

# Programação Funcional em Haskell

---

**José Romildo Malaquias**

**BCC222: Programação Funcional**

**Universidade Federal de Ouro Preto**  
**Departamento de Computação**

6 de dezembro de 2023

<b>1</b>	<b>Paradigmas de Programação</b>	<b>1-1</b>
1.1	Paradigmas de programação . . . . .	1-1
1.2	Técnicas e paradigmas de programação . . . . .	1-2
1.3	Categorias: programação imperativa e declarativa . . . . .	1-2
1.3.1	Programação imperativa . . . . .	1-2
1.3.2	Programação declarativa . . . . .	1-2
1.4	Programação funcional . . . . .	1-3
1.4.1	Exemplo: quick sort em C . . . . .	1-3
1.4.2	Exemplo: quick sort em Haskell . . . . .	1-3
1.5	A Crise do Software . . . . .	1-4
1.6	Algumas características de Haskell . . . . .	1-4
1.7	Antecedentes históricos . . . . .	1-4
1.8	Algumas empresas que usam Haskell . . . . .	1-7
1.9	Curso online de Haskell . . . . .	1-7
<b>2</b>	<b>Ambiente de Desenvolvimento Haskell</b>	<b>2-1</b>
2.1	Haskell . . . . .	2-1
2.2	Instalação do ambiente de desenvolvimento . . . . .	2-1
2.2.1	Instalação das ferramentas de desenvolvimento em Haskell . . . . .	2-2
2.3	O ambiente interativo GHCi . . . . .	2-2
2.4	Bibliotecas . . . . .	2-5
<b>3</b>	<b>Expressões e Definições</b>	<b>3-1</b>
3.1	Constantes . . . . .	3-1
3.2	Aplicação de função . . . . .	3-2
3.3	Nomeando valores . . . . .	3-6
3.4	Avaliando expressões . . . . .	3-7
3.5	Definindo variáveis e funções . . . . .	3-8
3.6	Comentários . . . . .	3-9
3.7	Definições locais em equações . . . . .	3-10
3.8	Regra de <i>layout</i> . . . . .	3-11
3.9	Comandos úteis do GHCi . . . . .	3-12
3.10	Exercícios . . . . .	3-12
3.11	Soluções . . . . .	3-15
<b>4</b>	<b>Tipos de Dados</b>	<b>4-1</b>
4.1	Tipos . . . . .	4-1
4.2	Alguns tipos básicos . . . . .	4-1
4.3	Tipos função . . . . .	4-3
4.4	Checagem de tipos . . . . .	4-3
4.5	Assinatura de tipo em definições . . . . .	4-4
4.6	Consulta do tipo de uma expressão no GHCi . . . . .	4-4
4.7	Exercícios . . . . .	4-5
4.8	Soluções . . . . .	4-6

