Параболические подгруппы группы p-Базилики

Алексей Исковских, Михаил Ураков, Владислав Гребенюк

Май 2024

Аннотация

В этой работе исследуются параболические подгруппы группы p-Базилики. Доказано, что стабилизаторы лучей не являются нормальными подгруппами, описан стабилизатор луча $(p-1)^\infty$. Описаны свойства стабилизаторов элементов вида $(p-1)^n$.

Эта статья — результат работы авторов на майской проектной смене в Сириусе по математике и теоретической информатике. Мы выражаем благодарность нашим преподавателям и наставникам: Магдиеву Руслану Тимуровичу, Магину Матвею Ильичу и Семидетнову Артему Алексеевичу — за помощь в работе над проектом, полезные советы и интересные лекции.

Содержание

1 Введение и постановка задачи

Группы, действующие на p-регулярных деревьях были тщательно изучены в последние десятилетия из-за своей хорошей структуры, важности в теории просто бесконечных групп и из-за наличия у них многих экзотических свойств.

Важный класс таких групп — это фрактальные группы, которые действуют на деревьях самоподобным образом. Фрактальные группы представляют большой интерес для изучения в связи с их редкими свойствами. Первый пример группы промежуточного роста был найден именно в этом классе, как и самые простые примеры бесконечных периодических конечно-порожденных групп.

Также не последнее место занимает класс ветвящихся и слабо ветвящихся групп, где ветвистость указывает на меру схожести структуры группы и структуры всей группы автоморфизмов дерева.

Группы p-Базилик стали первым примером слабо ветвящихся, но не ветвящихся групп, которые являются супер-сильно фрактальными ([Dom+21]).

Действие фрактальной группы G на дереве можно расширить до действия на его границе. *Параболическая подгруппа* P в G — стабилизатор элемента на границе дерева.

В этой статье, мы изучаем параболические подгруппы группы p-Базилики, которые являются естественным обобщением группы Базилики. Эта группа, действующая на 2-регулярном дереве, порождена двумя элементами, которые рекурсивно определены следующим образом:

$$a = (1, b) \quad \text{и} \quad b = \sigma(1, a)$$

где σ - транспозиция двух максимальных поддеревьев первого уровня, а запись (x, y) обозначает независимые действия автоморфизмов x и y на соответствующих поддеревьях. Группы p-Базилик были определены и описаны в работе ([Dom+21]).

Целью нашего исследования является описание параболических подгрупп группы p-Базилики. В разделе 3 описано копредставление стабилизатора луча 2^∞ и стабилизаторов 2^n, и обобщаются все утверждения на случай произвольного простого p больше 2.

2 Обозначения и определения

2.1 Сплетение

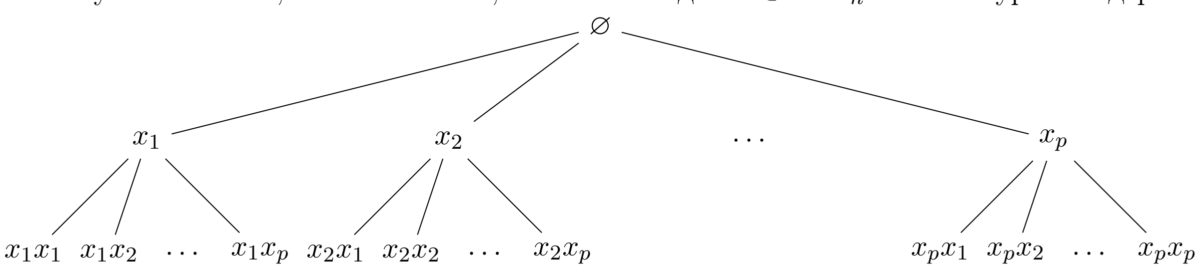
Пусть даны группа A и группа B, действующая слева на множестве Ω, $|\Omega| = d$. Тогда можно задать действие B на A^d "перестановками координат". А именно, зададим множество всех элементов вида $\sigma\,(a_1,\ a_2,\ ...\ a_d),\ \sigma \in B,\ a_i \in A$ и бинарную опреацию:

$$\sigma_2\,(b_1,\ b_2,\ ...\ b_d) \cdot \sigma_1\,(a_1,\ a_2,\ ...\ a_d) = \sigma_2\sigma_1(b_{\sigma_1(1)}a_1,\ b_{\sigma_1(2)}a_2,\ ...\ b_{\sigma_1(d)}a_d)$$

