L'opérade Swiss-Cheese et le centre de Drinfeld

Najib Idrissi

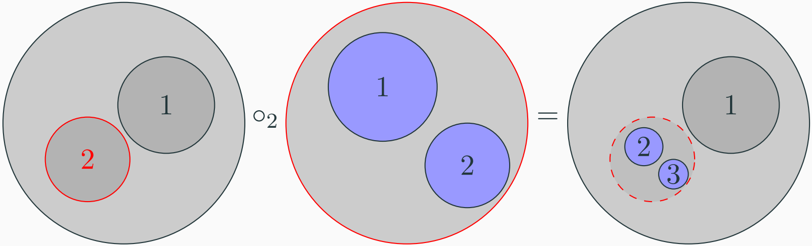
13 octobre 2017 @ SIC Calais

Laboratoire Paul Painlevé

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Opérades des petits disques et tresses

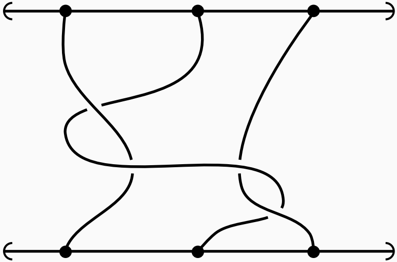
Les opérades topologiques des petits disques D_n [Boardmann–Vogt, May] gouvernent les algèbres associatives et commutatives à homotopie près :



$\in \mathsf{D}_2(2)$ $\in \mathsf{D}_2(2)$ $\in \mathsf{D}_2(3)$

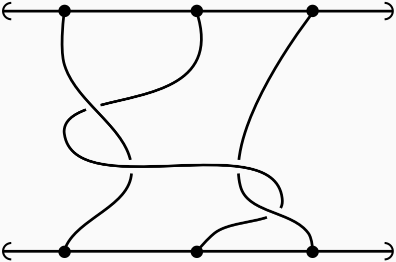
Rappel : groupes des tresses pures

$$P_r = \ker(B_r \to \Sigma_r)$$



Rappel : groupes des tresses pures

$$P_r = \ker(B_r \to \Sigma_r)$$

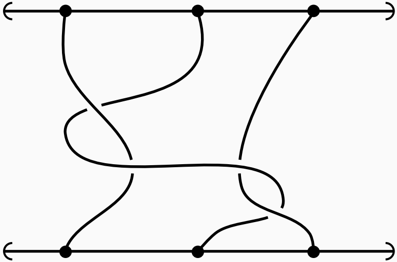


Proposition

$\mathsf{D}_2(r) \simeq \mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1)$

Rappel : groupes des tresses pures

$$P_r = \ker(B_r \to \Sigma_r)$$

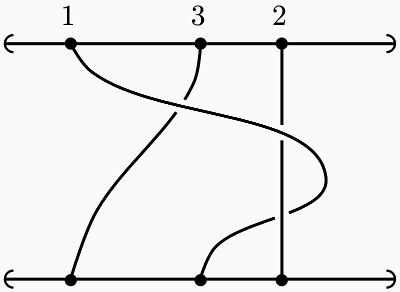


Proposition

$\mathsf{D}_2(r) \simeq \mathrm{Conf}_r(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_r, 1) \implies \mathsf{D}_2 \simeq \mathrm{B}(\pi \mathsf{D}_2)$

Groupoïdes de tresses

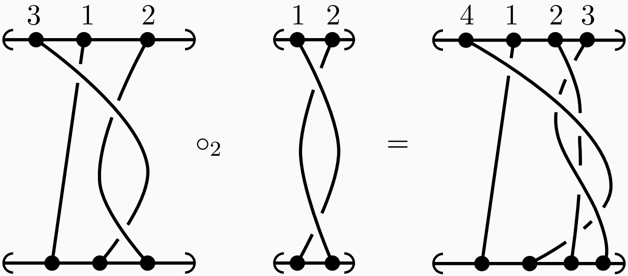
« Extension » de P_r : groupoïde des tresses colorées $\mathsf{CoB}(r)$



