

Homotopie II : Examen

Najib Idrissi, Université de Paris

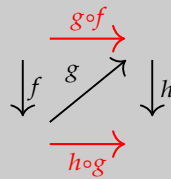
5 mars 2021, 14h–17h

Durée : 3 heures. Les notes de cours imprimées ou manuscrites sont autorisées. Le matériel électronique est interdit. Lisez bien tout le sujet avant de commencer.

Exercice 1. Soit \mathcal{C} une catégorie et \mathcal{W} une classe de morphismes. On dit que \mathcal{W} vérifie la propriété “2 parmi 6” (2P6) si, étant donnés trois morphismes composables f, g , et h ,

$$\{h \circ g, g \circ f\} \subseteq \mathcal{W} \implies \{f, g, h, h \circ g \circ f\} \subseteq \mathcal{W}.$$

Solution : Il peut être pratique de représenter cette situation par le diagramme suivant :



que l'on peut interpréter par “si dans un carré commutatif avec un relèvement, les deux flèches rouges sont dans \mathcal{W} , alors toutes les flèches du carré sont dans \mathcal{W} ”.

(1A) Montrer que si \mathcal{W} vérifie 2P6 et $\forall X, \text{id}_X \in \mathcal{W}$, alors \mathcal{W} contient tous les isomorphismes.

Solution : Soit $f : A \rightarrow B$ un isomorphisme. Alors $\{f \circ f^{-1}, f^{-1} \circ f\} = \{\text{id}_B, \text{id}_A\}$ est inclus dans \mathcal{W} , donc par (2P6), $\{f, f^{-1}, f, f \circ f^{-1} \circ f\} \subseteq \mathcal{W}$, donc en particulier $f \in \mathcal{W}$.

(1B) Montrer que si \mathcal{W} vérifie 2P6 alors elle vérifie la propriété MC2 (“2 parmi 3”).

Solution : Il suffit d'appliquer la propriété 2P6 à ces trois cas : $f \xrightarrow{\text{id}} g$, $f \xrightarrow{g} \text{id}$ et $\text{id} \xrightarrow{f} g$.

(1C) Montrer que si \mathcal{W} vérifie MC2 et $\{h \circ g, g \circ f\} \subseteq \mathcal{W} \implies g \in \mathcal{W}$, alors \mathcal{W} vérifie 2P6.

Solution : Supposons que $\{h \circ g, g \circ f\} \subseteq \mathcal{W}$. Par hypothèse, on a donc $g \in \mathcal{W}$. Comme $h \circ g, g \in \mathcal{W}$, on en déduit par MC2 que $h \in \mathcal{W}$. De même, $f \in \mathcal{W}$. Enfin, MC2 entraîne que \mathcal{W} est stable par composition, donc $h \circ g \circ f \in \mathcal{W}$.

(1D) Montrer que la classe des isomorphismes d'une catégorie quelconque vérifie 2P6.

Solution : Soit f, g, h trois morphismes tels que $h \circ g$ et $g \circ f$ sont des isomorphismes. Les isomorphismes vérifient MC2, donc par la question précédente il nous suffit de montrer que g

est un isomorphisme. Notons $\alpha = h \circ g$ et $\beta = g \circ f$. Alors $g \circ (f \circ \alpha^{-1}) = \text{id}$ et $(\beta^{-1} \circ h) \circ g = \text{id}$. On a donc :

$$f\alpha^{-1} = \text{id} \circ f\alpha^{-1} = \beta^{-1}hgf\alpha^{-1}\beta^{-1}h \circ \text{id} = \beta^{-1}h,$$

donc le morphisme $f\alpha^{-1} = \beta^{-1}h$ est l'inverse à droite et à gauche de g .

Attention ! Il ne suffit pas de montrer que g est un monomorphisme et un épimorphisme. Il existe des catégories où certains morphismes sont à la fois des monomorphismes et des épimorphismes. Par exemple, dans la catégorie des anneaux, l'inclusion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ est un monomorphisme (car injective) et un épimorphisme (car si $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow A$ sont deux morphismes d'anneaux tels que $f(n) = g(n)$ pour tout entier n , alors $f(m/n) = f(m)f(1/n) = f(m)f(n)^{-1} = g(m)g(n)^{-1} = g(m/n)$).

(1E) En déduire que les équivalences faibles d'une catégorie de modèles vérifient 2P6.

Solution : Un corollaire du théorème de Whitehead nous dit qu'un morphisme est une équivalence faible si et seulement si sa classe dans la catégorie homotopique est un isomorphisme. Comme les isomorphismes de la catégorie homotopique vérifient 2P6 et que la localisation est un foncteur, on en déduit que les équivalences faibles vérifient aussi 2P6.

Remarque : bien sûr, on prend les choses à l'envers ici... On peut démontrer indépendamment du théorème de Whitehead que les équivalences faibles d'une catégorie de modèles vérifient 2P6, en se servant du calcul des fractions à droite (ou à gauche) qui existe grâce aux résolutions (co)fibrantes ; et que si \mathcal{W} est une classe quelconque qui vérifie 2P6, alors la localisation $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ est tel que $f \in \mathcal{W} \iff \lambda(f)$ est un iso. On obtient ainsi une preuve alternative de ce résultat. Voir par exemple la Section 7.1 de *Categories and Sheaves* (Kashiwara–Schapira 2006).