Нетрудно проверить, что такая операция на множестве задает группу. Принято такую группу обозначать как $B \wr A^{|\Omega|}$

2.2 Группа $\mathrm{Aut}(T)$

Пусть p — простое число и T — *p-регулярное дерево*, то есть бесконечное корневое дерево, каждая вершина которого имеет p потомков. Если выбрать алфавит X, состоящий из p букв, T может быть представлено как граф, вершины которого — слова из множества X^*: корень дерева — пустое слово $\varnothing$, w — потомок u, если $w = ux$ для $x \in X$. L_n — n-ный уровень дерева.



Автоморфизмы T, как графа, образуют группу относительно композиции. Заметим, что любой автоморфизм оставляет все вершины на своем уровне.

Определение. Пусть $g \in \mathrm{Aut}(T)$, $u \in X^*$. Тогда *сужением g на u* будем называть автоморфизм $g|_u$, заданный соотношением:

$$g(uw) = g(u)g|_u(w)$$

Из определения следуют очевидные свойства операции:

- $g|_{v_1v_2} = g|_{v_1}|_{v_2}$
- $(g_1 \cdot g_2)|_v = g_1|_{g_2(v)} \cdot g_2|_v$

S_X — группа перестановок множества X, тогда существует изоморфизм:

$$\psi : \mathrm{Aut}(T) \to S_X \wr \mathrm{Aut}(T)^{|X|}$$

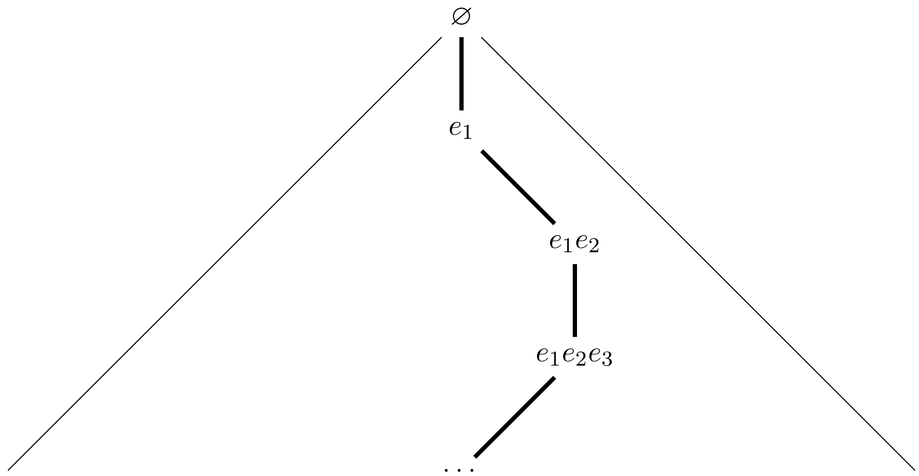
Тогда элемент g группы $\mathrm{Aut}(T)$ можно представить так:

$$\psi(g) = \sigma\,(g|_1,\ g|_2,\ ...\ g|_p),\ \sigma \in S_X$$

Если перестановка тождественна, то ее обозначение опускается.

2.3 Подгруппы $\mathrm{Aut}(T)$

Рассмотрим бесконечное слово из букв языка X, ему соответствует некоторый бесконечный луч $\mathbf{e}$ в дереве: $e = e_1e_2...,\ e_i \in X$. Зададим бесконечную последовательность $x_e = \{e_1, e_1e_2,\ e_1e_2e_3...\}$.



