Introduction à la théorie de l'homotopie

Notes de cours

Najib Idrissi

Dernière mise à jour : 18 février 2021

Avant-propos

Ce document donne un résumé rapide des cours *Introduction à la théorie de l'homotopie* (2019–2020) et *Homotopie II* (2020–2021) donnés à l'Université de Paris dans le cadre du M2 Mathématiques Fondamentales. Elles ne sont pas complètes et le contenu peut encore changer ou être réorganisé. En particulier, le cours de 2019–2020 contenait beaucoup de matériel sur les ensembles simpliciaux qui ont été intégrées en 2020–2021 au cours *Homotopie I* de **Vallette2020**. Le contenu couvert par le cours *Homotopie I* ou par le cours *Homologie* est indiqué par un symbole (☌).

Ces notes sont fortement inspirées par des notes de cours de Grégory **Ginot2019** et suivent presque le même plan. Je voudrais aussi remercier Jenny Amanda, Carlo Buccisano Pierre Elis, Jonah Frébault, Clémentine Lemarié-Rieusset, Timothée Moreau, Maxime Ramzi et Gabriel Saadia pour avoir remarqué des erreurs dans le texte.

Lectures à envisager :

- Rappels de topologie algébrique et d'algèbres homologique : **Bredon1993** ; **Hatcher2002** ; **Saint-Gervais2017** ; **Schapira2015** ; **Spanier1995** ; **Weibel1994**.
- Catégories de modèles : **DwyerSpalinski1995** ; **Hovey1999**.
- Ensembles simpliciaux : **GoerssJardine1999** ; **Friedman2008**.
- Théorie de l'homotopie rationnelle : **FelixHalperinThomas2001** ; **Hess2007** ; **FelixOpreaTanre2008** ; **GriffithsMorgan2013**.
- Quasi-catégories : **Lurie2009a**.

Najib Idrissi
Université de Paris & IMJ-PRG
Bâtiment Sophie Germain
8 place Aurélie Nemours
75013 Paris
France
najib.idrissi-kaitouni@imj-prg.fr
https://idrissi.eu/fr/cours/20-21-homotopie/

Table des matières

(Adapté du manuel TikZ & PGF [**Tantau**].)

1. Catégories de modèles

1.1. Motivation

1.1.1. Espaces topologiques

Notons Top la catégorie des espaces topologiques. À partir de maintenant et sauf mention contraire, nous ne considérerons que des fonctions continues.

Définition 1.1.1. Deux fonctions $f, g : A \to X$ sont *homotopes* s'il existe une fonction $H : A \times [0,1] \to X$ telle que $H(-,0) = f$ and $H(-,1) = g$. On note dans ce cas $f \simeq g$. On note aussi $[A, X]$ l'ensemble des classes d'homotopies de fonctions $A \to X$.

Définition 1.1.2. Deux espaces sont *homotopiquement équivalents* (aussi noté $X \simeq Y$) si $\exists f : X \leftrightarrows Y : g$ telle que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Les applications f et g sont alors appelées des *équivalences d'homotopie*.

Cela définit une « relation d'équivalence » sur les espaces topologiques. La théorie de l'homotopie est l'étude des espaces « à homotopie près », c'est-à-dire que l'on considère que deux espaces sont « les mêmes » s'ils sont homotopiquement équivalents.

La Question : étant donnés X, Y, comment tester si $X \simeq Y$? En général, on utilise des *invariants homotopiques*.

Définition 1.1.3. Un *espace pointé* est une paire (X, x_0) où X est un espace et $x_0 \in X$. Une *application pointée* est une application qui préserve le point base. On note Top_* la catégorie des espaces topologiques pointés.

Définition 1.1.4. Une *homotopie pointée* est une homotopie qui reste constante sur le point base. On note $[(A, a_0), (X, x_0)]$ l'ensemble des classes d'homotopies pointées de fonctions pointées $(A, a_0) \to (X, x_0)$.

Définition 1.1.5. Pour un espace X, on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X. Soit (X, x_0) un espace pointé. On définit $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)]$.

On définit ainsi des foncteurs $\pi_0 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ et $\pi_n : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Set}$. De plus, π_1 est un groupe, et π_n est un groupe abélien pour $n \geq 2$.

Proposition 1.1.6. *Soit $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie. Alors $\pi_0(f)$ est une bijection, et pour tout $x \in X$, $\pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

Définition 1.1.7. Une *équivalence d'homotopie faible* est une application qui vérifie la conclusion de la proposition précédente. On note $\xrightarrow{\sim}$ les équivalences d'homotopie faibles.

Exemple 1.1.8. Une équivalence d'homotopie est une équivalence d'homotopie faible, mais la réciproque est fausse : $\mathbb{N} \to \{0\} \cup \{1/n \mid n > 0\}$ est une équivalence d'homotopie faible mais n'est pas une équivalence d'homotopie.

Définition 1.1.9. Deux espaces X, Y sont dits *faiblement équivalents* s'il existe un zigzag :

$$X \xleftarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} X_n \xrightarrow{\sim} Y.$$

Proposition 1.1.10. *Deux espaces faiblement équivalents ont les mêmes groupes d'homotopie.*

La réciproque est fausse : par exemple $\mathbf{RP}^2 \times S^3$ et $\mathbf{RP}^3 \times S^2$ ont les mêmes groupes d'homotopie, mais ils ne sont pas faiblement équivalents (car sinon ils auraient la même homologie).

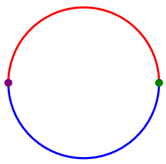
Rappel : un CW-complexe X est un espace topologique obtenu de la façon suivante : on démarre d'un espace discret X_0, puis on obtient X_1 à partir de X_0 en recollant des cellules de dimension 1, etc.

Théorème 1.1.11 (Whitehead1949). ($\circlearrowleft$) *Si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes, alors c'est une équivalence d'homotopie.*

Exemple 1.1.12. Ce n'est pas vrai si les espaces X et Y ne sont pas des CW-complexes. Considérons le pseudo-cercle $P = \{g, d, h, b\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont :

$$\tau = \{\emptyset, \{h\}, \{b\}, \{h, b\}, \{g, h, b\}, \{d, h, b\}, P\}.$$

Il existe une application $f : S^1 \to P$ qui envoit le point de gauche sur g, le point de droite sur d, tous les points du demi-cercle supérieur sur h, et tous les points du demi-cercle inférieur sur b, comme sur le dessin suivant :


$\to \{h, b, d, g\}.$

On peut vérifier facilement que f est une équivalence d'homotopie faible. Il n'existe cependant pas d'application $g : P \to S^1$ qui soit un inverse homotopique de f (toutes les applications $P \to S^1$ sont constantes).

Esquisse de démonstration. Supposons d'abord que $f : X \to Y$ est l'inclusion d'un sous-complexe. Par récurrence, pour toutes les cellules de Y qui ne sont pas dans X, on peut trouver une homotopie qui rétracte cette cellule dans X grâce à l'hypothèse. Pour le cas général, on commence par montrer que f est homotope à une application cellulaire, puis on applique le résultat précédent au cylindre de f (cf. Exemple 1.2.14) qui se rétracte sur Y. □

Théorème 1.1.13. ($\circlearrowleft$) *Soit X un espace quelconque. Alors il existe un CW-complexe Z et une équivalence d'homotopie faible $Z \xrightarrow{\sim} X$.*

On a donc deux cadres différents pour la théorie de l'homotopie :

- la catégorie homotopique « forte », où l'on inverse formellement les équivalences d'homotopie ;
- la catégorie homotopique « faible », où l'on inverse formellement les équivalences d'homotopie faible.

Dans le premier cas, on est plus proche de ce que l'on a envie d'étudier, mais c'est plus difficile à tester algébriquement ; dans le deuxième cas, c'est plus faible, mais c'est plus simple à tester algébriquement. Le théorème de Whitehead nous dit que si l'on se restreint aux CW-complexes, les deux notions sont les mêmes.

Dans ce cours, l'objectif est de généraliser ce cadre à une catégorie quelconque :

- on voudra définir ce que cela signifie pour deux objets d'être « les mêmes à homotopie près » ;
- qu'est-ce qu'une homotopie, et une équivalence d'homotopie forte ;
- quels sont les objets « gentils » (modèles) sur lesquels on peut se contenter de ne regarder les choses qu'à homotopie faible près.

Autre problème que nous allons résoudre : les limites et colimites dans Top ne préservent pas les équivalences faibles. Par exemple :

$$\begin{tikzcd} * \arrow[d, "\sim"] & S^0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & * \arrow[d, "\sim"] \\ D^1 & S^0 \arrow[l] \arrow[r] & D^1 \end{tikzcd}$$

La colimite du diagramme en haut est $* \cup_{S^0} * = *$, alors que la colimite de celui du bas est $D^1 \cup_{S^0} D^1 = S^1$. On verra que celui du dessous est meilleur : les applications qui le composent sont des inclusions de sous-espaces.

1.1.2. Complexes de chaînes

Voici un autre exemple de cadre où l'on peut faire de l'algèbre homotopique. Soit R un anneau commutatif.

Définition 1.1.14. Un *complexe de chaînes* est un diagramme de R-modules :

$$\dots \xrightarrow{d} C_i \xrightarrow{d} C_{i-1} \xrightarrow{d} \dots$$

vérifiant $d \circ d = 0$. Un morphisme est un morphisme de diagrammes. On note $\mathsf{Ch}(R)$ la catégorie des complexes de chaînes. On note aussi $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ la sous-catégorie des complexes de chaînes C vérifiant $C_i = 0$ pour $i < 0$.

Définition 1.1.15. Deux morphismes $f, g : C \to D$ sont *homotopes* (noté $f \simeq g$) si il existe une suite d'applications $h : C_n \to D_{n+1}$ telles que $f - g = hd + dh$.

Définition 1.1.16. Une *équivalence d'homotopie* est une paire d'applications $f : C \leftrightarrows D : g$ telles que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_D$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$.

Proposition 1.1.17. *Une équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.*

Définition 1.1.18. Un *quasi-isomorphisme* est un morphisme de complexes de chaînes qui induit un isomorphisme en homologie. Deux complexes de chaînes C, D sont dits *quasi-isomorphes* s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes :

$$C = X_0 \xleftarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} X_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} X_n = D.$$

Remarque 1.1.19. Un quasi-isomorphisme n'est pas forcément une équivalence d'homotopie. L'exemple suivant définit un quasi-isomorphisme qui n'est pas une équivalence d'homotopie :

$$\begin{tikzcd}
C = \arrow[d, "f"] & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[r] & \dots \\
D = & \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On a $H_0(C) = H_0(D) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $H_i(C) = H_i(D) = 0$ pour tout $i \neq 0$, et f induit bien un isomorphisme. Il n'existe cependant pas de morphisme $D \to C$ non-nul, donc pas d'inverse à homotopie près de f.

On peut donc étudier les complexes de chaînes à équivalence homotopique près, ou bien à quasi-isomorphismes près. Qui sont les complexes « gentils » pour lesquels c'est la même chose ?

Définition 1.1.20. On dit qu'un R-module P est *projectif* si pour toute surjection $p : A \to B$ et pour toute application $f : P \to B$, il existe un relèvement $g : P \to A$ tel que $p \circ g = f$.

Exemple 1.1.21. Pour $R = \mathbb{Z}$, les R-modules projectifs (de type fini) sont les modules libres $\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.1.22. On dit qu'un R-module I est *injectif* si pour toute injection $i : A \to B$ et pour toute application $f : A \to I$, il existe une extension $g : B \to I$ telle que $g \circ i = f$.

Exemple 1.1.23. Pour $R = \mathbb{Z}$, les R-modules injectifs sont les groupes abéliens divisibles.

Proposition 1.1.24. ($\circlearrowleft$) *Soit $f : C \to D$ un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes concentrés en degrés positifs.*

- *Si D est projectif en tout degré, alors f est un une équivalence d'homotopie.*

– *Si C est injectif en tout degré, alors f est une équivalence d'homotopie.*

On aura donc trois cadres possibles pour la théorie de l'homotopie dans les complexes de chaînes :

– Le cadre « fort », où l'on travaille à équivalence d'homotopie près et tous les objets sont « gentils ».

– Le cadre « projectif », où l'on travaille à quasi-isomorphisme près, les modules « gentils à la source » sont les complexes projectifs et tous les modules sont « gentils au but ». Tous les R-modules M ont une résolution projective $P_* \to M$. Ces résolutions projectives jouent le rôle d'un CW-complexe dans ce cadre.

– Le cadre « injectif », où l'on travaille à quasi-isomorphisme près, tous les modules sont « gentils à la source » et les modules « gentils au but » sont les modules injectifs. Tout module M a une résolution injective $M \to I_*$. Ces résolutions injectives jouent un rôle dual aux CW-complexes dans ce cadre.

On va également voir comment résoudre les problèmes apparaissent quand certains foncteurs ne préservent pas les quasi-isomorphismes. C'est le cas du foncteur $\otimes$, qui est seulement exact à droite. La version correcte d'un point de vue homotopique est son foncteur dérivé à gauche, le foncteur Tor (qui fait intervenir une résolution projective, c.-à-d. que l'on se place dans le premier cadre). On peut commencer par montrer par récurrence que tout module a une résolution projective. Puis on montre une certaine propriété de relèvement, ce qui permet de conclure que deux résolutions projectives sont homotopes. On définit alors $\mathrm{Tor}(M, N)$ comme $H_i(P_* \otimes N)$ où P_* est une résolution projective de M. Comme deux résolutions projectives sont homotopes et que Tor préserve les homotopies (mais pas les quasi-isomorphismes), on en déduit que c'est bien défini.

C'est également le cas du foncteur Hom, qui n'est exact qu'à gauche. Sa version correcte d'un point de vue homotopique est son foncteur dérivé à droite, Ext (qui fait soit intervenir une résolution projective de la source, auquel cas on se place dans le premier cadre, soit une résolution injective du but, auquel cas on se place dans le deuxième cadre). Dans chacun des deux cas, pour obtenir un foncteur « correct », on résout d'abord l'objet auquel on l'applique, puis on applique le foncteur initial. Les catégories de modules étant abéliennes, les résolutions passent par des complexes de chaînes. Dans le cadre de catégories non-abéliennes (par exemple, les algèbres), cela ne fonctionne plus nécessairement en tant que tel ; un des buts de « l'algèbre homotopique » de Quillen est de fournir un cadre dans lequel on peut donner du sens à ces résolutions.

1.2. (Co)fibrations

On a vu précédemment que dans les complexes de chaînes, ce qui importait d'un point de vue homotopique était de savoir si les applications étaient injectives/surjectives et de savoir si on pouvait « relever » une application le long d'une injection/surjection.

Nous allons rapidement rappeler l'analogue des injections et surjections dans la catégorie des espaces topologiques, leurs propriétés abstraites, et s'en servir comme base pour définir la notion de catégorie de modèles.

1.2.1. Suites exactes longues

Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ est une suite exacte courte de complexes de chaînes, i.e. i est injective, p est surjective, et $\ker p = \operatorname{im} i$. Alors on a une suite exacte longue induite :

$$\dots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(B) \xrightarrow{p_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \to \dots \to H_0(C) \to 0.$$

Les applications i_* et p_* sont simplement les applications induites. L'application ∂ peut se construire de deux manières :

– On définit $C(i)$, le cône de i, comme le complexe donné en degré n par $B_n \oplus A_{n-1}$, avec comme différentielle $d(b,a) = (d_B b + i(a), d_A a)$. On vérifie (exercice) que ce cône est quasi-isomorphe à C, ce qui découle du fait que i est injective. On a de plus une projection $C(i) \to A[-1]$ qui induit ∂ en homologie.

– On définit $K(p)$, le noyau homotopique de p, comme le complexe donné en degré n par $B_n \oplus C_{n+1}$, avec comme différentielle $d(b,c) = (d_B b, p(b) + d_C c)$. On vérifie (exercice) que $K(p)$ est quasi-isomorphe à A, ce qui découle du fait que p est surjective. On a de plus une application injective $C[1] \to K(p)$, $c \mapsto (0,c)$ qui induit ∂ en homologie.

Ce sont ces notions que nous allons généraliser aux espaces topologiques.

1.2.2. Fibrations

Définition 1.2.1. Une *fibration* (*de Hurewicz*) est une application continue $p : E \to B$ telle que pour tout espace X et toutes les applications $\tilde{H}_0$ et H dans le diagramme suivant, on peut trouver un relèvement $\tilde{H}$:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook, "\sim"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Concrètement, cela signifie que si l'on a une homotopie $H : X \times I \to B$ entre $f, g : X \to B$ et une application $\tilde{f} : X \to E$ qui relève f (c.à.d. que $p \circ \tilde{f} = f$) alors on peut trouver une homotopie $\tilde{H}$ qui relève H (et donc $\tilde{g} = \tilde{H}(-,1)$ qui relève g).

Définition 1.2.2. Une *fibration de Serre* est une application $p : E \to B$ qui vérifie la propriété de relèvement précédente pour $X = [0,1]^n$ (pour tout $n \geq 0$).

Une fibration (de Hurewicz) est une fibration de Serre. La réciproque est fausse : p.ex. le « revêtement universel » – construit de la manière habituelle – de la boucle d'oreille hawaïenne n'est pas une fibration de Hurewicz.

Exemple 1.2.3. Un revêtement est une fibration de Serre. Une projection $p : F \times B \to B$ est une fibration. Plus généralement, un espace fibré est une fibration de Serre ; si la base est paracompacte (c.-à-d. séparé + tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini), alors c'est une fibration de Hurewicz.

Proposition 1.2.4. (☡) *Le tiré en arrière d'une fibration (de Serre ou de Hurewicz) est une fibration (de Serre ou de Hurewicz).*

Exemple 1.2.5. Soit $f : X \to Y$ une application continue. On définit son *espace des chemins* :

$$P_f = Y^{[0,1]} \times_Y X = \{(\gamma, x) \in Y^{[0,1]} \times X \mid \gamma(0) = f(x)\}$$

Alors $\mathrm{ev}_1 : P_f \to Y$, $\mathrm{ev}_1(\gamma, x) = \gamma(1)$ est une fibration de Hurewicz : si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[r, "(\gamma,\varphi)"] \arrow[d, hook] & P_f \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\ A \times [0,1] \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

alors on peut définir un relèvement $\lambda : A \times [0,1] \to P_f$ par

$$\lambda(a,t) = (\gamma(a) \cdot \psi(a,-)_{|[0,t]}, \varphi(a)).$$

On note que f se factorise comme $X \xrightarrow{\sim} P_f \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} Y$: cela permet de « remplacer » n'importe quelle application par une équivalence suivie d'une fibration.

Proposition 1.2.6. (☡) *Soit $p : E \to B$ une fibration. Si B est connexe par arcs, alors tous les espaces $E_b = p^{-1}(b)$ sont homotopiquement équivalents.*

On note en général F la fibre de p. La proposition suivante dit grosso modo que les fibrations sont les « suites exactes courtes » dans les espaces topologiques :

Proposition 1.2.7. (☡) *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre et supposons que B est connexe par arcs. Soit $b_0 \in B$ un point, $F = p^{-1}(b_0)$ la fibre au-dessus de b_0, et $f_0 \in F$ un point. Alors on a une suite exacte longue :*

$$\dots \to \pi_n(F, f_0) \to \pi_n(E, f_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, f_0) \to \dots$$

Remarque 1.2.8. Cela généralise la suite exacte longue en homologie associée à une suite exacte courte de complexes de chaînes. En effet, pour une application linéaire surjective $p : X \to Y$, les « fibres » $p^{-1}(Y)$ sont toutes isomorphes au noyau.

1.2.3. Cofibrations

Les fibrations sont intéressantes quand on regarde ce qui se passe « à droite » dans le foncteur $\mathrm{Hom}(-,-)$. Regardons maintenant le cas dual, les cofibrations, qui sont intéressantes « à gauche ».

Définition 1.2.9. Une *cofibration* (*de Hurewicz*) est une application continue $i : A \to X$ telle que pour tout espace Y et toutes les applications f, h dans le diagramme suivant, le relèvement H existe :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^{[0,1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

Concrètement, cela signifie que si l'on a une application $f : X \to Y$ est une homotopie entre la « restriction » $f \circ i = f_{|A}$ et une autre application $A \to Y$, alors on peut étendre cette homotopie à X.

Proposition 1.2.10 ([**Hatcher2002**])**.** (↺) *Soit $i : A \to X$ une cofibration. Alors c'est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. Considérons la rétraction $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ de la question précédente.

Soit C le cylindre de i (Exemple 1.2.14), donné par le quotient $(A \times [0,1] \cup X)/\sim$ où $(a,0) \sim i(x)$. On définit un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & C^{[0,1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

où $h(a,t) = [a,t]$ et $f(x) = [x]$. Comme i est une cofibration, il existe $H : X \to C^{[0,1]}$ telle que $H(i(a))(t) = h(a)(t) = [a,t]$ et $H(x)(0) = f(x) = [x]$. On a $a \neq a' \implies [a,1] \neq [a',1] \implies i(a) \neq i(a')$, donc i est injective. De plus, $g = h(-)(1)$ est un homéomorphisme sur son image $A \times \{1\}$, donc par commutativité du diagramme $g^{-1} \circ H(-)(1)$ est un inverse continu de i. □

Proposition 1.2.11. (↺) *Une inclusion $i : A \hookrightarrow X$ est une cofibration si et seulement si $X \times [0,1]$ se rétracte sur $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$.*

Démonstration. L'implication est évidente : si i est une cofibration, alors on peut trouver un relèvement (où $h(a)(t) = i(a)$) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & X^{[0,1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & X \end{tikzcd}$$

Alors $r(x,t) = H(x)(t)$ définit une rétraction de l'inclusion $X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$. En effet, $r(x,0) = H(x)(0) = \mathrm{ev}_0(H(x)) = \mathrm{id}_X(x) = x$ et $r(i(a),t) = H(i(a))(t) = h(a)(t) = i(a)$.

Réciproquement, soit $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ une rétraction de l'inclusion Considérons un diagramme commutatif comme dans la Définition 1.2.9. On peut trouver un relèvement $X \times [0,1] \to Y$ en considérant la composée

$$X \times [0,1] \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times [0,1] \xrightarrow{(f,h)} Y. \qquad \square$$

Proposition 1.2.12 ([**Dieck2008**]). $(\circlearrowleft)$ *Soit $i : A \subset X$ une cofibration. Si X est séparé alors A est fermé.*

Démonstration. Considérons la rétraction $r : X \times [0,1] \to X \times \{0\} \cup A \times [0,1]$ de la proposition précédente. Alors

$$A = \{x \in X \mid r(x,1) = (x,1)\} = \varphi^{-1}(\Delta)$$

où $\Delta \subset (X \times [0,1])^2$ est la diagonale et $\varphi(x) = (r(x,1),(x,1))$. Or $X \times [0,1]$ est séparé donc sa diagonale est fermée, ce qui permet de conclure. $\square$

Exemple 1.2.13. L'inclusion d'un sous-complexe cellulaire est une cofibration. On construit par récurrence sur la squelette une rétraction comme dans le lemme précédent. (En fait toutes les cofibrations sont des rétracts de telles inclusions.)

Exemple 1.2.14. $(\circlearrowleft)$ Soit $f : A \to X$ une application. On définit son *cylindre* :

$$\mathrm{Cyl}_f = (A \times [0,1] \sqcup X)/\sim.$$

La relation $\sim$ est engendrée par $(a,0) \sim f(a)$. On note $[x]$, respectivement $[a,t]$ les classes dans Cyl_f.

L'inclusion $A = A \times \{1\} \subset \mathrm{Cyl}_f$ est alors une cofibration. En effet, on peut construire une rétraction $r : \mathrm{Cyl}_f \times [0,1] \to \mathrm{Cyl}_f \times \{0\} \cup A \times \{1\} \times [0,1]$ de la manière suivante. Choisissons une rétraction $\rho : [0,1]^2 \to U$ où

$$U = \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1] = \sqcup \subset [0,1]^2.$$

On définit alors :

$$\begin{aligned} r : \mathrm{Cyl}_f \times [0,1] &\to (\mathrm{Cyl}_f \times \{0\}) \cup (A \times \{1\} \times [0,1]), \\ ([x],t) &\mapsto ([x],0), \\ ([a,s],t) &\mapsto \begin{cases} ([f(a)],0), & \text{si } \rho(s,t) = (0,\tau), \\ ([a,\sigma],0), & \text{si } \rho(s,t) = (\sigma,0), \\ ([a,1],\tau), & \text{si } \rho(s,t) = (1,\tau). \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, $f : A \hookrightarrow \mathrm{Cyl}_f \overset{p}{\underset{\sim}{\to}} X$ se factorise comme une cofibration suivie d'une équivalence faible ($p([x]) = x$, $p([a,t]) = f(a)$) qui passe par Cyl_f. Cela permet de « remplacer » toute application par une cofibration à équivalence près.

Remarque 1.2.15. Soit $\gamma : A \sqcup A \to A$ l'application évidente. Soit $f, g : A \to X$ deux applications. Une homotopie entre f et g est exactement la donnée d'une application $H : \mathrm{Cyl}_\gamma \to Y$ telle que la composée $A \sqcup A \to \mathrm{Cyl}_\gamma \to X$ est donnée par (f, g).

Remarque 1.2.16. Ce dernier énoncé se dualise mais c'est légèrement plus compliqué. Soit $f, g : A \to X$ deux fonctions. Soit $\delta : X \to X \times X$ la diagonale et considérons l'espace des chemins P_δ. Alors une fonction $H : X \to P_\delta$ vérifiant $\mathrm{ev}_0 \circ H = f$ et $\mathrm{ev}_1 \circ H = g$ est équivalente à la donnée d'une troisième fonction $u : A \to X$ et de deux homotopies $f \simeq u$ et $u \simeq g$.

Définition 1.2.17. Soit (X, A) une paire d'espaces et $a_0 \in A$ un point base et $n \geq 1$. Le $n$ième groupe d'homotopie relatif est l'ensemble des applications $\gamma : [0,1]^n \to X$ telles que $\gamma(\partial[0,1]^n) \subset A$ et $\gamma(\partial[0,1]^n \quad ([0,1]^{n-1} \times \{0\})) = \{a_0\}$, modulo la relation d'homotopie rel A. C'est un groupe pour $n \geq 2$, il est abélien pour $n \geq 3$.

Remarque 1.2.18. On définit parfois $\pi_0(X, A)$ comme étant l'ensemble des composantes connexes par arcs qui ne rencontrent pas A. On peut également considérer que $\pi_0(X, A)$ n'est simplement pas défini.

Proposition 1.2.19. (↺) *Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques, alors on a une suite exacte longue :*

$$\dots \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) \to \dots$$

Proposition 1.2.20. (↺) *Si $i : A \to X$ est une cofibration, que A est r-connexe et X est s-connexe, alors $\pi_n(X, A) \cong \pi_n(X/A)$ pour $n \leq r + s$ et $\pi_{r+s+1}(X, A) \to \pi_{r+s+1}(X/A)$ est surjective.*

Remarque 1.2.21. En général, $\pi_n(X, A) \neq \pi_n(X/A)$. Par exemple, $\pi_n(D^2, S^1) = 0$ si $n \neq 2$ et $\pi_2(D^2, S^1) = \mathbb{Z}$, alors que $\pi_3(D^2/S^1) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.3. Axiomatisation

Définition 1.3.1 (Quillen [**Quillen1967**])**.** Une *catégorie de modèles*[1] est une catégorie C munie de trois classes de morphismes :

Classe	Nom des éléments	Notation
$\mathcal{W}$	Équivalences faibles	$\xrightarrow{\sim}$
$\mathcal{C}$	Cofibrations	$\hookrightarrow$
$\mathcal{F}$	Fibrations	$\twoheadrightarrow$

[1] Quillen les appelait les catégories de modèles *fermées*.

et qui vérifient les axiomes suivants :

(MC1) C est complète et cocomplète ;

(MC2) « 2 parmi 3 » : Soit f et g deux morphismes composables, si deux morphismes parmi f, g et $g \circ f$ sont dans $\mathcal{W}$, alors le troisième aussi ;

(MC3) Si f est un rétract de g et que $g \in \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$) alors $f \in \mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$) ;

(MC4) Considérons le diagramme commutatif formé par les flèches pleines :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

(i) Si $i \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ alors un relèvement (flèche en pointillés) existe ;

(ii) Si $i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ et $p \in \mathcal{F}$ alors un relèvement existe existe ;

(MC5) Tout morphisme $f : X \to Y$ admet deux factorisations, fonctorielles en f :

$$X \xhookrightarrow{\sim} P_f \twoheadrightarrow Y \qquad X \hookrightarrow C_f \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$$

Remarque 1.3.2. Dans l'axiome (MC4), le relèvement n'est en général pas unique.

Définition 1.3.3. Les éléments de $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ sont appelés les cofibrations acycliques, ceux de $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ les fibrations acycliques.[2]

Définition 1.3.4. Dans le diagramme de (MC4), si la flèche en pointillés existe toujours, on dit que i a la *propriété de relèvement à gauche* (LLP) par rapport à p et que p a la *propriété de relèvement à droite* (RLP) par rapport à i. On note parfois $i \perp p$.

Remarque 1.3.5. Grâce à (MC1), la catégorie C admet un objet initial $\emptyset$ (la colimite vide) et un objet final $*$ (la limite vide).

Définition 1.3.6. Un objet $X \in \mathsf{C}$ est dit *cofibrant* si l'unique morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration, et *fibrant* si l'unique morphisme $X \to *$ est une fibration.

Remarque 1.3.7. Tout objet admet des remplacements fibrants et cofibrants fonctoriels par (MC5) :

$$\emptyset \hookrightarrow Q(X) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X \qquad Y \xhookrightarrow{\sim} R(Y) \twoheadrightarrow *$$

Exemple 1.3.8. Soit C une catégorie quelconque. Alors pour $\mathcal{W} = \{\text{isomorphismes}\}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{F} = \mathsf{C}$ on obtient une catégorie de modèles. On peut également choisir $(\mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F}) = (\text{isos}, \mathsf{C}, \text{isos})$ ou le dual.

[2]On trouve parfois « cofibrations triviales » et « fibrations triviales » mais il vaut mieux éviter car ça fait penser aux fibrés triviaux, c.à.d. les produits.

Exemple 1.3.9. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ une catégorie de modèles.

– Le produit de C avec une autre catégorie de modèles admet une structure de catégorie de modèles évidente.

– $(\mathsf{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{W}^{\mathrm{op}}, \mathcal{F}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ est une catégorie de modèles.

Proposition 1.3.10. *Soit* $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *une catégorie de modèles.*

– *i est une cofibration $\iff$ i satisfait la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques.*

– *i est une cofibration acyclique $\iff$ i satisfait la LLP par rapport à toutes les fibrations.*

– *p est une fibration $\iff$ p satisfait la RLP par rapport à toutes les cofibrations acycliques.*

– *p est une fibration acyclique $\iff$ p satisfait la RLP par rapport à toutes les cofibrations.*

– *f est une équivalence faible $\iff$ f se factorise en $p \circ i$ où p est une fibration acyclique et i est une fibration acyclique.*

Corollaire 1.3.11. *Soit* $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *une catégorie de modèles.*

– *La donnée de deux des classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ détermine la troisième.*

– *Les classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ sont stables par composition.*

– *Les classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ sont stables par poussés en avant, les classes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ sont stables par tirés en arrière.*

– *Les isomorphismes appartiennent aux trois classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$.*

Démonstration de la Proposition 1.3.10. Les quatre premiers points se démontrent de façon presque identique. Démontrons le premier. La partie $\implies$ découle de (MC4). Maintenant soit $i : A \to B$ une application qui a la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques. Par (MC5), on peut factoriser i en $A \hookrightarrow X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B$. Grâce à la LLP de i, on peut trouver h qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Alors on voit que i est un rétract de $A \hookrightarrow X$ et on conclut par (MC3) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & X \arrow[r, two heads, "\sim"] & B \end{tikzcd}$$

Pour le cinquième point, on utilise (MC2) dans les deux cas. □

Démonstration du Corollaire 1.3.11. – Clair grâce à la proposition.

- Le fait que $\mathcal{W}$ est stable par composition découle de (MC2). Montrons par exemple que $\mathcal{C}$ est stable par composition. Soit $A \overset{i}{\hookrightarrow} B \overset{j}{\hookrightarrow} C$ deux cofibrations. Montrons que $j \circ i$ a la LLP par rapport aux fibrations acycliques. On trouve des relèvements dans le diagramme suivant en deux étapes (d'abord l puis l') :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[dd, two heads, "\sim"] \\ B \arrow[ur, dashed, "l"] \arrow[d, hook, "j"] & \\ C \arrow[r] \arrow[uur, dashed, "l'"'] & Y \end{tikzcd}$$

- Pour la stabilité par poussés en avant et tirés en arrière, la preuve est similaire.

- Il est clair qu'un isomorphisme a la LLP et la RLP par rapport à n'importe quelle application. □

On ne démontrera pas les exemples suivants tout de suite.

Exemple 1.3.12 (**Quillen1967**). Top a une structure de catégorie de modèles où les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie, les fibrations sont les fibrations de Serre, et les cofibrations sont les rétracts d'inclusions cellulaires généralisées.[3] Tous les objets sont fibrants, les objets cofibrants sont les rétracts de CW-complexes généralisés.

Exemple 1.3.13 (**Strom1972**). Top a une autre structure de catégorie de modèles où les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie, les cofibrations sont les rétracts de cofibrations de Hurewicz d'image fermée, et les fibrations sont les fibrations de Hurewicz. Tout objet est fibrant et cofibrant

Exemple 1.3.14 (**Cole2006**). Il existe aussi une structure de catégorie de modèles « mixte » sur Top dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles d'homotopie (structure de Quillen) et dont les fibrations sont les fibrations de Hurewicz (structure de Strøm). Les cofibrations sont les cofibrations de la structure de Strøm qui se factorisent sous la forme $f \circ i$ où i est une cofibration de la structure de Quillen et f est une équivalence d'homotopie (forte).

Exemple 1.3.15. La catégories $\mathrm{Ch}(R)$ a plusieurs structures de catégories de modèles :

- la structure *projective* $\mathcal{W} = \{\text{quasi-iso}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{injections de conoyau projectif}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{surjections}\}$;

[3] C'est-à-dire les applications $i : A \to B$ où $B = \operatorname{colim} B_n$, $B_0 = A$, et B_{n+1} est obtenue à partir de B_n en recollant des cellules.

– la structure *injective* $\mathcal{W} = \{\text{quasi-iso}\}$, $\mathcal{C} = \{\text{injections}\}$, $\mathcal{F} = \{\text{surjections de noyau injectif}\}$;

– une troisième structure « à la Strøm » : $\mathcal{W} = \{\text{éqv. d'homotopies}\}$, $\mathcal{C} = \mathrm{LLP}(B^I \xrightarrow{ev_0} B)$, $\mathcal{F} = \mathrm{RLP}(A \xrightarrow{i_0} A \otimes I)$ où $I = N_*(\Delta^1)$.

La structure projective généralise à $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$, en remplaçant les surjections par les surjections en degré ≥ 1.

1.4. Catégorie homotopique

1.4.1. Localisation

Cas général

Soit C une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de morphismes.

Définition 1.4.1 ([**GabrielZisman1967**])**.** Une *localisation* (*de Gabriel–Zisman*) de C par rapport à $\mathcal{W}$ est une catégorie $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ munie d'un foncteur $\lambda : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, si F envoie les morphismes de $\mathcal{W}$ sur des isomorphismes, alors il existe un unique (à isomorphisme naturel près) foncteur $G : \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{D}$ tel que $G \circ \lambda \cong F$.

Remarque 1.4.2. En particulier, les morphismes de $\mathcal{W}$ sont envoyés sur des isomorphismes dans $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. La réciproque est en général fausse, mais on verra que c'est vrai pour les catégories de modèles.

Proposition 1.4.3. (☉) *La localisation* $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ *existe et est unique à équivalence près. On la note aussi* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ *si* $\mathcal{W}^{-1}$ *est implicite.*

Remarque 1.4.4. Cette proposition n'est qu'approximativement vraie. En effet, dans la preuve qui suit, les morphismes entre deux objets ne forment pas nécessairement un ensemble ! On verra plus tard que dans une catégorie de modèles, les morphismes dans la catégorie homotopique forment toujours un ensemble.

Démonstration de la Proposition 1.4.3. Décrivons explicitement la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$. Ses objets sont les mêmes que ceux de C. Les morphismes de $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ sont donnés par le quotient

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(X, Y) = \mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(X, Y)/\sim,$$

où :

– $\mathrm{Path}_{\mathcal{W}}(X, Y)$ est la classe des « chemins » entre X et Y et formés par des morphismes de C et des morphismes de $\mathcal{W}$ dans le sens inverse ;

– la relation $\sim$ est engendrée par $X \xrightarrow{f} Y \underset{\sim}{\xleftarrow{f}} X \sim X$ et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \sim X \xrightarrow{g \circ f} Y$.

La composition est donnée par la concaténation des chemins. On vérifie que cela forme une catégorie et que $\mathsf{C} \to \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ (qui envoie les morphismes sur les chemins de longueur 1) est un foncteur qui vérifie la propriété universelle. □

Le problème avec cette construction (outre le problème de théorie des ensembles) est qu'il est très difficile de faire des calculs. Par exemple, déterminer si deux morphismes sont égaux dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ est un problème non-trivial.

Remarque 1.4.5 (Exercice). Il existe une autre construction, un peu moins ad-hoc (mais il est tout aussi difficile de faire des calculs avec celle-ci). Soit C une catégorie et $\mathcal{W}$ une classe de morphismes. Notons Arr la catégorie avec deux objets x, y et un unique morphisme non-trivial $x \to y$. Notons également Iso la catégorie avec deux objets x, y et deux morphismes non-triviaux $x \to y$ et $y \to x$ inverses l'un de l'autre. Il y a une inclusion évidente $\mathsf{Arr} \subset \mathsf{Iso}$. La donnée d'un foncteur $\mathsf{Arr} \to \mathsf{C}$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de C, tandis qu'un foncteur $\mathsf{Iso} \to \mathsf{C}$ est équivalent à la donnée d'un isomorphisme de C. On vérifie alors que la localisation $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est équivalente au poussé en avant :

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{f \in \mathcal{W}} \mathsf{Arr} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathsf{C} \arrow[d, dashed] \\
\bigsqcup_{f \in \mathcal{W}} \mathsf{Iso} \arrow[r, dashed] & \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]
\end{tikzcd}$$

Exemple 1.4.6 (Exercice). Soit C une catégorie ayant un unique objet $*$ et soit $M = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(*, *)$ son monoïde d'endomorphismes. Posons $\mathcal{W} = M$. Alors $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est la catégorie à un objet dont le monoïde d'endomorphismes est M^+, la complétion en groupes de M.

Exemple 1.4.7 (Exercice). Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur ayant un adjoint à droite $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$. Soit $\mathcal{W} = \{f : X \to Y \mid F(f) \text{ est un isomorphisme}\} \subset \mathsf{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- le foncteur G est pleinement fidèle ;
- la counité $F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ est un isomorphisme ;
- le foncteur naturel $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{D}$ est une équivalence de catégories.

Exemple 1.4.8 (Exercice). Soit $\mathsf{C} = \mathsf{Ab} = \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des groupes abéliens, que l'on voit comme des $\mathbb{Z}$-modules. Soit p un nombre premier. On définit la classe $\mathcal{W}$ comme les morphismes $f : X \to Y$ telles que $\ker f$ et $\operatorname{coker} f$ sont de p-torsion. Alors la localisation $\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}}[\mathcal{W}^{-1}] \simeq \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-modules.

Remarque 1.4.9 (Exercice : fractions à droite). Supposons que la classe $\mathcal{W}$ satisfait les propriétés suivantes :

- $\mathcal{W}$ est stable par composition ;

– pour tout diagramme $A \xleftarrow{w} C \xrightarrow{f} B$ où $w \in \mathcal{W}$, on peut remplir le carré suivant, où $w' \in \mathcal{W}$:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "w"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[dr, "f'"'] & & B \arrow[dl, "w'", "\sim"'] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

– pour tous $f, g : A \to X$, s'il existe $w \in \mathcal{W}$ tel que $f \circ w = g \circ w$, alors il existe $w' \in \mathcal{W}$ tel que $w' \circ f = w' \circ g$.

Alors la localisation $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ peut se décrire de la manière suivante. Ses objets sont les mêmes que ceux de C. Les morphismes $A \to X$ sont les zigzags de longueur 2 du type $A \to X' \leftarrow X$, où la flèche qui va dans le mauvais sens est dans $\mathcal{W}$, modulo la relation d'équivalence suivante. Deux zigzags $A \to X' \leftarrow X$ et $A \to X'' \leftarrow X$ sont équivalents si on peut remplir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[d] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \bar{X} & X \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & CX'' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

où la flèche $X \to \bar{X}$ est dans $\mathcal{W}$. La composition est définie en utilisant la deuxième propriété ci-dessus.

Dans une catégorie de modèles

Définition 1.4.10. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ une catégorie de modèles. On définit sa *catégorie homotopique* par $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}) = \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Remarque 1.4.11. La catégorie homotopique ne dépend évidemment que de la classe $\mathcal{W}$, pas de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$. C'est ici qu'on voit apparaître l'idée que les fibrations et les cofibrations ne sont que des données auxiliaires qui servent à étudier l'objet qui nous intéresse vraiment, à savoir la catégorie homotopique de C.

Définition 1.4.12. On définit les sous-catégories pleines $\mathsf{C}_c, \mathsf{C}_f, \mathsf{C}_{cf} \subset \mathsf{C}$ engendrées respectivement par les objets cofibrants, par les objets fibrants, et par les objets cofibrants et fibrants. On définit également leurs catégories homotopiques comme leurs localisation par rapport à $\mathcal{W}$.

Lemme 1.4.13. *Les inclusions induisent des équivalences de catégories :*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_c) \arrow[dr, "\sim"] & \\ \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_{cf}) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \\ & \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_f) \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Faisons le cas $\mathsf{C}_f \subset \mathsf{C}$, les autres sont similaires. L'inclusion $\mathsf{C}_f \subset \mathsf{C}$ envoie par définition les équivalences faibles sur les équivalences faibles. Elle induit donc un foncteur $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}_f) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C})$. Le foncteur « remplacement fibrant » $R : \mathsf{C} \to \mathsf{C}_f$ induit de même un foncteur $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_f)$. On vérifie alors en utilisant les axiomes de catégories de modèles que ces foncteurs sont inverses (à équivalence naturelle près) l'un de l'autre. □

1.4.2. Homotopies

On va maintenant montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X)$ forme un ensemble que l'on peut décrire comme un quotient d'un ensemble de morphismes dans C par une relation d'homotopie. Il faut noter qu'il y a deux notions duales d'homotopie, une à gauche (pour la source) et une à droite (pour le but).

À gauche

Définition 1.4.14. Un *cylindre* de $A \in \mathsf{C}$ est une factorisation

$$A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$$

de l'application canonique $A \sqcup A \to A$. On note $i_0, i_1 : A \to C$ les deux composantes de la cofibration.

Définition 1.4.15. Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes. Une *homotopie à gauche* entre f et g est la donnée d'un cylindre $A \sqcup A \xhookrightarrow{(i_0,i_1)} C \xrightarrow{\sim} A$ et d'une application $H : C \to X$ telle que $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$, ce que l'on peut résumer par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "{(f,g)}"] \arrow[dr, "{(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_A)}"'] & C \arrow[r, "H"'] \arrow[d, "\sim"] & X \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Si un tel H existe, on note $f \simeq_l g$.

Exemple 1.4.16. ($\circlearrowright$) Dans Top avec la structure de Quillen, on peut par exemple choisir $C = A \times [0, 1]$ si A est cofibrant. Une homotopie à gauche est exactement ce que l'on appelle habituellement une homotopie.

Exemple 1.4.17. ($\circlearrowright$) Dans $\mathsf{Ch}(R)$ avec la structure injective, soit A_* un complexe de chaînes. On peut choisir pour cylindre $C_n = A_n \oplus A_n \oplus A_{n-1}$ avec $d(x, y, z) = (dx + (-1)^n z, dy - (-1)^n z, dz)$. Une homotopie $f \simeq g : A \to X$ est équivalente à la donnée de $h : A_{n-1} \to X_n$ telle que $dh \pm hd = f - g$ (exactement la définition habituelle).

Remarque 1.4.18. En général il n'est pas possible de choisir un cylindre une fois pour toute ; deux applications peuvent être homotopes à gauche en choisissant un certain cylindre mais sans qu'il soit possible d'en choisir un autre que l'on s'est fixé à l'avance.

Proposition 1.4.19. *Si $f \simeq_l g : A \to X$ alors $h \circ f \simeq_l h \circ g : X \to Z$ pour tout morphisme $h : X \to Y$.*

Démonstration. Soit $H : C \to X$ une homotopie entre f et g. Alors $h \circ H$ est une homotopie entre $h \circ f$ et $g \circ f$. □

Lemme 1.4.20. *Si $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ est un cylindre et que A est cofibrant, alors $i_0, i_1 : A \to C$ sont des cofibrations acycliques.*

Démonstration. On remarque déjà que $A \to A \sqcup A$ est une cofibration, car c'est le poussé en avant de :

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \sqcup A \end{tikzcd}$$

Comme i_0 est la composée de deux cofibrations, c'est une cofibration. L'axiome (MC2) entraîne qu'elle est acyclique :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend left, equal] \arrow[rr, bend right, "i_0"'] & A \sqcup A \arrow[r, hook] & C \arrow[r, "\sim"] & A \end{tikzcd}$$

□

Proposition 1.4.21. *Si A est cofibrant, alors $\simeq_l$ définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)$.

Démonstration. Vérifions les propriétés une par une.

– Réflexivité : Soit $f : A \to X$ et soit $A \sqcup A \to C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre quelconque, obtenu p.ex par (MC5). Alors $H : C \xrightarrow{\sim} A \xrightarrow{f} X$ est une homotopie entre f et f.

– Symétrie : Si $f \simeq_l g$ via une homotopie $H : C \to X$, alors on définit un nouveau cylindre $A \sqcup A \cong A \sqcup A \hookrightarrow C \to A$ où le premier morphisme échange les deux facteurs. Le morphisme H' obtenu en composant H avec cet échange définit alors une homotopie entre g et f : $H' \circ i_0 = H \circ i_1 = g$ et $H' \circ i_1 = H \circ i_0 = f$.