Exercice 2. Soit \mathcal{C} une catégorie munie de deux structures de modèles $(\mathcal{W}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1)$ et $(\mathcal{W}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2)$. On suppose que $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ et $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. On appelle "structure mixte" $(\mathcal{W}_m, \mathcal{C}_m, \mathcal{F}_m)$ définie par $\mathcal{W}_m = \mathcal{W}_2$ et $\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_1$. Les cofibrations mixtes, \mathcal{C}_m , sont définies par propriété de relèvement.

Solution : On se référera à l'article "Mixing model structures" (*Topol. Appl.*, 2006) de Michael Cole pour plus de détails sur les structures mixtes et leurs applications.

(2A) Montrer que $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_1$.

Solution : On a $\mathcal{C}_i = {}^\perp(\mathcal{F}_i \cap \mathcal{W}_i)$. Il est clair que si deux classes X, Y vérifient $X \subseteq Y$ alors ${}^\perp X \supseteq {}^\perp Y$, d'où :

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{W}_2 \implies \mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_m \supseteq \mathcal{C}_2.$$

(2B) Démontrer que $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{W}_m = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$. (Indication : MC3+MC5.)

Solution : Soit $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{W}_m$. On peut factoriser f comme $X \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} Y$ où $i \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{C}_1$ et $p \in \mathcal{F}_1$. On a $f \in \mathcal{W}_m = \mathcal{W}_2$ et $i \in \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ donc $p \in \mathcal{W}_2$ par (MC2). On en déduit que $f \in \mathcal{C}_m$ a, par définition, la LLP par rapport à $p \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_2$. Cela permet de montrer que f est un rétract de $i \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{C}_1$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ \downarrow f & \nearrow \exists ! & \downarrow p \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array} \implies \begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{l} & Z & \xrightarrow{p} & Y \end{array}$$

On conclut par MC3 (les cofibrations acycliques sont stables par rétract).

Réciproquement, un morphisme $i \in C_1 \cap \mathcal{W}_1$ a la LLP par rapport à \mathcal{F}_1 , donc aussi par rapport à $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_2$, donc $i \in C_m$ par définition. Un tel i est de plus dans $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_m$, ce qui permet de conclure que $i \in C_m \cap \mathcal{W}_m$.

(2C) Démontrer que la structure mixte est une structure de catégorie de modèles.

Solution : Les axiomes MC1, MC2 et MC3 découlent immédiatement de ces mêmes axiomes pour les structures 1 et 2, et du fait qu'une classe définie par propriété de relèvement ($C_m = {}^\perp(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_2)$) est stable par rétracts.

(MC4) Le fait que les cofibrations mixtes ont la propriété de relèvement par rapport aux fibrations acycliques mixtes est exactement la définition de C_m . L'autre partie de l'axiome MC4 découle de la question 2B : une cofibration acyclique mixte est une cofibration acyclique pour la structure 1, donc a la LLP par rapport à $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_m$.

(MC5) En utilisant l'axiome MC5 de la structure 1 et la question 2B, on obtient que tout morphisme se factorise en une cofibration acyclique mixte suivie d'une fibration mixte. Cherchons maintenant à factoriser en une cofibration mixte suivie d'une fibration acyclique mixte. Soit f un morphisme. On peut l'écrire comme $f = p \circ i$ où $p \in \mathcal{W}_2 \cap \mathcal{F}_2$ et $i \in C_2 \subseteq C_m$. On peut ensuite factoriser $p = q \circ j$ où $q \in \mathcal{F}_1$ et $j \in C_1 \cap \mathcal{W}_1 = C_m \cap \mathcal{W}_m \subseteq C_m$. Enfin, comme $p = q \circ j \in \mathcal{W}_2$ et $j \in \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, on en déduit que $q \in \mathcal{W}_2$ par MC2. Donc finalement on a factorisé $f = q \circ (j \circ i)$ où $q \in \mathcal{W}_2 \cap \mathcal{F}_1 = \mathcal{W}_m \cap \mathcal{F}_m$ et $j \circ i \in C_m$.

(2D) On dit que f est une cofibration mixte *spéciale* s'il existe $i \in C_2$ et $j \in C_1 \cap \mathcal{W}_1$ tels que $f = j \circ i$. Démontrer que toute cofibration mixte spéciale est une cofibration mixte, et que toute cofibration mixte est un rétract d'une cofibration mixte spéciale.

Solution : Soit $f = j \circ i$ une cofibration mixte spéciale. Alors $i \in C_2 \subseteq C_m$ par la question 2A, et $j \in C_1 \cap \mathcal{W}_1 = C_m \cap \mathcal{W}_m \subseteq C_m$ par la question 2B. La composition de deux cofibrations mixte est une cofibration mixte donc $f \in C_m$.

Réciproquement, soit $f : X \rightarrow Y$ une cofibration mixte. On peut factoriser $f = p \circ i$, où $p : A \rightarrow Y \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{W}_2$ et $i : X \rightarrow A \in C_2$ en utilisant l'axiome (MC5) de la deuxième structure modèle. On peut de plus factoriser $p = q \circ j$ où $q : B \rightarrow Y \in \mathcal{F}_1$ et $j : A \rightarrow B \in C_1 \cap \mathcal{W}_1$.

