

# Contents

## 0.1 Topologie

### 0.1.1 Def: Offene Mengen

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Menge von Teilmengen von  $X$ .  $(X, \mathfrak{T})$  heißt *topologischer Raum*, wenn gilt:

1.  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ .
2. Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und für alle  $i \in I$  gilt:  $T_i \in \mathfrak{T}$ , dann ist auch  $\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathfrak{T}$ .
3. Für endliche Indexmengen  $I$  und  $T_i \in \mathfrak{T}$  gilt  $\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathfrak{T}$ .

### 0.1.2 Offene Mengen

Ist  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum, so nennt man die Elemente von  $\mathfrak{T}$  offene Mengen.

### 0.1.3 Ursprung des Begriffs

Die **Topologie** ( ‚Ort‘, ‚Platz‘ und -logie) ist ein fundamentales [Teilgebiet der Mathematik](#). Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften mathematischer Strukturen, die unter stetigen Verformungen erhalten bleiben, wobei der Begriff der [Stetigkeit](#) durch die Topologie in sehr allgemeiner Form definiert wird. Die Topologie ging aus den Konzepten der [Geometrie](#) und [Mengenlehre](#) hervor.

### 0.1.4 19. Jahrhunderts

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts entstand die Topologie als eine eigenständige Disziplin, die auf lateinisch ‚Geometrie der Lage‘ oder (Griechisch-Latein für ‚Analysieren des Ortes‘) genannt wurde.

### 0.1.5 Heutige Bedeutung

Seit Jahrzehnten ist die Topologie als Grundlagendisziplin anerkannt. Dementsprechend kann sie neben der [Algebra](#) als zweiter Stützpfeiler für eine große Anzahl anderer Felder der Mathematik angesehen werden. Sie ist besonders wichtig für die [Geometrie](#), die [Analysis](#), die [Funktionalanalysis](#) und die Theorie der [Lie-Gruppen](#). Ihrerseits hat sie auch die [Mengenlehre](#) und [Kategorientheorie](#) befruchtet.

### 0.1.6 Beispiel für stetige Deformation

Tasse und Torus sind zueinander homöomorph

Figure 1: Stetige Deformation

### 0.1.7 Homöomorphismus

Ein Homöomorphismus ist eine direkte Abbildung zwischen den Punkten der Tasse und des Torus, die Zwischenstufen im zeitlichen Verlauf dienen nur der Illustration der Stetigkeit dieser Abbildung.

### 0.1.8 Abbildung zwischen topologischen Räumen

Der grundlegende Begriff der Topologie ist der des [topologischen Raums](#), welcher eine weitreichende Abstraktion der Vorstellung von „Nähe“ darstellt und damit weitreichende Verallgemeinerungen mathematischer Konzepte wie [Stetigkeit](#) und [Grenzwert](#) erlaubt.

### 0.1.9 Topologische Eigenschaften

Viele mathematische Strukturen lassen sich als topologische Räume auffassen. *Topologische Eigenschaften* einer Struktur werden solche genannt, die nur von der Struktur des zugrundeliegenden topologischen Raumes abhängen.

### 0.1.10 Nachbarschaftserhaltende Abbildungen

**Homöomorphismen** sind nachbarschaftserhaltende Abbildungen, die durch „Verformungen“ nicht verändert werden. Dazu gehört in anschaulichen Fällen das

- Dehnen, Stauchen,
- Verbiegen, Verzerren und
- Verdrillen einer geometrischen Figur.

### 0.1.11 Beispiele für homöomorphe Objekte

Zum Beispiel sind eine Kugel und ein Würfel aus Sicht der Topologie nicht zu unterscheiden; sie sind homöomorph. Ebenso sind ein Torus und eine einhenkelige **Tasse** homöomorph.

Figure 2: Stetige Deformation

### 0.1.12 Gliederung der Topologie

Die Topologie gliedert sich selbst in mehrere Teilgebiete. Hierzu zählen die **algebraische Topologie**, die **geometrische Topologie** sowie die **topologische Graphen-** und die **Knotentheorie**.

### 0.1.13 Zentrale Probleme

Ein zentrales Problem dieser Disziplinen ist der Versuch, Verfahren zu entwickeln, zu beweisen, dass zwei Räume nicht homöomorph sind, oder allgemeiner, dass stetige Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften nicht existieren. Die **mengentheoretische Topologie** kann hierbei als Grundlage für all diese Teildisziplinen angesehen werden. In dieser werden insbesondere auch topologische Räume betrachtet, deren Eigenschaften sich im Allgemeinen besonders weit von denen geometrischer Figuren unterscheiden.