– Transitivité : C'est là que l'on a besoin de l'hypothèse « A est cofibrant ». Supposons $f \simeq_l g$ et $g \simeq_l h$ via des homotopies $H : C \to X$ et $H' : C' \to X$. On construit un nouveau cylindre C'' comme un poussé en avant (faire un dessin : on recolle deux cylindres) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i'_0", "\sim"'] \arrow[d, hook, "i_1", "\sim"'] & C' \arrow[d] \\ C \arrow[r] & C'' \end{tikzcd}$$

Les morphismes $C \to C''$ et $C' \to C''$ sont des cofibrations acycliques (car poussés en avant de cofibrations acycliques). La propriété universelle induit un morphisme $C'' \to A$, qui est une équivalence faible par (MC2) ($C \xrightarrow{\sim} C'' \to X$ est une équivalence faible). On vérifie que ça donne un cylindre avec (i_0, i_1'). De plus, toujours par propriété universelle, H et H' induisent $H'' : C'' \to X$ qui se restreint à f et h, c.à.d. c'est une homotopie $f \simeq_l h$. □

Proposition 1.4.22. *Soit A un objet cofibrant et $h : X \xrightarrow{\sim} Y$ une équivalence faible. Si h est une fibration (acyclique) ou si X et Y sont fibrants, alors h_* est une bijection :*

$$h_* : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)/\simeq_l \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, Y)/\simeq_l .$$

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, $h_*(f) = h \circ f$ passe au quotient.

- Supposons que $h : X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ est une fibration acyclique. La surjectivité de h_* découle immédiatement de (MC4). Pour l'injectivité, supposons que $f, g : A \to X$ sont deux morphismes tels que $h \circ f \simeq_l h \circ g$. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre et $H : C \to Y$ une homotopie entre $h \circ f$ et $h \circ g$. On peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, two heads, "h", "\sim"'] \\ C \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "K"] & Y \end{tikzcd}$$

  et K est une homotopie entre f et g.

- Supposons maintenant que X et Y sont fibrants. On va déduire la bijectivité du cas précédent à l'aide du Lemme de Brown (voir Lemme 1.6.6 pour l'énoncé général). On vient de démontrer que $F = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, -)/\simeq_l$ envoie les fibrations acycliques sur des bijections. Montrons qu'alors il envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des bijections aussi. On peut factoriser le morphisme $(\mathrm{id}_X, h) : X \to X \times Y$ en $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} W \twoheadrightarrow X \times Y$. Comme X et Y sont fibrants, les morphismes $X \leftarrow X \times Y \to Y$ sont des fibrations (car tirés en arrière de fibrations). On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, hook, "i"', "\sim"] \arrow[ddl, bend right, "h"', "\sim"] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_X", "\sim"'] & \\ & W \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \\ Y & X \times Y \arrow[l, two heads, "p_Y"] \arrow[r, two heads, "p_X"] & X \end{tikzcd}$$

  - $p_Y \circ \pi$ est une fibration acyclique par (MC2) donc $F(p_Y \circ \pi) : F(W) \to F(Y)$ est une bijection ;
  - de même $F(p_X \circ \pi) : F(W) \to F(X)$ est une bijection ;

– $p_X \circ \pi \circ i$ est l'identité donc $F(p_X \circ \pi \circ i)$ est l'identité, donc en particulier une bijection ; comme $F(p_X \circ \pi)$ est une bijection, on en déduit que $F(i)$ est une bijection ;
– finalement, $F(h) = F(p_X \circ \pi) \circ F(i)$ est une bijection car composée de deux bijections. □

Proposition 1.4.23. *Si X est fibrant, $f \simeq_l g : A \to X$ et $h : B \to A$ est un morphisme, alors $f \circ h \simeq_l g \circ h$.*

Démonstration. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow{\sim} A$ un cylindre et $H : C \to X$ une homotopie entre f et g. Factorisons $C \xrightarrow{\sim} A$ comme $C \overset{\sim}{\hookrightarrow} C' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$ par (MC5) (et par (MC2) les deux morphismes sont des équivalences faibles). Comme X est fibrant, on peut trouver H' tel que :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "\sim"] & X \arrow[d, two heads] \\ C' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "H'"'] & * \end{tikzcd}$$

Alors $H' : C' \to X$ est toujours une homotopie entre f et g. L'avantage étant que l'on a un cylindre du type $A \sqcup A \hookrightarrow C' \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$.

Maintenant, soit $B \sqcup B \hookrightarrow D \xrightarrow{\sim} B$ un cylindre pour B. On peut trouver un relèvement G :

$$\begin{tikzcd} B \sqcup B \arrow[r, "h \sqcup h"] \arrow[d, hook] & A \sqcup A \arrow[r, hook] & C' \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ D \arrow[r, "\sim"] \arrow[urr, dashed, "G"] & B \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

On vérifie alors que $H \circ G$ est une homotopie entre $f \circ h$ et $g \circ h$. □

À droite

On peut également tout dualiser. Tous les énoncés et preuves qui suivent sont formellement duaux à ceux de la section précédente.

Définition 1.4.24. Un *objet chemin* de $X \in \mathsf{C}$ est une factorisation

$$X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$$

de l'application canonique $X \to X \times X$. On note $p_0, p_1 : P \to X$ les deux composantes de la fibration.

Exemple 1.4.25. (↺) Dans Top avec la structure de Quillen, un objet chemin d'un CW-complexe X est donné par $X^{[0,1]}$.

Exemple 1.4.26. Dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ avec la structure projective, soit A_* un complexe de chaînes. Un objet chemin d'un complexe de chaînes peut être donné par $C_n = A_n \oplus A_n \oplus A_{n+1}$ avec $d(x, y, z) = (dx, dy, dz + y - x)$.

Définition 1.4.27. Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes. Une *homotopie à droite* entre f et g est la donnée d'un objet chemin $X \xrightarrow{\sim} P \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \times X$ et d'une application $H : A \to P$ telle que $p_0 \circ H = f$ et $p_1 \circ H = g$, ce que l'on peut résumer par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "H"'] \arrow[rr, bend left, "{(f,g)}"] & P \arrow[r, two heads] & X \times X \\ & X \arrow[u, "\sim"] \arrow[ur, "{(\mathrm{id}_X,\mathrm{id}_X)}"'] & \end{tikzcd}$$

Si un tel H existe, on note $f \simeq_r g$.

Proposition 1.4.28. *Si $f \simeq_r g : A \to X$ alors $f \circ h \simeq_l g \circ h : B \to A$ pour tout morphisme $h : B \to A$.*

Lemme 1.4.29. *Si $X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$ est un objet chemin et que X est cofibrant, alors $p_0, p_1 : P \to X$ sont des fibrations acycliques.*

Proposition 1.4.30. *Si X est fibrant, alors $\simeq_r$ définit une relation d'équivalence sur* $\mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A, X)$.

Proposition 1.4.31. *Soit X un objet fibrant et $h : A \xrightarrow{\sim} B$ une équivalence faible. Si h est une cofibration (acyclique) ou si A et B sont cofibrants, alors h^* est une bijection :*

$$h^* : \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(B, X)/\simeq_r \to \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A, X)/\simeq_r.$$

Proposition 1.4.32. *Si A est cofibrant, $f \simeq_r g : A \to X$ et $h : X \to Y$ est un morphisme, alors $h \circ f \simeq_r h \circ g$.*

1.4.3. Description explicite

Proposition 1.4.33. *Soit $f, g : A \to X$ deux morphismes.*

- *Si A est cofibrant alors $f \simeq_l g \implies f \simeq_r g$.*
- *Si X est fibrant alors $f \simeq_r g \implies f \simeq_l g$.*

Démonstration. On démontre le premier point, l'autre est dual. Supposons que $f \simeq_l g$. Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \underset{\sim}{\xrightarrow{j}} A$ un cylindre pour A et $H : C \to X$ une homotopie. On a vu que i_0 est une cofibration acyclique. Choisissons un objet chemin $X \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow X \times X$ quelconque pour X. On peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i_0", "\sim"'] & X \arrow[r, "\sim"] & P \arrow[d, two heads] \\ C \arrow[urr, dashed, "K"] \arrow[rr, "{(fj,H)}"'] & & X \times X \end{tikzcd}$$

Alors $Ki_1 : A \to P$ est une homotopie à droite entre f et g. $\square$

Définition 1.4.34. Soit A un objet cofibrant et X un objet fibrant. On note $[A, X]$ le quotient de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)$ par la relation d'équivalence de la proposition précédente.

Définition 1.4.35. La catégorie $\pi\mathsf{C}_{cf}$ a pour objets les objets fibrants et cofibrants de C, et pour morphismes $\mathrm{Hom}_{\pi\mathsf{C}_{cf}}(A, X) = [A, X]$.

Théorème 1.4.36 (Analogue du théorème de Whitehead)**.** *Soit $f : A \to X$ un morphisme entre deux objets fibrants et cofibrants. Alors f est une équivalence faible si et seulement si il existe $g : X \to A$ tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes aux identités de X et A.*

Démonstration. Tout d'abord, supposons que f est une équivalence faible. On peut le factoriser en $A \underset{\sim}{\overset{i}{\hookrightarrow}} W \underset{\sim}{\overset{p}{\twoheadrightarrow}} X$. Comme i est une cofibration acyclique et que A est fibrant, on en déduit qu'il existe un inverse à droite $r : W \to A$ (c.à.d. $ri = \mathrm{id}_A$). Comme W est fibrant et que i est une cofibration acyclique, on en déduit que $i^* : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(W, W)/{\simeq_r} \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, W)/{\simeq_r}$ est une bijection. Or, $i^*([ir]) = [iri] = [i] = i^*([\mathrm{id}_W])$, d'où $ir \simeq_r \mathrm{id}_W$. On en déduit que r est un inverse de i à homotopie (à droite) près. Un argument dual donne un $s : X \to W$ qui est un inverse de p à homotopie (à gauche) près.

Réciproquement, supposons que f est une équivalence d'homotopie. On factorise f comme $A \underset{\sim}{\overset{i}{\hookrightarrow}} W \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$; il suffit de montrer que p est une équivalence faible. Notons que W est bifibrant. Soit $g : X \to A$ un inverse homotopique de f et $H : C \to X$ une homotopie entre fg et id_X (où C est un cylindre de X). Alors on peut trouver un relèvement H' dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "ig"] \arrow[d, hook, "i_0", "\sim"'] & W \arrow[d, two heads, "p"] \\
C \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "H'"] & X
\end{tikzcd}$$

Soit $s = H' \circ i_1$, qui est homotopie à ig grâce à H'. Comme i est une équivalence faible, c'est une équivalence d'homotopie par ce que l'on vient de montrer ; soit r un inverse homotopique de i. Comme $pi = f$, on a $p \sim pir = fr$. De plus $s \sim ig$ donc $sp \sim igp \sim igfr \sim ir \sim \mathrm{id}_C$. On en déduit que sp est une équivalence faible, et p est un rétract de sp :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "p"] & C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, "sp"] & C \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "s"] & W \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

□

Pour rappel, on note $Q(X) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ (resp. $X \overset{\sim}{\hookrightarrow} R(X)$) le remplacement cofibrant (resp. fibrant) fonctoriel.

Théorème 1.4.37 (Description de la catégorie homotopique)**.** *La catégorie* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ *est équivalente à* $\pi\mathsf{C}_{cf}$*. Pour tous les objets* $A, X \in \mathsf{C}$*,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Q(A), R(Y))/\sim.$$

Si $f : A \to X$ *est un morphisme qui devient un isomorphisme dans* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$*, alors c'est une équivalence faible.*

Démonstration. Comme on sait déjà que $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_{cf})$ (Lemme 1.4.13), il suffit de montrer que le quotient $\pi : \mathsf{C}_{cf} \to \pi\mathsf{C}_{cf}$ vérifie la propriété universelle de la localisation par rapport à $\mathcal{W}$. Soit $F : \mathsf{C}_{cf} \to \mathsf{D}$ un foncteur qui envoie les équivalences faibles sur des isomorphismes. On veut montrer qu'il existe un unique foncteur $\bar{F} : \pi\mathsf{C}_{cf} \to \mathsf{D}$ tel que $\bar{F} \circ \pi = F$. Sur les objets, on doit poser $\bar{F}(X) = F(X)$. Montrons que F passe au quotient, c.à.d. que si $f, g : A \to X$ sont deux morphismes homotopes entre objets fibrants et cofibrants, alors $F(f) = F(g)$.

Soit $A \sqcup A \hookrightarrow C \xrightarrow[\sim]{j} A$ un cylindre pour A et $H : C \to X$ une homotopie entre f et g, c.à.d. $H \circ i_0 = f$ et $H \circ i_1 = g$. (C est cofibrant, on a vu dans la preuve de Proposition 1.4.23 que l'on pouvait également le choisir tq. j est une fibration donc C est fibrant aussi car A l'est.) On va montrer que $F(i_0) = F(i_1)$. Comme $j : C \to A$ est une équivalence faible, on en déduit que $F(j)$ est un isomorphisme. Or, $j \circ i_0 = j \circ i_1 = \mathrm{id}_A$ donc $F(j) \circ F(i_0) = F(j) \circ F(i_1)$, d'où $F(i_0) = F(i_1)$. On en déduit alors que $F(f) = F(H \circ i_0) = F(H \circ i_1) = F(g)$. Cela permet de conclure que π vérifie bien la propriété universelle.

Montrons maintenant que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QA, RX)$. Par ce que l'on vient de montrer, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X) \cong [QRA, QRX] = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QRA, QRX)/\simeq$. Comme QRA est cofibrant et que $QRX \xrightarrow{\sim} RX$ est une équivalence entre objets fibrants, on a $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QRA, QRX)/\sim \; \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QRA, RX)/\sim$. De même, ce dernier est en bijection avec $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QA, RX)/\sim$.

Enfin, supposons que $[f : A \to X]$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$. Grâce au diagramme

$$\begin{tikzcd} QRA \arrow[r, "QR(f)"] \arrow[d, "\sim"] & QRX \arrow[d, "\sim"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

on voit qu'il suffit de montrer que $QR(f)$ est une équivalence faible. Grâce au point 1 du théorème, il existe $g : QRX \to QRA$ tel que $[QRf \circ g] = [\mathrm{id}_{QRX}] \in [QRX, QRX]$ et $[g \circ QRf] = [\mathrm{id}_{QRA}] \in [QRA, QRA]$. Autrement dit, $QRf \circ g \simeq \mathrm{id}_{QRX}$ et $g \circ QRf \simeq \mathrm{id}_{QRA}$. Grâce au théorème de Whitehead, on en déduit que QRf est une équivalence faible. $\square$

1.5. Engendrement cofibrant

Nous allons commencer par démontrer que la structure projective définit une catégorie de modèles sur $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$. La preuve fera intervenir des idées que nous allons formaliser sous le nom de « catégories de modèles à engendrement cofibrant » (ou cofibrement engendrée).

1.5.1. Exemple : complexes de chaînes

Pour rappel, $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ dénote la catégorie des complexes de chaînes concentrés en degrés positifs. Pour un complexe de chaînes $M = (M_n, d_n)_{n \geq 0}$ on définit :

- les cycles $Z_k(M)$ par $Z_0(M) = M_0$ et $Z_k(M) = \ker(d : M_k \to M_{k-1})$;
- les bords $B_k(M)$ par $B_k(M) = \mathrm{im}(d : M_{k+1} \to M_k)$;
- l'homologie $H_k(M) = Z_k(M)/B_k(M)$.

Un complexe de chaînes est dit acyclique si $H_k(M) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Rappelons également qu'un R-module P est dit projectif si pour toute surjection $A \to B$, l'application induite $\mathrm{Hom}(P, A) \to \mathrm{Hom}(P, B)$ est surjective. C'est équivalent à demander qu'il existe un module libre R^n qui se décompose en $P \oplus Q$ (pour un certain Q), ou encore que tout morphisme surjectif $A \to P$ aie une section.

Définition 1.5.1. On dit qu'un morphisme $f : M \to N$ de complexes de chaînes est :

- une équivalence faible si c'est un quasi-isomorphisme ;
- une cofibration si pour tout $k \geq 0$, l'application $f_k : M_k \to N_k$ est injective et son conoyau est projectif ;
- une fibration si pour tout $k > 0$, l'application $f_k : M_k \to N_k$ est surjective.

Théorème 1.5.2 (Structure projective de $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$)**.** *Ces trois classes de morphismes définissent une structure de catégorie de modèles sur la catégorie* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$*, appelée « structure projective ».*

Exemple 1.5.3. Soit A et B deux R-modules. Considérons A comme un complexe concentré en degré m, noté $A[-m]$; et B comme un complexe concentré en degré n, noté $B[-n]$. Alors dans la catégorie homotopique, $[\Sigma^m A, \Sigma^n B] \cong \mathrm{Ext}_R^{n-m}(A, B)$.

Lemme 1.5.4. $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie les axiomes* (*MC1*), (*MC2*), (*MC3*).

Démonstration. Les limites et les colimites se calculent degré par degré dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$. L'axiome (MC2) est clair. Pour l'axiome (MC3), on note que le rétract d'un isomorphisme (resp. épimorphisme, monomorphisme) est un isomorphisme (resp. épimorphisme, monomorphisme), et que de plus un rétract d'un module projectif est projectif. □

Lemme 1.5.5. $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie l'axiome* $(MC4(i))$.

Démonstration. Considérons un diagramme commutatif de complexes de chaînes :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Par définition, p_k est surjectif pour tout $k > 0$. Comme de plus $H_0(X) \to H_0(Y)$ est un isomorphisme, une petite chasse au diagramme montre que p_0 est surjectif aussi. Soit $K = \ker(p)$, alors on a une suite exacte courte $0 \to K \to X \to Y \to 0$ donc K est acyclique.

On cherche un relèvement $l : B \to X$ que nous allons construire par récurrence sur k.

– $(k = 0)$ Soit $P_0 = B_0/A_0$. On a une suite exacte courte $0 \to A_0 \to B_0 \to P_0 \to 0$. Comme P_0 est projectif, cette suite est scindée : on peut trouver une section $\sigma_0 : P_0 \to B_0$ de la projection $B_0 \to P_0$. On en déduit donc que B_0 est isomorphe à $A_0 \oplus P_0$ comme R-modules. On définit alors $l_0 : A_0 \oplus P_0 \to X_0$ en prenant f_0 sur A_0 et n'importe quel relèvement $P_0 \to X_0$ de l'application $P_0 \subset B_0 \to Y_0$. On peut résumer cet argument par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook, "i_0"] & X_0 \arrow[d, two heads, "p_0"] \\ B_0 \cong A_0 \oplus P_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[ur, dotted, "{(f_0, g_0\sigma)}"] \arrow[d, two heads] & Y_0 \\ P_0 \arrow[u, dashed, bend left, "\exists\sigma"] \arrow[ur, dashed, "g_0\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

– (récurrence) Soit $k > 0$. Supposons que l'on a construit des applications $l_j : B_j \to X_j$ (pour tout $0 \leq j < k$) vérifiant :

  (i) $dl_j = l_{j-1}d$ pour $1 \leq j < k$,

  (ii) $p_j l_j = g_j$ et $l_j i_j = f_j$ pour $0 \leq j < k$,

  On veut trouver l_k. Comme pour le cas $k = 0$, on a un scindage $B_k \cong A_k \oplus P_k$ et on peut donc définir $\tilde{l}_k : B_k \to X_k$ qui vérifie le deuxième point, mais il n'est pas forcément compatible avec la différentielle. On définit donc $\xi : B_k \to X_{k-1}$ par $\xi(b) = d(\tilde{l}_k(b)) - l_{k-1}(db)$. Alors on vérifie que :

  – $d\xi = 0$, car $dl_{k-1} = l_{k-2}d$,

  – $p_{k-1}\xi = 0$ car $p_k\tilde{l}_k = g_k$ qui commute avec d,

  – $\xi i_k = 0$ car $\tilde{l}_k i_k = f_k$ qui commute avec d.

En d'autres termes, ξ induit $\xi' : B_k/i_k(A_k) \cong P_k \to Z_{k-1}(K)$. Or, K est acyclique, donc $d : K_k \to Z_{k-1}(K)$ est surjective. Par projectivité de P_k, on peut relever ξ' en $\xi'' : P_k \to K_k$, que l'on peut composer avec l'inclusion pour obtenir $\xi''' : P_k \to X_k$. On vérifie alors aisément que $l_k := \tilde{l}_k - \xi'''$ vérifie les équations demandées. $\square$

Lemme 1.5.6. $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *vérifie* (*MC4*(*ii*)).

L'idée est que le conoyau d'une cofibration acyclique a une forme très particulière.

Définition 1.5.7. Soit A un R-module. Pour $n > 0$, on définit $D_n(A) \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$:

$$\dots \to 0 \to \underbrace{A}_{n} \xrightarrow{\mathrm{id}_A} \underbrace{A}_{n-1} \to 0 \to \dots$$

Lemme 1.5.8. *Pour tout* $M \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$, *on a une bijection naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)}(D_n(A), M) \cong \mathrm{Hom}_{R-\mathsf{Mod}}(A, M_n).$$

En particulier, si $M \to N$ *est surjectif en degré* n *et que* A *est projectif, alors toute application* $D_n(A) \to N$ *se relève à* M. $\square$

Lemme 1.5.9. *Soit* $P \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *un complexe acyclique qui est projectif en chaque degré. Alors tous les* $Z_k(P)$ *sont projectifs, et* P *est isomorphe dans* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ *à* $\bigoplus_{k\geq 1} D_k(Z_{k-1}(P))$.

Démonstration. On définit un sous-complexe (pour $k \geq 1$) :

$$P_n^{(k)} = \begin{cases} P_n & n \geq k \\ B_{k-1}(P) & n = k-1 \\ 0 & n \leq k-2 \end{cases}$$

Comme P est acyclique, on vérifie que $P^{(k)}/P^{(k+1)} \cong D_k(Z_{k-1}(P))$. Comme $Z_0(P) = P_0$ est projectif, en utilisant le lemme précédent on déduit que $P = P^{(1)} \cong P^{(2)} \oplus D_1(Z_0(P))$. On applique maintenant le même argument à $P^{(2)}$ pour trouver $P^{(2)} \cong P^{(3)} \oplus D_2(Z_1(P))$, etc. $\square$

Démonstration du Lemme 1.5.6. On se donne un diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i", "\sim"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme i est injectif et son conoyau $P = B/A$ vérifie les hypothèses du lemme précédent. On déduit donc que la suite exacte $0 \to A \to B \to P \to 0$ est scindée, donc $B \cong A \oplus P$ comme complexe de chaînes. On peut donc définir $l : B \to X$ en utilisant f pour le facteur A et en utilisant n'importe quel relèvement de $P \subset B \xrightarrow{g} Y$ pour le facteur P. $\square$

L'axiome (MC5)

Il reste à démontrer (MC5). Plutôt que de le faire directement, nous allons illustrer ce que l'on appelle « l'argument du petit objet », qui permet de fabriquer des factorisations avec de bonnes propriétés de relèvement dans beaucoup de catégories modèles. Cet argument sera formalisé plus tard.

On considère $\mathbb{N}$ comme une catégorie dont les objets sont les entiers naturels et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{N}}(m,n) = \begin{cases} * & \text{si } m \leq n, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un foncteur (diagramme) $X : \mathbb{N} \to \mathsf{C}$ n'est rien d'autre qu'une suite d'objets et de morphismes (attention ce n'est pas un complexe de chaînes !) :

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

Les applications naturelles $X_n \to \operatorname{colim} X$ induisent, pour tout objet $A \in \mathsf{C}$, une application :

$$\operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} X_n).$$

Définition 1.5.10. Un objet $A \in \mathsf{C}$ est $\mathbb{N}$-*petit* (ou séquentiellement petit) si pour tout diagramme $X : \mathbb{N} \to \mathsf{C}$, l'application ci-dessus est une bijection.

Exemple 1.5.11. Un ensemble est $\mathbb{N}$-petit ssi il est fini. Un R-module est $\mathbb{N}$-petit ssi il est de présentation fini. Un complexe de chaînes $X \in \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est $\mathbb{N}$-petit ssi $X_n = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs, et chaque X_n est de présentation finie.

Soit $\mathcal{M} = \{f_i : A_i \to B_i\}_{i\in I}$ un *ensemble* de morphismes de C. On se fixe une application $p : X \to Y$. On cherche à factoriser p en $X \to X' \to Y$ de sorte que $X' \to Y$ a la RLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$. Bien sûr, on pourrait prendre $X' = Y$, mais on veut que X' ressemble le plus possible à X.

On définit $S(\mathcal{M}, p)$ comme étant *l'ensemble* de tous les diagrammes commutatifs possibles :

$$S(\mathcal{M},p) = \left\{ (i \in I, g : A_i \to X, h : B_i \to Y) \;\middle|\; \begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B_i \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd} \text{ commute} \right\}$$

Le construction de recollement $G^1(\mathcal{M}, p)$ est alors donnée comme le poussé en avant :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{(i,g,h)\in S(\mathcal{M},p)} A_i \arrow[r, "\sqcup g"] \arrow[d, "\sqcup f_i"] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dl, phantom, "\ulcorner"] & \\ \coprod_{(i,g,h)\in S(\mathcal{M},p)} B_i \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sqcup h"] & G^1(\mathcal{M},p) \arrow[r, dashed, "p_1"] & Y \end{tikzcd}$$

Le fait que tous les diagrammes de $S(\mathcal{M}, p)$ commutent montrent que l'on a une application induite $p_1 : G^1(\mathcal{M}, p) \to Y$. On peut ensuite définir par récurrence $G^k(\mathcal{M}, p) = G^1(\mathcal{M}, p_{k-1})$. On récupère :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "p"] & G^1(\mathcal{M}, p) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "p_1"] & G^2(\mathcal{M}, p) \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "p_2"] & \dots \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & \dots
\end{tikzcd}$$

On pose $G^\infty(\mathcal{M}, p)$ la colimite de la ligne du dessus. Elle est munie d'applications $i_\infty : X \to G^\infty(\mathcal{M}, p)$ et $p_\infty : G^\infty(\mathcal{M}, p) \to Y$ telles que $p_\infty i_\infty = p$.

Proposition 1.5.12. *Supposons que tous les A sont $\mathbb{N}$-petits dans $\mathcal{M}$. Alors p_∞ a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$.*

Démonstration. On cherche à résoudre le problème de relèvement suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_i"] & G^\infty(\mathcal{M}, p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B_i \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Comme A_i est $\mathbb{N}$-petit, on peut factoriser g comme $A_i \xrightarrow{g'} G^k(\mathcal{M}, p) \to G^\infty(\mathcal{M}, p)$. On obtient donc un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f_i"] & G^k(\mathcal{M}, p) \arrow[r, "i_{k+1}"] \arrow[d, "p_k"] & G^{k+1}(\mathcal{M}, p) \arrow[r] \arrow[d, "p_{k+1}"] & G^\infty(\mathcal{M}, p) \arrow[d, "p_\infty"] \\
B_i \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

Le triplet (i, g', h) indexe un des morphismes dans la colimite qui définit $G^{k+1}(\mathcal{M}, p)$ à partir de $G^k(\mathcal{M}, p)$. Par construction, on trouve donc une application $B_i \to G^{k+1}(\mathcal{M}, p)$ qui fait commuter le diagramme, que l'on peut ensuite post-composer avec le morphisme vers $G^\infty(\mathcal{M}, p)$. On obtient ainsi le relèvement voulu. □

On peut résumer tout ce qui précède (et généralisé à un cardinal quelconque) :

Théorème 1.5.13 (Argument du petit objet)**.** *Soit* C *une catégorie cocomplète et $\mathcal{M} = \{f_i : A_i \to B_i\}$ un ensemble de morphismes de* C*. Supposons que tous les A_i sont κ-petits pour un cardinal κ fixé. Tout morphisme $f : X \to Y$ se factorise en $X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(f, \mathcal{M}) \xrightarrow{p_\infty} Y$ où i_∞ est un complexe $\mathcal{M}$-cellulaire relatif et p_∞ a la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$.* □

On va maintenant montrer que les cofibrations et les cofibrations acycliques sont «engendrées» par un petit nombre de cofibrations (acycliques) que l'on va décrire explicitement. On fabriquera la factorisation d'une application quelqu'un en utilisant la construction G^∞, soit par rapport aux cofibrations génératrices, soit par rapport aux cofibrations acycliques génératrices.

Définition 1.5.14. Pour $n \geq 1$, on définit le «n-disque» $D_n(R)$ et pour $n \geq 0$ la «n-sphère» par :

$$D_n(R) : \dots \to 0 \to \underbrace{R}_{n} \xrightarrow{\mathrm{id}_R} \underbrace{R}_{n-1} \to 0 \to \dots$$
$$S_n(R) : \dots \to 0 \to \underbrace{R}_{n} \to 0 \to \dots$$

On définit aussi $D_0(R) = R$ concentré en degré 0, et $S_{-1}(R) = 0$. On a une inclusion évidente $i_n : S_{n-1}(R) \to D_n(R)$ (c'est une cofibration). On note aussi $j_n : 0 \to D_n(R)$ pour l'inclusion (c'est une cofibration acyclique).

Lemme 1.5.15 (Exercice)**.** *Un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est :*

- *une fibration $\iff$ il a la RLP par rapport à tous les i_n ;*
- *une fibration acyclique $\iff$ il a la RLP par rapport à tous les j_n.*

Lemme 1.5.16. *La catégorie $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ vérifie (MC5).*

Démonstration. Vérifions d'abord (MC5(i)), c.à.d. on veut factoriser un $f : X \to Y$ en une cofibration acyclique suivie d'une fibration. On considère la classe $\mathcal{J} = \{j_n : 0 \to D_n(R)\}$. L'argument du petit objet donne une factorisation de f en $X \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{J}, f) \xrightarrow{p_\infty} Y$. Grâce au lemme précédent, p_∞ est une fibration. À chaque étape, l'application $G^k(\mathcal{J}, f) \to G^{k+1}(\mathcal{J}, f)$ est obtenue en recollant des cofibrations acycliques (les j_n) donc c'est une cofibration acyclique, donc l'application vers la colimite aussi.

Vérifions maintenant (MC5(ii)). On fait la même chose, à part que l'on utilise la classe $\mathcal{I} = \{i_n : S_{n-1}(R) \to D_n(R)\}$ à la place. □

On a fini de démontrer le théorème !

1.5.2. Définition et théorème d'existence

Les catégories de modèles cofibrement engendrées sont très importantes en théorie de l'homotopie. (On a vue les complexes de chaînes, on peut aussi repérer le fait que les fibrations de Serre sont définies de manière similaire...) En général, démontrer l'axiome MC5 est difficile, mais si on arrive à trouver un ensemble de cofibrations (acycliques) génératrices, alors c'est plus simple, grâce à l'argument du petit objet. Ça permettra également de calculer les (co)limites homotopiques plus simplement par la suite, et de nombreux théorèmes ne s'appliquent qu'à ces catégories.

Soit $\mathcal{M} = \{A_i \xrightarrow{f_i} B_i\}$ un ensemble de morphismes de C. (Il faudra y penser comme la classe des cofibrations génératrices ou bien des cofibrations acycliques génératrices.)

Définition 1.5.17. Un *complexe $\mathcal{M}$-cellulaire relatif* est un morphisme $X \to Y$ qui est obtenu comme une colimite de type $\mathrm{colim}_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ où κ est un ordinal[4], $X_0 = X$, $X_{\alpha+1}$ est obtenu à partir de X_α comme un poussé en avant du type $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup_{A_i} B_i$ pour un morphisme $g : A_i \to X_\alpha$, et si $\lambda \in \kappa$ est un ordinal limite alors $X_\lambda = \mathrm{colim}_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. On note $\mathcal{M}$-cell la classe de tels morphismes. Un *complexe $\mathcal{M}$-cellulaire* est un objet Y tel que $\emptyset \to Y \in \mathcal{M}$-cell.

Exemple 1.5.18. Dans Top, les complexes cellulaires relatifs sont obtenus pour $\mathcal{M} = \{\partial I^n \to I^n\}$.

Définition 1.5.19. Un morphisme $p : X \to Y$ est *$\mathcal{M}$-injectif* si il a la RLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}$. On note $\mathcal{M}^\perp$ la classe des morphismes $\mathcal{M}$-injectifs.

Définition 1.5.20. Un morphisme $i : A \to B$ est *$\mathcal{M}$-cofibrant* si il a la LLP par rapport à tous les morphismes de $\mathcal{M}^\perp$. On note ${}^\perp(\mathcal{M}^\perp)$ la classe des morphismes $\mathcal{M}$-cofibrants.

Définition 1.5.21. Une catégorie de modèles $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ est *cofibrement engendrée* si il existe deux ensembles de morphismes $\mathcal{I}$ («cofibrations génératrices») et $\mathcal{J}$ («cofibrations acycliques génératrices») tels que :

- les fibrations acycliques sont les morphismes $\mathcal{I}$-injectifs $(\mathcal{F} \cap \mathcal{W} = \mathcal{I}^\perp)$;
- les fibrations sont les morphismes $\mathcal{J}$-injectifs $(\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp)$;
- les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ sont petits par rapport à la classe $\mathcal{I}$-cell ;
- les sources des morphismes de $\mathcal{J}$ sont petits par rapport à la classe $\mathcal{J}$-cell.

Remarque 1.5.22. Les deux premiers points entraînent que $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$. Les deux derniers points se vérifient souvent en choisissant $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de manière à ce que leurs sources soient compacts (donc petits par rapport à tout le monde).

Exemple 1.5.23. On a vu que la structure projective sur $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(R)$ est cofibrement engendrée par $\mathcal{I} = \{S_n(R) \to D_n(R)\}$ et $\mathcal{J} = \{0 \to D_n(R)\}$.

Exemple 1.5.24. La structure de Quillen sur Top est cofibrement engendrée par $\mathcal{I} = \{\partial I^n \hookrightarrow I^n\}$ et $\mathcal{J} = \{I^n \hookrightarrow I^{n+1}\}$. Celle de Strøm ne l'est pas.

Proposition 1.5.25. *Soit* C *une catégorie de modèles cofibrement engendrée par* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$. *Alors les cofibrations* (*resp. cofibrations acycliques*) *sont les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires relatifs* (*resp. complexes $\mathcal{J}$-cellulaires relatifs*).

Démonstration. Démontrons par exemple que $\mathcal{C} = \mathrm{Retract}(\mathcal{I}\text{-cell})$ (l'autre preuve est similaire). Comme les morphismes de $\mathcal{I}$ sont des cofibrations, les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires aussi. Réciproquement, soit $i : A \to B$ une cofibration. En réutilisant l'argument du petit objet, i se factorise en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{I}, i) \xrightarrow{p_\infty} B$. Par construction, i_∞ est un complexe $\mathcal{I}$-cellulaire relatif. On a également démontré que p_∞ a la RLP par

[4] en général on peut se restreindre à $\kappa = \mathbb{N}$

rapport à $\mathcal{I}$, donc c'est une fibration acyclique, donc elle a la RLP par rapport à i. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_\infty"] \arrow[d, "i"'] & G^\infty(\mathcal{J}, i) \arrow[d, "p_\infty"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On trouve alors que i est un rétract de i_∞ :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_\infty"] & A \arrow[d, "i"] \\ B \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "p_\infty"] & B \end{tikzcd}$$

□

En théorie, si on se donne une catégorie C, on peut récupérer toute la structure de catégorie de modèles : les cofibrations (acycliques) sont les rétracts de complexes $\mathcal{I}$-cellulaires ($\mathcal{J}$-cellulaires) relatifs, les fibrations (acycliques) sont les morphismes $\mathcal{J}$-injectifs ($\mathcal{I}$-injectifs), et les équivalences faibles sont les morphismes obtenus en composant une cofibration acyclique avec une fibration acyclique. Mais toute la question est de savoir si ça fabrique bien une catégorie de modèles !

Théorème 1.5.26 (Existence d'une structure cofibrement engendrée)**.** *Soit* C *une catégorie complète et cocomplète,* $\mathcal{W}$, $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *trois classes de morphismes. Alors* C *est une catégorie de modèles avec* $\mathcal{W}$ *comme équivalences faibles et* $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ *comme cofibrations (acycliques) génératrices si et seulement si :*

(1) $\mathcal{W}$ *vérifie 2-parmi-3 et est stable par rétracts ;*

(2) *les sources des morphismes de* $\mathcal{I}$ *sont petits par rapport à* $\mathcal{I}$*-cell ;*

(3) *les sources des morphismes de* $\mathcal{J}$ *sont petits par rapport à* $\mathcal{J}$*-cell ;*

(4) $\mathcal{J}$*-cell* $\subset \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ *;*

(5) $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{J}^\perp$ *;*

(6) *soit* ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp) \cap \mathcal{W} \subset {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$, *soit* $\mathcal{J}^\perp \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{I}^\perp$.

Démonstration. Les conditions sont clairement nécessaires. Montrons qu'elle sont suffisantes. Rappelons que l'on prend $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp$ et $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. (MC1) est vérifié par hypothèse. (MC2) et la stabilité de $\mathcal{W}$ par rétracts découlent de (1). La stabilité par rétracts de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ viennent du fait que l'on les définit par des propriétés de relèvement, on a donc (MC3).

Les conditions (4) et (5) montrent que les morphismes de $\mathcal{I}^\perp$ sont des fibrations acycliques, et que ceux de $\mathcal{J}$-cell sont des cofibrations acycliques. L'argument du petit objet, qui marche grâce à (3), fournit une factorisation de tout morphisme $f : A \to X$ en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(\mathcal{M}, f) \xrightarrow{p_\infty} X$, où $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$). Le morphisme i_∞ est un complexe $\mathcal{I}$-cellulaire (resp $\mathcal{J}$-cellulaire). Le même argument que dans la proposition précédente montre que c'est donc bien une cofibration (resp. cofibration acyclique). Le morphisme p_∞ est $\mathcal{I}$-injectif (resp $\mathcal{J}$-injectif) donc c'est une fibration acyclique par (5) (resp fibration par définition de $\mathcal{F}$). On a donc bien (MC5).

Reste (MC4), l'axiome de relèvement. On va utiliser (6) ; supposons que $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} := {}^\perp(\mathcal{I}^\perp) \cap \mathcal{W} \subset {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$ (l'autre cas est dual). Alors les cofibrations acycliques sont bien la LLP par rapport aux fibrations, soit la moitié de l'axiome. Supposons maintenant que $f : X \to Y \in \mathcal{J}^\perp \cap \mathcal{W}$ est une fibration acyclique, montrons qu'elle a la RLP par rapport aux cofibrations. Par définition de $\mathcal{C} = {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$, il suffit de vérifier que f a la RLP par rapport aux éléments de $\mathcal{I}$. Par l'argument du petit objet, on factorise $f = p_\infty i_\infty$ où $i_\infty \in \mathcal{J}\text{-cell} \subset \mathcal{W} \cap {}^\perp(\mathcal{I}^\perp) = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ (4), et $p_\infty \in \mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{W}$ (5). On vient de démontrer que f a la RLP par rapport à $i_\infty \in {}^\perp(\mathcal{J}^\perp)$. On a donc un relèvement :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_\infty"] & X \arrow[d, "f"] \\
G^\infty(\mathcal{J}, f) \arrow[r, "p_\infty"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

et donc f est un rétract de p_∞ :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_\infty"] \arrow[d, "f"] & G^\infty(\mathcal{J}, f) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_\infty"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

Comme $p_\infty \in \mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{F}$ par (4), on en déduit par (MC3) que $f \in \mathcal{F}$. □

Exemple 1.5.27 (Exercice). Soit $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$ et considérons la structure de Quillen (voir Exemple 1.3.12). On pose comme cofibrations génératrices la classe des inclusions $\{S^{n-1} \to D^n\}_{n\geq 0}$ et comme cofibrations acycliques génératrices les inclusions $\{D^n \to D^n \times [0,1]\}_{n\geq 0}$. Montrer que les hypothèses du théorème sont vérifiées et que les classes des fibrations, cofibrations et équivalences faibles sont celles de l'Exemple 1.3.12. (On pourra se référer à [**Hovey1999**] ainsi qu'une preuve similaire pour les ensembles simpliciaux dans le Chapitre 2).

1.6. Adjonctions de Quillen

On sait maintenant définir la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles et y faire des calculs, notamment quand la catégorie est cofibrement engendrée. Maintenant, si on a un foncteur entre deux catégories de modèles, à quelles conditions a-t'on un foncteur induit entre leur catégorie homotopiques ?

Proposition 1.6.1. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction entre deux catégories de modèles. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

– *F préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques ;*

– *G préserve les fibrations et les fibrations acycliques ;*

– *F préserve les cofibration et G préserve les fibrations ;*

– *F préserve les cofibrations acycliques et G préserve les fibrations acycliques.*

Définition 1.6.2. Une *adjonction de Quillen* est une adjonction qui vérifie ces propriétés.

Démonstration. Il suffit de jouer un peu avec les propriétés de relèvement. Montrons par exemple que si F préserve les cofibrations alors G préserve les fibrations acycliques. (Tous les autres énoncés sont obtenus de façon similaire.) Soit $p : X \twoheadrightarrow \sim Y$ une fibration acyclique. Montrons que $G(p) : X \to Y$ est une fibration acyclique. Il suffit de montrer que $G(p)$ a la RLP par rapport aux cofibrations. On se donne donc un diagramme et on cherche un relèvement :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & G(X) \arrow[d, "G(p)"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Par adjonction, le relèvement existe si et seulement si un relèvement existe dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r] \arrow[d, "F(i)"'] & X \arrow[d, two heads, "p", "\sim"'] \\ F(B) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Or F préserve les cofibrations donc $F(i)$ est une cofibration dans D. Comme p est une fibration acyclique, on en déduit que le relèvement existe. □

Exemple 1.6.3. Soit $f : R \to S$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Alors on a une adjonction $f_! : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(S) : f^*$. On vérifie aisément que c'est une adjonction de Quillen pour les structures projectives.

On rappelle que l'on note $\lambda : \mathsf{C} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ le foncteur de localisation.

Définition 1.6.4. Soit C une catégorie de modèles et soit H une catégorie quelconque.[5] Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{H}$ un foncteur.

1. Un *foncteur dérivé à gauche* de F est un foncteur $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}$ et une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{L}F \circ \lambda \Rightarrow F$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour

[5] On y pensera comme $\mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

toute paire $(G : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}, \beta : G \circ \lambda \Rightarrow F)$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : G \to \mathbb{L}F$ telle que β soit la composée

$$\begin{tikzcd} G \circ \lambda \arrow[rr, Rightarrow, "\forall\beta"] \arrow[dr, Rightarrow, dashed, "(\exists!\theta)\circ\lambda"'] & & F \\ & \mathbb{L}F \circ \lambda \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

2. Un *foncteur dérivé à droite* de F est un foncteur $\mathbb{R}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}$ et une transformation naturelle $\varepsilon : F \Rightarrow \mathbb{L}F \circ \lambda$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute paire $(G : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \to \mathsf{H}, \varphi : F \Rightarrow G \circ \lambda)$, il existe une unique transformation naturelle $\theta : \mathbb{R}F \to G$ telle que φ soit la composée

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, Rightarrow, "\forall\varphi"] \arrow[dr, Rightarrow, "\varepsilon"'] & & G \circ \lambda \\ & \mathbb{R}F \circ \lambda \arrow[ur, Rightarrow, dashed, "(\exists!\theta)\circ\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Si un foncteur dérivé (à droite ou à gauche existe), il est unique à isomorphisme près, comme d'habitude avec les propriétés universelles. Un foncteur dérivé à gauche est, en un certain sens, la meilleure approximation possible à gauche (du côté de la source) de F comme un foncteur qui factorise par λ. En termes savants, c'est une extension de Kan à droite (et non à gauche !) le long de λ.

Proposition 1.6.5. *Soit* C *une catégorie de modèles,* H *une catégorie quelconque, et* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{H}$ *un foncteur.*

1. *Si F envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des isomorphismes, alors* $\mathbb{L}F$ *existe.*

2. *Si F envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des isomorphismes, alors* $\mathbb{R}F$ *existe.*

La preuve fait appel au Lemme de Brown :

Lemme 1.6.6 (Lemme de Brown [**Brown1973**])**.** *Soit* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *un foncteur entre deux catégories de modèles.*

1. *Si F envoie les cofibrations acycliques entre objets cofibrants sur des équivalences faibles, alors F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des équivalences faibles.*

2. *Si F envoie les fibrations acycliques entre objets fibrants sur des équivalences faibles, alors F envoie les équivalences faibles entre objets fibrants sur des équivalences faibles.*

Démonstration. Soit $f : A \xrightarrow{\sim} B$ une équivalence faible entre objets cofibrants. On a donc un poussé en avant :

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & A \sqcup B
\end{tikzcd}$$

Donc les inclusions $i_A : A \to A \sqcup B$ et $i_B : B \to A \sqcup B$ sont des cofibrations.

Le morphisme f induit une application $(\mathrm{id}, f) : A \sqcup B \to B$. Factorisons-le comme une cofibration suivie d'une fibration acyclique. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& B & \\
& X \arrow[u, two heads, "p"', "\sim"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "f", "\sim"'] \arrow[r, hook, "i_A"] & A \sqcup B \arrow[u, hook, "j"] & B \arrow[l, hook', "i_B"'] \arrow[uul, equal, bend right]
\end{tikzcd}$$

- Comme $p \circ (j \circ i_B) = \mathrm{id}_B \in \mathcal{W}$ et que $p \in \mathcal{W}$, on en déduit que $j \circ i_B \in \mathcal{W}$. De plus $j \in \mathcal{C}$ and $i_B \in \mathcal{C}$ donc $j \circ i_B \in \mathcal{C}$. De plus, sa source (B) et son but (X) sont cofibrants. Par hypothèse sur F, on a donc que $F(j \circ i_B)$ est une éqv.

- De la même manière, on en déduit que $F(j \circ i_A)$ est une éqv.

- Comme $F(p) \circ F(j \circ i_B) = F(\mathrm{id}_B)$ est un iso et que $F(j \circ i_B)$ est un iso, on a que $F(p)$ est une éqv.

- Finalement, $F(f) = F(p) \circ F(j \circ i_A)$ est la composée de deux éqv donc c'est une éqv. □

Corollaire 1.6.7. *Un adjoint de Quillen à gauche (resp. à droite) envoie les équivalences entre objets cofibrants (resp. fibrants) sur des équivalences faibles.*

Démonstration de la Proposition 1.6.5. Supposons que F envoie les cofibrations acycliques entre objects cofibrants sur des isomorphismes (l'autre cas est dual). Grâce au Lemme de Brown, on en déduit que F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes.

On rappelle que $Q(X) \underset{\sim}{\overset{p_X}{\twoheadrightarrow}} X$ est la résolution cofibrante fonctorielle. On pose $\mathbb{L}F(X) := F(Q(X))$. La flèche naturelle $Q(X) \to X$ définit une transformation naturelle $\alpha : \mathbb{L}F \Rightarrow F$. Comme F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes, $\mathbb{L}F$ ainsi défini se factorise bien par $\mathrm{Ho}(\mathrm{C})$.

Montrons que la paire $(\mathbb{L}F, \alpha)$ vérifie la propriété universelle. Soit $(G : \mathrm{Ho}(\mathrm{C}) \to \mathrm{H}, \beta : G\lambda \Rightarrow F)$ comme dans la définition. On veut fabriquer $\theta_X : G(X) \to \mathbb{L}F(X) = F(Q(X))$ qui est naturel en X et tel que $\beta_X = \alpha_X \circ \theta_{\lambda(X)} : G(\lambda(X)) \to \mathbb{L}F(\lambda(X)) \to F(X)$.

