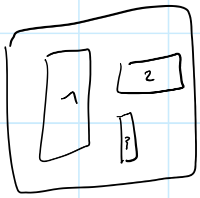
① Opérades E_k et E_k^+

Rappel : $\mathcal{C} = \mathcal{S}^{\mathcal{G}}$ cat modèle simpliciale monoïdale

Modèle pour $E_k^{(+)}$: opérade des petits cubes $C_k^{(+)}$

$$C_k^+(n) = \mathrm{Emb}^{rect}\left(\coprod^n I^k, I\right)$$

$$C_k(n) = \begin{cases} C_k^+(n) & n > 0 \\ \emptyset & n = 0 \end{cases}$$


$\in C_2(3)$

Composition = composition de plongements

$$E_k^+(X) = F^{E_k^+}(X) = \coprod_{\substack{n \geq 1 \\ 0}} C_k^+(n) \underset{\Sigma_n}{\times} X^n$$

$\Rightarrow$ monades tamisées

$\varepsilon : E_k \longrightarrow +$ augmentation canonique (de monades)

$\rightarrow Q^{E_k}_{\mathbb{L}}(\mathbf{R}) = \mathbb{L}\varepsilon_*(\mathbf{R}) \in \mathcal{C}_*$ objet pointé

↳ Indécomposables dérivés

Rq On a une composition d'adjonctions

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "E_k"] & \mathrm{Alg}_{E_k}(\mathcal{C}) \arrow[l, shift left, "U"] \arrow[r, shift left, "\varepsilon_*"] & \mathcal{C}_* \arrow[l, shift left, "\varepsilon^*"] \end{tikzcd}$$

$\rightarrow Q^{E_k}(E_k(X)) = X_+$

$\Rightarrow$ En général, $Q^{E_k}(\mathbf{R}) = \mathrm{coeq}\left(E_k(\mathbf{R}) \rightrightarrows \mathbf{R}\right)$.

$\Rightarrow$ En général, $Q^{E_k}(\mathbf{R}) = \mathrm{coeq}\left(E_k(\mathbf{R})_+ \rightrightarrows \mathbf{R}_+\right)$

Si $\mathbf{R}_\bullet \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$ est une résolution simplicial libre en chaque dim, alors $Q^{E_k}_{\mathbb{L}}(\mathbf{R}) \simeq Q^{E_k}|\mathbf{R}_\bullet| \simeq |Q^{E_k}(\mathbf{R}_\bullet)|$

⚠ $|\cdot|$ = réalisation dans $\mathrm{Alg}_{E_k}(\mathcal{C})$

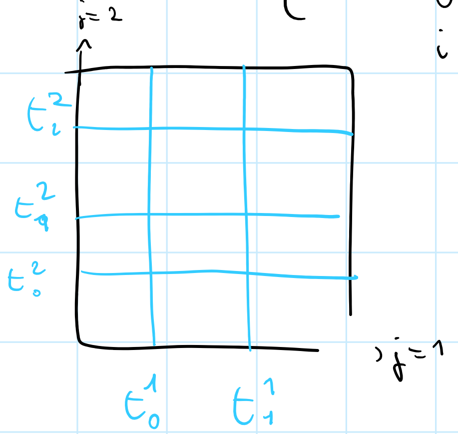
② Construction bar itérée

$k \in \mathbb{N}$ fixé

Pour $p = (p_1, \dots, p_k)$, on définit

$$P_k(p) = \left\{ (t_i^j)_{\substack{0 \leq i \leq p_j \\ 1 \leq j \leq k}} \;\middle|\; 0 < t_0^j < \dots < t_{p_j}^j < 1 \quad \forall j \right\}$$