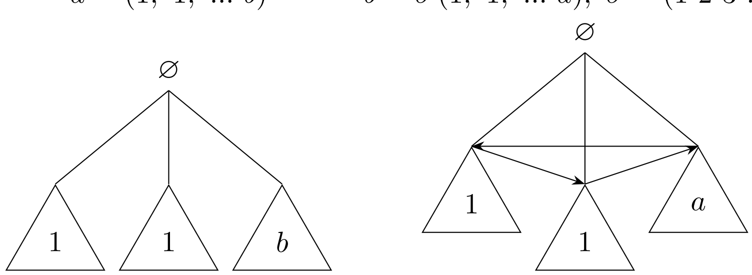
Определение. *Стабилизатором луча* $\mathbf{e}$ или *параболической подгруппой луча* $\mathbf{e}$ будем называть подгруппу $\mathrm{P}(\mathbf{e}) \leq \mathrm{Aut}(T)$, заданную как пересечение стабилизаторов префиксных слов:

$$\mathrm{P}(\mathbf{e}) = \bigcap_{x_i \in x_e} \mathrm{St}(x_i)$$

2.4 Группы p-Базилики

Определение. *Группа p-Базилики* $\mathfrak{B}_p$ — подгруппа группы автоморфизмов *p-регулярного дерева*, порожденная автоморфизмами a и b:

$$a = (1,\ 1,\ ...\ b) \qquad b = \sigma\,(1,\ 1,\ ...\ a),\ \sigma = (1\ 2\ 3\ ...\ p)$$



2.5 Классы кофинальности

Определение. Две бесконечные последовательности σ, $\tau : \mathbb{N} \to X$ кофинальны, если существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\sigma_n = \tau_n$ для всех $n \geq N$.

Кофинальность является отношением эквивалентности и классы эквивалентности по нему называются классами кофинальности.

3 Основные результаты

Мы исследовали группу 3-Базилики, но все приведённые результаты естественно обобщаются и на остальные группы p-Базилик.

3.1 Параболические подгруппы

Лемма 1. Стабилизаторы лучей не являются нормальными подгруппами.

Доказательство. Рассмотрим элемент $g = a^{b^{-2}} = (1,\ aba^{-1},\ 1)$, который лежит в стабилизаторах лучей $2\mathbf{e},\ 0\mathbf{e}$. Тогда, $g^{b^{-1}} = (1,\ 1,\ b^{a^{-1}})$, $g^b = (b^{a^{-1}},\ 1,\ 1)$, где $b^{a^{-1}} = \sigma\,(1,\ b,\ ab^{-1})$, то есть при сопряжении элемента g элементами b и b^{-1} он перестает стабилизировать лучи $2\mathbf{e}$ и $0\mathbf{e}$ соответственно, значит, стабилизаторы всех таких лучей - не нормальные подгруппы. Для лучей $1\mathbf{e}$ рассмотрим $f = a^{b^{-1}} = (b^{a^{-1}},\ 1,\ 1) \in \mathrm{P}(1\mathbf{e})$, тогда $f^{b^{-1}} = (1,\ b^{a^{-1}},\ 1) \notin \mathrm{P}(1\mathbf{e})$ $\square$

3.2 Параболическая подгруппа 2^∞

Мы исследуем параболическую подгруппу $\mathrm{P}_{2^\infty} \in \mathfrak{B}_3$. Выбор пал именно на этот луч, поскольку образующие a и b действуют на нём более нетривиально, чем, например, на 0^∞ или 1^∞.

В дальнейшем группа 3-Базилики $\mathfrak{B}_3$ будет обозначаться просто G. Также для удобства введены обозначения $A = \langle a\rangle^G$ и $B = \langle b\rangle^G$. Под $\mathrm{St}_G(v)$ подразумевается пересечение $\mathrm{St}(v)$ и G

Упомянем теорему из статьи [GŻ02], которая нам в будущем пригодится.