## 0.2 Geschichte

### 0.2.1 Entstehung des Beriffs

Der Begriff „Topologie“ findet sich erstmals um 1840 bei [Johann Benedict Listing](#); die ältere Bezeichnung (etwa ‚Lageuntersuchung‘) blieb aber lange üblich, mit einem Bedeutungsschwerpunkt jenseits der neueren, „mengentheoretischen“ Topologie.

### 0.2.2 Königsberger Brückenproblem

Die Lösung des [Sieben-Brücken-Problems von Königsberg](#) durch [Leonhard Euler](#) im Jahr 1736 gilt als die erste topologische und zugleich als die erste [graphentheoretische](#) Arbeit in der Geschichte der Mathematik.<sup>12</sup>

### 0.2.3 Zusammenhang: Ecken, Kanten, Flächen

Ein anderer Beitrag Eulers zur sogenannten *Analysis situs* ist der nach ihm benannte [Polyedersatz](#) von 1750. Bezeichnet man mit  $e$  die Anzahl der Ecken, mit  $k$  die der Kanten und mit  $f$  die der [Flächen](#) eines [Polyeders](#) (der noch zu präzisierenden Bedingungen genügt), so gilt  $e - k + f = 2$ . Erst im Jahr 1860 wurde durch eine von [Gottfried Wilhelm Leibniz](#) angefertigte Abschrift eines verlorenen Manuskriptes von [René Descartes](#) bekannt, dass dieser die Formel bereits gekannt hatte.<sup>3</sup>

### 0.2.4 Metrische Räume als Spezialfall

[Maurice Fréchet](#) führte 1906 den [metrischen Raum](#) ein.<sup>4</sup> [Georg Cantor](#) befasste sich mit den Eigenschaften offener und abgeschlossener Intervalle, untersuchte Grenzprozesse, und begründete dabei zugleich die moderne Topologie und

---

<sup>1</sup><sup>2</sup>

<sup>3</sup>Christoph J. Scriba, Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen (Vom Zählstein zum Computer)*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67924-3, S. 451.

<sup>4</sup>

die [Mengentheorie](#).<sup>5</sup> Die Topologie ist der erste Zweig der Mathematik, der konsequent mengentheoretisch formuliert wurde – und gab dabei umgekehrt Anstöße zur Ausformung der Mengentheorie.

## 0.2.5 Geschichte der Definition

### 0.2.5.1 1914

Eine Definition des *topologischen Raumes* wurde als erstes von [Felix Hausdorff](#)<sup>6</sup> im Jahre 1914 aufgestellt. Nach heutigem Sprachgebrauch definierte er dort eine offene [Umgebungsbasis](#), nicht jedoch eine Topologie.

### 0.2.5.2 1924

Der Begriff der Topologie wurde erst durch [Kazimierz Kuratowski](#)<sup>7</sup> beziehungsweise [Heinrich Tietze](#)<sup>8</sup> um 1922 eingeführt wurde. In dieser Form wurden die Axiome dann durch die Lehrbücher von [Kuratowski](#) (1933), [Alexandroff/Hopf](#) (1935), [Bourbaki](#) (1940) und [Kelley](#) (1955) popularisiert.<sup>9</sup>

## 0.2.6 Bezüge zu anderen Disziplinen

Es stellte sich heraus, dass sich viele mathematische Erkenntnisse auf diese Begriffsbasis übertragen ließen. Es wurde beispielsweise erkannt, dass zu einer festen Grundmenge unterschiedliche Metriken existieren, die zur gleichen topologischen Struktur auf dieser Menge führten, aber auch, dass verschiedene Topologien auf der gleichen Grundmenge möglich sind.

## 0.2.7 Mengentheoretische Topologie

Die mengentheoretische Topologie entwickelte sich auf dieser Grundlage zu einem eigenständigen Forschungsgebiet, das sich in gewisser Weise aus der

---

<sup>5</sup>

<sup>6</sup>Felix Hausdorff: [Grundzüge der Mengenlehre](#), 1914, S 213

<sup>7</sup>*Fund. Math.*, **3**, 1922

<sup>8</sup>Math. Ann. 88, 1923

<sup>9</sup>Epplé et al., Hausdorff GW II, 2002

[Geometrie](#) ausgegliedert hat, beziehungsweise der [Analysis](#) näher steht als der eigentlichen Geometrie.<sup>10</sup>

### 0.2.8 Ziel der Topologie

Ein Ziel der Topologie ist die Entwicklung von [Invarianten](#) von topologischen Räumen. Mit diesen Invarianten können topologische Räume unterschieden werden.