On a que $Q(X) \xrightarrow{\sim} X$ devient un iso dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$, donc son image par G est un iso dans H. On peut donc trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} G(Q(X)) \arrow[r, "\beta_{Q(X)}"] \arrow[d, "G(p_X)", "\cong"'] & \mathbb{L}F(X) = F(Q(X)) \arrow[d, "\alpha_X"] \\ G(X) \arrow[r, "\beta_X"'] \arrow[ur, dashed, "\theta_X"] & F(X) \end{tikzcd} \tag{1.6.8}$$

On peut donc définir une transformation naturelle θ par $\theta_X := \beta_{Q(X)} \circ G(p_X)^{-1}$ et elle vérifie bien $\beta_X = \alpha_X \circ \theta_{\lambda(X)}$.

Montrons maintenant que θ est unique. Soit θ' une autre transformation naturelle qui vérifie l'hypothèse. Si l'on dessine le diagramme (1.6.8) en remplaçant X par QX, la flèche verticale de droite (α_{QX}) est un isomorphisme grâce au Corollaire 1.6.7. On en déduit que $\theta'_{QX} = \alpha_{QX}^{-1}\beta_{QX}$. Or par naturalité de θ', on doit avoir $F(Q(p_X))\theta'_{QX} = \theta'_X G(p_X)$. Mais comme F envoie les équivalences faibles entre objets cofibrants sur des isomorphismes, on vérifie que $F(Q(p_X)) = F(p_{QX}) =: \alpha_{QX}$ en considérant le cube formé par toutes les manières de passer de $QQQX$ à X. Donc nécessairement :

$$\theta'_X = \alpha_{QX}\theta_{QX}G(p_X)^{-1} = \alpha_{QX}\alpha_{QX}^{-1}\beta_{QX}G(p_X)^{-1} = \beta_{QX}G(p_X)^{-1} = \theta_X. \tag{1.6.9}$$

□

Définition 1.6.10. Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur entre deux catégories de modèles.

1. Un *foncteur dérivé total à gauche* de F est un foncteur dérivé à gauche de $\lambda F : \mathsf{C} \to \mathsf{D} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

2. Un *foncteur dérivé total à droite* de F est un foncteur dérivé à droite de $\lambda F : \mathsf{C} \to \mathsf{D} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{D})$.

On notera encore (abusivement...) $\mathbb{L}F$ et $\mathbb{R}F$ pour les foncteurs dérivés totaux.

Proposition 1.6.11 (Exercice). *Supposons que $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ sont deux foncteurs tels que F, G et $G \circ F$ admettent des foncteurs dérivés à gauche. Alors il existe une transformation naturelle canonique $(\mathbb{L}G) \circ (\mathbb{L}F) \Rightarrow \mathbb{L}(G \circ F)$.*

Théorème 1.6.12 (Adjonction entre catégories homotopiques). *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen entre deux catégories de modèles. Alors les foncteurs dérivés totaux $\mathbb{L}F$, $\mathbb{R}G$ existent et forment une adjonction :*

$$\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathsf{D}) : \mathbb{R}G.$$

Démonstration. Le fait qu'ils existent découlent de la proposition que l'on vient de démontrer et de la définition des adjonctions de Quillen. Dans la preuve, on a vu que

$$\mathbb{L}F(A) = F(Q(A)), \qquad \mathbb{R}G(X) = G(R(X)),$$

où $Q(-)$ est la résolution cofibrante fonctorielle et $R(-)$ la résolution fibrante fonctorielle. On cherche donc une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho(D)}}(\mathbb{L}F(A), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho(C)}}(A, \mathbb{R}G(X)).$$

Par la description des morphismes dans la catégorie homotopique, cela revient à chercher une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(Q(A)), R(X))/\sim \;\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Q(A), G(R(X)))/\sim.$$

Comme $F \dashv G$, on a déjà une bijection avant de passer au quotient. Il faut voir qu'elle passe au quotient. Supposons que $f, g : F(Q(A)) \to R(X)$ sont homotopes. Soit $R(Y) \xrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow R(Y) \times R(Y)$ un objet chemin et $H : F(Q(A)) \to P$ une homotopie. Comme G préserve les fibrations et les limites, on a que $G(R(Y)) \to G(P) \twoheadrightarrow R(Y) \times R(Y)$. De plus, $R(Y)$ et P sont fibrants, donc G envoie l'équivalence faible entre les deux sur une équivalence faible, donc $G(P)$ est un objet chemin pour $G(R(Y))$. Le morphisme H est adjoint à $H' : Q(A) \to R(P)$ et on vérifie que c'est une homotopie (à droite) entre les adjoints de f et g. La réciproque est duale. □

Proposition 1.6.13 (Exercice)**.** *Soit $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{E}$ sont deux adjoints de Quillen à gauche entre des catégories de modèles. Alors la transformation naturelle $\mathbb{L}G \circ \mathbb{L}F \Rightarrow \mathbb{L}(G \circ F)$ est un isomorphisme.*

Théorème 1.6.14 (Équivalences entre catégories homotopiques)**.** *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen. Les propositions suivantes sont équivalences :*

1. *L'adjonction induite $\mathbb{L}F : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathsf{D}) : \mathbb{R}G$ est une équivalence de catégories.*

2. *Pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$ et tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, un morphisme $F(A) \to Y$ est une équivalence faible si et seulement si son adjoint $A \to G(Y)$ est une équivalence faible.*

3. *Pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$ et tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, les deux flèches :*

$$A \xrightarrow{\eta} G(F(A)) \to G(R(F(A)))$$

$$F(Q(G(Y))) \to F(G(Y)) \xrightarrow{\varepsilon} Y$$

sont des équivalences faibles.

Démonstration. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

2. $\implies$ 3. Le morphisme $A \to GRF(A)$ est adjoint de $F(A) \to RF(A)$, qui est une résolution fibrante, donc une équivalence faible. Grâce à 2, on en déduit que $A \to GRF(A)$ est une équivalence faible. La deuxième partie est duale.

3. $\implies$ 2. Soit A cofibrant, X fibrant, et $f : F(A) \to Y$ un morphisme. On note $\bar{f} : A \xrightarrow{\eta} GF(A) \xrightarrow{G(f)} G(Y)$ son adjoint. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & GF(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d] & G(Y) \arrow[d, two heads, "\sim"] \\
A \arrow[r, "\sim"] & GRF(A) \arrow[r, "\sim"] & GR(Y)
\end{tikzcd}$$

où $A \to GRF(A)$ est une équivalence par hypothèse, $G(Y) \to GR(Y)$ est une équivalence faible car G préserve les équivalences faibles entre objets fibrants, et $GRF(A) \to GR(Y)$ est une équivalence faible pour la même raison. On en déduit grâce à 2-parmi-3 que $\bar{f}$ (la ligne du haut) est une équivalence faible. L'autre cas est dual.

2. $\implies$ 1. L'unité de l'adjonction $\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G$ est $\tilde{\eta} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, \mathbb{R}G(\mathbb{L}F(A))) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(QA, GRFQ(A))$. Elle est adjointe à $FQ(A) \to RFQ(A)$, qui est une équivalence faible dont la source est cofibrante, donc son adjoint est bien une équivalence faible (c.à.d. un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$). Dualement, la counité de l'adjonction est un isomorphisme ; on en déduit que l'adjonction entre catégories homotopiques est une équivalence de catégories.

1. $\implies$ 3. Supposons que A est cofibrant. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
QA \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads, "\sim"] & GRFQ(A) \arrow[d] \\
A \arrow[r] & GRF(A)
\end{tikzcd}$$

Comme l'unité de l'adjonction est un isomorphisme, $QA \to GRFQ(A)$ est une équivalence faible (cf. ci-dessus). Comme $QA \to A$ est une équivalence entre cofibrants, $F(QA) \to F(A)$ est une équivalence, donc $RFQ(A) \to RF(A)$ est une équivalence entre fibrants, donc $GRFQ(A) \to GRF(A)$ est une équivalence. On en déduit que la flèche du bas est une équivalence, ce que l'on voulait démontrer. L'autre cas est dual. □

Définition 1.6.15. Une adjonction de Quillen qui vérifie les hypothèses du théorème précédent s'appelle une *équivalence de Quillen*.

On a un critère bien pratique pour vérifier qu'une adjonction de Quillen est une équivalence de Quillen :

Proposition 1.6.16. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction de Quillen. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'adjonction est une équivalence de Quillen.*

2. *Le foncteur F reflète les équivalences faibles entre objets cofibrants*[6] *et pour tout objet fibrant $X \in \mathsf{D}$, le morphisme $FQG(X) \to X$ est une équivalence faible.*

3. *Le foncteur G reflète les équivalences faibles entre objets fibrants et pour tout objet cofibrant $A \in \mathsf{C}$, le morphisme $A \to GRF(A)$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Exercice. □

Exemple 1.6.17. Il y a une équivalence de Quillen entre la structure projective sur $\mathsf{Ch}(R)$ et la structure injective sur $\mathsf{Ch}(R)$. Cette équivalence est simplement donnée par l'identité (cf. **Hovey1999**)

Exemple 1.6.18. L'identité $\mathrm{id} : \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(R) : \mathrm{id}$ est une adjonction de Quillen entre la structure projective et la structure de Strøm. Est-ce que c'est une équivalence de Quillen ?

1.7. Limites et colimites homotopiques

Soit I une petite catégorie (c.à.d. on a un ensemble d'objets et un ensemble de morphismes). Un « diagramme indexé par I » est tout simplement un foncteur $X : I \to \mathsf{C}$, que l'on notera un peu différemment pour insister sur le fait que c'est un diagramme : la valeur en $i \in I$ est notée X_i et l'image de $\alpha : i \to j$ est notée $\alpha_* : X_i \to X_j$. Un morphisme entre diagrammes est une transformation naturelle. On note C^I la catégorie des diagrammes.

On a un foncteur $\mathrm{cst} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ tel que $\mathrm{cst}(A)_i = A$ et $\alpha_* = \mathrm{id}_A$ pour tout i, α.

Proposition 1.7.1 (Exercice)**.** *Si C est complète alors* cst *a un adjoint à droite* $\lim_I : \mathsf{C}^I \to \mathsf{C}$. *Si C est cocomplète alors* cst *a un adjoint à gauche* $\mathrm{colim}_I : \mathsf{C}^I \to \mathsf{C}$.

Si C a une notion d'équivalences faibles $\mathcal{W}$, alors C^I aussi en considérant $\mathcal{W}^I$ (c.à.d. que les équivalences faibles sont définis objet par objet).

Définition 1.7.2. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W})$ une catégorie avec des équivalences faibles et I une petite catégorie. Une *colimite homotopique* est un foncteur dérivé total à gauche :

$$\mathrm{hocolim}_I := \mathbb{L}\mathrm{colim}_I : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C}).$$

Une *limite homotopique* est un foncteur dérivé total à droite :

$$\mathrm{holim}_I := \mathbb{R}\lim_I : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I) \to \mathrm{Ho}(\mathsf{C}).$$

Remarque 1.7.3. Attention : $\mathrm{hocolim}_I$ n'est *pas* une colimite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$! La différence vient essentiellement du fait que $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})^I \neq \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I)$. Par exemple, si $I = \{a \leftarrow c \to b\}$, $\mathsf{C} = \mathsf{Top}$, et $X \in \mathsf{Top}^I$ est défini par $X_a = X_b = *$ et $X_c = \{0, 1\}$ (avec les seules flèches

[6] Cela signifie que si $f : A \to B$ est un morphisme entre objets cofibrants et que $F(f)$ est une équivalence faible, alors f est une équivalence faible.

possibles), alors $\mathrm{hocolim}_I X = S^1$ alors que la colimite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top})^I$ est contractile. On peut également trouver des exemples où la (co)limite dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ n'existe même pas, p.ex. le poussé en avant de $* \leftarrow S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^2} S^1$ dans $\mathrm{Ho}(\mathsf{Top}_*)$ (exercice).

On va maintenant donner des conditions pour que holim et hocolim existent. Ce qui suit découle directement de ce que l'on connaît sur les foncteurs dérivés d'adjonctions de Quillen.

Lemme 1.7.4. *Soit* C *une catégorie de modèles et* I *une petite catégorie.*

1. *Si* C^I *admet une structure de modèles dont les équivalences faibles contiennent* $\mathcal{W}^I$ *et tq* $\mathrm{cst} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ *est adjoint de Quillen à droite, alors* $\mathrm{hocolim}_I$ *existe.*
2. *Si* C^I *admet une structure de modèles dont les équivalences faibles contiennent* $\mathcal{W}^I$ *et tq* $\mathrm{cst} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$ *est adjoint de Quillen à gauche, alors* holim_I *existe.*

Définition 1.7.5. Soit C une catégorie de modèles et I une petite catégorie.

1. La *structure projective* sur C^I a pour équivalences faibles $\mathcal{W}^I$ et fibrations $\mathcal{F}^I$. Les cofibrations sont définies par propriété de relèvement.
2. La *structure injective* sur C^I a pour équivalences faibles $\mathcal{W}^I$ et cofibrations $\mathcal{C}^I$. Les fibrations sont définies par propriété de relèvement.

Lemme 1.7.6. *Si la structure projective (resp. injective) définit une structure de catégorie de modèles sur* C^I*, alors* $\mathrm{hocolim}_I$ *(resp.* holim_I*) existe.*

Remarque 1.7.7. Dans ce cas, pour calculer $\mathrm{hocolim}_I X$, il suffit de remplacer X par un objet cofibrant et de calculer sa limite. De même pour holim.

Définition 1.7.8. Une catégorie I est *très petite* si elle a un nombre fini d'objets et s'il existe $N > 0$ tel que toute suite de morphismes $A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \dots A_n$ a au plus N flèches qui ne sont pas des identités.

Exemple 1.7.9. Un ensemble partiellement ordonné fini définit une catégorie très petite.

Théorème 1.7.10 (Structure sur les catégorie de diagrammes)**.** *Si I est très petite alors les structures projective et injective définissent des structures de catégories de modèles sur* C^I.

Démonstration. La preuve complète est laissée en exercice et est un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale, celle des catégories de Reedy (dont les catégories très petites sont des exemples). La preuve marche essentiellement par récurrence. En effet, une catégorie très petite induit un préordre sur les objets de I, en posant $i \leq j \iff \mathrm{Hom}_I(i,j) \neq \emptyset$.

Pour montrer que la structure projective est une catégorie de modèles, on procède de la façon suivante, par récurrence sur la taille de I. Les axiomes (MC1), (MC2) et (MC3) sont clairs. Comme le poset (ensemble partiellement ordonné) $ob(I)$ est fini, il a au moins un élément minimal i_0. On pose I' la sous-catégorie pleine sur tous les autres objets et on a un foncteur de restriction $U : \mathsf{C}^I \to \mathsf{C}^{I'}$. Par récurrence, $\mathsf{C}^{I'}$ est une catégorie de modèles. Alors $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^I}(A, X)$ est une cofibration si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

– Le morphisme $f_{i_0} : A_{i_0} \to X_{i_0}$ est une cofibration dans C ;

– Soit $\{j_1, \dots, j_k\}$ les successeurs immédiats de i_0 dans le poset I. Pour $1 \le l \le k$, on définit $\partial_l(f)$ comme le poussé en avant :

$$\begin{tikzcd} A_{i_0} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A_{j_l} \arrow[d, dashed] \\ X_{i_0} \arrow[r, dashed] & \partial_l(f) \end{tikzcd}$$

On peut alors définir un diagramme $A' \in \mathsf{C}^{I'}$ par $A'_j = A_j$ si $j \notin \{i_0, j_1, \dots, j_k\}$ et $A'_{j_l} = \partial_l(f)$. On a un morphisme $A' \to U(X)$ dans $\mathsf{C}^{I'}$. La deuxième condition est que ce morphisme soit une cofibration (définie de manière inductive : le cardinal de I' est strictement inférieur au cardinal de I).

Pour démontrer les axiomes de relèvement ou de factorisation, on commence d'abord par s'occuper de i_0, et ensuite on trouve des relèvements/factorisations pour le morphisme $X' \to U(Y)$ compatible avec ce qui se passe en i_0. □

Cela permet par exemple de définir les poussés en avant et les tirés en arrière homotopiques. Cependant, toutes les catégories d'indices ne sont pas très petites, par exemple $\mathbb{N}$ ne l'est pas. On va introduire une condition sur C qui permet de mettre une structure de catégorie de modèles sur C^I pour tout catégorie petite I.

Définition 1.7.11. Une catégorie I est *filtrée* si tout diagramme fini a un cocône[7] : pour tout foncteur $F : \mathsf{D} \to I$ où D est une catégorie finie, il existe un objet $i \in I$ et une transformation naturelle $F \Rightarrow \mathrm{cst}_i$ entre F et le foncteur constant égal à i. Une colimite est *filtrée* si elle est indexée par une catégorie filtrée.

Exemple 1.7.12. Un ensemble partiellement ordonné est une catégorie filtré si et seulement si il est dirigé (c.-à-d. tout sous-ensemble fini une borne supérieure). Tout catégorie admettant un objet terminal est filtrée. Une catégorie discrète qui a au moins deux objets n'est pas filtrée.

Définition 1.7.13. Un objet $A \in \mathsf{C}$ est (κ-)*compact* si $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, -)$ commute avec les colimites (κ-)filtrées.

Exemple 1.7.14. Les objets compacts de Set sont les ensembles finis.

Définition 1.7.15. Une catégorie cocomplète C est *présentable* s'il existe un ensemble S d'objets compacts tel que tout objet de C est une colimite filtrée d'objets de S.

Remarque 1.7.16. Certains auteurs utilisent la terminologie « localement présentable » pour cette notion. En effet, il existe une notion général d'objet présentable dans une catégorie, et il pourrait être tentant de penser qu'une « catégorie présentable » est un « objet présentable dans Cat », ce qui n'est pas le cas : ce sont les objets de la catégorie qui sont présentables, pas la catégorie elle-même.

[7] On peut voir un cocône comme une « borne supérieure ».

Exemple 1.7.17. La catégorie Set des ensembles est présentable, engendrée par les ensembles finis (tout ensemble est bien la colimite filtrée de ses sous-ensembles finis). La catégorie des R-modules est présentable, engendrée par les modules libres de rang fini, etc.

Définition 1.7.18. Une catégorie de modèles C est *combinatoire* si elle est cofibrement engendrée et présentable.

Exemple 1.7.19. La catégorie $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ est combinatoire, engendrée par les $D_n(R)$ et les $S_n(R)$. La catégorie Top n'est pas combinatoire, mais elle est Quillen équivalente à la catégorie des ensembles simpliciaux (voir le Chapitre 2) qui l'est.

Théorème 1.7.20 (Structure projective sur une catégorie de diagrames)**.** *Soit* C *une catégorie de modèles cofibrement engendrée et* I *une petite catégorie. Alors la structure projective existe sur* C^I (*donc les colimites homotopiques existent*)*. Si de plus* C *est combinatoire, alors la structure injective sur* C^I *existe* (*donc les limites homotopiques existent*)*.*

Démonstration. Laissée en exercice, l'idée étant de montrer que C^I est cofibrement engendrée en utilisant les théorèmes que l'on a déjà vus. Le cas injectif est assez compliqué. □

Donnons maintenant quelques exemples de colimites homotopiques. On introduit une notion technique :

Définition 1.7.21. Une catégorie de modèles C est dite *propre à gauche* si le poussé en avant d'une équivalence faible le long d'une cofibration est une équivalence faible. Elle est dite *propre à droite* si le tiré en arrière d'une équivalence faible le long d'une fibration est une équivalence faible. On dit qu'elle est *propre* si elle est propre à droite et à gauche.

Exemple 1.7.22 ([**Hirschhorn2003**]). Si tous les objets de C sont cofibrants (resp. fibrants), alors C est propre à gauche (resp. à droite).

Exemple 1.7.23 (Exercice). La catégorie Top avec la structure de Quillen et la catégorie $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ avec la structure projective sont propres.

Exemple 1.7.24. Soit $I = \{j \leftarrow i \rightarrow j'\}$, qui est très petite. Un diagramme $X \in \mathsf{C}^I$ est la donnée de trois objets et deux morphismes $B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$. Alors $\operatorname{colim}_I X$ est le poussé en avant de f et g, $B \cup_A C$. Cette notion n'est clairement pas invariante par homotopie : par exemple dans Top, $* \cup_{\{0,1\}} * = *$ alors que $[0,1] \cup_{\{0,1\}} [0,1] = S^1$. Pour calculer le poussé en avant homotopique, $\operatorname{hocolim}_I X = B \cup^h_A C$, on doit remplacer notre diagramme par un diagramme cofibrant. On peut montrer qu'un remplacement cofibrant du diagramme est donné par $Q(B) \hookleftarrow Q(A) \hookrightarrow Q(C)$ où les $Q(-)$ sont des résolutions cofibrantes. On calcule alors simplement le poussé en avant de ce nouveau diagramme pour obtenir le poussé en avant homotopique.

Étant donné un diagramme $B \leftarrow A \rightarrow C$, si la catégorie C est propre à gauche on peut remplacer $A \rightarrow C$ par une cofibration $A \hookrightarrow C' \xrightarrow{\sim} C$ et calculer $B \cup^h_A C = B \cup_A C'$.

Dans Top, une manière standard de remplacer une flèche par une cofibration est de considérer son cylindre d'application, $\mathrm{Cyl}(g) = A \times [0,1] \sqcup C/((a,1) \sim g(c))$. On trouve alors $B \cup_A^h C = B \cup_A^h \mathrm{Cyl}(C)$.

Dans $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$ avec la structure projective, pour remplacer $A \xrightarrow{g} C$ par une cofibration, on peut considérer une construction formellement similaire :

$$\mathrm{Cyl}(g) = (A_n \oplus C_n \oplus A_{n-1}, d(a,c,a') = (da + a', dc - g(a'), da')).$$

Alors le poussé en avant homotopique est donné par :

$$B \oplus_A^h C = (B_n \oplus C_n \oplus A_{n-1}, d(b,c,a) = (db + f(a), dc - g(a), da)).$$

Le tiré en arrière homotopique est la version duale. Exercice : calculer le tiré en arrière homotopique dans Top et $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(R)$.

2. Ensembles simpliciaux

2.1. Définition et propriétés

Une grande partie de ce chapitre a été traitée dans le cours *Homotopie I* (↺).

Définition 2.1.1. La *catégorie des simplexes* Δ a pour objets les ensembles finis totalement ordonnées $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ et pour morphismes les applications croissantes.

On notera un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([m], [n])$ comme une suite :

$$f = f(0) \to f(1) \to \ldots \to f(m).$$

Par exemple, l'identité de $[n]$ est $0 \to 1 \to \ldots \to n$.

Tout morphisme de Δ se factorise de manière unique comme une surjection croissante suivie d'une injection croissante. Par ailleurs,

- les injections croissantes sont engendrées par les $\partial^i : [n-1] \to [n]$ (pour $0 \leq i \leq n$) définis par

$$\partial^i = 0 \to 1 \to \ldots \to i-1 \to i+1 \to \ldots \to n$$

- les surjections croissantes sont engendrées par les $\sigma^j : [n+1] \to [n]$ (pour $0 \leq j \leq n$) définis par

$$\sigma^j = 0 \to \ldots \to j \to j \to \ldots \to n$$

On a de plus les « relations cosimpliciales » (qu'il ne faut pas apprendre par cœur... !)

$$\begin{aligned}
\partial^j \partial^i &= \partial^i \partial^{j-1} && \text{si } i < j,\\
\sigma^j \partial^i &= \partial^i \sigma^{j-1} && \text{si } i < j,\\
\sigma^j \partial^i &= \mathrm{id} && \text{si } i = j \text{ ou } j+1,\\
\sigma^j \partial^i &= \partial^{i-1} \sigma^j && \text{si } i > j+1,\\
\sigma^j \sigma^i &= \sigma^{i-1} \sigma^j && \text{si } i \geq j.
\end{aligned}$$

Définition 2.1.2. Un *ensemble simplicial* est un foncteur $X_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$. On note $s\mathrm{Set}$ la catégorie des ensembles simpliciaux.

Concrètement, un ensemble simplicial est donc la donnée :

– d'une suite d'ensembles, X_0, X_1, $X_2\dots$ dont les éléments sont appelés les n-simplexes (on appelle parfois « sommets » les éléments de X_0, « arêtes » ceux de X_1 et « faces » ceux de X_2) ;

– d'applications « faces » $d_i : X_n \to X_{n-1}$ pour $0 \leq i \leq n$;

– d'applications « dégénérescences » $s_j : X_n \to X_{n+1}$ pour $0 \leq j \leq n$;

– vérifiant les relations « simpliciales » qui sont les mêmes que les relations cosimpliciales mais où l'on a inverse l'ordre des compositions (par exemple $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$, etc).

Une *application simpliciale* $X_\bullet \to Y_\bullet$ est la donnée d'applications $f_n : X_n \to Y_n$ qui commutent avec les faces et les dégénérescences.

Remarque 2.1.3 (Voir p.ex. [**Friedman2008**]). Il faut faire attention à la terminologie si l'on lit de vieux textes. Jadis, les ensembles simpliciaux s'appelaient « complexes semi-simpliciaux complets ». La motivation était que ces objets ressemblaient à des complexes simpliciaux, mais une suite de sommets ne déterminait pas une face de manière unique. Les « complexes semi-simpliciaux » étaient des ensembles simpliciaux où il n'y a que des faces, pas de dégénérescences ; on les appelle aujourd'hui « ensembles semi-simpliciaux ». Au fil du temps, « complexe » est devenu « ensemble ». Les « complexes semi-simpliciaux complets » étant de loin les plus intéressants, leur nom a été abrégé d'abord en « complexe semi-simpliciaux » (les anciens complexes semi-simpliciaux passant au second plan), puis en « complexe simplicial », et enfin en « ensemble simplicial ». Les ensembles semi-simpliciaux sont ensuite revenus en force et ont pris leur nom actuel. Certains auteurs appellent par ailleurs « Delta-ensembles » (voire « Δ-ensembles ») les ensembles semi-simpliciaux, ce qui peut s'avérer conflictuel avec le fait que la catégorie Δ définie ci-dessus est la brique élémentaire des ensembles simpliciaux. Pour faire simple, dans ces notes de cours, on ne parle que d'ensembles simpliciaux (terminologie moderne) tels que définis ci-dessus.

Définition 2.1.4. Plus généralement, un *objet simplicial* dans une catégorie C est un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$. On note $s\mathsf{C}$ la catégorie des objets simpliciaux dans C.

Définition 2.1.5 (Duale)**.** Un *ensemble cosimplicial* est un foncteur covariant $\Delta \to \mathsf{Set}$, la catégorie correspondante est notée $c\mathsf{Set}$. On définit aussi la catégorie $c\mathsf{C}$ des objets cosimpliciaux dans une catégorie donnée.

Exemple 2.1.6. Par le Lemme de Yoneda, pour $n \geq 0$ fixé, on a un ensemble simplicial « canonique », le n-simplexe standard $\Delta^n_\bullet$, défini par :

$$\Delta^n_k = \mathrm{Hom}_\Delta([k],[n]).$$

On note par ailleurs que $\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n_\bullet, X_\bullet) \cong X_n$ (toujours le Lemme de Yoneda). On en déduit alors que

$$X_\bullet \cong \operatorname{colim}_{f:\Delta^n_\bullet \to X_\bullet} \Delta^n_\bullet.$$

Exemple 2.1.7. On remarque que $\Delta^\bullet_\bullet$ définit un objet cosimplicial dans les ensembles simpliciaux. Donnons un exemple d'espace cosimplicial qui y ressemble. On définit :

$$\mathbb{A}^n := \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

Les cofaces et les codégénérescences sont données par :

$$\partial^i(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_n),$$
$$\sigma^j(t_0, \dots, t_n) = (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_n)$$

On voit par exemple que $\mathbb{A}^0$ est un point, $\mathbb{A}^1 = [0,1]$, $\mathbb{A}^2$ est un triangle, etc. Les cofaces sont les inclusions des faces de codimension 1, alors que les codégénérescences « écrasent » une dimension.

Définition 2.1.8. Soit X un ensemble simplicial. Un simplexe $x \in X_n$ est dit *dégénéré* si $x = s_i(y)$ avec $y \in X_{n-1}$. Dans le cas contraire, il est dit *non-dégénéré*.

Lemme 2.1.9. *Soit $w \in X_n$ un simplexe. Alors il existe une unique paire (y, s) où $y \in X_m$ est un simplexe non-dégénéré et $s = \sigma^*$ est une dégénérescence induite par une surjection $\sigma : \Delta^n \to \Delta^m$.*

Démonstration. Soit $w = s_{i_0} s_{i_1} \dots s_{i_k}(x) = s_{j_0} s_{j_1} \dots s_{j_l}(y)$ un simplexe dégénéré avec $x \in X_a, y \in X_b$ non-dégénéré. Montrons que $x = y$. Grâce aux identités simpliciales,

$$x = d_{i_k} \dots d_{i_0}(w) = d_{i_k} \dots d_{i_0} s_{j_0} \dots s_{j_l}(y).$$

En utilisant les identités simpliciales, on fait passer tous les s à gauche des d et on obtient $x = s_{u_0} \dots s_{u_m} d_{v_1} \dots d_{v_n}(y)$. Or x est non-dégénéré, donc $m = 0$ et $x = d_{v_1} \dots d_{v_n}(y)$. En particulier, $a = b - n \leq b$. Par symétrie, on trouve aussi que $b \leq a$, d'où $a = b$. En reprenant l'égalité ci-dessus, on en déduit $x = y$ (il ne peut pas y avoir de $d_{\dots}$). □

2.2. Adjonction avec les espaces topologiques

On rappelle l'espace cosimplicial standard :

$$\mathbb{A}^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \mid t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Définition 2.2.1. Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. Sa *réalisation géométrique* est l'espace topologique quotient :

$$|X_\bullet| := \left(\bigsqcup_{n \geq 0} X_n \times \mathbb{A}^n \right) / \sim,$$

où la relation d'équivalence est donnée par

$$(d_i(x), t) \sim (x, \partial^i(t)), \qquad (s_j(x), t) \sim (x, \sigma^j(t)).$$

Définition 2.2.2. Soit Y un espace topologique. Son *ensemble (simplicial) singulier* est donné par :

$$S_\bullet(Y) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{A}^\bullet, Y),$$

avec les faces et les dégénérescences induites par $\mathbb{A}^\bullet$.

Proposition 2.2.3. ($\circlearrowleft$) *La réalisation géométrique et l'ensemble singulier définissent une adjonction :*

$$|-| : s\mathsf{Set} \leftrightarrows \mathsf{Top} : S_\bullet.$$

Démonstration. Il est clair que $|-|$ et $S_\bullet$ définissent des foncteurs. Montrons qu'ils sont adjoints en définissant des bijections naturelles

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(|X_\bullet|, Y) \leftrightarrows \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(X, S_\bullet(Y)) : \psi.$$

- Soit $f : X_\bullet \to S_\bullet(Y)$ une application simplicial. Nous avons donc des applications $f_n : X_n \to S_n(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{A}^n, Y)$ qui commutent avec les faces et les dégénérescences. Nous allons définir une application continue $\psi(f) : |X_\bullet| \to Y$. On commence par définir une application continue

  $$\coprod_{n \geq 0} X_n \times \mathbb{A}^n \to Y$$

  et on montrera qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence. Concrètement, si $(x, t) \in X_n \times \mathbb{A}^n$, on lui associe $f_n(x)(t)$. Cette application est bien continue, et on vérifie aisément la compatibilité avec la relation d'équivalence (car f commute avec d_i et s_j).
- Soit $g : |X_\bullet| \to Y$ une application continue. On définit $\varphi(h) : X_\bullet \to S_\bullet(Y)$ de la façon suivante. Pour $x \in X_n$, on définit $\varphi(h)_n(x) : \mathbb{A}^n \to Y$ par $\varphi(h)_n(x) : t \mapsto h([x, t])$. On vérifie sans peine que $\varphi(h)_n(x)$ est continue et que $\varphi(h)$ est simpliciale.

On vérifie également sans peine que φ et ψ sont naturelles et inverses l'une de l'autre. $\square$

Exemple 2.2.4. Soit E un ensemble. On définit l'ensemble simplicial constant $E_\bullet$ par $E_n = E$, et toutes les faces et dégénérescences sont des identités. Alors $|E_\bullet|$ est simplement E vu comme un espace discret.

Exemple 2.2.5. Grâce au lemme de Yoneda, $|\Delta^n| = \mathbb{A}^n$.

Exemple 2.2.6 (Exercice). Décrire l'unique ensemble simplicial qui possède exactement deux simplexes non-dégénérés en dimensions respectives 0 et 1. Montrer que sa réalisation géométrique est un cercle.

Remarque 2.2.7. On pourrait remplacer $\mathbb{A}^\bullet$ par n'importe quel espace cosimplicial et on obtiendrait une adjonction. Plus généralement, étant donné une catégorie cocomplète C et un objet cosimplicial $A^\bullet \in c\mathsf{C}$, on obtient une adjonction $s\mathsf{Set} \leftrightarrows \mathsf{C}$.

2.3. Bords, cornets, squelettes

Dans cette section, nous allons décrire quelques sous-ensembles simpliciaux de Δ^n qui vont s'avérer utiles pour la suite.

Définition 2.3.1. Soit $\mathrm{id}_{[n]} = v_n \in \Delta^n_n$ le seul simplexe non-dégénéré. Le *bord* du simplexe standard $\partial\Delta^n_\bullet \subset \Delta^n_\bullet$ est le plus petit sous-ensemble simplicial qui contient toutes les faces $d_i v_n$ $(0 \le i \le n)$. Concrètement,

$$\partial\Delta^n_i = \{f : [i] \to [n] \mid f \text{ n'est pas surjective}\} \subset \Delta^n_i.$$

On définit aussi (par convention) $\partial\Delta^0 = \emptyset$.

Définition 2.3.2. Soit $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$. Le *kième cornet* $(\Lambda^n_k)_\bullet \subset \Delta^n_\bullet$ est le plus petit sous-ensemble simplicial qui contient les faces $d_i v_n$ pour $i \neq k$. Concrètement, $(\Lambda^n_k)_i$ est composé des applications croissantes $[i] \to [n]$ dont l'image ne contient pas $[n] - \{r\}$.

Lemme 2.3.3. (♂) *On a des identifications :*

$$\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Lambda^n_k, X) = \{(y_0, \dots, \hat{y}_k, \dots, y_n) \in (X_{n-1})^{\times n} \mid d_i y_j = d_{j-1} y_i,\ \forall i < j\},$$

$$\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\partial\Delta^n, X) = \{(y_0, \dots, y_n) \in (X_{n-1})^{\times n+1} \mid d_i y_j = d_{j-1} y_i,\ \forall i < j\}.$$

Définition 2.3.4. Soit $X_\bullet \in s\mathrm{Set}$ un ensemble simplicial et $n \geq 0$ un entier. Son *n-squelette* $\mathrm{sk}_n X_\bullet$ est le plus petit sous-ensemble simplicial de $X_\bullet$ qui contient tout les simplexes non-dégénérés de dimension $\leq n$.

Définition 2.3.5. On note $i_n : \Delta_{\leq n} \hookrightarrow \Delta$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les $[k]$ avec $k \leq n$. La catégorie des ensembles simpliciaux n-tronqués $s_{\leq n}\mathrm{Set}$ est la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\Delta^{\mathrm{op}}_{\leq n}, \mathrm{Set})$.

Lemme 2.3.6. (♂) *La construction* sk_n *définit un foncteur* $\mathrm{sk}_n : s\mathrm{Set} \to s_{\leq n}\mathrm{Set}$.

Proposition 2.3.7. (♂) *Le foncteur de restriction* $i_{n*} : s\mathrm{Set} \to s_{\leq n}\mathrm{Set}$ *a un adjoint à droite* i^*_n. *Il y a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{sk}_n X \cong i^*_n i_{n*} X.$$

Remarque 2.3.8. Ce foncteur a également un adjoint à gauche $i^!_n$, et $i^!_n i_{n*}$ est isomorphe au foncteur « cosquelette ».

Lemme 2.3.9. (♂) *Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial. Les k-simplexes de* $\mathrm{sk}_n X_\bullet$ *sont $x \in X_k$ tels qu'il existe une surjection $\sigma : \Delta^k \to \Delta^l$ (où $l \leq n$) et un simplexe non-dégénéré $y \in X_l$ avec $x = \sigma^* y$.*

Corollaire 2.3.10. *L'application canonique* $\mathrm{colim}_{n \geq 0} \mathrm{sk}_n X \to X$ *est un isomorphisme d'ensembles simpliciaux.*

Corollaire 2.3.11. *Soit $n \geq 0$. Le bord $\partial\Delta^n$ est le $(n-1)$-squelette de Δ^n : $\partial\Delta^n = \mathrm{sk}_{n-1}\Delta^n$.*

Proposition 2.3.12. ($\circlearrowleft$) *Le bord $\partial\Delta^n$ est donné comme le coégalisateur :*

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{0\leq i\leq n} \Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n$$

correspondant à la relation $d^j d^i = d^i d^{j-1}$.

Remarque 2.3.13. On peut se servir de ce résultat pour définir le squelette par récurrence : il y a un diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in X_n \text{ non-dégén.}} \partial\Delta^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathrm{sk}_{n-1} X \arrow[d, hook] \\
\coprod_{x\in X_n \text{ non-dégén.}} \Delta^n \arrow[r, hook] & \mathrm{sk}_n X.
\end{tikzcd}$$

On peut également définir les cornets de cette manière :

Proposition 2.3.14. ($\circlearrowleft$) *Le kième cornet Λ^n_k est donné comme le coégalisateur :*

$$\coprod_{\substack{0\leq i<j\leq n\\ i,j\neq k}} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{\substack{0\leq i\leq n\\ i\neq k}} \Delta^{n-1} \to \Lambda^n_k.$$

2.4. Structure de modèle

Nous allons définir une structure de modèles sur sSet telle que l'adjonction précédente est une équivalence de Quillen. Les définitions des équivalences faibles et des fibrations ressemblent à celles des équivalences faibles d'homotopie et des fibrations de Serre.

Définition 2.4.1. Une *fibration de Kan* est une application simplicial $p : X \to Y$ qui a la RLP par rapport à toutes les inclusions $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\
\Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y
\end{tikzcd}$$

Définition 2.4.2. Un *complexe de Kan* est un ensemble simplicial X telle que l'unique application vers l'ensemble simplicial terminal $X \to *$ est une fibration de Kan.

Concrètement, un morphisme est une fibration de Kan si pour tout simplexe $y \in Y_n$ et pour tout n-uplet $z_0, \dots, \hat{z}_k, \dots, z_n \in X_{n-1}$ vérifiant $p(z_i) = d_i(y)$ et $d_i z_j = d_{j-1} z_i$ $\forall i < j$, alors il existe $x \in X_n$ tel que $p(x) = y$ et $d_i(x) = z_i$. Géométriquement, on peut « remplir » le cornet.

Lemme 2.4.3 (Exercice)**.** *Une application continue $p : X \to Y$ est une fibration de Serre si et seulement si $S_\bullet(p)$ est une fibration de Kan.*

Remarque 2.4.4. Tous les ensembles simpliciaux ne sont pas des complexes de Kan. Par exemple, Δ^n n'en est pas un pour $n \geq 2$. Considérons le cornet $(-, y_1, y_2) : \Lambda^2_0 \to \Delta^2$ où $y_1 = 0 \to 2 \in \Delta^2_1$ et $y_2 = 0 \to 1 \in \Delta^2_1$. Alors il n'existe pas de $x \in \Delta^2_2$ tel que $d_1 x = y_1$ et $d_2 x = y_2$. On aurait nécessairement $x = 0 \to 2 \to 1$, qui n'est pas croissante.

Théorème 2.4.5 (Quillen [**Quillen1967**])**.** *Il existe une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée et combinatoire sur s*Set*, appelée* structure de Quillen *où :*

- *les équivalences faibles sont les applications simpliciales $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ telles que $|f| : |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$ est une équivalence d'homotopie faible ;*
- *les fibrations sont les fibrations de Kan ;*
- *les cofibrations sont les inclusions.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons appliquer le Théorème 1.5.26 sur les catégories de modèles cofibrement engendrées. Commençons par noter que les limites et les colimites sont simplement définies degré par degré. On choisit comme cofibrations génératrices et cofibrations acycliques génératrices :

$$\mathcal{I} = \{\partial\Delta^n \subset \Delta^n\}_{n\geq 0}, \quad \mathcal{J} = \{\Lambda^n_k \subset \Delta^n\}_{n\geq 1}.$$

On a bien par définition que $\mathcal{F} = \mathcal{J}^\perp$. Par ailleurs, les sources des morphismes de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont bien petits par rapport à tout ensemble simplicial (grâce aux descriptions de $\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\partial\Delta^n, -)$ et $\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Lambda^n_k, -)$).

Vérifions que les cofibrations sont les bonnes.

Lemme 2.4.6. *Une application simpliciale est injective si et seulement si elle est dans ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. De plus toute cofibration est dans $\mathcal{I}$-cell.*

Démonstration. Montrons d'abord que les applications de ${}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ sont injectives. Grâce à l'argument du petit objet, $f : X \to Y \in {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$ se factorise en $p_\infty i_\infty$ où $i_\infty \in \mathcal{I}$-cell et $p_\infty = \mathcal{I}^\perp$ (donc c'est une fibration de Kan). En particulier f a la LLP par rapport à p_∞ et on a vu précédemment qu'en conséquence, f était un rétract de i_∞. L'application i_∞ est obtenu comme composée transfinie de poussés en avant d'injections. Or, dans Set les injections sont toujours scindées (toute injection admet un inverse à droite) et les monomorphismes scindés sont stables par poussés en avant et composition transfinies. Donc i_∞ est une injection.

Réciproquement, supposons que $i : A \to X$ est injective et montrons que c'est une composée dénombrable de poussés en avant de coproduits d'applications de $\mathcal{I}$ et que donc $i \in \mathcal{I}$-cell $\subset {}^\perp(\mathcal{I}^\perp)$. Posons $A_{(0)} = A$. Supposons que l'on a défini une injection $i_k : A_{(k)} \to X$ qui est un isomorphisme sur les simplexes de dimension $< k$ et étendons-là en une injection $A_{(k+1)} \to X$ de même type. Soit S_k l'ensemble des k-simplexes de X

qui ne sont pas dans l'image de i_k (ils ne peuvent pas être dégénérés), que l'on met en correspondance avec des applications $\Delta^k \to X$. Pour $s \in S_k$, la restriction de s à $\partial\Delta^k$ se factorise par $A_{(k)}$. On définit alors $A_{(k+1)}$ comme le poussé en avant :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{s\in S_k} \partial\Delta^k \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A_{(k)} \arrow[d, dashed] \\ \coprod_{s\in S_k} \Delta^k \arrow[r, dashed] & A_{(k+1)}. \end{tikzcd}$$

L'application induite $A_{(k+1)} \to X$ est surjective en dimension $\leq k$ par construction. Elle est de plus injective, car on ne rajoute que des simplexes non-dégénérés. $\square$

Lemme 2.4.7. *Un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire relatif est une cofibration acyclique : $\mathcal{J}$-cell $\subset \mathcal{W} \cap {}^{\perp}(\mathcal{J}^{\perp})$.*

Démonstration. Les morphismes de $\mathcal{J}$ sont des injections, c.à.d. ils sont dans ${}^{\perp}(\mathcal{I}^{\perp})$. Une classe du type ${}^{\perp}(\dots)$ est stable par poussés en avant, donc $\mathcal{J}$-cell $\subset {}^{\perp}(\mathcal{I}^{\perp})$.

La réalisation géométrique de $\Lambda^n_k \to \Delta^n$ est isomorphe à $[0,1]^{n-1} \subset [0,1]^n$, donc $|\mathcal{J}|$ est l'ensemble des cofibrations acycliques de Top. Or la réalisation géométrique est un adjoint à gauche donc $|{}^{\perp}(\mathcal{J}^{\perp})| \subset {}^{\perp}(|\mathcal{J}|^{\perp})$ (exercice), or ${}^{\perp}(|\mathcal{J}|^{\perp})$ est exactement formé par les cofibrations acyclique de Top. En particulier ce sont des équivalences d'homotopie faibles, donc par définition ${}^{\perp}(\mathcal{J}^{\perp}) \subset \mathcal{W}$. On en déduit donc que $\mathcal{J}$-cell $\subset {}^{\perp}(\mathcal{J}^{\perp}) \subset \mathcal{W}$. $\square$

Lemme 2.4.8. *Les éléments de $\mathcal{I}^{\perp}$ sont des fibrations de Kan acycliques.*

Démonstration. Soit $p : X \to Y \in \mathcal{I}^{\perp}$. On a montré qu'alors p a la RLP par rapport à toutes les inclusions. En particulier elle a la RLP part rapport à $\mathcal{J}$, c.à.d. $p \in \mathcal{J}^{\perp}$, donc par définition c'est une fibration de Kan. Reste à montrer que $|p|$ est une équivalence d'homotopie faible. Comme p a la RLP par rapport à toutes les inclusions, on peut trouver un relèvement :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "(\mathrm{id}_X, p)"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \times Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[ur, dashed, "l"] & Y \end{tikzcd}$$

Et donc p est un rétract de p_Y :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "p"] & X \times Y \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

En particulier, $|p|$ est un rétract de $|p_Y|$, qui est une fibration de Serre, donc $|p|$ aussi. Notons $F = \Delta^0 \times_Y X$ la fibre de p ; on veut montrer que $|F|$ est contractile. Comme p a la RLP par rapport à $\mathcal{J}$ et que $F \to \Delta^0$ est un tiré en arrière de p, alors $F \to \Delta^0$ aussi. Donc $F \to \Delta^0$ a la RLP par rapport à toutes les inclusions. En particulier, F est non vide ; soit $f \in F_0$ un 0-simplexe, et $f : F \to F$ l'application constante égale à f. Alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \times \partial\Delta^1 \arrow[r, "(\mathrm{id}, f)"] \arrow[d, hook] & F \arrow[d] \\ F \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "H"] & \Delta^0 \end{tikzcd}$$

où l'on peut trouver un relèvement, qui est une homotopie entre $\mathrm{id}_{|F|}$ et une application constante. On en déduit que F est contractile, donc par la LES en homotopie, $|p|$ est une équivalence d'homotopie faible, donc p est une équivalence faible. □

Lemme 2.4.9. *Les fibrations acycliques sont dans $\mathcal{J}^{\perp}$.*

Démonstration. C'est le point-clé de la preuve, et le plus difficile. La preuve repose sur la théorie des fibrations minimales et des extensions anodines. On pourra se référer au [**GoerssJardine1999**] pour le cas où on a une fibration acyclique entre objets fibrants, et au [**GoerssJardine1999**] pour le cas d'une fibration acyclique quelconque. □

Démonstration du Théorème 2.4.5. On vient de vérifier toutes les hypothèses du Théorème 1.5.26, donc sSet admet une structure de catégories de modèles cofibrement engendrée. De plus, sSet est combinatoire car $\{\Delta^n, \partial\Delta^n\}$ est un ensemble de petits générateurs. □

2.5. Équivalence avec Top

Théorème 2.5.1 (Équivalence de Quillen entre sSet et Top)**.** *L'adjonction $|-| : s\mathrm{Set} \leftrightarrows \mathrm{Top} : S_\bullet$ de la Proposition 2.2.3 est une équivalence de Quillen.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire un petit détour par l'enrichissement de sSet dans elle-même et par les groupes d'homotopie simpliciaux.