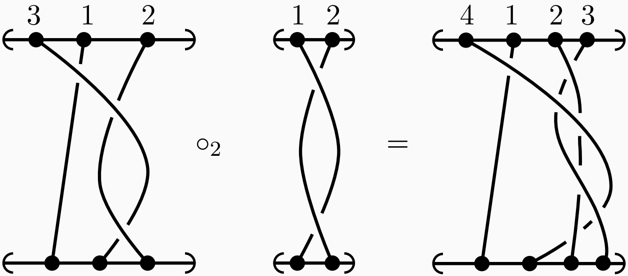
$$\mathrm{ob}\,\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r, \quad \mathrm{End}_{\mathsf{CoB}(r)}(\sigma) \cong P_r$$

Câblage

« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin



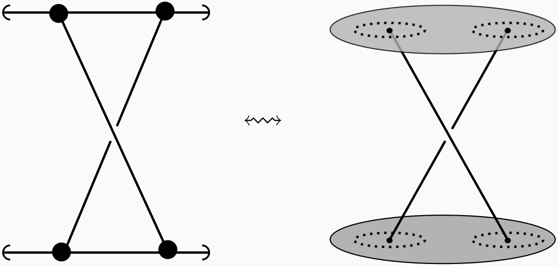
« Câblage » : insertion d'une tresse dans un brin



$\Longrightarrow$ $\{\mathsf{CoB}(r)\}_{r\geq 1}$ est une opérade symétrique en groupoïdes :

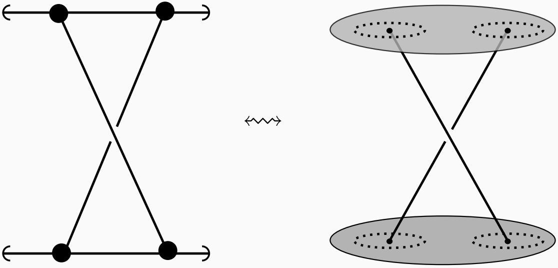
$$\circ_i : \mathsf{CoB}(k) \times \mathsf{CoB}(l) \to \mathsf{CoB}(k+l-1),\ 1 \leq i \leq k$$

Petits disques et tresses



$\mathsf{CoB}(r) \cong$ sous-groupoïde of $\pi\mathsf{D}_2(r)$

Petits disques et tresses



$$\mathsf{CoB}(r) \cong \text{sous-groupoïde of } \pi\mathsf{D}_2(r)$$

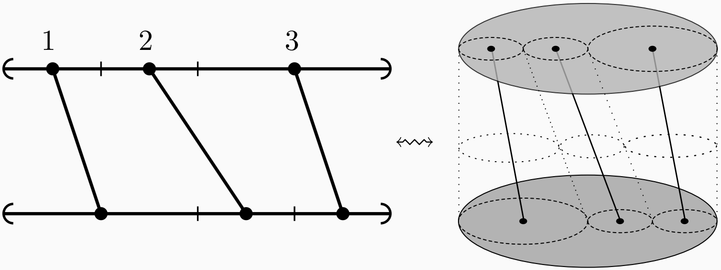
Problème

Inclusion incompatible avec la structure d'opérade

Petits disques et tresses (2)

Solution

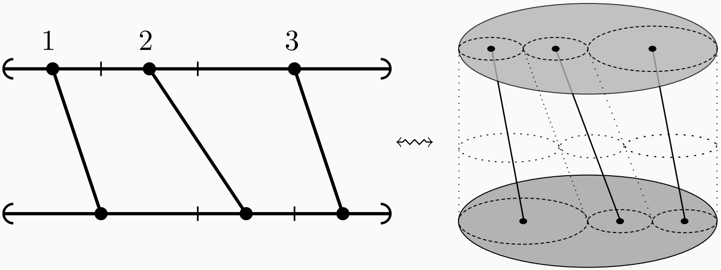
Tresses parenthésées PaB



Petits disques et tresses (2)

Solution

Tresses parenthésées **PaB**



Théorème (Fresse ; voir aussi Fiedorowicz, Tamarkin…)

Équivalence faible d'opérades $\pi\mathsf{D}_2 \xleftarrow{\sim} \mathsf{PaB} \xrightarrow{\sim} \mathsf{CoB}$.

