

# L'opérade Swiss-Cheese et le centre de Drinfeld

---

Najib Idrissi

13 octobre 2017 @ SIC Calais



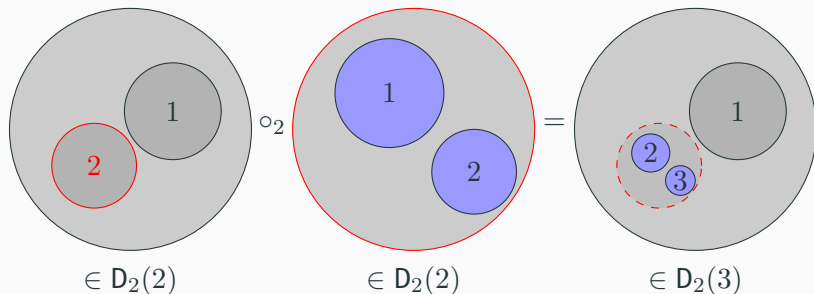
Laboratoire  
Paul Painlevé



Opérades des petits disques et tresses

# Opérades des petits disques

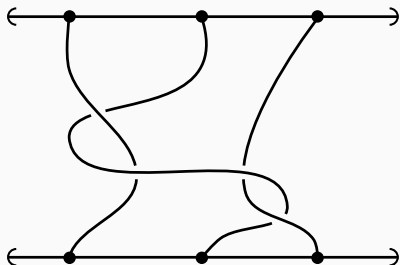
Les opérades topologiques des petits disques  $\mathbf{D}_n$  [Boardmann–Vogt, May] gouvernent les algèbres associatives et commutatives à homotopie près :



# Groupes de tresses

Rappel : groupes des tresses pures

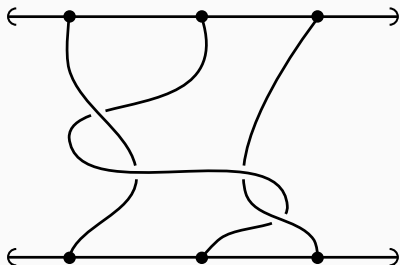
$$P_r = \ker(B_r \rightarrow \Sigma_r)$$



# Groupes de tresses

Rappel : groupes des tresses pures

$$P_r = \ker(B_r \rightarrow \Sigma_r)$$



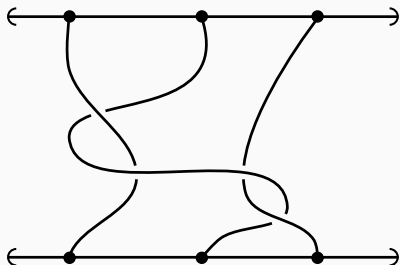
## Proposition

$$D_2(r) \simeq \text{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1)$$

# Groupes de tresses

Rappel : groupes des tresses pures

$$P_r = \ker(B_r \rightarrow \Sigma_r)$$

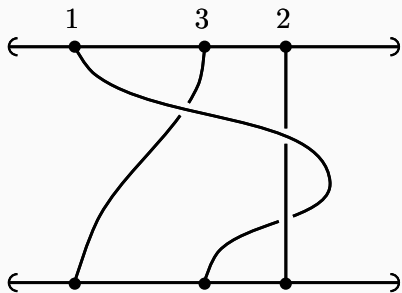


## Proposition

$$D_2(r) \simeq \text{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1) \implies D_2 \simeq B(\pi D_2)$$

# Groupeïdes de tresses

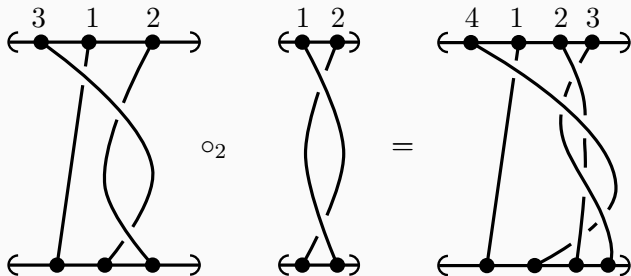
« Extension » de  $P_r$  : groupeïde des tresses colorées  $\mathbf{CoB}(r)$



$$\text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r, \quad \text{End}_{\mathbf{CoB}(r)}(\sigma) \cong P_r$$