Comme $j \in \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ et $p \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_2$, on obtient par (MC2) que $q \in \mathcal{W}_2$ aussi. Le morphisme $q \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{W}_2$ a donc, par définition, la propriété de relèvement à droite par rapport à la cofibration mixte $f \in C_m$. On obtient donc un relèvement l dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j \circ i} & B \\ \downarrow f & \nearrow l & \downarrow q \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

ce qui permet de montrer que f est un rétract de la cofibration spéciale mixte $j \circ i$:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xlongequal{\quad} & X \\ \downarrow f & & \downarrow j \circ i & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\quad l \quad} & B & \xrightarrow{\quad q \quad} & Y \end{array}$$

(2E) On dit qu'une catégorie de modèles est propre à gauche si le pushout d'une équivalence faible

le long d'une cofibration est une équivalence faible. Dédurre de (2D) que si la structure 2 est propre à gauche, alors la structure mixte aussi.

Solution : Soit $f \in \mathcal{C}_m$ une cofibration mixte. Alors f est le rétract d'une cofibration mixte spéciale $j \circ i$ où $j \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$ et $i \in \mathcal{C}_2$. Si on a un pushout du type :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ g \downarrow \sim & \lrcorner & ? \downarrow h \\ & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

où $g \in \mathcal{W}_m = \mathcal{W}_2$, il faut montrer que $h \in \mathcal{W}_2$ aussi. Mais un petit argument montrer que h est un rétract du pushout de g le long de $j \circ i$, et les équivalences faibles sont stables par rétract, donc on peut supposer que $f = j \circ i$. On a donc un diagramme du type suivant, où les deux carrés sont des pushouts :

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{i} & & \xrightarrow{j} & \\ \sim \downarrow g & \lrcorner & & \lrcorner & \downarrow h \\ & \xrightarrow{\quad} & \downarrow h' & \lrcorner & \downarrow h \\ & & & \xrightarrow{u} & \end{array}$$

Comme la structure 2 est propre à gauche, que $g \in \mathcal{W}_2$ et $i \in \mathcal{C}_2$, on trouve que $h' \in \mathcal{W}_2$. Les cofibrations acycliques sont toujours stables par pushout, et $k \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$, donc $u \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1$. Dans le carré de droite, on a donc $h' \in \mathcal{W}_2$, $k, u \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ donc, par MC2, $h \in \mathcal{W}_2$.

(2F) Entre lesquelles des trois structures de modèles ci-dessus le foncteur $\text{id}_{\mathcal{C}}$ est-il un adjoint à droite ou à gauche de Quillen ?

Solution : Pour que l'identité soit un adjoint à gauche, il faut qu'elle préserve les cofibrations et les cofibrations acycliques. On trouve donc une suite d'adjonctions (de gauche à droite) $(2) \rightleftharpoons (m) \rightleftharpoons (1)$.

Exercice 3. Une catégorie de Reedy est une catégorie R munie de deux sous-catégories \vec{R} et \check{R} qui contiennent tous les objets et d'une fonction $\text{deg} : \text{ob } R \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- si $f \in \vec{R}(\alpha, \beta)$, alors $(\alpha = \beta \text{ et } f = \text{id}_{\alpha})$ ou $\text{deg } \beta > \text{deg } \alpha$;
- si $f \in \check{R}(\alpha, \beta)$, alors $(\alpha = \beta \text{ et } f = \text{id}_{\alpha})$ ou $\text{deg } \beta < \text{deg } \alpha$;
- tout morphisme f se factorise de manière unique comme $\vec{f} \circ \check{f}$ où $\vec{f} \in \vec{R}$ et $\check{f} \in \check{R}$.

Solution : Pour plus d'informations, on peut se référer au Chapitre VII de *Simplicial Homotopy Theory* (Goerss-Jardine, 1999) ou au Chapitre 15 de *Model Categories and Their Localizations* (Hirschhorn, 2002).

(3A) On note $R_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine des objets de degré $\leq n$. Montrer que $R_{\leq 0}$ est discrète.

Solution : Soit $f : \alpha \rightarrow \beta$ un morphisme avec $\text{deg } \alpha = \text{deg } \beta = 0$. Ce morphisme se factorise comme $\alpha \xrightarrow{\vec{f}} \gamma \xrightarrow{\check{f}} \beta$. Le morphisme \check{f} doit diminuer le degré, donc $\text{deg } \gamma \leq \text{deg } \alpha = 0 \Rightarrow \text{deg } \gamma = 0$. Comme \check{f} ne diminue pas strictement le degré, il doit donc être un morphisme identité : $\alpha = \gamma$ et $\check{f} = \text{id}_{\alpha}$. De même \vec{f} n'augmente pas non plus strictement le degré, donc

$\beta = \alpha$ et $\vec{f} = \text{id}_\alpha$. Donc finalement $f = \text{id}_\alpha \circ \text{id}_\alpha = \text{id}_\alpha$. Tous les morphismes de $R_{\leq 0}$ sont des morphismes identités, i.e. $R_{\leq 0}$ est discrète.

