Homotopie réelle des espaces de configuration

Najib Idrissi*

4, 11, 18 et 25 mars 2020
Cours Peccot – Collège de France

Ce document est un résumé du cours donné par l'auteur au Collège de France en mars 2020 au titre de la Fondation Claude-Antoine Peccot. Les vidéos des cours seront disponibles sur le site du Collège de France.
Remarque : ces notes sont encore incomplètes et sujettes à réorganisation.

Table des matières

*. Université de Paris & Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche. najib.idrissi-kaitouni@imj-prg.fr

1 Espaces de configuration de variétés

1.1 Espaces de configuration

Soit M un espace topologique et $r \geq 0$ un entier.

Définition 1.1.1. Le *rième espace de configuration* (ordonné) de M est l'espace topologique :

$$\mathrm{Conf}_M(r) := \{(x_1, \dots, x_r) \in M^r \mid \forall i \neq j,\ x_i \neq x_j\}.$$

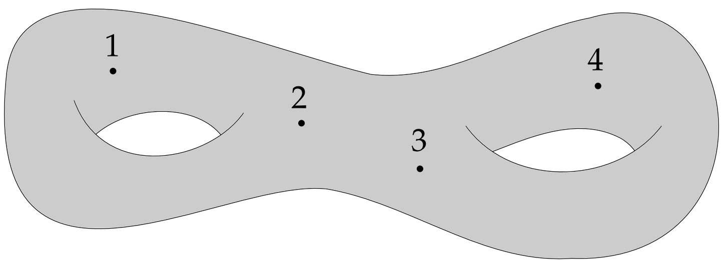


FIG. 1: Un élément de $\mathrm{Conf}_{\Sigma_2}(4)$

Ces espaces apparaissent dans de nombreux contextes. On peut notamment citer :

– Le groupe de tresses pures à r brins PB_r est le groupe fondamental de l'espace de configuration de r points dans le plan : $PB_r \cong \pi_1(\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r))$. Il y a une action évidente du groupe symétrique sur $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r)$, et le groupe de tresse B_r est le groupe fondamental du quotient, $B_r \cong \pi_1(\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^2}(r)/\Sigma_r)$. Ces espaces étant des espaces d'Eilenberg–MacLane de type $K(\pi, 1)$, on peut par exemple calculer la (co)homologie du groupe de tresses en calculant la (co)homologie de ces espaces de configuration. On peut également définir les groupes de tresses des surfaces comme les groupes fondamentaux des espaces de configuration des surfaces.

– Les espaces de lacets et les espaces de modules de courbes complexes. Ces applications sont liées à la théorie des opérades, voir la Section 4.

– La cohomologie de Gelfand–Fuks $H^*_{\mathrm{cont}}(\Gamma_c(M, TM))$, qui apparaît dans l'étude des foliations. Il existe une suite spectrale dont la page E^2 s'exprime à l'aide de la cohomologie des espaces de configuration (décorés) de M et qui converge vers la cohomologie de Gelfand–Fuks de M [CT78].

– L'espace des applications à support compact $\mathrm{Map}_c(\mathbb{R}^d, X)$ se scinde stablement en termes de suspensions d'espaces de configuration de $\mathbb{R}^d$ décorés par X [Sna74].

– En mécanique, les espaces de configuration tels que présentés ci-dessus sont un cas particulier de la notion plus générale d'espace de configuration d'un système physique (dans le cas où le système se compose simplement de particules discrètes).

– La planification de trajets. Supposons que l'on se donne un ensemble de robots dans un espace M dirigés par un ordinateur central, et que l'on souhaite déplacer tous les robots en même temps depuis une position de départ vers une position d'arrivée. Les robots ne pouvant pas occuper le même espace en même temps, il s'agit donc essentiellement de trouver un chemin dans l'espace de configuration $\mathrm{Conf}_M(r)$, où r est le nombre de robots. Plus précisément, si l'on note $P\mathrm{Conf}_M(r) = \mathrm{Map}([0, 1], \mathrm{Conf}_M(r))$ l'espace de tous les chemins possibles dans $\mathrm{Conf}_M(r)$ et que l'on note $p : P\mathrm{Conf}_M(r) \to \mathrm{Conf}_M(r) \times \mathrm{Conf}_M(r)$ l'application $p(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$, il s'agit de trouver une section de p.À moins que $\mathrm{Conf}_M(r)$ soit contractile – ce qui est que rarement le cas – une telle section ne peut être continue. Cependant, il existe un invariant homotopique, la complexité topologique, qui permettra de trouver le nombre minimal de domaines de continuité pour une telle section.

1.2 Invariance homotopique

Dans toutes ces applications, connaître le type d'homotopie de $\mathrm{Conf}_M(r)$ est crucial. Rappelons ce que l'on entend par « type d'homotopie ».

Définition 1.2.1. Deux applications $f, g : A \to X$ sont *homotopes* s'il existe une application $H : A \times [0, 1] \to X$ telle que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$. On note alors $f \simeq g$.

Définition 1.2.2. Une application $f : A \to X$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : X \to A$ telle que $f \circ g \simeq \mathrm{id}_X$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_A$. Si une telle équivalence d'homotopie existe, on dit que A et X ont le même *type d'homotopie*, ou encore que A et X sont *homotopiquement équivalents*.

Exemple 1.2.3. On voit par exemple que $\mathbb{R}$ a le même type d'homotopie qu'un singleton. On peut définir $f : \{0\} \to \mathbb{R}$ comme l'inclusion, et $g : \mathbb{R} \to \{0\}$ comme la seule application possible. Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\{0\}}$, et $H(x,t) = tx$ est une homotopie entre $f \circ g$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Considérons maintenant les espaces de configuration. Une question très naturelle est la suivante : si deux espaces sont homotopiquement équivalents, est-ce que leurs espaces de configuration le sont ? Ce n'est pas une question facile : dans la définition, rien n'indique qu'une équivalence d'homotopie est injective. Il n'est donc même pas évident de construire une application entre les espaces de configuration d'espaces homotopiquement équivalents. En fait, l'exemple précédent donne immédiatement un contre-exemple. En effet, $\mathrm{Conf}_2(\{0\})$ est vide, alors que $\mathrm{Conf}_2(\mathbb{R})$ ne l'est pas ; ces deux espaces ne sont donc pas homotopiquement équivalents.

La plupart des applications ci-dessus concernent les espaces de configuration de *variétés*. Parmi les variétés, les variétés compactes sans bord se comportent généralement mieux que les autres (et il existe un contre-exemple immédiat dans le cas à bord : $[0,1] \simeq \{0\}$ mais $\mathrm{Conf}_r([0,1]) \not\simeq \mathrm{Conf}_r(\{0\})$). Il pourrait donc être tentant de penser que si l'on se restreint aux variétés compactes sans bord, alors la réponse à la conjecture pourrait être positive. Cette question est longtemps restée ouverte. Elle est trivialement vraie jusqu'en dimension 2 : si deux variétés compactes sans bord M, N de dimension ≤ 2 sont homotopiquement équivalentes, alors elles sont homéomorphes, et donc leurs espaces de configuration le sont aussi. Un contre-exemple a cependant été trouvé il y a quelques années :

Théorème 1.2.4 (Longoni–Salvatore 2005 [LS05])**.** *Il existe deux variétés compactes sans bord $L_{7,1}$ et $L_{7,2}$ de dimension 3 qui ont le même type d'homotopie mais dont les espaces de configuration n'ont pas le même type d'homotopie.*

Le contre-exemple en question est donné par des espaces lenticulaires, des quotients de la sphère S^3 par une certaine action de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. En particulier, ces espaces ne sont pas simplement connexes : $\pi_1(L_{7,1}) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (voir Section 1.3 pour la définition de π_1). La conjecture suivante reste donc ouverte :

Conjecture 1.2.5. *Soit M et N deux variétés compactes sans bord simplement connexes. Si M et N ont le même type d'homotopie, alors $\mathrm{Conf}_M(r)$ et $\mathrm{Conf}_N(r)$ ont le même type d'homotopie pour tout r.*

Remarque 1.2.6. Deux variétés compactes sans bord simplement connexes ont le même type d'homotopie si et seulement si elles ont le même type d'homotopie *simple*. Une conjecture plus générale dirait que si deux variétés compactes sans bord ont le même type d'homotopie simple, alors leurs espaces de configuration aussi.

1.3 Rappels sur la théorie de l'homotopie rationnelle

Dans ce cours, nous allons nous concentrer sur la théorie de l'homotopie *rationnelle*, et plus tard réelle. En schématisant, cela consiste à étudier le type d'homotopie d'un espace topologique « modulo la torsion » (et « après abélianisation » le cas échéant). Cette théorie perd une quantité non-négligeable d'information au sujet des espaces topologiques, mais elle a l'avantage indéniable d'être *calculable* : le type d'homotopie rationnel d'un espace est complètement décrit par un « modèle » algébrique.

Pour motiver les définitions suivantes, commençons par quelques rappels.

Définition 1.3.1. Soit X un espace topologique. On définit $\pi_0(X)$ comme l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Si $n \geq 1$ est un entier et $x_0 \in X$ est un point base, on définit $\pi_n(X, x_0)$ comme le groupe (pour la concaténation) des classes d'homotopie d'application pointées $S^n \to X$.

Définition 1.3.2. Une *équivalence d'homotopie faible* est une application $f : X \to Y$ telle que $\pi_0(f)$ est une bijection et pour tout $x \in X$, $\pi_n(f, x_0)$ est un isomorphisme. On dit alors que X et Y ont le même *type d'homotopie faible* et on note $X \simeq Y$.

⚠ *Avertissement* 1.3.3. Une équivalence d'homotopie faible n'est pas nécessairement inversible. Deux espaces X et Y ont donc plus généralement le même type d'homotopie faible si il existe un zigzag d'équivalences faibles :

$$X \xleftarrow{\sim} X_1 \xrightarrow{\sim} X_2 \xleftarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} Y.$$

Théorème 1.3.4 (Whitehead)**.** *Si X et Y sont deux CW-complexes, alors ils ont le même type d'homotopie si et seulement si ils ont le même type d'homotopie faible.*

À partir de maintenant, nous allons nous concentrer sur les espaces simplement connexes :

Définition 1.3.5. Un espace X est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si $\pi_1(X) = 0$ (pour n'importe quel point base).