2.5.1. Enrichissement

Nous allons également avoir besoin du fait que la catégorie sSet est *enrichie* sur elle-même. Cela signifie que l'on peut étendre $\mathrm{Hom}_{sSet}(A, X)$ en un ensemble simplicial dont les sommets sont exactement les applications simpliciales $A \to X$. (La catégorie sSet est donc un exemple de catégorie simplicial, voir Section 4.3). Les arêtes correspondront aux homotopies entre applications.

Définition 2.5.2. Soit A, X deux ensembles simpliciaux. On définit *l'espace des applications simpliciales* $\mathrm{Map}_\bullet(A, X)$ par :

$$\mathrm{Map}_n(A, X) = \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times \Delta^n, X).$$

Sa structure simpliciale est induite par la structure cosimpliciale de $\Delta^\bullet$.

Lemme 2.5.3. *On a un isomorphisme naturel* $\mathrm{Map}_\bullet(\Delta^0, X) \cong X_\bullet$.

Démonstration. C'est essentiellement le Lemme de Yoneda. En effet, $\Delta^0 \times \Delta^n \cong \Delta^n$. On a donc :

$$\mathrm{Map}_n(\Delta^0, X) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Delta^n, X) \cong X_n.$$

On vérifie aisément que cet isomorphisme est compatible avec les faces et les dégénérescences. □

Lemme 2.5.4. *On a un isomorphisme naturel en* (A, B, X) *:*

$$\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X)) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X).$$

En termes savants, on dit que sSet est une catégorie sSet-enrichie cartésienne fermée.

Démonstration. Définissons une application $\psi : \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X)) \to \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X)$. Pour $f : A \to \mathrm{Map}(B, X)$, on pose :

$$\psi(f) : A_n \times B_n \to X_n, \qquad (a, b) \mapsto \underbrace{f(a)}_{\in \mathrm{Map}_n(B,X) = \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(B \times \Delta^n, X)}(b, \mathrm{id}_{[n]}).$$

Vérifions que $\psi(f)$ est une application simpliciale. On le vérifie pour les faces, la preuve pour les dégénérescences est identique.

- D'une part, on a $d_i(\psi(f)(a, b)) = d_i(f(a)(b, \mathrm{id}_{[n]}))$. Or $f(a) : B \times \Delta^n \to X$ est simpliciale, donc $d_i(f(a)(b, \mathrm{id}_{[n]})) = f(a)(d_i(b), \partial^i)$ où $\partial^i \in \Delta^n_{n-1}$.
- D'autre part, $\psi(f)(d_i a, d_i b) = f(d_i a)(d_i b, \mathrm{id}_{[n-1]})$. On f est une application simpliciale, donc $f(d_i a)(d_i b, \mathrm{id}_{[n-1]}) = f(a)(d_i b, \partial^i \circ \mathrm{id}_{[n-1]})$. On a bien l'égalité.

Réciproquement, on définit $\varphi : \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A \times B, X) \to \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, \mathrm{Map}(B, X))$ de la manière suivante. Pour $g : A \times B \to X$, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi(g)_n : A_n &\to \mathrm{Map}_n(B, X), \\ a &\mapsto \begin{cases} B_k \times \Delta^n_k \to X_k, \\ \quad (b, u) \mapsto g_k(u^*(a), b). \end{cases} \end{aligned}$$

Il reste à vérifier (exercice) que $\varphi(g)(a)$ est une application simpliciale $B \times \Delta^n \to X$, que $\varphi(g)$ est une application simpliciale $A \to \mathrm{Map}(B, X)$ et enfin que φ et ψ sont inverses l'une de l'autre. □

Nous allons maintenant montrer que Map se comporte bien par rapport à la structure de modèle. Nous allons utiliser le lemme suivant quand on s'intéressera aux groupes d'homotopie simpliciaux.

Soit $i : A \to B$ et $p : X \to Y$ deux applications simpliciales, alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(B,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Map}(B,Y) \arrow[d, "i^*"] \\ \mathrm{Map}(A,X) \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Map}(A,Y) \end{tikzcd}$$

qui induit une application canonique

$$(i^*, p_*) : \mathrm{Map}(B,X) \to \mathrm{Map}(A,X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B,Y). \tag{2.5.5}$$

Proposition 2.5.6. *Soit $i : A \hookrightarrow B$ une cofibration et $p : X \twoheadrightarrow Y$ une fibration. Alors le morphisme canonique (i^*, p_*) de l'Équation (2.5.5) est une fibration. Si de plus i ou p est acyclique, alors (i^*, p_*) est acyclique.*

Lemme 2.5.7. *Soit $i : A \xhookrightarrow{\sim} B$ une cofibration acyclique et $j : K \hookrightarrow L$ une cofibration. Alors*

$$i \,\square\, j : (K \times B) \cup_{K \times A} (L \times A) \to L \times B$$

est une cofibration acyclique.

On peut déjà démontrer la Proposition 2.5.6 et un corollaire grâce à ce lemme.

Démonstration de la Proposition 2.5.6. Il faut montrer que (i^*, p_*) a la RLP par rapport aux inclusions $\Lambda^n_k \xhookrightarrow{\sim} \Delta^n$. Or, un diagramme du type de gauche est équivalent à un diagramme du type de droite :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & \mathrm{Map}(B,X) \arrow[d, "(i^*,p_*)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathrm{Map}(A,X) \times_{\mathrm{Map}(A,Y)} \mathrm{Map}(B,Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\Lambda^n_k \times B) \cup_{\Lambda^n_k \times A} (\Delta^n \times A) \arrow[r] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ \Delta^n \times B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Or $\Lambda^n_k \xhookrightarrow{\sim} \Delta^n$ est une cofibration acyclique et $A \subset B$ est une cofibration, donc j est une cofibration acyclique par le Lemme 2.5.7. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme de droite, qui correspond à un relèvement dans le diagramme de gauche.

Pour montrer que (i^*, p_*) est acyclique si i ou p l'est, on remplace $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$ par $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ et on adapte. □

Corollaire 2.5.8. *Si $i : A \xhookrightarrow{\sim} B$ une cofibration acyclique et X un ensemble simplicial fibrant, alors* $\mathrm{Map}(B,X) \to \mathrm{Map}(A,X)$ *est une fibration acyclique. Dualement, si $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ est une cofibration acyclique et A est cofibrant, alors* $\mathrm{Map}(A,X) \to \mathrm{Map}(A,Y)$ *est une fibration acyclique.*

Démonstration. Pour le premier cas, il suffit d'appliquer la proposition précédente à $i : A \to B$ et à $p : X \to *$. On a alors $\mathrm{Map}(A, X) \times_{\mathrm{Map}(A,*)} \mathrm{Map}(B, *) \cong \mathrm{Map}(A, X)$. Le deuxième cas est dual. □

Démonstration du Lemme 2.5.7. On fixe $j : K \hookrightarrow L$. Comme i est une cofibration acyclique, c'est un rétract d'un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire relatif (où $\mathcal{J} = \{\Lambda^n_k \hookrightarrow \Delta^n\}$).

Montrons que la classe des morphismes du type $(-) \square j$ est stable par poussés en avant. Supposons que $D = B \cup_A C$. On veut montrer que l'on a un poussé en avant :

$$\begin{tikzcd} (K \times B) \cup_{K\times A} (L \times A) \arrow[r] \arrow[d] & L \times B \arrow[d] \\ (K \times D) \cup_{K\times C} (L \times C) \arrow[r] & L \times D \end{tikzcd}$$

On remarque que $L \times D = L \times B \cup_{L\times A} L \times D$. De plus, $K \times D = K \times C \cup_{K\times A} K \times B$, donc

$$\begin{aligned} K \times D \cup_{K\times C} L \times C &= (K \times B \cup_{K\times A} K \times C) \cup_{K\times C} L \times C \\ &= K \times B \cup_{K\times A} L \times C, \end{aligned}$$

d'où on en déduit que

$$\begin{aligned} (K \times D \cup_{K\times C} L \times C) \cup_{K\times B\times_{K\times A} L\times A} L \times B &= (K \times B \cup_{K\times A} L \times C) \cup_{K\times B\times_{K\times A} L\times A} L \times B \\ &= L \times C \cup_{L\times A} L \times B = L \times D \end{aligned}$$

(où l'on a utilisé que $K \subset L$ est une inclusion dans le passage à la dernière ligne).

Soit maintenant $i : \Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$ une cofibration acyclique génératrice. Montrons que

$$i \square j : K \times \Delta^n \cup_{K\times\Lambda^n_k} L \times \Lambda^n_k \to L \times \Delta^n$$

est une cofibration acyclique.

Lemme 2.5.9. *Les cofibrations acycliques génératrices $i : \Lambda^n_k \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^n$ sont des rétracts d'applications du type $\mathcal{J} \square f$ où $f : \Lambda^1_\varepsilon \overset{\sim}{\hookrightarrow} \Delta^1$ est une inclusion pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. Voire Figure 2.1. Soit d'abord $k < n$. On construit un diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & (\Lambda^n_k \times \Delta^1) \cup_{\Lambda^n_k\times\{0\}} (\Delta^n \times \{0\}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \Lambda^n_k \arrow[d, hook, "\sim"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\sigma"] & \Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "r_k"] & \Delta^n \end{tikzcd}$$

L'application σ est induite par l'application $[n] \to [n] \times [1]$, $j \mapsto (j, 1)$. L'application r_k est induite par l'application $[n] \times [1] \to [n]$ telle que $r_k(j, 1) = j$, $r_k(j, 0) = j$ si $j \leq k$ et $r_k(j, 1) = k$ si $j > k$. Il est clair que $r_k \circ \sigma = \mathrm{id}$ et que les applications se restreignent bien comme sur le diagramme.

Si $k = n$, on pose à la place $\sigma'(j) = (j, 0)$ et $r'(j, 0) = j$, $r'(j, 1) = n$. □

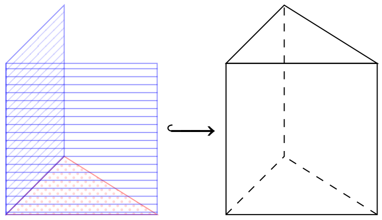


Fig. 2.1. : Inclusion $(\Lambda^n_k \times \Delta^1) \cup_{\Lambda^n_k \times \{0\}} (\Delta^n \times \{0\}) \subset \Delta^n \times \Delta^1$ pour $n = 2$

On déduit de ce lemme qu'une application est une cofibration acyclique si et seulement si c'est un complexe $(\mathcal{J} \,\square\, \{f_0, f_1\})$-cellulaire où $f_\varepsilon = \Lambda^1_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \Delta^1$. En utilisant la stabilité par rétracts et poussés en avant des classes $(-) \,\square\, (-)$, pour conclure il suffit donc de démontrer que $i \,\square\, \square j \,\square\, f_0$ et $i \,\square\, j \,\square\, f_1$ sont des cofibrations acycliques pour toute inclusion i et toute cofibration acyclique génératrice $j \in \mathcal{J}$.

On voit facilement que $i \,\square\, j$ est une inclusion. C'est donc un rétract de complexe $\mathcal{I}$-cellulaire relatif, et il nous suffit donc de montrer :

Lemme 2.5.10. *Si $i_n : \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$ est une inclusion génératrice, alors*

$$i_n \,\square\, f_\varepsilon : (\partial\Delta^n \times \Delta^1) \cup_{\partial\Delta^n \times \Lambda^1_\varepsilon} \Delta^n \times \Lambda^1_\varepsilon \to \Delta^n \times \Delta^1$$

est une cofibrations acyclique pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Démonstration. Un k-simplexe de $\Delta^n \times \Delta^1$ est donné par une application croissante $[k] \to [n] \times [1]$. Il y a donc $n + 1$ simplexes non-dégénérés $x_0, \dots, x_n \in (\Delta^n \times \Delta^1)_{n+1}$ donnés par

$$x_j = ((0,0), \dots, (j,0), (j+1,1), \dots, (n,1)).$$

On remarque que $\partial\Delta^n \times \Delta^1$ est engendré par les $d_i x_j$ pour $i \neq j, j+1$ et que $\Delta^n \times \Lambda^1_\varepsilon$ est engendré par $d_0 x_0$ et $d_{n+1} x_n$. L'application $i_n \,\square\, f_\varepsilon$ est donc obtenue en recollant x_0 le long d'un Λ^{n+1}_1, puis x_1 le long d'un Λ^{n+1}_2, etc. À la fin, on trouve que $i_n \,\square\, f_\varepsilon$ est un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire relatif et que c'est donc une cofibration acyclique. □

Si l'on récapitule :

- les applications $i_n \,\square\, j \,\square\, f_\varepsilon$ sont des cofibrations acycliques pour $i_n \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$, $f_\varepsilon : \Lambda^1_\varepsilon \xrightarrow{\sim} \Delta^1$;

- donc toutes les applications $i \,\square\, j \,\square\, f_\varepsilon$ sont des cofibrations acycliques pour une cofibration $i, j \in \mathcal{J}$;

- or, toutes les cofibrations acycliques sont des complexes $(\mathcal{J} \,\square\, \{f_0, f_1\})$-cellulaires ;

- donc toutes les applications $i \,\square\, j$ sont des cofibrations acycliques pour une cofibration i et une cofibration acyclique j. □

2.5.2. Groupes d'homotopie simpliciaux

Explicitons la relation d'homotopie (à gauche) dans $s\mathrm{Set}$. Si A est un ensemble simplicial, un cylindre naturel est donné par $A \sqcup A = A \times \partial\Delta^1 \hookrightarrow A \times \Delta^1 \xrightarrow{\sim} A$. On en déduit la définition suivante :

Définition 2.5.11. Deux applications simpliciales $f, g : A \to X$ sont *homotopes* (à gauche) s'il existe $h : A \times \Delta^1 \to X$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A = A \times \Delta^0 \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times \Delta^1 \arrow[r, "h"] & X \\
A = A \times \Delta^0 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

On sait déjà que si X est fibrant, cela donne une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, X)$. On peut raffiner légèrement cette notion.

Définition 2.5.12. Soit A un ensemble simplicial et $B \subset A$ un sous-ensemble simplicial. Deux applications simpliciales $f, g : A \to X$ dont les restrictions à B coïncident sont *homotopes relativement à* B s'il existe une homotopie h comme ci-dessus satisfaisant $h_{|B\times\Delta^1}(b, w) = f(b) = g(b)$.

Il n'est pas difficile de voir que si X est fibrant, cela induit une relation d'équivalence sur $\{f \in \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(A, X) \mid f_{|B} = \varphi\}$ pour $\varphi : B \to X$ fixé.

Définition 2.5.13. Soit $X_\bullet$ un ensemble simplicial fibrant, $v \in X_0$ un sommet et $n \geq 1$. Le *nième groupe d'homotopie simplicial* $\pi_n(X_\bullet, v)$ est l'ensemble des applications $\Delta^n_\bullet \to X_\bullet$ qui sont constamment égales à v sur $\partial\Delta^n$, modulo la relation d'homotopie rel $\partial\Delta^n$.

Remarque 2.5.14. Si on définit $S^n = \partial\Delta^{n+1}$, alors $\pi_n(X, v)$ est l'ensemble des classes d'homotopie pointée des applications pointées $\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}_*}(S^n, X)/\sim$.

Définition 2.5.15. On définit aussi $\pi_0(X_\bullet)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $\Delta^0 \to X$ (c.à.d. les sommets de X modulo la relation « être relié par un chemin »).

Remarque 2.5.16 (Exercice). Concrètement, $\pi_0(X)$ est le quotient de X_0 par la relation suivante :

$$x \sim y \iff \exists e \in X_1 \text{ tel que } d_0 e = x \text{ et } d_1 e = y.$$

Remarque 2.5.17. Si jamais X n'est pas fibrant, on définit $\pi_n(X, v)$ et $\pi_0(X)$ en remplaçant d'abord X par un ensemble simplicial fibrant. En d'autres termes, on considère le foncteur total dérivé à gauche de π_n.

Proposition 2.5.18. *Soit X un ensemble simplicial fibrant, $v \in X_0$ un sommet et $n \geq 1$ un entier. Alors $\pi_n(X, v)$ est un groupe, qui est abélien pour $n \geq 2$.*

Démonstration. Soit $\alpha, \beta : \Delta^n \to X$ deux applications qui représentent des classes dans $\pi_n(X, v)$. On définit $[\alpha] \cdot [\beta] \in \pi_n(X, v)$ de la façon suivante. On construit une application $\gamma : \Lambda^{n+1}_n \to X$ en posant $\gamma_i = v$ pour $0 \leq i \leq n-1$, $\gamma_n = \alpha$ et $\gamma_{n+1} = \beta$. (En notation compacte : $\gamma = (v, \dots, v, -, \alpha, \beta)$.) On a bien $d_i \gamma_j = d_{j-1}\gamma_i$. On peut donc trouver une extension $\omega : \Delta^{n+1} \to X$ vérifiant $d_i \omega = \gamma_i$. On pose alors $[\alpha] \cdot [\beta] := [d_n \omega]$.

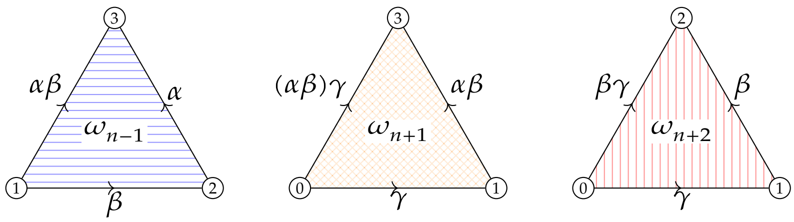
Montrons que cette opération est associative. Le reste des propriétés se prouve exactement comme dans Top (exercice). Soit $\alpha, \beta, \gamma : \Delta^n \to X$ des applications représentant des éléments de $\pi_n(X, v)$. On peut trouver des simplexes $\omega_{n-1}, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}
\partial\omega_{n-1} &= (v, \dots, v, \alpha, d_n\omega_{n-1}, \beta), \\
\partial\omega_{n+1} &= (v, \dots, v, d_n\omega_{n-1}, d_n\omega_{n+1}\gamma), \\
\partial\omega_{n+2} &= (v, \dots, v, \beta, d_n\omega_{n+2}, \gamma).
\end{aligned}$$

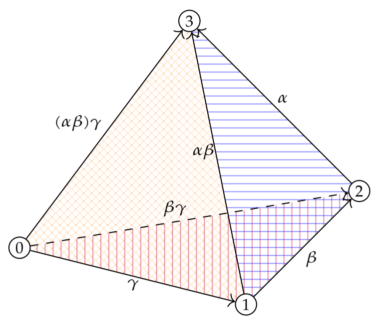
Cela définit une application $(v, \dots, v, \omega_{n-1}, -, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}) : \Lambda^{n+2}_{n+1} \to X$, que l'on étend à Δ^{n+2}. On note ζ la $n$ième face du simplexe trouvé. Alors $\partial\zeta = (v, \dots, v, x, d_n\omega_{n+1}, d_n\omega_{n+2})$, donc :

$$\begin{aligned}
([\alpha][\beta])[\gamma] &= [d_n\omega_{n-1}][\gamma] \\
&= [d_n\omega_{n+1}] \\
&= [d_n\zeta] \\
&= [\alpha][d_n\omega_{n+2}] \\
&= [\alpha]([\beta][\gamma]).
\end{aligned}$$

Avec des dessins, pour $n = 1$:



et :



□

Lemme 2.5.19. *Soit X un ensemble simplicial fibrant. Alors $\pi_0(X) \cong \pi_0(|X|)$.*

Démonstration. On a une application naturelle $\pi_0(X) \to \pi_0(|X|)$ qui envoie un sommet sur la composante connexe par arcs de $|X|$ qui le contient. Elle passe au quotient par définition de $|X|$. Elle est clairement surjective (car $\mathbb{A}^n$ est connexe par arcs). Montrons qu'elle est aussi injective. Pour $\alpha \in \pi_0(X)$, on note X_α le sous-ensemble simplicial formé des simplexes de X dont tous les sommets sont dans α. On vérifie aisément que $X = \bigsqcup_{\alpha \in \pi_0(X)} X_\alpha$. La réalisation géométrique est un adjoint à gauche, donc elle préserve les coproduits. Or le coproduit dans Top est l'union disjointe, donc deux sommets dans des classes différentes de $\pi_0(X)$ différentes sont envoyés dans des composantes connexes différentes de $|X|$. □

Proposition 2.5.20. *Soit X un ensemble simplicial fibrant, $v \in X_0$ un sommet et $n \geq 1$ un entier. Alors $\pi_n(X, v) \cong \pi_n(|X|, |v|)$.*

Démonstration. La preuve fonctionne par récurrence. On vient de démontrer le cas $n = 0$. Supposons maintenant que l'on a montré que $\pi_n(X, v) \cong \pi_n(|X|, |v|)$ pour tout ensemble simplicial fibrant. L'astuce est de traduire le fait que $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_n(X)$ dans le cadre simplicial. On a besoin de quelques lemmes sur les fibrations et les groupes d'homotopie simpliciaux.

Lemme 2.5.21. *Soit $p : X \to Y$ une fibration acyclique entre ensembles simpliciaux fibrants. Alors $\pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ est une bijection, et pour tout $v \in X_0$ et $n \geq 1$, $\pi_n(X, v) \to \pi_n(Y, f(v))$ est un isomorphisme.*

Lemme 2.5.22. *Soit $p : X \to Y$ une fibration de Kan entre ensembles simpliciaux fibrants. Soit $v \in X_0$ un sommet et $F = Y \times_X \{p(v)\}$ la fibre de p. Alors on a une suite exacte longue :*

$$\ldots \to \pi_n(F, v) \to \pi_n(X, v) \to \pi_n(Y, p(v)) \to \pi_{n-1}(F, v) \to \ldots$$

Lemme 2.5.23 (Utile par ailleurs)**.** *La réalisation géométrique d'une fibration de Kan est une fibration de Serre.*

Démonstration. Voir [**Hovey1999**]. □

On peut maintenant finir de démontrer la proposition. Soit $v \in X_0$ fixé. On définit l'espace des chemins en v par le tiré en arrière :

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Map}(\Delta^1, X) \arrow[d, "(d_0^*, d_1^*)"] \\ X \arrow[r, "(v \times \mathrm{id}_X)"] & X \times X \end{tikzcd}$$

On vérifie que $PX \to X \to \{v\}$ est une fibration acyclique, car elle est tirée en arrière de $\mathrm{Map}(\Delta^1, X) \to \mathrm{Map}(\Delta^0, X)$ qui en est une. On en déduit que $\pi_n(PX) = 0$ pour $n > 0$. Posons $\Omega X = PX \times_X \{v\}$; alors la suite exacte longue en homotopie nous dit que $\pi_{n-1}(\Omega X) \cong \pi_n(X)$ pour $n > 0$. Par ailleurs, $|PX| \to *$ est la réalisation géométrique d'une fibration acyclique, et on a vu dans le Lemme 2.4.8 que c'était donc une fibration acyclique, en particulier c'est donc une équivalence faible. Comme $|\pi|$ est une fibration de Serre, on récupère une suite exacte longue, qui donne (combiné avec l'isomorphisme précédent) $\pi_{n-1}(|\Omega X|, |v|) \cong \pi_n(|X|, |v|)$. On conclut par l'hypothèse de récurrence. □

2.5.3. Fin de la preuve

Terminons de démontrer que Top et sSet sont équivalentes de Quillen.

Démonstration du Théorème 2.5.1. La réalisation géométrique des cofibrations génératrices (resp. cofibrations acycliques génératrices) sont des cofibrations (resp. cofibrations acycliques), donc l'adjonction est bien une adjonction de Quillen.

Nous allons utiliser le critère de la Proposition 1.6.16 pour montrer que c'est une équivalence. La première chose à vérifier est le fait que la réalisation géométrique reflète les équivalences faibles, ce qui est le cas par définition. La seconde chose à vérifier est que la counité dérivée est une équivalence faible. Or, tous les ensembles simpliciaux (donc en particulier $S_\bullet(X)$) sont cofibrants, donc la counité dérivée est simplement la counité. Il nous reste donc à montrer que pour un espace topologique quelconque $X \in \mathsf{Top}$ (nécessairement fibrant), $\varepsilon : |S_\bullet(X)| \to X$ est une équivalence d'homotopie faible. En d'autres termes, il faut montrer que $\pi_0(|S_\bullet(X)|) \to \pi_0(X)$ est une bijection et que $\pi_n(|S_\bullet(X)|, |x|) \to \pi_n(X, x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

Or, l'ensemble simplicial $S_\bullet(X)$ est fibrant. En effet, X est évidemment fibrant, c.-à-d. $X \to *$ est une fibration de Serre. Donc par le Lemme 2.4.3, $S_\bullet(X)$ est une fibration de Kan. On a donc $\pi_n(|S_\bullet(X)|, |v|) \cong \pi_n(S_\bullet(X), v)$ par les résultats de la section précédente.

Une classe $[\alpha] \in \pi_n(S_\bullet X, v)$ est représentée par une application simpliciale $\alpha : \Delta^n \to S_\bullet X$ telle que $\alpha(\partial\Delta^n) = v$. Par adjonction, l'ensemble de ces applications est en bijection avec l'ensemble des applications $\bar{\alpha} : \mathbb{\Delta}^n \to X$ qui vérifient $\bar{\alpha}(\partial\mathbb{\Delta}^n) = |v|$. Ces $\bar{\alpha}$ correspondent exactement aux applications continues qui représentent des éléments de $\pi_n(X, x)$. On vérifie par ailleurs que $\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n \times \Delta^1, S_\bullet(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\mathbb{\Delta}^n \times [0,1], X)$, donc les relations d'équivalences sont exactement les mêmes et on a l'isomorphisme voulu. □

2.6. Correspondance de Dold–Kan

Comme mentionné au début du chapitre, on peut définir les objets simpliciaux et cosimpliciaux dans n'importe quelle catégorie C (respectivement comme la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$ et $\Delta \to \mathsf{C}$). On peut par exemple considérer la catégorie Ab des groupes abéliens. Un groupe abélien simplicial $A_\bullet$ n'est rien d'autre qu'une suite de groupes abéliens $\{A_n\}_{n\geq 0}$ munie de morphismes de groupes $d_i : A_n \to A_{n-1}$ et $s_j : A_n \to A_{n+1}$ vérifiant les relations simpliciales.

Théorème 2.6.1 (Dold–Kan [**Dold1958**; **Kan1958**])**.** *La catégorie des groupes abéliens simpliciaux* $s\mathsf{Ab}$ *est équivalente à la catégorie des complexes de chaînes gradués positivement* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Nous allons définir une équivalence de catégories

$$N_* : s\mathsf{Ab} \leftrightarrows \mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z}) : \Gamma_\bullet.$$

Soit $A_\bullet \in s\mathrm{Ab}$ un groupe abélien simplicial. On définit le complexe de chaînes $N_*(A_\bullet)$ des « chaînes normalisées » de la façon suivante. En degré n, $N_n(A_\bullet)$ est le groupe abélien

$$N_n(A_\bullet) := A_n / \coprod_{j=0}^{n-1} s_j(A_{n-1}).$$

La différentielle $d : N_n(A_\bullet) \to N_{n-1}(A_\bullet)$ est donnée par la somme $d = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$. On vérifie que d passe au quotient et que $d \circ d = 0$ grâce aux identités simpliciales.

Remarque 2.6.2. Soit X un espace topologique. Alors le complexe des chaînes singulières de X n'est autre que $N_*(S_\bullet(X))$.

Réciproquement, soit $C_* \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ un complexe de chaînes. On définit le groupe abélien simplicial $\Gamma_\bullet(C_*)$ de la manière suivante. En dimension n, on a :

$$\Gamma_n(C_*) = \bigoplus_{\varphi:[n]\twoheadrightarrow[p]} C_p^{(\varphi)}.$$

Soit $f \in \Delta^n_m$ une application croissante $[m] \to [n]$. Décrivons l'application de structure

$$f^* : \bigoplus_{\varphi:[n]\twoheadrightarrow[p]} C_p^{(\varphi)} \to \bigoplus_{\psi:[m]\twoheadrightarrow[q]} C_q^{(\psi)}$$

sur le facteur correspondant à $\varphi : [n] \twoheadrightarrow [p]$. Le morphisme $\varphi \circ f$ se factorise de manière unique en une surjection suivie d'une injection $[m] \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} [q] \overset{\partial}{\hookrightarrow} [p]$.

- Si $p = q$ (et donc $\partial = \mathrm{id}_{[p]}$), alors f^* envoie $C_p^{(\varphi)}$ sur $C_q^{(\psi)} = C_p^{(\psi)}$.
- Si $p = q + 1$ et $\partial = \partial^p$, alors f^* envoie $C_p^{(\varphi)}$ sur $C_q^{(\psi)} = C_{p-1}^{(\psi)}$ avec la différentielle.
- Dans les autres cas, f^* s'annule sur $C_p^{(\varphi)}$.

Il faut ensuite vérifier que ces deux constructions définissent des foncteurs, et que ces deux foncteurs sont inverses l'un de l'autre (exercice). □

Exemple 2.6.3. Tentons de comprendre $d_2 : \Gamma_2 C \to \Gamma_1 C$. On rappelle que $d_0 = (\partial^0)^*$ où $\partial^0 = 1 \to 2 \in \Delta^2_1$.

- On a $\Gamma_1 C = C_1^{(\psi_1)} \oplus C_0^{(\psi_0)}$ où le premier facteur est indexé par $\psi_1 = 0 \to 1 \in \Delta^1_1$ et le second par $\psi_0 = 0 \to 0 \in \Delta^0_1$.
- On a aussi $\Gamma_2 C = C_2^{(\varphi_2)} \oplus C_1^{(\varphi_1)} \oplus C_1^{(\varphi_1')} \oplus C_0^{(\varphi_0)}$, où les facteurs sont indexés par $\varphi_2 = 0 \to 1 \to 2 \in \Delta^2_2$, $\varphi_1 = 0 \to 1 \to 1 \in \Delta^1_2$, $\varphi_1' = 0 \to 0 \to 1 \in \Delta^1_2$, et $\varphi_0 = 0 \to 0 \to 0 \in \Delta^0_2$.

On peut alors décrire d_2 sur chaque facteur de $\Gamma_2 C$:

– Sur $x \in C_2^{(\varphi_2)}$, on a $\varphi_2 \circ \partial^2 = 0 \to 1 \in \Delta_1^2$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_1} [1] \xrightarrow{\partial^2} [2]$. On a donc $d_2 x = dx \in C_1^{(\psi_1)}$.

– Sur $x \in C_1^{(\varphi_1)}$, on a $\varphi_1 \circ \partial^2 = 0 \to 1 \in \Delta_1^1$. Cette application se factorise encore $[1] \xrightarrow{\psi_1} [1] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[1]}} [1]$, donc $d_2 x = x \in C_1^{(\psi_1)}$.

– Sur $x \in C_1^{\varphi_1'}$, on a $\varphi_1' \circ \partial^2 = 0 \to 0 \in \Delta_1^1$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_0} [0] \xrightarrow{\partial^1} [1]$. On a donc $d_2 x = dx \in C_0^{(\psi_0)}$.

– Sur $x \in C_0^{(\varphi_0)}$, on a $\varphi_0 \circ \partial^2 = 0 \to 0 \in \Delta_0^2$. Cette application se factorise en $[1] \xrightarrow{\psi_0} [0] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[0]}} [0]$, donc $d_2 x = x \in C_0^{(\psi_0)}$.

Avec un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_2 C \arrow[d, "d_2"] & = & C_2^{(\varphi_2)} \arrow[drr, "d"] & \oplus & C_1^{(\varphi_1)} \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \oplus & C_1^{(\varphi_1')} \arrow[d, "d"] & \oplus & C_0^{(\varphi_0)} \arrow[dll, "\mathrm{id}"] \\
\Gamma_1 C & = & & & C_1^{(\psi_1)} & \oplus & C_0^{(\psi_0)} & &
\end{tikzcd}$$

On peut également calculer facilement que $s_0 : \Gamma_1 C \to \Gamma_2 C$ identifie $C_0^{(\psi_0)}$ avec $C_0^{(\varphi_0)}$ et $C_1^{(\psi_1)}$ avec $C_1^{(\varphi_1)}$, tandis que s_1 identifie $C_0^{(\psi_0)}$ avec $C_0^{(\varphi_0)}$ et $C_1^{(\psi_1)}$ avec $C_1^{(\varphi_1')}$.

Théorème 2.6.4 (Quillen [**Quillen1967**])**.** *La catégorie* sAb *admet une structure de catégorie de modèle où les équivalences faibles et les fibrations sont définies en considérant les ensembles simpliciaux sous-jacents, et les cofibrations sont les morphismes ayant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques. Avec cette structure sur* sAb *et la structure projective sur* $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$*, l'adjonction* $N \dashv \Gamma$ *est une équivalence de Quillen.*

On se réfère par exemple à [**GoerssJardine1999**] pour la preuve. Cette équivalence de Quillen a des propriétés sympathiques. Par exemple :

Proposition 2.6.5. *Soit* $A_\bullet$ *un groupe abélien simplicial. Alors on a des isomorphismes pour tout* $n \geq 0$ *:*

$$\pi_n(A, 0) \cong H_n(N_*(A_\bullet)).$$

On peut donc facilement construire un espace de type $K(A, n)$: il suffit de considérer le complexe de chaînes $D^n(A)$ avec $D^n(A)_n = A$ et $D^n(A)_k = 0$ pour $k \neq n$; alors $|\Gamma_\bullet(D^n(A))|$ est un espace topologique de type $K(A, n)$. En jouant avec les adjonctions et le fait que $C_*(X) = C_*(S_\bullet(X))$, on peut également montrer que

$$[X, \ |\Gamma_\bullet(D^n(A))|] \cong H^n(X; A).$$

3. Homotopie rationnelle

La théorie de l'homotopie est une théorie puissante, mais les calculs peuvent s'avérer extrêmement complexes. Par exemple, le calcul des groupes d'homotopie d'espaces simples (p.ex. des sphères) reste à l'heure actuelle une tâche inaccessible.

La théorie de l'homotopie rationnelle offre un compromis entre la calculabilité et la quantité d'information donnée sur un espace. Dans cette théorie, on « oublie » la torsion et la non-commutativité dans les groupes d'homotopie d'un espace. Ce faisant, on perd de l'information (le plan projectif devient contractile sur $\mathbb{Q}$, par exemple) mais on gagne en calculabilité : les groupes d'homotopie rationnelle des sphères sont complètement déterminés, ce qui n'est pas le cas sur $\mathbb{Z}$.

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la théorie de l'homotopie rationnelle de **Sullivan1977**. L'idée est la suivante. On considère pour simplifier des espaces simplement connexes. On peut détecter le fait qu'une application continue $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie faible en considérant les applications induites sur $\pi_*(-)$, ou bien (comme les espaces sont simplement connexes) sur $H_*(-;\mathbb{Z})$. Or, les groupes d'homotopie $\pi_{\geq 2}$ et les groupes d'homomologie $H_*(-;\mathbb{Z})$ sont abéliens, et l'on peut donc les « rationaliser » en appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Cette opération tue la torsion et ne conserve que les rangs des groupes abéliens (s'ils sont de type fini). On peut donc introduire une nouvelle classe « d'équivalences », les équivalences d'homotopie rationelle, qui sont les applications induisant un isomorphisme sur $\pi_*(-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ou de façon équivalente sur $H_*(-;\mathbb{Q})$.

La théorie de l'homotopie rationnelle s'intéresse à la question de savoir quand deux espaces sont rationnellement équivalents. Pour cela, on se pose la question de savoir quels invariants sont préservés par les équivalences d'homotopie rationnelle. Pour diverses raisons, on se restreint aux espaces simplement connexes. La théorie fondatrice de Sullivan donne la réponse : tous les invariants rationnels possibles de X sont contenus dans l'algèbre différentielle-graduée commutative (CDGA) des formes polynomiales par morceaux $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$. Cette CDGA est analogue à celle des formes différentielles de de Rham sur une variété lisse, $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(X)$, cette dernière étant d'ailleurs quasi-isomorphe à $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Plus précisément, le théorème principal de ce chapitre énonce qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur les espaces topologiques simplement connexes dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie rationnelle, et une équivalence de Quillen entre cette catégorie et les CDGA simplement connexes incarnée par le foncteur Ω^*_{PL}.

Convention 3.0.1. Dans tous ce chapitre, le corps de base sera $\mathbb{Q}$.

3.1. Localisation de Bousfield

Dans cette section, on localise $s\mathrm{Set}$ par rapport au corps $\mathbb{Q}$.

Définition 3.1.1. Soit $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ une catégorie de modèles. Une *localisation de Bousfield à gauche* de C est une structure de catégorie de modèles $(\mathsf{C}, \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}, \mathcal{C}_{\mathrm{loc}}, \mathcal{F}_{\mathrm{loc}})$ ayant les mêmes cofibrations ($\mathcal{C}_{\mathrm{loc}} = \mathcal{C}$) et plus d'équivalences faibles ($\mathcal{W}_{\mathrm{loc}} \supset \mathcal{W}$).[1]

Remarque 3.1.2. Étant donné une catégorie de modèles $(\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ et une classe d'équivalences faibles $\mathcal{W}_{\mathrm{loc}} \supset \mathcal{W}$, il n'est pas toujours vrai que la localisation de Bousfield à gauche associée existe. On peut se référer à [**Hirschhorn2003**] pour un exemple de théorème d'existence.

Remarque 3.1.3. Comme les fibrations sont déterminées comme les morphismes ayant la RLP par rapport aux cofibrations acycliques, on en déduit qu'une localisation de Bousfield à gauche a moins de fibrations que la catégorie originelle, $\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{F}$ (car la condition est plus restrictive). En revanche, les fibrations acycliques sont les mêmes ($\mathcal{F}_{\mathrm{loc}} \cap \mathcal{W}_{\mathrm{loc}} = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$) car celles-ci sont données par la RLP par rapport aux cofibrations.

Proposition 3.1.4. *Soit* $\mathsf{C} = (\mathsf{C}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *une catégorie de modèles et* $\mathsf{C}_{\mathrm{loc}} = (\mathsf{C}, \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}, \mathcal{C}, \mathcal{F}_{\mathrm{loc}})$ *une localisation de Bousfield à gauche. Alors* $\mathrm{id}_{\mathsf{C}} : \mathsf{C}_{\mathrm{loc}} \leftrightarrows \mathsf{C} : \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$ *est une adjonction de Quillen, et l'adjonction dérivée* $\mathbb{L}\,\mathrm{id} : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}_{\mathrm{loc}}) \leftrightarrows \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) : \mathbb{R}\,\mathrm{id}$ *exhibe* $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}_{\mathrm{loc}})$ *comme une sous-catégorie réflexive.*[2]

Définition 3.1.5. Un ensemble simplicial $X_\bullet$ est dit 1-*réduit* si $X_0 = X_1 = *$ sont des singletons. On note $s\mathrm{Set}_{\geq 2} \subset s\mathrm{Set}$ la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux 1-réduits.

Remarque 3.1.6. La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial 1-réduit est un espace topologique simplement connexe.

Proposition 3.1.7. *La catégorie* $s\mathrm{Set}_{\geq 2}$ *hérite d'une structure de catégorie de modèles de* $s\mathrm{Set}$.

Démonstration. Il faut vérifier que la construction des factorisations fonctorielles par l'argument du petit objet préserve la sous-catégorie des espaces 1-réduits. □

Théorème 3.1.8 (**Serre1953**)**.** *Soit* $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ *une application simpliciale entre ensembles simpliciaux* 1*-réduits. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $f_* : H_*(|X|; \mathbb{Q}) \to H_*(|Y|; \mathbb{Q})$ *est un isomorphisme ;*
2. $f^* : H^*(|Y|; \mathbb{Q}) \to H^*(|X|; \mathbb{Q})$ *est un isomorphisme ;*
3. $f_* : \pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \pi_*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *est un isomorphisme.*

[1] Une localisation de Bousfield à droite est une structure de catégorie de modèles ayant les mêmes fibrations et plus d'équivalences faibles. Nous n'utiliserons pas cette notion ici.

[2] C'est une sous-catégorie pleine et l'inclusion a un adjoint à gauche.

Définition 3.1.9. Une application simpliciale qui vérifie les conditions de la proposition précédente est appelée une *équivalence rationnelle*. On note $\sim_{\mathbb{Q}}$ les équivalences rationnelles.

Théorème 3.1.10 (Quillen [**Quillen1969**]). *Soit $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}$ la classe des équivalences rationnelles dans $s\mathsf{Set}_{\geq 2}$. Alors la localisation de Bousfield à gauche de $s\mathsf{Set}_{\geq 2}$ par rapport à $\mathcal{W}_{\mathbb{Q}}$ existe. On la note $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$.*

On peut décrire les objets fibrants de $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$.

Définition 3.1.11. Un ensemble simplicial est *rationnel* si tous ses groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.

Proposition 3.1.12. *Un ensemble simplicial 1-réduit est fibrant dans $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$ si et seulement si il est fibrant dans $s\mathsf{Set}_{\geq 2}$ (c.-à-d. c'est un complexe de Kan) et qu'il est rationnel.*

Démonstration. Soit X un ensemble simplicial 1-réduit.

Supposons que $X \to *$ est une fibration dans $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$. Comme $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$ a moins de fibrations que $s\mathsf{Set}_{\geq 2}$, on en déduit que $X \to *$ est une fibration de Kan. Montrons que de plus X est rationnel. Soit $n \geq 2$. L'application canonique $k_* : S^n \to S^n$ de degré $k \geq 2$ une équivalence rationnelle, que l'on peut remplacer par une cofibration $i : S^n \xhookrightarrow{\sim_{\mathbb{Q}}} A$ avec $A \simeq S^n$. L'application i est une cofibration acyclique dans $s\mathsf{Set}_{\geq 2}^{\mathbb{Q}}$. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim_{\mathbb{Q}}"'] & X \arrow[d, two heads] \\ A \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & * \end{tikzcd}$$

ce qui montre que $\pi_n(X) \xrightarrow{\cdot k} \pi_n(X)$ est une bijection. La réciproque utilise la théorie des fibrations minimales (voir Section 2.4) et l'on se réfère à [**Quillen1969**] $\square$

Corollaire 3.1.13. *Tout ensemble simplicial 1-réduit a un remplacement rationnel $X \xrightarrow{\sim} X_{\mathbb{Q}}$, où $X_{\mathbb{Q}}$ est un ensemble simplicial rationnel.* $\square$

3.2. Algèbres différentielles graduées commutatives

3.2.1. Définitions

Définition 3.2.1. Un *complexe de cochaînes* (gradué positivement) est un espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{n\geq 0} V^n$ muni de différentielles $d : A^n \to A^{n+1}$ vérifiant $d \circ d = 0$. On note $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ la catégorie des complexes de cochaînes et de leurs morphismes.

On note $\deg a = p$ le degré d'un élément homogène $a \in V^p$. Si la notation $\deg a$ apparaît dans une équation, on suppose par défaut que l'élément est homogène quitte à étendre linéairement à tout l'espace gradué.

Définition 3.2.2. Une *algèbre différentielle graduée* (*DGA* en anglais) est un complexe de cochaînes A muni d'une application bilinéaire $\mu : A \otimes A \to A$ et d'une unité $\eta : \mathbb{Q} \to A$ qui est associative et unitaire :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "1\otimes\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \arrow[l, "\eta\otimes 1"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

et qui vérifie la relation de Leibniz :

$$d(\mu(a \otimes b)) = \mu(da \otimes b) + (-1)^{\deg a}\mu(a \otimes db).$$

Par la suite, on notera simplement $a \cdot b$ (voire ab) le produit $\mu(a \otimes b)$, et $1 = \eta(1) \in A^0$ sera l'unité. L'associativité s'écrit alors $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, l'unitalité $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$, et la relation de Leibniz $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot db$.

Proposition 3.2.3. *Soit A une DGA. Alors la cohomologie $H^*(A)$ est une algèbre graduée.*

Démonstration. Cela découle immédiatement de la relation de Leibniz. □

Définition 3.2.4. Une *algèbre différentielle graduée commutative* (*CDGA* en anglais) est une DGA qui vérifie la propriété suivante : si $a \in A^p$ et $b \in A^q$ sont des éléments homogènes, alors $b \cdot a = (-1)^{(\deg a)(\deg b)}(a \cdot b)$. On note CDGA la catégorie des CDGA et de leurs morphismes.

Proposition 3.2.5. *La cohomologie d'une CDGA est une algèbre graduée commutative.* □

Remarque 3.2.6. Si $a \in A$ est de degré impair, alors l'équation $a \cdot a = -a \cdot a$ entraîne $a^2 = 0$. En revanche, si $b \in A$ est de degré pair, alors il commute avec tous les éléments de a (y compris ceux de degré impair).

Soit V un complexe de cochaînes. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur $V^{\otimes n}$ avec la « règle des signes de Koszul » (inspirée par la définition d'une algèbre graduée commutative). Concrètement, si $\sigma_i = (i\ i{+}1) \in \mathfrak{S}_n$ est une transposition, alors :

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_n) \cdot \sigma_i = (-1)^{|v_i||v_{i+1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_n.$$

On étend cette action à $\mathfrak{S}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = 1,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \rangle$ en vérifiant qu'elle est compatible avec les relations. On notera parfois abusivement le signe par $\pm$.

Définition 3.2.7. Soit G un groupe et V une représentation de G. On définit les *coinvariants* V_G par le quotient $V/\!\sim$ où $x \sim g \cdot x$. Les *invariants* V^G sont le sous-espace $\{v \in V \mid g \cdot x = x\}$.

Définition 3.2.8. Soit V un complexe de cochaînes. L'*algèbre symétrique* sur V, notée $S(V)$, est donnée par :

$$S(V) := \bigoplus_{r\geq 0} S^{(r)}(V) := \bigoplus_{r\geq 0} (V^{\otimes r})_{\mathfrak{S}_r}.$$

La différentielle est donnée par la relation de Leibniz :

$$d(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1| \dots |v_{i-1}|} v_1 \dots v_{i-1} (dv_i) v_{i+1} \dots v_n.$$

Concrètement, $S(V)$ est le tenseur $\mathbb{Q}[V^{\text{pair}}] \otimes \Lambda(V^{\text{impair}})$ de l'algèbre polynomiale sur les éléments pairs et de l'algèbre extérieure sur les degrés impairs. Pour calculer la différentielle, on utilise la règle des signes de Koszul en supposant que le symbole d est de degré 1.