Algèbres sur une opérade catégorique

$\mathsf{P} \in \mathsf{CatOp} \implies$ une P-algèbre est la donnée de :

- une catégorie C ;
- Pour un objet $x \in \mathrm{ob}\, \mathsf{P}(r)$, un *foncteur* $\bar{x} : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$;
- Pour un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{P}(r)}(x, y)$, une *transformation naturelle*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{C}^{\times r} \arrow[r, bend left, "\bar{x}"] \arrow[r, bend right, "\bar{y}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \bar{f}"] & \mathsf{C} \end{tikzcd}$$

- + compatibilité avec les actions des groupes symétriques et la structure d'opérade.

Algèbres sur CoB

$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;

Algèbres sur CoB

$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- $\sigma \in \operatorname{ob}\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$ t.q. $\otimes_{\mathrm{id}_1} = \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$;

Algèbres sur CoB

$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$ t.q. $\otimes_{\mathrm{id}_1} = \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$;

Algèbres sur CoB

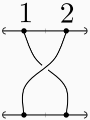
$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$ t.q. $\otimes_{\mathrm{id}_1} = \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$...

Algèbres sur CoB

$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$ t.q. $\otimes_{\mathrm{id}_1} = \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$...
- $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{CoB}(r)}(\sigma, \sigma')$ tresse colorée $\rightsquigarrow$ transformation naturelle $\beta_* : \otimes_\sigma \to \otimes_{\sigma'}$. Par exemple :

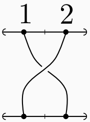


$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$

Algèbres sur CoB

$\mathsf{P} = \mathsf{CoB} \implies$ une algèbre est la donnée de :

- Une catégorie C ;
- $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathsf{CoB}(r) = \Sigma_r \rightsquigarrow \otimes_\sigma : \mathsf{C}^{\times r} \to \mathsf{C}$ t.q. $\otimes_{\mathrm{id}_1} = \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$;
- $\otimes_\sigma(X_1, \dots, X_n) = \otimes_{\mathrm{id}_r}(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$;
- $\otimes_{\mathrm{id}_2}(\otimes_{\mathrm{id}_2}(X, Y), Z) = \otimes_{\mathrm{id}_3}(X, Y, Z) = \otimes_{\mathrm{id}_2}(X, \otimes_{\mathrm{id}_2}(Y, Z))$...
- $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{CoB}(r)}(\sigma, \sigma')$ tresse colorée $\rightsquigarrow$ transformation naturelle $\beta_* : \otimes_\sigma \to \otimes_{\sigma'}$. Par exemple :



$\rightsquigarrow \tau_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$

Théorème (MacLane, Joyal–Street)

Une algèbre sur CoB *est une catégorie monoïdale tressée (stricte, sans unité).*

Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

Théorème

Une algèbre sur PaB *est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

Théorème

Une algèbre sur PaB *est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

Versions unitaires CoB_+ et PaB_+ :

Théorème

Une algèbre sur CoB_+ *(resp.* PaB_+*) est une catégorie monoïdale tressée stricte (resp. non-stricte) avec une unité stricte (dans les deux cas).*

Remarques

Extension aux tresses parenthésées :

Théorème

Une algèbre sur PaB *est une catégorie monoïdale tressée (sans unité).*

Versions unitaires CoB_+ et PaB_+ :