Il n'est plus nécessaire de se préoccuper des points base pour de tels espaces. En s'inspirant de la Définition 1.3.2 précédente, on en arrive à :

Définition 1.3.6. Soit X et Y deux espaces simplement connexes et de type fini. Une *équivalence (d'homotopie) rationnelle* est une application $f : X \to Y$ tell que $\pi_n(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 2$. On dit alors que X et Y ont le même *type d'homotopie rationnel* et on note $X \simeq_{\mathbb{Q}} Y$.

⚠ *Avertissement* 1.3.7. Comme pour les équivalences faibles, il faut en général considérer des zigzags de telles applications.

Remarque 1.3.8. On peut montrer que f est une équivalence rationnelle si et seulement si $H_*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme, si et seulement $H^*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

En revenant aux espaces de configuration, on peut énoncer la conjecture suivante.

Conjecture 1.3.9. *Soit M et N deux variétés compactes sans bord simplement connexes. Si $M \simeq_{\mathbb{Q}} N$ alors $\mathrm{Conf}_M(r) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Conf}_N(r)$ pour tout $r \geq 0$.*

Remarque 1.3.10. Même si la Conjecture 1.2.5 s'avérait être vraie, cela ne résoudrait pas automatiquement la Conjecture 1.3.9. En effet, la conclusion de la seconde conjecture ($\mathrm{Conf}_M(r) \simeq_{\mathbb{Q}} \mathrm{Conf}_N(r)$) est plus faible que celle de la première, mais son hypothèse ($M \simeq_{\mathbb{Q}} N$) est plus faible aussi.

Passons maintenant à la partie algébrique de la théorie de l'homotopie rationnelle, ce qui nous permettra de raffiner la conjecture ci-dessus. L'idée fondatrice de Sullivan est que le type d'homotopie rationnel d'un espace (simplement connexe de type fini) est encodé par une donnée purement algébrique, à savoir une certaine algèbre différentielle-graduée commutative.

Remarque 1.3.11. Il existe une théorie due à Quillen qui encode les types d'homotopie rationnels via des algèbres de Lie différentielles-graduées. Cette théorie est, en un certain sens, duale à celle de Sullivan.

Définition 1.3.12. Une *algèbre différentielle-graduée commutative* (ADGC) est un complexe de cochaînes $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ avec une différentielle $d : A^n \to A^{n+1}$, une unité $1 \in A^0$ et un produit $A \otimes A \to A$ qui est unitaire, associatif et gradué-commutatif. Si V est un complexe de cochaînes, on note $S(V)$ l'ADGC libre sur V.

Définition 1.3.13. Un quasi-isomorphisme d'ADGC est un morphisme d'ADGC qui induit un isomorphisme en cohomologie. Si deux ADGC A et B sont quasi-isomorphes, on note $A \simeq B$.

Exemple 1.3.14. Une algèbre classique est une ADGC concentrée en degré zéro. La cohomologie d'un espace topologique est une ADGC dont la différentielle est nulle.

Nous allons maintenant définir l'ADGC des formes polynomiales par morceaux sur un espace topologique. La définition est similaire à la définition de la cohomologie singulière : on définit d'abord les formes sur le simplexe Δ^n, puis les formes sur un espace X en regardant toutes les manières d'envoyer le simplexe dans X.

Définition 1.3.15. Le *simplexe standard* Δ^n est l'espace topologique

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i, t_i \geq 0;\ t_0 + \dots + t_n = 1\}.$$

Les cofaces et codégénérescences sont données par :

$$\begin{aligned} \partial^i : \Delta^{n-1} &\to \Delta^n \ (0 \leq i \leq n), \\ (t_0, \dots, t_{n-1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_i, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}), \\ \sigma^j : \Delta^{n+1} &\to \Delta^n \ (0 \leq j \leq n), \\ (t_0, \dots, t_{n+1}) &\mapsto (t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Définition 1.3.16. L'*algèbre des formes polynomiales sur* Δ^n, notée Ω_n, est le quotient de l'algèbre graduée-commutative libre engendrée par les symboles $t_0, \dots, t_n, dt_0, \dots, dt_n$ par l'idéal engendré par les relations $t_0 + \dots + t_n = 1$ et $dt_0 + \dots + dt_n = 0$. La différentielle est donnée sur les générateurs par $d(t_i) = dt_i$ et $d(dt_i) = 0$.

La collection $\Omega_\bullet = \{\Omega_n\}_{n\geq 0}$ est une ADGC *simpliciale* : il existe des opérations, duale aux opérations ∂^i et σ^j ci-dessus :

$$d_i : \Omega_n \to \Omega_{n-1} \ (0 \leq i \leq n) \qquad\qquad s_j : \Omega_n \to \Omega_{n+1} \ (0 \leq i \leq n)$$
$$t_k \mapsto \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ 0, & \text{si } k = i, \\ t_{k-1}, & \text{si } k > i; \end{cases} \qquad\qquad t_k \mapsto \begin{cases} t_k, & \text{si } k < i, \\ t_k + t_{k+1}, & \text{si } k = i, \\ t_{k+1}, & \text{si } k > i. \end{cases}$$

Définition 1.3.17. Soit X un espace quelconque. L'ADGC des *formes polynomiales par morceaux* sur X est dénotée par $\Omega^*_{PL}(X)$. Elle est donnée en degré n par

$$\begin{aligned} \Omega^n_{PL}(X) &= \mathrm{Mor}_{\mathsf{sSet}}(S_\bullet(X), \Omega^n_\bullet) \\ &= \{(\omega_f)_{f:\Delta^k\to X} \mid \omega_f \in \Omega^n_k,\ d_i(\omega_f) = \omega_{f\circ\partial^i},\ s_j(\omega_j) = \omega_{f\circ\sigma^j}\}. \end{aligned}$$

La différentielle et le produit sont défini terme à terme.

Exemple 1.3.18. Si X est triangulé, on peut définir une ADGC quasi-isomorphe à $\Omega_{PL}(X)$ de manière plus simple : un élément de degré n est donné par une forme de degré n sur chaque simplexe de X, en imposant la condition que si deux simplexes se touchent le long d'une face, alors les deux formes correspondantes coïncident sur cette face.

Théorème 1.3.19 (Sullivan [Sul77])**.** *Le foncteur Ω^*_{PL} induit une équivalence entre*

- *la catégorie des espaces topologiques simplement connexes de type fini, modulo équivalences rationnelles ;*
- *la catégorie des ADGC de type fini A vérifiant $A^0 = \mathbb{Q}$ et $A^1 = 0$, modulo quasi-isomorphismes.*

Remarque 1.3.20. Pour rendre ce théorème précis, il est nécessaire de passer par la catégorie des ensembles simpliciaux (même si X est simplement connexe, on n'a pas nécessairement $\Omega^0_{PL}(X) = \mathbb{Q}$ et $\Omega^0_{PL}(X) = 0$ avec la définition ci-dessus).

Corollaire 1.3.21. *Soit X et Y deux espaces topologiques simplement connexes de type fini. Alors*

$$X \simeq_{\mathbb{Q}} Y \iff \Omega^*_{PL}(X) \simeq \Omega^*_{PL}(Y).$$

Définition 1.3.22. Soit X un espace topologique. Un modèle (de Sullivan) de X est une ADGC A quasi-isomorphe à $\Omega^*_{PL}(X)$.

Grâce au théorème de Sullivan, un modèle de X « connaît » complètement le type d'homotopie rationnel de X. En particulier, si deux espaces ont le même modèle, alors ils sont rationnellement équivalents. Il est possible de faire de nombreux calculs grâce à un modèle A de X, par exemple :

- il y a un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives $H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H^*(A)$;

- les produits de Massey de X peuvent se calculer en utilisant le théorème du transfert homotopique ;
- les groupes d'homotopie rationnels $\pi_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sont donnés par la cohomologie de Harrison $H^*_{\text{Harr}}(A)$ de l'ADGC A ;
- le crochet de Lie naturel qui existe sur la cohomologie de Harrison de A correspond au crochet de Whitehead sur les groupes d'homotopie.

Exemple 1.3.23. Considérons la sphère S^n de dimension n. On peut démontrer assez facilement qu'un modèle de S^n est donné par sa cohomologie $H^*(S^n) = \mathbb{Q}1 \oplus \mathbb{Q}v$ où $\deg v = n$ et $v^2 = 0$. La sphère est donc un exemple d'espace formel (voir Section 1.4). On peut aussi calculer la cohomologie de Harrison de $H^*(S^n)$ pour retrouver un théorème de Serre : si n est impair alors $\pi_n(S^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et tous les autres groupes d'homotopie sont de torsion ; si n est pair alors $\pi_n(S^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \pi_{2n-1}(S^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et tous les autres groupes d'homotopie sont de torsion.

En revenant une fois de plus aux espaces de configuration, on arrive à une version plus fine de la conjecture précédente :

Conjecture 1.3.24. *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Il est possible de trouver un modèle explicite de $\mathrm{Conf}_M(r)$ qui ne dépend que d'un modèle de M.*

On peut affaiblir encore un peu cette conjecture en considérant le type d'homotopie réel.

Définition 1.3.25. Deux espaces simplement connexes de type fini X et Y ont le même *type d'homotopie réel* si $\Omega^*_{PL}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et $\Omega^*_{PL}(Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ sont quasi-isomorphes. Un *modèle réel* d'un tel espace X est une ADGC (à coefficients réels) quasi-isomorphe à $\Omega^*_{PL}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Cette notion est légèrement plus faible que la notion de type d'homotopie rationnel. On peut néanmoins faire les mêmes calculs avec un modèle réel qu'avec un modèle rationnel.