## 0.3 Grundbegriffe

### 0.3.1 Topologischer Raum

Die Topologie befasst sich mit Eigenschaften [topologischer Räume](#). Ein topologischer Raum ist zunächst einmal eine Menge von *Punkten*.

### 0.3.2 Struktur durch abgeschlossene Mengen

Die Struktur des Raumes bestimmt sich dann dadurch, dass bestimmte Teilmengen von Punkten als *abgeschlossen* ausgezeichnet werden. [Abgeschlossene Mengen](#) lassen sich als Mengen von Punkten vorstellen, die ihren Rand enthalten, oder anders ausgedrückt: Wann immer es Punkte der abgeschlossenen Menge gibt, die beliebig nah an einen anderen Punkt heranreichen (einen [Berührungspunkt](#)), ist auch dieser Punkt in der abgeschlossenen Menge enthalten.

### 0.3.3 Grundlegende Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Man überlegt sich, welche grundlegenden Eigenschaften im Begriff der abgeschlossenen Menge enthalten sein sollten und nennt dann, von spezifischen Definitionen der Abgeschlossenheit, etwa aus der [Analysis](#), abstrahierend, jede mit diesen Bedingungen genügenden abgeschlossenen Teilmengen versehene Menge einen topologischen Raum.

---

<sup>10</sup>Christoph J. Scriba, Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen (Vom Zählstein zum Computer)*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67924-3, S. 515.

### 0.3.4 Leere Menge: abgeschlossen

Zunächst einmal sollte die leere Menge abgeschlossen sein, denn sie enthält keinerlei Punkte, die andere *berühren* könnten. Daraus ergibt sich, dass das Komplement von  $\emptyset$  (also  $X$ ) offen sein muss.

### 0.3.5 Gesamte Grundmenge: abgeschlossen

Ebenso sollte die Menge aller Punkte abgeschlossen sein, denn sie enthält bereits alle möglichen Berührungspunkte. Ist eine beliebige Menge von abgeschlossenen Mengen gegeben, so soll der Schnitt, das heißt die Menge der Punkte, die in allen diesen Mengen enthalten sind, ebenfalls abgeschlossen sein, denn hätte der Schnitt Berührungspunkte, die außerhalb seiner liegen, so müsste bereits eine der zu schneidenden Mengen diesen Berührungspunkt nicht enthalten, und könnte nicht abgeschlossen sein.

### 0.3.6 Vereinigung abgeschlossener Mengen

Zudem soll die Vereinigung zweier (oder endlich vieler) abgeschlossener Mengen wiederum abgeschlossen sein; bei der Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen kommen also keine Berührungspunkte hinzu. Von der Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen dagegen fordert man keine Abgeschlossenheit, denn diese könnten sich einem weiteren Punkte „immer weiter nähern“ und somit berühren.

### 0.3.7 Beliebiger Schnitt abgeschlossener Mengen

Ein beliebiger Schnitt abgeschlossener Menge sollte auch wieder abgeschlossen sein.

### 0.3.8 Definition über abgeschlossene Mengen

In Analogie zur Definition der Topologie über offene Mengen, kann man einen topologischen Raum auch über die abgeschlossenen Mengen definieren.

### 0.3.9 Definition Topologie über abgeschlossene Mengen

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge von Punkten  $X$  versehen mit einer Menge  $\mathfrak{S} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$  (den abgeschlossenen Mengen;  $\mathcal{P}(X)$  ist die [Potenzmenge](#) von  $X$ ), die folgenden Bedingungen genügt:

1.  $X \in \mathfrak{S}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{S}$ .
2. Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und für alle  $i \in I$  gilt  $S_i \in \mathfrak{S}$ , so ist auch  $\bigcap_{i \in I} S_i \in \mathfrak{S}$ .
3. Für endliche Indexmengen  $I$  und  $S_i \in \mathfrak{S}$  ist auch  $\bigcup_{i \in I} S_i \in \mathfrak{S}$ .