<b>5</b>	<b>Estruturas de dados básicas</b>	<b>5-1</b>
5.1	Tuplas . . . . .	5-1
5.2	Listas . . . . .	5-2
5.2.1	Progressão aritmética . . . . .	5-4
5.3	Strings . . . . .	5-5
5.4	Valores opcionais . . . . .	5-5
5.5	Exercícios . . . . .	5-6
5.6	Soluções . . . . .	5-7
<b>6</b>	<b>Polimorfismo Paramétrico</b>	<b>6-1</b>
6.1	Operação sobre vários tipos de dados . . . . .	6-1
6.2	Variáveis de tipo . . . . .	6-1
6.3	Valor polimórfico . . . . .	6-2
6.4	Instanciação de variáveis de tipo . . . . .	6-2
6.5	Algumas funções polimórficas predefinidas . . . . .	6-2
6.6	Exercícios . . . . .	6-3
6.7	Soluções . . . . .	6-4
<b>7</b>	<b>Sobrecarga</b>	<b>7-1</b>
7.1	Sobrecarga . . . . .	7-1
7.2	Algumas classes de tipo pré-definidas . . . . .	7-2
7.2.1	Eq . . . . .	7-2
7.2.2	Ord . . . . .	7-3
7.2.3	Enum . . . . .	7-3
7.2.4	Bounded . . . . .	7-3
7.2.5	Show . . . . .	7-4
7.2.6	Read . . . . .	7-4
7.2.7	Num . . . . .	7-4
7.2.8	Real . . . . .	7-5
7.2.9	Integral . . . . .	7-5
7.2.10	Fractional . . . . .	7-5
7.2.11	Floating . . . . .	7-6
7.2.12	RealFrac . . . . .	7-6
7.2.13	RealFloat . . . . .	7-7
7.3	Sobrecarga de literais . . . . .	7-7
7.4	Conversão entre tipos numéricos . . . . .	7-8
7.5	Inferência de tipos . . . . .	7-8
7.6	Dicas e Sugestões . . . . .	7-9
7.7	Exercícios . . . . .	7-9
7.8	Soluções . . . . .	7-11
<b>8</b>	<b>Expressão Condicional</b>	<b>8-1</b>
8.1	Expressão condicional . . . . .	8-1
8.2	Definição de função com expressão condicional . . . . .	8-2
8.3	Equações com guardas . . . . .	8-3
8.4	Definições locais e guardas . . . . .	8-5
8.5	Exercícios . . . . .	8-7
8.6	Soluções . . . . .	8-9

<b>9</b>	<b>Programas Interativos</b>	<b>9-1</b>
9.1	Interação com o <i>mundo</i>	9-1
9.1.1	Programas interativos	9-1
9.1.2	Linguagens puras	9-2
9.1.3	O mundo	9-2
9.1.4	Modificando o mundo	9-3
9.1.5	Ações de entrada e saída	9-3
9.2	O tipo <code>unit</code>	9-3
9.3	Ações de saída padrão	9-3
9.4	Ações de entrada padrão	9-4
9.5	Programa em Haskell	9-5
9.6	Combinando ações de entrada e saída	9-6
9.7	Exemplos de programas interativos	9-7
9.8	Saída bufferizada	9-9
9.9	Mais exemplos de programas interativos	9-11
9.10	Exercícios	9-12
9.11	Soluções	9-18
<b>10</b>	<b>Funções Recursivas</b>	<b>10-1</b>
10.1	Recursividade	10-1
10.2	Recursividade mútua	10-5
10.3	Recursividade de cauda	10-6
10.4	Vantagens da recursividade	10-9
10.5	Exercícios	10-9
10.6	Soluções	10-11
<b>11</b>	<b>Ações de E/S Recursivas</b>	<b>11-1</b>
11.1	A função <code>return</code>	11-1
11.2	Exemplo: exibir uma sequência	11-1
11.3	Exemplo: somar uma sequência	11-2
11.4	Problemas	11-3
11.5	Soluções	11-6
<b>12</b>	<b>Casamento de Padrão</b>	<b>12-1</b>
12.1	Casamento de padrão	12-1
12.1.1	Casamento de padrão	12-1
12.1.2	Padrão constante	12-2
12.1.3	Padrão variável	12-2
12.1.4	Padrão curinga	12-2
12.1.5	Padrão tupla	12-3
12.1.6	Padrões lista	12-3
12.1.7	Padrão lista na notação especial	12-4
12.2	Definição de função usando padrões	12-5
12.2.1	Definindo funções com casamento de padrão	12-5
12.3	Casamento de padrão em definições	12-9
12.4	Problema: validação de números de cartão de crédito	12-10
12.5	Problema: torres de Hanoi	12-12
12.6	Soluções	12-14