Exemple 1.3.26 ([FOT08, Example 2.38]). Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ un paramètre rationnel positif. On définit une ADGC $A_\alpha = (S(e_2, x_4, y_7, z_9), d_\alpha)$ (où les indices dénotent le degré) en posant $d_\alpha e = 0$, $d_\alpha x = 0$, $d_\alpha y = x^2 + \alpha e^4$, $d_\alpha z = e^5$. Alors on peut montrer que A_α et $A_{\alpha'}$ sont quasi-isomorphes si et seulement si α/α' est un carré. Elles sont donc toujours quasi-isomorphes sur $\mathbb{R}$, mais pas sur $\mathbb{Q}$.

1.4 Formalité de $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$

La brique de base des variétés est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. En quelque sorte, $\mathrm{Conf}_M(r)$ peut s'obtenir en recollant des $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(k)$ pour $k \leq r$ de manière assez compliqué, les points pouvant être dans des cartes différentes de la variété.

La cohomologie des espaces de configuration de $\mathbb{R}^n$ est bien connue :

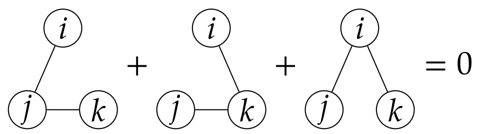
Théorème 1.4.1 (Arnold [Arn69], Cohen [Coh76]). *La cohomologie de* $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ *admet la présentation suivante, où* $\deg \omega_{ij} = r$ *:*

$$H^*(\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)) = \frac{S(\omega_{ij})_{1 \le i \ne j \le r}}{(\omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij},\ \omega_{ij}^2 = 0,\ \omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij} = 0)}.$$

La classe ω_{ij} « compte » combien de fois les points i et j tournent l'un autour de l'autre. Plus formellement, notons $p_{ij} : \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r) \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2)$ l'application donnée par $p_{ij}(x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_j)$. L'espace $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2)$ est homotopiquement équivalent à une sphère : à homotopie près, on peut fixer le premier point en l'origine et la distance entre les deux points à 1. La classe ω_{ij} est le tiré en arrière de la forme volume de la sphère le long de p_{ij}. Les relations peuvent s'interpréter ainsi : la première dit que renverser l'orientation de la sphère peut introduire un signe, la seconde que la forme volume est de carré nulle, et la dernière est duale à la relation qui dit que « i tourne autour de j et k simultanément » revient à « i tourne autour de j puis de k ».

Esquisse de preuve. Il existe une fibration $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r) \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r-1)$ de fibre $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1^0, \dots, x_{r-1}^0\} \simeq \bigvee^{r-1} S^{n-1}$. Grâce à la suite spectrale de Serre, on peut montrer par récurrence que les nombres de Betti de $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$ sont majorés par les dimensions du côté droit de l'équation en chaque degré, et que si l'égalité est atteinte alors les groupes de cohomologie sont libres. De plus, il y a une application entre le côté droit et $H^*(\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r))$ qui envoie ω_{ij} sur la forme volume de $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(2)$ tirée en arrière le long de p_{ij} (on vérifie que les relations sont bien satisfaites). Il suffit donc de montrer que cette application est injective pour conclure.

On peut interpréter le côté droit de l'équation de la façon suivante. Ses éléments sont les combinaisons linéaires de graphes à r sommets, sans arêtes doubles ni boucles. Si n est pair alors l'ensemble des arêtes est ordonnées ; si n est impair alors les arêtes sont orientées. Un changement d'ordre, resp. un changement d'orientation, induit un changement de signe. Enfin, l'espace est quotienté par la relation locale suivante :



Un tel graphe correspond à un mot $\omega_{i_1 j_1} \dots \omega_{i_l j_l}$, où $(i_1 j_1), \dots, (i_l j_l)$ sont les arêtes du graphe. Le produit consiste à recoller les graphes le long de leur sommets.

Pour chacun de ces graphes, on peut fabriquer une classe d'homologie qui s'apparie de façon non nulle avec la classe de cohomologie associée au graphe. La méthode utilise le point de vue des « systèmes solaires » : étant donné une forêt binaire à n feuilles, on peut fabriquer une classe d'homologie, voir Figure 2. L'accouplement homologie-cohomologie induit un accouplement graphes-arbres, et on peut montrer de façon combinatoire que cet accouplement n'est pas dégénéré, ce qui permet de conclure. □

En général, la cohomologie d'un espace topologique ne donne qu'une information partielle sur l'espace en question. Cependant, pour une certaine classe d'espaces, cette information est suffisante pour retrouver le type d'homotopie rationnel.

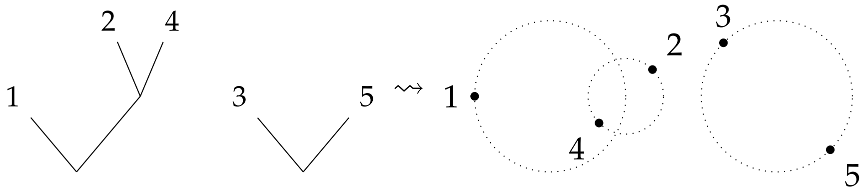


FIG. 2: Systèmes solaires

Définition 1.4.2. Un espace X est dit *formel* si $H^*(X;\mathbb{Q})$ est un modèle de X.

Exemple 1.4.3. Les groupes de Lie sont formels. Les sphères sont formelles. Si M est une variété de dimension $\dim M \leq 4p-2$ et que M est $(p-1)$-connexe, alors M est formelle. La somme connexe de deux variétés formelles est formelle. Les variétés de Kähler compactes sont formelles [DGMS75].

Théorème 1.4.4 (Arnold [Arn69])**.** *Les espaces de configuration de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sont formels.*

Démonstration. Il existe une application directe

$$\begin{aligned} H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{C})) &\to \Omega^*_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{C});\mathbb{C}), \\ \omega_{ij} &\mapsto d\log(z_i - z_j). \end{aligned}$$

Cela montre que $\mathrm{Conf}_r(\mathbb{C})$ est formel sur $\mathbb{C}$. Grâce à un théorème de descente [Sul77, Theorem 12.7], on montre que la formalité sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à la formalité sur n'importe quel corps de caractéristique nulle, ce qui permet de conclure. □

Cette démonstration ne marche pas pour $n \geq 3$. Cependant, Kontsevich a montré le théorème suivant, par une méthode complètement différente :

Théorème 1.4.5 (Kontsevich [Kon99])**.** *Les espaces de configuration de $\mathbb{R}^n$ sont formels pour tout $n \geq 2$.*

Nous reverrons la preuve plus en détail par la suite. Notons toutefois déjà qu'elle est bien plus complexe : la preuve fait intervenir un zigzag

$$H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n)) \leftarrow \cdot \to \Omega^*_{PA}(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n))$$

où l'ADGC du milieu est une résolution quasi-libre de la cohomologie de $H^*(\mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^n))$. Informellement, l'idée est de créer une ADGC où il n'y a plus de relations entre les générateurs, mais où la différentielle encode les relations. Pour construire l'application vers les formes, il ne faut donc plus trouver des formes qui satisfont strictement les relations, mais seulement des formes qui satisfont les formes à homotopie près.

2 Modèle de Lambrechts–Stanley

2.1 Définition du modèle

Nous allons adapter et généraliser le Théorème 1.4.5 aux variétés compactes sans bord. Les espaces de configuration de telles variétés sont rarement formels (par exemple les espaces de configuration de surfaces de genre ≥ 2 ne le sont pas), mais nous allons chercher un modèle de ces espaces de configuration qui est construit de manière similaire.

L'idée est la suivante. Pour obtenir l'espace de configuration $\mathrm{Conf}_r(M)$, on part du produit cartésien M^r et on retire les diagonales $\Delta_{ij} = \{x \in M^r \mid x_i = x_j\}$. Or, la dualité de Poincaré–Lefschetz nous dit que si W est une variété compacte sans bord orientée de dimension n et $K \subset W$ est un sous-ensemble compact, alors (sous conditions) $H^*(W \setminus K) \cong H_{n-*}(W, K)$. La suite exacte longue en homologie nous dit que $H_{n-*}(W, K)$ est obtenu, en quelque sorte, en partant de l'homologie de W et en « tuant » les classes provenant de K. Le modèle que nous allons présenter est construit en appliquant cette idée à $\mathrm{Conf}_r(M)$.

Commençons par quelques prérequis. Rappelons le théorème de la dualité de Poincaré : si M est une variété compacte sans bord orientée, alors il existe une classe $[M] \in H_n(M)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'accouplement $H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \to \Bbbk$, $\alpha \otimes \beta \mapsto \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle$ est non-dégénéré (en particulier $H^k(M) = 0$ pour $k > n$).

Définition 2.1.1. Une *ADGC à dualité de Poincaré* (de dimension formelle n) est une paire (A, ε_A) où :

- A est une ADGC ;
- $\varepsilon : A^n \to \mathbb{R}$ est une application linéaire vérifiant $\varepsilon(da) = 0$ pour tout $a \in A^{n-1}$ (« formule de Stokes ») ;
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'accouplement $A^k \otimes A^{n-k} \to \Bbbk$, $a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$ est non-dégénéré.

Remarque 2.1.2. Dans la notation, on oubliera souvent le ε_A.

Théorème 2.1.3 (Lambrechts–Stanley [LS08b])**.** *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe. Il existe un modèle de M qui est une ADGC à dualité de Poincaré.*

Exemple 2.1.4. Si une variété M est formelle, alors $H^*(M)$ est un modèle à dualité de Poincaré de M.

Définition 2.1.5. Soit A une ADGC à dualité de Poincaré. Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ une base graduée de A, et soit $\{a_i^\vee\}_{i\in I}$ une base duale (c.-à-d. $\varepsilon(a_i a_j^\vee) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in I$). La *classe diagonale* de A est l'élément de $(A \otimes A)^n$ donné par :

$$\Delta_A = \sum_{i\in I} (-1)^{\deg a_i} a_i \otimes a_i^\vee.$$

Cet élément ne dépend pas de la base choisie.

En utilisant la notation de Sweedler, nous allons noter $\Delta_A = \sum \Delta'_A \otimes \Delta''_A$.

Exemple 2.1.6. Soit $A = H^*(\Sigma_g)$ la cohomologie d'une surface de genre g, engendrée par les éléments $1, \alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g, v$. La classe diagonale est $1 \otimes v + v \otimes 1 - \sum_{1 \leq i \leq g}(\alpha_i \otimes \beta_i + \beta_i \otimes \alpha_i)$.