### 0.3.10 Topologie als System offener Mengen

**Definition Topologie** (*über offene Mengen*): Ein *topologischer Raum* ist eine Menge von Punkten  $X$  versehen mit einer Menge von Teilmengen  $\mathfrak{T} \subset \mathcal{P}(X)$  (den offenen Mengen), die folgenden Bedingungen genügt:

1.  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ .
2. Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und für alle  $i \in I$  gilt:  $T_i \in \mathfrak{T}$ , dann ist auch  $\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathfrak{T}$ .
3. Für endliche Indexmengen  $I$  und  $T_i \in \mathfrak{T}$  gilt auch  $\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathfrak{T}$ .

Die Menge  $\mathfrak{T}$  der offenen Mengen wird auch als *Topologie* bezeichnet.

### 0.3.11 Äquivalenz der Definition

Die Äquivalenz zur vorherigen Definition über abgeschlossene Mengen folgt unmittelbar aus den [De Morgan'schen Gesetzen](#). Ausgehend von abgeschlossenen beziehungsweise offenen Mengen lassen sich zahlreiche topologische Begriffe definieren, etwa die der [Umgebung](#), des Berührungspunktes (welche zuvor angesprochen wurden), der [Stetigkeit](#) und der [Konvergenz](#).



### 0.3.12 Weitere Definitionen

### 0.3.13 Homöomorphismus

Ein *Homöomorphismus* ist eine [bijektive Abbildung](#) zwischen zwei topologischen Räumen, sodass durch punktweise Überführung der offenen Mengen auch eine Bijektion zwischen den Topologien der beiden Räume zustande kommt, dabei muss jede offene Menge auf eine offene Menge abgebildet werden. Zwei topologische Räume, zwischen denen es einen Homöomorphismus gibt, werden als *homöomorph* bezeichnet. Homöomorphe Räume unterscheiden sich nicht bezüglich aller topologischen Eigenschaften im engeren Sinne. Die Homöomorphismen können als die [Isomorphismen](#) in der [Kategorie](#) der topologischen Räume aufgefasst werden.

### 0.3.14 Nicht auf topologische Räume bezogene Begriffe

Topologische Räume können mit Zusatzstrukturen ausgestattet werden, beispielsweise untersucht man [uniforme Räume](#), [metrische Räume](#), [topologische Gruppen](#) oder [topologische Algebren](#). Eigenschaften, die auf solche Zusatzstrukturen zurückgreifen, sind nicht mehr unbedingt unter Homöomorphismen erhalten, jedoch auch teils Untersuchungsgegenstand verschiedener Teilgebiete der Topologie.

### 0.3.15 Verallgemeinerungen Topologischer Raum

Es existieren auch Verallgemeinerungen des Konzepts des topologischen Raums: In der [punktfreien Topologie](#) betrachtet man an Stelle einer Menge von Punkten mit als offen ausgezeichneten Mengen nur noch die Struktur der offenen Mengen als [Verband](#). [Konvergenzstrukturen](#) definieren, gegen welche Werte jeder [Filter](#) auf einer zugrundeliegenden Menge von Punkten konvergiert. Unter dem Schlagwort *Convenient Topology* wird versucht, Klassen von den topologischen oder uniformen Räumen ähnlichen Räumen zu finden, die aber „angenehmere“ [kategorientheoretische](#) Eigenschaften aufweisen.

## 0.4 Teilgebiete der Topologie

### 0.4.1 Topologie Differentialgeometrie

Die moderne Topologie wird grob in die drei Teilgebiete mengentheoretische Topologie, algebraische Topologie und geometrische Topologie unterteilt. Außerdem gibt es noch die [Differentialtopologie](#). Dies ist die Grundlage der modernen [Differentialgeometrie](#) und wird trotz der umfangreich verwendeten topologischen Methoden meist als Teilgebiet der Differentialgeometrie betrachtet.

### 0.4.2 Mengentheoretische oder Allgemeine Topologie

Die mengentheoretische Topologie umfasst, wie auch die anderen Teilgebiete der Topologie, das Studium topologischer Räume und der stetigen Abbildungen zwischen ihnen.

### 0.4.3 Topologie und Stetigkeit

Insbesondere die für die [Analysis](#) fundamentalen Konzepte der [Stetigkeit](#) und der [Konvergenz](#) werden erst in der Terminologie der mengentheoretischen Topologie vollständig transparent. Aber auch in vielen anderen mathematischen Teilgebieten werden die Konzepte der mengentheoretischen Topologie eingesetzt. Außerdem gibt es viele [mathematische Aussagen](#), die nur in der Terminologie der mengentheoretischen Topologie ihre natürliche und allgemeinste Formulierung haben.

