

Параболические подгруппы группы p -Базилики

Алексей Исковских, Михаил Ураков, Владислав Гребенюк

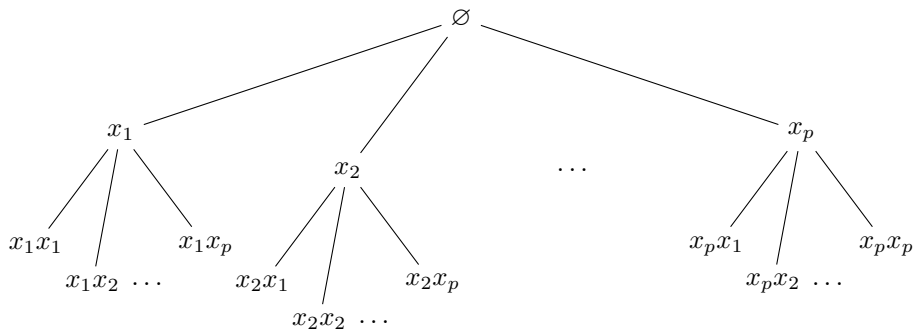
Май 2024

Сириус, IV Майская проектная смена по математике и теоретической информатике

Введение и постановка задачи

Группы, действующие на корневых деревьях

Группы, действующие на деревьях играют важную роль в теории групп: именно среди групп такого типа был обнаружен первый пример группы промежуточного роста.

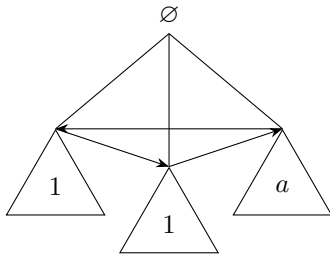
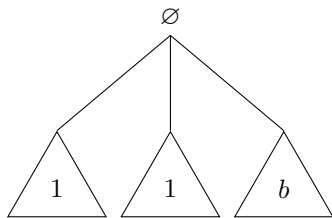


Группа p -Базилики

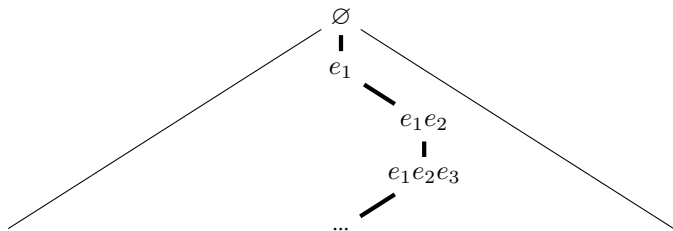
Группа p -Базилики (подробнее в [Dom+21]) — подгруппа группы автоморфизмов p -регулярного дерева на двух образующих:

$$a = (1, 1, \dots b)$$

$$b = \sigma(1, 1, \dots a), \sigma = (1\ 2\ 3 \dots p)$$



Параболические подгруппы



$$P(\mathbf{e}) = \bigcap_{x_i \in x_e} \text{St}(x_i), \quad x_e = \{e_1, e_1e_2, e_1e_2e_3\ldots\}$$

Параболические подгруппы

Предложение из [BG01]

Пусть $G < \text{Aut}(T)$, каждый элемент группы меняет каждый луч в конечном количестве мест и обладает транзитивностью на уровне. Тогда существуют константы λ, μ такие, что $|g_i| \leq \lambda|g| + \mu$ для всех $i \in X$. Тогда асимптотический рост G/P это полином степени $\log_{1/\lambda'}(d)$, где λ' инфимум λ .