Proposition 3.2.9. *On a une adjonction :*

$$S : \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q}) \leftrightarrows \mathsf{CDGA} : U,$$

où S est le foncteur « algèbre symétrique » et U est le « foncteur oubli » qui associe le complexe de cochaînes sous-jacent à une CDGA. □

Concrètement, cela signifie qu'un morphisme de CDGA $f : S(V) \to A$ est uniquement déterminé par sa restriction à $V \subset S(V)$.

Corollaire 3.2.10. *On a un isomorphisme naturel $S(V \oplus W) \cong S(V) \otimes S(W)$.*

Démonstration. Le foncteur S étant un adjoint à gauche, il préserve les colimites, qui sont respectivement $\oplus$ dans $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ et $\otimes$ dans CDGA. □

Proposition 3.2.11. *Soit $A = S(V)$ la CDGA libre sur un complexe de cochaînes V. Alors $H^*(A)$ est l'algèbre symétrique libre sur $H^*(V)$.*

Démonstration. La preuve fait appel à la formule de Künneth et au fait que si G est un groupe fini qui agit sur un complexe de cochaînes C (dans les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels), alors $H^*(C_G) \cong H^*(C)_G$. On notera que la preuve ne marche qu'en caractéristique nulle. En caractéristique p, le fait que la caractéristique divise le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geq p$ pose en effet problème. □

Définition 3.2.12. Soit A une CDGA et $k \in \mathbb{Z}$ un entier. Une *dérivation* (de degré k) $\delta : A \to A$ est une application linéaire de degré k vérifiant la relation de Leibniz $\delta(ab) = \delta a \cdot b + (-1)^{k \cdot \deg a} a \cdot \delta b$.

Exemple 3.2.13. La différentielle d'une CDGA est une dérivation de degré 1.

Proposition 3.2.14. *Soit $A = S(V)$ une CDGA libre sur un complexe de cochaînes V. Une dérivation $\delta : A \to A$ est uniquement déterminée par sa restriction à $V \subset A$.*

Démonstration. Quasiment identique à la preuve que S est adjoint de U. □

Décrivons maintenant une généralisation des CDGA libres. Cette généralisation servira à décrire les objets cofibrants de CDGA dans la section suivante.

Définition 3.2.15. Une CDGA A est dite *quasi-libre* si son algèbre graduée commutative sous-jacente est libre.

Cela signifie que $A = (S(V), d)$ où V est un espace vectoriel gradué et $d : S(V) \to S(V)$ est une dérivation de degré 1 vérifiant $d \circ d = 0$. Comme dans le cas des CDGA libres, cette dérivation d est uniquement déterminée par sa restriction $d_{|V}$ à $V \subset S(V)$. Cependant, l'image de $d_{|V}$ n'est pas nécessairement inclus dans V et peut faire intervenir des polynômes de poids supérieur. Cette différentielle restreinte $d_{|V}$ se décompose en fait en $d_0 + d_1 + \dots$ où $d_i : V \to S^{(i)}(V) = (V^{\otimes i})_{\mathfrak{S}_i}$ est le terme de poids i.

Exemple 3.2.16. On considère l'espace vectoriel gradué V engendré par deux variables $x = x_2$ et $y = y_3$, de degrés respectifs 2 et 3. L'algèbre symétrique sur V est le produit tensoriel $S(V) = \mathbb{Q}[x] \otimes \Lambda(y)$. On définit une dérivation $d : S(V) \to S(V)$ par $dx = 0$ et $dy = x^2$, étendue par la relation de Leibniz. On calcule plus précisément que $d(x^k) = 0$ et $d(x^k y) = x^{k+2}$. On vérifie alors aisément que $d \circ d = 0$, donc $(S(V), d)$ est une CDGA quasi-libre. Elle n'est pas libre sur V, car $dy = x^2$ n'est pas linéaire.

L'équation $d \circ d$ se transforme en une suite d'équations compliquées en termes des d_i. On remarque en particulier que d_1 est une différentielle sur V. Un morphisme $f : (S(V), d) \to (S(W), d)$ entre deux CDGA quasi-libres est entièrement déterminé par sa restriction $f_{|V} : V \to S(W)$, qui se décompose en $f_0 + f_1 + \dots$ où $f_i : V \to S^{(i)}(W)$. L'équation $f \circ d = d \circ f$ devient elle aussi une suite d'équations compliquées. L'une de ces relations dit que $f_1 d_1 = d_1 f_1$. On peut donc définir :

Définition 3.2.17. Soit $f : (S(V), d) \to (S(W), d)$ un morphisme entre CDGA quasi-libres. La *partie linéaire* de f est l'application induite :

$$f_1 : (V, d_1) \to (W, d_1).$$

On peut définir un analogue de cette partie linéaire pour les CDGA augmentées.

Définition 3.2.18. Une *augmentation* d'une CDGA A est un morphisme de CDGA $\varepsilon : A \to \mathbb{Q}$ (qui vérifie donc $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b)$, $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon(da) = 0$). Une CDGA *augmentée* est une CDGA A munie d'une augmentation ε. Si A est une CDGA augmentée, on note $\bar{A} = \ker \varepsilon$ son *idéal d'augmentation*.

Définition 3.2.19. Soit A une CDGA augmentée. Son *complexe des indécomposables* QA est le quotient $QA = \bar{A}/\bar{A} \cdot \bar{A}$ muni de la différentielle induite. On note alors les « groupes d'homotopie de A »[3]

$$\pi_n(A) = H^n(QA).$$

Exemple 3.2.20. Si $A = (S(V), d)$ est quasi-libre, alors $QA \cong (V, d_1)$.

[3] Il s'agit plutôt de son homologie d'André–Quillen. On verra dans la Section 3.3 que cela correspond effectivement aux groupes d'homotopie d'un espace topologique.

3.2.2. Transfert de la structure de catégorie de modèles

Nous allons chercher à appliquer le théorème suivant à la Proposition 3.2.9.

Définition 3.2.21. Soit $F : \mathsf{D} \leftrightarrows \mathsf{C} : U$ une adjonction, où D est une catégorie de modèles. On dit qu'un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$ est une fibration (resp. une équivalence faible) si $U(f)$ en est une, et que c'est une cofibration si f a la LLP par rapport à toutes les fibrations acycliques. La structure de catégorie de modèles ainsi définie sur C – si elle existe – est appelée la *structure transférée à droite*.

Théorème 3.2.22 (Quillen [**Quillen1967**])**.** *Soit* D *une catégorie de modèles cofibrement engendrée par* $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$*. Supposons que les sources des morphismes de* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{J}$ *sont* κ*-compacts pour un cardinal* κ *donné. Soit* $F : \mathsf{D} \leftrightarrows \mathsf{C} : U$ *une adjonction, où* C *est une catégorie complète et cocomplète.*

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *le foncteur* U *préserve les colimites* κ*-séquentielles ;*
2. *l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée :*
   a) *si un morphisme de* C *a la LLP par rapport à toutes les fibrations, alors c'est une équivalence faible ;*
   b) ou *pour tout* $A \in \mathsf{C}$*, tout* $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{J}$ *et tout* $F(X) \to A$*, l'application canonique* $A \to A \sqcup_{F(X)} F(Y)$ *s'envoie sur une équivalence faible par le foncteur* U *;*

alors la structure transférée à droite sur C *définit bien une structure de catégorie de modèles, cofibrement engendrée par* $(F(\mathcal{I}), F(\mathcal{J}))$ *(dont les sources sont* κ*-compacts), et l'adjonction* $F \dashv U$ *est de Quillen.*

Avant de démontrer le théorème, donnons d'abord l'application. Pour rappel, $S^n(\mathbb{Q}) \in \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ est le complexe donné par $\mathbb{Q}$ concentré en degré n, et $D^n(\mathbb{Q}) = \ldots \to 0 \to \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q} \to 0 \to \ldots$ concentré en degrés $n-1$ et n.

Proposition 3.2.23. *Il existe une structure de catégorie de modèles sur* $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ *(appelée* structure projective*) dont les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les fibrations sont les morphismes surjectifs en tout degré, et les cofibrations sont les morphismes injectifs en degré strictement positif. Elle est cofibrement engendré par* $\mathcal{I} = \{S^n(\mathbb{Q}) \to D^n(\mathbb{Q})\}$ *et* $\mathcal{J} = \{0 \to D^n(\mathbb{Q})\}$*.*

Démonstration. Identique à ce que l'on peut trouver dans la Section 1.5.1. □

Corollaire 3.2.24. *L'adjonction* $S : \mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q}) \leftrightarrows \mathsf{CDGA} : U$ *vérifie les hypothèses du Théorème 3.2.22. La structure de catégorie de modèles transférée à droite sur* CDGA *existe donc.*

Démonstration. Une colimite κ-séquentielle dans CDGA se calcule comme une colimite κ-séquentielle dans $\mathsf{Ch}^{\geq 0}(\mathbb{Q})$ qui est munie d'une structure de CDGA canonique. La condition 1. du théorème est donc vérifiée.

Nous allons maintenant vérifier la condition 2.b) du théorème. On doit donc vérifier que pour tout CDGA A et pour tout $n \geq 0$, l'application canonique (dans la catégorie des CDGAs) $A \to A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))$ est un quasi-isomorphisme. Grâce à la formule de Künneth, $H^*(A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))) = H^*(A) \otimes H^*(S(D^n(\mathbb{Q})))$. Grâce à la Proposition 3.2.11, $H^*(S(D^n(\mathbb{Q}))) = S(H^*(D^n(\mathbb{Q})))$ et il est immédiat que $D^n(\mathbb{Q})$ est acyclique. On en déduit donc que $H^*(A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))) = H^*(A)$, et on vérifie sans peine que $A \to A \otimes S(D^n(\mathbb{Q}))$ induit l'identité en cohomologie. □

Remarque 3.2.25. Nous avons utilisé deux fois l'hypothèse que le corps de base était $\mathbb{Q}$ (ou plus généralement un corps de caractéristique zéro) :

– pour appliquer la formule de Künneth, il est nécessaire de se placer au-dessus d'un corps ;

– pour $H^*(S(V)) = S(H^*(V))$, il est nécessaire d'avoir un corps de caractéristique zéro.

Démonstration du Théorème 3.2.22. Vérifions que C est une catégorie de modèles avec les classes considérées. L'axiome (MC1) – complète + cocomplète – est vrai par hypothèse. L'axiome (MC2) – 2 parmi 3 – est vrai car U est un foncteur et que D vérifie (MC2). De même, les fibrations et les équivalences faibles de C sont stables par rétracts ; comme les classes de morphismes définies par propriété de relèvement sont stables par rétract, on en déduit que les cofibrations de C sont également stables par rétract et que l'axiome (MC3) est vérifié.

L'axiome (MC4)(i) – $\mathcal{C} \perp \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ – est vrai par définition des cofibrations de C. Reste à vérifier (MC4)(ii) – $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \perp \mathcal{F}$ – et (MC5) – les factorisations. On aura besoin de quelques lemmes.

Lemme 3.2.26. *Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, Y)$ est une fibration (resp. fibration acyclique) si et seulement si il a la RLP par rapport à $F(\mathcal{J})$ (resp. $F(\mathcal{I})$).*

Démonstration. Découle du fait que $F \dashv U$ et que D est cofibrement engendrée par $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$. □

Lemme 3.2.27. *Les rétracts de complexes $F(\mathcal{I})$-cellulaire (resp. $F(\mathcal{J})$-cellulaire) ont la LLP par rapport aux fibrations acycliques (resp. aux fibrations).*

Démonstration. Découle du point précédent et de la stabilité des classes de type ${}^{\perp}(-)$ par poussés en avant et rétracts. □

Lemme 3.2.28. *Tout rétract d'un complexe $F(\mathcal{J})$-cellulaire est une équivalence faible dans* C.

Démonstration. Corollaire du lemme précédent et de la condition 2. du théorème. □

On peut maintenant démontrer (MC5) grâce à l'argument du petit objet. Étant donné $f :\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, Y)$, on peut le factoriser en $X \to G^{\infty}(F(\mathcal{I}), f) \to Y$. Dans le premier cas, $X \to G^{\infty}(F(\mathcal{I}), f)$ est un complexe $F(\mathcal{I})$-cellulaire, donc une cofibration ; de plus

$G^\infty(F(\mathcal{I}), f) \to Y$ a la RLP par rapport à $F(\mathcal{I})$, donc c'est une fibration acyclique. L'autre partie de (MC5) est similaire en remplaçant $\mathcal{I}$ par $\mathcal{J}$.

Démontrons finalement (MC4)(ii). Soit $i : A \to B$ une cofibration acyclique, c.-à-d. i a la LLP par rapport aux fibrations acyclique et $U(i)$ est une équivalence faible. Montrons que i a la LLP par rapport aux fibrations. Grâce à l'argument du petit objet, on peut factoriser i en $A \xrightarrow{i_\infty} G^\infty(F(\mathcal{J}), i) \xrightarrow{p_\infty} B$, où i_∞ est un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire et p_∞ est une fibration. Grâce à 2 parmi 3, p est en fait une fibration acyclique. On peut donc trouver un relèvement dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j", "\sim"'] \arrow[d, hook, "i_\infty"'] & G^\infty(F(\mathcal{J}), i) \arrow[d, "p_\infty"] \\ B \arrow[r, equal] \arrow[ur, dashed, "l"] & B \end{tikzcd}$$

On obtient alors que i est un rétract de i_∞. Or i_∞ est un complexe $\mathcal{J}$-cellulaire et a donc la LLP par rapport aux fibrations par l'un des lemmes ci-dessus, ce qui permet de conclure. □

Exemple 3.2.29 (Exercice). Un autre exemple d'application du théorème de transfert est le suivant. Soit A une CDGA. Un A-module est un complexe de cochaînes M muni d'une application bilinéaire $A \otimes_{\mathbb{Q}} M \to M$ vérifiant $a \cdot (b \cdot m) = ab \cdot m$ et $1 \cdot m = m$. On note Mod_A la catégorie des A-modules et de leurs morphismes. Il y a un foncteur oubli $\mathsf{Mod}_A \to \mathsf{Ch}^{\geq}(\mathbb{Q})$ qui oublie l'action de A. On peut alors vérifier que ce foncteur vérifie les axiomes du théorème de transfert, et que Mod_A est munie d'une structure de catégorie de modèles projective.

Si $f : A \to B$ est un morphisme de CDGA, alors il y a une adjonction de Quillen :

$$f_! : \mathsf{Mod}_A \leftrightarrows \mathsf{Mod}_B : f^*.$$

Le foncteur f^* est défini par f^*M avec une action donnée par $a \cdot m = f(a) \cdot m$. Le foncteur $f_!$ est donné par $f_!N = B \otimes_A N$, où A agit sur B via f, et l'action est $b \cdot (x \otimes m) = bx \otimes m$. Si f est un quasi-isomorphisme, alors cette adjonction est une équivalence de Quillen.

3.2.3. Théorie de Sullivan

Tous les CDGA sont fibrantes. Dans cette section, nous allons décrire les objets cofibrants. Nous allons également décrire explicitement comment représenter les homotopies entre morphismes de CDGA.

Définition 3.2.30. Une *algèbre de Sullivan* est une CDGA quasi-libre $A = (S(V), d)$ où $V = V^{\geq 1}$ et qui est munie d'une filtration du complexe de cochaînes V par des sous-complexes :

$$0 \subset V(0) \subset V(1) \subset V(2) \subset \cdots \subset V,$$

telle que $d(V(0)) = 0$ et $d(V(k+1)) \subset S(V(k))$ pour $k \geq 0$.

Une *algèbre relative de Sullivan* est une inclusion $A \to (A \otimes S(V), d)$ où $V = V^{\geq 1}$ est filtré $V(0) \subset V(1) \subset \ldots V$ tel quel $d(V(0)) \subset A$ et $d(V(k+1)) \subset A \otimes S(V(k))$.

Définition 3.2.31. Une *algèbre minimale* est une algèbre de Sullivan $A = (S(V), d)$ telle que $d(V(k)) \subset S^{(\geq 2)}(V(k-1))$, c.-à-d. la différentielle est décomposable. Une *algèbre relative minimale* est une algèbre de Sullivan relative qui vérifie une condition analogue.

Exemple 3.2.32. La CDGA $A = (S(x_2, y_3), dy = x^2)$ est une algèbre minimale. En effet, on peut poser $V(0) = \langle x \rangle$, $V(1) = \langle x, y \rangle$.

Exemple 3.2.33. Les CDGA $S(D^n(\mathbb{Q}))$ et $S(S^n(\mathbb{Q}))$ sont des algèbres de Sullivan. La première n'est pas minimale mais la seconde l'est. L'inclusion $S(S^n(\mathbb{Q})) \to S(D^n(\mathbb{Q}))$ est une algèbre relative minimale.

Exemple 3.2.34. L'algèbre $A = (S(x_1, y_1, z_1), dx = yz, dy = zx, dz = xy)$ n'est pas de Sullivan.

Proposition 3.2.35. *Une CDGA A est cofibrante si et seulement si c'est un rétract d'une algèbre de Sullivan. De même, $i : A \to B$ est une cofibration si et seulement si c'est un rétract d'une algèbre relative de Sullivan.*

Démonstration. Les cofibrations génératrices $\mathcal{I} = \{S(S^n(\mathbb{Q})) \to S(D^n(\mathbb{Q}))\}$ sont des algèbres relatives de Sullivan donc toutes les cofibrations sont des algèbres relatives de Sullivan.[4] □

Remarque 3.2.36. Une algèbre minimale $A = (S(V), d)$ est automatiquement augmentée, et ses groupes d'homotopie (Définition 3.2.19) sont donnés par $\pi_n(A) = V^n$.

Proposition 3.2.37. *Soit $f : A = (S(V), d) \to B = (S(W), d)$ un morphisme entre algèbres de Sullivan. Alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si $f_1 : (V, d_1) \to (W, d_1)$ en est un. Si de plus les deux algèbres sont minimales, alors f est un quasi-isomorphisme si et seulement si c'est un isomorphisme.*

Démonstration. La preuve du premier énoncé repose sur des arguments de suite spectrale que nous ne détaillerons pas (exercice).

Pour le deuxième énoncé, il est clair que si f est un isomorphisme alors c'est un quasi-isomorphisme. Réciproquement, si f est un quasi-isomorphisme, alors par le premier point f_1 est un quasi-isomorphisme. Comme les algèbres sont minimales, $d_1 = 0$, donc f_1 est en fait un isomorphisme. On a un morphisme de suites exactes longues (associées aux suites exactes courtes du type $\bar{A}^2 \to \bar{A} \to QA$) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(\bar{A}^2) = 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\bar{A}) \arrow[d, "\cong"', "f_1"] \arrow[r, equal] & H^1(QA) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f_1"] & H^2(\bar{A}^2) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\bar{A}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(QA) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & H^1(\bar{B}^2) = 0 \arrow[r] & H^1(\bar{B}) \arrow[r, equal] & H^1(QB) \arrow[r] & H^2(\bar{B}^2) \arrow[r] & H^2(\bar{B}) \arrow[r] & H^2(QB) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

On applique alors le lemme des cinq par récurrence et on utilise le fait que $H^n(\bar{A}^2)$ s'exprime uniquement en termes de $V^{<n}$ (grâce à $V = V^{\geq 1}$) pour conclure. □

[4]Pour trouver la filtration, on considère la filtration $G^0(\mathcal{I}, -) \subset G^1(\mathcal{I}, -) \subset \cdots \subset G^\infty(\mathcal{I}, -)$ dans l'argument du petit objet.

Définition 3.2.38. Un *modèle de Sullivan* (resp. *modèle minimal*) d'une CDGA A est une algèbre de Sullivan (resp. minimale) $(S(V), d)$ munie un quasi-isomorphisme $(S(V), d) \xrightarrow{\sim} A$. Un modèle de Sullivan (resp. minimal) d'un morphisme $f : A \to B$ est une factorisation $A \to (A \otimes S(V), d) \xrightarrow{\sim} B$ où $A \to (A \otimes S(V), d)$ est une algèbre relative de Sullivan (resp. minimale).

En utilisant les axiomes de catégories de modèles, toute CDGA a un modèle de Sullivan, et tout morphisme a un modèle de Sullivan. Deux modèles minimaux d'une même CDGA sont isomorphes.

Exemple 3.2.39. Considérons la cohomologie de la sphère S^2. Elle est donnée par $H^*(S^2) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}x_2$, où x est un élément de degré 2 de carré nul. Cette algèbre n'est pas libre sur x malgré les apparences : comme $\deg x$ est pair, la relation $x^2 = 0$ est non-triviale. Pour trouver un modèle minimal, on « résout » la relation $x^2 = 0$ en rajoutant un générateur y dont la différentielle « tue » x^2. On obtient alors $A = (S(x_2, y_3), dy = x^2)$ qui est bien une algèbre minimale, et le morphisme $A \to H^*(S^2)$ donné par $x \mapsto x$ et $y \mapsto 0$ est bien un quasi-isomorphisme.

Exemple 3.2.40. Un cas assez intéressant de modèle minimal de morphisme est celui de la multiplication[5] $\mu : A \otimes A \to A$ où $A = (S(V), d)$ est une algèbre minimale. Il faut trouver une factorisation $(S(V) \otimes S(V), d) \to (S(V) \otimes S(V) \otimes S(W), D) \xrightarrow{\sim} (S(V), d)$ de μ, où la première application est l'inclusion canonique et la seconde est un quasi-isomorphisme. Pour W, on prend $V[-1]$, une copie de V décalée en degré de 1 vers le haut (c.-à-d. que si $v \in V^k$, alors l'élément correspondant $\bar{v} \in W^{k+1}W$ est en degré $k+1$). Le but est de fabriquer une différentielle D sur $S(V) \otimes S(V) \otimes S(V[-1])$ qui étend les différentielles de $S(V)$ (c.-à-d. que $D(v \otimes 1 \otimes 1) = dv \otimes 1 \otimes 1$ et $D(1 \otimes v \otimes 1) = 1 \otimes dv \otimes 1$) et telle que $D(1 \otimes 1 \otimes \bar{v})$ vient identifier à homotopie près $v \otimes 1 \otimes 1$ et $1 \otimes v \otimes 1$. Celle-ci se construit par récurrence, voir par exemple [**FelixOpreaTanre2008**].

Nous allons maintenant expliciter la relation d'homotopie (à droite) entre morphismes de CDGA. Comme on l'a vu dans la Section 1.4.2, pour définir une homotopie entre $f, g : A \to B$, on doit trouver un objet chemin pour la CDGA B. Il existe une manière simple (et naturelle !) d'en trouver un pour toute CDGA B. Elle est inspirée de constructions topologiques : dans Top, un objet chemin pour un espace X est simplement donné par $X \times I$ où $I = [0, 1]$ est un intervalle. En prenant un peu d'avance (voir la Section 3.3 : on a $I = \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^1)$), on pose :

Définition 3.2.41. L'*intervalle* dans CDGA est la CDGA quasi-libre $I = (S(t, \mathrm{d}t), d)$ où $\deg t = 0$, $\deg \mathrm{d}t = 1$, et la différentielle est donnée par $d(t) = \mathrm{d}t$ et $d(\mathrm{d}t) = 0$.

Lemme 3.2.42. *Soit B une CDGA quelconque. Un objet chemin pour B est donné par*

$$B \xhookrightarrow{\sim} B \otimes I \xrightarrow{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} B \oplus B,$$

où $B \to B \otimes I$ est l'inclusion canonique et les morphismes $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1$ sont définis par :

$$\mathrm{ev}_i(b \otimes P(t)) = P(i) \cdot b, \qquad \mathrm{ev}_i(b \otimes P(t)\mathrm{d}t) = 0.$$

[5] Comme A est commutative, on vérifie que μ est bien un morphisme de CDGA.

Définition 3.2.43. Une *homotopie de Sullivan* entre deux morphismes de CDGA $f, g : A \to B$ est un morphisme de CDGA $H : A \to B \otimes I$ tel que $f = (1 \otimes \mathrm{ev}_0)H$ et $g = (1 \otimes \mathrm{ev}_1)H$.

Concrètement, une homotopie de Sullivan $H : A \to B \otimes I$ entre f et g est de la forme

$$H(a) = H_0(a) + H_1(a)t + H_2(a)t^2 + \cdots + H_0'(a)\mathrm{d}t + H_1'(a)t\mathrm{d}t + H_2'(a)t^2\mathrm{d}t + \ldots$$

où $H_0(a) = f(a)$, $\sum_{i\geq 0} H_i(a) = g(a)$ et H vérifie une suite d'équations imposant que H est un morphisme d'algèbres et $H \circ d = d \circ H$ (par exemple $H_1(ab) = f(a)H_1(b) + H_1(a)f(b)$, $H_0'(da) = f(a)$, etc).

Proposition 3.2.44. *Soit $A = (S(V), d)$ une algèbre de Sullivan. Alors deux morphismes $f, g : A \to B$ sont homotopes à droite si et seulement si ils sont homotopes de Sullivan.*

Démonstration. Comme $B \otimes I$ est un objet chemin pour B, alors par définition une homotopie de Sullivan est une homotopie à droite. Réciproquement, supposons que f et g sont homotopes à droite, c.-à-d. qu'il existe un objet chemin $B \xhookrightarrow{\sim} P \twoheadrightarrow B \times B$ et une homotopie à droite $H : A \to P$ entre f et g. On peut trouver un relèvement dans le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "\sim"] \arrow[d, hook, "\sim"'] & B \otimes I \arrow[d, two heads, "(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)"] \\
P \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, "l"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

et alors $l \circ H$ est une homotopie de Sullivan entre f et g. □

On termine sur une définition utile dans la section suivante :

Définition 3.2.45. Une CDGA A est dite 1-*réduite* si $A^0 = \mathbb{Q}$ (nécessairement engendré par l'unité) et $A^1 = 0$. On note $\mathrm{CDGA}_{\geq 2} \subset \mathrm{CDGA}$ la sous-catégorie pleine des CDGA 1-connexes.

Proposition 3.2.46. *La sous-catégorie* $\mathrm{CDGA}_{\geq 2} \subset \mathrm{CDGA}$ *hérite d'une structure de catégorie de modèles.*

Démonstration. Comme pour $s\mathrm{Set}_{\geq 2} \subset s\mathrm{Set}$, il faut vérifier que les relèvement et les factorisations restent dans la sous-catégorie. □

3.3. Comparaison entre CDGA et homotopie rationnelle

Nous allons montrer qu'il existe une équivalence de Quillen entre $\mathrm{CDGA}_{\geq 2}$ et $s\mathrm{Set}^{\mathbb{Q}}_{\geq 2}$.

Remarque 3.3.1. On sait depuis peu que cette équivalence peut se généraliser au cadre des ensemble simpliciaux connexes et nilpotents [**FelixHalperinThomas2015**].

3.3.1. L'adjonction

L'adjonction est inspirée par la CDGA des formes différentielles de de Rham d'une variété lisse, adaptée pour les ensembles simpliciaux quelconques et avec des coefficients rationnels plutôt que réels. L'idée est qu'un ensemble simplicial formé de simplexes recollés les uns aux autres ; une forme sur un ensemble simpliciale est donc simplement une forme sur chaque simplexe, compatible avec les faces et les dégénérescences.

On rappelle que la réalisation géométrique de Δ^n est homéomorphe à l'espace topologique $\mathbb{\Delta}^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$.

Définition 3.3.2. Soit $n \geq 0$ un entier. La CDGA des *formes polynomiales sur le simplexe* Δ^n est :

$$\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n) \coloneqq \frac{S(t_0, \dots, t_n, \mathrm{d}t_0, \dots, \mathrm{d}t_n)}{(t_0 + \dots + t_n = 1,\ \mathrm{d}t_0 + \dots + \mathrm{d}t_n = 0)}.$$

On a $|t_i| = 0$, $|\mathrm{d}t_i| = 1$, et la différentielle est donnée par $d(t_i) = \mathrm{d}t_i$ et $d(\mathrm{d}t_i) = 0$.

Remarque 3.3.3. Cette CDGA est bien sûr isomorphe à $S(t_1, \dots, t_n, \mathrm{d}t_1, \dots, \mathrm{d}t_n)$ mais cet isomorphisme « casse » la symétrie de Δ^n. En particulier $\Omega^*(\Delta^1)$ est l'intervalle I de la Section 3.2.3.

Les simplexes Δ^n forment un objet cosimplicial $\Delta^\bullet$ dans les ensembles simpliciaux. On peut se servir de cette structure pour définir un objet simplicial (par contravariance) à partir des $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$:

Lemme 3.3.4. *Les CDGA $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ s'assemblent pour former une CDGA simpliciale $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)$, avec pour applications de structure :*

$$d_i(t_k) = \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ 0, & \text{si } k = i, \\ t_{k-1}, & \text{si } k > i; \end{cases} \qquad s_j(t_k) = \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ t_k + t_{k+1}, & \text{si } k = i, \\ t_{k+1}, & \text{si } k > i. \end{cases}$$

Cette CDGA simpliciale a plusieurs propriétés utiles, qui permettront par exemple de montrer que $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$ a la même cohomologie que X.

Lemme 3.3.5 (Lemme de Poincaré)**.** *Pour tout $n \geq 0$, l'unité $\eta : \mathbb{Q} \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On a un isomorphisme $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n) \cong \bigotimes_{i=1}^n S(t_i, \mathrm{d}t_i)$. Il est clair que chaque $S(t_i, \mathrm{d}t_i)$ est acyclique (la différentielle est telle que $d(t_i^k) = t_i^{k-1}\mathrm{d}t_i$) donc $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ est acyclique par la formule de Künneth. □

Lemme 3.3.6. *Pour tout $i \geq 0$, l'identité du $\mathbb{Q}$-module simplicial $\Omega^i(\Delta^\bullet)$ est homotope à l'application constante 0, c'est-à-dire qu'il existe des applications linéaires $H_n : \Omega^i(\Delta^n) \to \Omega^i(\Delta^{n+1})$ vérifiant $d_0 H_n = \mathrm{id}$, $d_1 H_0 = 0$, $d_{j+1} H_n = H_{n-1} d_j$ pour $n > 0$, et $s_{j+1} s_j = H_n s_j$. En particulier, la réalisation géométrique de $\Omega^i(\Delta^\bullet)$ est contractile.*

Démonstration. Soit $n \geq 0$ et N un entier tel que $N > 2i$. On peut alors définir :

$$H_n : \Omega^i(\Delta^n) \to \Omega^i(\Delta^{n+1}),$$
$$P \cdot \mathrm{d}t_{m_1} \dots dt_{m_i} \mapsto P \cdot t_{n+1}^N \cdot \frac{\mathrm{d}t_{m_1} t_{n+1} - \mathrm{d}t_{n+1} \cdot t_{m_1}}{t_{n+1}^2} \dots \frac{\mathrm{d}t_{m_i} t_{n+1} - \mathrm{d}t_{n+1} \cdot t_{m_i}}{t_{n+1}^2}.$$

On vérifie alors manuellement les équations voulues (voir [**Fresse2017**] pour les détails). □

Lemme 3.3.7 (Extensibilité)**.** *Soit $n \geq 1$ un entier et $I \subset [n]$ un sous-ensemble. Pour toute famille $\{\omega_i \in \Omega^d_{\mathrm{PL}}(\Delta^{n-1})\}_{i \in I}$ vérifiant les équations $d_i \omega_j = d_{j-1}\omega_i$ pour $i < j \in I$, il existe $\omega \in \Omega^d_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ telle que $d_i \omega = \omega_i$.*

Démonstration. On suppose données des formes ω_i comme dans l'énoncé. On pose $\zeta_{-1} = 0 \in \Omega^d_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ et on va construire par récurrence des formes $\zeta_r \in \Omega^d_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ vérifiant $d_i \zeta_r = \omega_i$ pour $I \ni i \leq r$. Supposons ζ_{r-1} construit et vérifiant l'hypothèse précédente. Si $r \notin I$, on pose simplement $\zeta_r = \zeta_{r-1}$. Sinon, on étend la CDGA $\Omega^*(\Delta^n)$ en

$$B := \left(\Omega^*(\Delta^n)[\frac{1}{1-t_r}], d(\frac{1}{1-t_r}) = \frac{\mathrm{d}t_r}{(1-t_r)^2} \right).$$

On définit $\varphi : \Omega^*(\Delta^{n-1}) \to B$ par

$$\varphi(t_i) = \begin{cases} \frac{t_i}{1-t_r}, & \text{si } i < r, \\ \frac{t_{i+1}}{1-t_r}, & \text{si } i \geq r; \end{cases} \qquad \varphi(\mathrm{d}t_i) = d(\varphi(t_i)).$$

On peut également étendre la face d_r en $d_r : B \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^{n-1})$ en posant $d_r(\frac{1}{1-t_r}) = 1$. On peut alors écrire

$$\varphi(\omega_r - d_r \zeta_{r-1}) = \frac{1}{(1-t_r)^N} \psi \text{ pour } \psi \in \Omega^d_{\mathrm{PL}}(\Delta^n).$$

On pose alors $\zeta_r = \zeta_{r-1} + \psi$ et on vérifie que ζ_r vérifie l'hypothèse de récurrence (voir [**FelixHalperinThomas2001**] pour les détails). □

On peut maintenant définir les formes polynomiales par morceaux sur un ensemble simplicial.

Définition 3.3.8. Le foncteur des *formes polynomiales par morceaux* est :

$$\Omega^*_{\mathrm{PL}} : s\mathrm{Set} \to \mathrm{CDGA}^{\mathrm{op}}, \qquad X \mapsto \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(X_\bullet, \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)).$$

Si X est un espace topologique, on définit aussi $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) = \Omega^*_{\mathrm{PL}}(S_\bullet(X))$.

Concrètement, un élément $\omega \in \Omega^i_{\mathrm{PL}}(X)$ est une collection $\{\omega_\sigma \in \Omega^i(\Delta^n)\}_{\sigma \in X_n, n \geq 0}$ de formes polynomiales sur les simplexes de X vérifiant $d_i \omega_\sigma = \omega_{d_i \sigma}$ et $s_j \omega_\sigma \omega_{s_j \sigma}$. Le produit et la différentielle sont définis termes à termes : $(d\omega)_\sigma = d(\omega_\sigma)$ et $(\alpha\beta)_\sigma = \alpha_\sigma \beta_\sigma$.

Remarque 3.3.9. Grâce au lemme de Yoneda, on a bien que le $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n)$ de la Définition 3.3.2 correspond bien à celui de la Définition 3.3.8.

Avec un peu d'*abstract nonsense*, on trouve facilement un adjoint à gauche pour Ω^*_{PL}.

Lemme 3.3.10 (Exercice)**.** *Le foncteur* $\Omega^*_{\mathrm{PL}} : s\mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{CDGA}$ *admet un adjoint à gauche, appelé le foncteur de* réalisation *:*

$$\langle - \rangle : \mathrm{CDGA} \to s\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}, \qquad A \mapsto \langle A \rangle_\bullet := \mathrm{Hom}_{\mathrm{CDGA}}(A, \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)).$$

Concluons par un analogue PL du théorème de de Rham. Soit X un ensemble simplicial. On peut le linéariser degré par degré pour obtenir un espace vectoriel simplicial $\mathbb{Q}[X]$ (une base en degré n étant donné par l'ensemble X_n). On construit un complexe de chaînes à partir de $\mathbb{Q}[X]$ en posant $C_n(X) = \mathbb{Q}[X_n]$ et la différentielle est donnée par $d = \sum(-1)^i d_i$ (comparer avec N_*X dans la Section 2.6). Enfin, on peut dualiser degré par degré pour obtenir un complexe de cochaînes $C^*(X)$. Le cup produit définit une structure de DGA sur $C^*(X)$ (qui n'est pas commutative en général).

Théorème 3.3.11 (Sullivan)**.** *Il existe un quasi-isomorphisme naturel de complexes de cochaînes, qui induit un isomorphisme de CDGA en cohomologie :*

$$\int : \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \to C^*(X).$$

Pour un élément $\omega = \{\omega_\sigma \in \Omega^n(\Delta^d)\}_{\sigma \in X_d}$ *et* $\sigma \in X_n$*, on écrit* $\omega_\sigma = f_\sigma \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n$*, alors*

$$\int \omega : X_n \to \mathbb{Q}, \quad \sigma \mapsto \int_{\Delta^n} f_\sigma \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n.$$

De plus, l'isomorphisme en cohomologie est induit par un zigzag de quasi-isomorphismes naturels de DGA entre Ω^*_{PL} *et* C^**.*

Démonstration. Le fait que $\int$ est bien défini résulte de vérifications manuelles. Le fait que ce soit un quasi-isomorphisme découle du lemme de Poincaré et de la formule de Stokes. Pour le dernier point, on utilise le zigzag de quasi-isomorphismes de CDGA simpliciales $C^*(\Delta^\bullet) \to C^*(\Delta^\bullet) \otimes \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^n) \leftarrow \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)$. On s'en sert pour définir des foncteurs sur $s\mathrm{Set}$ définis de manière analogues à Ω^*_{PL} et on remarque que $C^*(X) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(X, C^*(\Delta^\bullet))$. L'extensibilité de $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)$ et $C^*(\Delta^\bullet)$ permet de montrer que $\mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(X, -)$ préserve les quasi-isomorphismes de CDGA simpliciales et on peut conclure. □

Proposition 3.3.12. *L'adjonction* $\langle - \rangle : \mathrm{CDGA} \leftrightarrows s\mathrm{Set}^{\mathrm{op}} : \Omega^*_{\mathrm{PL}}$ *du Lemme 3.3.10 est une adjonction de Quillen.*

Démonstration. Nous allons vérifier que la réalisation d'une cofibration génératrice de CDGAs est une fibration, et que la réalisation d'une cofibration acyclique génératrice est une fibration acyclique. Par adjonction et par le lemme de Yoneda (comparer avec le Lemme 1.5.8), nous avons des bijections simpliciales :

$$\langle S(D^n(\mathbb{Q})) \rangle \cong \Omega^{n-1}_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet) \text{ et } \langle S(S^n(\mathbb{Q})) \rangle \cong Z^m(\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet)).$$

L'application induite par $i_n : S(S^n(\mathbb{Q})) \to S(D^n(\mathbb{Q}))$ est simplement la différentielle $i_n^* = d : \Omega_{\mathrm{PL}}^{n-1}(\Delta^\bullet) \to Z^m(\Omega_{\mathrm{PL}}^*(\Delta^\bullet))$. Grâce au Lemme 3.3.6, cette application est surjective. De la même manière, l'application induite par la cofibration acyclique génératrice $j_n : S(0) = \mathbb{Q} \to S(D^n(\mathbb{Q}))$ s'identifie à $\Omega_{\mathrm{PL}}^n(\Delta^\bullet) \to *$, qui est une équivalence faible grâce au Lemme 3.3.6. Il ne nous reste plus qu'à montrer que ce sont des fibrations, ce qui découle du Lemme 3.3.14 □

Lemme 3.3.13 (**Moore1954**). *Soit $G_\bullet$ un groupe simplicial, c'est-à-dire un objet simplicial dans la catégorie des groupes. Alors l'ensemble simplicial sous-jacent de $G_\bullet$ est un complexe de Kan.*

Démonstration. Soit $x = (x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) : \Lambda_k^n \to G$ un cornet de G, c.-à-d. une collection de $(n-1)$-simplexes vérifiant $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ (dès que ces deux expressions sont bien définies) Il existe alors un algorithme explicite qui remplit le n-simplexe.

- Si $k = 0$, on pose $w_n = s_{n-1} x_n$ puis, en remontant les indices un par un, $w_i = w_{i+1} \cdot (s_{i-1} d_i w_{i+1})^{-1} \cdot s_{i-1} x_i$. Alors $x = w_1 \in G_n$ remplit le cornet au sens où $d_i x = x_i$.
- Si $k = n$, on raisonne à l'envers. On pose $w_0 = s_0 x_0$ puis $w_i = w_{i-1} \cdot (s_i d_i w_{i-1})^{-1} \cdot s_i x_i$. Alors w_n remplit le cornet.
- Enfin, si $0 < k < n$, on commence par poser $w_0 = s_0 x_0$, puis on remonte en définissant $w_i = w_{i-1}(s_i d_i w_{i-1})^{-1} s_i x_i$ jusqu'à définir w_{k-1}. On pose ensuite $w_n = w_{k-1}(s_{n-1} d_n w_{k-1})^{-1} s_{n-1} x_n$, et on redescend jusque w_{k+1} en posant $w_i = w_{i+1}(s_{i-1} d_i w_{i+1})^{-1} s_{i-1} x_i$. On vérifie alors que w_{k+1} remplit bien le simplexe.

□

Lemme 3.3.14. *Soit $f : A_\bullet \to B_\bullet$ un morphisme de groupes abéliens simpliciaux. Si f est surjectif en chaque degré, alors c'est une fibration de Kan.*

Démonstration. On considère un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda_l^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook, "i_n"] & A \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed, "l"] & B \end{tikzcd}$$

On voit β comme un n-simplexe $\beta \in B_n$. Comme f est surjectif, il existe $\theta \in A_n$ tel que $f(\theta) = \beta$, mais bien sûr on n'a pas nécessairement $d_i\theta = \alpha_i$. Cependant, $i_n^*\theta - \alpha$ appartient définit un cornet $\Lambda_k^n \to \ker f$. Comme $\ker f$ est un groupe simplicial, il est fibrant par le Lemme 3.3.13, donc il existe $x \in (\ker f)_n$ dont la restriction à Λ_k^n est $i_n^*\theta - \alpha$. On vérifie alors que $l := \theta - x : \Delta^n \to B$ définit bien un relèvement dans le diagramme. □

On peut aussi définir un analogue de l'espace des fonctions de la Définition 2.5.2.

Définition 3.3.15. Soit A, B deux CDGA. On définit l'espace des morphismes par :

$$\mathrm{Map}_\bullet(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{CDGA}}(A \otimes \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^\bullet), B).$$

En particulier, $\mathrm{Map}_0(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{CDGA}}(A \otimes \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^0), B) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{CDGA}}(A, B)$.

Proposition 3.3.16. *Soit $f, g : A \to B$ deux morphismes de CDGA. Alors f est homotope de Sullivan à g si et seulement si f et g sont dans la même composante de* $\mathrm{Map}_\bullet(A, B)$.

Démonstration. C'est immédiat vue la définition de l'homotopie de Sullivan (où l'on remarque que $I = \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\Delta^1)$). □

3.3.2. L'équivalence

On arrive au théorème-clé de ce chapitre.

Proposition 3.3.17. *L'adjonction $\langle - \rangle : \mathrm{CDGA} \leftrightarrows s\mathrm{Set}^{\mathrm{op}} : \Omega^*_{\mathrm{PL}}$ se restreint en une adjonction de Quillen* $\mathrm{CDGA}_{\geq 2} \leftrightarrows s\mathrm{Set}^{\mathbb{Q},\mathrm{op}}_{\geq 2}$.

Démonstration. L'adjonction passe aux catégories 1-réduites (resp. 1-connexes). En effet, il est clair que si X est 1-réduit alors $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$ est 1-connexe, et que si A est 1-connexe alors $\langle A \rangle$ est 1-réduit. Pour démontrer que l'adjonction est compatible avec la localisation de Bousfield, nous devons montrer que Ω^*_{PL} envoie les fibrations (resp. fibrations acycliques) de $s\mathrm{Set}^{op,\mathbb{Q}}_{\geq 2}$ sur des fibrations (resp. fibrations acycliques) de CDGA. Par la Proposition 3.3.12, Ω^*_{PL} préserve les fibrations de $s\mathrm{Set}^{\mathrm{op}}$ (qui sont en fait les cofibrations), et les fibrations de $s\mathrm{Set}^{\mathrm{op},\mathbb{Q}}_{\geq 2}$ sont les mêmes qu'avant la localisation. De plus, grâce aux Théorème 3.1.8 et 3.3.11, Ω^*_{PL} préserve les équivalences faibles, ce qui permet de conclure. □

Théorème 3.3.18. *L'adjonction précédente induit une équivalence entre*

- $\mathrm{Ho}(s\mathrm{Set}^{\mathbb{Q},\mathrm{op}}_{\geq})_{tf}$ *: la sous-catégorie de la catégorie homotopique de* $\mathrm{Ho}(s\mathrm{Set}^{\mathbb{Q}}_{\geq 2})$ *des espaces* 1*-réduits dont l'homologie est de type fini*[6] *; et*
- $\mathrm{Ho}(\mathrm{CDGA}_{\geq 2})_{tf}$ *: la sous-catégorie de la catégorie homotopique de* $\mathrm{CDGA}^{\mathrm{op}}_{\geq 2}$ *des CDGA* 1*-connexes de type fini.*

Remarque 3.3.19. On ne peut pas vraiment parler d'une équivalence de Quillen entre $s\mathrm{Set}^{\mathbb{Q},\mathrm{op}}_{\geq 2,tf}$ et CDGA_{tf} : ces catégories ne sont ni complètes ni cocomplètes.

Remarque 3.3.20. On peut remplacer les ensembles simpliciaux par des espaces topologiques (cf. Section 2.5).

Pour démontrer le théorème, on va s'intéresser à l'unité et à la counité de l'adjonction dérivée $\mathbb{L}\langle - \rangle \dashv \mathbb{R}\Omega^*_{\mathrm{PL}}$. On doit en particulier s'intéresser au comportement de Ω^*_{PL} sur les CDGA cofibrantes.

[6] C'est-à-dire de dimension finie en chaque degré

Lemme 3.3.21. *Les objets cofibrants de* $\mathsf{CDGA}_{\geq 2}$ *sont les algèbres minimales.*

Démonstration. On a vu que les objets cofibrants de CDGA sont les rétracts d'algèbres de Sullivan (Proposition 3.2.35). Dans $\mathsf{CDGA}_{\geq 2}$, une algèbre de Sullivan est automatiquement minimale. De plus, tout rétract d'une algèbre de Sullivan connexe est encore une algèbre de Sullivan. □

Lemme 3.3.22. *Soit* $A = (S(V), d)$ *une CDGA minimale* 1*-connexe. Alors pour tout* $n \geq 2$*, il existe un accouplement non-dégénéré :*

$$\pi_n(\langle A \rangle) \times V^n \to \mathbb{Q}$$

qui induit, si V^n *est de dimension finie, un isomorphisme naturel*[7] *en* A *:*

$$V^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_n(\langle A \rangle), \mathbb{Q}).$$

Esquisse de démonstration (voir [**FelixHalperinThomas2001**] *pour plus de détails).* Pour simplifier les notations, on pose $X := \langle A \rangle$ dans la suite. Définissons d'abord l'accouplement. Comme X est simplement connexe, on a $\pi_n(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(s\mathsf{Set}_{\geq 2})}(S^n, X)$ où $S^n = \partial \Delta^{n+1}$. La classe d'homotopie rationnelle de $\gamma \in \pi_n(X)$ correspond donc à un élément (par adjonction) de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{CDGA})}(A, \Omega^*_{\mathrm{PL}}(S^n))$. On vérifie (Exemple 3.4.5) que $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(S^n) \simeq H^*(S^n) = S(x)/(x^2)$ où $\deg x = n$. La classe γ induit donc un élément $\gamma^* \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{CDGA})}(A, S(x)/(x^2))$. On définit alors l'accouplement de γ avec $v \in V^n \subset A^n$ comme le coefficient de x dans $\gamma^*(v)$. On vérifie que cela définit bien un accouplement bilinéaire qui ne dépend pas des choix de classes d'homotopie.