# Câblage

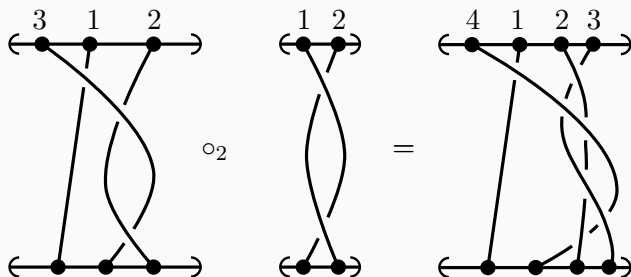
« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin





# Câblage

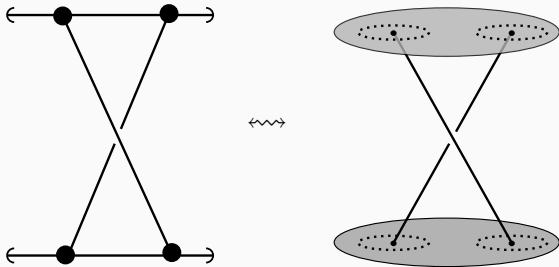
« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin



$\Rightarrow \{\mathbf{CoB}(r)\}_{r \geq 1}$  est une opérade symétrique en groupoïdes :

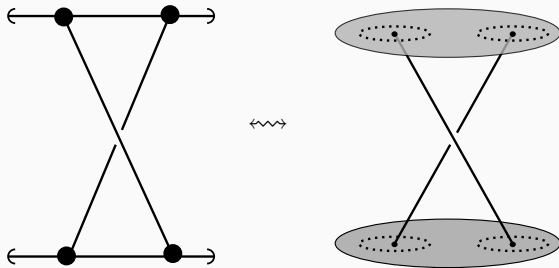
$$\circ_i : \mathbf{CoB}(k) \times \mathbf{CoB}(l) \rightarrow \mathbf{CoB}(k + l - 1), \quad 1 \leq i \leq k$$

## Petits disques et tresses



$\text{CoB}(r) \cong \text{sous-groupe de } \pi D_2(r)$

# Petits disques et tresses



$\text{CoB}(r) \cong \text{sous-groupe de } \pi D_2(r)$

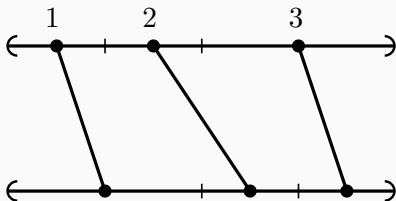
## Problème

Inclusion incompatible avec la structure d'opérade

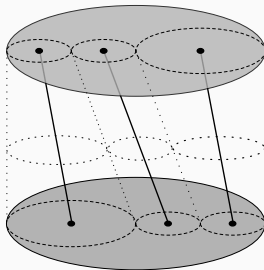
# Petits disques et tresses (2)

## Solution

Tresses parenthésées PaB



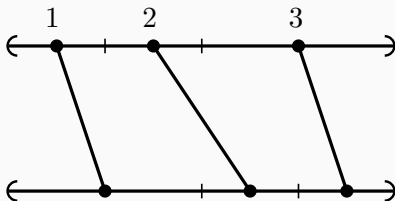
$\Leftrightarrow$



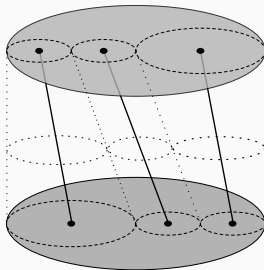
# Petits disques et tresses (2)

## Solution

Tresses parenthésées PaB



$\Leftrightarrow$



Théorème (Fresse ; voir aussi Fiedorowicz, Tamarkin...)

Équivalence faible d'opérades  $\pi D_2 \xleftarrow{\sim} \text{PaB} \xrightarrow{\sim} \text{CoB}$ .

# Algèbres sur une opérade catégorique

$P \in \text{CatOp} \implies$  une  $P$ -algèbre est la donnée de :

- une catégorie  $C$ ;
- Pour un objet  $x \in \text{ob } P(r)$ , un *foncteur*  $\bar{x} : C^{\times r} \rightarrow C$ ;
- Pour un morphisme  $f \in \text{Hom}_{P(r)}(x, y)$ , une *transformation naturelle*

A commutative diagram illustrating the compatibility of the functor  $\bar{x}$  with the natural transformation  $\bar{f}$ . The diagram consists of two objects,  $C^{\times r}$  on the left and  $C$  on the right. A curved arrow labeled  $\bar{x}$  points from  $C^{\times r}$  to  $C$  at the top. A curved arrow labeled  $\bar{y}$  points from  $C^{\times r}$  to  $C$  at the bottom. A vertical arrow labeled  $\bar{f}$  points from  $C^{\times r}$  to  $C$  in the center, with a double vertical line on its left side indicating it is a natural transformation.