### 0.4.4 Kompaktheit

Beispielsweise ist die [Kompaktheit eines Raums](#) eine Abstraktion des [Heine–Borel-Prinzips](#). In der allgemeinen Terminologie der mengentheoretischen Topologie gilt, dass das Produkt zweier kompakter Räume wieder kompakt ist, was die Aussage verallgemeinert, dass ein [abgeschlossener](#) endlichdimensionaler Würfel kompakt ist.

#### 0.4.5 Kompaktheit und Extermstellen

Außerdem gilt, dass eine stetige Funktion von einer kompakten Menge in die reellen Zahlen beschränkt ist und ihr Maximum und Minimum annimmt. Dies ist eine Verallgemeinerung des [Satzes vom Minimum und Maximum](#).<sup>11</sup>

#### 0.4.6 Trennungseigenschaften

Im Allgemeinen können topologische Räume viele etwa von der Topologie der reellen Zahlen vertraute Eigenschaften verletzen, die jedoch in üblichen Räumen häufig anzutreffen sind. Daher betrachtet man oftmals topologische Räume, die gewissen [Trennungseigenschaften](#) genügen, welche minimale Anforderungen für viele weitergehende Sätze darstellen und tiefergehende Charakterisierungen der Struktur der Räume ermöglichen. Die Kompaktheit ist ein anderes Beispiel für solche „vorteilhaften“ Eigenschaften.

#### 0.4.7 Uniforme Räume, Metrik, Vollständigkeit

Zudem betrachtet man auch Räume, auf denen gewisse zusätzliche Strukturen definiert sind, etwa [uniforme Räume](#) oder gar [topologische Gruppen](#) und [metrische Räume](#), welche durch ihre Struktur zusätzliche Begrifflichkeiten wie die der [Vollständigkeit](#) ermöglichen.

Ein anderer zentraler Begriff dieses Teilgebiets sind unterschiedliche Konzepte von [Zusammenhang](#).

#### 0.4.8 Algebraische Topologie

Die algebraische Topologie (auch „*kombinatorische Topologie*“, vor allem in älteren Publikationen) untersucht Fragestellungen zu topologischen Räumen, indem die Probleme auf Fragestellungen in der [Algebra](#) zurückgeführt werden. Innerhalb der Algebra sind diese Fragen oftmals leichter zu beantworten. Ein zentrales Problem innerhalb der Topologie ist beispielsweise die Untersuchung topologischer Räume auf [Invarianten](#). Mittels der Theorie über [Homologien](#) und [Kohomologien](#) sucht man in der algebraischen Topologie nach solchen Invarianten.

---

11

### 0.4.9 Geometrische Topologie

Die geometrische Topologie befasst sich mit zwei-, drei- und vierdimensionalen [Mannigfaltigkeiten](#). Der Begriff zweidimensionale Mannigfaltigkeit bedeutet das gleiche wie [Fläche](#) und drei- und vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten sind entsprechende Verallgemeinerungen. Im Bereich der geometrischen Topologie interessiert man sich dafür, wie sich Mannigfaltigkeiten unter stetigen Transformationen verhalten.

### 0.4.10 Winkel, Löcher, Flächen, Knoten

Typische geometrische Größen wie Winkel, Länge und [Krümmung](#) variieren unter stetigen Abbildungen. Eine geometrische Quantität, die nicht variiert und für die man sich daher interessiert, ist die [Anzahl der Löcher](#) einer Fläche.<sup>12</sup> Da man sich fast nur mit Mannigfaltigkeiten der Dimension kleiner als fünf beschäftigt, nennt man dieses Teilgebiet der Topologie auch niedrigdimensionale Topologie. Außerdem gehört die [Knotentheorie](#) als Teilaspekt der Theorie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten zur geometrischen Topologie.<sup>13</sup>

## 0.5 Anwendungen

### 0.5.1 Allgemein

Da das Gebiet der Topologie sehr weit gefächert ist, findet man Aspekte von ihr in fast jedem Teilgebiet der Mathematik. Das Studium der jeweiligen Topologie bildet daher oft einen integralen Bestandteil einer tieferen Theorie. Topologische Methoden und Konzepte sind somit aus weiten Teilen der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Es seien hier nun einige Beispiele angegeben:

- Differentialgeometrie
- Mannigfaltigkeiten”

---

<sup>12</sup>

<sup>13</sup>

### 0.5.2 Differentialgeometrie

In der [Differentialgeometrie](#) spielt das Studium von [Mannigfaltigkeiten](#) eine zentrale Rolle. Bei diesen handelt es sich um spezielle [topologische Räume](#), d. h. Mengen, die eine gewisse topologische Struktur aufweisen. Oft werden sie auch topologische Mannigfaltigkeiten genannt. Grundlegende Eigenschaften werden dann mithilfe topologischer Mittel bewiesen, bevor sie mit weiteren Strukturen versehen werden und dann eigenständige (und nicht äquivalente) Unterklassen bilden (z. B. [differenzierbare Mannigfaltigkeiten](#), PL-Mannigfaltigkeiten etc.).