Теорема 1 ([GŻ02])**.** *Пусть G группа p-Базилики для простого p. Тогда G имеет следующее копредставление:*

$$G = \langle a, b \mid \xi^k(\theta^m([a, a^{b^l}])) \mid k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l \in \{1, \dots, p-1\}\rangle,$$

где

$$\xi\colon \begin{array}{l} a \mapsto b^p \\ b \mapsto a \end{array} \quad \text{и} \quad \theta\colon \begin{array}{l} a \mapsto a^{b^p+1} \\ b \mapsto b \end{array}$$

Следствие 1. *Для группы G функция* $\exp_a$ *корректно определена.*

Доказательство. Переписывание комутаторов по правилам ξ, θ и сокращение ww^{-1} не меняют степени элементов a, b. $\square$

Начнем с простого, нам нужно понять что из себя представляет стабилизатор 2^1.

Лемма 2. $\mathrm{St}_G(2^1) = \mathrm{St}_G(1) = A\langle b^3\rangle = \langle a, a^b, a^{b^2}, b^3\rangle$

Доказательство. Для начала заметим, что если элемент стабилизирует все элементы первого уровня, то он стабилизирует и 2^1. Обратно, если элемент стабилизирует 2^1, то, поскольку все реализуемые перестановки являются произведениями длинных циклов $\sigma = (1\ 2\ 3)$, то если сдвинулся хотя бы один элемент уровня, то сдвинулись и все остальные. Поэтому всякий элемент стабилизатора 2^1 является еще и стабилизатором первого уровня.

$\mathrm{St}_G(1)$ был вычислен в работе [Dom+21] и мы повторим эти вычисления здесь.

Заметим, что $a \in \mathrm{St}_G(1)$ и $b^n \in \mathrm{St}_G(1) \Leftrightarrow 3 \mid n$. Поскольку $\mathrm{St}_G(1) \trianglelefteq G$, то мы имеем $A\langle b^3\rangle \leq \mathrm{St}_G(1)$. Обратное включение тоже верно, т.к. $G/A\langle b^3\rangle$ имеет порядок 3, а $\mathrm{St}_G(1)$ —

собственная подгруппа G. В заключение, стоит отметить, что $\langle a, a^b, a^{b^2}, b^3\rangle \trianglelefteq G$, из чего следует утверждение леммы. $\square$

Далее мы хотим найти способ спускать действия на нижние уровни.

Лемма 3. Определим эндоморфизм свободной группы $\xi : a \mapsto b^3$, $b \mapsto a$, тогда справедливы следующие утверждения:

1. $\xi(g) = (a^{exp_a(g)},\ a^{exp_a(g)},\ g),\ \forall g \in \mathrm{St}_G(2^1) = \langle a, a^b, a^{b^2}, b^3\rangle$
2. $\xi : \mathrm{St}_G(2^n) \longrightarrow \mathrm{St}_G(2^{n+1})$ — мономорфизм

Доказательство.

$$\xi(a) = b^3 = (a, a, a)$$

$$\xi(bab^{-1}) = ab^3a^{-1} = (a, a, bab^{-1})$$

$$\xi(b^2ab^{-2}) = a^2b^3a^{-2} = (a, a, b^2ab^{-2})$$

$$\xi(b^3) = a^3 = (1, 1, b^3)$$

т.к. exp_a аддитивна, то это доказывает утверждение 1.

Далее, если $\xi(g) = 1$, т.е. $(a^{exp_a(g)},\ a^{exp_a(g)},\ g) = 1 = (1, 1, 1)$, то $g = 1$. $\square$

Таким образом, если имеется элемент $g \in \mathrm{St}_G(2^n)$, то по нему можно построить элемент $\xi^k(g) \in \mathrm{St}_G(2^{n+k})$, который будет стабилизировать 2 гарантированно на $n+k$ уровнях. Но нам нужны элементы, которые стабилизируют 2 на любом наперед заданном количестве уровней. Такими элементами являются, например a^b и a^{b^2}. Из этих соображений вытекает наш основной результат.