Théorème

Une algèbre sur CoB_+ *(resp.* PaB_+*) est une catégorie monoïdale tressée stricte (resp. non-stricte) avec une unité stricte (dans les deux cas).*

$\mathsf{PaP} \subset \mathsf{PaB}$ où on ne garde que les tresses triviales :

Théorème

$\pi \mathsf{D}_1 \simeq \mathsf{PaP}$, *les algèbres sur* PaP *sont les catégories monoïdales.*

L’opérade Swiss-Cheese

Définition

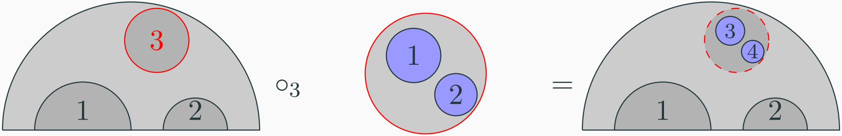
L'opérade Swiss-Cheese SC [Voronov, 1999] :

- gouverne les D_2-algèbres agissant sur les D_1-algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs $\mathfrak{c} \leftrightarrow \mathsf{D}_2$ et $\mathfrak{o} \leftrightarrow \mathsf{D}_1$.

Définition

L'opérade Swiss-Cheese SC [Voronov, 1999] :

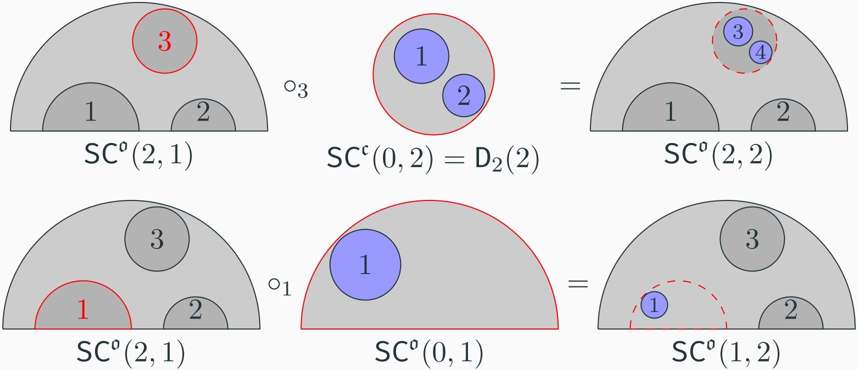
- gouverne les D_2-algèbres agissant sur les D_1-algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs $\mathfrak{c} \leftrightarrow \mathsf{D}_2$ et $\mathfrak{o} \leftrightarrow \mathsf{D}_1$.



$\mathsf{SC}^{\mathfrak{o}}(2,1)$ $\quad$ $\mathsf{SC}^{\mathfrak{c}}(0,2) = \mathsf{D}_2(2)$ $\quad$ $\mathsf{SC}^{\mathfrak{o}}(2,2)$

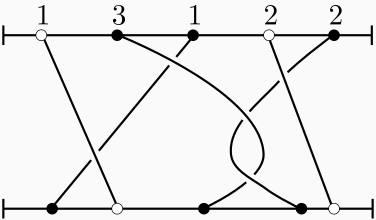
L'opérade Swiss-Cheese SC [Voronov, 1999] :

- gouverne les D_2-algèbres agissant sur les D_1-algèbres ;
- opérade *colorée*, avec deux couleurs $\mathfrak{c} \leftrightarrow \mathsf{D}_2$ et $\mathfrak{o} \leftrightarrow \mathsf{D}_1$.

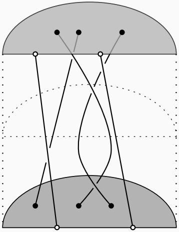


Idée

Étendre CoB pour construire une opérade équivalente à πSC.