en

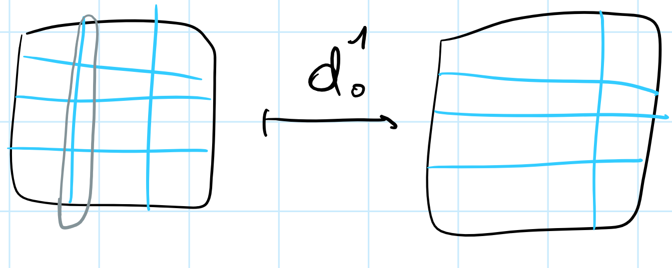


$\in P_2(1,2)$

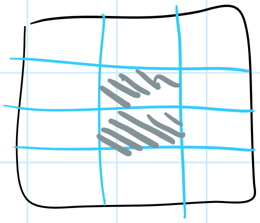
On déf un espace k-semi-simplicial

$$(\Delta^{op}_{inj})^k \longrightarrow \mathrm{Top}$$
$$p \longmapsto P_k(p)$$

en



Cubes internes $\rightsquigarrow$ $\delta \in C_k(p_1 \times \cdots \times p_k)$


$\in C_2(2)$ 2 petits carrés

Les faces d_i^j fusionnent les petits cubes consécutifs

$(q_1, \dots, q_{j-1}, i, q_{j+1}, \dots, q_k)$ et

$(q_1, \dots, q_{j-1}, i+1, q_{j+1}, \dots, q_k)$

On note $\delta_i^j \in C_k(2)$ la configuration donnée par les 2 cubes fusionnés par δ_i^j

$\Longrightarrow$ on définit la construction bar :

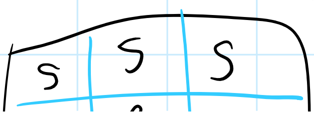
pour $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{S}$ mq d'algèbre E_k^+,

$$B_\bullet^{E_k}(f) \in \mathcal{C}^{(\Delta^{op}_{inj})^k}$$

$$B^{E_k}_{p_1, \dots, p_k}(f) = P_k(p) \times G_p(f)$$

où $$G_p(f) = \bigotimes_{q_1=0}^{p_1+1} \cdots \bigotimes_{q_k=0}^{p_k+1} B^{q_1 \cdots q_k}_{p_1 \cdots p_k}$$

$$B^{q_1 \cdots q_k}_{p_1 \cdots p_k} = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } 1 \leq q_j \leq p_j \\ \mathbf{S} & \text{sinon} \end{cases}$$

ex


ex

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline S & S & S \\ \hline S & R & S \\ \hline S & R & S \\ \hline S & S & S \\ \hline \end{array} = G_{(1,2)}(f)$$

Les faces $d_i^j : B^{E_k}_{p_1 \dots p_k}(f) \longrightarrow B^{E_k}_{\underbrace{p_1, \dots, p_j - 1, \dots, p_k}}(f)$

On doit définir $P_k(p) \times G_p(f) \longrightarrow P_k(\dots) \times G_{\dots}(f)$

- sur $P_k(\dots)$: comme avant
- sur $G_{\dots}(f)$: par adjonction, donné par

$$\begin{tikzcd}
P_k(p) \arrow[rr] \arrow[dr, "\delta_i^j"'] & & \mathrm{Map}_{\mathcal{C}}\left(G_{p_1 \dots p_k}(f), G_{p_1 \dots p_j - 1 \dots p_k}(f)\right) \\
& C_k(2) \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

où α est donné par la multiplication et f

ex

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline S & S & S & S \\ \hline S & R & R & S \\ \hline S & S & S & S \\ \hline \end{array} \xrightarrow{d_0^1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline S & S & S \\ \hline S & R & S \\ \hline S & S & S \\ \hline \end{array}$$

$$C_k(2) \xrightarrow{\text{structure}} \mathrm{Map}(\mathbb{S} \otimes \mathbb{S}, \mathbb{S}) \xrightarrow{(id \otimes f)^*} \mathrm{Map}(\mathbb{S} \otimes \mathbb{R}, \mathbb{S})$$

On pose $B^{E_k}(f) = \left| B^{E_k}_{\bullet}(f) \right| \in \mathcal{C}$

Si $f = \varepsilon : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{1}$, on note
$B^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon) = B^{E_k}_{\cdot}(\varepsilon)$ (pour se rappeler de $\mathbf{R}$)

$$B^{E_k}(\mathbb{1}, \varepsilon) \xrightarrow{\text{unité}} B^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon} B^{E_k}(\mathbb{1}, \varepsilon)$$
$\simeq \mathbb{1}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \simeq \mathbb{1}$

$\Longrightarrow$ construction bar réduite
$\widetilde{B}^{E_k}(f) = \operatorname{cofibre}\left(B^{E_k}(\mathbb{1}, \varepsilon) \longrightarrow B^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon)\right)$