Теорема 2. P_{2^∞} *имеет следующее копредставление* $\mathrm{P}_{2^\infty} = \langle \xi^n(a^b), \xi^n(a^{b^2}) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\rangle$

Доказательство. По лемме 2, $\mathrm{St}_G(2^1) = A\langle b^3\rangle = \langle A, b^3\rangle$.

Заметим, что

$$\psi(A) = (B \times B \times B)$$

$$\psi(\langle b^3\rangle) = \langle (a,\ a,\ a)\rangle$$

Значит

$$\begin{aligned}\psi(\langle A, b^3\rangle) &= \langle (B \times B \times B),\ (a,\ a,\ a)\rangle = \\ &= \langle (B \times B \times 1),\ (1 \times 1 \times B),\ (a,\ a,\ a)\rangle = \\ &= \langle (B \times B \times 1),\ (a^n,\ a^n,\ a^nB) \mid n \in \mathbb{Z}\rangle = \\ &= \langle (B \times B \times 1), (a^{\exp_a(g)},\ a^{\exp_a(g)},\ g) \mid g \in G\rangle\end{aligned} \tag{1}$$

Прокомментируем последний переход:

$$G \geq \langle a^nB \mid n \in \mathbb{Z}\rangle \geq \langle a^1 \cdot 1,\ a^0b\rangle = \langle a,\ b\rangle = G$$

Поскольку $\mathrm{P}_{2^\infty} \leq \mathrm{St}_G(2^1)$, то

$$\psi(\mathrm{P}_{2^\infty}) \leq \langle (B \times B \times 1), (a^{\exp_a g}, a^{\exp_a g}, g) | g \in G\rangle$$

На поддеревьях 0 и 1 P_{2^∞} может действовать как B, т.к. луч 2^∞ не затрагивается. На поддереве 2 P_{2^∞} может действовать только P_{2^∞}, иначе луч 2^∞ не перейдет в себя.

Значит $\mathrm{P}_{2\infty}$ имеет следущий вид:

$$\psi(\mathrm{P}_{2\infty}) = \langle (B \times B \times 1), (a^{\exp_a g}, a^{\exp_a g}, g) | g \in \mathrm{P}_{2\infty} \rangle$$

Тогда

$$\mathrm{P}_{2\infty} = \langle a^b, a^{b^2}, \xi(\mathrm{P}_{2\infty}) \rangle \tag{2}$$

или

$$\mathrm{P}_{2\infty} = \langle \xi^n(a^b),\, \xi^n(a^{b^2}) \mid n \in \mathbb{N} \cup 0 \rangle \tag{3}$$

$\square$

Замечание. Из B достаточно взять a^b, a^{b^2}, так как

$$\psi\left(a^{b^{3n+1}}\right) = \left(1, b^{a^n}, 1\right) =$$

$$= \left(a^{-1}, a^{-1}, (a^{-1})^b\right)^n \cdot (1, b, 1) \cdot \left(a, a, a^b\right)^n =$$

$$= \psi(a^{-1}b^{-3}a)^n \cdot \psi(a^b) \cdot \psi(a^{-1}b^3a)^n =$$

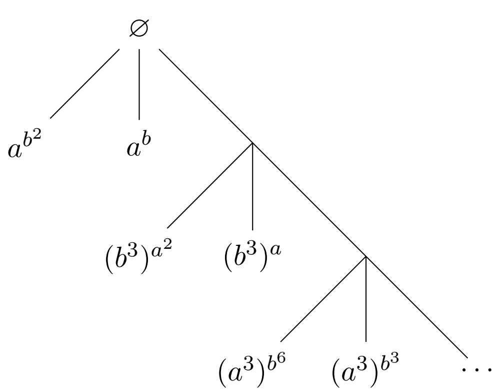
$$= \psi\left((a^b)^{\xi(a^b)^n}\right) = \psi\left((a^b)^{\xi(a^{b^2})^n}\right)$$