$\rightsquigarrow$

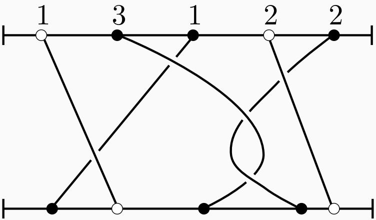


CoPB$(2, 3)$

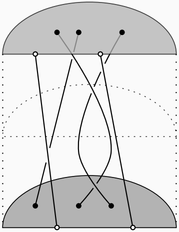
L'opérade CoPB

Idée

Étendre CoB pour construire une opérade équivalente à πSC.



$\rightsquigarrow$

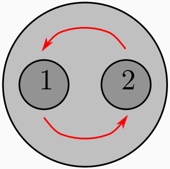


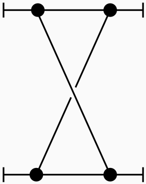
CoPB$(2, 3)$

Théorème (I.)

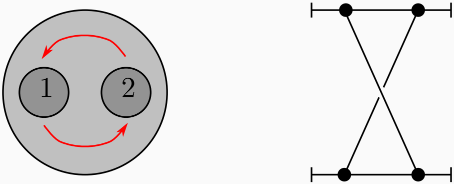
$$\pi\mathsf{SC} \xleftarrow{\sim} \mathsf{PaPB} \xrightarrow{\sim} \mathsf{CoPB}.$$

D_2 / CoB : tressage = commutativité à homotopie près

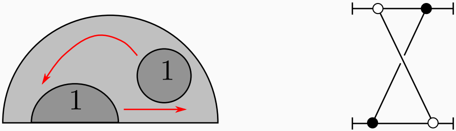




D_2 / CoB : tressage = commutativité à homotopie près



SC / CoPB : semi-tressage = morphisme « central »



Centre de Drinfeld

C: catégorie monoïdale $\rightsquigarrow$ $\Sigma\mathsf{C}$ bicatégorie à un objet
$\rightsquigarrow$ Centre de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathsf{C}) := \mathrm{End}(\mathrm{id}_{\Sigma\mathsf{C}})$

- $\mathrm{ob}\,\mathcal{Z}(\mathsf{C}) = \{(X, \Phi) \mid X \in \mathsf{C},\ \Phi : (X \otimes -) \xrightarrow{\cong} (- \otimes X)\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathsf{C})}\big((X, \Phi), (Y, \Psi)\big)\{f : X \to Y \mid$ compatible with Φ and $\Psi\}$

Théorème (Drinfeld, Joyal–Street 1991, Majid 1991)

$\mathcal{Z}(\mathsf{C})$ est une catégorie monoïdale tressée avec

$$(X, \Phi) \otimes (Y, \Psi) = \big(X \otimes Y, (\Psi \otimes 1) \circ (1 \otimes \Phi)\big),$$

$$\tau_{(X,\Phi),(Y,\Psi)} = \Phi_Y.$$

Théorème (Voronov, Hoefel)

Une algèbre sur $H_*(\mathsf{SC})$ est donnée par :

- *une algèbre associative A ;*
- *une algèbre de Gerstenhaber B ;*
- *un morphisme central d'algèbres $f : B \to Z(A)$.*

(Dans la version de Voronov : $B \otimes A \to A$ au lieu de $B \to A$)

Théorème de Voronov & algèbres sur CoPB

Théorème (Voronov, Hoefel)

Une algèbre sur $H_*(\mathsf{SC})$ *est donnée par :*

- *une algèbre associative* A *;*
- *une algèbre de Gerstenhaber* B *;*
- *un morphisme central d'algèbres* $f : B \to Z(A)$.

Théorème (I.)

Une algèbre sur CoPB *est donnée par :*

- *Une catégorie monoïdale* N *;*
- *Une catégorie monoïdale tressée* M *;*
- *Un foncteur monoïdal tressé* $F : \mathsf{M} \to \mathcal{Z}(\mathsf{N})$.