Pour $\mathbf{R} \in \mathrm{Alg}_{E_k}(\mathcal{C})$, $\mathbf{R}^+$ l'unitalisation
$\Rightarrow$ augmentation canonique $\mathbf{R}^+ \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{1}$
qui est scindée, ie si

$$\begin{tikzcd} I(R) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & R^+ \arrow[d, "\varepsilon"] \\ * \arrow[r] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

alors $I(R)^+ \cong R^+$

lemme Si $\mathbf{R}$ est scindée, alors
Alors $B^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon) \simeq B^{E_k}(\mathbb{1}, \varepsilon) \vee \widetilde{B}^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon)$

Description alternative de $\widetilde{B}^{E_k}$:
lemme Si $R \in \mathrm{Alg}_{E_k}(\mathcal{C})$ est cofibrante, alors
$$\widetilde{B}^{E_k}(\mathbf{R}, \varepsilon) \simeq \left| \widetilde{B}^{E_k}_{\bullet}(\mathbf{R}, \varepsilon) \right|$$
où
$$\widetilde{B}^{E_k}_{p}(\mathbf{R}) = \begin{cases} * & \text{si } \exists j \text{ tq } p_j = 0 \\ \dfrac{P_k(p) \times \bigotimes_q (\mathbb{1} \sqcup R)}{P_k(p)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Thm Il existe un zigzag de transfo nat

$$\widetilde{B}^{E_k}(-) \Longleftarrow \cdots \Longrightarrow S^k \wedge Q^{E_k}_{\mathbb{L}}(-)$$

(vus comme foncteurs $\mathrm{Alg}(E_k) \to \mathcal{C}_*$), qui est une équ sur les objets cofibrants

Réduction au cas libre

On prend $S^k_\bullet = (\Delta^1/\partial\Delta^1)^{\wedge k} \in \mathrm{Set}_*^{(\Delta^{op}_{inj})^k}$

On pose $Q^{E_k}_\bullet(\mathbf{R}) = S^k_\bullet \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R})$

Alors $|Q^{E_k}_\bullet(\mathbf{R})| \cong |S^k_\bullet| \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} S^k \wedge Q^{E_k}(\mathbf{R})$

$\Rightarrow$ on construit

$$\nu_{\mathbf{R}} : \widetilde{B}^{E_k}_\bullet(\mathbf{R}) \longrightarrow Q^{E_k}_\bullet(\mathbf{R})$$

induit par :

- $P_k(p) \longrightarrow *$
- $\mathbf{R} \longrightarrow Q^{E_k}(\mathbf{R})$ en degré $(1, \dots, 1)$
- $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{1}$ sur les autres degrés

affirmation Si $X \in \mathcal{C}$ est cofibrant, alors $\nu_{E_k(X)}$ est une equivalence

Supposons l'affirmation et prouvons le thm

Prenons $R_\bullet \xrightarrow{e} R$ une resolution simpliciale libre

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B}^{E_k}(R) & & \\
\tilde{B}(|R_\bullet|) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\nu_{|R_\bullet|_{E_k}}"] \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] & S^k \wedge Q^{E_k}(|R_\bullet|_{E_k}) = S^k \wedge Q^{E_k}_{\mathbb{L}}(R) \arrow[d, phantom, "\cong" sloped] \\
|\tilde{B}(R_\bullet)|_{E_k} \arrow[r, "\underset{\text{affirm}}{\sim}", "|\nu_{R_\bullet}|"'] & |S^k \wedge Q^{E_k}(R_\bullet)|
\end{tikzcd}$$

Thm Il existe un zigzag de transfo nat

$$\tilde{B}^{E_k}(E_{n+k}(-)) \Longleftarrow \cdots \Longrightarrow E_n(S^k \wedge (-)_+)$$

de foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_*$, qui sont des éqv faibles sur les cofibrants

Rq Pour le thm principal, juste besoin de $n=0$

Le cas $n > 0$ sera utile plus tard

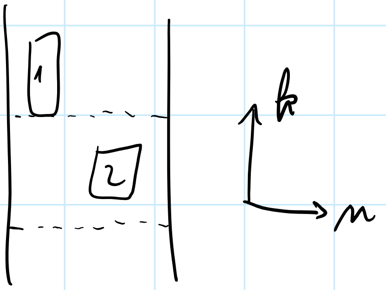
+ pour la stab homologique juste besoin de $n=0$

Le cas $n>0$ sera utile plus tard.