Remarque 2.1.7. Cette classe s'interprète géométriquement : soit $[M] \in H_n(M)$ la classe fondamentale de M, que l'on pousse en avant le long de l'application $\delta : M \to M \times M$, $x \mapsto (x, x)$ pour obtenir $\delta_*[M] \in H_n(M \times M)$. Par dualité de Poincaré, cette classe correspond à une classe de cohomologie dans $H^{2n-n}(M \times M)$, qui est la classe diagonale.

Lemme 2.1.8. *La classe diagonale vérifie* $(1 \otimes a)\Delta_A = (a \otimes 1)\Delta_A$ *pour tout* $a \in A$. *De plus,* $\Sigma\varepsilon(a\Delta'_A)\Delta''_A = a$ *pour tout* $a \in A$.

Nous aurons besoin de la notation suivante. Soit A une ADGC et $1 \leq i, j \leq r$ des entiers. On définit le morphisme $p_i^* : A \to A^{\otimes r}$ par $p_i^*(a) = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes a \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$, où a est en position i. On définit de plus $p_{ij}^* : A \otimes A \to A^{\otimes r}$ par $p_{ij}^*(a \otimes b) = p_i^*(a) \cdot p_j^*(b)$.

Définition 2.1.9 (Lambrechts–Stanley [LS08a])**.** Soit A un modèle à dualité de Poincaré d'une variété compacte sans bord simplement connexe M. Le $r$ième *modèle de Lambrechts–Stanley* de M associé à A est l'ADGC :

$$\mathtt{G}_A(r) := (A^{\otimes r} \otimes S(\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq r}/I, d).$$

Le dg-idéal I est engendré par les relations qui apparaissent dans le Théorème 1.4.1 et les relations $p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}$ pour tout $a \in A$ et $1 \leq i \neq j \leq r$. La différentielle est la somme de la différentielle induite par celle de A avec la dérivation qui étend $d(\omega_{ij}) = p_{ij}^*(\Delta_A)$.

Exemple 2.1.10. Pour $r = 0$, on a $\mathtt{G}_A(0) = \mathbb{Q}$ qui est effectivement un modèle de $\mathrm{Conf}_M(0) = \{\emptyset\}$. Pour $r = 1$, on a $\mathtt{G}_A(1) = A$: c'est par hypothèse un modèle de $\mathrm{Conf}_M(1) = M$.

Exemple 2.1.11. L'ADGC $\mathtt{G}_A(2)$ est donnée par $(A \otimes A \otimes S(\omega_{12}, \omega_{21})/I, d)$. La relation $\omega_{21} = (-1)^n\omega_{12}$ nous permet de nous débarrasser de ω_{21}. Grâce à la relation $\omega_{12}^2 = 0$, on trouve que $\mathtt{G}_A(2)$ se décompose en somme directe :

$$\mathtt{G}_A(2) \cong ((A \otimes A \oplus A \otimes A \otimes \omega_{12})/I, d).$$

La dernière relation nous donne $a \otimes 1 \otimes \omega_{12} = 1 \otimes a \otimes \omega_{12}$ pour tout $a \in A$. On a donc

$$\mathtt{G}_A(2) \cong (A \otimes A \oplus A \otimes_A A \otimes \omega_{12}, d) \cong (A \otimes A \oplus A \otimes \omega_{12}, d)$$

Enfin, la différentielle est donnée par la somme de la différentielle de A avec $d(a \otimes \omega_{12}) = (a \otimes 1)\Delta_A = (1 \otimes a)\Delta_A$. En d'autres termes, on trouve que $\mathtt{G}_A(2)$ est le cône de l'application $A \to A \otimes A$, $a \mapsto (a \otimes 1)\Delta_A = (1 \otimes a)\Delta_A$. Comme cette application est injective, le cône (ou conoyau homotopique) est quasi-isomorphisme au conoyau, c'est-à-dire au quotient $A \otimes A/(\Delta_A)$. Cela fait écho au résultat classique que $H^*(\mathrm{Conf}_M(2)) = H^*(M^2 \setminus \Delta) \cong H^*(M)^{\otimes 2}/(\Delta_M)$.

Plus généralement, on peut représenter graphiquement les éléments de $\mathsf{G}_A(r)$ par des graphes à r sommets numérotés (sans arêtes doubles ni boucles, les arêtes ne sont pas orientées mais le signe est *a priori* mal défini). Chaque composante connexe du graphe est décoré par un élément de A. La multiplication recolle les graphes le long de leurs sommets et multiplie les décorations des composantes connexes ainsi fusionnées. La différentielle est la somme de toutes les manières de couper une arête en deux, la décoration de la composante connexe correspondante étant multipliée par Δ pour obtenir un élément de $A \otimes A$.

Cette ADGC a déjà beaucoup été étudiée sous une forme ou une autre :

- Cohen et Taylor [CT78] ont décrit une suite spectrale convergeant vers $H^*(\mathrm{Conf}_r(M))$ et dont la page E^2 est précisément $\mathsf{G}_{H^*(M)}(r)$. Cette suite spectrale est la suite spectrale de Leray de l'inclusion $\mathrm{Conf}_M(r) \subset M^r$. Interprétées de façon moderne, les différentielles suivantes encodent (informellement) la différence entre $H^*(M)$ et un modèle de M.

- Supposons que M est une variété projective complexe lisse. C'est donc en particulier une variété de Kähler, qui est donc compacte d'après [DGMS75]. En s'appuyant sur des travaux préliminaires de Fulton–MacPherson [FM94], Kriz [Kri94] a montré que dans ce cas, $\mathsf{G}_{H^*(M)}(r)$ était bien un modèle rationnel de $\mathrm{Conf}_M(r)$. À peu près simultanément, Totaro [Tot96] a montré que dans ce cas la suite spectrale de Cohen–Taylor s'effondre après la page E^2 ; en particulier, grâce à un résultat de Deligne [Del75], cela entraîne que $H^*(\mathrm{Conf}_r(M)) \cong H^*(\mathsf{G}_{H^*(M)}(r))$ comme algèbre.

- Lambrechts et Stanley [LS04] ont montré que si M est 2-connexe, alors $\mathsf{G}_A(2)$ est bien un modèle de $\mathrm{Conf}_M(2)$. Cordova Bulens [Cor15] a généralisé ce résultat aux variétés simplement connexes de dimension paire.

- Bendersky et Gitler [BG91] avaient construit une suite spectrale qui converge vers $H^*(M^r, \Delta_M^{(r)})$ où $\Delta_M^{(r)} \subset M^r$ est la diagonale épaisse. Par dualité de Poincaré–Lefschetz, cette cohomologie est isomorphe à l'homologie de $\mathrm{Conf}_M(r)$. Félix et Thomas [FT04], ainsi que Berceanu, Markl et Papadima [BMP05], ont montré que la page E^2 de cette suite spectrale était isomorphe au dual de $\mathsf{G}_{H^*(M)}(r)$.

- Lambrechts et Stanley ont montré par la suite que si M est une variété compacte sans bord simplement connexe, alors la cohomologie de $\mathsf{G}_A(r)$ est isomorphe à la cohomologie de $\mathrm{Conf}_M(r)$ comme représentation du groupe symétrique Σ_r, degré par degré.

2.2 Énoncé du théorème et idée de la preuve

Théorème 2.2.1 ([Idr19], voir aussi [CW16]). *Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe lisse et soit A n'importe quel modèle à dualité de Poincaré de M. Le modèle de Lambrechts–Stanley $\mathsf{G}_A(r)$ est un modèle sur $\mathbb{R}$ de $\mathrm{Conf}_M(r)$ pour tout r.*

Corollaire 2.2.2. *Soit M et N deux variétés comme dans le théorème. Si elles ont le même type d'homotopie réel, alors leurs espaces de configuration aussi.*

La preuve est une adaptation et généralisation de celle de Kontsevich sur la formalité des espaces de configuration de $\mathbb{R}^n$. Les grandes étapes sont les suivantes :

1. Il est (probablement) impossible de trouver des formes sur $\mathrm{Conf}_M(r)$ qui vérifient strictement les relations de $\mathsf{G}_A(r)$. On commence donc par construire une résolution de $\mathsf{G}_A(r)$ qui est libre en tant qu'algèbre. Cela permet de chercher seulement des formes vérifiant les relations à homotopie près. Cette résolution est construite en utilisant des complexes de graphes (comme dans la preuve de Kontsevich) décorés.

2. On montre de manière purement combinatoire que cette résolution est effectivement quasi-isomorphe à $\mathsf{G}_A(r)$. On procède exactement comme pour calculer la cohomologie de $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$.

3. Pour définir le morphisme $\mathsf{G}_A(r) \to \Omega^*(\mathrm{Conf}_M(r))$, nous voulons utiliser des intégrales, comme dans la preuve de Kontsevich. Or, $\mathrm{Conf}_M(r)$ n'est pas compact pour $r \geq 2$; les intégrales ne convergent donc pas forcément. Une première étape consiste à étudier la compactification d'Axelrod–Singer–Fulton–MacPherson [AS94 ; FM94] de $\mathrm{Conf}_M(r)$.

4. Les intégrales de la preuve de Kontsevich sont des intégrales le long des fibres de la projection $\mathrm{Conf}_M(r+s) \to \mathrm{Conf}_M(r)$ qui oublie certains points de la configuration. Or, une fois que les espaces de configuration sont compactifiés, ces projections ne sont plus des submersions, ce qui empêche d'utiliser la théorie classique des formes différentielles de de Rham. Si M est semi-algébrique, ces projections sont cependant des fibrés semi-algébriques, ce qui nous permet d'utiliser la théorie des formes semi-algébriques par morceaux [KS00 ; HLTV11]. Toutes les variétés ne sont pas semi-algébriques, mais c'est le cas des variétés lisses grâce au théorème de Nash–Tognoli [Nas52 ; Tog73].