- + compatibilité avec les actions des groupes symétriques et la structure d'opérade.

$P = \text{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie  $C$ ;

$P = \mathbf{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie  $C$ ;
- $\sigma \in \text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : C^{\times r} \rightarrow C$  t.q.  $\otimes_{\text{id}_1} = \text{id}_C$ ;



$P = \mathbf{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie  $C$ ;
- $\sigma \in \text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : C^{\times r} \rightarrow C$  t.q.  $\otimes_{\text{id}_1} = \text{id}_C$ ;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\text{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ;

$P = \mathbf{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie  $C$ ;
- $\sigma \in \text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : C^{\times r} \rightarrow C$  t.q.  $\otimes_{\text{id}_1} = \text{id}_C$ ;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\text{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ;
- $\otimes_{\text{id}_2}(\otimes_{\text{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\text{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\text{id}_2}(X, \otimes_{\text{id}_2}(Y, Z)) \dots$

$\mathbf{P} = \mathbf{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

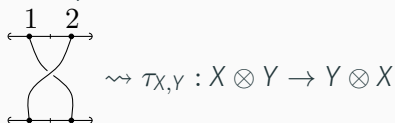
- Une catégorie  $\mathbf{C}$ ;
- $\sigma \in \text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathbf{C}^{\times r} \rightarrow \mathbf{C}$  t.q.  $\otimes_{\text{id}_1} = \text{id}_{\mathbf{C}}$ ;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\text{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ;
- $\otimes_{\text{id}_2}(\otimes_{\text{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\text{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\text{id}_2}(X, \otimes_{\text{id}_2}(Y, Z)) \dots$
- $\beta \in \text{Hom}_{\mathbf{CoB}(r)}(\sigma, \sigma')$  tresse colorée  $\rightsquigarrow$  transformation naturelle  $\beta_* : \otimes_\sigma \rightarrow \otimes_{\sigma'}$ . Par exemple :


$$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

# Algèbres sur CoB

$\mathbf{P} = \mathbf{CoB} \implies$  une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie  $\mathbf{C}$ ;
- $\sigma \in \text{ob } \mathbf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathbf{C}^{\times r} \rightarrow \mathbf{C}$  t.q.  $\otimes_{\text{id}_1} = \text{id}_{\mathbf{C}}$ ;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\text{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ ;
- $\otimes_{\text{id}_2}(\otimes_{\text{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\text{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\text{id}_2}(X, \otimes_{\text{id}_2}(Y, Z)) \dots$
- $\beta \in \text{Hom}_{\mathbf{CoB}(r)}(\sigma, \sigma')$  tresse colorée  $\rightsquigarrow$  transformation naturelle  $\beta_* : \otimes_\sigma \rightarrow \otimes_{\sigma'}$ . Par exemple :


$$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$$

## Théorème (MacLane, Joyal-Street)

*Une algèbre sur CoB est une catégorie monoïdale tressée (stricte, sans unité).*

# Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

## Théorème

*Une algèbre sur  $\mathbf{PaB}$  est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

# Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

## Théorème

*Une algèbre sur  $\mathbf{PaB}$  est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

Versions unitaires  $\mathbf{CoB}_+$  et  $\mathbf{PaB}_+$  :

## Théorème

*Une algèbre sur  $\mathbf{CoB}_+$  (resp.  $\mathbf{PaB}_+$ ) est une catégorie monoïdale tressée stricte (resp. non-stricte) avec une unité stricte (dans les deux cas).*

# Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

## Théorème

*Une algèbre sur  $\mathbf{PaB}$  est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

Versions unitaires  $\mathbf{CoB}_+$  et  $\mathbf{PaB}_+$  :

## Théorème

*Une algèbre sur  $\mathbf{CoB}_+$  (resp.  $\mathbf{PaB}_+$ ) est une catégorie monoïdale tressée stricte (resp. non-stricte) avec une unité stricte (dans les deux cas).*

$\mathbf{PaP} \subset \mathbf{PaB}$  où on ne garde que les tresses triviales :

## Théorème

*$\pi\mathbf{D}_1 \simeq \mathbf{PaP}$ , les algèbres sur  $\mathbf{PaP}$  sont les catégories monoïdales.*

