Contrôle continu 1 – corrigé

MC2 Algèbre et Analyse Élémentaires 2

vendredi 8 février 2019

*Durée : **45 min**. Les documents et la calculatrice sont interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.*

Exercice 1 On pose $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + 3y = 0\}$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer une base de E.

Corrigé

1. On vérifie que les trois axiomes sont vérifiés :
   — Le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0, 0)$ appartient à E, car $5 \times 0 + 3 \times 0 = 0$;
   — Soit $(x, y) \in E$ et $(x', y') \in E$, alors on a bien $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y') \in E$ car $5(x + x') + 3(y + y') = 5x + 3y + 5x' + 3y' = 0 + 0 = 0$;
   — Soit $(x, y) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a bien $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in E$ car $5\lambda x+3\lambda y = \lambda(5x + 3y) = \lambda \times 0 = 0$.
2. On résout : $5x + 3y = 0 \iff x = -\frac{3}{5}y$. On trouve alors $(x, y) \in E \iff (x, y) = x(-\frac{3}{5}, 1)$. Le vecteur $u_1 = (-\frac{3}{5}, 1)$ engendre donc E. Comme il est non-nul, la famille (u_1) est libre, c'est donc une base de E.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. On pose les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose également $C = AB$.

1. Calculer la matrice C.
2. À quelle condition sur a la matrice C est-elle inversible ?
3. Calculer l'inverse de C quand c'est possible.

Corrigé

1. On trouve $C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 3a \end{pmatrix}$.
2. On calcule $\det C = 1 \times 3a - 2 \times a = a$. La matrice C est donc inversible si et seulement si $a \neq 0$.
3. En utilisant l'une des méthodes vues en cours (résolution de système linéaire, matrice auxiliaire...) on trouve $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2/a & 1/a \end{pmatrix}$.

Exercice 3 On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - 2y).$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base du noyau de f.
4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donner une équation paramétrique de l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (a, b)$.

Corrigé

1. On vérifie les deux axiomes :
   — Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, on calcule :
   $$\begin{aligned} f(x + x', y + y', z + z') &= (x + x' + y + y' + z + z', x + x' - 2(y + y')) \\ &= (x + x' + y + y' + z + z', x + x' - 2y - 2y') \\ &= (x + y + z, x - 2y) + (x' + y' + z', x' - 2y') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$
   — De même on vérifie que $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda f(x, y, z)$.
2. La matrice de f est donnée par
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on résout :
   $$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3y \\ x = 2y \end{cases}$$
   On trouve donc que $\ker f$ est la droite engendrée par le vecteur $(2, 1, -3)$.
4. On résout aisément le système pour trouver (par exemple) $(x, y, z) = (b + 2t, y, a - b - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$.