5. Un point clé dans la construction des complexes de graphes est la réduction : il est nécessaire de quotienter par certains graphes pour avoir le bon type d'homotopie. Or, il n'est en général pas clair que la procédure d'intégration le long des fibres respecte ce quotient. Un argument de comptage extrêmement simple montre cependant que si $\dim M \geq 4$, alors c'est le cas. (En dimension ≤ 3, il n'y a que trois variétés compactes sans bord simplement connexes lisses : le point $\{0\}$, la sphère S^2 – classification des surfaces – et S^3 – conjecture de Poincaré.)

6. Il ne reste plus qu'à montrer que si A et B sont deux modèles à dualité de Poincaré différents de M, alors $\mathsf{G}_A(r) \simeq \mathsf{G}_B(r)$. La preuve refait intervenir les complexes de graphes mais reste purement algébrique.

Remarque 2.2.3. Dans les faits, on ne procède pas dans cet ordre. En effet, la construction complète du complexe de graphes est dépendante des intégrales, qui dépendent elles-mêmes de la compactification choisie.

2.3 Compactification de Fulton–MacPherson

À part si $\dim M = 0$, les espaces de configuration $\mathrm{Conf}_M(r)$ ne sont pas compacts pour $r \geq 2$, même si M l'est. La preuve du théorème fait intervenir des intégrales sur les espaces de configuration. Pour s'assurer que ces intégrales convergent, une possibilité consiste à compactifier les espaces de configuration.

Nous allons définir une variété à coins $\mathsf{FM}_M(r)$ dont l'intérieur est $\mathrm{Conf}_M(r)$. Cette variété fut initialement définie par Fulton et MacPherson [FM94] dans le cadre complexe et Axelrod et Singer [AS94] dans le cadre réel. Elle a par la suite été étudiée en détail dans [Sin04]. Les points du bord de $\mathsf{FM}_M(r)$ consiste informellement en des configurations de points « virtuelles », où certains points se rapprochent infinitésimalement les uns des autres. Pour obtenir un type d'homotopie correct (et pas simplement M^r), on garde dans ces configurations virtuelles une information locale en ces agrégats de points. Cette information locale consiste essentiellement une une configuration (qui peut elle-même être virtuelle) dans l'espace tangent de M.

Pour plus de facilité dans les raisonnements, il est pratique d'indexer les points d'une configuration par des éléments d'un ensemble fini quelconque, plutôt que $\{1, \dots, r\}$.

Définition 2.3.1. Soit U un ensemble fini. On définit $\mathrm{Conf}_M(U)$ comme l'ensemble des injections $U \hookrightarrow M$, vu comme un sous-ensemble de M^U.

Un ingrédient important de la preuve est la formule de Stokes, qui nous permettra de vérifier que notre procédure d'intégration préserve la différence. Nous allons donc décrire le bord de $\mathsf{FM}_M(r)$, et plus généralement le bord des fibres des projection $\mathsf{FM}_M(r+s) \to \mathsf{FM}_M(r)$. Cette description fait intervenir les compactifications de $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(r)$, et c'est donc par cela que nous allons commencer.

2.3.1 Cas de $\mathbb{R}^n$

Les résultats de cette section proviennent de [LV14, Chapter 5].

Définition 2.3.2. Soit U un ensemble fini et $i, j, k \in U$ trois éléments deux à deux distincts. On définit des applications :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} : \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) &\to S^{n-1}, & \delta_{ijk} : \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) &\to [0, +\infty], \\ (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, & (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_j - x_k\|}. \end{aligned}$$

Le groupe des translations et homothéties positives $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ agit sur $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)$ point par point. Si $\#U \geq 2$, cette action est libre et propre. Le quotient $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ est donc encore une variété lisse. Si $\#U \leq 1$, l'action est transitive et le quotient est réduit à un point. Dans tous les cas, la projection $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ est une équivalence d'homotopie. On peut par exemple représenter les éléments du quotient (pour $\#U \geq 2$) par les configurations dont le barycentre est à l'origine et dont le rayon est 1.

Les applications de la définition précédente définissent un plongement :

$$\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0} \hookrightarrow (S^{n-1})^{2\binom{U}{2}} \times [0,+\infty]^{6\binom{U}{3}}.$$

Définition 2.3.3. La *compactification de Fulton–MacPherson* $\mathsf{FM}_n(U)$ est l'adhérence de l'image de ce plongement.

Théorème 2.3.4. *L'espace* $\mathsf{FM}_n(U)$ *est une variété à coins, d'intérieur* $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)/\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ *et de dimension* $n\#U - n - 1$.

Comme toutes les variétés à coin, $\mathsf{FM}_n(U)$ se rétracte par déformation sur son intérieur. En fin de compte, l'application $\mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U) \to \mathsf{FM}_n(U)$ est une équivalence d'homotopie. Le bord est caractérisé par les éléments dont au moins l'une des coordonnées δ_{ijk} est nulle. Dans ce cas, on dira que x_i est infinitésimalement proche de x_j par rapport à x_k.

Décrivons maintenant les facettes du bord. Soit $W \subsetneq U$ un sous-ensemble de cardinal $\#W \geq 2$. On définit le sous-ensemble des configuration virtuelles telles que tous les points indexés par W sont infinitésimalement proches par rapport aux autres par :

$$\partial_W \mathsf{FM}_n(U) := \{x \in \mathsf{FM}_n(U) \mid i,j \in W \wedge k \notin W \implies \delta_{ijk}(x) = 0\}.$$

Définition 2.3.5. Le quotient U/W est l'ensemble fini $U \setminus W \sqcup \{*\}$. On notera en particulier que $U/\emptyset \cong U \sqcup \{*\}$. Pour $u \in U$, on note $[u] \in U/W$ sa classe : $[u] = u$ si $u \notin W$, et $[u] = *$ si $u \in W$.

Proposition 2.3.6. *L'espace* $\partial_W \mathsf{FM}_n(U)$ *est homéomorphe à* $\mathsf{FM}_n(U/W) \times \mathsf{FM}_n(W)$.

Démonstration. Construisons une application

$$\circ : \mathsf{FM}_n(U/W) \times \mathsf{FM}_n(W) \to \mathsf{FM}_n(U).$$

Soit $x = (x_u)_{u \in U/W} \in \mathsf{FM}_n(U/W)$ et $y = (y_v) \in \mathsf{FM}_n(W)$ deux configurations. On définit $x \circ y \in \mathsf{FM}_n(U)$ dans le système de coordonnées $(\theta_{ij}, \delta_{ijk})$ par :

$$\theta_{ij}(x \circ y) = \begin{cases} \theta_{ij}(y), & \text{si } i,j \in W; \\ \theta_{[i][j]}(x), & \text{sinon.} \end{cases} \quad \delta_{ijk}(x \circ y) = \begin{cases} \delta_{ijk}(y), & \text{si } i,j,k \in W; \\ 1, & \text{si } i,j \in W \text{ et } k \notin W; \\ +\infty, & \text{si } i \notin W \text{ et } j,k \in W; \\ 0, & \text{si } i,k \in W \text{ et } j \notin W; \\ \delta_{[i][j][k]}(x), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que l'image de $\circ$ est égale à $\partial_W \mathsf{FM}_n(U)$. On conclut par compacité. □

Remarque 2.3.7. Cette application $\circ$ fait partie de la structure d'opérade de FM_n, que nous allons étudier dans la Section 4.

Proposition 2.3.8. *Le bord de* $\mathsf{FM}_n(U)$ *est recouvert par les* $\partial_W \mathsf{FM}_n(U)$*. Plus précisément, si on pose* $\mathcal{BF}(U) = \{W \subsetneq U \mid \#W \geq 2\}$*, on a :*

$$\partial \mathsf{FM}_n(U) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}(U)} \partial_W \mathsf{FM}_n(U).$$

De plus, $\operatorname{codim} \partial_W \mathsf{FM}_n(U) = 1$*, et si* $W \neq W'$*,* $\operatorname{codim} \partial_W \mathsf{FM}_n(U) \cap \partial_{W'} \mathsf{FM}_n(U) > 1$.

Démonstration. Le recouvrement est immédiat grâce au fait que $x \in \partial \mathsf{FM}_n(U) \iff \exists i, j, k \in \binom{U}{3}$ t.q. $\delta_{ijk} = 0$. Le fait que $\operatorname{codim} \partial_W \mathsf{FM}_n(U) = 1$ découle du fait que $\circ$ est un homéomorphisme. Enfin, le calcul de la codimension de l'intersection est un petit exercice (raisonner au cas par cas : $W \cap W' = \emptyset$, $W \subset W'$ ou l'inverse, ou $W \cap W' \neq \emptyset$ mais pas d'inclusion). □

Enfin, pour appliquer la formule de Stokes, nous devons connaître le bord de la fibre des projections canoniques.

Définition 2.3.9. Soit $\pi : E \to B$ un fibré orienté (c.-à-d. la fibre F est une variété compacte orientée). Son *bord fibre à fibre* est le fibré $\pi^\partial : E^\partial \to B$ où E^∂ est défini par :

$$E^\partial := \bigcup_{b \in B} \partial \pi^{-1}(b).$$

Exemple 2.3.10. Considérons le fibré $\pi : [0,1]^2 \to [0,1]$ qui projette sur la première coordonnée. Son bord fibre à fibre est $[0,1] \times \{0,1\}$. On remarque que ce n'est pas le bord de l'espace total ou la préimage du bord de la base.

