Transfert et comparaison

jeudi 18 avril 2019 15:40

On va supposer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}$ vérifient tous les bons axiomes et que $\mathcal{G}$ est artinien

On a une théorie d'homologie sur $\mathcal{S}$ et donc sur $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$

On a une notion de connectivité $\mathcal{G} \longrightarrow [-\infty, +\infty]_{\leqslant}$

et $\mathbb{1}_{conn} : \mathcal{G} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ unité du produit de convolution $*$

[si X est ρ-connectif, X' est ρ'-connectif alors $X \otimes X'$ est $\rho * \rho'$-connectif]

Transfert

prop Si on a $E^{\ell}_{g,p,q} \Longrightarrow H_{g,p+q}$ et que $E^{\ell}_{g,p,q}$ est ρ-connectif alors $H_{g,p+q}$ est ρ-connectif.

Rappel Construction bar itérée : si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{S}$ est un mφ de E_k-alg unitaires, on associe

$$B^{E_k}(f) \in \mathcal{C}$$

Si $\mathbf{R}$ est augmentée, on note $B^{E_k}(\mathbf{R}) := B^{E_k}(\varepsilon)$

et $\widetilde{B}^{E_k}(\mathbf{R}) = \mathrm{cofib}\big(\underbrace{B^{E_k}(\mathbb{1})}_{\simeq \mathbb{1}} \longrightarrow B^{E_k}(\mathbf{R})\big)$

prop Si $k=1$ et que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$ sont des algèbres assoc unitaires et $\mathcal{C}$-cofibrants, alors

$$B^{E_1}(f) \simeq \mathbf{S} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbf{R}} \mathbf{S} = |\mathbf{S} \otimes \mathbf{R}^{\otimes \bullet} \otimes \mathbf{S}|$$

Si on admet le thm de Dunn :

$$\mathrm{Alg}_{E_k^+}(\mathcal{C}) \simeq \underbrace{\mathrm{Alg}_{E_1^+}(\mathrm{Alg}_{E_1^+}(\cdots \mathrm{Alg}_{E_1^+}}_{k \text{ fois}}(\mathcal{C})\cdots))$$

alors $B^{E_k}(R) \simeq B^{E_1}(B^{E_{k-1}}(R))$

$\Longrightarrow$ suite spectrale de Grothendieck :

$$H_p(H_q(B^{E_{k-1}}(R))^{\otimes p}) \Longrightarrow H_{p+q}(B^{E_k}(R))$$

Thm Soit $R \in \mathrm{Alg}_{E_k^+}(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}$-cofibrante

Alors $\forall M \in {}_{\mathcal{G}}\mathrm{Mod}(\mathbb{k})$, on a une SS fortement convergente

$$E^1_{g,p,q} = H_{g,q}(B^{E_{k-1}}(R)^{\otimes p} ; M) \Longrightarrow H_{g,p+q}(B^{E_k}(R) ; M)$$

Si $\mathbb{k} = \mathbb{F}$ est un corps et que $\mathcal{G}$ vérifie l'axiome (K) ci-dessous, alors

- $H_{\cdot,\cdot}(B^{E_{k-1}}(R))$ est une alg assoc augmentée
- $E^2_{g,p,q} = \mathrm{Tor}_p^{H_{g,q}(B^{E_{k-1}}(R))}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$

La preuve du deuxième point nécessite la formule de Künneth suivante :

soit $X, Y \in \mathrm{Ch}(\mathbb{k})^{\mathcal{G}}$ cofibrants et on suppose que $\mathcal{G}$

soit $X, Y \in Ch(\mathbb{k})^{\mathcal{G}}$ cofibrants et on suppose que $\mathcal{G}$ vérifie :

(K) $\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_y \longrightarrow \mathcal{G}_{x \oplus y}$ est injectif $\forall x, y \in \mathcal{G}$

alors $H_{g,*}(X \otimes Y) = \underset{a \otimes b \xrightarrow{f} g}{\operatorname{colim}} H_*(X(a) \otimes Y(b))$

Si de plus $H_*(X(a))$ est plat $\forall a \in \mathcal{G}$, alors

$$H_{*,*}(X \otimes Y) \cong H_{*,*}(X) \otimes H_{*,*}(Y)$$

<u>preuve du Thm</u> :

Rappel : $B^{E_k}(R) = \left| B^{E_k}_{p_1,\dots,p_k}(R) \right|$

$\to$ k - semi - simplicial

$\to$ Reedy cofibrant si R est cof

$$\Longrightarrow B^{E_k}(R) = \left| p_1 \longmapsto \left| B_{p_1,\bullet,\dots,\bullet}(R) \right| \right| \quad (*)$$

où $B^{E_k}_{p_1,\dots,p_k}(R \xrightarrow{f} S) =$

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
t_2^{p_2} & S & S & S \\ \hline
\vdots & S & R & S \\ \hline
 & S & R & S \\ \hline
t_2^{1} & S & S & S \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{t_1^1} & \multicolumn{1}{c}{t_1^{p_1}} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}$$

Prenons $S = \mathbb{1}$ et $f = \varepsilon$ d'emblée.