<b>13</b>	<b>Expressão de Seleção Múltipla</b>	<b>13-1</b>
13.1	Expressão <b>case</b>	13-1
13.2	Forma e regras de tipo da expressão <b>case</b>	13-1
13.3	Regra de <i>layout</i> para a expressão <b>case</b>	13-2
13.4	Avaliação de expressões <b>case</b>	13-2
13.5	Exemplos de expressões <b>case</b>	13-3
13.6	Expressão <b>case</b> com guardas	13-5
13.7	Soluções	13-7
<b>14</b>	<b>Valores Aleatórios</b>	<b>14-1</b>
14.1	Instalação do pacote <b>random</b>	14-1
14.2	Valores aleatórios	14-1
14.3	Jogo: adivinha o número	14-2
14.4	Soluções	14-9
<b>15</b>	<b>Expressão Lambda</b>	<b>15-1</b>
15.1	Valores de primeira classe	15-2
15.1.1	Valores de primeira classe	15-2
15.1.2	Valores de primeira classe: Literais	15-2
15.1.3	Valores de primeira classe: Variáveis	15-2
15.1.4	Valores de primeira classe: Argumentos	15-3
15.1.5	Valores de primeira classe: Resultado	15-3
15.1.6	Valores de primeira classe: Componentes	15-3
15.2	Expressão <b>lambda</b>	15-3
15.2.1	Expressões <b>lambda</b>	15-3
15.2.2	Exemplos de expressões <b>lambda</b>	15-4
15.2.3	Uso de expressões <b>lambda</b>	15-4
15.2.4	Exercícios	15-5
15.3	Aplicação parcial de funções	15-6
15.3.1	Aplicação parcial de funções	15-6
15.3.2	Aplicação parcial de funções: exemplos	15-6
15.4	<i>Currying</i>	15-8
15.4.1	Funções <i>curried</i>	15-8
15.4.2	Por que <i>currying</i> é útil?	15-8
15.4.3	Convenções sobre <i>currying</i>	15-8
15.5	Seções de operadores	15-9
15.5.1	Operadores	15-9
15.5.2	Seções de operadores	15-10
15.6	Utilidade de expressões <b>lambda</b>	15-11
15.6.1	Por que seções são úteis?	15-11
15.6.2	Utilidade de expressões <b>lambda</b>	15-12
15.6.3	Exercícios	15-14
15.7	Soluções	15-15
<b>16</b>	<b>Funções de Ordem Superior</b>	<b>16-1</b>
16.1	Funções de Ordem Superior	16-1
16.2	Um operador para aplicação de função	16-1
16.3	Composição de funções	16-2
16.4	A função <b>filter</b>	16-3
16.5	A função <b>map</b>	16-3
16.6	A função <b>zipWith</b>	16-4
16.7	As funções <b>foldl</b> e <b>foldr</b> , <b>foldl1</b> e <b>foldr1</b>	16-4

16.7.1	<code>foldl</code>	16-4
16.7.2	<code>foldr</code>	16-5
16.7.3	<code>foldl1</code>	16-5
16.7.4	<code>foldr1</code>	16-6
16.8	<i>List comprehension</i>	16-6
16.8.1	<i>List comprehension</i>	16-6
16.8.2	<i>List comprehension</i> e funções de ordem superior	16-7
16.9	Cupom fiscal do supermercado	16-8
16.10	Soluções	16-13
<b>17</b>	<b>Argumentos da Linha de Comando e Arquivos</b>	<b>17-1</b>
17.1	Argumentos da linha de comando	17-1
17.2	Encerrando o programa explicitamente	17-2
17.3	Formatando dados com a função <code>printf</code>	17-4
17.4	Arquivos	17-5
17.5	As funções <code>lines</code> e <code>unlines</code> , e <code>words</code> e <code>unwords</code>	17-6
17.6	Exemplo: processar notas em arquivo	17-7
17.7	Problemas	17-8
17.8	Soluções	17-11
<b>18</b>	<b>Tipos Algébricos</b>	<b>18-1</b>
18.1	Novos tipos de dados	18-1
18.2	Tipos algébricos	18-2
18.3	Exemplo: formas geométricas	18-2
18.4	Exemplo: sentido de movimento	18-3
18.5	Exemplo: cor	18-5
18.6	Exemplo: coordenadas cartesianas	18-5
18.7	Exemplo: horário	18-5
18.8	Exemplo: booleanos	18-6
18.9	Exemplo: listas	18-6
18.10	Exercícios básicos	18-7
18.11	Números naturais	18-8
18.12	Árvores binárias	18-9
18.13	O construtor de tipo <code>Maybe</code>	18-9
18.14	Exercício: lógica proposicional	18-10
18.15	Soluções	18-16
<b>19</b>	<b>Classes de Tipos</b>	<b>19-1</b>
19.1	Polimorfismo <i>ad hoc</i> (sobrecarga)	19-1
19.2	Tipos qualificados	19-2
19.3	Classes e Instâncias	19-2
19.4	Tipo principal	19-3
19.5	Definição padrão	19-3
19.6	Exemplos de instâncias	19-4
19.7	Instâncias com restrições	19-4
19.8	Derivação de instâncias	19-5
19.8.1	Herança	19-5
19.9	Alguma classes do prelúdio	19-5
19.9.1	A classe <code>Show</code>	19-5
19.9.2	A classe <code>Eq</code>	19-6
19.9.3	A classe <code>Ord</code>	19-6
19.9.4	A classe <code>Enum</code>	19-6