# L'opérade Swiss-Cheese



# Définition

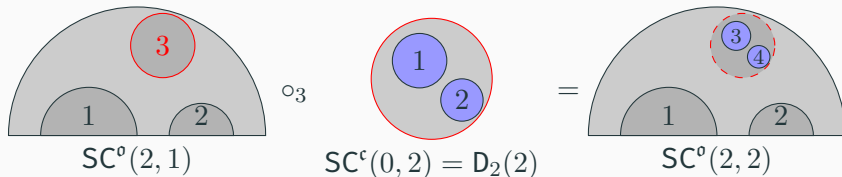
L'opérade **Swiss-Cheese SC** [Voronov, 1999] :

- gouverne les  $D_2$ -algèbres agissant sur les  $D_1$ -algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs  $\mathfrak{c} \leftrightarrow D_2$  et  $\mathfrak{o} \leftrightarrow D_1$ .

# Définition

L'opérade Swiss-Cheese  $SC$  [Voronov, 1999] :

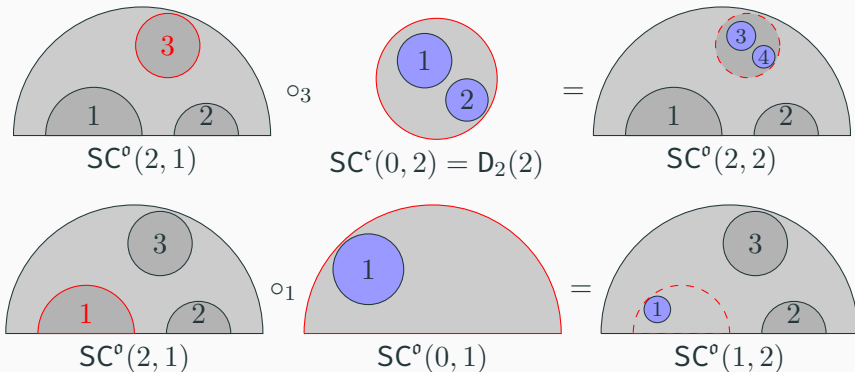
- gouverne les  $D_2$ -algèbres agissant sur les  $D_1$ -algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs  $\mathfrak{c} \leftrightarrow D_2$  et  $\mathfrak{o} \leftrightarrow D_1$ .



# Définition

L'opérade Swiss-Cheese  $SC$  [Voronov, 1999] :

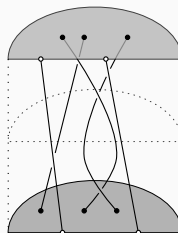
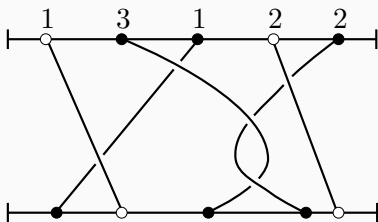
- gouverne les  $D_2$ -algèbres agissant sur les  $D_1$ -algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs  $\mathfrak{c} \leftrightarrow D_2$  et  $\mathfrak{o} \leftrightarrow D_1$ .



# L'opérade CoPB

## Idée

Étendre CoB pour construire une opérade équivalente à  $\pi\text{SC}$ .

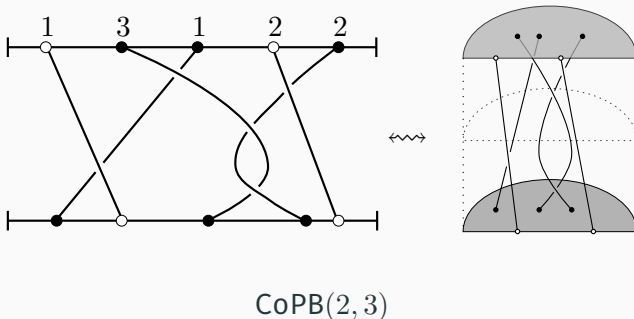


CoPB(2,3)

# L'opérade CoPB

## Idée

Étendre CoB pour construire une opérade équivalente à  $\pi\text{SC}$ .

