquoi le même ℓ dans $E_k(\ell)$ et $\mathbb{F}_\ell$?
Car c'est la 1ère arité où il y a un pb ; et on verra que les opérations d'arité ℓ engendrent tout.

On a une fibration $\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k) \longrightarrow F_\ell(\mathbb{R}^k)$

On a une fibration
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k) \arrow[r] & F_\ell(\mathbb{R}^k) \arrow[d] \\ & B\Sigma_\ell \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ SS de Serre : $H_i(\Sigma_\ell ; H_j(\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k))) \Longrightarrow H_{i+j}(F_\ell(\mathbb{R}^k))$

et $H_i(\Sigma_\ell ; H_j(\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k) \otimes \mathbb{F}^{sgn})) \Longrightarrow H_{i+j}(F_\ell(\mathbb{R}^k) ; \mathbb{F}^{sgn})$

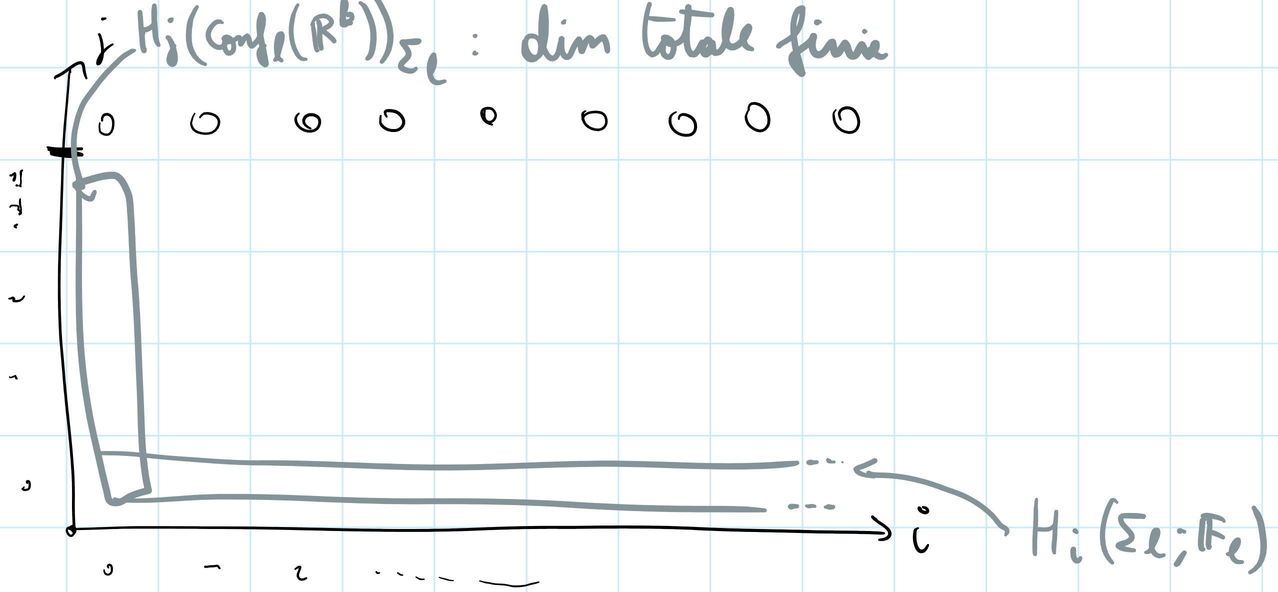
On sait bien calculer la ligne $j=0$ (on a $H_i(\Sigma_\ell ; \mathbb{F})$) et la colonne $i=0$ (on a $H_j(\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k))_{\Sigma_\ell}$). On verra que le reste disparaît.

Thm [Nakaoka] $H^*(\Sigma_\ell ; \mathbb{F}_\ell) \cong \Lambda(v) \otimes \mathbb{F}_\ell[\beta v]$

$|v| = 2(\ell-1)-1$

$|\beta v| = 2(\ell-1)$ pour $\ell \geq 3$

$H^*(\Sigma_\ell ; \mathbb{F}_\ell^{sgn}) \cong H^*(\Sigma_\ell ; \mathbb{F}_\ell) \cdot v'$, $|v'| = \ell - 2$



Cohen montre que la page E^∞ (dans le cas $\mathbb{F}_\ell$) est

$$E^\infty = H_0(\Sigma_\ell ; H_*(\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k))) \underset{\mathbb{F}_\ell}{\oplus} H_*(\Sigma_\ell)^{\leq (k-1)(\ell-1)}$$