Замечание. При сопряжении элемента $g \in \{a^b, a^{b^2}\}$ с $\xi^{2n+1}(h), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $h \in \{a^b, a^{b^2}\}$ мы получаем сопряжение с $b^{3^{n+1}}$, то есть

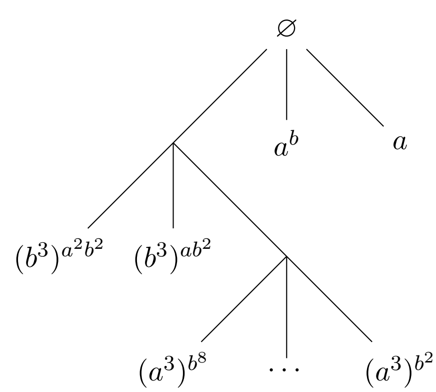
$$g^{\xi^{2n+1}(h)} = g^{b^{3^{(n+1)}}}$$

Замечание. Из того, что $\exp_a \xi^2(B) = 0$ и (1) следует, что $[\xi^m(g), \xi^n(h)] = e$, где $m,\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ |m - n| \equiv 0 \mod 2$ и $g,\, h \in \{a^b, a^{b^2}\}$

Замечание. Из (3) Видно, что стабилизатор луча состоит из элементов, действующих как b на отходящих от луча поддеревьях (на вершинах записаны элементы, которые при сужении на них равны b):



Пример для 2^∞



Пример для $021\ldots$

3.3 Некоторые факты о стабилизаторах

Здесь представлены несколько утверждений о стабилизаторах элементов вида 2^n.

Предложение 1. $\mathrm{St}_G(2^{n+1}) = \langle a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^n))\rangle$

Доказательство. Аналогично доказательству для P_{2^∞}. $\square$

Интересен также следующий факт.

Предложение 2. $\mathrm{St}_G(2^{n+1}) \trianglelefteq \mathrm{St}_G(2^n)$

Доказательство. Пусть $h \in \mathrm{St}_G(2^{n+1})$ и $g \in \mathrm{St}_G(2^n)$, тогда

$$ghg^{-1}(2^{n+1}) = gh(2^n g_{2^n}^{-1}(2)) = g(2^n h_{2^n} g_{2^n}^{-1}(2)) = 2^n g_{2^n} h_{2^n} g_{2^n}^{-1}(2),$$

поскольку $h_{2^n} \in \mathrm{St}_G(2^1) = \mathrm{St}_G(1) \trianglelefteq G$, то $g_{2^n} h_{2^n} g_{2^n}^{-1}(2) = 2$ и $2^n g_{2^n} h_{2^n} g_{2^n}^{-1}(2) = 2^{n+1}$ $\square$

Это, в частности, означает, что $\mathrm{St}_G(2^n)/\,\mathrm{St}_G(2^{n+1})$ — группа и, поскольку мы знаем копредставления обоих членов, то имеет место следующий факт.

Предложение 3. $\mathrm{St}_G(2^n)/\,\mathrm{St}_G(2^{n+1}) = C_3$.

Доказательство. Определим гомоморфизм, индуцируемый ξ, между $\mathrm{St}_G(2^n)/\,\mathrm{St}_G(2^{n+1})$ и $\mathrm{St}_G(2^{n+1})/\,\mathrm{St}_G(2^{n+2})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{St}_G(2^n) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p_1"] & \mathrm{St}_G(2^{n+1}) \arrow[d, "p_2"] \\
\mathrm{St}_G(2^n)/\,\mathrm{St}_G(2^{n+1}) \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, dashed, "\overline{\xi}"] & \mathrm{St}_G(2^{n+1})/\,\mathrm{St}_G(2^{n+2})
\end{tikzcd}$$

Существует единственный гомоморфизм f такой, что $f \circ p_1 = \xi$, поэтому мы можем корректно задать $\overline{\xi} = p_2 \circ f$, тогда $p_2 \circ \xi = p_2 \circ f \circ p_1 = \overline{\xi} \circ p_1$.

