Devoir Non Surveillé

Devoir optionnel, pour vous entraîner. À rendre (si vous le souhaitez !) pour le 4 février.

L'objectif de ce devoir est de démontrer qu'il existe exactement 5 structures de catégories de modèles sur la catégorie des ensembles pointés Set_*. On rappelle que les objets de Set_* sont les paires (X, x_0) où X est un ensemble et $x_0 \in X$ est un élément. Les morphismes sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \mid f(x_0) = y_0\}.$$

1. Démontrer que la catégorie Set_* est complète et cocomplète. On pourra utiliser le fait que Set l'est. Quel est le produit, le coproduit ? Quel est l'objet initial, l'objet final ?

2. On considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} (A, a_0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & (X, x_0) \arrow[d, "p"] \\ (B, b_0) \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "l"] & (Y, y_0) \end{tikzcd}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f et i pour qu'il existe une application pointée l telle que $l \circ i = f$ (i.e. le triangle supérieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant les mêmes images.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et p pour qu'il existe une application pointée l telle que $p \circ l = g$ (i.e. le triangle inférieur commute). On pourra raisonner en termes d'éléments ayant ou non des antécédents.

   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur f, i, g, p pour qu'il existe une application pointée l telle que tout le diagramme commute.

3. Soit i et p deux applications pointées comme dans le diagramme précédent. On note $i \perp p$ si quelles que soient les applications f et g, on peut trouver un relèvement l.

   (a) Montrer que

$$i \perp p \iff \begin{cases} i \text{ est injective ou } p \text{ est injective,} \\ i \text{ est surjective ou } p \text{ est surjective.} \end{cases}$$

   (b) Soit $i : (A, a_0) \to (B, b_0)$ une application pointée. Déterminer la classe $i^\perp$ des applications pointées p telles que $i \perp p$.

   Dualement, soit $p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application pointée. Déterminer la classe ${}^\perp p$ des applications pointées i telles que $i \perp p$.

4. Un système à factorisation faible est une paire de classes d'applications $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ telle que :

- $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\perp}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à toutes les applications de $\mathcal{M}$;
- $\mathcal{M} = {}^{\perp}\mathcal{E}$ est exactement la classe des applications qui ont la propriété de relèvement à gauche par rapport à toutes les applications de $\mathcal{E}$;
- toute application f peut se factoriser sous la forme $f = i \circ p$ où $i \in \mathcal{M}$ et $p \in \mathcal{E}$.

(a) Soit i une application pointée quelconque. Montrer que la paire $R(i) := ({}^{\perp}(i^{\perp}), i^{\perp})$ est un système à factorisation faible. (On pourra raisonner au cas par cas sur i.)

(b) Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ un système à factorisation faible quelconque. Montrer qu'il fait partie de la liste précédente.

5. Supposons désormais que $(\mathrm{Set}_*, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ est une structure de catégorie de modèles où $\mathcal{W}$ sont les équivalences faibles, $\mathcal{C}$ sont les cofibrations et $\mathcal{F}$ sont les fibrations.

   On rappelle que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ sont des systèmes à factorisation faibles et qu'ils font donc partie de la liste trouvée à la Question 4. Quelles paires sont possibles étant données les relations d'inclusions existant entre ces deux systèmes ?

6. La classe $\mathcal{W}$ doit satisfaire une condition supplémentaire pour obtenir une catégorie de modèles.

   (a) Quelle est cette condition ?

   (b) Exprimer la classe $\mathcal{W}$ en fonction de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.

   (c) Parmi les paires de systèmes à factorisation faibles $((\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F}), (\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W}))$ possibles trouvées à la question précédente, lesquelles vérifient l'hypothèse supplémentaire sur $\mathcal{W}$?

7. Lister toutes les structures de catégories de modèles sur Set_*. On pourra les numéroter pour y référer plus facilement par la suite.

8. Pour chacune de ces structures :

   (a) Décrire les objets fibrants et cofibrants.

   (b) Pour chaque ensemble pointé, décrire les cylindres et les objets chemins.

   (c) Décrire quand deux applications sont homotopes à gauche, resp. à droite.

   (d) Décrire la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathrm{Set}_*) = \mathrm{Set}_*[\mathcal{W}^{-1}]$.

9. Entre lesquelles de ces structures existe-t-il des équivalences de Quillen ?