↳ bidegré $(0,0)$

On a $H_0(\Sigma_\ell ; H_*(\mathrm{Conf}_\ell(\mathbb{R}^k))) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_\ell & k \text{ impair} \\ \mathbb{F}_\ell \oplus \mathbb{F}_\ell \cdot \alpha & k \text{ pair} \quad |\alpha| = k-1 \end{cases}$

$\alpha \longleftrightarrow \sum_{i<j} \alpha_{ij}$ dans la cohomologie

On trouve comme opérations puissance :

$Q^s : H_q(R) \longrightarrow H_{q+2s(\ell-1)}(R)$ $\quad \left[\begin{array}{l} \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \\ g \mapsto g^{\otimes \ell} \end{array} \right]$

$\beta Q^s : H_q(R) \longrightarrow H_{q+2s(\ell-1)-1}(R)$

si $2s - q < k-1$

correspondent aux r et βr de $H^*(\Sigma_\ell ; \mathbb{F}_\ell)$

on a aussi $\xi : H_q(R) \longrightarrow H_{\ell q + (k-1)(\ell-1)}(R)$

$\zeta : H_q(R) \longrightarrow H_{\ell q + (k-1)(\ell-1)}(R)$

$\Bigg\}$ si $q + (k-1)$ est pair

Algèbres de Lie ℓ-restreintes (relations)

- ξ est linéaire
- $\xi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \xi(x) \quad \lambda \in \mathbb{F}_\ell$

- $\xi(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \xi(x) \qquad \lambda \in \mathbb{F}_\ell$
- $\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y) + \sum_{i=1}^{\ell-1} d_p^i(x)(y)$

où $d_p^i(x)(y) = \sum_{\substack{p_1 \geq 0,\ q_s \geq 1\ \forall s \\ p_s \geq 1 \text{ pour } s > 1 \\ \sum p = i-1 \\ \sum q = \ell - 1}} ad^{p_1}(x)\, ad^{q_1}(y) \cdots ad^{p_k}(x)\, ad^{q_k}(y)\,(x)$

relations vérifiées par les opérations de Dyer - Lashof.

- Q^s et βQ^s sont linéaires
- $Q^s(x) = 0$ si $2s < |x|$

  $\beta Q^s(x) = 0$ si $2s \leq |x|$
- Relations d'Adem.

si $r > \ell s$, $Q^r Q^s = \sum (-1)^{r+i} \binom{\ell i - (\ell-1)s - i - 1}{r - (\ell-1)s - i - 1} Q^{r+s-i} Q^i$

$\beta Q^r \cdot Q^s = \cdots$

$Q^r \cdot \beta Q^s = \cdots$

$\beta Q^r \cdot \beta Q^s = \cdots$

- $Q^s(x) = x^\ell$ si $2s = |x|$
- $Q^s(1) = 0$ si $s \neq 0$
- $Q^s(xy) = \sum_{i+j=s} Q^i(x)\, Q^j(y)$

  $\beta Q^{s+1}(xy) = \sum_{i+j=s} \left(\beta Q^{i+1}(x) \cdot Q^j(y) \pm Q^i(x) \cdot \beta Q^{j+1}(y) \right)$
- $[x, Q^s y] = 0 = [x, \beta Q^s(y)]$
- si on pose $Q^{\frac{1}{2}(|x|+k-1)}(x) := \xi(x)$

  $\cdots \frac{1}{2}(|x|+k-1) \cdots$

- si on pose $Q^{\frac{1}{2}(|x|+k-1)}(x) := \xi(x)$

$$\beta Q^{\frac{1}{2}(|x|+k-1)}(x) := \zeta(x)$$

alors ζ satisfait tout, ξ tout sauf la rel° de Cartan
et sauf la linéarité

$\xi(xy)$ = formule horrible

On appelle ce bazar une algèbre W_{k-1}.

$\Rightarrow$ le thm du début est vérifié.

Thm Soit $R \in Alg_{E_k}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_{\leq 0}})$, on a une SS :

$$E^1_{p,q} = \tilde{H}_{p+q,q}(gr_{\cdot} U^{E_k} R) \Longrightarrow H_{p+q}(U^{E_k} R)$$

Alors toutes les opérations sont compat avec la SS.