Groupoïdes monoïdaux et algèbres E_k

jeudi 16 mai 2019 15:39

① Modules sur les algèbres E_1

Étant donnée $\mathbf{R}$ une algèbre E_1, on la remplace par une algèbre associative unitaire $\bar{\mathbf{R}}$ tq $\mathrm{Mod}_{\mathbf{R}} = \mathrm{Mod}_{\bar{\mathbf{R}}}$

$$\bar{\mathbf{R}} := \big([0,\infty)\times \mathbb{1}\big) \sqcup \big((0,\infty)\times \mathbf{R}\big) \quad \text{dans } \mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$$

avec la structure d'algèbre associative unitaire suivante :

- $[0,\infty)\times \mathbb{1}$ est une algèbre assoc unitaire :
$$\big([0,\infty)\times\mathbb{1}\big)\otimes\big([0,\infty)\times\mathbb{1}\big) \cong [0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \xrightarrow[\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\cong\mathbb{1}]{\text{addition}} [0,\infty)\times\mathbb{1}$$
- $(0,\infty)\times \mathbf{R}$ est un $[0,\infty)\times\mathbb{1}$-bimodule
$$[0,\infty)\times\mathbb{1}\otimes(0,\infty)\times\mathbf{R} \cong [0,\infty)\times(0,\infty)\times(\mathbb{1}\otimes\mathbf{R}) \xrightarrow[\mathbb{1}\otimes\mathbf{R}\cong\mathbf{R}]{\text{addition}} (0,\infty)\times\mathbf{R}$$
pareil dans l'autre sens
- $(0,\infty)\times\mathbf{R}$ est une algèbre assoc (non unit.)
$$(0,\infty)\times\mathbf{R}\otimes(0,\infty)\times\mathbf{R} \cong (0,\infty)\times(0,\infty)\times\mathbf{R}\otimes\mathbf{R} \longrightarrow (0,\infty)\times\mathbf{R}$$
$$(s,t,x\otimes y) \longmapsto (s+t,\alpha_{s,t}(x,y))$$
où $\alpha_{s,t}\in \mathcal{C}_1^{FB_1}(2)$, $\alpha_{s,t} = \left(u\mapsto \frac{su}{s+t},\ u\mapsto\frac{s+tu}{s+t}\right)$

Tout ça est fonctoriel :
$$\overline{(-)} : \mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathrm{Ass}_+}(\mathcal{C})$$

lemme
i) $\overline{R}$ est cofibrante $\iff$ R est cofibrante dans $\mathcal{C}$
ii) $\overline{}$ préserve les équ faibles entre cofibrants

lemme Si $R \in Alg_{Ass}(\mathcal{C}) \longmapsto U(R) \in Alg_{E_1^+}(\mathcal{C})$
alors $\overline{U(R)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \sqcup R = R^+$ unitalisation

prop On a un zigzag de transfo nat de foncteurs $Alg_{E_1} \to Alg_{E_1^+}$
$\underbrace{\overline{(-)}}_{} \longleftarrow \cdots \longrightarrow (-)^+$ équ sur les cof
on compose = avec $U : Alg_{Ass^+} \to Alg_{E_1^+}$

pv Rappel : construction bar monadique $B_\bullet(D,T,G) = D \circ T^{\circ \bullet} \circ G$
si $D = F^T : \mathcal{C} \to Alg_T(\mathcal{C})$ et $U : Alg_T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$
alors $B_\bullet(F^T, T, U)$ est augmenté avec $B_{-1} = id$
$\Rightarrow$ pour $X \in Alg_T$, on trouve
$$B_\bullet(F^T, T, X) \longrightarrow X \quad \text{résolution simpliciale}$$
Dans notre cas, on obtient
$$B_\bullet(F^{E_1}, E_1, R) \longrightarrow R$$
Soit $\varphi : E_1 \longrightarrow Ass \rightsquigarrow \varphi_* : Alg_{E_1}(\mathcal{C}) \leftrightarrows Alg_{Ass}(\mathcal{C}) : \varphi^*$
F^{Ass} est un E_1-module à droite :
$$F^{E_1} \longrightarrow \varphi^* \varphi_* F^{E_1} = \varphi^* F^{Ass}$$
$$\rightsquigarrow B_\bullet(F^{E_1}, E_1, R) \longrightarrow \varphi^* B_\bullet(F^{Ass}, E_1, R)$$
$$\rightsquigarrow B_\bullet(F^{E_1}, E_1, R)^+ , \ \sim \ \overline{B(F^{Ass}, E_1, R)}$$

$\rightsquigarrow B_\bullet(F^{E_1}, E_1, R) \xrightarrow{\sim} \ldots \leftarrow B_\bullet(F^{As}, E_1, R)$

$\rightsquigarrow B(F^{E_1}, E_1, R)^+ \xleftarrow[\text{lemme}]{\sim} \overline{B(F^{As}, E_1, R)}$