Si $p_1 = 0$ est fini, alors $|B_{0,\dots\dots}| \simeq *$

Si $p_1 = 1$, $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & R & 1 \\ \hline - & R & 1 \\ \hline 1 & R & 1 \\ \hline 1 & R & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow |B^{E_k}_{1,\dots}(R)| \simeq |B^{E_{k-1}}_{\dots\dots}(R)| = B^{E_{k-1}}(R)$

Plus généralement, $|B_{p,\dots\dots}| \simeq B^{E_{k-1}}(R)^{\otimes p}$

La suite spectrale de la filtration de $*$ est ce qu'on veut dans le thm.

Pour la 2ème partie, on applique la formule de Künneth $\square$

Thm [Transfert ascendant] Soit R une E_k-alg dans $\mathcal{C}$ qui est $\mathcal{C}$-cofibrant, $\rho : \mathcal{G} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ vérifiant $\rho * \rho \geq \rho$

Si $H_{g}^{E_\ell}(R) = 0$ $\forall n < \rho(g) - \ell$,

alors pour tout $k \geq \ell$, $\forall n < \rho(g) - \ell$, $H_{g,d}^{E_k}(R) = 0$

<u>pv</u> Il suffit de faire $\ell = k-1$

On utilise le fait que $\widetilde{B}^{E_{k-1}}(R) \simeq S^{k-1} \wedge Q_{\mathbb{L}}^{E_{k-1}}(R)$

$\Rightarrow$ ρ-connectif grâce à l'hyp sur R

$\Rightarrow$ l'appli $B^{E_{k-1}}(\mathbb{1}) \longrightarrow B^{E_{k-1}}(R)$ est ρ-connectif

On veut montrer que $\widetilde{B}^{E_k}(R) \simeq S^k \wedge Q_{\mathbb{L}}^{E_k}(R)$ est $(\rho+1)$-connectif

On prend la version relative de la suite spectrale :

$H\left(B^{E_{k-1}}(R)^{\otimes p}, B^{E_{k-1}}(\mathbb{1})^{\otimes p}\right) \Rightarrow H\left(B^{E_k}(R), B^{E_k}(\mathbb{1})\right)$

On prend la version relative de la suite spectrale :

$$H_{g,q}\Big(\underbrace{B^{E_{k-1}}(R)^{\otimes p}, B^{E_{k-1}}(\mathbb{1})^{\otimes p}}_{\ell * \cdots * \ell \,\geq\, \ell\text{ - connectif}}\Big) \Rightarrow H_{g,p+q}\big(B^{E_k}(R), B^{E_k}(\mathbb{1})\big)$$

et en plus pour $p=0$, on a $\left(B^{E_{k-1}}(\mathbb{1}), B^{E_{k-1}}(\mathbb{1})\right) \Rightarrow \infty$ - connectif

$\Rightarrow$ en combinant les deux, on trouve bien que $\left(B^{E_k}(R), B^{E_k}(\mathbb{1})\right)$ est $(\ell+1)$ - connectif $\square$

Thm [Transfert descendant] Si $R \in Alg_{E_k^+}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}$-cof et que R est 0-connective et réduite (⇒ permet de prendre un remplacement cellulaire)

Si $H^{E_k}_{g,n}(R) = 0 \ \forall n < \ell(g) - \ell$, alors

alors $H^{E_\ell}_{g,n}(R) = 0 \ \forall n < \ell(g) - \ell$

Comparaison

V, W deux $\mathbb{F}$-mod gradués, alors

- $Ass^+(V \oplus W) \cong T(V \oplus W) \cong \bigoplus_{n \geq 0} (V \oplus W)^{\otimes n}$

  $\hookleftarrow Ass^+(V)$

  $\cong Ass^+(V) \oplus T(W \otimes Ass^+(V))$ iso de $Ass^+(V)$-modules à gauche

- $S(V \oplus W) \cong S(V) \otimes S(W)$ $\qquad S = Com^+$

$\Longrightarrow$ on va faire une variante E_k de ça

lemme Il y a un foncteur $\mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Alg}_{Ass^+}(\mathcal{C})$

$$R \longmapsto \overline{R}$$

tq a) $\overline{R}$ est cofibrant $\Longleftrightarrow$ R est cofibrant

b) préserve les eqv faibles entre cof

c) commute avec $\mathrm{colim}_{\mathbb{Z}}$: $\mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}^{\leq \mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C})$