Распишем факторгруппу как группу, порожденную $\mathrm{St}_G(2^n)$ и с соотношениями из $\mathrm{St}_G(2^{n+1})$:

$$\frac{\mathrm{St}_G(2^n)}{\mathrm{St}_G(2^{n+1})} = \frac{\langle a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^{n-1}))\rangle}{\langle a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^n))\rangle} = \langle a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^{n-1}))\ |\ a^b,\ a^{b^2},\ \xi(\mathrm{St}_G(2^n))\rangle =$$

$$= \langle \xi(\mathrm{St}_G(2^{n-1}))\ |\ \xi(\mathrm{St}_G(2^n))\rangle = \overline{\xi}(\langle \mathrm{St}_G(2^{n-1})\ |\ \mathrm{St}_G(2^n)\rangle) = \overline{\xi}\left(\frac{\mathrm{St}_G(2^{n-1})}{\mathrm{St}_G(2^n)}\right) = \ldots =$$

$$= \overline{\xi}^{n-1}\left(\frac{\mathrm{St}_G(2^1)}{\mathrm{St}_G(2^2)}\right) = \overline{\xi}^{n-1}\left(\frac{\langle a, a^b, a^{b^2}, b^3\rangle}{\langle a^b, a^{b^2}, b^3, (b^3)^a, (b^3)^{a^2}, a^3\rangle}\right) =$$

$$= \overline{\xi}^{n-1}(\langle a, a^b, a^{b^2}, b^3\ |\ a^b, a^{b^2}, b^3, (b^3)^a, (b^3)^{a^2}, a^3\rangle) = \overline{\xi}^{n-1}(\langle a\ |\ a^3\rangle) = \langle \xi^{n-1}(a)\ |\ \xi^{n-1}(a^3)\rangle =$$

$$= \langle \xi^{n-1}(a)\ |\ \xi^{n-1}(a)^3\rangle = C_3$$

здесь мы воспользовались инъективностью ξ. $\square$

3.4 Сопряжения параболических подгрупп

Обратим внимание, что для $\mathfrak{B}_p$ верно:

$$\psi(g^{b^{np+k}}) = (g|^{a^n}_{\sigma^k(0)}, g|^{a^n}_{\sigma^k(1)}, \dots, g|^{a^n}_{\sigma^k(p-k-1)}, g|^{a^{n+1}}_{\sigma^k(p-k)}, \dots, g|^{a^{n+1}}_{\sigma^k(p-1)}),$$

где

$$g \in \mathfrak{B}_p, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Таким образом из стабилизатора действующего на $\{0, 1, \dots, p-1\}^*$:

$$\psi(\mathrm{P}_{e_1 e_2 \dots}) = (\underbrace{\mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p, \mathrm{P}_{e_2 e_3 \dots}}_{e_1+1}, \mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p)$$

получается при сопряжении с b^k и b^{-k}:

$$\psi(\mathrm{P}^{b^k}_{e_1 e_2 \dots}) = (\underbrace{\mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p, \mathrm{P}_{e_2 e_3 \dots}}_{e_1+1-k}, \mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p, \underbrace{\mathfrak{B}^b_p, \dots, \mathfrak{B}^b_p}_{k}) = \psi(P_{(e_1-k)e_2\dots})$$

$$\psi(\mathrm{P}^{b^{-k}}_{e_1 e_2 \dots}) = (\underbrace{\mathfrak{B}^{b^{-1}}_p, \dots, \mathfrak{B}^{b^{-1}}_p}_{k}, \underbrace{\mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p, \mathrm{P}_{e_2 e_3 \dots}}_{e_1+1}, \mathfrak{B}_p, \dots, \mathfrak{B}_p) = \psi(\mathrm{P}_{(e_1+k)e_2\dots})$$