Proposition 2.3.11. *Soit* $U \subset A$ *une paire d'ensembles finis. La projection* $\pi : \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(A) \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{R}^n}(U)$ *qui oublie certains points s'étend en un fibré orienté :*

$$\pi : \mathsf{FM}_n(A) \to \mathsf{FM}_n(U).$$

Proposition 2.3.12. *Soit* $U \subset A$ *une paire d'ensembles finis. On note* $\mathcal{BF}(A, U) = \{W \in \mathcal{BF}(A) \mid U \subset A \text{ ou } \#(W \cap A) \leq 1\}$*. Alors le bord fibre à fibre de* $\pi : \mathsf{FM}_n(A) \to \mathsf{FM}_n(U)$ *est donné par :*

$$\mathsf{FM}_n^\partial(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}(A,U)} \partial_W \mathsf{FM}_n(A).$$

Démonstration. Comme π est un fibré, il s'agit simplement de vérifier quelles facettes $\partial_W \mathsf{FM}_n(A)$ sont envoyées sur l'intérieur de $\mathsf{FM}_n U$ via la projection. En effet, $\mathsf{FM}_n^\partial(A) = \overline{\partial_W \mathsf{FM}_n(A)} \partial \mathsf{FM}_n(A) \cap \pi^{-1}(\mathring{\mathsf{FM}}_n(U))$. On vérifie que ce sont biens les facettes $W \in \mathcal{BF}(A, U)$. □

2.3.2 Cas de M

Nous pouvons maintenant effectuer le même travail pour une variété compacte sans bord M. Grâce au théorème de Whitney, on peut plonger M dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand. Dans toute la suite, on fixe un tel plongement et on voit implicitement n'importe quel élément de M. comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.3.13. Soit U un ensemble fini et $i, j, k \in U$ trois éléments deux à deux distincts. On définit des applications (par abus de notation, nous gardons les mêmes lettres que précédemment) :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} : \mathrm{Conf}_M(U) &\to S^{N-1}, & \delta_{ijk} : \mathrm{Conf}_M(U) &\to [0, +\infty], \\ (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}, & (x_u)_{u \in U} &\mapsto \frac{\|x_i - x_k\|}{\|x_j - x_k\|}. \end{aligned}$$

Ces applications définissent un plongement :

$$\mathrm{Conf}_M(U) \hookrightarrow M^U \times (S^{N-1})^{2\binom{U}{2}} \times [0, +\infty]^{3\binom{U}{3}}.$$

Définition 2.3.14. La compactification de Fulton–MacPherson de $\mathrm{Conf}_M(U)$ est l'adhérence de l'image de ce plongement.

On définit comme précédemment les facettes $\partial_W \mathsf{FM}_M(U)$, pour $W \subset U$:

$$\partial_W \mathsf{FM}_M(U) = \{x \in \mathsf{FM}_M(U) \mid i, k \in W \implies (x_i = x_k \text{ et } j \notin W \implies \delta_{ijk}(x) = 0)\}.$$

Proposition 2.3.15. *Le bord de $\mathsf{FM}_M(U)$ s'exprime comme*

$$\partial \mathsf{FM}_M(U) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}_M(U)} \partial_W \mathsf{FM}_M(U),$$

où $\mathcal{BF}_M(U) = \{W \subset U \mid \#W \geq 2\}$. Ces facettes sont de codimension 1 et l'intersection de deux facettes différentes est de codimension > 1.

Remarque 2.3.16. Contrairement au cas de $\mathbb{R}^n$, le cas $W = U$ est inclus dans le bord. Cela correspond au cas où tous les points sont au même endroit dans M.

Proposition 2.3.17. *Soit $U \subset A$ une paire d'ensembles finis. La projection $\pi : \mathrm{Conf}_M(A) \to \mathrm{Conf}_M(U)$ qui oublie certains points s'étend à la compactification.*

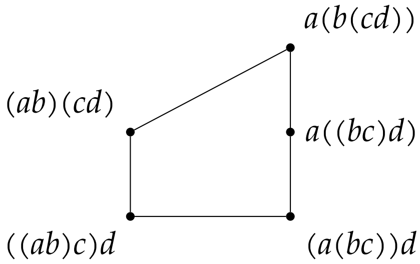
Proposition 2.3.18. *Le bord fibre à fibre de $\pi : \mathsf{FM}_M(A) \to \mathsf{FM}_M(U)$ est donné par :*

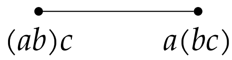
$$\mathsf{FM}_M^{\partial}(A) = \bigcup_{W \in \mathcal{BF}_M(A, U)} \partial_W \mathsf{FM}_M(A),$$

où $\mathcal{BF}_M(A, U) = \{W \in \mathcal{BF}_M(A) \mid \#(W \cap U) \leq 1\}$.

2.4 Ensembles semi-algébriques et formes PA

Les projections canoniques $\pi : \mathsf{FM}_M(A) \to \mathsf{FM}_M(U)$ ne sont malheureusement pas des submersions. Un exemple est donné par [LV14, Example 5.9.1]. (Une composante connexe de) l'espace $\mathsf{FM}_1(\{a, b, c\})$ est un segment : ses extrémités sont les deux manières de parenthéser le mot *abc*, le chemin est un associateur. (Une composante connexe de) l'espace $\mathsf{FM}_1(\{a, b, c, d\})$ est un pentagone. Les sommets de ce pentagone sont les cinq manières de parenthéser le mot *abcd* ; les arêtes sont des chemins qui font intervenir un associateur. La projection $\mathsf{FM}_1(\{a, b, c\}) \to \mathsf{FM}_1(\{a, b, c, d\})$ ressemble, sur les composantes connexes en question, à :





Un calcul dans une carte montre que π n'est pas une submersion au point qui correspond à $a((bc)d)$.

Comme ces applications ne sont pas des submersions, il n'est pas possible d'appliquer la théorie standard de l'intégration le long des fibres des formes différentielles. Cependant, il se trouve que ces fibrés sont des fibrés *semi-algébriques*. Initialement développée par Kontsevich et Soibelman [KS00], la théorie des formes semi-algébriques (par morceaux) a été raffinée par Hardt, Lambrechts, Turchin et Volić [HLTV11] dans le but de l'appliquer à la preuve de la formalité de l'opérade des petits disques. Rappelons maintenant rapidement les ingrédients principaux de cette théorie.

2.4.1 Ensembles SA

Définition 2.4.1. Un *ensemble semi-algébrique* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ (pour un certain N) qui est une union finie d'intersections finies d'ensembles de solutions d'inéquations polynomiales. Une *application semi-algébrique* est une application (continue) entre deux ensembles semi-algébriques dont le graphe est semi-algébrique. Une *variété semi-algébrique* de dimension n est un ensemble semi-algébrique localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$.

On abrégera « semi-algébrique » par « SA ».

Proposition 2.4.2. *Les compactifications de Fulton–MacPherson sont des variétés semi-algébriques.*

Démonstration. Les plongements $(\theta_{ij}, \delta_{ijk})$ et $(\iota, \theta_{ij}, \delta_{ijk})$ sont clairement des applications SA, donc leur image est un ensemble SA, donc l'adhérence de cette image est un ensemble SA. Les cartes connues dans la littérature pour les compactifications sont également clairement semi-algébriques. □

Définition 2.4.3. Un *fibré SA* est une application SA $\pi : E \to B$ muni d'un ensemble SA F, d'un recouvrement $B = \bigcup \{U_\alpha\}$ par des sous-ensembles SA, et d'homéomorphismes SA $h_\alpha : U_\alpha \times F \cong \pi^{-1}(U_\alpha)$ compatibles avec la projection.

Théorème 2.4.4 (Lambrechts–Volić [LV14])**.** *Les projections canoniques $\pi : \mathsf{FM}_n(A) \to \mathsf{FM}_n(U)$ sont des fibrés SA.*

Démonstration. La preuve est assez complexe. On représente les fibres par des disques auxquels on a retiré des boules. Il faut ensuite construire explicitement les homéomorphismes, ce qui est relativement technique. □

La preuve du résultat suivant est quasiment identique à celle de Lambrechts et Volić (voire plus simple, car il n'y a pas de quotient par le groupe $\mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}_{>0}$).

Proposition 2.4.5. *Le même résultat est vrai pour FM_M.*

2.4.2 Formes PA

Définition 2.4.6. Un *courant* de degré k sur $\mathbb{R}^N$ est un élément du dual des formes différentielles de degré k sur $\mathbb{R}^n$: $D_k(\mathbb{R}^N) = \Omega^k(\mathbb{R}^N)^\vee$. Un *courant* de degré k sur $X \subset \mathbb{R}^N$ est un courant dont le support $\operatorname{supp}(T) = \bigcap\{Z \subset \mathbb{R}^n \mid \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^N \setminus Z) \implies \langle T, \omega\rangle = 0\}$ est inclus dans X.

Définition 2.4.7. Soit M une variété compact orientée SA de dimension k et $f : M \to \mathbb{R}^N$ une application SA. Il existe une stratification[1] $M = \bigcup \mathcal{S}$ telle que $f_{|S}$ soit un fibré trivial pour tout $S \in \mathcal{S}$. Soit $S_1, \dots, S_l$ les strates telles que $f_{|S_i}$ soit de rang i. On définit un courant $f_*[\![M]\!]$ par

$$\langle f_*[\![M]\!], \omega\rangle := \sum_{i=1}^{l} \int_{S_i} f^*\omega.$$

Définition 2.4.8. Une *chaîne semi-algébrique* de degré k sur un ensemble SA X est un courant de la forme $f_*[\![M]\!]$ où $\dim M = k$. On note $C_k^{SA}(X)$ l'ensemble de ces courants.

Proposition 2.4.9. *L'ensemble $C_k^{SA}(X)$ est un sous-groupe de $D_k(X)$. On a $C_i(X) = 0$ pour $i > \dim X$ et $d(f_*[\![M]\!]) = f_*[\![\partial M]\!]$. La collection $C_*(X)$ forme donc un complexe de chaînes, qui est fonctoriel en X (par rapport aux applications SA). Il existe de plus une transformation naturelle canonique $\times : C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y)$ qui vérifie la formule de Leibniz.*

Définition 2.4.10. Soit X un ensemble SA et $f_0, \dots, f_k : X \to \mathbb{R}$ des fonctions. On définit une cochaîne SA $\lambda(f_0\,; f_1, \dots, f_k) \in C^k_{SA}(X) := C_k^{SA}(X)^\vee$ par :

$$\langle \lambda(f_0; f_1, \dots, f_k), \gamma\rangle := \langle (f_0, dots, f_k)_*\gamma, x_0 dx_1 \dots dx_k\rangle.$$

Les *formes minimales* sur X sont les éléments du sous-groupe $\Omega^k_{min}(X)$ engendré par les $\lambda(f_0\,; f_1, \dots, f_k)$.