### 0.5.3 Beispiel Klassifikation von Flächen

*Beispielhaftes verwendetes Ergebnis der geometrischen Topologie: Klassifikation von Flächen*

Geschlossene Flächen sind spezielle Arten von 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Mithilfe der algebraischen Topologie lässt sich zeigen, dass jede Fläche aus endlich vielen eingebetteten [2-Polytopen](#) besteht, die miteinander entlang ihrer Kanten verklebt sind. Dies erlaubt insbesondere eine [Klassifizierung aller geschlossener Flächen](#) in 3 Klassen, weswegen man stets annehmen kann, dass die geschlossene Fläche in einer „Normalform“ vorliegt.

### 0.5.4 Funktionalanalysis

Die [Funktionalanalysis](#) entstand aus dem Studium von [Funktionsräumen](#), welche zunächst Abstraktionen als [Banach-](#) und [Hilberträume](#) erfuhren.

### 0.5.5 Topologischer Vektorraum

Heute befasst sich die Funktionalanalysis auch allgemeiner mit unendlichdimensionalen [topologischen Vektorräumen](#). Dies sind Vektorräume versehen mit einer Topologie, sodass die grundlegenden algebraischen Operationen des Vektorraums stetig („kompatibel“ mit der Topologie) sind. Viele in der Funktionalanalysis untersuchte Konzepte lassen sich allein auf die Struktur topologischer Vektorräume zurückführen, als welche sich insbesondere Hilbert- und Banachräume auffassen lassen, sodass sie als zentraler Untersuchungsgegenstand der Funktionalanalysis angesehen werden können.

### 0.5.6 Deskriptive Mengenlehre

Die [deskriptive Mengenlehre](#) befasst sich mit gewissen „konstruierbaren“ sowie „wohlgeformten“ Teilmengen [polnischer Räume](#). Polnische Räume sind spezielle topologische Räume (ohne weitere Struktur) und viele untersuchte zentrale Konzepte sind rein topologischer Natur. Diese topologischen Begriffe stehen in Zusammenhang mit Konzepten der „[Definierbarkeit](#)“ und „[Berechenbarkeit](#)“ aus der [mathematischen Logik](#), über welche sich so mit topologischen Methoden Aussagen machen lassen.

### 0.5.7 Harmonische Analysis

Zentraler Untersuchungsgegenstand der [harmonischen Analysis](#) sind [lokal kompakte Gruppen](#), das sind [Gruppen](#) versehen mit einer kompatiblen [lokal kompakten](#) topologischen Struktur. Diese stellen eine Verallgemeinerung der [Lie-Gruppen](#) und somit von Vorstellungen „kontinuierlicher Symmetrien“ dar.

## 0.6 Literatur

### 0.6.1 Zur Geschichte

- 
- [Marie-Luise Heuser](#): "Die Anfänge der

Topologie in Mathematik und Naturphilosophie." In: Stephan Günzel (Hrsg.): *Topologie: Zur Raumbeschreibung in den Kultur- und Medienwissenschaften*. Transcript, Bielefeld 2007, S. 183–202.

### 0.6.2 Lehrbücher

- 
- 
-

- 
- 
- \*
- 
- \*
- 

## 0.7 Weblinks

- [<http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/gebiete/topologie/>

topologie.html Artikel zur Topologie] auf mathematik.de \* In: *The Mathematical Atlas*.

- [<http://at.yorku.ca/topology/> "Topology

Atlas"] \* \* [<http://www.topologywithouttears.net/> *Topology without tears*] von Sidney A. Morris: Buch zur Topologie zum kostenfreien Download (PDF, englisch)

- [<http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Deutsch/>

das\_topologikon.htm Comic zur Topologie zum kostenfreien Download (PDF, deutsch)]

## 0.8 Quelle

Modifizierter Artikel aus Wikipedia aus der als [Teilgebiet der Mathematik](#)