19.9.5 A classe Num . . . . .	19-7
19.10 Exercícios . . . . .	19-8
19.11 Soluções . . . . .	19-11

# 1 Paradigmas de Programação

## Resumo

Ao desenvolver uma aplicação o programador segue uma visão de como o programa será executado, norteando a estruturação do seu código. Isto é o que chamamos de **paradigma de programação**.

Existem alguns paradigmas muito usados como a programação procedimental, a programação orientada a objetos, a programação funcional e a programação lógica. Cada um deles tem uma visão diferente da estrutura e execução dos programas.

## Sumário

<b>1.1 Paradigmas de programação</b>	<b>1-1</b>
<b>1.2 Técnicas e paradigmas de programação</b>	<b>1-2</b>
<b>1.3 Categorias: programação imperativa e declarativa</b>	<b>1-2</b>
1.3.1 Programação imperativa	1-2
1.3.2 Programação declarativa	1-2
<b>1.4 Programação funcional</b>	<b>1-3</b>
1.4.1 Exemplo: quick sort em C	1-3
1.4.2 Exemplo: quick sort em Haskell	1-3
<b>1.5 A Crise do Software</b>	<b>1-4</b>
<b>1.6 Algumas características de Haskell</b>	<b>1-4</b>
<b>1.7 Antecedentes históricos</b>	<b>1-4</b>
<b>1.8 Algumas empresas que usam Haskell</b>	<b>1-7</b>
<b>1.9 Curso online de Haskell</b>	<b>1-7</b>

## 1.1 Paradigmas de programação

- Um **paradigma de programação** fornece e determina a visão que o programador possui sobre a estruturação e a execução do programa.
- Por exemplo:
  - Em **programação orientada a objetos**, programadores podem abstrair um programa como uma *coleção de objetos* que interagem entre si.
  - Em **programação lógica** os programadores abstraem o programa como um *conjunto de predicados* que estabelecem relações entre objetos (axiomas), e uma *meta* (teorema) a ser provada usando os predicados.
- Diferentes linguagens de programação propõem diferentes paradigmas de programação.
- Algumas linguagens foram desenvolvidas para suportar um paradigma específico.



- Por exemplo:
  - Smalltalk, Eiffel e Java suportam o paradigma orientado a objetos.
  - Haskell e Clean suportam o paradigma funcional.
  - OCaml, LISP, Scala, Perl, Python e C++ suportam múltiplos paradigmas.

## 1.2 Técnicas e paradigmas de programação

- Geralmente os paradigmas de programação são diferenciados pelas técnicas de programação que **permitem** ou **proíbem**.
- Por exemplo, a **programação estruturada** não permite o uso de *goto*.
- Esse é um dos motivos pelos quais novos paradigmas são considerados mais rígidos que estilos tradicionais.
- Apesar disso, evitar certos tipos de técnicas pode facilitar a prova de correção de um sistema, podendo até mesmo facilitar o desenvolvimento de algoritmos.
- O relacionamento entre paradigmas de programação e linguagens de programação pode ser complexo pelo fato de linguagens de programação poderem suportar mais de um paradigma.