On déf une suite sym :

$$F_{n,k}(i) = \begin{cases} \emptyset & i=0 \\ \mathrm{Emb}^{rect}\left(\bigsqcup^{i} I^n \times I^k,\ I^n \times \mathbb{R}^k\right) \end{cases}$$

ex

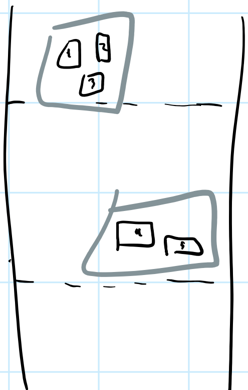


$\partial F_{n,k}(i)$ = config dont au moins un des cubes sort entièrement de I^{n+k}

On considère aussi $F_{n,k} / \partial F_{n,k}$ (arité par arité)

Ce sont :

- des E_{n+k} - modules à droite



- des E_n - modules à gauche

En particulier, (E_n, E_n) - bimodules.

$A \ltimes X = A \wedge X_+$

On note $\overline{F}_{n,k} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$X \longmapsto \coprod_{i\geq 1} F_{n,k}(i)/\partial F_{n,k}(i) \ltimes_{\Sigma_i} X^{\times i}$$

$\Longrightarrow$ se relève en un foncteur $\mathbf{F}_{n,k} : \mathcal{C} \longrightarrow Alg_{E_n}(\mathcal{C}_*)$

preuve du thm (modulo lemmes)

$$E_n(S^k \ltimes X) \xleftarrow[1]{\sim} \overline{F}_{n,k}(X) \xleftarrow[2]{\sim} |\overline{F}_{n,k,\bullet}(X)| \xrightarrow[3]{\sim} |\overline{F}^{\circ}_{n,k}(X)| \xleftarrow[4]{} \tilde{B}^{E_n}(E_{n+k}(X))$$

lemme 1 On pose $\varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow F_{n,k}(1)$

$$v \longmapsto I^{n-k} + v$$

$\varphi(\partial\mathbb{R}^k) \subset \partial F_{n,k}(1)$ où $\partial \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \setminus (-1,1)^k$

⇝ $\varphi : \mathbb{R}^k/\partial\mathbb{R}^k = S^k \longrightarrow \overline{F}_{n,k}(1)$

⇝ $S^k \ltimes X \longrightarrow \overline{F}_{n,k}(1)\ltimes X \hookrightarrow \overline{F}_{n,k}(X)$

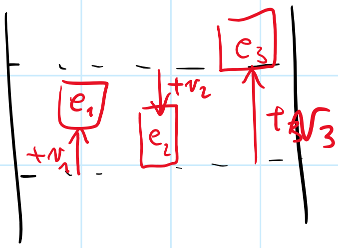
⇝ morphisme de E_n-algèbres

$$E_n(S^k\ltimes X) \longrightarrow \mathbf{F}_{n,k}(X)$$

donnée par :

$$\varphi_i : C_n(i) \wedge (S^k)^i \longrightarrow \overline{F}_{n,k}(i)$$

$$(e_1,\dots,e_i,v_1,\dots,v_i) \longmapsto$$



φ_i est une équ faible (déform° rétract explicite)

lemme 2 $F_{n,k,p}(X) \subset P_k(p) \times F_{n,k}(i)$
$= \{ (t_i^j), e \mid$ la grille ne touche pas les cubes$\}$

$\Longrightarrow$ résolution simpliciale de $F_{n,k}(i)$
(regarder les centres : $\mathrm{Conf}_{k,n,\bullet}(i) \longrightarrow \mathrm{Conf}_{k,n}(i)$
c'est une « microfibration de Serre » à fibres contractiles, cqfd)
(et ça marche aussi pour $\partial F_{n,k}$ et $\overline{F_{n,k}}$)

lemme 3 $\partial^0 F_{n,k}^{(X)} = \{ (t_i^j), e \mid$ au moins un des cubes est à l'extérieur de $I^n \times [t_0^1, t_{p_1}^1] \times \cdots \times [t_0^k, t_{p_k}^k] \}$

Facile de voir que $\partial F_{n,k}(X) \xhookrightarrow{\sim} \partial^0 F_{n,k}(X)$
$\Rightarrow$ induit $\overline{F}^0_{n,k,\bullet}(X) = F_{n,k,\bullet}(X) / \partial^0 F_{n,k,\bullet}(X) \xrightarrow{\sim} \overline{F}_{n,k,\bullet}(X)$

lemme 4 Iso explicite $\widetilde{B}_\bullet^{E_k}(E_{n+k}(X)) \cong \overline{F}^0_{n,k,\bullet}(X)$