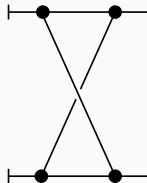
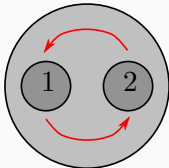


## Théorème (I.)

$$\pi\text{SC} \xleftarrow{\sim} \text{PaPB} \xrightarrow{\sim} \text{CoPB}.$$

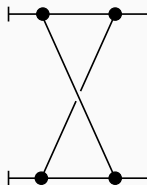
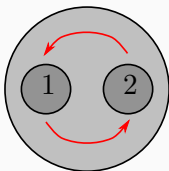
# Tressages et semi-tressages

$D_2$  / CoB : tressage = commutativité à homotopie près

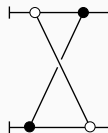
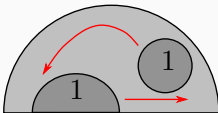


# Tressages et semi-tressages

$D_2$  / CoB : tressage = commutativité à homotopie près



SC / CoPB : semi-tressage = morphisme « central »



C: catégorie monoïdale  $\rightsquigarrow \Sigma C$  bicatégorie à un objet  
 $\rightsquigarrow$  Centre de Drinfeld  $\mathcal{Z}(C) := \text{End}(\text{id}_{\Sigma C})$

- $\text{ob } \mathcal{Z}(C) = \{(X, \Phi) \mid X \in C, \Phi : (X \otimes -) \xrightarrow{\cong} (- \otimes X)\}$
- $\text{Hom}_{\mathcal{Z}(C)}((X, \Phi), (Y, \Psi)) = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{compatible with } \Phi \text{ and } \Psi\}$

**Théorème (Drinfeld, Joyal–Street 1991, Majid 1991)**

*$\mathcal{Z}(C)$  est une catégorie monoïdale tressée avec*

$$(X, \Phi) \otimes (Y, \Psi) = (X \otimes Y, (\Psi \otimes 1) \circ (1 \otimes \Phi)),$$

$$\tau_{(X, \Phi), (Y, \Psi)} = \Phi_Y.$$



# Théorème de Voronov & algèbres sur CoPB

## Théorème (Voronov, Hoefel)

*Une algèbre sur  $H_*(SC)$  est donnée par :*

- *une algèbre associative  $A$ ;*
- *une algèbre de Gerstenhaber  $B$ ;*
- *un morphisme central d'algèbres  $f : B \rightarrow Z(A)$ .*

(Dans la version de Voronov :  
 $B \otimes A \rightarrow A$  au lieu de  $B \rightarrow A$ )

# Théorème de Voronov & algèbres sur CoPB

## Théorème (Voronov, Hoefel)

*Une algèbre sur  $H_*(SC)$  est donnée par :*

- *une algèbre associative  $A$ ;*
- *une algèbre de Gerstenhaber  $B$ ;*
- *un morphisme central d'algèbres  $f : B \rightarrow Z(A)$ .*

## Théorème (I.)

*Une algèbre sur CoPB est donnée par :*

- *Une catégorie monoïdale  $N$ ;*
- *Une catégorie monoïdale tressée  $M$ ;*
- *Un foncteur monoïdal tressé  $F : M \rightarrow \mathcal{Z}(N)$ .*

(Dans la version de Voronov :  
 $B \otimes A \rightarrow A$  au lieu de  $B \rightarrow A$ )

Modèle rationnel en passant par les associateurs de  
Drinfeld

# Opérade des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

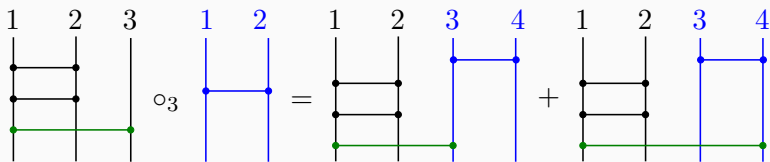
$$\mathfrak{p}(r) := \mathbb{L}(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

# Opérate des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

$$\mathfrak{p}(r) := \mathbb{L}(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

→ opérade :



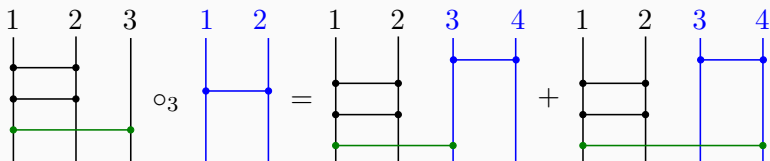
$$t_{13}t_{12}t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

# Opérate des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

$$\mathfrak{p}(r) := \mathbb{L}(t_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

→ opérade :



$$t_{13}t_{12}t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

Complétion de Mal'cev → opérade en group(oïd)es complets

$$\widehat{\mathbf{CD}} = \mathbb{G}\widehat{\mathbf{U}}\widehat{\mathfrak{p}} (= \{e^x \mid x \in \mathfrak{p}\})$$