Cet accouplement induit une application linéaire $\varphi_n : V^n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_n(X), \mathbb{Q})$. Vérifions que c'est un isomorphisme. Soit r le plus petit entier tel que $\pi_r(X) \neq 0$. Pour $n < r$, on a $H^n(X) = 0$ par le théorème de Hurewicz, donc nécessairement $V^n = 0$ (car l'algèbre est minimale et 1-connexe) et donc φ_n est un isomorphisme. On en déduit que φ_r est aussi un isomorphisme, encore par le théorème de Hurewicz (car $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_r(X), \mathbb{Q}) \cong H^r(X; \mathbb{Q}) \cong V^r$).

On a donc montré que si X est un espace $(r-1)$-connexe alors φ_n est un isomorphisme pour $n \leq r$. On peut trouver une fibration $F \to X \xrightarrow{p} K(\pi_r(X), r)$ telle que $\pi_r(p)$ est l'identité ; l'espace F est donc r-connexe. On peut donc appliquer[8] le résultat à F et appliquer le lemme des cinq pour en déduire que φ_{r+1} est un isomorphisme. On conclut par récurrence. □

Lemme 3.3.23. *Soit* $A = (S(V), d)$ *une CDGA minimale* 1*-connexe et type fini. Alors la counité de l'adjonction dérivée du Théorème 3.3.18 en* A *est un quasi-isomorphisme :*

$$A \xrightarrow{\sim} \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle A \rangle).$$

[7] On utilise l'isomorphisme $(QA)^n \cong V^n$ pour définir la fonctorialité de V par rapport à A.

[8] On utilise implicitement que l'on connaît les modèles minimaux des fibrations, voir Section 3.4.3. Une personne consciencieuse peut vérifier qu'il n'y a pas de boucle logique.

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $V = V^n$ est concentré en un unique degré. Le lemme précédent nous dit que $X = \langle A \rangle$ est rationnellement équivalent à un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}^{\dim V}, n)$, dont on sait par ailleurs calculer la cohomologie rationnelle (par exemple avec des suites spectrales, et en utilisant le calcul classique de la cohomologie de $S^1 = K(\mathbb{Z}, 1)$) : c'est précisément l'algèbre symétrique engendrée par $\dim V$ générateurs en degré n. Dans ce cas, on a donc bien un quasi-isomorphisme $A = (S(V^n), 0) \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle A \rangle)$.

Pour le cas général, on filtre V en posant $V^{<n} = \bigoplus_{i<n} V^i$. Par minimalité, la différentielle de A se restreint à $S(V^{<n})$, et le quotient $S(V^{<n+1})/(S(V^{<n}))$. est isomorphe à $S(V^n)$ avec une différentielle nulle. Comme $V^{<2} = 0$, on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent pour montrer que le lemme est vrai pour $(S(V^{<3}), d)$. On a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(S(V^{<n}), d) \arrow[r, hook] \arrow[d] & (S(V^{<n+1}), d) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & (S(V^n), 0) \arrow[d] \\
\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle S(V^{<n}), d \rangle) \arrow[r] & \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle S(V^{<n+1}), d \rangle) \arrow[r] & \Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle S(V^n, 0) \rangle)
\end{tikzcd}$$

Par récurrence, le lemme est vrai pour la CDGA à gauche, et on a montré dans le paragraphe précédente qu'il est vrai pour celle de droite. Par le lemme des cinq, il est donc vrai pour celle du milieu. On conclut en passant à la colimite $A = \operatorname{colim}_n (S(V^{<n}), d)$. □

Lemme 3.3.24. *Soit X un ensemble simplicial fibrant* 1*-réduit. Alors l'unité de l'adjonction dérivée du Théorème 3.3.18 en X est une équivalence rationnelle :*

$$X \xrightarrow{\sim_{\mathbb{Q}}} \langle \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \rangle.$$

Démonstration. Par définition, on doit montrer que le morphisme de DGA suivant est un quasi-isomorphisme :

$$C^*(\langle \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \rangle) \to C^*(X).$$

Grâce au Théorème 3.3.11, il suffit en fait de montrer que le morphisme suivant est un quasi-isomorphisme :

$$\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \rangle) \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X).$$

Choisissons un remplacement cofibrant (donc minimal) $A = (S(V), d) \xrightarrow{\sim} \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$. On obtient alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*_{\mathrm{PL}}(\langle \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \rangle) \arrow[rr] & & \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \\
& A \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

On déduit alors du lemme précédent que f est un quasi-isomorphisme. □

Remarque 3.3.25. On peut montrer que $\langle A\rangle$ est un espace rationnel pour toute CDGA A. On obtient donc que la rationalisation $X_{\mathbb{Q}}$ d'un ensemble simplicial fibrant 1-réduit est $\langle \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)\rangle$.

Démonstration du Théorème 3.3.18. On vient de démontrer que l'unité et la counité de l'adjonction entre les catégories homotopiques correspondantes sont des isomorphismes (c.-à-d. respectivement des quasi-isomorphismes et des équivalences rationnelles). □

3.4. Applications

3.4.1. Modèles

Proposition 3.4.1. *Les classes d'équivalence rationnelle d'ensembles simpliciaux* 1*-réduits de type fini correspondent aux classes d'isomorphisme de CDGA minimales* 1*-connexes de type fini.*

Démonstration. Cela découle directement du Théorème 3.3.18 et de la description des CDGA cofibrantes dans $\mathrm{CDGA}_{\geq 2}$ (Lemme 3.3.21). □

Définition 3.4.2. Soit X un ensemble simplicial 1-réduit. Un *modèle* (*de Sullivan*) de X est une CDGA 1-connexe quasi-isomorphe à $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$. Un *modèle minimal* de X est un modèle qui est une CDGA minimale. Si Y est un espace topologique, un modèle (minimal) de Y est un modèle (minimal) de $S_\bullet(Y)$.

Corollaire 3.4.3. *Tout ensemble simplicial* 1*-réduit de type fini admet un unique modèle minimal de type fini à isomorphisme près.*

Ce corollaire est fondamental : le type d'homotopie rationnel d'un espace simplement connexe de type fini est donc entièrement déterminé par une donnée purement algébrique : une CDGA minimale 1-connexe de type fini. On peut « tout » calculer au sujet de ce type d'homotopie rationnel de manière purement combinatoire (si tant est que l'on arrive à déterminer un modèle minimal, ce qui est loin d'être trivial en général.) Par exemple :

Corollaire 3.4.4. *Soit X un ensemble simplicial* 1*-réduit de type fini et $A = (S(V), d)$ son modèle minimal.*

- *On a un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives $H^*(X; Q) \cong H^*(A)$.*
- *Pour tout $n \geq 2$, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels $V^n \cong \mathrm{Hom}(\pi_n(X), \mathbb{Q})$.*
- *Le crochet de Whitehead $\pi_{n+1}(X) \times \pi_{m+1}(X) \to \pi_{n+m+1}(X)$ est dual (sous l'isomorphisme précédent) de la partie quadratique de la différentielle, $d_2 : V^{n+m+1} \to V^{n+1} \otimes V^{m+1} \subset S^{(2)}(V)^{n+m+2}$.*

Exemple 3.4.5 (Sphères). Soit $n \geq 2$. Considérons la sphère $S^n = \Delta^n/\partial\Delta^n$. Sa cohomologie rationnelle est $A = H^*(S^n) = S(x)/(x^2)$ où $\deg x = n$.

- Si $n = 2k+1$ est impair, alors $H^*(S^{2k+1})$ est libre (donc minimale) sur le générateur x. Il existe un quasi-isomorphisme direct $H^*(S^{2k+1}) \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(S^{2k+1})$, obtenu en envoyant x sur n'importe quel forme volume. On obtient ainsi que S^{2k+1} a pour modèle minimal $S(x)$. On trouve donc immédiatement que $\pi_{2k+1}(S^{2k+1}) = \mathbb{Q}$ et $\pi_i(S^{2k+1}) = 0$ pour $2 \leq i \neq 2k+1$.

- Si $n = 2k$ est pair, alors $H^*(S^{2k})$ n'est pas libre. Un modèle minimal est donné par $M = (S(x,y), dy = x^2)$ (où $\deg y = 4k-1$). Il y a un quasi-isomorphisme $M \to \Omega^*_{\mathrm{PL}}(S^{2k})$, obtenu en envoyant x sur une forme volume et y sur une forme vérifiant $dy = x^2$ (qui existe nécessairement car $[x^2] = 0$ en cohomologie). On obtient alors que $H^*(S^{2k})$ est bien un modèle de S^{2k}. On peut également calculer les groupes d'homotopie rationnels : comme il y a deux générateurs dans le modèle minimal, $\pi_{2k}(S^{2k}) = \pi_{4k-1}(S^{2k}) = \mathbb{Q}$ et $\pi_i(S^{2k}) = 0$ pour $2 \leq i \neq 2k, 4k-1$.

On retrouve ainsi un théorème de Serre sur les groupes d'homotopie des sphères.

Exemple 3.4.6. Consider l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ (avec $n \geq 1$). Sa cohomologie est $H^*(\mathbb{CP}^n) = S(x)/(x^{n+1})$ où $\deg x = 2$. Comme précédemment, on trouve comme modèle minimal $A = (S(x,y), dy = x^{n+1})$.

Exemple 3.4.7. Soit A le modèle minimal de X et B le modèle minimal de Y. Alors le produit $X \times Y$ a pour modèle minimal $A \otimes B$. Le bouquet $X \vee Y$ a pour modèle minimal $A \oplus_{\mathbb{Q}} B$, le quotient de $A \oplus B$ par la relation $(1,0) = (0,1)$ avec comme multiplication $a \cdot b = 0$ si $a \in \bar{A}$ et $b \in \bar{B}$.

Exemple 3.4.8. Soit G un groupe de Lie de dimension finie. On peut montrer que le modèle minimal de G est une algèbre libre sur des générateurs de degré impair. En particulier, tous les groupes d'homotopie de degré pair d'un groupe de Lie sont de torsion.

3.4.2. Formalité

Les sphères, les espaces projectifs complexes et les groupes de Lie font partie d'une classe très particulière d'espace : leur cohomologie est un modèle (non nécessairement minimal) pour leur type d'homotopie rationnel.

Définition 3.4.9. Un ensemble simplicial X (1-réduit de type fini) est *formel* si sa cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbb{Q})$ est quasi-isomorphe comme CDGA à $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$.

Remarque 3.4.10. Sur un corps, un complexe de cochaînes est toujours quasi-isomorphe à sa cohomologie. Dans la définition précédente, il est essentiel de prendre en compte la structure de CDGA.

Exemple 3.4.11. Les sphères, les espaces projectifs complexe et les groupes de Lie sont formels.

Exemple 3.4.12. La suspension ΣX d'un espace quelconque est formelle.

Exemple 3.4.13. Le produit et le bouquet de deux espaces formels sont formels.

Exemple 3.4.14 ([**DeligneGriffithsMorganSullivan1975**]). Une variété de Kähler[9] compacte est formelle.

Exemple 3.4.15 ([**FelixOpreaTanre2008**]). Soit X un espace $(p-1)$-connexe $(p \geq 2)$ de dimension $\leq 3p-2$. Alors X est formel.

Exemple 3.4.16 ([**Hess2007**]). On peut trouver un example d'espace non-formel de la manière suivante. Considérons

$$A = (S(x_3, y_3, z_5), dz = xy).$$

On calcule facilement que $H^0(A) = \mathbb{Q}1$, $H^3(A) = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y$, $H^8(A) = \mathbb{Q}xz \oplus \mathbb{Q}yz$ et $H^{11}(A) = \mathbb{Q}xyz$ (et tous les autres groupes de cohomologie sont nuls). Comme A est minimale (donc cofibrante), s'il existait un zigzag de quasi-isomorphismes entre A et $H^*(A)$, alors il existerait un quasi-isomorphisme direct $f : A \to H^*(A)$. Pour des raisons de degré, on aurait nécessairement $f(z) = 0$, donc $f(xyz) = 0$. Le morphisme f ne peut donc pas être un quasi-isomorphisme.

Exemple 3.4.17 ([**FelixOpreaTanre2008**]). On peut trouver une variété non-formelle de la manière suivante. Soit $q : S^2 \times S^2 \to S^4$ l'application qui écrase $S^2 \vee S^2$ sur un point. Soit $M = S^7 \times_{S^4} (S^2 \times S^2)$, où $S^7 \to S^4$ est la fibration de Hopf. Le modèle minimal de M est alors donné par

$$(S(a_2, b_2, u_3, v_3, t_3), da = 0, db = 0, du = a^2, dv = b^2, dt = ab).$$

On peut vérifier que cette CDGA n'est pas formelle.

3.4.3. Modèles des fibrations

Les modèles de Sullivan sont particulièrement adaptés pour étudier les fibrations :

Théorème 3.4.18 ([**FelixHalperinThomas2001**])**.** *Soit $p : E \to B$ une fibration de fibre F, avec E et B simplement connexes de types finis. Supposons de plus que F est de type fini. Soit $A = (S(V), d)$ le modèle minimal de B et $i : (S(V), d) \to (S(V \oplus W), D)$ le modèle minimal de p. Alors le quotient $(S(W), \bar{d}) = (S(V \oplus W), D)/(S^{(\geq 1)}(V) \otimes S(W))$ est le modèle minimal de F.*

On utilise souvent ce théorème « à l'envers » : si on connaît le modèle minimal $(S(V), d)$ de B et le modèle minimal $(S(W), \bar{d})$ de F, on sait que le modèle minimal de E sera du type $(S(V \oplus W), D)$ où D étend d et induit $\bar{d}$ sur le quotient.

[9] C'est une variété symplectique (X, ω) munie d'une structure quasi-complexe intégrale J telle que $(u, v) \mapsto \omega(u, Jv)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur chaque espace tangent $T_x X$.

Exemple 3.4.19 (Espace des chemins). Soit (X, x_0) un espace pointé (simplement connexe de type fini). On définit son espace des chemins, muni de la topologie compacte-ouverte :

$$PX := \{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x_0\}.$$

Cet espace est contractible, une homotopie étant donnée par $H(\gamma, t) : s \mapsto \gamma(ts)$. Il y a une fibration $\pi : PX \to X$ donnée par $\pi(\gamma) = \gamma(1)$, et la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ n'est autre que l'espace des lacets ΩX. On obtient donc une fibration $\Omega X \to PX \to X$.

Soit $(S(V), d)$ le modèle minimal de X. Comme PX est contractile, on trouve que le modèle minimal de π est $(S(V \oplus V[-1]), D)$ où $V[-1]$ est une copie de V décalée en degré de 1 (dont on notera les éléments $\bar{v}$ avec $\deg \bar{v} = \deg v + 1$), avec comme différentielle $D(\bar{v}) = v \pm \bar{dv}$. Le modèle minimal de ΩX est donc donné par $(S(V[-1]), \bar{d} = 0)$: comme d est décomposable, $\bar{dv}$ s'annule dans le quotient. On « retrouve » ainsi le fait que les groupes d'homotopie de ΩX sont les mêmes que ceux de X, décalés en degré (ce qui est évident par la suite exacte longue de la fibration). On remarque de plus que ΩX est formel (ce qui peut se déduire du fait que c'est un H-espace[10]).

3.4.4. Type d'homotopie réel

Dans certains cas, le type d'homotopie rationnel d'un espace X est encore un invariant trop « fort ». On ne peut parfois pas se passer des nombres réels, par exemple quand on veut calculer des intégrales sur une variété. Dans cette section, on adapte la notion de modèle rationnel en la notion de « modèle réel ». Comme les deux corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ interviennent, on prendra garde à mettre des indices $(-)_\mathbb{Q}$ ou $(-)_\mathbb{R}$ pour indiquer dans quelle catégorie les objets ou morphismes se trouvent.

Définition 3.4.20. Un *modèle réel* d'un ensemble simplicial 1-réduit de type fini est une CDGA 1-connexe quasi-isomorphe à $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$. Un *modèle réel minimal* est un modèle réel qui est une CDGA minimale.

Proposition 3.4.21. *Si A est un modèle rationnel de X, alors c'est un modèle réel de X.*

Démonstration. Le $\mathbb{Q}$-module $\mathbb{R}$ est plat, car il est libre (comme tous les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, en supposant l'axiome du choix). Le foncteur $- \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ est donc exact. Si on a un quasi isomorphisme $A \xleftarrow{\sim_\mathbb{Q}} \cdot \xrightarrow{\sim_\mathbb{Q}} \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X)$, alors $A \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \xleftarrow{\sim_\mathbb{R}} \cdot \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim_\mathbb{R}} \Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ est un quasi-isomorphisme. □

Exemple 3.4.22. La réciproque est fausse. Pour un contre-exemple, il suffit d'exhiber deux CDGA 1-connexes à coefficients réels qui sont quasi-isomorphes sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$. Un exemple est donné par [**FelixOpreaTanre2008**]. Soit $a > 0$ un nombre rationnel. On définit :

$$A_a := (S(e_2, x_4, y_7, z_9), d_a),$$

[10] Un H-espace est un espace topologique X muni d'une application $\mu : X \times X \to X$ et d'un élément $e \in X$ tels que $\mu(e, -)$ et $\mu(-, e)$ sont homotopes à l'identité.

où la différentielle est donnée par :

$$d_a(e) = 0,\ d_a(x) = 0,\ d_a(y) = x^2 + ae^4, d_a(z) = e^5.$$

Alors $A_a \simeq_{\mathbb{Q}} A_{a'} \iff a/a'$ est le carré d'un nombre rationnel :

– Si $a/a' = \tau^2$ où $\tau \in \mathbb{Q}$, alors on définit un quasi-isomorphisme $\varphi : A_a \to A_{a'}$ par $\varphi(e) = e$, $\varphi(x) = \tau x$, $\varphi(y) = \tau^2 y$ et $\varphi(z) = z$.

– Réciproquement, si A_a et $A_{a'}$ sont quasi-isomorphes, alors comme elles sont minimales il existe un quasi-isomorphisme direct $\varphi : A_a \to A_{a'}$. En raisonnant sur les coefficients de φ on en déduit que a/a' est un carré (exercice).

En réutilisant la preuve du premier point et le fait que tout nombre rationnel est le carré d'un nombre réel, on en déduit que A_a et $A_{a'}$ sont toujours quasi-isomorphes sur $\mathbb{R}$. Donc par exemple $A_{\sqrt{2}}$ et A_1 sont quasi-isomorphes sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$.

Il existe cependant une réciproque partielle de la proposition. On rappelle qu'un espace X est formel (sur $\mathbb{Q}$) si $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \simeq_{\mathbb{Q}} H^*(X;\mathbb{Q})$. De façon analogue, un espace est dit formel sur $\mathbb{R}$ si $\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq_{\mathbb{R}} H^*(X;\mathbb{R})$.

Théorème 3.4.23 ([**FelixOpreaTanre2008**])**.** *Un ensemble simplicial* 1*-réduit de type fini est formel sur* $\mathbb{Q}$ *si et seulement si il est formel sur* $\mathbb{R}$*.*

Idée. La démonstration fait appel à la théorie de l'obstruction. Soit X est un espace comme dans l'énoncé. Pour un corps $\mathbb{K}$, il existe un complexe de chaînes $D_X^{\mathbb{K}}$ et une suite d'obstructions $d_2, d_3, \dots \in H_*(D_X^{\mathbb{K}})$ telles que X est formel si et seulement si $d_2 = d_3 = \dots = 0$. On peut montrer que le complexe $D_X^{\mathbb{R}}$ est obtenu comme $D_X^{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et que les obstructions sur $\mathbb{R}$ proviennent des obstructions sur $\mathbb{Q}$ ($d_i^{\mathbb{R}} = d_i^{\mathbb{Q}} \otimes 1$). On en déduit qu'elles sont nulles sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si elles sont nulles sur $\mathbb{R}$. □

Quand un espace est une variété, on peut utiliser les outils de la géométrie différentielle pour étudier son type d'homotopie réel :

Théorème 3.4.24 (Modèles réels et formes différentielles)**.** *Soit M une variété lisse simplement connexe de type fini, et $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(M)$ sa CDGA des formes différentielles de de Rham. Alors toute CDGA* 1*-connexe de type fini quasi-isomorphe à $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(M)$ est un modèle réel de M.*

Idée. Cela découle essentiellement du théorème de de Rham : $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(M) \simeq_{\mathbb{R}} C^*(X;\mathbb{R})$ (pour être précis, il faudrait réutiliser les propriétés de Ω^*_{PL} vues en Section 3.3.2). □

3.4.5. Théorème de dichotomie

Concluons par un exemple intéressant d'application de la théorie de Sullivan. (Nous n'énoncerons pas le théorème en entier car cela ferait appel à certaines notions que nous n'avons pas vues.)

Définition 3.4.25. Soit X un espace simplement connexe de type fini. Il est dit *rationnellement elliptique* si $\sum_{k\geq 2} \operatorname{rang} \pi_k(X) < +\infty$, et *rationnellement hyperbolique* sinon.

Définition 3.4.26. Soit X un espace simplement connexe de type fini. Si la cohomologie rationnelle de X est bornée, on appelle sa *dimension* l'entier maximal n tel que $H^n(X;\mathbb{Q}) \neq 0$.

Théorème 3.4.27 (Dichotomie, cas hyperbolique [**FelixHalperinThomas2001**])**.** *Soit X un espace rationnellement hyperbolique de dimension n. Alors :*

1. *La série $\sum_{k\leq m} \operatorname{rang} \pi_k(X)$ a une croissance exponentielle : il existe des constantes $A > 1$ et $C > 0$ telles que pour $m \gg 0$,*

$$\sum_{k\leq m} \operatorname{rang} \pi_k(X) \geq CA^m.$$

2. *La suite des nombres de Betti de ΩX a une croissance exponentielle.*

3. *Il n'y a pas de « gros trou » dans les groupes d'homotopie rationnelle : pour tout entier q, il existe un entier $q < p < q + n$ tel que $\operatorname{rang} \pi_p(X) > 0$.*

4. *(etc, voir* [**FelixHalperinThomas2001**]*).*

Pour le cas elliptique, on définit la caractéristique d'Euler homotopique :

$$\chi_\pi(X) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \operatorname{rang} \pi_k(X).$$

Théorème 3.4.28 (Dichotomie, cas elliptique [**FelixHalperinThomas2001**])**.** *Soit X un espace rationnellement elliptique de dimension n. Alors :*

1. *Les groupes d'homotopie $\pi_k(X)$ sont finis pour $k \geq 2n$.*

2. *La caractéristique d'Euler homotopique $\chi_\pi(X)$ est négative (donc $\operatorname{rang} \pi_{\mathrm{pair}}(X) \leq \operatorname{rang} \pi_{\mathrm{impair}}(X)$) tandis que la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ est positive.*

3. *La cohomologie rationnelle de X est à dualité de Poincaré.*

4. *(etc, voir* [**FelixHalperinThomas2001**]*).*

Exemple 3.4.29. Les tores $T^n = (S^1)^n$, les sphères S^n, les espaces projectifs complexes $\mathbb{CP}^n$ et les groupes de Lie compacts sont rationnellement elliptiques. La somme connexe de k copies de $S^3 \times S^2$ est rationnellement hyperbolique pour $k \geq 2$ (car sa caractéristique d'Euler est strictement négative).

3.5. Modèles de Quillen

Il existe une autre manière d'abord la théorie de l'homotopie rationnelle due à Quillen [**Quillen1969**] dont nous allons brièvement parler ici. Cette théorie utilise des algèbres de Lie différentielles graduées plutôt que des CDGA.

Définition 3.5.1. Une *algèbre de Lie différentielle graduée* (DGLA en anglais) est un complexe de chaînes $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[-,-] : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}$ (le «crochet») qui est antisymétrique et qui vérifie les relations de Jacobi et Leibniz :

$$[x,y] + (-1)^{\deg x \deg y}[y,x] = 0;$$

$$(-1)^{\deg x \deg z}[x,[y,z]] + (-1)^{\deg x \deg y}[y,[z,x]] + (-1)^{\deg y \deg z}[z,[x,y]] = 0;$$

$$d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{\deg x}[x,dy].$$

On note DGLA la catégorie des DGLA (graduées sur $\mathbb{N}$) et de leurs morphismes, et $\mathsf{DGLA}_{\geq 1}$ la sous-catégorie pleine des DGLA $\mathfrak{g}$ vérifiant $\mathfrak{g}_0 = 0$.

Exemple 3.5.2. Soit A une DGA. On peut définir une DGLA avec le *commutateur* $[a,b] = ab - \pm ba$.

Exemple 3.5.3. Soit X un ensemble simplicial. Alors on a une algèbre de Lie graduée (de différentielle nulle) donnée par $\mathfrak{g}_i = \pi_{i+1}(X)$ muni du crochet de Whitehead, que l'on peut voir comme étant le commutateur de la concaténation des lacets sur $\pi_i(\Omega X) \cong \pi_{i+1}(X)$. On définit ainsi un foncteur $\pi : s\mathsf{Set}_{\geq 2} \to \mathsf{DGLA}_{\geq 1}$. (À ne pas confondre avec le foncteur «groupoïde fondamental» du Chapitre 4 !)

Théorème 3.5.4 (Quillen [**Quillen1969**])**.** *Il existe une équivalence de Quillen*

$$\lambda : s\mathsf{Set}_{\geq 2} \to \mathsf{DGLA}_{\geq 1}.$$

De plus pour tout $X \in s\mathsf{Set}_{\geq 2}$*, on a* $\pi X \cong H_*(\lambda X)$.

Définition 3.5.5. Un *modèle de Quillen* d'un ensemble simplicial 1-réduit X est une DGLA quasi-isomorphe à λX.

Idée du Théorème 3.5.4. L'équivalence λ est obtenue en composant plusieurs équivalences :

$$s\mathsf{Set}_{\geq 2} \underset{\bar{W}}{\overset{G}{\rightleftarrows}} s\mathsf{Gp}_{\geq 1} \underset{\mathbb{G}}{\overset{\widehat{\mathbb{Q}}}{\rightleftarrows}} s\mathsf{CHA}_{\geq 1} \underset{\widehat{U}}{\overset{\mathrm{Prim}}{\rightleftarrows}} s\mathsf{LA}_{\geq 1} \underset{\Gamma}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \mathsf{DGLA}_{\geq 1}.$$

Expliquons rapidement les notations et les foncteurs.

- La catégorie $s\mathsf{Gp}_{\geq 1}$ est celle des groupes simpliciaux réduits, c.-à-d. les objets simpliciaux dans la catégorie des groupes $G_\bullet$ vérifiant $G_0 = 1$.

– La catégorie $s\mathsf{CHA}_{\geq 1}$ est celles des algèbres de Hopf complètes[11] simpliciales réduites.

– La catégorie $s\mathsf{LA}_{\geq 1}$ est celle des algèbres de Lie (sans différentielle ni graduation) simpliciales 1-réduites.

– Le foncteur $G : s\mathsf{Set}_{\geq 2} \to s\mathsf{Gp}_{\geq 1}$ (défini par Kan) est tel que si X est un ensemble simplicial, alors GX est un groupe simplicial dont la réalisation est l'espace des lacets de la réalisation de X. Son adjoint $\bar{W}$ représente l'espace classifiant d'un groupe simplicial.

– Le foncteur $\widehat{\mathbb{Q}} : s\mathsf{Gp}_{\geq 1} \to s\mathsf{CHA}_{\geq 1}$ envoie un groupe simplicial $G_\bullet$ sur la complétion de son algèbre de groupe $\widehat{Q}[G_\bullet]$. Son adjoint $\mathbb{G}$ envoie une algèbre de Hopf complète sur le groupe formé par ses éléments group-like (ceux vérifiant $\Delta x = x \otimes x$ et $\varepsilon(x) = 1$).

– Le foncteur $\mathrm{Prim} : s\mathsf{CHA}_{\geq 1} \to s\mathsf{LA}_{\geq 1}$ envoie une algèbre de Hopf complète sur l'algèbre de Lie formée par ses éléments primitifs (ceux vérifiant $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ et $\varepsilon(x) = 0$). Son adjoint $\widehat{U}$ est la complétion de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie (qui est une algèbre de Hopf).

– Le foncteur $N : s\mathsf{LA}_{\geq 1} \to \mathsf{DGLA}_{\geq 1}$ est le foncteur analogue du foncteur des chaînes normalisées de la Section 2.6. Son adjoint Γ est analogue de l'adjoint à droite dans la correspondance de Dold–Kan.

Pour démontrer le théorème de Quillen, on vérifie que chacune de ces catégories est une catégorie de modèles, et que chacune de ces adjonctions est une adjonction de Quillen. Quand on les compose toutes, on obtient une équivalence de Quillen. □

La plupart des énoncés obtenus dans le cadre des modèles de Sullivan (Section 3.4.1) ont une contrepartie « duale » dans le cadre des modèles de Quillen. On se référera à [**FelixHalperinThomas2001**]. On peut par exemple définir les DGLA libres $\mathbb{L}(V)$, les DGLA quasi-colibre $(\mathbb{L}(V), d)$, les DGLA de Sullivan et le DGLA minimales. Toute DGLA est quasi-isomorphe à une unique DGLA minimale à isomorphisme près, donc en particulier tout espace a un unique modèle de Quillen minimal.

On par exemple a vu (Section 3.4.3) que les modèles de Sullivan sont particulièrement adaptés pour étudier les fibrations. Dualement, les modèles de Quillen sont particulièrement adaptés pour étudier les attachements de cellules. Si $\mathfrak{g}_X$ est un modèle de Quillen d'un espace X et que $Y = X \cup_{S^{n-1}} D^n$ est obtenu en rattachant une cellule à X, alors un modèle de Quillen de Y peut s'obtenir en rajoutant un générateur à $\mathfrak{g}_X$, alors une différentielle qui mime la manière dont la cellule est rattachée à X.

[11] On rappelle qu'une algèbre de Hopf est un complexe de chaînes H muni d'un produit $\mu : H^{\otimes 2} \to H$, d'un « coproduit » $\Delta : H \to H^{\otimes 2}$ (Définition 3.5.6) et d'une antipode $\sigma : H \to H$ vérifiant des relations de compatibilité. Elle est complète si elle a une filtration $H = F_0 H \supset F_1 H \supset F_2 H \supset \dots$ telle que $F_1 H = \bar{H}$, l'algèbre $\mathrm{gr}\, H$ est engendrée par $\mathrm{gr}_1 H$, on a $H \cong \lim_i H/F_i H$, et le coproduit a en fait pour but le produit tensoriel complété $H \widehat{\otimes} H$.

Dualité de Koszul On peut se demander quel lien existe entre les modèles de Quillen et les modèles de Sullivan. En termes « modernes », une réponse est apportée par la *dualité de Koszul entre l'opérade des algèbres commutatives et l'opérade des algèbre de Lie*. Les opérades sont des objets combinatoires qui encodent des « types d'algèbres », par exemple les algèbres associatives, les algèbres commutatives, ou les algèbres de Lie. Elles furent initialement utilisées pour étudier les espaces de lacets en topologie algébrique [**BoardmanVogt1968**; **May1972**] et ont depuis de nombreuses applications. Pour une introduction à la théorie des opérades on pourra par exemple lire [**LodayVallette2012**] ou [**Fresse2017**].

Cette dualité de Koszul des opérades fut découverte par Ginzburg et Kapranov [**GinzburgKapranov1994**] après des idées fondatrices de Kontsevich [**Kontsevich1993a**]. Brièvement, cette dualité entre opérades explique certains phénomènes de dualité plus anciens en algèbre, dont nous allons donner un exemple (en rapport avec la théorie de l'homotopie rationnelle).

Définition 3.5.6. Une *cogèbre* différentielle graduée (*DGC* en anglais) est un complexe de chaînes C munie d'un « coproduit » $\Delta : C \to C \otimes C$ et d'une counité $\varepsilon : C \to \mathbb{Q}$ tels que les diagrammes suivant commutent :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes 1"] \\ C \otimes C \arrow[r, "1\otimes\Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[dr, "1\otimes\varepsilon"'] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon\otimes 1"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

et vérifiant le dual de la relation de Leibniz :

$$\Delta \circ d = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) \circ \Delta.$$

Cette cogèbre est *cocommutative* (*CDGC* en anglais) si $\tau \circ \Delta = \Delta$ où $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ est défini par $\tau(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$.

Définition 3.5.7. La cogèbre cocommutative (conilpotente) *colibre* sur un complexe de cochaînes V est[12] :

$$S^c(V) := \bigoplus_{n\geq 0} (V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}.$$

Son coproduit est donné par :

$$\Delta(v_1 \dots v_n) = \sum_{p+q=n} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(p,q)} (v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(p)}) \otimes (v_{\sigma(p+1)} \dots v_{\sigma(n)}),$$

où $\mathrm{Sh}(p,q) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$ est l'ensemble des (p,q)-battages (*shuffles* en anglais). Sa counité est donnée par la projection sur $(V^{\otimes 0})^{\mathfrak{S}_0} = \mathbb{Q}$. Sa différentielle est définie par :

$$d(v_1 \dots v_n) = \sum_{i=1}^{n} \pm v_1 \dots (dv_i) \dots v_n.$$

Elle est munie d'une projection canonique $\pi : S^c(V) \to V$.

[12]Pour rappel, V^G désigne le sous-espace des éléments invariants sous l'action du groupe G.

Proposition 3.5.8. *Soit C une cogèbre cocommutative et V un complexe de chaînes. Soit $f : C \to V$ un morphisme de complexes de chaînes. Alors il existe un unique morphisme de CDGC $\varphi_f : C \to S^c(V)$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & S^c(V) \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ C \arrow[ur, dashed, bend left, "\varphi_f"] \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

Démonstration. La preuve est formellement duale de la preuve qu'un morphisme de complexes $V \to A$ induit un unique morphisme de CDGA $S(V) \to A$. (Exercice : décrire explicitement φ_f.) □

Proposition 3.5.9. *Soit V un complexe de chaînes. Pour tout morphisme de complexe de chaînes $f : S^c(V) \to V[-1]$ de degré 1, il existe une unique codérivation*[13] *$\delta_f : S^c(V) \to S^c(V)$ qui fait commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & S^c(V)[-1] \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ S^c(V) \arrow[ur, dashed, bend left, "\delta_f"] \arrow[r, "f"] & V[-1] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Idem. (Exercice : décrire explicitement δ_f.) □

Définition 3.5.10. Soit $\mathfrak{g}$ une DGLA. Son *complexe de Chevalley–Eilenberg* $C_*^{CE}(\mathfrak{g})$ est la CDGC quasi-colibre :

$$C_*^{CE}(\mathfrak{g}) := (S^c(\mathfrak{g}[1]), d + \delta),$$

où la différentielle est la somme de la différentielle interne de $S^c(\mathfrak{g}[1])$ et de[14] :

$$\delta(x_1 \dots x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} \pm [x_i, x_j] x_1 \dots \hat{x}_i \dots \hat{x}_j \dots x_n.$$

Remarque 3.5.11. Cette différentielle supplémentaire est l'unique codérivation induite par $S^c(\mathfrak{g}[1]) \twoheadrightarrow (\mathfrak{g}[1]^{\otimes 2})^{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{[-,-]} \mathfrak{g}[2]$. On vérifie que sa somme avec la différentielle interne est de carré nul, ce qui découle des relations de Jacobi et Leibniz.

Définition 3.5.12. Soit C une CDGC. Son *complexe de Harrison* est la DGLA quasi-libre :

$$C_*^{\mathrm{Harr}}(C) := (\mathbb{L}(C[-1]), d + \delta)$$

où la différentielle est la somme de la différentielle interne de $\mathbb{L}(C[-1])$ et de l'unique dérivation d'algèbre de Lie induite par $C[-1] \xrightarrow{\Delta} ((C[-1])^{\otimes 2})^{\mathfrak{S}_2}[1] \subset \mathbb{L}(C[-1])[1]$.

[13] C'est-à-dire une application $\delta : C \to C$ telle que $\Delta\delta = (\delta \otimes 1 + 1 \otimes \delta)\Delta$.

[14] La notation $\dots \hat{x}_i \dots$ signifie que l'élément x_i est omis des $(\dots)$.

Théorème 3.5.13 (Dualité de Koszul)**.** *Les foncteurs* C_*^{CE} *et* C_*^{Harr} *sont adjoints l'un de l'autre. Il existe des structures de catégories de modèles sur* $\mathsf{DGLA}_{\geq 1}$ *et* $\mathsf{CDGC}_{\geq 2}$ *telles que cette adjonction est une équivalence de Quillen.*

Remarque 3.5.14. Cette adjonction est formellement similaire à l'adjonction bar/cobar entre les algèbres différentielles graduées et les cogèbres différentielles graduées. Le foncteur C_*^{CE} correspond à un foncteur bar, tandis que le foncteur C_*^{Harr} correspond à un foncteur cobar.

Théorème 3.5.15 (Équivalence entre modèles de Quillen et modèles de Sullivan)**.** *Soit X un ensemble simplicial* 1*-réduit de type fini. Alors il y a un zigzag de quasi-isomorphismes naturel :*

$$\Omega^*_{\mathrm{PL}}(X) \simeq (C_*^{CE}(\lambda X))^\vee$$

où $(C_*^{CE}(\lambda X))^\vee$ *est la CDGA duale de la CDGC de* $C_*^{CE}(\lambda X)$*.*

On peut donc passer d'un modèle de Sullivan à un modèle de Quillen et vice-versa.

Remarque 3.5.16. On peut même faire mieux que ça. Si $A = (S(V), d)$ est le modèle minimal de X, alors le dual $\mathfrak{g} := V^\vee[-1]$ est ce que l'on appelle une algèbre de Lie (différentielle graduée) *à homotopie près*, ou encore une *algèbre* L_∞. Considérons la restriction $d_{|V} : V \to S(V)$, qui se dualise en une suite d'applications $l_i : \mathfrak{g}^{\otimes i} \to \mathfrak{g}$ de degrés $i - 2$.

- Poids 1 : $l_1 =: \delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une différentielle de degré -1 et fait de $\mathfrak{g}$ un complexe de chaînes.
- Poids 2 : $l_2 =: [-,-]_2 : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \to \mathfrak{g}$ est une application bilinéaire de degré zéro. On vérifie que la commutativité de A entraîne que l_2 est antisymétrique, et la relation $d(ab) = (da)b \pm a(db)$ dans A entraîne que l_2 vérifie la relation de Leibniz. Elle ne vérifie cependant pas la relation de Jacobi en général, mais…
- Poids 3 : $l_3 =: [-,-,-]_3 : \mathfrak{g}^{\otimes 3} \to \mathfrak{g}$ est une application trilinéaire de degré 1 qui s'annule sur les shuffles (ce qui généralise l'antisymétrie). La compatibilité avec la différentielle s'exprime de la façon suivante :

  $$\begin{aligned}&[x,[y,z]_2]_2 \pm [y,[z,x]_2]_2 \pm [z,[x,y]_2]_2 \\ &\qquad = [dx,y,z]_3 \pm [x,dy,z]_3 \pm [x,y,dz]_3 \pm d[x,y,z]_3.\end{aligned}$$

  Le crochet l_3 définit donc une homotopie entre la relation de Jacobi pour l_2 et l'application nulle ; en un certain sens, cette relation de Jacobi est donc vérifiée « à homotopie près ».
- Poids 4 : $l_4 =: [-,-,-,-]_4 : \mathfrak{g}^{\otimes 4} \to \mathfrak{g}$ est quadrilinéaire de degré 2 est définit une homotopie pour une « relation de Jacobi supérieure » que vérifient l_2 et l_3. On peut informellement comprendre cette relation de la manière suivante. Le crochet l_3 définit plusieurs homotopies entre la relation de Jacobi et 0 suivant

l'ordre dans lequel on met les variables x, y, z. En mettant ces homotopies bout à bout, on obtient potentiellement une classe d'homologie dans $\mathfrak{g}$ décrite par cette relation de Jacobi supérieure, qui est donc tuée par l_4.

– La suite continue avec $l_5, l_6 \dots$: la différentielle de l_n tue une relation de Jacobi supérieure faisant intervenir $l_2, \dots, l_{n-1}$.

Le modèle de Quillen λX est une DGLA et c'est donc également une d'algèbre L_∞ : les crochets supérieurs $l_3, l_4, \dots$ s'annulent et la relation de Jacobi est strictement vérifiée. On peut alors montrer que λX est quasi-isomorphisme (comme algèbre L_∞) à $\mathfrak{g} = V^\vee[-1]$.

4. Infini-catégories

Remarque 4.0.1. Les catégories supérieures seront traitées en bien plus grand détail dans le cours *Catégories supérieures* de Muriel Livernet. Ce qui suit n'est qu'un bref survol de la théorie.

Il arrive parfois qu'une définition « naturelle » produise une catégorie où la composition n'est plus associative. Par exemple, si on définit naïvement le groupoïde fondamental πX d'un espace X comme la catégorie dont les objets sont les points de X et les morphismes sont les chemins entre deux points, on obtient quelque chose qui ressemble fortement à une catégorie, à ceci près que la composition (concaténation des chemins) n'est pas strictement associative, mais l'est seulement à homotopie près. L'unité et les inverses ne sont pas non plus stricts.

On peut résoudre ce problème en « strictifiant » : on remplace les chemins par les classes d'homotopie de chemins relativement aux extrémités. Mais ce faisant, on perd énormément d'information. La définition naïve du groupoïde fondamental contient toute l'information homotopique : $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes de la catégorie, et chaque composante connexe est équivalente à l'espace des lacets ΩX (basé en un point de la composante). En revanche, dans la définition stricte, il ne reste plus que l'information des composantes connexes et des groupes fondamentaux ; tout l'information « supérieure » (ici, en degré ≥ 2) a disparue. Le quotient par la relation d'homotopie est bien trop brutal.

Un phénomène similaire se produit dans l'étude des catégories de modèles. Étant donnée une catégorie de modèles C, sa catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ ne contient plus beaucoup d'informations sur C. Cela est notamment manifeste lorsque l'on s'intéresse aux (co)limites homotopiques : la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ admet en général très peu de (co)limites, et il est nécessaire de retourner dans le monde des catégories de modèles, d'y considérer des catégories de diagrammes, puis de repasser à la catégorie homotopique (schématiquement, $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})^I \neq \mathrm{Ho}(\mathsf{C}^I)$). Un des motivations possibles pour les ∞-catégories est d'introduire un objet à mi-chemin entre les catégories de modèles et leurs catégories homotopiques, qui perdraient moins d'informations et que l'on pourrait étudier avec de nouveaux outils.

Une autre motivation possible est la suivante. La définition de catégorie de modèles fait intervenir des classes de morphismes auxiliaires, les fibrations et les cofibrations. Ces classes auxiliaires ne servent en principe pas à définir la catégorie homotopie $\mathrm{Ho}(\mathsf{C}) = \mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$, qui ne dépend que de C et des équivalences faibles. Elles ne servent « qu'à » pouvoir calculer explicitement les morphismes dans la catégorie homotopique (qui seraient sinon donnés par des zigzags ingérables). Une autre motivation pour les ∞-catégories est l'inversion d'une classe d'équivalences faibles dans une catégorie donnée, sans devoir introduire toute la machinerie des (co)fibrations.

La philosophie générale des catégories supérieures (dont les ∞-catégories font partie) est illustrée par le groupoïde fondamental πX d'un espace X. Plutôt que de quotienter par la relation d'homotopie, on peut considérer une homotopie comme un chemin entre deux chemins. Si $\gamma, \gamma' : I \to X$ sont deux chemins avec $\gamma(0) = \gamma'(0) = x_0$, $\gamma(1) = \gamma'(1) = x_1$, et si H est une homotopie entre les deux, on peut représenter cela par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, bend left, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\gamma'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & x_1 \end{tikzcd}$$

Si $x_0 = x_1$ et que $\gamma = \gamma'$ est le chemin constant, alors H représente un élément de $\pi_2(X, x_0)$: en rajoutant l'information des homotopies (chemins entre chemins) dans le groupoïde fondamental, on récupère donc une information homotopique de degré 2. L'égalité des chemins est remplacée par l'existence d'un chemin entre deux chemins. On voit notamment que si l'on se donne trois chemins composables $\gamma, \gamma', \gamma''$, alors il existe un chemin entre $\gamma(\gamma'\gamma'')$ et $(\gamma\gamma')\gamma''$, et la composition est donc associative modulo un chemin entre chemins.

En termes catégoriques, si un chemin est un morphisme, alors une homotopie est un morphisme entre morphisme, ou 2-morphisme. Bien sûr, il peut exister de nombreux 2-morphismes entre deux morphismes données. On peut composer les 2-morphismes en concaténant les chemins, mais cette composition n'est pas associative ! Elle est seulement associative modulo un chemin entre homotopie (ou chemin entre chemin entre chemin, que l'on raccourcit en 3-morphisme).

On aura vite fait de voir qu'une fois lancés dans cette direction, on devra définir des n-morphismes pour tout $n \geq 1$ (et par souci de cohérence, nous appellerons les objets 0-morphismes). On peut composer les $(n+1)$-morphismes entre deux n-morphismes fixés, et toutes les compositions doivent vérifier des relations de compatibilité entre elles. On arrive alors à la notion de catégorie supérieure. Les catégories supérieures que nous allons considérer (groupoïdes fondamentaux, nerf d'une catégorie, localisation simpliciale d'une catégorie de modèles…) sont telles que les n-morphismes sont inversibles dès que $n \geq 2$; on les appelle les $(\infty, 1)$-catégories, ou simplement ∞-catégorie. Les groupoïdes fondamentaux vérifient même que tous les 1-morphismes sont inversibles ; on les appelle $(\infty, 0)$-catégories, ou ∞-groupoïdes.

Exprimer les relations de compatibilité dans une ∞-catégorie s'avère rapidement difficile. Il existe de nombreux modèles des ∞-catégories et on peut se référer à [**Bergner2018**] pour une vue d'ensemble de différents modèles. Dans ces notes, on s'intéressera particulièrement aux quasi-catégories, initialement développées par Joyal [**Joyal2008a** ; **Joyal2002**] et approfondies par Lurie [**Lurie2009a** ; **Lurie2016**] (voir également les travaux de Boardman–Vogt [**BoardmanVogt1973**] où elles s'appelaient complexes de Kan faibles). Nous allons également traiter le cas des catégories simpliciales. D'autres modèles sont par exemple donnés par les catégories topologiques, les catégories de Segal, ou les espaces de Segal complets.

4.1. Nerf d'une catégorie

Définition 4.1.1. Soit C une petite catégorie. Son *nerf* $N_\bullet C$ est un ensemble simplicial dont les n-simplexes sont données par les suites de n morphismes composables :

$$N_n C = \{X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n.\}$$

En particulier, $N_0 C$ est l'ensemble des objets de C.