- (3B) Montrer qu'un ensemble partiellement ordonné fini est de Reedy. Montrer que la catégorie simpliciale Δ est de Reedy, où $\vec{\Delta}$ se compose des injections, $\check{\Delta}$ des surjections, et $\deg = \text{id}_\mathbb{N}$. Montrer que la catégorie opposée d'une catégorie de Reedy est de Reedy.

Solution : Soit (X, \leq) un ensemble partiellement ordonné fini. On définit $\vec{X} = X$ et \check{X} ne contient que les identités. Il est clair que tout morphisme se factorise de manière unique sous la forme voulue. On procède par récurrence sur $|X|$ pour définir le degré :

- Si $X = \emptyset$, il n'y a rien à faire.
- Si $X \neq \emptyset$, soit x_0 un élément minimal ($x \leq x_0 \implies x = x_0$), qui existe car X est fini. L'ensemble $X \setminus \{x_0\}$ est partiellement ordonné et de cardinal strictement inférieur, donc c'est une catégorie de Reedy. On définit le degré sur X en posant $\deg x_0 = 0$, et $\deg x$ est $\deg_{X \setminus \{x_0\}} x + 1$. On vérifie bien que tout morphisme qui n'est pas une identité augmente strictement le degré.

Montrons que Δ est de Reedy.

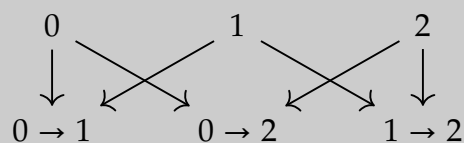
- Si $f : [m] \rightarrow [n]$ est une surjection, alors soit $m = n$ et alors $f = \text{id}_{[n]}$ (car f est croissante), soit $n < m$. De même pour les injections.
- Soit $f : [m] \rightarrow [n]$ une application croissante. Soit $k + 1$ le cardinal de l'image de f . Alors f se factorise comme $[m] \rightarrow [k] \hookrightarrow [n]$ en identifiant $[k]$ avec l'image de f . Une telle décomposition est de plus unique car f est croissante.

Enfin, pour la catégorie opposée, il suffit d'inverser les rôles de \vec{R} et \check{R} .

Soit $\alpha \in R$. La catégorie *latching* $L_\alpha R$ a pour objets les morphismes $f \in \vec{R}(\beta, \alpha)$ où $\beta \neq \alpha$. Si $f : \beta \rightarrow \alpha$, $f' : \beta' \rightarrow \alpha$, alors $\text{Hom}_{L_\alpha R}(f, f') = \{g \in \vec{R}(\beta, \beta') \mid f'g = f\}$. Dualelement, les objets de la catégorie *matching* $M_\alpha R$ sont les morphismes $f \in \check{R}(\alpha, \beta)$ où $\beta \neq \alpha$.

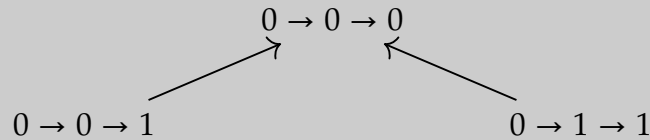
- (3C) Décrire $L_{[2]}\Delta^{\text{op}}$ et $R_{[2]}\Delta^{\text{op}}$.

Solution : La catégorie $M_{[2]}\Delta^{\text{op}}$ a pour objets les injections $\partial : [m] \rightarrow [2] \in \Delta_m^2$ où $m < 2$. Ce sont les six faces du 2-simplexe standard : $0, 1, 2 \in \Delta_0^2$ et $(0 \rightarrow 1), (1 \rightarrow 2), (0 \rightarrow 2) \in \Delta_1^2$. À part les identités, on a comme morphismes les injections $i \subset (j \rightarrow k)$ pour $i \in \{j, k\}$. On obtient le diagramme suivant :



La catégorie $L_{[2]}\Delta^{\text{op}}$ a pour objets les surjections $\sigma : [2] \rightarrow [m] \in \Delta_2^m$ où $m < 2$. Ce sont les 2-simplexes dégénérés de Δ^0 et Δ^1 suivants : $(0 \rightarrow 0 \rightarrow 0) \in \Delta_2^0$ et $(0 \rightarrow 0 \rightarrow 1), (0 \rightarrow 1 \rightarrow 1) \in \Delta_2^1$. Outre les identités, on a deux surjections $(0 \rightarrow 0 \rightarrow 1) \twoheadrightarrow (0 \rightarrow 0 \rightarrow 0)$ et

$(0 \rightarrow 1 \rightarrow 1) \rightarrow (0 \rightarrow 0 \rightarrow 0)$. On obtient ainsi le diagramme suivant :



Soit $X \in C^R$ un diagramme indexé par R , où C est une catégorie (co)complète. On définit ses objets *latching* par les colimites $L_\alpha X := \operatorname{colim}_{f:\beta \rightarrow \alpha \in L_\alpha R} X_\beta$. Duale, ses objets *matching* sont $M_\alpha X := \operatorname{lim}_{f:\alpha \rightarrow \beta \in M_\alpha R} X_\beta$. (La colimite vide est l'objet initial, la limite vide est l'objet terminal.)