для $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Если переиначить:

$$\mathrm{P}^{b^k}_{e_1 e_2 \dots} = \mathrm{P}_{\sigma^k(e_1) e_2 \dots}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Для изменения произвольной буквы луча сопряжение производим на необходимом уровне:

$$\mathrm{P}^{t_{e_1}(\dots t_{e_{m-1}}(b^k)\dots)}_{e_1 e_2 \dots e_m \dots} = \mathrm{P}_{e_1 e_2 \dots \sigma^k(e_m)\dots}, \ k \in \mathbb{Z}$$

где $t_x(g)$ – функция, возвращающая элемент G, который в сужении на x равен g.

$$t_x(g)|_x = g$$

И задаётся эта функция следующим образом:

$$t_x(g) = \xi(g)^{b^{p-x-1}}, \ x \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Таким способом параболические подгруппы лучей в одном классе кофинальности можно перевести друг в друга. Другими словами, группа p-Базилики действует на классах кофинальности транзитивно.

3.5 Обобщение на произвольное простое p

В доказательствах мы никак не использовали тот факт, что дерево 3-регулярное, за исключением утверждений о делимости, но в них тоже достаточно заменить 3 на p и результаты останутся верными. Мы взяли случай $p = 3$ в качестве демонстрации и для удобства восприятия. Здесь же приведены утверждения, обобщенные на случай произвольного простого $p \geq 3$.

Пусть G — группа p-Базилики $\mathfrak{B}_p$, где p — простое число больше 2, тогда верны следующие утверждения:

Лемма 4. Стабилизаторы лучей не являются нормальными подгруппами.

Лемма 5. $\mathrm{St}_G((p-1)^1) = \mathrm{St}_G(1) = A\langle b^p \rangle = \langle a, a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{p-1}}, b^3 \rangle$.

Лемма 6. Определим эндоморфизм свободной группы $\xi : a \mapsto b^p$, $b \mapsto a$, тогда справедливы следующие утверждения:

1. $g \to (a^{exp_a(g)},\ a^{exp_a(g)}, \ldots,\ a^{exp_a(g)},\ g),\ \forall g \in \mathrm{St}_G((p-1)^1)$
2. $\xi : \mathrm{St}_G((p-1)^n) \longrightarrow \mathrm{St}_G((p-1)^{n+1})$ — мономорфизм

Теорема 3. $\mathrm{P}_{(p-1)^\infty}$ *имеет следующее копредставление:*

$$\mathrm{P}_{(p-1)^\infty} = \langle \xi^n(a^b), \xi^n(a^{b^2}), \ldots, \xi^n(a^{b^{p-1}}) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle$$

Предложение 4. *Для любого $n \geq 1$ верно, что*

1. $\mathrm{St}_G((p-1)^{n+1}) = \langle a^b,\ a^{b^2}, \ldots,\ a^{b^{p-1}},\ \xi(\mathrm{St}_G((p-1)^n)) \rangle$
2. $\mathrm{St}_G((p-1)^{n+1}) \trianglelefteq \mathrm{St}_G((p-1)^n)$
3. $\mathrm{St}_G((p-1)^n) / \mathrm{St}_G((p-1)^{n+1}) = C_p$

Список литературы

[GŻ02] ROSTISLAV I. GRIGORCHUK и ANDRZEJ ŻUK. «ON A TORSION-FREE WEAKLY BRANCH GROUP DEFINED BY A THREE STATE AUTOMATON». В: *International Journal of Algebra and Computation* 12.01n02 (2002), с. 223—246. DOI: 10.1142/S0218196702001000. eprint: https://doi.org/10.1142/S0218196702001000. URL: https://doi.org/10.1142/S0218196702001000.

[Dom+21] Elena Di Domenico и др. *p-Basilica groups*. 2021. arXiv: 2105.12443 [math.GR].