1. Il s'agit d'une partition finie de M telle que tout $S \in \mathcal{S}$ soit une sous-variété lisse connexe dont l'adhérence est une union de S et d'éléments de $\mathcal{S}$ de dimension $< \dim S$.

Proposition 2.4.11. *Les formes minimales forment un sous-complexe de $C^*_{SA}(X)$:*

$$d\lambda(f_0;f_1,\dots,f_k) = \lambda(1;f_0,\dots,f_k).$$

Il y a une famille d'applications $\times : \Omega^k_{min}(X) \otimes \Omega^l_{min}(Y) \to \Omega^{k+l}_{min}(X \times Y)$ qui induisent une structure d'ADGC sur $\Omega^*_{min}(X)$ en utilisant la diagonale $\Delta : X \to X \times X$, $x \mapsto (x,x)$:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta^*(\lambda_1 \times \lambda_2).$$

Ces formes minimales ne forment malheureusement pas un modèle de X. Par exemple, la forme $dt/t = \lambda(f_0;f_1) \in \Omega^1_{min}([1,2])$ où $f_0(t) = 1/t$ et $f_1(t) = t$ est fermée mais n'est pas le bord d'une forme de degré 0, car log n'est pas une application SA. Pour résoudre ce problème, il faut introduire des intégrales formelles le long des fibres de fibrés SA. Plus généralement, il faut pouvoir intégrer le long de n'importe quelle famille continue de chaînes.

Définition 2.4.12. Soit $f : Y \to X$ une application SA. Une *famille (fortement) continue de chaînes* de degré l sur Y au-dessus de X est une application $\Phi : X \to C_l(Y)$ telle qu'il existe :

- une stratification SA finie $X = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$;
- des variétés compactes sans bord orientées SA F_α de dimension l ;
- des applications SA $g_\alpha : \bar{S}_\alpha \times F_\alpha \to Y$ vérifiant :
  - le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \bar{S}_\alpha \times F_\alpha \arrow[r, "g_\alpha"] \arrow[d, "p_{\bar{S}_\alpha}"] & Y \arrow[d, "f"] \\ \bar{S}_\alpha \arrow[r, hook] & X, \end{tikzcd}$$

  - pour tout α, pour tout $x \in \bar{S}_\alpha$, $\Phi(x) = (g_\alpha)_* [\![\{x\} \times F_\alpha]\!]$.

Exemple 2.4.13. Soit $\pi : E \to B$ un fibré SA de rang l. On peut définir une famille continue de chaînes $\Phi : B \to C_l(E)$ par $\Phi(b) := [\![\pi^{-1}(b)]\!]$.

Proposition 2.4.14. *Soit $\gamma \in C^{SA}_k(X)$ une chaîne SA et $\Phi : X \to C_l(Y)$ une famille continue de chaînes, avec les notations ci-dessus. On peut raffiner la stratification pour avoir $\gamma = \sum n_\alpha [\![\bar{S}_\alpha]\!]$. On peut définir une nouvelle chaîne SA $\gamma \ltimes \Phi \in C^{SA}_{k+l}(Y)$ par :*

$$\gamma \ltimes \Phi := \sum_\alpha n_\alpha (g_\alpha)_* [\![\bar{S}_\alpha \times F_\alpha]\!].$$

Définition 2.4.15. Soit $\omega \in \Omega^{k+l}_{min}(Y)$ une forme minimale sur Y et $\Phi : X \to C^{SA}_l(Y)$ une famille continue de chaînes. On définit une cochaîne SA $\int_\Phi \omega$ par :

$$\langle \int_\Phi \omega, \gamma \rangle := \langle \omega, \gamma \ltimes \Phi \rangle.$$

Les *formes PA* (« *piecewise* (*semi-*)*algebraic* ») de degré k sur X sont les cochaînes de cette forme. On note $\Omega^k_{PA}(X)$ l'ensemble qu'elles forment.

Remarque 2.4.16. Une forme minimale est en particulier une forme PA : si $\omega \in \Omega^k_{min}(X)$ est une forme minimale, on peut poser $\Phi : X \to C_0(X)$, $x \mapsto [\![\{x\}]\!]$. Alors $\int_\Phi \omega = \omega$.

La preuve de la deuxième partie de la proposition suivante est extrêmement difficile.

Proposition 2.4.17. *La collection $\Omega^*_{PA}(X)$ est un sous-complexe de $C^*_{SA}(X)$ qui s'annule en degré* $>$ dim X*. Il existe une multiplication sur $\Omega^*_{PA}(X)$ qui étend celle de $\Omega^*_{min}(X)$ et qui en fait une ADGC.*

Un des résultats principaux de [HLTV11] est le suivant :

Théorème 2.4.18. *Il existe un zigzag de transformations naturelles, si l'on se restreint à la sous-catégorie des ensembles et applications SA :*

$$\Omega^*_{PA}(X) \leftarrow \cdot \to \Omega^*_{PL}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

qui sont des quasi-isomorphismes si X est un ensemble SA compact. Ce zigzag est de plus compatible avec les morphismes de Künneth.

Exemple 2.4.19. La forme $dt/t \in \Omega^1_{min}([1,2])$ est le bord de la forme $\log t := \int_\Phi \omega$ où $\omega = \lambda(f_0 ; f_1) \in \Omega^1_{min}([1,2]^2)$ avec $f_0(s,t) = 1/s \cdot \chi_{t<s}$ et $f_1(s,t) = s$, et $\Phi : [1,2] \to C^{SA}_1([1,2]^2)$ est la famille continue de chaînes associée à la projection sur le deuxième facteur.

Remarque 2.4.20. Dans [HLTV11], les auteurs conjecturent que le résultat reste vrai si X n'est pas compact, ce qui fut énoncé (sans preuve complète) par [KS00].

La preuve de ce théorème fait essentiellement intervenir trois ingrédients :

- le lemme de Poincaré : $\Omega^*_{PA}(\Delta^n)$ est acyclique pour n fixé ;
- les ensembles simpliciaux $\Omega^k_{PA}(\Delta^\bullet)$ sont « extensibles » pour k fixé : pour tout sous-ensemble $I \subset \{0, \dots, n\}$, pour toute collection $\{\beta_i \in \Omega^k_{PA}(\Delta^{n-1})\}_{i \in I}$ de formes vérifiant $d_i \beta_j = d_{j-1} \beta_i$, il existe une k-forme $\beta \in \Omega^k_{PA}(\Delta^n)$ vérifiant $d_i \beta = \beta_i$.
- la propriété de Mayer–Vietoris.

En utilisant ces trois propriétés, la preuve du théorème découle de raisons assez formelles.

Rappelons qu'un fibré SA $\pi : E \to B$ de rang l définit une famille continue de chaînes $\Phi : B \to C_l(E)$. On peut donc définir l'intégrale le long des fibres de ce fibré d'une forme minimale $\omega \in \Omega^{k+l}_{min}(E)$ par :

$$\pi_*(\omega) = \int_{\pi:E\to B} \omega := \int_\Phi \omega.$$

Cette procédure possède de nombreuses propriétés similaires à celles de l'intégrale le long des fibres classiques. Celle qui va nous intéresser le plus est la formule de Stokes. On rappelle que $\pi^\partial : E^\partial \to B$ est le fibré SA de rang $l-1$ donné par le bord fibre à fibre de E. Alors la formule de Stokes [HLTV11, Proposition 8.12] dit que :

$$d(\pi_*(\omega)) = \pi_*(d\omega) + (-1)^{\deg\omega - l}\pi^\partial_*(\omega_{|E^\partial}).$$

Mentionnons également que si $E = \bigcup_{i\in I} E_i$ se décompose en une réunion de sous-ensembles SA telle que $\pi_{|E_i}$ reste un fibré SA de rang k et que $\dim \pi^{-1}_{|E_i}(x) \cap \pi^{-1}_{|E_j}(x) < k$ pour tout $i \neq j$ et tout $x \in B$, alors $\pi_*(\omega) = \sum_{i\in I}(\pi_{|E_i})_*(\omega_{|E_i})$ [HLTV11, Proposition 8.11].

2.5 Complexe de graphes

Comme dans la Section 2.3, nous allons considérer que nos collections d'ADGC ne sont plus indexées par des entiers mais par des ensembles finis quelconque. En particulier, nous avons $\mathtt{G}_A(r) = \mathtt{G}_A(\{1,\dots,r\})$.

2.5.1 Idée informelle

Soit M une variété compacte sans bord simplement connexe SA et soit A un modèle à dualité de Poincaré de A. Notre objectif est de démontrer que les ADGC $\mathtt{G}_A(U)$ et $\Omega^*_{PA}(\mathtt{FM}_M(U))$ sont quasi-isomorphes. Trouver un quasi-isomorphisme direct $\mathtt{G}_A(U) \to$

Omega$^*_{PA}(\mathtt{FM}_M(U))$ relèverait du miracle : l'ADGC $\mathtt{G}_A(U)$ ayant de nombreuses relations, il faudrait trouver des formes PA sur $\mathtt{FM}_M(U)$ qui satisfont strictement ces relations. Comme souvent en algèbre homologique, nous allons définir une *résolution* de $\mathtt{G}_A(U)$, c'est-à-dire une ADGC quasi-isomorphe à $\mathtt{G}_A(U)$ et qui est libre en tant qu'algèbre (on dit aussi une ADGC « *quasi-libre* »). Toute la complexité des relations est alors transférée dans la différentielle. Trouver un morphisme depuis cette résolution vers $\Omega^*_{PA}(\mathtt{FM}_M(U))$ ne nécessite plus que de trouver des formes qui sont compatibles avec la différentielle, ce qui consiste essentiellement à trouver des formes qui satisfont les relations à homotopie près.

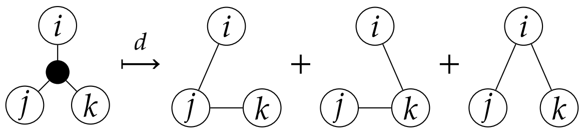
Les relations dans l'ADGC $\mathtt{G}_A(U)$ sont de trois types :

1. les relations qui existent dans A ;

2. les relations d'Arnold, et notamment la relation à trois termes ;
3. la relation de symétrie $p_i^*(a)\omega_{ij} = p_j^*(a)\omega_{ij}$.