Rappel Si R est une E_k-alg, alors R est une E_1-alg

$\Longrightarrow$ on peut considérer $\overline{R}$

Thm $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ 0-connectifs et réduits, il existe une éqv naturelle de $\overline{E_k(X)}$-modules à gauche :

$$\overline{E_k(X \vee Y)} \simeq \overline{E_k(X)} \otimes E_k^+(Y \otimes E_1^+(S^{k-1} \wedge X))$$

Esquisse de preuve dans le cas $\Bbbk = \mathbb{F}$ est de char 0 et que $\mathcal{G}$ est discret

Rappel : $H_*(E_k(X)) \simeq W_{k-1}(H_*(X))$

on obtient $H_*(\overline{E_k(X \vee Y)}) \simeq S(\mathrm{Lie}((H_*(X) \oplus H_*(Y))[k-1]))$

et le terme de droite dans le thm est :

et le terme de droite dans le thm est :

$$S\Big(Lie\big(H_*(X)\big)[k-1]\Big) \otimes S\Big(Lie\big(H_*(Y)[k-1]\big) \otimes T\big(H_*(X)[k-1]\big)\Big)$$

$$\simeq S\Big(Lie\big(H_*(X)[k-1]\big) \oplus Lie\big(H_*(Y)[k-1]\big) \otimes T\big(H_*(X)[k-1]\big)\Big)$$

En prenant l'algèbre enveloppante, ou en choisissant une base comme il faut, les deux sont iso

Cor [Thm de comparaison] On se donne $\rho : \mathcal{G} \to [-\infty, \infty]$ tq $\rho * \rho \geq \rho$. On se donne $R \in Alg_{E_k}(\mathcal{C})$ tq $H^{E_k}_{g,n}(R) = 0 \; \forall n < \rho(g) - (k-1)$. On se donne aussi $f : S \longrightarrow R$ tq $H^{E_k}_{g,n}(S \xrightarrow{f} R) = 0 \; \forall n < \rho(g)$.
On suppose que R et S ~~étant~~ sont cof, 0-connectifs et réduits.
Alors

$\to H_*(B(\mathbb{k}, \bar{R}, \bar{S}))$

1) $H^{\bar{R}}_{g,d}(\bar{S}) = 0 \quad \forall n < \inf(\mathbb{D}_{conn}, \rho)(g)$

2) $\forall \mu : \mathcal{G} \to [-\infty, \infty]$ tq $\rho * \mu \geq \mu$ et $M \in Mod(\bar{R})$ $\mathcal{C}$-cof et $H_{g,n}(M) = 0 \quad \forall n < \rho(n)$, on a
$H_{g,d}(B(M, \bar{R}, \bar{S})) = 0 \quad \forall d < \mu(g)$

<u>Idée de preuve</u> : 2) $\Longrightarrow$ 1) en prenant $\mu = \inf(\mathbb{D}_{conn}, \rho)$ et $M = \mathbb{k}$.

Pour prouver 2), on fait des remplacements cellulaires

Pour prouver 2), on fait des remplacements cellulaires

On peut factoriser f sous la forme $R \longrightarrow C \xrightarrow{\sim} S$

où $C \in \mathrm{Alg}_{E_k}(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leq})$ est obtenue en ajoutant des cellules E_k de bidegré (g, n) à R avec $n \geq \rho(g)$

On a aussi $0_* M \in \mathcal{C}^{\mathbb{Z}_\leq}$ l'extension de M

On a $B(M, \overline{R}, \overline{C}) \xrightarrow{\sim} B(M, \overline{R}, \overline{S})$

Comme $\otimes$ et $|-|$ commutent avec $\mathrm{colim}_{\mathbb{Z}}$, on obtient que $\mathrm{colim}\, B(0_* M, 0_* \overline{R}, \overline{C}) \xrightarrow{\sim} B(M, \overline{R}, \overline{C})$

On calcule la SS associée à la filtration :

$$E^1_{g,d} = H_{g,d}\left(B(M, \overline{R}, \overline{R \vee^{E_k} E_k(X)})\right) \Rightarrow H_{g,d}\left(B(M, \overline{R}, \overline{S})\right)$$

où $X = \bigvee S^{g,d}$, $d \geq \rho(g)$

on se ramène à ce cas en résolvant R

D'après le thm précédent, pour $R = E_k(\bigvee S^{g,d})$, $d \geq \rho(g) - (k-1)$

$$\overline{R \vee^{E_k} E_k(X)} \simeq \overline{R} \otimes E_k^+\Big(\underbrace{\bigvee S^{g,d}}_{\rho\text{-connectif}} \otimes \underbrace{E_1^+(S^{k-1} \wedge \overline{R})}_{\rho-\text{connectif}}\Big)$$

$$\underbrace{\simeq M \otimes E_k^+\big(\underbrace{\sim\sim\sim}_{\rho-\text{connectif}}\big)}_{\inf(\mathcal{D}_{\mathrm{com}}, \rho)-\text{connectif}} \qquad \square$$