Les applications de faces et dégénérescences sont données par :

$$\begin{aligned}
&d_0(X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n,\\
&d_i(X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1}\circ f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots \xrightarrow{f_n} X_n \ (1 < i < n),\\
&d_n(X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1},\\
&s_j(X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} X_n) = (X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} X_j \xrightarrow{\mathrm{id}_{X_j}} X_j \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} X_n).
\end{aligned}$$

On peut vérifier à la main que c'est un ensemble simplicial. Cependant, il y a un point de vue plus « théorique » qui permet de simplifier.

Définition 4.1.2. On note cat la catégorie des petites catégories.

Rappelons que les objets de Δ sont les $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$ pour $n \geq 0$ et que les morphismes sont les applications croissantes. Tout ensemble (partiellement) ordonné peut se voir comme une catégorie : on décrète que $\mathrm{Hom}_{[n]}(i,j)$ est un singleton si $i \leq j$, et qu'il est vide sinon. Un foncteur $[m] \to [n]$ est la même chose qu'une application croissante.[1] On obtient ainsi un foncteur $\Delta \to \mathrm{cat}$ qui envoie l'ensemble ordonnée $[n]$ sur la catégorie $[n]$; en d'autres termes, on a un objet cosimplicial dans la catégorie des petites catégories :

$$[\bullet] : \Delta \to \mathrm{cat},\ [n] \mapsto [n].$$

On remarque alors que le nerf $N_\bullet C$ est tout simplement donné par :

$$N_\bullet C = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cat}}([\bullet], C)$$

et est donc bien un ensemble simplicial. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cat}}([\bullet], -)$ est fonctoriel, on voit également que :

Proposition 4.1.3. *Le nerf définit un foncteur :*

$$N_\bullet : \mathrm{cat} \to s\mathrm{Set}.$$

Ce point de vue fait apparaître le fait que $N_\bullet$ est similaire au foncteur « ensemble singulier » $S_\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(\mathbb{\Delta}^\bullet, -)$. On verra par la suite que $N_\bullet$ a un adjoint à gauche (Proposition 4.2.44), qui peut se définir de façon analogue au foncteur de réalisation géométrique. On peut déjà voir immédiatement :

[1] En langage savant, la catégorie des ensembles partiellement ordonnés est une sous-catégorie pleine de la catégorie des catégories.

Proposition 4.1.4. *Le foncteur $N_\bullet$ préserve les limites.*

Exemple 4.1.5. Le lemme de Yoneda entraîne que $N_\bullet[n] \cong \Delta^n$.

Étudions les propriétés homotopiques du nerf.

Proposition 4.1.6. *Soit $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ deux foncteurs et $\eta : F \Rightarrow G$ une transformation naturelle. Alors η définit une homotopie simpliciale entre $N_\bullet F$ et $N_\bullet G$.*

Démonstration. On cherche à définir une application $H : N_\bullet\mathsf{C} \times \Delta^1 \to N_\bullet\mathsf{D}$ telle que $H_{|N_\bullet\mathsf{C}\times\{0\}} = N_\bullet F$ et $H_{|N_\bullet\mathsf{C}\times\{1\}} = N_\bullet G$. La donnée d'une transformation naturelle $\eta : F \Rightarrow G$ est équivalente (exercice) à la donnée d'un foncteur $\hat{\eta} : \mathsf{C} \times [1] \to \mathsf{D}$ (où $[1]$ est la catégorie avec deux objets $0, 1$ et un unique morphisme entre les deux) vérifiant $\hat{\eta}(c, 0) = F(c)$ et $\hat{\eta}(c, 1) = G(c)$. Si on applique le foncteur nerf, on obtient une application simpliciale :

$$N_\bullet\hat{\eta} : N_\bullet(\mathsf{C} \times [1]) \to N_\bullet\mathsf{D}.$$

Comme $N_\bullet$ préserve les limites et que $N_\bullet[1] = \Delta^1$, on obtient ainsi une application $H : N_\bullet\mathsf{C} \times \Delta^1 \to \mathsf{D}$. On vérifie alors que c'est bien l'homotopie voulue. □

Corollaire 4.1.7. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une adjonction entre deux petites catégories. Alors $N_\bullet\mathsf{C}$ et $N_\bullet\mathsf{D}$ sont homotopiquement équivalentes.*

Démonstration. L'unité $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow G \circ F$ et la counité $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ induisent des homotopies qui montrent que $N_\bullet F$ et $N_\bullet G$ sont inverses l'une de l'autre à homotopie près. □

Exemple 4.1.8. Si une petite catégorie C admet un objet initial, alors $N_\bullet\mathsf{C}$ est contractile : en effet, dans ce cas, l'inclusion $[0] \to \mathsf{C}$ qui envoie 0 sur l'objet initial admet un adjoint à droite. De même, si C admet un objet terminal alors $N_\bullet\mathsf{C}$ est contractile (l'inclusion admet alors un adjoint à gauche).

Ces exemples pourraient faire penser que le nerf n'a que peu d'intérêt ; il n'en est rien. Nous allons voir que le nerf définit une inclusion pleinement fidèle de cat dans *s*Set. En un certain sens, le nerf de C contient donc toute la structure de catégorie de C. Simplement, le type d'homotopie est un invariant trop imprécis pour récupérer cette structure de catégorie. Nous verrons dans la Section 4.2.6 que l'on peut définir une structure de catégorie de modèles sur *s*Set qui se prête mieux à l'étude des nerfs.

Répondons à la question suivante : quand est-ce qu'un ensemble simplicial est isomorphe au nerf d'une petite catégorie ? La réponse est donnée par des conditions ressemblant à celles définissant ensemble simplicial fibrant.

Introduisons d'abord une représentation graphique pour le nerf. Graphiquement, on pourra représenter un élément de $N_n\mathsf{C} = \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n, N_\bullet\mathsf{C})$ comme dans la Figure 4.1 : chacun des sommets $0, 1, \ldots, n$ est décoré par un objet de C, les arêtes $i \to i+1$ sont décorés par des morphismes $f_{i+1} : X_i \to X_{i+1}$, et on décore les autres arêtes par les compositions appropriées.

On rappelle les cornets $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$, définis pour $0 \le k \le n$ (Définition 2.3.2).

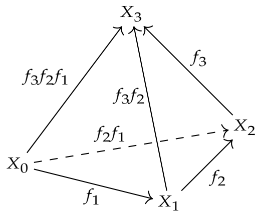


FIG. 4.1. : Représentation graphique d'un élément de $N_3\mathsf{C}$

Définition 4.1.9. Un cornet $\Lambda_k^n \subset \Delta^n$ est dit *interne* si $0 < k < n$. Les cornets $\Lambda_0^n \subset \Delta^n$ et $\Lambda_n^n \subset \Delta^n$ sont respectivement appelés le *cornet initial* et le *cornet final*.

On rappelle (Lemme 2.3.3) qu'une application simpliciale $\Lambda_k^n \to X$ est équivalente à la donnée de $(n-1)$-simplexes $x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n \in X_{n-1}$ vérifiant $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour tous i, j tels que l'équation aie un sens. On peut remplir le cornet s'il existe un n-simplexe $x \in X_n$ tel que $d_i x = x_i$.

Les cornets dans $N_\bullet\mathsf{C}$ se représentent comme dans la Figure 4.1 mais avec une flèche (et donc toutes les compositions qui la font intervenir) manquante, voir Figure 4.2.

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "f_2"] & \\ X_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[rr, dashed, "?"] & & X_2 \end{tikzcd}$$

FIG. 4.2. : Représentation graphique d'un cornet $\Lambda_1^2 \to N_\bullet\mathsf{C}$

On remarque sur la figure précédente que l'on peut toujours remplir un cornet de type Λ_1^2 : il suffit de mettre $f_2 f_1$ pour la troisième flèche, et comme le diagramme commute, on a bien un 2-simplexe. De plus, ce remplissage est unique. En revanche, on ne peut pas toujours remplir un cornet de type Λ_0^2 ou Λ_2^2 : pour ça, il faudrait que tous les morphismes soient inversibles. Plus généralement :

Lemme 4.1.10. *Soit* C *une petite catégorie. L'application de restriction* $\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Delta^n, N_\bullet\mathsf{C}) \to \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\Lambda_k^n, N_\bullet\mathsf{C})$ *est une bijection pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $0 < k < n$. *En d'autres termes,* $N_\bullet\mathsf{C} \to *$ *a la propriété de relèvement* unique *par rapport aux inclusions des cornets internes dans le simplexe* $\Lambda_k^n \subset \Delta^n$.

Démonstration. Soit $f : \Lambda_k^n \to N_\bullet\mathsf{C}$ une application simpliciale avec $0 < k < n$. Montrons qu'il existe une unique application $\Delta^n \to \mathsf{C}$ qui se restreint en f. On représente f par des $(n-1)$-simplexes $x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n \in N_{n-1}\mathsf{C}$ qui vérifient $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$. On rappelle que le cornet est interne, donc $k \neq 0, n$. Grâce à la relation $d_0 x_n = d_{n-1} x_0$, on peut écrire (en appliquant plusieurs fois les faces pour vérifier que les objets et les morphismes du milieu coïncident) :

$$x_0 = X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} X_n,$$
$$x_n = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1}.$$

On doit alors nécessairement définir $x = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n$ et on vérifie à la main que $d_i x = x_i$. □

Remarque 4.1.11. Ce lemme signifie que l'application canonique $N_\bullet \mathsf{C} \to \mathrm{cosk}_2 N_\bullet \mathsf{C}$ (où cosk est le foncteur cosquelette de la Remarque 2.3.8) est un isomorphisme.

Proposition 4.1.12. *Le foncteur $N_\bullet : \mathsf{cat} \to s\mathsf{Set}$ est pleinement fidèle, et son image est constitué des ensembles simpliciaux qui ont la RLP unique par rapport à tous les cornets internes.*

Démonstration. On a vu que si C est une petite catégorie, alors $N_\bullet \mathsf{C}$ vérifie la propriété de relèvement voulue. Réciproquement, soit X un ensemble simplicial qui a la RLP par rapport à tous les cornets internes. On définit une petite catégorie C de la façon suivante :

– Les objets de C sont les 0-simplexes X_0.

– Soit $x, y \in X_0$. L'ensemble des morphismes entre x et y est donné par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y) = \{f \in X_1 \mid d_1 f = x_0 \text{ et } d_0 f = x_1\}.$$

– L'identité de $x \in X_0$ est $s_0(x) \in X_1$.

– La composition est définie de la manière suivante. Soit x, y, z trois objets et $f : x \to y$, $g : y \to z$ deux morphismes. Alors f et g définissent ensemble un cornet $\Lambda^2_1 \to X$ (voir Figure 4.2). Il existe donc un unique $\gamma \in X_2$ tel que $d_0 \gamma = g$ et $d_2 \gamma = f$. On définit alors $g \circ f := d_1 \gamma$.

Il faut vérifier que la composition est associative et unitaire. L'associativité se démontre exactement comme dans la Proposition 2.5.18. L'unitarité découle de l'unicité des relèvement et des identités simpliciales (exercice).

Montrons maintenant que $N_\bullet$ est pleinement fidèle, c.-à-d. que $N_\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathsf{cat}}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \to \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(N_\bullet \mathsf{C}, N_\bullet \mathsf{D})$ est une bijection pour toutes les petites catégories C et D. Soit $\varphi : N_\bullet \mathsf{C} \to N_\bullet \mathsf{D}$ une application simpliciale, montrons qu'il existe un unique foncteur F tel que $N_\bullet F = \varphi$. Alors $\varphi_0 : N_0 \mathsf{C} \to N_0 \mathsf{D}$ définit une application des objets de C dans les objets de D. On doit nécessairement définir $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ par φ_0 sur les objets. Par définition du nerf, pour $x, y \in \mathsf{C} = N_0 \mathsf{C}$, on a une égalité entre $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, y)$ et $\{f \in N_1 \mathsf{C} \mid d_0 f = x \text{ et } d_1 f = y\}$. L'application φ_1 envoie ce sous-ensemble de $N_1 \mathsf{C}$ sur le sous-ensemble de $N_1 \mathsf{D}$ défini de manière similaire, grâce aux identités simpliciales. On doit donc définir F par φ_1 sur les morphismes, et on vérifie qu'avec cette définition on obtient un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tel que $N_\bullet F = \varphi$. □

Un nerf n'est en revanche généralement pas fibrant :

Définition 4.1.13. Un *groupoïde* est une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles.

Lemme 4.1.14. *Soit* C *une petit catégorie. Le nerf* $N_\bullet$C *est fibrant (c.-à-d. que l'on peut remplir tous les cornets, internes et externes) si et seulement si* C *est un groupoïde. Dans ce cas, les remplissages des cornets externes sont uniques.*

Démonstration. Supposons que $N_\bullet$C est fibrant. On peut donc remplir tous les cornets $\Lambda^2_0 \to N_\bullet \mathrm{C}$ et $\Lambda^2_2 \to N_\bullet \mathrm{C}$. Soit $f : x \to y$ un morphisme de C ; on définit un cornet $\Lambda^2_0 \to N_\bullet \mathrm{C}$ par :

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, dashed] & \\ x \arrow[ur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[rr, "f"] & & y \end{tikzcd}$$

En remplissant ce cornet, on obtient un inverse à droite g de f. En remplissant un cornet similaire de type $\Lambda^2_2 \to N_\bullet \mathrm{C}$, on obtient un inverse à gauche g' de f. On a $g = g'fg = g'$ donc $g = g'$ est un inverse de f, qui est donc un isomorphisme.

La réciproque et l'unicité se démontrent comme le Lemme 4.1.10, en utilisant les inverses dans C pour remplir les cornets externes. □

Exemple 4.1.15 (Exercice). Soit G un groupe, que l'on voit comme un groupoïde à un objet. Alors $N_\bullet G$ est un complexe de Kan. Ce complexe de Kan a le type d'homotopie d'un espace classifiant $BG = K(G, 1)$. On peut définir son revêtement universel (contractile) en considérant le nerf de la catégorie « indiscrète » E_G dont les objets sont G et avec un unique morphisme entre toute paire d'objets. Il y a un foncteur $E_G \to G$ qui envoie $g \to h$ sur hg^{-1}. On vérifie que $N_\bullet E_G$ est contractile, et que $N_\bullet E_G \to N_\bullet G$ est une fibration de Kan de fibre G.

4.2. Quasi-catégories

4.2.1. Définition

Informellement, une quasi-catégorie est un ensemble simplicial avec des propriétés qui miment celles que possèdent le nerf d'une catégorie. (Le nerf d'une catégorie sera d'ailleurs un exemple de quasi-catégorie.) La différence avec le nerf d'une catégorie réside dans l'unicité. Dans une catégorie normale, il n'y a qu'une seule manière de composer deux morphismes, qu'une seule identité par objet, qu'une seule « égalité d'associativité » entre $f(gh)$ et $(fg)h$. Dans une quasi-catégorie, il y a potentiellement plusieurs manières de composer deux morphismes ; mais deux compositions différentes seront équivalentes en un sens à définir. Comme il y a plusieurs manières de composer les morphismes, demander une égalité stricte pour l'associativité n'a pas de sens, mais on peut demander que toutes les manières de composer trois morphismes soient homotopes entre elles, et que toutes les homotopies entre telles homotopies soient homotopes entre elles, etc. La définition des quasi-catégories est une façon très compacte d'encapsuler toutes ces propriétés.

Définition 4.2.1. Une *quasi-catégorie* est un ensemble simplicial qui a la RLP par rapport aux inclusions de cornets internes $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$ $(0 < k < n)$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\forall"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

Un *quasi-foncteur*[2] est une application simpliciale entre deux quasi-catégories. On note qcat la catégorie des quasi-catégories et de leurs quasi-foncteurs.

Remarque 4.2.2. Certains auteurs utilisent parfois la terminologie « ∞-catégories » et « ∞-foncteurs » pour les quasi-catégories et les quasi-foncteurs. Le modèle donné par les quasi-catégories est en effet un des modèles les plus populaires – à l'heure actuelle – des ∞-catégories. On notera toutefois que suivant les applications, certains autres modèles peuvent s'avérer plus adaptés.

Exemple 4.2.3. Un ensemble simplicial fibrant est une quasi-catégorie.

Exemple 4.2.4. Si C est une petite catégorie, alors son nerf est une quasi-catégorie (Lemme 4.1.10). Un quasi-foncteur $N_\bullet \mathsf{C} \to N_\bullet \mathsf{D}$ est un foncteur $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ (Proposition 4.1.12). On ainsi obtient une inclusion pleinement fidèle de la catégorie des petites catégories dans la catégorie des quasi-catégories.

Définition 4.2.5. Un *quasi-groupoïde* est un ensemble simplicial fibrant.

Exemple 4.2.6. Le nerf d'un groupoïde est un quasi-groupoïde (Lemme 4.1.14).

4.2.2. Morphismes

En mimant les propriétés des nerfs, on arrive à la définition suivante :

Définition 4.2.7. Soit C une quasi-catégorie. Les *objets* sont les éléments de C_0. Soit $x, y \in \mathsf{C}_0$ deux objets. Les *morphismes* de x vers y sont les éléments de l'ensemble

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y) := \{f \in \mathsf{C}_1 \mid d_1 f = x \text{ et } d_0 f = y\} = \{x\} \times_{\mathsf{C}_0} \mathsf{C}_1 \times_{\mathsf{C}_0} \{y\}.$$

On note aussi $\mathrm{id}_x := s_0(x)$ l'*identité* de x.

La composition des morphismes dans une quasi-catégorie est plus complexe à décrire. Dans cette section, nous allons introduire un *espace* des morphismes (plutôt qu'un ensemble) entre deux objets d'une quasi-catégorie. Expliquons rapidement pourquoi cela est nécessaire pour pouvoir définir la composition.

En suivant la preuve du Lemme 4.1.10, on est tentés de définir la composition de la manière suivante. Soit $x, y, z \in \mathsf{C}_0$ trois objets et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(y,z)$

[2] La terminologie n'est pas standard.

deux morphismes. Les éléments $f, g \in C_1$ définissent ensemble un cornet $\Lambda^2_1 \to C$ (Figure 4.2). Grâce à la propriété de relèvement, il existe $\sigma \in C_2$ tel que $d_0\sigma = g$ et $d_2\sigma = f$. On pourrait alors vouloir définir $g \circ f = d_1\sigma$.

Malheureusement, cette définition n'en est pas une : contrairement au nerf d'une catégorie, le simplexe σ n'est pas unique ! Il peut exister potentiellement de nombreux simplexes vérifiant $d_0\sigma = g$ et $d_2\sigma = f$. A priori, les différentes compositions possibles $(d_1\sigma)$ n'ont rien à voir entre elles. Cependant, si on se donne deux simplexes $\sigma, \sigma' \in C_2$ vérifiant les équations précédentes, on obtient un cornet $\Lambda^3_1 \to C$. En utilisant la propriété de relèvement, on trouve $\omega \in C_3$ tel que $d_0\omega = s_1 g$, $d_2\omega = \sigma$, et $d_3\omega = \sigma'$ (voir Figure 4.3). On trouve alors que $H = d_1\omega$ est une homotopie entre $d_1\sigma$ et $d_1\sigma'$.

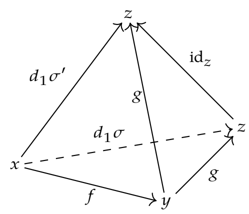


Fig. 4.3. : Homotopie entre les $g \circ f$

L'ensemble des compositions possibles de deux morphismes est en fait un espace. L'argument ci-dessus montre qu'il est connexe. Mais les homotopies aussi sont reliées par des homotopies entre homotopies, etc. On trouve alors que l'espace des compositions possibles est contractile, ce qui renvoie bien à l'intuition derrière les catégories supérieures du début du chapitre.

On rappelle la définition de l'espaces des applications simpliciales entre deux ensembles simpliciaux (Définition 2.5.2).

Définition 4.2.8. Soit C une quasi-catégorie et $x, y \in C_0$ des objets. L'*espace des morphismes* de x vers y est :

$$\mathrm{Map}_C(x, y) := \{x\} \times_C \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^1, C) \times \{y\}.$$

Concrètement, cet ensemble simplicial est le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}_C(x,y) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^1, C) \arrow[d, "(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)"] \\ * \arrow[r, "(x,y)"] & C \times C \end{tikzcd}$$

où $* \xrightarrow{(x,y)} C \times C$ est l'application constante égale à (x, y), et $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1 : \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^1, C) \to \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^0, C) \cong C$ sont obtenues par précomposition par $\partial^0, \partial^1 : \Delta^0 \to \Delta^1$.

Proposition 4.2.9. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $x, y \in C_0$ *deux objets. Les* 0*-simplexes de* $\mathrm{Map}_C(x, y)$ *sont les morphismes de* x *vers* y *:*

$$\mathrm{Map}_C(x, y)_0 = \mathrm{Hom}_C(x, y).$$

Démonstration. Les produits fibrés dans $s\mathrm{Set}$ se calculent dimension par dimension. En dimension 0, on obtient $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y)_0 = \{x\} \times_{\mathsf{C}_0} \times \mathrm{Map}_0(\Delta^1, \mathsf{C}) \times_{\mathsf{C}_0} \{y\}$. Or $\mathrm{Map}_0(\Delta^1, \mathsf{C}) = \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Delta^1, \mathsf{C}) \cong \mathsf{C}_1$ et on trouve la Définition 4.2.7. □

Proposition 4.2.10. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $x, y \in \mathsf{C}_0$ *deux objets. L'espace des morphismes* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y)$ *est un quasi-groupoïde, c.-à-d. c'est un complexe de Kan.*

Démonstration. L'inclusion $\Delta^0 \sqcup \Delta^0 \xrightarrow{(\partial^0, \partial^1)} \Delta^1$ est une cofibration. Il s'ensuit que son application induite $\mathrm{Map}_{\bullet}(\Delta^1, \mathsf{C}) \xrightarrow{(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)} \mathsf{C} \times \mathsf{C}$ est une fibration (Proposition 2.5.6). Comme $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y) \to *$ est le tiré en arrière d'une fibration, c'est donc aussi une fibration. L'ensemble simplicial $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y)$ est donc fibrant, donc c'est par définition un quasi-groupoïde. □

Proposition 4.2.11 (Exercice)**.** *Soit* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *un quasi-foncteur entre deux quasi-catégories. Alors la postcomposition* $F \circ - : \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y) \to \mathrm{Map}_{\mathsf{D}}(F_0(x), F_0(y))$ *est une application simpliciale.* □

Proposition 4.2.12. *Soit* X *un ensemble simplicial et* C *une quasi-catégorie. Alors* $\mathsf{C}^X := \mathrm{Map}_{\bullet}(X, \mathsf{C})$ *est une quasi-catégorie.*

Démonstration. Similaire à la Proposition 2.5.6, à ceci près que l'on ne s'intéresse qu'aux propriétés de relèvement par rapport aux cornets internes. □

Remarque 4.2.13. Cette proposition est à comparer à la discussion de la Section 1.7. Si C est une catégorie de modèles, il est n'est pas évident de donner une structure de catégorie de modèles à la catégorie des diagrammes C^I : il faut choisir les bonnes fibrations et les bonnes cofibrations, et imposer des conditions sur I. Ici, si C est une quasi-catégorie, alors C^I est automatiquement une quasi-catégorie. (La différence réside bien sûr dans les calculs : une fois la structure de catégorie de modèles définie sur C^I, calculer une (co)limite homotopique se fait suivant une procédure claire, ce qui n'est pas forcément le cas dans le cadre ∞-catégorique.)

Définition 4.2.14. Soit C, D deux quasi-catégories. La quasi-catégorie des quasi-foncteurs de C vers D est $\mathrm{Map}_{\bullet}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$. Les *quasi-transformations naturelles* sont les 1-simplexes de cette quasi-catégorie.

Remarque 4.2.15. Définir un quasi-foncteur entre deux quasi-catégories n'est pas une tâche facile : il faut le définir sur les objets et les morphismes, mais aussi sur les 2-simplexes (homotopies), les 3-simplexes (homotopies entre homotopies), etc., de manière cohérente.

4.2.3. Composition

On rappelle que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(y,z)$ sont deux morphismes composables, alors une composition possible de g et f est un morphisme $h : x \to z$ tel qu'il existe $\sigma \in \mathsf{C}_2$ vérifiant $d_0\sigma = g$, $d_1\sigma = h$ et $d_2\sigma = f$ (voir la Figure 4.2). Ces compositions possibles sont en fait les 0-simplexes d'un ensemble simplicial.

Définition 4.2.16. Soit C une quasi-catégorie, $x, y, z \in C_0$ trois objets et $f \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(y, z)$ deux morphismes composables. L'espace des *compositions possibles* de f avec g est définie par le produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Comp}_\bullet(g;f) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^2, C) \arrow[d, "i^*"] \\ * \arrow[r, "(g,f)"] & \mathrm{Map}_\bullet(\Lambda^2_1, C) \end{tikzcd}$$

où $i : \Lambda^2_1 \to \Delta^2$ est l'inclusion et $(g, f) : * \to \mathrm{Map}_\bullet(\Lambda^2_1, C)$ est l'application constante égale au cornet de la Figure 4.2.

Concrètement, une composition possible de g et f est un 2-simplexe σ vérifiant $d_2\sigma = f$ et $d_0\sigma = g$. Une composition possible n'est donc pas simplement un morphisme $h = d_1\sigma$, c'est aussi un 2-simplexe qui « témoigne » du fait que h est un candidat pour $g \circ f$. Pour $\sigma \in \mathrm{Comp}_\bullet(g;f)$, on note :

$$g \circ_\sigma f := d_1\sigma$$

pour le morphisme candidat à être $g \circ f$.

L'objectif de cette section est de montrer que $\mathrm{Comp}_\bullet(g;f)$ est contractile. Cela aura pour corollaire que toutes les compositions possibles $g \circ_\sigma f$ de deux morphismes donnés seront homotopes, en un sens qui reste encore à définir.

Théorème 4.2.17 (Joyal [**Joyal**]). *Soit* C *une quasi-catégorie. L'application de restriction* $i^* : \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^2, C) \to \mathrm{Map}_\bullet(\Lambda^2_1, C)$ *est une fibration acyclique.*

Démonstration. La preuve que

$$i^* : \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^2, C) \to \mathrm{Map}_\bullet(\Lambda^2_1, C) \cong \mathrm{Map}_\bullet(\Lambda^2_1, C) \times_{\mathrm{Map}(\Lambda^2_1, *)} \mathrm{Map}_\bullet(\Delta^2, *)$$

est fibration est une adaptation de la preuve de la Proposition 2.5.6 en considérant la RLP par rapport aux cornets internes. □

Remarque 4.2.18. La réciproque est également vraie : si i^* est une fibration acyclique, alors C est une quasi-catégorie [**Lurie2009a**].

Corollaire 4.2.19. *Soit* C *une quasi-catégorie,* $x, y, z \in C_0$ *trois objets et* $f \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(y, z)$ *deux morphismes composables. Alors* $\mathrm{Comp}_\bullet(g;f)$ *est contractile.*

Démonstration. L'application $\mathrm{Comp}_\bullet(g;f) \to *$ est tirée en arrière d'une fibration acyclique, c'est donc elle-même une fibration acyclique. □

Expliquons maintenant en quoi cela entraîne que toutes les compositions possibles de g et f sont « équivalentes ».

Lemme 4.2.20. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(x, y)$ *deux morphismes de* C. *S'il existe un* 2*-simplexe qui remplit l'un des diagrammes suivants, alors il existe des* 2*-simplexes qui remplissent les autres :*

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "\mathrm{id}_y"] & \\ x \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "f"] & \\ x \arrow[ur, "\mathrm{id}_x"] \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "\mathrm{id}_y"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \exists \sigma, g \circ_\sigma \mathrm{id}_x = f &\iff \exists \sigma, \mathrm{id}_y \circ_\sigma g = f \\ &\iff \exists \sigma, f \circ_\sigma \mathrm{id}_x = g \\ &\iff \exists \sigma, \mathrm{id}_y \circ_\sigma f = g. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour chacune des équivalences, on va utiliser les dégénérescences de f et g pour définir des cornets internes que l'on remplit. Par exemple, supposons que $g \circ_\sigma \mathrm{id}_x = f$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{C}_2$. Alors on a un cornet $(s_1 g, -, s_0 g, \sigma) : \Lambda^3_1 \to \mathrm{C}$. On le remplit pour obtenir $\omega \in \mathrm{C}_3$, et alors $\tau = d_1 \omega$ vérifie $\mathrm{id}_y \circ_\tau f = g$:

$$\begin{tikzcd} & y & \\ & y \arrow[u, "\mathrm{id}_y"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_x"'] \arrow[uur, bend left, "g"] & & x \arrow[ul, "g"'] \arrow[uul, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

□

Définition 4.2.21. Soit C une quasi-catégorie. Deux morphismes $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(x, y)$ sont *équivalents*[3] (noté $f \simeq g$) s'ils vérifient les conditions du lemme précédent.

Lemme 4.2.22. *L'équivalence de morphismes dans une quasi-catégorie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. La réflexivité se déduit des dégénérescences. La symétrie découle de la définition. La transitivité se démontre comme dans le lemme précédent. □

On rappelle que $\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x, y)$ est un complexe de Kan (Proposition 4.2.10), donc ses composantes connexes sont bien définies (voir Section 2.5.2).

Lemme 4.2.23. *Deux morphismes* $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(x, y)$ *d'une quasi-catégorie* C *sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de* $\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x, y)$.

Démonstration. On peut décrire $\Delta^1 \times \Delta^1$ comme deux Δ^2 recollés le long d'un Δ^1 commun (Figure 4.4). On a donc :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{sSet}}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathrm{C}) = \{(\sigma, \tau) \in \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \mid d_1 \sigma = d_1 \tau\}.$$

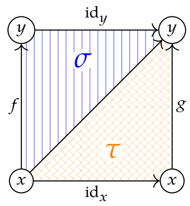


FIG. 4.4. : Représentation d'un élément de $\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x,y)_1$

Par définition du produit fibré, on a de plus

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x,y)_1 &= \{(\sigma,\tau) \in \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathrm{C}) \mid d_0\sigma = s_0 y \text{ et } d_2\tau = s_0 x\} \\ &= \{(\sigma,\tau) \in \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \mid d_0\sigma = s_0 y,\ d_1\sigma = d_1\tau,\ d_2\tau = s_0 x\}.\end{aligned}$$

Supposons que f et g sont dans la même composante connexe. Il existe $\varphi = (\sigma,\tau)$ comme ci-dessus tel que $d_1\varphi = d_2\sigma = f$ et $d_0\varphi = d_0\tau = g$. Posons $h = d_1\sigma = d_1\tau$. Alors le simplexe σ donne une équivalence entre f et h, tandis que le simplexe τ donne une équivalence entre g et h. On conclut par transitivité et symétrie.

Réciproquement, si f et g sont équivalents, alors l'équivalence remplit une moitié du diagramme de la Figure 4.4 ; on remplit l'autre moitié par une dégénérescence (de f ou g) pour obtenir un chemin dans $\mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x,y)$. □

Corollaire 4.2.24. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(x,y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(y,z)$ *deux morphismes composables de* C. *Tous les morphismes* $h \in \mathrm{Comp}(g;f)$ *sont équivalents au sens de la Définition 4.2.21.*

Démonstration. L'ensemble simplicial $\mathrm{Comp}(g;f)$ est contractile et n'a donc qu'une seule composante connexe. □

Étudions maintenant l'associativité des compositions possibles.

Proposition 4.2.25. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(x,y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(y,z), h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(z,w)$ *trois morphismes composables deux à deux. Alors pour toutes les compositions possibles on a :*

$$h \circ_\kappa (g \circ_\sigma f) \simeq (h \circ_\tau g) \circ_\lambda f.$$

Démonstration. On fixe κ, σ et τ. Grâce au corollaire précédent, il suffit de trouver $\lambda \in \mathrm{C}_2$ tel que $d_2\lambda = f$ et $d_0\lambda = h \circ_\tau g (= d_1\tau)$ et $d_1\lambda = h \circ_\kappa (g \circ_\sigma f)$. On définit un cornet $(\tau,\kappa,-,\sigma) : \Lambda^3_2 \to \mathrm{C}$ (exercice : faire un dessin). On remplit de cornet dont on prend la face d_2 pour obtenir λ. □

[3] On dit parfois « homotopes ».

4.2.4. Catégorie homotopique

Grâce à toutes les propriétés que nous venons de démontrer, nous pouvons définir :

Définition 4.2.26. Soit C une quasi-catégorie. La *catégorie homotopique* de C, notée πC, est la catégorie dont les objets sont les 0-simplexes de C et les morphismes sont les classes d'équivalence (au sens de la Définition 4.2.21) de morphismes de C. La composition de deux classes d'équivalences de morphismes $[f]$, $[g]$ est l'unique classe d'équivalence de $\mathrm{Comp}(g;f)$. Les unités sont les classes des morphismes $\mathrm{id}_x = s_0 x$.

Corollaire 4.2.27. *Il y a un foncteur* qcat → cat *qui associe à une quasi-catégorie sa catégorie homotopique.* □

Remarque 4.2.28. A priori, cette construction n'a rien à voir avec celle de la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles. Nous allons les comparer dans la Section 4.5.

Proposition 4.2.29. *Il y a deux transformations, naturelles respectivement en* $\mathsf{C} \in \mathrm{qcat}$ *et* $\mathsf{D} \in \mathrm{cat}$ *:*

$$\mathsf{C} \to N_\bullet(\pi\mathsf{C}), \qquad \pi(N_\bullet\mathsf{D}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}.$$

La transformation naturelle $\pi(N_\bullet\mathsf{D}) \to \mathsf{D}$ *est une équivalence pour toute catégorie* D.

Démonstration. Les deux transformations naturelles sont essentiellement induites par l'identité. Le fait que la second transformation naturelle soit une équivalence en chaque catégorie découle du fait que $N_\bullet : \mathrm{cat} \to \mathrm{qcat}$ est pleinement fidèle. □

Définition 4.2.30. Soit C une quasi-catégorie. Un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)$ est appelé un *isomorphisme* si $\pi(f) \in \mathrm{Hom}_{\pi\mathsf{C}}(x,y)$ est en est un.

Proposition 4.2.31 (Exercice)**.** *Une quasi-catégorie* C *est un quasi-groupoïde si et seulement si tous ses morphismes sont des isomorphismes.*

Exemple 4.2.32. Soit X un espace topologique. L'ensemble singulier $S_\bullet(X)$ étant fibrant, c'est un quasi-groupoïde. Par la Proposition 2.5.20, $\pi S_\bullet(X)$ est le groupoïde fondamental de X. On peut donc voir $S_\bullet(X)$ comme une version « supérieure » du groupoïde fondamental, qui retient de l'information en dimension > 1.

4.2.5. Catégories non-petites

Jusqu'à présent, nous nous sommes focalisés sur les petites catégories, c'est-à-dire les catégories dont les objets et les morphismes forment des ensembles. Cependant, de nombreux exemples importants de catégories de modèles ne sont pas petites : comme elles sont complètes et cocomplètes par définition, ce n'est quasiment jamais le cas ! Dans cette section, nous expliquons rapidement comment généraliser la définition des quasi-catégories pour englober les quasi-catégories non-petites.

D'un point de vue ensembliste, une solution est de considérer un « univers » plus large, tels que tous les ensembles de l'univers initial forment un ensemble dans le nouvel univers. Pour des informations sur ce point de vue, on pourra par exemple se référer à [**Lurie2009a**]. Notamment, il est nécessaire de rajouter un axiome supplémentaire à ZFC : l'existence de cardinaux fortement inaccessibles. On note Cat la catégorie des catégories non-nécessairement petites.

On peut alors définir les « classes simpliciales » comme les objets simpliciaux dans ce nouvel univers. Une classe simpliciale est une suite de classes[4] $X_\bullet = \{X_n\}_{n\geq 0}$ munies d'application $d_i : X_n \to X_{n-1}$ et $s_j : X_n \to X_{n+1}$ qui vérifient les identités simpliciales. Si $\mathsf{C} \in \mathsf{Cat}$ est une catégorie quelconque, on peut définir son nerf $N_\bullet \mathsf{C} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}([\bullet], \mathsf{C})$ de la façon habituelle. Tous les résultats de la Section 4.1 s'appliquent encore, en remplaçant « ensemble » par « classe » là où c'est nécessaire.

On peut également définir les quasi-catégories comme les classes simpliciales qui ont la RLP par rapport aux inclusions de cornets internes $\Lambda^n_k \subset \Delta^n$ (pour $0 < k < n$). Là encore, tous les résultats de la Section 4.2 s'appliquent, en remplaçant « ensemble » par « classe ». On note QCat la catégorie des quasi-catégories non-nécessairement petites. Le nerf définit un foncteur $N_\bullet : \mathsf{Cat} \to \mathsf{QCat}$, et la catégorie homotopique un foncteur $\pi : \mathsf{QCat} \to \mathsf{Cat}$.

4.2.6. Structure de modèles de Joyal

Dans cette section, nous allons étudier les équivalences entre quasi-catégories. Nous avons vu plus tôt que celles-ci ne pouvaient pas être simplement données par les équivalences d'homotopie faibles : si une catégorie C a un objet initial ou terminal, alors $N_\bullet \mathsf{C}$ est contractile. Il est donc nécessaire d'avoir un invariant plus fin. Nous allons également expliquer comment ces équivalences peuvent se placer dans le cadre d'une catégorie de modèles sur les ensembles simpliciaux dont les objets fibrants seront exactement les quasi-catégories et dont les équivalences faibles entre quasi-catégorie modéliseront les équivalences de catégories.

Définition 4.2.33. Une *équivalence catégorique*[5] est une application simpliciale $f : X \to Y$ telle que pour toute quasi-catégorie C, l'application simpliciale induite $f^* : \mathrm{Map}(Y, \mathsf{C}) \to \mathrm{Map}(X, \mathsf{C})$ est une équivalence.

Définition 4.2.34. La *structure de Joyal* sur $s\mathsf{Set}$ est donnée par $s\mathsf{Set}^J := (s\mathsf{Set}, \mathcal{W}^I, \mathcal{C}^I, \mathcal{F}^I)$, où

- les équivalences faibles $\mathcal{W}^J$ sont les équivalences catégoriques ;
- les cofibrations $\mathcal{C}^J = \mathcal{C}$ sont les inclusions ;
- les fibrations $\mathcal{F}^J$ sont les applications simpliciales ayant la RLP par rapport aux cofibrations acycliques.

[4] C'est ainsi que l'on nomme les ensembles du nouvel univers qui n'étaient pas forcément des ensembles dans l'ancien. Un exemple de classe serait l'ensemble de tous les ensembles de l'ancien univers.

[5] Joyal les appelait « équivalences catégoriques faibles ».

Théorème 4.2.35 (Joyal [**Joyal**], Lurie [**Lurie2009a**])**.** *La structure de Joyal sur* $s\mathrm{Set}$ *définit une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée et propre à gauche.*

Remarque 4.2.36. Dans la démonstration de Lurie, les équivalences catégoriques sont définies différemment, mais le résultat final est le même (voir [**Lurie2009a**]).

Proposition 4.2.37 ([**Lurie2009a**])**.** *Les objets fibrants dans la structure de Joyal sont exactement les quasi-catégories.*

Remarque 4.2.38. On peut montrer qu'une équivalence catégorique est une équivalence d'homotopie faible (exercice : le faire, en utilisant qu'un complexe de Kan est une quasi-catégorie). La structure standard sur $s\mathrm{Set}$ est donc une localisation de Bousfield à gauche de $s\mathrm{Set}^J$; de façon équivalente, $s\mathrm{Set}^J$ est une délocalisation de Bousfield à gauche de la structure standard. En particulier, on a une adjonction de Quillen $\mathrm{id} : s\mathrm{Set} \leftrightarrows s\mathrm{Set}^J : \mathrm{id}$.

Exemple 4.2.39 (Exercice). Une fibration acyclique est une équivalence catégorique.

Proposition 4.2.40 (Exercice)**.** *Soit* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *une équivalence de catégories. Alors* $N_\bullet F : N_\bullet \mathsf{C} \to N_\bullet \mathsf{D}$ *est une équivalence catégorique.*

Considérons le foncteur $R : s\mathrm{Set} \to s\mathrm{Set}$ de remplacement fibrant dans la structure de Quillen (qui associe un complexe de Kan à un ensemble simplicial quelconque). Intuitivement, ce foncteur associe à une quasi-catégorie son quasi-groupoïde sous-jacent.

Exemple 4.2.41 (Exercice). Soit C une catégorie. Alors $R(N_\bullet \mathsf{C})$ est isomorphe au nerf du groupoïde sous-jacent de C.

Proposition 4.2.42. *Il existe une structure de modèles sur* Cat, *appelée* structure canonique, *telle que :*

- *les équivalences faibles sont les équivalences de catégories ;*
- *les fibrations sont les* isofibrations *: ce sont les foncteurs* $p : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ *tel que pour tout objet* $e \in \mathsf{E}$ *et tout isomorphisme* $\varphi : p(e) \xrightarrow{\cong} b \in \mathsf{B}$, *il existe un isomorphisme* $\psi : e \xrightarrow{\cong} e'$ *tel que* $p(\varphi) = \psi$ *;*
- *les cofibrations sont les foncteurs injectifs sur les objets.*

Remarque 4.2.43. Si l'on admet l'axiome du choix, cette structure de modèles est l'unique structure de modèles telle que les équivalences faibles sont les équivalences de catégories, d'où le nom « canonique » [**Schommer-Pries2012**]. Sa catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathsf{C})$ a pour objets les catégories et pour morphismes les classes d'isomorphismes naturels de foncteurs.

Proposition 4.2.44. *Le nerf est adjoint de Quillen à droite à la composition* $\pi \circ R$ *:*

$$\pi \circ R : s\mathrm{Set}^J \leftrightarrows \mathrm{Cat} : N_\bullet.$$

Remarque 4.2.45. Pour des raisons formelles, on aurait pu définir cet adjoint de façon analogue au foncteur de réalisation géométrique. Notons d'abord que si X est un ensemble et C une catégorie, alors $X \times \mathsf{C}$ est une catégorie : on considère X comme une catégorie discrète (tous les morphismes sont des identités) et on forme le produit dans cat. Concrètement, $X \times \mathsf{C}$ est donnée par plusieurs copies disjointes de C, une par élément de X.

Maintenant, soit $X_\bullet \in s\mathrm{Set}$ un ensemble simplicial. On peut définir $h(X)$ comme le coégalisateur suivante, dans la catégorie des catégories :

$$h(X) := \mathrm{coeq}\Big(\coprod_{n,m \geq 0} X_m \times [n] \rightrightarrows \coprod_{n \geq 0} X_n \times [n] \Big),$$

où les foncteurs $X_m \times [n] \to X_n \times [n]$ sont induits par la structure simpliciale de X, tandis que les foncteurs $X_m \times [n] \to X_m \times [m]$ sont induits par la structure cosimpliciale de $[\bullet]$. (Cette colimite est un exemple de cofin : $h(X) = \int_{n \in \Delta} X_n \times [n]$.)

On vérifie alors, par un raisonnement purement formel, que h est adjoint à gauche de $N_\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cat}}([\bullet], -)$. Notons toutefois que calculer des colimites dans cat n'est pas facile, notamment si l'on identifie des morphismes entre objets différents. Il faudrait notamment vérifier ensuite que ce h est bien donné par la composée $\pi \circ R$.

4.3. Catégories simpliciales

4.3.1. Définition et structure de modèle

Un autre modèle pour les ∞-catégories est donné par les catégories dont les ensembles de morphismes forment des ensembles simpliciaux. (Il est également possible de considérer les catégories avec des espaces topologiques de morphismes – voir Section 2.5).

Définition 4.3.1. Une *catégorie simpliciale* C consiste en la donnée :

- d'une classe d'objets, ob C ;
- pour chaque paire d'objets (x, y), un ensemble simplicial $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y)$;
- pour chaque objet x, un sommet $\mathrm{id}_x \in \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y)_0$;
- pour chaque triplet d'objets (x, y, z), une application simpliciale de composition

$$\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(y, z) \times \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, z);$$

vérifiant les axiomes habituels d'associativité et d'unitalité. Un foncteur de catégories simpliciales est défini de façon analogue aux foncteurs habituels. On note Cat_Δ la catégorie des catégories simpliciales.

Remarque 4.3.2. Contrairement à ce que la terminologie pourrait potentiellement laisser penser, une catégorie simpliciale *n'est pas* un objet simplicial dans la catégorie des catégories. On les appelle parfois « catégories enrichies simplicialement » ou « sSet-catégories » pour marquer la différence.

Proposition 4.3.3 (Exercice)**.** *Il y a une adjonction :*

$$\iota : \mathsf{Cat} \leftrightarrows \mathsf{Cat}_\Delta : \pi_0,$$

où :

– *le foncteur ι associe à une catégorie* C *la catégorie simpliciale $\iota\mathsf{C}$ qui a les mêmes objets et tel que* $\mathrm{Map}_{\iota\mathsf{C}}(x,y)$ *est l'ensemble simplicial discret sur* $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y)$ *;*

– *le foncteur π_0 associe à une catégorie simpliciale* D *sa* catégorie homotopique $\pi_0\mathsf{D}$ *avec les mêmes objets et* $\mathrm{Hom}_{\pi_0\mathsf{C}}(x,y) = \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y)$.

Démonstration. Cela découle essentiellement du fait que l'on a une adjonction $\iota : \mathsf{Set} \leftrightarrows s\mathsf{Set} : \pi_0$ où ι associe un ensemble simplicial discret à un ensemble. □

Définition 4.3.4. Soit C une catégorie simpliciale. Une *équivalence* dans C est un morphisme f tel que $[f]$ est un isomorphisme dans $\pi_0\mathsf{C}$.

Lemme 4.3.5 (Exercice)**.** *Le foncteur ι est pleinement fidèle.* □

Exemple 4.3.6. Toute catégorie C définit donc une catégorie simpliciale « discrète » $\iota\mathsf{C}$.

Définition 4.3.7. Une catégorie simpliciale C a une *catégorie sous-jacente* $U\mathsf{C}$ qui a les mêmes objets que C et telle que $\mathrm{Hom}_{U\mathsf{C}}(x,y) = \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x,y)_0$. On dit qu'une catégorie simpliciale *étend* sa catégorie sous-jacente.

Exemple 4.3.8. La catégorie sSet des ensembles simpliciaux s'étend en une catégorie simpliciale grâce aux espaces de morphismes $\mathrm{Map}_\bullet(X,Y)$ de la Définition 2.5.2.

Exemple 4.3.9. La catégorie CDGA des algèbres différentielles graduées commutatives s'étend en une catégorie simpliciale avec les espaces de morphismes $\mathrm{Map}_\bullet(A,B)$ de la Définition 3.3.15.

Exemple 4.3.10. La catégorie Cat_Δ elle-même s'étend en une catégorie simpliciale : étant données deux catégories simpliciales C et D, l'ensemble des foncteurs (simpliciaux) $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ s'étend en un ensemble simplicial dont les 1-simplexes sont les transformations naturelles (simpliciales), etc.