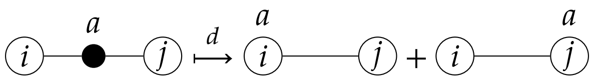
Le première type de relation dépend de la variété M. Étant donné une variété simplement connexe, nous pouvons trouver une résolution quasi-libre $R \to \Omega^*_{PA}(M)$ et appliquer la procédure de Lambrechts–Stanley [LS08b] pour trouver un quasi-isomorphisme $R \to A$, où A est à dualité de Poincaré.

Pour le deuxième type de relations, nous allons utiliser une idée due à Kontsevich, qui est de remplacer la relation à trois termes $\omega_{ij}\omega_{jk} + \omega_{jk}\omega_{ki} + \omega_{ki}\omega_{ij}$ par une différentielle dans un complexe de graphes. Ce complexe de graphes est un espace vectoriel engendré par des graphes dont les sommets sont de deux types : des sommets « externes », en bijection avec l'ensemble fini U fixé ; et des sommets internes, indistinguables. La différentielle consiste à contracter les arêtes incidentes aux sommets internes. On peut alors représenter graphiquement la relation à trois termes par :



L'idée derrière cette différentielle est qu'un graphe avec des sommets externes U et des sommets internes I correspond à une forme sur $\mathsf{FM}_M(U \sqcup I)$ que l'on intègre le long des fibres de la projection $\mathsf{FM}_M(U \sqcup I) \to \mathsf{FM}_M(U)$. Le sommet interne dans l'image précédente correspond à un quatrième point dans une éventuelle configuration sur M, et l'intégrale fait une « moyenne » sur toutes les positions possibles de ce quatrième point. Lorsque l'on applique la formule de Stokes, ce quatrième point est restreint au bord fibre à fibre de cette projection. Le bord a trois faces de dimension maximale : quand le quatrième point devient infinitésimalement proche d'un des trois autres points par rapport aux deux autres. Ces trois faces correspondent exactement aux trois termes de la relation d'Arnold.

Le dernier type de relation, la symétrie, se gère d'une manière similaire à l'idée de Kontsevich. Plus précisément, cette relation de symétrie devient un bord comme indiqué sur la figure suivante :



Bien sûr, dans le complexe de graphe complet, ces deux différentielles sont mélangées. Cela nous poussera à introduire diverses filtrations pour les séparer.

2.5.2 Définition du complexe de graphes

2.5.3 Propagateur

2.5.4 Fonction de partition

2.6 Fin de la preuve

3 Variétés à bord

3.1 Motivation : TQFT

3.2 Modèle 1 : recollements de variétés de long des bords

3.3 Modèle 2 : modèle de Lambrechts–Stanley perturbé et dualité de Poincaré–Lefschetz

3.4 Espaces de configuration de surfaces

4 Opérades

4.1 Motivation : homologie de factorisation

4.2 Introduction aux opérades

4.3 Structure opéradique sur les compactification

4.4 Formalité

4.5 Compatibilité avec le modèle de Lambrechts–Stanley

4.6 Exemple de calcul

Références

[Arn69] Vladimir I. Arnol'd. « The cohomology ring of the group of dyed braids ». In : *Mat. Zametki* 5 (1969), p. 227-231. issn : 0025-567X. doi : 10.1007/978-3-642-31031-7_18.

[AS94] Scott Axelrod et I. M. Singer. « Chern–Simons perturbation theory. II ». In : *J. Differential Geom.* 39.1 (1994), p. 173-213. issn : 0022-040X. doi : 10.4310/jdg/1214454681. arXiv : hep-th/9304087.

[BG91] Martin Bendersky et Sam Gitler. « The cohomology of certain function spaces ». In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 326.1 (1991), p. 423-440. issn : 0002-9947. doi : 10.2307/2001871.

[BMP05] B. Berceanu, M. Markl et Ş. Papadima. « Multiplicative models for configuration spaces of algebraic varieties ». In : *Topology* 44.2 (2005), p. 415-440. ISSN : 0040-9383. DOI : 10.1016/j.top.2004.10.002.

[CW16] Ricardo Campos et Thomas Willwacher. *A model for configuration spaces of points*. 2016. arXiv : 1604.02043. Prépubl.

[Coh76] Frederick R. Cohen. « The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$ spaces, $n \geq 0$ ». In : Frederick R. Cohen, Thomas J. Lada et J. Peter May. *The homology of iterated loop spaces*. Lecture Notes in Mathematics 533. Berlin Heidelberg : Springer, 1976. Chap. 3, p. 207-351. ISBN : 978-3-540-07984-2. DOI : 10.1007/BFb0080467.

[CT78] Frederick R. Cohen et Laurence R. Taylor. « Computations of Gelfand–Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces ». In : *Geometric applications of homotopy theory* (*Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977*)*, I*. T. 657. Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, 1978, p. 106-143. DOI : 10.1007/BFb0069229.

[Cor15] Hector Cordova Bulens. « Rational model of the configuration space of two points in a simply connected closed manifold ». In : *Proc. Amer. Math. Soc.* 143.12 (2015), p. 5437-5453. ISSN : 0002-9939. DOI : 10.1090/proc/12666. arXiv : 1505.06290.

[Del75] Pierre Deligne. « Poids dans la cohomologie des variétés algébriques ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (*Vancouver, B. C., 1974*)*, Vol. 1*. 1975, p. 79-85.

[DGMS75] Pierre Deligne, Phillip Griffiths, John Morgan et Dennis Sullivan. « Real homotopy theory of Kähler manifolds ». In : *Invent. Math.* 29.3 (1975), p. 245-274. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/BF01389853.

[FOT08] Yves Félix, John Oprea et Daniel Tanré. *Algebraic models in geometry*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 17. Oxford : Oxford University Press, 2008, p. xxii+460. ISBN : 978-0-19-920651-3.

[FT04] Yves Félix et Jean-Claude Thomas. « Configuration spaces and Massey products ». In : *Int. Math. Res. Not.* 33 (2004), p. 1685-1702. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1155/S1073792804140270. arXiv : math/0304226.

[FM94] William Fulton et Robert MacPherson. « A compactification of configuration spaces ». In : *Ann. of Math.* (2) 139.1 (1994), p. 183-225. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.2307/2946631.

[HLTV11] Robert Hardt, Pascal Lambrechts, Victor Turchin et Ismar Volić. « Real homotopy theory of semi-algebraic sets ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 11.5 (2011), p. 2477-2545. ISSN : 1472-2747. DOI : 10.2140/agt.2011.11.2477. arXiv : 0806.0476.

[Idr19] Najib Idrissi. « The Lambrechts–Stanley Model of Configuration Spaces ». In : *Invent. Math* 216.1 (2019), p. 1-68. ISSN : 1432-1297. DOI : 10.1007/s00222-018-0842-9. arXiv : 1608.08054.

[Kon99] Maxim Kontsevich. « Operads and motives in deformation quantization ». In : *Lett. Math. Phys.* 48.1 (1999), p. 35-72. issn : 0377-9017. doi : 10.1023/A:1007555725247. arXiv : math/9904055.

[KS00] Maxim Kontsevich et Yan Soibelman. « Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture ». In : *Conférence Moshé Flato. Quantization, deformation, and symmetries*. Dijon, France, September 5–8, 1999. Sous la dir. de Giuseppe Dito et Daniel Sternheimer. T. 1. Math. Phys. Stud. 21. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 255-307. arXiv : math/0001151.

[Kri94] Igor Kriz. « On the rational homotopy type of configuration spaces ». In : *Ann. of Math.* (2) 139.2 (1994), p. 227-237. issn : 0003-486X. doi : 10.2307/2946581.

[LS04] Pascal Lambrechts et Don Stanley. « The rational homotopy type of configuration spaces of two points ». In : *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) 54.4 (2004), p. 1029-1052. issn : 0373-0956. url : http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_4_1029_0.

[LS08a] Pascal Lambrechts et Don Stanley. « A remarkable DGmodule model for configuration spaces ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 8.2 (2008), p. 1191-1222. issn : 1472-2747. doi : 10.2140/agt.2008.8.1191. arXiv : 0707.2350.

[LS08b] Pascal Lambrechts et Don Stanley. « Poincaré duality and commutative differential graded algebras ». In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 41.4 (2008), p. 495-509. issn : 0012-9593. arXiv : math/0701309.

[LV14] Pascal Lambrechts et Ismar Volić. « Formality of the little N-disks operad ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 230.1079 (2014), p. viii+116. issn : 0065-9266. doi : 10.1090/memo/1079. arXiv : 0808.0457.

[LS05] Riccardo Longoni et Paolo Salvatore. « Configuration spaces are not homotopy invariant ». In : *Topology* 44.2 (2005), p. 375-380. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/j.top.2004.11.002. arXiv : math/0401075.

[Nas52] John Nash. « Real algebraic manifolds ». In : *Ann. of Math.* (2) 56 (1952), p. 405-421. issn : 0003-486X.

[Sin04] Dev P. Sinha. « Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces ». In : *Selecta Math.* (*N.S.*) 10.3 (2004), p. 391-428. issn : 1022-1824. doi : 10.1007/s00029-004-0381-7. arXiv : math/0306385.

[Sna74] V. P. Snaith. « A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$ ». In : *J. London Math. Soc.* (2) 7 (1974), p. 577-583. issn : 0024-6107. doi : 10.1112/jlms/s2-7.4.577.

[Sul77] Dennis Sullivan. « Infinitesimal computations in topology ». In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 47.47 (1977), 269-331 (1978). issn : 0073-8301. numdam : PMIHES_1977__47__269_0.

[Tog73] A. Tognoli. « Su una congettura di Nash ». In : *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 27 (1973), p. 167-185.

[Tot96] Burt Totaro. « Configuration spaces of algebraic varieties ». In : *Topology* 35.4 (1996), p. 1057-1067. issn : 0040-9383. doi : 10.1016/0040-9383(95)00058-5.