Основные результаты

$$P_{2^\infty} = \langle \xi^n(a^b), \xi^n(a^{b^2}) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rangle, \quad \xi: \begin{array}{l} a \mapsto b^3 \\ b \mapsto a \end{array}$$

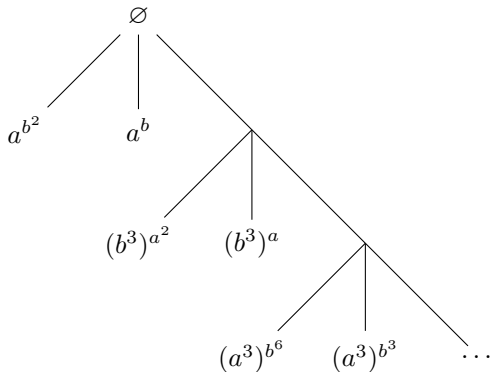


Рис. 1: Представление порождающего множества P_{2^∞}

Обобщение на произвольный луч

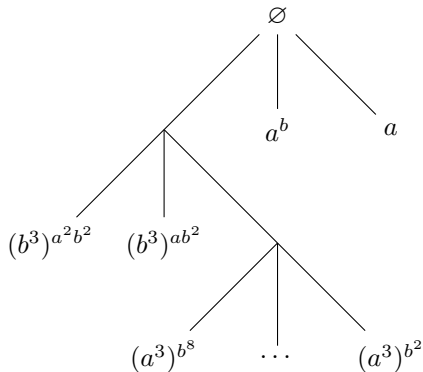


Рис. 2: Представление порождающего множества $P_{021\dots}$

Некоторые факты о стабилизаторах

Предложение

1. $\text{St}_G(2^{n+1}) = \langle a^b, a^{b^2}, \xi(\text{St}_G(2^n)) \rangle$
2. $\text{St}_G(2^{n+1}) \trianglelefteq \text{St}_G(2^n)$
3. $\text{St}_G(2^n) / \text{St}_G(2^{n+1}) = C_3$

Сопряжения параболической подгруппы

Предложение

$$P_{e_1 e_2 \dots e_m \dots}^{t_{e_1} (\dots t_{e_{m-1}} (b^k) \dots)} = P_{e_1 e_2 \dots \sigma^k(e_m) \dots}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

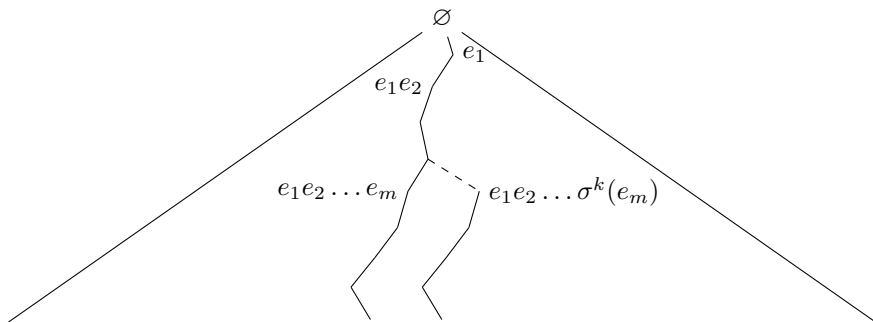


Рис. 3: Сопряжение стабилизаторов луча

Сопряжения параболической подгруппы

$$\psi(g^{b^{np+k}}) = (g|_{\sigma^k(0)}^{a^n}, g|_{\sigma^k(1)}^{a^n}, \dots, g|_{\sigma^k(p-k-1)}^{a^n}, g|_{\sigma^k(p-k)}^{a^{n+1}}, \dots, g|_{\sigma^k(p-1)}^{a^{n+1}}),$$

$$g \in B_p, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\xi: \begin{array}{l} a \mapsto b^p \\ b \mapsto a \end{array}$$

$$t_x(g) = \xi(g)^{b^{p-x-1}}$$

Список литературы

- [BG01] Laurent Bartholdi и Rostislav I. Grigorchuk. *On Parabolic Subgroups and Hecke Algebras of Some Fractal Groups*. 2001. arXiv: [math/9911206 \[math.GR\]](#).
- [Dom+21] Elena Di Domenico и др. *p -Basilica groups*. 2021. arXiv: [2105.12443 \[math.GR\]](#).

Спасибо за внимание!



Рис. 4: Ёж недоволен