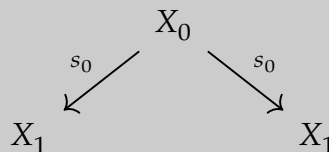
(3D) Soit $X_\bullet \in \operatorname{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$ un ensemble simplicial. Décrire $M_{[n]}X_\bullet$ et $L_{[n]}X_\bullet$ pour $n \leq 2$.

Solution : On a $L_{[0]}X_\bullet = \emptyset$ (objet initial) et $M_{[0]}X_\bullet = *$ (objet terminal).

La catégorie $M_{[1]}^{\Delta^{\text{op}}}$ a pour objets les deux inclusions $[0] \hookrightarrow [1]$ et n'a aucun morphisme autre que les identités, donc $M_{[1]}X_\bullet \cong X_0 \times X_0$ est le produit de deux copies de X_0 . On pourra penser aux éléments de $M_{[1]}X_\bullet$ comme aux deux faces d'un hypothétique 1-simplexe.

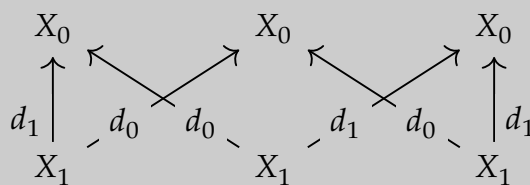
La catégorie $L_{[1]}^{\Delta^{\text{op}}}$ n'a qu'un objet, l'unique surjection $[1] \rightarrow [0]$, et aucun morphisme autre que les identités, donc $L_{[1]}X_\bullet = X_0$. On pourra identifier les éléments $x \in L_{[1]}X_\bullet$ avec leurs dégénérescences $s_0x \in X_1$.

Enfin, utilisons les descriptions de $L_{[2]}^{\Delta^{\text{op}}}$ et $M_{[2]}^{\Delta^{\text{op}}}$ des questions précédentes. L'objet latching $L_{[2]}X_\bullet$ est la colimite du diagramme suivant :



C'est la réunion de deux copies de X_1 où on a identifié les simplexes dégénérés de la première copie avec ceux de la deuxième copie. On pourra y penser comme à l'ensemble des 2-simplexes dégénérés de X : il y a ceux du type s_0x – première copie – et ceux du type s_1x – deuxième copie – et on a $s_1s_0 = s_0s_0$.

L'objet matching $M_{[2]}X_\bullet$ est la limite du diagramme suivant :



Concrètement, c'est donc un triplet (x_0, x_1, x_2) de 1-simplexes tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$. C'est donc une application $\partial \Delta^2 \rightarrow X$.

(3E) Soit $X : R_{\leq n-1} \rightarrow C$ un diagramme (où $n \geq 1$) et $\alpha \in C$ un élément de degré n . Vérifier que $L_\alpha X$ et $M_\alpha X$ restent bien définis et construire un morphisme $c_\alpha : L_\alpha X \rightarrow M_\alpha X$ naturel en α .

Solution : Les définitions de $L_\alpha X$ et $M_\alpha X$ ne font intervenir que des objets et des morphismes entre objets de degrés strictement inférieur à $\deg \alpha = n$ dont la définition s'applique encore.

Pour définir

$$c_\alpha : \operatorname{colim}_{f:\beta \rightarrow \alpha \in L_\alpha R} X_\beta \longrightarrow \lim_{g:\alpha \rightarrow \gamma \in M_\alpha R} X_\gamma,$$

on utilise les propriétés universelles des limites et colimites. (On a essentiellement deux possibilités : d'abord la limite puis la colimite, ou l'inverse, mais ça revient au même.)

Étant donnés $\vec{f} \in \vec{R}(\beta, \alpha)$ et $\vec{g} \in \vec{R}(\alpha, \gamma)$, on cherche à définir un morphisme $c_\alpha^{\vec{f}, \vec{g}} : X_\beta \rightarrow X_\gamma$. Il faut de plus que ces morphismes soient naturels en \vec{f} et \vec{g} . Le morphisme $h = \vec{g} \circ \vec{f} : \beta \rightarrow \gamma$ se factorise de manière unique sous la forme $\beta \xrightarrow{\vec{h}} \delta \xrightarrow{\vec{h}} \gamma$. Comme $\deg \delta \leq \min(\deg \beta, \deg \gamma) < \deg \alpha = n$, le diagramme X est bien défini sur δ , \vec{h} et \vec{h} , et on définit simplement $X_\beta \rightarrow X_\gamma$ comme la composée de ces deux applications. On vérifie, par unicité de la décomposition dans la catégorie de Reedy, que cette définition est bien naturelle et définit un morphisme de la colimite dans la limite.

- (3F) Soit $X : R_{\leq n-1} \rightarrow C$ un diagramme (où $n \geq 1$). Montrer que la donnée d'une extension de X à $R_{\leq n}$ est équivalente à la donnée d'objets X_α pour chaque α de degré n et de morphismes $l_\alpha : L_\alpha X \rightarrow X_\alpha$ et $m_\alpha : X_\alpha \rightarrow M_\alpha X$ tels que $m_\alpha l_\alpha = c_\alpha$.