(Dans la version de Voronov : $B \otimes A \to A$ au lieu de $B \to A$)

Modèle rationel en passant par les associateurs de Drinfeld

Opérade des diagrammes de cordes

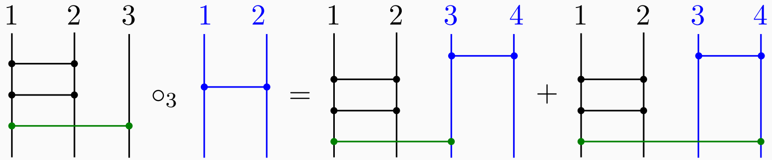
Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

$$\mathfrak{p}(r) \coloneqq \mathbb{L}(t_{ij})_{1\leq i\neq j\leq r}/\langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}]\rangle.$$

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

$$\mathfrak{p}(r) \coloneqq \mathbb{L}(t_{ij})_{1\leq i\neq j\leq r}/\langle t_{ij}-t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij}+t_{jk}]\rangle.$$

$\to$ opérade :



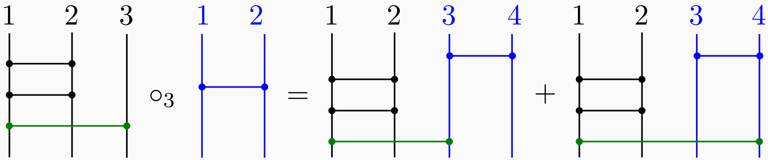
$$t_{13}t_{12}t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

Opérade des diagrammes de cordes

Algèbre de Lie de Drinfeld–Kohno (« version infinitésimale » des tresses pures) :

$$\mathfrak{p}(r) := \mathbb{L}(t_{ij})_{1\le i\ne j\le r} / \langle t_{ij} - t_{ji}, [t_{ij}, t_{kl}], [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] \rangle.$$

$\rightarrow$ opérade :



$$t_{13}t_{12}t_{12} \circ_3 t_{12} \in \mathbb{U}\mathfrak{p}(4)$$

Complétion de Mal'cev $\rightarrow$ opérade en group(oïd)es complets

$$\widehat{\mathsf{CD}} = \mathbb{G}\hat{\mathbb{U}}\hat{\mathfrak{p}} \; (= \{e^x \mid x \in \mathfrak{p}\})$$

Associateurs de Drinfeld ($\mu \in \mathbb{Q}^\times$) :

$$\mathrm{Ass}^{\mu}(\mathbb{Q}) \coloneqq \{\phi : \mathsf{PaB}_+ \to \widehat{\mathsf{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

Associateurs de Drinfeld ($\mu \in \mathbb{Q}^\times$) :

$$\mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \coloneqq \{\phi : \mathsf{PaB}_+ \to \widehat{\mathsf{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

$$\phi \in \mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \iff \Phi(t_{12}, t_{23}) := \phi(\alpha) \in \mathbb{G}\big(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]]\big)$$

satisfying the usual equations

Associateurs de Drinfeld ($\mu \in \mathbb{Q}^\times$) :

$$\mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \coloneqq \{\phi : \mathsf{PaB}_+ \to \widehat{\mathsf{CD}}_+ \mid \phi(\tau) = e^{\mu t_{12}/2}\}$$

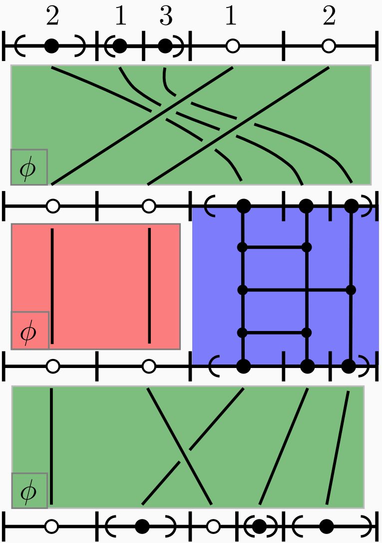
$$\phi \in \mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \iff \Phi(t_{12}, t_{23}) \coloneqq \phi(\alpha) \in \mathbb{G}\big(\mathbb{Q}[[t_{12}, t_{23}]]\big)$$