& on complète le zigzag

$B_\bullet(\text{---})$ est Reedy Cof et $E_1 \xrightarrow{\sim} As$ $\square$

(si R est cof)

Si $\mathcal{C}$ est pointée, on a $R \longrightarrow *$

$\Rightarrow \overline{R} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{1} \sqcup * \cong \mathbb{1}$ augmentation canonique

$\hookrightarrow * =$ initial $=$ final

$\Rightarrow$ foncteurs $Q^R : \underset{= Mod_{\overline{R}}(\mathcal{C})}{Alg_{\overline{R}\otimes -}(\mathcal{C})} \longrightarrow \mathcal{C}$

et $Q^{\overline{R}} : \underset{= {}_{\overline{R}}Mod(\mathcal{C})}{Alg_{-\otimes \overline{R}}(\mathcal{C})} \longrightarrow \mathcal{C}$

& versions dérivées

Adaptateurs

Si $\mathcal{C}$ est tressée ou symétrique, alors $\overline{R} \otimes \overline{R}$ a une structure d'algèbre associative unitaire aussi

$$\left.\begin{array}{l} \overline{R} = \mathbb{1} \otimes \overline{R} \xrightarrow{\lambda} \overline{R} \otimes \overline{R} \\ \overline{R} = \overline{R} \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{e} \overline{R} \otimes \overline{R} \end{array}\right\} \text{ deux structures} \neq \text{ de } \overline{R}\text{-mod}$$

Un adaptateur pour R est un $(\overline{R} \otimes \overline{R}, \overline{R})$-bimodule $A(R)$, muni de $A(R) \xleftarrow{\sim} \; \xrightarrow{\sim} \overline{R}$ comme $(\overline{R}, \overline{R})$-bimod

$A(R)$, muni de $A(R) \leftarrow \quad \rightarrow R$ comme $(\bar{R}, R)$-bimod

(où on utilise λ pour voir $A(\bar{R})$ comme $(\bar{R},\bar{R})$-bimodule)

t.q.

$$\begin{tikzcd}
(\bar{R}\otimes D)\otimes A(R) \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr] & \\
(D\otimes \bar{R})\otimes A(R) \arrow[r] & A(R)
\end{tikzcd}$$

commute à htpie près

Rq $\exists\, Alg_{E_2}(\mathcal{C}) \longrightarrow (\bar{R}\otimes\bar{R}, \bar{R})$-bimod fonctoriel

Appl° : Attachement de cellules

R : algèbre E_1, M : $\bar{R}$-module à gauche

$f : \partial D^{g,d+1} \longrightarrow \bar{R}$

$\Longrightarrow f\cdot - : \partial D^{g,d+1}\otimes M \xrightarrow{f\otimes id} \bar{R}\otimes M \xrightarrow{\alpha} M$

on définit

$$\begin{tikzcd}
\partial D^{g,d+1}\otimes M \arrow[r, "f\otimes id"'] \arrow[d] & M \arrow[d, dashed] \\
D^{g,d+1}\otimes M \arrow[r, dashed] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & \cancel{M/f} \in \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

⚠ pas un morphisme de $\bar{R}$-module à gauche

$\Rightarrow M/f$ n'est pas un $\bar{R}$-module à gauche

mauvaise déf

déf $\varphi(f) : \partial D^{g,d+1}\otimes A(R) \xrightarrow{f\otimes id} \bar{R}\otimes A(R) \xrightarrow{\lambda\otimes id} \bar{R}\otimes\bar{R}\otimes A(R) \longrightarrow A(R)$

$$\begin{tikzcd}
\partial D^{g,d+1}\otimes A(R) \arrow[r] \arrow[d] & A(R) \arrow[d, dashed] \\
D^{g,d+1}\otimes A(R) \arrow[r, dashed] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner h"] & \bar{R}/f
\end{tikzcd}$$

Cette fois-ci c'est bon : en utilisant φ, ça reste un $\bar{R}$-module à gauche (et un module à droite)

$M/\ldots (\bar{R} \ldots)$ [illegible]

$\bar{R}^{\bullet} \otimes A(R) \dashrightarrow \bar{R}/f$ (est un module à droite)

$M/f = (\bar{R}/f) \underset{\bar{R}}{\otimes} M$ $\Rightarrow$ $\bar{R}$-module à gauche

$U^{\bar{R}}(M/f)$ est $\simeq_c$ à la mauvaise déf

② Algèbres E_k à partir de groupoïdes monoïdaux

$\mathcal{G}$: groupoïde k-monoïdal

muni d'un foncteur monoïdal $r : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{N}$ « rang »

On suppose que $r^{-1}(0)$ est le sous-gpd des objets $\cong \mathbb{1}$

Hypothèse $G_0 = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(\mathbb{1})$ est trivial

Rappel : $sSet^{\mathcal{G}}$ est muni du pdt de convolution de Day

$\underline{*} \in sSet^{\mathcal{G}}$, $\underline{*}(x) = *$ est terminal

$\Rightarrow$ c'est une $\mathcal{O}$-algèbre pour toute opérade simpliciale

(p. ex. E_k^+).