Solution : Supposons que X s'étende en $X : R_{\leq n} \rightarrow C$. Alors on peut définir

$$l_\alpha : \operatorname{colim}_{f:\beta \rightarrow \alpha \in L_\alpha R} X_\beta \rightarrow X_\alpha$$

en utilisant la propriété universelle de la colimite. Chaque $f : \beta \rightarrow \alpha \in L_\alpha(R)$ induit un morphisme $f_* : X_\beta \rightarrow X_\alpha$. Comme X est un foncteur, ces applications sont bien compatibles avec les morphismes de $L_\alpha R$, donc on a bien défini $l_\alpha : L_\alpha X \rightarrow X_\alpha$. La définition de $m_\alpha : X_\alpha \rightarrow M_\alpha X$ est similaire (duale).

Réciproquement, supposons que l'on se donne des objets X_α et des morphismes l_α, m_α comme dans l'énoncé. Il faut que nous définissions trois sortes de morphismes pour étendre le diagramme de $R_{\leq n-1}$ à $R_{\leq n}$:

- Les morphismes $f_* : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ pour $\deg \beta < \deg \alpha = n$: on utilise la restriction de l_α au facteur X_β qui correspond à f .
- Les morphismes $f_* : X_\alpha \rightarrow X_\beta$ pour $\deg \beta < \deg \alpha = n$: on utilise la projection de m_α sur le facteur X_β qui correspond à f .
- Les morphismes $g_* : X_\alpha \rightarrow X_{\alpha'}$ pour $\deg \alpha = \deg \alpha' = n$: on peut factoriser

$$g : \alpha \xrightarrow{\vec{g}} \beta \xrightarrow{\vec{g}} \alpha'.$$

Si l'objet intermédiaire β est de degré n , alors $\alpha = \beta = \alpha'$ et $g = \operatorname{id}_\alpha$ et on pose juste $g_* = \operatorname{id}$. Sinon, $\deg \beta < n$ donc en utilisant les deux cas précédents, on peut définir $X_\alpha \rightarrow X_\beta$ et $X_\beta \rightarrow X_{\alpha'}$ et définir g_* comme étant la composée de ces deux morphismes.

Il faut vérifier que cela définit bien un diagramme sur $R_{\leq n}$, c'est-à-dire que si l'on a une composition $g \circ f$ alors $(g \circ f)_* = g_* f_*$. C'est clair pour les deux premiers types de morphismes. Pour le troisième type de morphismes, il faut utiliser l'unicité de la décomposition.

- (3G) Soit $X, Y \in C^R$ deux diagrammes et $\varphi : X \Rightarrow Y$ une transformation naturelle. Construire des morphismes $L_\alpha^{\operatorname{rel}} \varphi : X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \rightarrow Y_\alpha$ et $M_\alpha^{\operatorname{rel}} \varphi : X_\alpha \rightarrow M_\alpha X \times_{M_\alpha Y} Y_\alpha$ naturels en α . (On pourra utiliser les m_α, l_α construits en (3F).)

Solution : On utilise simplement la propriété universelle du pushout (et dualement du pullback) :

$$\begin{array}{ccc}
 L_\alpha X & \xrightarrow{l_\alpha} & X_\alpha \\
 \downarrow \varphi_\alpha & \lrcorner & \downarrow \varphi_\alpha \\
 L_\alpha Y & \dashrightarrow & X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \\
 & \searrow l_\alpha & \dashrightarrow \exists ! L_\alpha^{\text{rel}} \\
 & & Y_\alpha
 \end{array}$$

Il suffit simplement de vérifier que $l_\alpha \varphi_\alpha = \varphi_\alpha l_\alpha$, ce qui découle immédiatement du fait que φ est une transformation naturelle et du fait que l_α est défini en utilisant les f_* .

On suppose maintenant que \mathcal{C} est une catégorie de modèles. On définit une structure de modèles (appelée structure de Reedy) sur \mathcal{C}^R en posant qu'une transformation naturelle φ est : une équivalence de Reedy si chaque φ_α est une équivalence faible ; une cofibration de Reedy si chaque $L_\alpha^{\text{rel}} \varphi$ est une cofibration ; une fibration de Reedy si chaque $M_\alpha^{\text{rel}} \varphi$ est une fibration.

(3H) Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une cofibration de Reedy. Montrer que le morphisme induit $L_\alpha X \rightarrow L_\alpha Y$ est une cofibration. (Indication : montrer qu'il a la LLP par rapport aux fibrations acycliques en construisant le relèvement par récurrence.)

Solution : Par hypothèse, les $L_\alpha^{\text{rel}} \varphi : X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \rightarrow Y_\alpha$ ont la LLP par rapport aux fibrations acycliques de \mathcal{C} . Montrons que cela entraîne que c'est aussi le cas pour $L_\alpha \varphi : L_\alpha X \rightarrow L_\alpha Y$. Supposons que l'on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 L_\alpha X & \longrightarrow & E \\
 L_\alpha \varphi \downarrow & \nearrow \exists g? & \downarrow \sim \\
 L_\alpha Y & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

On cherche à construire $g : L_\alpha Y \rightarrow E$ qui fait commuter le diagramme. On va pour cela utiliser la propriété universelle de la colimite $L_\alpha Y = \text{colim}_{f:\beta \rightarrow \alpha \in L_\alpha R} X_\beta \rightarrow E$. On va le construire par récurrence sur $\deg \beta$.