satisfying the usual equations

Théorème (Drinfeld)

$$\mathrm{Ass}^\mu(\mathbb{Q}) \neq \varnothing$$

ϕ induit une *équivalence rationnelle* $\pi(\mathsf{D}_2)_+ \simeq \mathsf{PaB}_+ \xrightarrow{\sim_{\mathbb{Q}}} \widehat{\mathsf{CD}}_+$



Nouvelle opérade $\widehat{\mathsf{PaPCD}}_+^{\phi}$ (avec $\phi \in \mathrm{Ass}^{\mu}(\mathbb{Q})$ fixé).

Théorème (I.)

$$\pi\mathsf{SC}_+ \simeq_{\mathbb{Q}} \widehat{\mathsf{PaPCD}}_+^{\phi}.$$

Non-formalité

Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(\mathsf{SC})$ est le « produit de Voronov » $H_*(\mathsf{D}_2) \otimes H_*(\mathsf{D}_1)$

Non-formalité

Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(\mathsf{SC})$ est le « produit de Voronov » $H_*(\mathsf{D}_2) \otimes H_*(\mathsf{D}_1)$

Corollaire

$H_*(\mathsf{SC}\,;\mathbb{Q}) \cong H_*(B(\mathsf{PaP}) \times B(\widehat{\mathsf{CD}})\,;\mathbb{Q})$

Non-formalité

Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(\mathsf{SC})$ est le « produit de Voronov » $H_*(\mathsf{D}_2) \otimes H_*(\mathsf{D}_1)$

Corollaire

$H_*(\mathsf{SC}\,;\mathbb{Q}) \cong H_*(B(\mathsf{PaP}) \times B(\widehat{\mathsf{CD}})\,;\mathbb{Q})$

Théorème

- D_n *est formelle* $\implies \langle H^*(\mathsf{D}_n)\rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} \mathsf{D}_n$ *[Kontsevich, Tamarkin, Lambrechts–Volić, Fresse–Willwacher]*
- SC *n'est* pas *formelle* $\implies \mathsf{SC} \not\simeq \langle H^*(\mathsf{D}_2)\rangle^{\mathbb{L}} \times \langle H^*(\mathsf{D}_1)\rangle^{\mathbb{L}}$ *[Livernet]*

Non-formalité

Théorème (Voronov, Hoefel (v2))

$H_*(\mathsf{SC})$ est le « produit de Voronov » $H_*(\mathsf{D}_2) \otimes H_*(\mathsf{D}_1)$

Corollaire

$H_*(\mathsf{SC}\,;\mathbb{Q}) \cong H_*(B(\mathsf{PaP}) \times B(\widehat{\mathsf{CD}})\,;\mathbb{Q})$

Théorème

- D_n *est formelle* $\implies \langle H^*(\mathsf{D}_n)\rangle^{\mathbb{L}} \simeq_{\mathbb{Q}} \mathsf{D}_n$ *[Kontsevich, Tamarkin, Lambrechts–Volić, Fresse–Willwacher]*
- SC *n'est* pas *formelle* $\implies \mathsf{SC} \not\simeq \langle H^*(\mathsf{D}_2)\rangle^{\mathbb{L}} \times \langle H^*(\mathsf{D}_1)\rangle^{\mathbb{L}}$ *[Livernet]*

Résultat

$\mathsf{Pa}\widehat{\mathsf{PCD}}_+^{\phi} =$ « $\mathsf{PaP} \rtimes_{\varphi} \widehat{\mathsf{CD}}$ » « corrige » le défaut de formalité.

Merci de votre attention !

arXiv:1507.06844

Diapos : `https://operad.fr/talk/sic2017/`