Grâce à l'hypothèse, $\underline{*}$ est l'unitalisation de $\underline{*}_{>0}$

où $\underline{*}_{>0}(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \cong \mathbb{1} \\ * & \text{sinon} \end{cases}$ est une algèbre E_k

Soit $\mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \underline{*}_{>0}$ une résolution cofibrante dans Alg_{E_k}

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "r"'] & s\mathrm{Set} \\ \mathbb{N} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$r_* T = \mathbb{L} r_*(\underline{*}_{>0}) =: \mathbf{R} \Rightarrow$ algèbre E_k dans $s\mathrm{Set}^{\mathbb{N}}$

Rq $\mathbf{R}(n) \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0 \\ \displaystyle\coprod_{\substack{[x] \in \pi_0 \mathcal{G} \\ r(x) = n}} B\mathcal{G}_x \end{cases}$ où $\mathcal{G}_x = \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$

Hypothèse $\forall x, y \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_y \to \mathcal{G}_{x \otimes y}$ est inj

Pour $x \in \mathcal{G}$, on définit

$$\begin{aligned} T_\bullet^{E_1}(x) : \Delta^{op}_{inj} &\longrightarrow s\mathrm{Set}_* \\ [p] &\longmapsto \Big(\operatorname*{colim}_{x_1, \dots, x_p \in \mathcal{G}_{>0}^p} \mathcal{G}(x_1 \otimes \dots \otimes x_p, x) \Big)_+ \end{aligned}$$

d_0 et d_p envoient tout sur le point base

et d_i concatène x_i, x_{i+1}

Et $T^{E_1}(x) = \| T_\bullet^{E_1}(x) \| \in s\mathrm{Set}_*$ réalisation géom épaisse

lemme $S^1 \wedge Q^{E_1}_{\mathbb{L}}(\underline{*}_{>0})(x) \simeq T^{E_1}(x)$

$\mathcal{G}_x$ - équivariant dans $s\mathrm{Set}_*$

Rappel S^1 $Q^{E_1}(\dots) \simeq \tilde{R}^{E_1}(\dots)$ ...

Rappel : $S^1 \wedge Q^{E_1}(\dots) \simeq \widetilde{B}^{E_1}(\dots_+)$ conditions

Cor $S^1 \wedge Q^{E_1}_{\mathbb{L}}(R)(n) \simeq \bigvee_{\substack{[x]\in\pi_0\mathcal{G}\\ r(x)=n}} T^{E_1}(x) \wedge_{\mathcal{G}_x} (E\mathcal{G}_x)_+$

On dit que $\mathcal{G}$ satisfait l'estimation standard de connectivité si $H_*(T^{E_1}(x))$ est concentré en degré $r(x)$

On définit dans ce cas $st^{E_1}(x) \cong \widetilde{H}_{r(x)}(T^{E_1}(x); \mathbb{Z})$

Dans ce cas :

$$H^{E_1}_{n,d}(R;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\substack{[x]\in\pi_0\mathcal{G}\\ r(x)=n}} H_{d-(n-1)}(\mathcal{G}_x; st^{E_1}(x))$$

(En particulier $H^{E_1}_{n,d} = 0$ si $d < n-1$)

Manière encore plus simple de calculer H^{E_1} :

$$S^{E_1}_\bullet(x) : \Delta^{op}_{inj} \longrightarrow sSet$$
$$[p] \longmapsto \operatorname{colim}_{(x_0,\dots,x_{p+1})\in\mathcal{G}^{p+1}_{>0}} \mathcal{G}(x_0\otimes\cdots\otimes x_{p+1}, x)$$

et $S^{E_1}(x) = \| S^{E_1}_\bullet(x) \| \in sSet$

lemme $T^{E_1}(x) \simeq \Sigma^2 S^{E_1}(x)$ (suspension non réduite eg $\Sigma\varnothing = S^0$)

Rq Si $\mathcal{G}$ n'a qu'une classe d'iso en chaque rang, alors

$$S_p^{E_1}(x) \tilde{=} \bigsqcup_{\substack{(x_0, \dots, x_{p+1}) \in \mathcal{G}_{>0}^{p+2} \\ x_0 \oplus \dots \oplus x_{p+1} = x}} \mathcal{G}_x / \mathcal{G}_{x_0} + \dots + \mathcal{G}_{x_{p+1}}$$

ex Si $\mathcal{G} = (\mathbb{N}, \oplus, 0)$

Alors $R \simeq \mathbb{N}_{>0}$

on a $S_p^{E_1}(n) = \{(n_0, \dots, n_{p+1}) \mid n_0 + \dots + n_{p+1} = n\}$

$$S^{E_1}(n) \simeq \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 1 \\ * & \text{si } n \geq 2 \quad \text{car objet terminal } 1+1+\dots+1 = n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow H^{E_1}_{n,d}(\mathbb{N}_{>0}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } (n,d) = (1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$