# Associateurs de Drinfeld

Associateurs de Drinfeld ( $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ ):

$$\text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) := \{\phi : \text{PaB}_+ \rightarrow \widehat{\text{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

# Associateurs de Drinfeld

Associateurs de Drinfeld ( $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ ) :

$$\text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) := \{\phi : \text{PaB}_+ \rightarrow \widehat{\text{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

$$\phi \in \text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \iff \Phi(t_{12}, t_{23}) := \phi(\alpha) \in \mathbb{G}(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]])$$

satisfying the usual equations



# Associateurs de Drinfeld

Associateurs de Drinfeld ( $\mu \in \mathbb{Q}^\times$ ) :

$$\text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) := \{\phi : \text{PaB}_+ \rightarrow \widehat{\text{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

$$\phi \in \text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \iff \Phi(t_{12}, t_{23}) := \phi(\alpha) \in \mathbb{G}(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]])$$

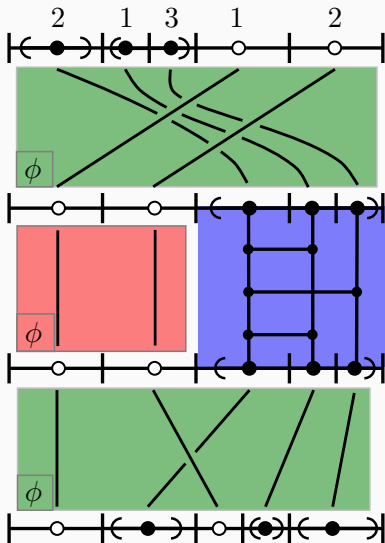
satisfying the usual equations

## Théorème (Drinfeld)

$$\text{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

$\phi$  induit une équivalence rationnelle  $\pi(\mathbf{D}_2)_+ \simeq \text{PaB}_+ \xrightarrow{\sim \mathbb{Q}} \widehat{\text{CD}}_+$

# Modèle rationnel $\pi SC_+$



Nouvelle opérade  $\text{PaP}\widehat{\text{CD}}_+^\phi$  (avec  $\phi \in \text{Ass}^\mu(\mathbb{Q})$  fixé).

Théorème (I.)

$$\pi SC_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \text{PaP}\widehat{\text{CD}}_+^\phi.$$

Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(SC)$  est le « produit de Voronov »  $H_*(D_2) \otimes H_*(D_1)$

# Non-formalité

## Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(SC)$  est le « produit de Voronov »  $H_*(D_2) \otimes H_*(D_1)$

## Corollaire

$$H_*(SC; \mathbb{Q}) \cong H_*(B(\text{PaP}) \times B(\widehat{CD}); \mathbb{Q})$$

# Non-formalité

## Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(SC)$  est le « produit de Voronov »  $H_*(D_2) \otimes H_*(D_1)$

## Corollaire

$$H_*(SC; \mathbb{Q}) \cong H_*(B(\mathbf{PaP}) \times B(\widehat{CD}); \mathbb{Q})$$

## Théorème

- $D_n$  est formelle  $\implies \langle H^*(D_n) \rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} D_n$  [Kontsevich, Tamarkin, Lambrechts-Volić, Fresse-Willwacher]
- $SC$  n'est pas formelle  $\implies SC \not\cong \langle H^*(D_2) \rangle^{\mathbb{L}} \times \langle H^*(D_1) \rangle^{\mathbb{L}}$  [Livernet]

# Non-formalité

## Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(SC)$  est le « produit de Voronov »  $H_*(D_2) \otimes H_*(D_1)$

## Corollaire

$H_*(SC; \mathbb{Q}) \cong H_*(B(\mathbf{PaP}) \times B(\widehat{CD}); \mathbb{Q})$

## Théorème

- $D_n$  est formelle  $\implies \langle H^*(D_n) \rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} D_n$  [Kontsevich, Tamarkin, Lambrechts-Volić, Fresse-Willwacher]
- $SC$  n'est pas formelle  $\implies SC \not\cong \langle H^*(D_2) \rangle^{\mathbb{L}} \times \langle H^*(D_1) \rangle^{\mathbb{L}}$  [Livernet]

## Résultat

$\mathbf{PaP}\widehat{CD}_+^{\phi} = \ll \mathbf{PaP} \rtimes_{\varphi} \widehat{CD} \gg$  « corrige » le défaut de formalité.

# Merci de votre attention !

arXiv:1507.06844

Diapos : <https://operad.fr/talk/sic2017/>