- Pour les $f : \beta \rightarrow \alpha$ avec $\deg \beta = 0$, on a $L_\beta X = L_\beta Y = \emptyset$ (l'objet initial) donc $L_\beta^{\text{rel}} \varphi$ n'est autre que $\varphi_\beta : X_\beta \rightarrow Y_\beta$. Notre hypothèse nous dit donc que $X_\beta \rightarrow Y_\beta$ est une cofibration, donc on peut trouver un relèvement $g_\beta : X_\beta \rightarrow E$ dans le diagramme. La sous-catégorie de $L_\alpha R$ des objets de degré 0 est discrète donc il n'y a rien de plus à vérifier.
- Supposons que l'on a défini des relèvements $g_\beta : X_\beta \rightarrow E$ compatibles entre eux pour $\deg \beta < k < n$. Soit $\gamma \rightarrow \alpha \in L_\alpha R$ un morphisme avec $\deg \beta = k$. La définition de $L_\beta Y$ ne fait intervenir que des objets source de degré $< k$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence on peut trouver un morphisme $g : L_\beta Y \rightarrow E$ qui fait commuter le diagramme. On obtient donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X_\beta \cup_{L_\beta X} L_\beta Y & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \nearrow \exists g_\beta & \downarrow \sim \\
 Y_\beta & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

et on peut donc trouver un relèvement g_β .

En combinant tous ces relèvements, on obtient $g : L_\alpha \rightarrow E$ qui fait commuter le diagramme.

- (3I) En déduire que si $\varphi : X \rightarrow Y$ est une cofibration de Reedy, alors φ_α est une cofibration pour tout objet α . (Indication : utiliser le fait que φ_α se factorise comme $X_\alpha \rightarrow X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \xrightarrow{L_\alpha^{\text{rel}} \varphi} Y_\alpha$.)

Solution : Par hypothèse, $L_\alpha^{\text{rel}} \varphi$ est une cofibration. De plus, l'autre application s'insère dans le diagramme pushout suivant :

$$\begin{array}{ccc} L_\alpha X & \longrightarrow & X_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_\alpha Y & \longrightarrow & X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y \end{array}$$

L'application verticale de gauche est une cofibration d'après la question précédente, et les cofibrations sont stables par pushout, donc $X_\alpha \rightarrow X_\alpha \cup_{L_\alpha X} L_\alpha Y$ est une cofibration. Comme les cofibrations sont stables par composition, on peut conclure.

- (3J) En déduire l'existence d'adjonctions de Quillen entre la structure de Reedy et les structures projectives et injectives, si elles existent.

Solution : On vient de montrer que si φ est une cofibration de Reedy, alors c'est une cofibration pointwise, c'est-à-dire une cofibration pour la structure injective. De plus les équivalences faibles de Reedy sont par définition des équivalences faibles pointwise. Donc l'identité est un adjoint de Quillen à gauche depuis la structure de Reedy vers la structure injective. Dualement, l'identité est aussi un adjoint de Quillen à droite depuis la structure de Reedy vers la structure projective. En résumé, on a des adjonctions de Quillen :

$$C_{\text{proj}}^R \rightleftarrows C_{\text{Reedy}}^R \rightleftarrows C_{\text{inj}}^R$$

Remarque : on peut montrer qu'on a en fait une équivalence de Quillen avec la structure projective si C est cofibrement engendrée, cf. Hirschhorn, Theorem 15.6.4. L'intérêt de la structure de Reedy est de fournir un cadre où certain calculs sont plus faciles, car on peut construire les divers relèvements par récurrence.

- (3K) Montrer qu'une adjonction de Quillen $F : C \rightleftarrows D : G$ induit une adjonction de Quillen entre les structures de Reedy.

Solution : Il est clair qu'une adjonction induit une adjonction entre les catégories de diagramme :

$$F : C^R \rightleftarrows D^R : G.$$

Il suffit de démontrer que F préserve les cofibrations de Reedy et G les fibrations de Reedy. Comme F est un adjoint à gauche, il préserve les colimites. Les objets latching et les objets latching relatifs sont définis par des colimites, donc F les préserve. Donc si une transformation naturelle dans C^R induit une cofibration sur tous les objets latching relatifs, son image par F aussi, donc F préserve bien les cofibrations de Reedy. Le fait que G préserve les fibrations de Reedy est dual.

Exercice 4. Soit A une CDGA 1-connexe et $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(A)$ trois classes telles que $\alpha\beta = \beta\gamma = 0$. On considère l'ensemble des éléments de la forme $vz - (-1)^{|x|}xw \in A$ où $\alpha = [x], \beta = [y], \gamma = [z]$ (pour des cocycles x, y, z), $dv = xy$ et $dw = yz$.

Solution : Ces classes de cohomologie s'appellent les produits de Massey. Pour plus d'informations, on peut se référer à la Définition 2.89 et les pages suivantes de *Algebraic Models in Geometry* (Félix–Oprea–Tanré, 2008). Ils y donnent notamment un exemple de variété compacte sans bord avec un produit de Massey non nul. L'exemple classique est celui des anneaux borroméens : https://en.wikipedia.org/wiki/Borromean_rings

(4A) Montrer que $vz - (-1)^{|x|}xw$ est un cocycle et que sa classe dans $H^*(A)/I$, où $I = (\alpha, \gamma)$ est l'idéal engendré par α et γ , ne dépend pas des choix de x, y, z, v, w .