Théorème 4.3.11 (Bergner [**Bergner2007b**])**.** *Il existe une structure de catégorie de modèles cofibrement engendrée sur* Cat_Δ, *appelée* structure de Bergner *où :*

– *les* équivalences de Dwyer–Kan *sont les foncteurs $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ tels que*
  1. *le foncteur $\pi_0 F : \pi_0\mathsf{C} \to \pi_0\mathsf{D}$ est une équivalence de catégories ;*

2. *pour tous* $x, y \in \mathsf{C}$*, l'application induite* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y) \to \mathrm{Map}_{\mathsf{D}}(F(x), F(y))$ *est une équivalence faible d'ensemble simpliciaux ;*

– *les* fibrations de Dwyer–Kan *sont les foncteurs* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *tels que :*
  1. *pour tous* $x, y \in \mathsf{C}$*, l'application induite* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y) \to \mathrm{Map}_{\mathsf{D}}(F(x), F(y))$ *est une fibration d'ensemble simpliciaux ;*
  2. *pour tous* $x \in \mathsf{C}$*,* $y \in \mathsf{D}$ *et pour toute équivalence* $\gamma : F(x) \to y$*, il existe un objet* $x' \in \mathsf{C}$ *et une équivalence* $\gamma' : x \to x'$ *tels que* $F(\gamma) = \gamma'$ *;*

– *les* cofibrations de Dwyer–Kan *sont les foncteurs qui ont la LLP par rapport aux fibrations acycliques.*

On peut démontrer qu'une catégorie est fibrante si et seulement si tous ses espaces de morphismes sont fibrants. Toutes les catégories ne sont pas cofibrantes.

Proposition 4.3.12 (Exercice)**.** *L'adjonction suivante est de Quillen, où* Cat_Δ *est munie de la structure de Quillen et* Cat *est munie de sa structure canonique* (*Proposition 4.2.42*) *:*

$$\pi_0 : \mathsf{Cat}_\Delta \leftrightarrows \mathsf{Cat} : \iota.$$

4.3.2. Comparaison avec les quasi-catégories

Dans cet section, on introduit un foncteur $\mathsf{cat}_\Delta \to s\mathsf{Set}$ qui généralise le foncteur nerf $N_\bullet = \mathrm{Hom}_{\mathsf{cat}}([\bullet], -)$. La catégorie $[n]$ s'étend en une catégorie simpliciale (discrète) $\iota[n]$ qui n'est pas cofibrante. Pour que notre construction aie un sens homotopique, une possibilité consiste à résoudre cette catégorie simpliciale.

Définition 4.3.13. Soit $n \geq 0$ un entier. Pour $0 \leq i \leq j \leq n$, on définit $P_{i,j}$ comme l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles de $\{i, \dots, j\}$ qui contiennent i et j. On définit alors une catégorie simpliciale $[[n]]$ dont les objets sont les entiers $0, \dots, n$ et dont les espaces de morphismes sont :

$$\mathrm{Map}_{[[n]]}(i, j) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } i > j; \\ N_\bullet P_{i,j}, \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

La composition $\mathrm{Map}_{[[n]]}(i, j) \times \mathrm{Map}_{[[n]]}(j, k) \to \mathrm{Map}_{[[n]]}(i, k)$ (pour $i \leq j \leq k$) est induite par l'application $P_{i,j} \times P_{j,k} \to P_{i,k}$, $(I, J) \mapsto I \cup J$. L'unité est l'unique élément $\{i\} \in \mathrm{Map}_{[[n]]}(i, i) = N_0 P_{ii} = P_{ii}$.

Lemme 4.3.14 (Exercice)**.** *La collection* $[[\bullet]]$ *définit un objet cosimplicial dans* Cat_Δ*.* □

Lemme 4.3.15. *Pour tout* $n \geq 0$*, on a une équivalence de Dwyer–Kan :*

$$[[n]] \xrightarrow{\sim} \iota[n].$$

Démonstration. Pour $0 \leq i < j \leq n$, on a un isomorphisme $\mathrm{Map}_{[[n]]}(i,j) \cong (\Delta^1)^{j-i-1}$. On a de plus $\mathrm{Map}_{\iota[n]}(i,j) = *$. Chacun des ces espaces de morphismes est donc contractile et on vérifie donc bien que $[[n]] \to \iota[n]$ est une équivalence de Dwyer–Kan. □

Remarque 4.3.16. La catégorie simpliciale $[[n]]$ est une « résolution libre » de $[n]$ (voir [**DwyerKan1980**] ou [**Bergner2007b**] où $[[n]]$ est notée $F_*[n]$). On peut voir un sommet dans $\mathrm{Map}_{[[n]]}(i,j)_0 = P_{ij}$ comme un chemin entre i et j dans $[n]$ (représenté par la suite des objets par lequel il passe).

Définition 4.3.17. Le *nerf cohérent* (aussi appelé « nerf simplicial ») est le foncteur

$$N_\bullet^\Delta := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}([[\bullet]], -) : \mathrm{Cat}_\Delta \to s\mathrm{Set}.$$

Remarque 4.3.18 (Exercice). Si C est une catégorie, alors $N_\bullet^\Delta(\iota \mathrm{C}) \cong N_\bullet(\mathrm{C})$.

Théorème 4.3.19 (Dugger–Spivak [**DuggerSpivak2011**], Lurie [**Lurie2009a**])**.** *Le nerf cohérent fait partie d'une équivalence de Quillen :*

$$\mathfrak{C} : s\mathrm{Set}^J \leftrightarrows \mathrm{Cat}_\Delta : N_\bullet^\Delta$$

où $s\mathrm{Set}^J$ est muni de la structure de Joyal (Définition 4.2.34) et Cat_Δ de la structure de Bergner (Théorème 4.3.11).

Remarque 4.3.20. On peut montrer qu'une application simpliciale $f : X \to Y$ est une équivalence catégorique si et seulement si $\mathfrak{C}(f)$ est une équivalence de Dwyer–Kan [**Lurie2009a**].

Remarque 4.3.21. On peut calculer le foncteur $\mathfrak{C}$, appelé *foncteur de rigidification*, de la manière suivante. Par le lemme de Yoneda, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}(\mathfrak{C}(\Delta^n), \mathrm{C}) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(\Delta^n, N_\bullet^\Delta \mathrm{C}) \cong N_n^\Delta \mathrm{C} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}_\Delta}([[n]], \mathrm{C})$. On doit donc avoir $\mathfrak{C}(\Delta^n) = [[n]]$. Comme $\mathfrak{C}$ est un adjoint à gauche, il préserve les colimites. Tout ensemble simplicial est une colimite de simplexes, d'où l'on en déduit que

$$\mathfrak{C}(X) = \mathrm{colim}_{f:\Delta^n \to X}[[n]].$$

(C'est un exemple d'extension de Kan à gauche.) Si C est une quasi-catégorie, alors $\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}(\mathrm{C})}(x,y) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{C}}(x,y)$ [**DuggerSpivak2011**].

Les quasi-catégories et les catégories simpliciales (fibrantes) sont donc toutes les deux des modèles pour les ∞-catégories. Un avantage des catégories simpliciales est que la composition est strictement définie, alors que dans une quasi-catégorie, on a juste un espace (contractile) de compositions possibles. Cependant, l'espace des foncteurs entre deux catégories simpliciales fibrantes n'est pas nécessairement fibrant (comparer avec la Proposition 4.2.10). Il est donc nécessaire de remplacer cet espace de foncteurs par un complexe de Kan avant de lui appliquer des opérations homotopiques.

4.4. Limites et colimites (homotopiques)

Dans cette section, nous allons définir les limites et les colimites homotopiques dans une quasi-catégorie. Comme toutes les notions dans une quasi-catégorie sont nécessairement « homotopiques », nous allons oublier cet adjectif et simplement les appeler limites et colimites. On peut se référer à [**Lurie2009a**] ou [**Groth2010**].

Dans une catégorie de modèles, on rappelle que les (co)limites homotopiques sont définies en considérant le foncteur dérivé total du foncteur (co)limite, qui est l'adjoint à droite (resp. à gauche) du foncteur « diagramme constant ». Ici, nous adoptons un point de vue légèrement différent : étant donnée une catégorie de diagrammes C^I, on considère qu'une (co)limite est l'objet final (resp. initial) dans la catégorie des (co)cônes de C^I. Il faut donc que nous définissions les (co)cônes et les objets finaux et initiaux, ainsi que les catégories « tranches » (*slice categories* en anglais).

4.4.1. Joints

Rappelons d'abord une notion classique en topologie.

Définition 4.4.1. Soit X et Y deux espaces topologiques. Le *joint* de X et Y est l'espace quotient :

$$X \star Y := X \times Y \times [0,1]/((x,y,0) \sim (x,y',0) \text{ et } (x,y,1) \sim (x',y,1)).$$

Concrètement, on écrase $X \times Y \times \{0\}$ sur X et on écrase $X \times Y \times \{1\}$ sur Y. Intuitivement, on peut penser au joint de la façon suivante : on considère la réunion disjointe $X \sqcup Y$, puis on attache un segment entre chaque paire (x,y) où $x \in X$ et $y \in Y$.

Exemple 4.4.2. Le joint $X \star *$ est le cône CX. Le joint $X \star S^0$ est la suspension ΣX. On a des homéomorphismes $\mathbb{A}^n \star \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m+1}$.

Cette construction a un analogue pour les catégories. Cet analogue n'est pas symétrique : il faut considérer que l'intervalle attaché entre x et y *part* de x *vers* y.

Définition 4.4.3. Soit C et D deux catégories. Le *joint* $\mathsf{C} \star \mathsf{D}$ est la catégorie définie par :

- La classe des objets est la réunion disjointe des classes d'objets de C et D.
- Les morphismes sont donnés par :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{D}}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x,y), & \text{si } x,y \in \mathsf{C}; \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(x,y), & \text{si } x,y \in \mathsf{D}; \\ *, & \text{si } x \in \mathsf{C} \text{ et } y \in \mathsf{D}; \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 4.4.4. Soit C une catégorie et $*$ la catégorie terminale.

- Le joint $\mathsf{C}^{\triangleright} := \mathsf{C} \star *$ est le *cocône* sur C. Il est obtenu à partir de C en rajoutant un nouvel objet terminal.
- Dualement, le joint $\mathsf{C}^{\triangleleft} := * \star \mathsf{C}$ est le *cône* sur C. Il est obtenu à partir de C en rajoutant un nouvel objet initial.

Ces deux constructions s'étendent aux ensembles simpliciaux.

Définition 4.4.5. Soit X et Y deux ensembles simpliciaux. Leur joint $X \star Y$ est l'ensemble simplicial défini par :

$$(X \star Y)_n := X_n \sqcup \Big(\coprod_{i+j+1=n} X_i \times Y_j \Big) \sqcup Y_n.$$

Lemme 4.4.6 (Exercice)**.** *Le joint $X \star Y$ est bien un ensemble simplicial.*

Exemple 4.4.7. On a $\Delta^n \star \Delta^m \cong \Delta^{n+m+1}$.

Exemple 4.4.8. Si C est un ensemble simplicial, on définit le cône $\mathsf{C}^{\triangleleft}$ et le cocône $\mathsf{C}^{\triangleright}$ comme dans l'Exemple 4.4.4. Par exemple, $(\Lambda^2_0)^{\triangleright} \cong \Delta^1 \times \Delta^1 \cong (\Lambda^2_2)^{\triangleleft}$

Lemme 4.4.9 (Exercice)**.** *Soit X et Y deux ensembles simpliciaux, alors $|X \star Y| \cong |X| \star |Y|$.*

Lemme 4.4.10 (Exercice)**.** *Soit* C *et* D *deux catégories, alors $N_\bullet(\mathsf{C} \star \mathsf{D}) \cong N_\bullet \mathsf{C} \star N_\bullet \mathsf{D}$.*

Proposition 4.4.11. *Si* C *et* D *sont des quasi-catégories, alors* $\mathsf{C} \star \mathsf{D}$ *est une quasi-catégorie.*

Proposition 4.4.12. *Si $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ et $G : \mathsf{D} \to \mathsf{D}'$ sont des équivalences catégories, alors $F \star G : \mathsf{C} \star \mathsf{D} \to \mathsf{C}' \star \mathsf{D}'$ est une équivalence catégorique.*

4.4.2. Tranches, objets initiaux, objets finaux

Rappelons quelque concepts de théorie des catégories classique.

Définition 4.4.13. Soit C une catégorie et $x \in \mathsf{C}$ un objet. La *tranche au-dessus de x* est la catégorie $\mathsf{C}_{/x}$ dont les objets sont les morphismes $y \xrightarrow{f} x$ où $y \in \mathsf{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(y, x)$, et les morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}_{/x}}(y \xrightarrow{f} x, z \xrightarrow{g} x) = \{\varphi : y \to z \mid \varphi \circ f = g\}.$$

On définit dualement la *tranche en-dessous de x* comme la catégorie $\mathsf{C}_{x/}$ dont les objets sont les morphismes $x \xrightarrow{f} y$.

Exemple 4.4.14. La catégorie des espaces pointés Top_* est la tranche $\mathsf{Top}_{*/}$.

Proposition 4.4.15 (Exercice)**.** *Soit* C *une catégorie et $x \in \mathsf{C}$ un objet. Le foncteur oubli $\mathsf{C}_{/x} \to \mathsf{C}$ est une équivalence si et seulement si x est un objet terminal de* C*. Dualement, le foncteur oubli $\mathsf{C}_{x/} \to \mathsf{C}$ est une équivalence si et seulement si x est un objet initial de* C*.*

Cette définition peut se généraliser de la façon suivante :

Définition 4.4.16. Soit C une catégorie et $p : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ un foncteur.

– La *tranche au-dessus de p* est la catégorie $\mathsf{B}_{/p}$ dont les objets sont de la forme $\mathrm{cst}_b \overset{\eta}{\Rightarrow} p$ où $b \in \mathsf{B}$ et η est une transformation naturelle entre le foncteur constant $\mathrm{cst}_y : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ égal à y et p.

– La *tranche en-dessous de p* est la catégorie $\mathsf{B}_{p/}$ dont les objets sont de la forme $p \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathrm{cst}_b$ où $b \in \mathsf{C}$ et η est une transformation naturelle entre p et le foncteur constant $\mathrm{cst}_y : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ égal à y.

Concrètement, un objet de $\mathsf{B}_{/p}$ est une paire (b, η) où b est un objet de b et η est une collection de morphismes $\{\eta_e : b \to p(e)\}_{e \in E}$ vérifiant, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{E}}(e, e')$, $p(f) \circ \eta_e = \eta_{e'}$.

Exemple 4.4.17. Soit $x \in \mathsf{C}$ un objet et $\mathrm{cst}_x : * \to \mathsf{C}$ le foncteur constant égal à x. Alors $\mathsf{C}_{/\,\mathrm{cst}_x} = \mathsf{C}_{/x}$ et $\mathsf{C}_{\mathrm{cst}_x\,/} = \mathsf{C}_{x/}$.

Proposition 4.4.18 (Exercice)**.** *Soit $p : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ un foncteur. Alors on a des bijections naturelles en C :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\mathsf{C}, \mathsf{B}_{/p}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}_{\mathsf{E}/}}(\mathsf{C} \star \mathsf{E}, \mathsf{B}), \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\mathsf{C}, \mathsf{B}_{p/}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}_{\mathsf{E}/}}(\mathsf{E} \star \mathsf{C}, \mathsf{B}).$$

Remarque 4.4.19. Dans cette proposition (et dans la suite) on voit implicitement $\mathsf{C} \star \mathsf{E}$ comme étant en-dessous de E par l'application canonique, et B avec p.

Cette proposition donne l'idée pour généraliser ces constructions aux quasi-catégories.

Proposition 4.4.20. *Soit $p : \mathsf{E} \to \mathsf{C}$ une application simpliciale entre deux ensembles simpliciaux. Alors il existe un ensemble simplicial $\mathsf{C}_{/p}$ ayant la propriété universelle (en X) suivante :*

$$\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\mathsf{C}, \mathsf{B}_{/p}) = \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}_{\mathsf{E}/}}(\mathsf{C} \star \mathsf{E}, \mathsf{B}).$$

Dualement, il existe un ensemble simplicial $\mathsf{C}_{p/}$ ayant la propriété universelle (en X) suivante :

$$\mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(\mathsf{C}, \mathsf{B}_{p/}) = \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}_{\mathsf{E}/}}(\mathsf{E} \star \mathsf{C}, \mathsf{B}).$$

Démonstration. On définit $(\mathsf{C}_{/p})_n = \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}_{\mathsf{E}/}}(\Delta^n \star \mathsf{E}, \mathsf{C})$ et on vérifie que tout fonctionne. $\square$

Proposition 4.4.21 (Exercice)**.** *Si C est une quasi-catégorie et $p : \mathsf{E} \to \mathsf{C}$ une application simpliciale (où $\mathsf{E} \in s\mathsf{Set}$) alors $\mathsf{C}_{/p}$ (resp. $\mathsf{C}_{p/}$) est une quasi-catégorie. Si de plus $q : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$ est une équivalence catégorique alors $\mathsf{C}_{/p} \to \mathsf{C}'_{/qp}$ (resp. $\mathsf{C}_{p/} \to \mathsf{C}'_{qp/}$) est une équivalence catégorique.*

Définition 4.4.22. On appelle la quasi-catégorie $\mathsf{C}_{/p}$ (resp. $\mathsf{C}_{p/}$) la *tranche au-dessus de* p (resp. *en-dessous de* p). Si $p = \mathrm{cst}_x : * \to \mathsf{C}$ est une application constante, alors on note $\mathsf{C}_{/p} = \mathsf{C}_{/x}$ et $\mathsf{C}_{p/} = \mathsf{C}_{x/}$.

Lemme 4.4.23 (Exercice)**.** *Pour toute quasi-catégorie* C *et tout objet* $x \in \mathsf{C}_0$*, alors (par la propriété universelle) il y a des foncteurs « oubli » canoniques :*

$$\mathsf{C}_{/x} \to \mathsf{C}, \quad \mathsf{C}_{x/} \to \mathsf{C}.$$

Définition 4.4.24. Soit C une quasi-catégorie et $x \in \mathsf{C}_0$ un objet. L'objet x est appelé un *objet terminal* (resp. *objet initial*) si $\mathsf{C}_{/x} \to \mathsf{C}$ (resp. $\mathsf{C}_{x/} \to \mathsf{C}$) est une fibration acyclique de quasi-catégories.

Proposition 4.4.25. *Soit* C *une quasi-catégorie et* $x \in \mathsf{C}_0$ *un objet. Alors* x *est terminal (resp. initial) ssi pour tout* $y \in \mathsf{C}_0$*,* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(y, x)$ *(resp.* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(x, y)$*) est faiblement équivalent à un point.*

Corollaire 4.4.26. *Soit* C *une quasi-catégorie. La sous-catégorie pleine* $\mathsf{C}_{\mathrm{term}}$ *(resp.* $\mathsf{C}_{\mathrm{init}}$*) engendrée par les objets terminaux (resp. initiaux) est soit vide, soit faiblement contractile.*

Remarque 4.4.27. Ceci est une version ∞-catégorique d'un énoncé du type : « l'objet terminal, s'il existe, est unique à unique isomorphisme près ».

4.4.3. Limites et colimites

On en arrive maintenant à la définition des limites et colimites (homotopiques, donc). On rappelle que si I est un ensemble simplicial quelconque et C une quasi-catégorie, alors $\mathsf{C}^I := \mathrm{Map}_\bullet(I, \mathsf{C})$ est une quasi-catégorie (Proposition 4.2.12).

Définition 4.4.28. Soit I un ensemble simplicial et $p : I \to \mathsf{C}$ un diagramme, que l'on voit comme un objet de C^I.

- Une *limite* de p est un objet terminal de $\mathsf{C}^I_{/p}$.
- Une *colimite* de p est un objet initial de $\mathsf{C}^I_{p/}$.

Une quasi-catégorie est *complète* (resp. *cocomplète*) si elle admet toutes les petites limites (resp. colimites).

Proposition 4.4.29 (Exercice)**.** *Le nerf* $N_\bullet$ *est compatible avec les limites et les colimites.*

Exemple 4.4.30. Si $I = \Lambda^2_0$, une colimite indexée par I est une somme amalgamée ; si $I = \Lambda^2_2$, une limite indexée par I est un produit fibré.

4.5. Localisation hamac

Expliquons comment associer une catégorie simpliciale fibrante (donc une ∞-catégorie) à une catégorie de modèles. Cette ∞-catégorie ne dépendra que des équivalences faibles de la catégorie de modèles.

Définition 4.5.1 ([**DwyerKan1980b**])**.** Soit C une catégorie de modèles.[6] Sa *localisation hamac* est la catégorie simpliciale $L^H\mathrm{C}$ définie de la façon suivante. Ses objets sont ceux de C. Pour $x, y \in \mathrm{C}$, les n-simplexes de $\mathrm{Map}_{L^H\mathrm{C}}(x, y)$ sont les n-hamacs réduits de largeur k, c'est-à-dire les diagrammes commutatifs de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & z_{0,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & z_{0,1} \arrow[r, dash] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dash] \arrow[d] & z_{0,n} \arrow[d] \arrow[dr, dash] & \\
x \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & \vdots \arrow[r, dash] \arrow[d] & \vdots \arrow[r, dash] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dash] \arrow[d] & \vdots \arrow[r, dash] \arrow[d] & y \\
 & z_{k,1} \arrow[r, dash] & z_{k,1} \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & z_{k,n} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

où $n + 1 \geq 1$ est la longueur du hamac, toutes les flèches verticales sont dans $\mathcal{W}$, toutes les flèches horizontales d'une colonne fixée vont dans la même direction et sont dans $\mathcal{W}$ si elles vont vers la gauche, les directions des colonnes alternent, et chaque colonne contient au moins une flèche qui n'est pas l'identité.

Les faces suppriment des lignes et composent les applications concernées, tandis que les dégénérescences répètent des lignes. La composition concatène deux hamacs.

Lemme 4.5.2 (Exercice)**.** *La localisation hamac est bien une catégorie simpliciale.*

Remarque 4.5.3. Dans le cas des catégories de modèles, il suffit de considérer les hamacs de longueur au plus 3 [**DwyerKan1980a**].

Remarque 4.5.4. Il existe d'autres manières d'associer une catégorie simpliciale à une catégorie relative, par exemple la localisation simpliciale [**DwyerKan1980**] qui fait intervenir des résolutions libres (comme quand on a défini $[[n]]$ à partir de $[n]$, voir Section 4.3.2). La catégorie obtenue est équivalente (au sens de Dwyer–Kan) à la localisation hamac. On peut se référer à [**Bergner2018**] pour une vue d'ensemble des différentes notions.

Proposition 4.5.5 (Exercice)**.** *Soit* C *une catégorie de modèles. On a une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique de* $L^H\mathrm{C}$ *et celle de* C *:*

$$\pi_0(L^H\mathrm{C}) \simeq \mathrm{Ho}(\mathrm{C}).$$

Proposition 4.5.6. *Soit* C *une catégorie de modèles. Sa localisation hamac* $L^H\mathrm{C} \in \mathrm{Cat}_\Delta$ *est fibrante : chaque* $\mathrm{Map}_{L^H\mathrm{C}}(x, y)$ *est un complexe de Kan.*

[6]Plus généralement, on peut prendre une *catégorie relative*, c'est-à-dire une catégorie munie d'une sous-classe de morphismes $\mathcal{W}$ stable par composition et qui contient toutes les identités.

Définition 4.5.7. Soit C une catégorie de modèles. On définit sa *quasi-catégorie associée* C_∞ comme étant le nerf cohérent de sa localisation hamac, $\mathsf{C}_\infty := N^\Delta L^H \mathsf{C}$.

Lemme 4.5.8. *Soit* C *une catégorie de modèles. Il y a un quasi-foncteur canonique*

$$\lambda_\infty : N_\bullet \mathsf{C} \to \mathsf{C}_\infty.$$

Démonstration. On rappelle que $N_\bullet \mathsf{C} \cong N^\Delta_\bullet(\iota\mathsf{C})$ où $\iota\mathsf{C}$ est la catégorie simpliciale discrète associée à C (Remark 4.3.18). On peut définir un foncteur simplicial $\iota\mathsf{C} \to L^H\mathsf{C}$ qui envoie un morphisme sur un hamac de longueur 1. En composant se foncteur avec $N^\Delta_\bullet$, on obtient le quasi-foncteur λ_∞ voulu. ☐

Corollaire 4.5.9. *Soit* C *une catégorie de modèles. Le foncteur* λ_∞ *se factorise par une équivalence entre les catégories homotopiques :*

$$\pi : \mathrm{Ho}(\mathsf{C}) \xrightarrow{\sim} \pi(\mathsf{C}_\infty).$$

Passons maintenant à la fonctorialité de $(-)_\infty$, le but final étant de définir une ∞-catégorie des ∞-catégories. En général, un foncteur entre deux catégories de modèles n'induit pas un foncteur simplicial entre les localisations hamacs : il faudrait qu'il envoie les équivalences faibles sur les équivalences faibles, ce qui est rarement vérifié. Cependant, si le foncteur en question est un foncteur de Quillen (adjoint à droite ou à gauche), alors il envoie les équivalences faibles entre objets bifibrants sur les équivalences faibles.

Lemme 4.5.10 (Exercice)**.** *Soit* C *une catégorie de modèles. Les inclusions induisent des équivalences catégoriques :*

$$\begin{tikzcd} & (\mathsf{C}_c)_\infty \arrow[dr, "\sim"] & \\ (\mathsf{C}_{cf})_\infty \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \mathsf{C}_\infty \\ & (\mathsf{C}_f)_\infty . \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 4.5.11. Ici on utilise implicitement que l'on peut définir $(-)_\infty$ pour n'importe quelle catégorie relative ; en général, C_c, C_f et C_{cf} ne sont pas des catégories de modèles.

On rappelle qu'on note $Q : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ et $R : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ les foncteurs de remplacements cofibrant et fibrant, respectivement.

Lemme 4.5.12. *Soit* $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ *une adjonction de Quillen. Les foncteurs* $\mathbb{L}F = F \circ Q$ *et* $\mathbb{R}G = G \circ R$ *préservent les hamacs.*

Corollaire 4.5.13. *Soit* $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ *une adjonction de Quillen. Les foncteurs F et G induisent des foncteurs simpliciaux entre localisations hamacs :*

$$\mathbb{L}F : L^H\mathsf{C} \to L^H\mathsf{D}, \quad \mathbb{R}G : L^H\mathsf{D} \to L^H\mathsf{C}.$$

Ils induisent également des foncteurs sur leurs nerfs cohérents :

$$F_\infty := N^\Delta_\bullet(\mathbb{L}F) : \mathsf{C}_\infty \to \mathsf{D}_\infty, \quad G_\infty := N^\Delta_\bullet(\mathbb{R}G) : \mathsf{D}_\infty \to \mathsf{C}_\infty.$$

Ces foncteurs commutent avec l'équivalence π *du Corollaire 4.5.9.*

Théorème 4.5.14. *Soit $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ une équivalence de Quillen. Les foncteurs F_∞, G_∞ du corollaire précédent sont des équivalences catégoriques inverses l'une de l'autre.*

Définition 4.5.15. L'*infini-catégorie des infini-catégories* $\infty\mathsf{Cat}$ est la localisation $(s\mathsf{Set}^J)_\infty$ de la catégorie de modèles de Joyal.

En utilisant les résultats de la Section 4.3 :

Corollaire 4.5.16. *On a une équivalence catégorique entre $\infty\mathsf{Cat}$ et $(\mathsf{Cat}_\Delta)_\infty$.*

4.6. Quasi-catégories présentables et catégories de modèles simpliciales

Concluons ce chapitre par une réponse à la question suivante : quelles ∞-catégories sont obtenues comme localisations de catégories de modèles ?

Définition 4.6.1. Une quasi-catégorie est dite *présentable* C si elle est cocomplète et s'il existe un ensemble S d'objets compacts[7] tel que tout objet de C s'obtient comme une colimite filtrée d'objets de S.

Nous allons voir qu'une telle quasi-catégorie peut toujours s'obtenir comme le nerf simplicial d'une catégorie de modèles simpliciale combinatoire.

Définition 4.6.2. Une *catégorie de modèles simpliciale* est une catégorie de modèles C munie d'une extension en catégorie simpliciale et de deux foncteurs

$$\boxtimes : \mathsf{C} \times s\mathsf{Set} \to \mathsf{C}, \quad (-)^{(-)} : \mathsf{C} \times s\mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{C}$$

tels que :

1. pour tout $X \in \mathsf{C}$, le foncteur $X \boxtimes - : s\mathsf{Set} \to \mathsf{C}$ est adjoint à gauche de $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(X, -) : \mathsf{C} \to s\mathsf{Set}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X \boxtimes K, Y) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(K, \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(X, Y));$$

2. pour tout $X \in \mathsf{C}$, le foncteur $Y^{(-)} : s\mathsf{Set} \to \mathsf{C}^{\mathrm{op}}$ est adjoint à gauche de $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(-, Y) : \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \to s\mathsf{Set}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y^K) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(K, \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(X, Y)).$$

3. on a un isomorphisme $X \boxtimes (K \times L) \cong X \boxtimes K \boxtimes L$, naturel en $X \in \mathsf{C}$ et $K, L \in s\mathsf{Set}$;

[7] En général on peut également demander κ-petits pour un cardinal κ fixé.

4. pour toute inclusion simpliciale $i : K \hookrightarrow L$ et pour toute fibration $q : X \twoheadrightarrow Y$ dans C, l'application canonique
$$\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(L, X) \to \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(K, X) \times_{\mathrm{Map}(K,Y)} \mathrm{Map}(L, Y)$$
est une fibration simpliciale, qui est acyclique si i ou q le sont.

Remarque 4.6.3. Les deux premières conditions signifient respectivement que C est tensorisée et cotensorisée sur $s\mathsf{Set}$. Étant données les deux premières conditions, les deux suivantes peuvent se résumer par le fait que $\boxtimes$ est un bifoncteur de Quillen à gauche telle qu'une paire de cofibration dont l'une est acyclique s'envoie sur une cofibration acyclique. La dernière condition est un analogue de la condition (MC4) (dessiner un diagramme commutatif).

Exemple 4.6.4. La catégorie $s\mathsf{Set}$ elle-même est une catégorie de modèles simpliciales, avec $\boxtimes = \times$ et $K^L = \mathrm{Map}_\bullet(K, L)$. Plus généralement, les catégories de modèles du type $s\mathsf{C}$ (par exemple les groupes abéliens simpliciaux) sont des catégories de modèles simpliciales.

Les catégories de modèles simpliciales sont particulièrement intéressantes pour les calculs :

Proposition 4.6.5. *Soit* C *une catégorie de modèles simpliciales. Soit A un objet cofibrant et X un objet fibrant. Alors* $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)$ *est un complexe de Kan, et*
$$\pi_0(\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A, X).$$

Démonstration. Le fait que $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)$ est de Kan découle de la dernière condition dans la définition. Comme tout ensemble simplicial K est cofibrant, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(s\mathsf{Set})}(K, \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)) &\cong \mathrm{Hom}_{s\mathsf{Set}}(K, \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X))/\sim \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A \boxtimes K, X) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A \boxtimes K, X).\end{aligned}$$

En appliquant ce qui précède à $K = \Delta^0$, on obtient :
$$\pi_0 \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(s\mathsf{Set})}(\Delta^0, \mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{C})}(A \boxtimes \Delta^0, X).$$

On déduit du fait que $\mathrm{Map}_{\mathsf{C}}(A, X)_0 = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, X)$ et du lemme de Yoneda que $A \boxtimes \Delta^0 \cong A$ ce qui permet de conclure. □

Si C est une catégorie de modèles simpliciale, alors on peut récupérer sa structure simpliciale à partir de sa catégorie de modèles sous-jacente :

Proposition 4.6.6 ([**DwyerKan1980b**])**.** *Soit* C *une catégorie de modèles simpliciale. Il existe une équivalence de Dwyer–Kan entre* C *et la localisation hamac de sa catégorie de modèles sous-jacente, naturelle en* C *:*
$$\mathsf{C} \xrightarrow{\sim} L^H\mathsf{C}.$$

De nombreuses catégories de modèles sont équivalentes à des catégories de modèles simpliciales :

Théorème 4.6.7 (Dugger [**Dugger2001**]). *Toute catégorie de modèles combinatoire (Définition 1.7.18) est équivalente de Quillen à une catégorie de modèles simpliciale, combinatoire et propre à gauche.*

Remarque 4.6.8. Dugger [**Dugger2001b**] a même montré que si C est une catégorie de modèles combinatoire et propre à gauche, alors on peut obtenir une catégorie de modèles simpliciale équivalente en considérant une localisation de Bousfield à gauche de C.

On en arrive au théorème.

Théorème 4.6.9 (Lurie [**Lurie2009a**]). *Une quasi-catégorie est présentable si et seulement si elle est équivalente (au sens des quasi-catégories) au nerf simplicial $N^{\Delta}(\mathsf{C}_{cf})$ de la catégorie simpliciale formée par les objets fibrants et cofibrants d'une catégorie de modèles simpliciale combinatoire.*

En combinant ce résultat avec les résultats précédents, on trouve qu'une quasi-catégorie est présentable si et seulement si elle provient d'une catégorie de modèles combinatoire. La catégorie de modèles en question devient en quelque sorte une « présentation », ou un « modèle » de la quasi-catégorie de départ. Ce résultat résout l'ambiguïté qui existe en anglais pour la terminologie « *model category* ». D'une part, on peut considérer – comme le faisait Quillen – qu'une « *model category* » est une catégorie qui contient des modèles (les objets fibrants et cofibrants) pour des types d'homotopie. D'autre part, on peut considérer une « *model category* » comme une « catégorie modèle », au sens où elle modélise une théorie homotopique, à savoir sa quasi-catégorie associée.

A. Rappels catégoriques

A.1. Définitions de base

Définition A.1.1. Une *catégorie* C est la donnée

- d'une classe d'objets $\operatorname{ob}\mathsf{C}$;
- pour toute paire d'objets X, Y, un ensemble de morphismes $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$;
- pour tout objet X, un élément $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, X)$ appelé « l'identité » ;
- pour tout triplet d'objets X, Y, Z, d'une application de composition $\circ : \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(Y, Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Z)$.

Ces données vérifient les axiomes suivants : pour tout morphisme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$, on a $f \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$, et pour tout triplet de morphismes composables f, g, h, on a $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Définition A.1.2. Une catégorie est dite *petite* si ses objets forment un ensemble.

Exemple A.1.3. La catégorie des ensembles Set, la catégorie des espaces topologiques Top, la catégorie des complexes de chaînes $\mathsf{Ch}(R)$...

Définition A.1.4. Soit C et D deux catégories. Un *foncteur* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ associe un objet $F(X) \in \mathsf{D}$ à tout objet $X \in \mathsf{C}$, et un morphisme $F(f) \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), F(Y))$ à tout morphisme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$. Cette association doit vérifier $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Exemple A.1.5. Il y a une catégorie Cat dont les catégories sont les catégories et dont les morphismes sont les foncteurs.

Définition A.1.6. Soit $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ deux foncteurs. Une *transformation naturelle* $\eta : F \Rightarrow G$ est la donnée d'un morphisme $\eta_X : F(X) \to G(X)$ pour tout $X \in \mathsf{C}$ tels que les diagrammes suivants commutent pour tout $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y)$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd} .$$

On dit que c'est une *équivalence naturelle* si η_X est une bijection pour tout X. Dans ce cas on note $F \simeq G$.

Définition A.1.7. Une *équivalence de catégories* est une paire de foncteurs $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ telle que $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ et $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$.

Définition A.1.8. Un foncteur $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est dit *plein* (resp. *fidèle*, resp. *pleinement fidèle*) si, pour toute paire d'objets $X, Y \in \mathsf{C}$, l'application $F : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), F(Y))$ est une surjection (resp. injection, resp. bijection). Il est dit *essentiellement surjectif* si tout objet $Z \in \mathsf{D}$ est isomorphe à un objet du type $F(X)$ pour $X \in \mathsf{C}$.

Proposition A.1.9 (Exercice)**.** *Un foncteur fait partie d'une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle.*

Définition A.1.10. Deux foncteurs $F : \mathsf{C} \leftrightarrows \mathsf{D} : G$ sont dits *adjoints* s'il existe des transformations naturelles $\eta : \mathrm{id}_{\mathsf{C}} \Rightarrow G \circ F$ et $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{D}}$ induisant des bijections $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), Y)$. On dit que F est l'adjoint à gauche de G et que G est l'adjoint à droite de F. On note $F \dashv G$.

Remarque A.1.11. L'unité $\eta_X : X \to G(F(X))$ correspond à $\mathrm{id}_{F(X)}$ dans la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X, G(F(X))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X), F(X))$, tandis que la counité $\varepsilon_Y : F(G(Y)) \to Y$ correspond à $\mathrm{id}_{G(Y)}$ dans la bijection $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(G(Y)), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(G(Y), G(Y))$.

Définition A.1.12. Un morphisme $f : A \to B$ est un *rétract* de $g : X \to Y$ s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "i'"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & Y \arrow[r, "r'"] & B
\end{tikzcd}$$

Exemple A.1.13. Dans Set, tout sous-ensemble est un rétract. Dans Top, tous les sous-espaces ne sont pas des rétracts (par exemple S^{n-1} n'est pas un rétract de D^n.)

A.2. Limites et colimites

Définition A.2.1. Soit I une petite catégorie, C une catégorie quelconque, et $X = \{X_i\}_{i \in I} : I \to \mathsf{C}$ un foncteur (qu'on appelle aussi diagramme dans ce contexte). Une *limite* de X, si elle existe, est la donnée

- d'un objet $L \in \mathsf{C}$;
- pour tout $i \in I$, d'un morphisme $\pi_i : L \to X_i$, tel que pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_I(i, j)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[d, "X_f"] \\
L \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[r, "\pi_j"'] & X_j
\end{tikzcd}$$

vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet $Y \in \mathsf{C}$ muni de morphismes $\alpha_j : Y \to X_j$ faisant commuter des diagrammes similaires au précédent, il existe un unique morphisme $\alpha : Y \to L$ tel que $\pi_i \circ \alpha = \alpha_i$.

Proposition A.2.2. *Soit $X : I \to \mathsf{C}$ un diagramme. Si une limite de X existe, alors elle est unique à unique isomorphisme respectant les morphismes de structure près. On la note* $\lim X = \lim_{i \in I} X_i$.

Exemple A.2.3. Soit $I = \emptyset$ la catégorie vide et $X : \emptyset \to \mathsf{C}$ l'unique diagramme possible. Une limite de I est un objet T tel que pour tout objet $Y \in \mathsf{C}$, il existe un unique morphisme $Y \to T$. On appelle un tel objet *terminal* et on le note généralement $*$. Dans la catégorie des ensembles, $*$ est n'importe quel singleton.

Exemple A.2.4. Soit $I = \bullet \sqcup \bullet$ la catégorie qui a deux objets et aucun morphisme non-trivial. Un diagramme $X : I \to \mathsf{C}$ est la donnée d'une paire d'objets (X_1, X_2). Une limite de X est un objet P muni de deux morphismes $\pi_1 : P \to X_1$ et $\pi_2 : P \to X_2$. Il vérifie que si Y est un objet muni de deux morphismes $\alpha_1 : Y \to X_1$ et $\alpha_2 : Y \to X_2$, alors il existe un unique morphisme $\alpha : Y \to P$ tel que $\pi_1 \circ \alpha = \alpha_1$ et $\pi_2 \circ \alpha = \alpha_2$. On appelle un tel objet un *produit* de X_1 et X_2 et on le note $X_1 \times X_2$. Dans la catégorie des ensembles, le produit est effectivement le produit cartésien.

Exemple A.2.5. L'exemple précédent se généralise. Considérons $I = \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$, la catégorie à trois objets et deux morphismes comme indiqué. Un diagramme $I \to \mathsf{C}$ est de la forme $X_1 \xrightarrow{f_1} Z \xleftarrow{f_2} X_2$. Une limite de ce diagramme est un objet P muni de $\pi_1 : P \to X_1$ et $\pi_2 : P \to X_2$ tels que $f_1 \circ \pi_1 = f_2 \circ \pi_2$ vérifiant la propriété universelle. On appelle un tel objet un *produit fibré* de X_1 et X_2 au-dessus de Z et on le note $X_1 \times_Z X_2$. On dit aussi que l'application $\pi_1 : P \to X_1$ est tirée en arrière (en anglais, *pullback*) de $f_2 : X_2 \to Z$ le long de $f_1 : X_1 \to Z$ (et de même π_2 est le tiré en arrière de f_1 le long de f_2). Dans les ensembles, $X_1 \times_Z X_2 = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x) = f_2(y)\}$.

Exemple A.2.6. Soit $I = \bullet \rightrightarrows \bullet$ la catégorie qui a deux objets et deux morphismes non-triviaux comme indiqué. Un diagramme $X : I \to \mathsf{C}$ est la donnée de deux morphismes parallèles $f, g : X_1 \rightrightarrows X_2$. Une limite de I est un objet E muni d'un morphisme $i : E \to X_1$ tels que $f \circ i = g \circ i$. Il vérifie que si Y est un objet muni d'un morphisme $\alpha : Y \to X_1$ tel que $f \circ \alpha = g \circ \alpha$, alors il existe un unique morphisme $\alpha' : Y \to P$ tel que $i \circ \alpha' = \alpha$. On appelle un tel objet un *égalisateur* de f et g et on peut le noter $\mathrm{eq}(f, g)$ ou $\mathrm{eq}(X_1 \rightrightarrows X_2)$. Dans la catégorie des ensembles, l'égalisateur de f et g est donné par $E = \{x \in X_1 \mid f(x) = g(x)\}$.

Intéressons-nous maintenant au cas dual.

Définition A.2.7. Soit I une petite catégorie, C une catégorie quelconque, et $X = \{X_i\}_{i \in I} : I \to \mathsf{C}$ un foncteur (qu'on appelle aussi diagramme dans ce contexte). Une *colimite* de X, si elle existe, est la donnée

- d'un objet $C \in \mathsf{C}$;

– pour tout $i \in I$, d'un morphisme $\iota_i : X_i \to C$, tel que pour tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_I(i,j)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "X_f"'] \arrow[dr, "\iota_i"] & \\
& C \\
X_j \arrow[ur, "\iota_j"] &
\end{tikzcd}$$

vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet $Y \in \mathsf{C}$ muni de morphismes $\alpha_i : X_i \to Y$ faisant commuter des diagrammes similaires au précédent, il existe un unique morphisme $\alpha : C \to Y$ tel que $\alpha \circ \iota_i = \alpha_i$.

Proposition A.2.8. *Soit $X : I \to \mathsf{C}$ un diagramme. Si une colimite de X existe, alors elle est unique à unique isomorphisme respectant les morphismes de structure près. On la note* $\operatorname{colim} X = \operatorname{colim}_{i \in I} X_i$

Exemple A.2.9. Soit $I = \emptyset$ la catégorie vide et $X : \emptyset \to \mathsf{C}$ l'unique diagramme possible. Une limite de X est un objet D tel que pour tout objet $Y \in \mathsf{C}$, il existe un unique morphisme $D \to Y$. On appelle un tel objet *initial* et on le note généralement $\emptyset$. Dans la catégorie des ensembles, $\emptyset$ est l'ensemble vide.

Exemple A.2.10. Soit $I = \bullet \sqcup \bullet$ la catégorie qui a deux objets et aucun morphisme non-trivial. Un diagramme $X : I \to \mathsf{C}$ est la donnée d'une paire d'objets (X_1, X_2). Une colimite de X est un objet S muni de deux morphismes $\iota_1 : X_1 \to S$ et $\iota_2 : X_2 \to S$. Il vérifie que si Y est un objet muni de deux morphismes $\alpha_1 : X_1 \to Y$ et $\alpha_2 : X_2 \to Y$, alors il existe un unique morphisme $\alpha : S \to Y$ tel que $\alpha \circ \iota_1 = \alpha_1$ et $\alpha \circ \iota_2 = \alpha_2$. On appelle un tel objet un *coproduit* de X_1 et X_2 et on le note $X_1 \sqcup X_2$. Dans la catégorie des ensembles, le produit est l'union disjointe.

Exemple A.2.11. L'exemple précédent se généralise. Considérons $I = \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$, la catégorie à trois objets et deux morphismes comme indiqué. Un diagramme $I \to \mathsf{C}$ est de la forme $X_1 \xleftarrow{f_1} Z \xrightarrow{f_2} X_2$. Une limite de ce diagramme est un objet S muni de $\iota_1 : X_1 \to S$ et $\iota_2 : X_2 \to S$ tels que $\iota_1 \circ f_1 = \iota_2 \circ f_2$ vérifiant la propriété universelle. On appelle un tel objet une *somme amalgammée* de X_1 et X_2 le long de Z et on le note $X_1 \cup_Z X_2$. On dit aussi que ι_1 est le poussé en avant (en anglais, *pushout*) de f_2 le long de f_1 (et aussi que ι_2 est le poussé en avant de f_1 le long de f_2). Dans les ensembles, $X_1 \cup_Z X_2 = X_1 \sqcup X_2/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $f_1(z) \sim f_2(z)$.

Exemple A.2.12. Soit $I = \bullet \rightrightarrows \bullet$ la catégorie qui a deux objets et deux morphismes non-triviaux comme indiqué. Un diagramme $X : I \to \mathsf{C}$ est la donnée de deux morphismes parallèles $f, g : X_1 \rightrightarrows X_2$. Une limite de I est un objet C muni d'un morphisme $q : X_2 \to C$ tels que $q \circ f = q \circ g$. Il vérifie que si Y est un objet muni d'un morphisme $\alpha : X_2 \to Y$ tel que $\alpha \circ f = \alpha \circ f$, alors il existe un unique morphisme $\alpha' : C \to Y$ tel que $\alpha' \circ q = \alpha$. On appelle un tel objet un *coégalisateur* de f et g et on peut le noter $\mathrm{coeq}(f, g)$ ou $\mathrm{coeq}(X_1 \rightrightarrows X_2)$. Dans la catégorie des ensembles, l'égalisateur de f et g est donné par $C = X_2/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence induite par $f(x) \sim g(x)$.

Définition A.2.13. Une catégorie est dite *complète* (resp. cocomplète) si tous les diagrammes indexés par des petites catégories admettent une limite (resp. une colimite).

Proposition A.2.14 (Exercice)**.** *Soit I une petite catégorie et C une catégorie quelconque. On définit le foncteur « diagramme constant »* $\mathrm{cst}_I : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^I$.

- *Si tous les diagrammes indexés par I admettent une limite, alors* cst_I *admet un adjoint à droite donné par* $\{X_i\} \mapsto \lim_{i\in I} X_i$.
- *Si tous les diagrammes indexés par I admettent une colimite, alors* cst_I *admet un adjoint à gauche donné par* $\{X_i\} \mapsto \mathrm{colim}_{i\in I} X_i$.

Index