Solution : Comme x, y et z représentent des classes de cohomologie, ce sont des cocycles. Grâce à la formule de Leibniz,

$$d(vz - (-1)^{|x|}xw) = dv \cdot z + (-1)^{|v|}v \cdot dz - (-1)^{|x|}dx \cdot w - (-1)^{2|x|}x \cdot dw = xyz - xyz = 0.$$

Supposons que l'on ait un autre représentant x' de α (avec $x - x' = dt$) et un autre $dv' = x'y$. Notons que $d(tw) = dt \cdot w + (-1)^{|t|}t \cdot dw = dt \cdot w - (-1)^{|x|}tyz$. Alors :

$$\begin{aligned} (v'z - (-1)^{|x|}x'w) - (vz - (-1)^{|x|}xw) &= (v' - v)z - (-1)^{|x|}dt \cdot w \\ &= (v' - v)z - (-1)^{|x|}d(tw) - tyz \\ &= (v' - v - ty)z - (-1)^{|x|}d(tw). \end{aligned}$$

On vérifie que $d(v' - v - ty) = 0$, donc la classe de cohomologie de $[v'z - (-1)^{|x|}x'w]$ est égale à celle de $[vz - (-1)^{|x|}xw]$ modulo la classe $[z] = \gamma$. De manière symétrique, si on change z par un cobord, on ne change pas la classe de $[vz - \pm xw]$ modulo α .

Enfin, supposons que $y' = y + dt$, $dv' = xy'$ et $dw' = y'z$. Alors :

$$\begin{aligned} (v'z - (-1)^{|x|}x'w) - (vz - (-1)^{|x|}xw) &= (v' - v)z - (-1)^{|x|}x(w' - w) \\ &= (v' - v - (-1)^{|x|}xt)z - (-1)^{|x|}x(w' - w - tz) \end{aligned}$$

Or $v' - v - (-1)^{|x|}xt$ et $w' - w - tz$ sont des cocycles, donc les deux classes sont égales modulo $\alpha = [x]$ et $\gamma = [z]$.

(4B) Supposons que A est quasi-isomorphe à $H^*(A)$. Soit M le modèle minimal de A . Pourquoi existe-t-il un quasi-isomorphisme direct $\phi : M \rightarrow H^*(A)$?

Solution : A priori, on sait simplement que M est quasi-isomorphe à A , et donc à $H^*(A)$. En d'autres termes, il existe un zigzag de quasi-isomorphismes :

$$M \xleftarrow{\sim} B_1 \xrightarrow{\sim} B_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} H^*(A)$$

Le zigzag de quasi-isomorphismes ci-dessus représente un isomorphisme dans $\text{Ho}(\text{CDGA}_{\geq 2})$. Or l'ADGC minimale M est cofibrante, et toutes les ADGC sont fibrantes. Donc l'isomorphisme dans la catégorie homotopique est représenté par un quasi-isomorphisme direct ϕ grâce au théorème de Whitehead.

(4C) Utiliser ϕ pour montrer que la classe de $vz - (-1)^{|x|}xw$ vaut zéro dans $H^*(A)/I$.

Solution : Comme ϕ est un morphisme d'ADGC, on doit avoir

$$\phi(vz - (-1)^{|x|}xw) = \phi(v) \cdot \phi(z) - (-1)^{|x|}\phi(x) \cdot \phi(w) = \phi(v) \cdot \gamma - (-1)^{|x|}\alpha \cdot \phi(w)$$

et donc la classe $[vz - (-1)^{|x|}xw]$ est nulle modulo $I = (\alpha, \gamma)$.

(4D) En déduire un exemple de deux ADGC ayant la même cohomologie sans être quasi-isomorphes.

Solution : Il suffit de trouver une ADGC A et des éléments x, y, z, v, w avec $vz - \pm xw$ non nul modulo $I = (\alpha, \gamma)$. Alors A et $H^*(A)$ auront la même cohomologie mais ne pourront pas être quasi-isomorphes à cause des questions précédentes.

On considère l'ADGC suivante (où les indices dénotent les degrés) :

$$A = (S(x_2, y_2, z_2, v_3, w_3), dx = 0, dy = 0, dz = 0, dv = xy, dw = yz).$$

Alors (x, y, z, v, w) donne un exemple de classe $[vz - xw] \neq 0$ de degré 5. On vérifie que cette classe est non nulle ($d : A^4 \rightarrow A^5$ est l'application nulle). On calcule aussi que $H^2(A) = \mathbb{Q}\langle [x], [y], [z] \rangle$ et $H^3(A) = 0$, donc $[vz - xw] \in H^5(A)$ ne peut pas s'écrire comme une somme de produits qui font intervenir $[x]$ et $[z]$. Cette classe $[vz - xw]$ est donc non-triviale modulo $I = ([x], [z])$. L'ADGC A ne peut donc pas être quasi-isomorphe à sa cohomologie.