## 1.3 Categorias: programação imperativa e declarativa

### 1.3.1 Programação imperativa

- Descreve a computação como ações, enunciados ou comandos que mudam o **estado** (**variáveis**) de um programa, enfatizando *como* resolver um problema.
- Muito parecidos com o comportamento imperativo das linguagens naturais que expressam ordens, programas imperativos são uma sequência de comandos para o computador executar.
- O nome do paradigma, *imperativo*, está ligado ao tempo verbal imperativo, onde o programador diz ao computador: faça isso, depois isso, depois aquilo...
- Exemplos: paradigmas
  - **procedimental**: C, Pascal, etc, e
  - **orientado a objetos**: Smalltalk, Java, etc

### 1.3.2 Programação declarativa

- Descreve *o que* o programa faz e não *como* seus procedimentos funcionam.
- Ênfase nos *resultados*, no que se deseja obter.
- Exemplos: paradigmas
  - **funcional**: Haskell, OCaml, LISP, etc, e
  - **lógico**: Prolog, etc.

## 1.4 Programação funcional

- **Programação funcional** é um paradigma de programação que descreve uma computação como uma *expressão* a ser avaliada.
- A principal forma de estruturar o programa é pela definição e aplicação de *funções*.

### 1.4.1 Exemplo: quick sort em C

```
// To sort array a[] of size n: qsort(a,0,n-1)

void qsort(int a[], int lo, int hi) {
    int h, l, p, t;

    if (lo < hi) {
        l = lo;
        h = hi;
        p = a[hi];

        do {
            while ((l < h) && (a[l] <= p))
                l = l+1;
            while ((h > l) && (a[h] >= p))
                h = h-1;
            if (l < h) {
                t = a[l];
                a[l] = a[h];
                a[h] = t;
            }
        } while (l < h);

        a[hi] = a[l];
        a[l] = p;

        qsort(a, lo, l-1);
        qsort(a, l+1, hi);
    }
}
```

### 1.4.2 Exemplo: quick sort em Haskell

```
qs []      = []
qs (x:xs) = qs (filter (<x) xs) ++
             [x] ++
             qs (filter (>x) xs)
```

Observações:

- `[]` denota a lista vazia.
- `x:xs` denota uma lista não vazia cuja cabeça é `x` e cuja cauda é `xs`.
- Uma lista pode ser escrita enumerando os seus elementos separados por vírgula e colocados entre colchetes.
- A sintaxe para aplicação de função consiste em escrever a função seguida dos argumentos, separados por espaços, como em `max 10 (2+x)`.
- A função `filter` seleciona os elementos de uma lista que satisfazem uma determinada propriedade.
- `(<x)` e `(>x)` são funções que verificam se o seu argumento é menor ou maior, respectivamente, do que `x`. São funções anônimas construídas pela aplicação parcial dos operadores `<` e `>`.
- O operador `++` concatena duas listas.

## 1.5 A Crise do Software

- *Linguagens declarativas* (incluindo linguagens funcionais):
  - permitem que programas sejam escritos de forma clara, concisa, e com um alto nível de abstração;
  - suportam componentes de software reutilizáveis;
  - incentivam o uso de verificação formal;
  - permitem prototipagem rápida;
  - fornecem poderosas ferramentas de resolução de problemas.
- Estas características podem ser úteis na abordagem de dificuldades encontradas no desenvolvimento de software:
  - o *tamanho* e a *complexidade* dos programas de computador modernos
  - o *tempo* e o *custo* de desenvolvimento do programas
  - *confiança* de que os programas já concluídos funcionam *corretamente*



As **linguagens funcionais** oferecem um quadro particularmente elegante para abordar estes objetivos.

## 1.6 Algumas características de Haskell

- Programas são concisos
- Tipagem estática
- Sistema de tipos poderoso
- Tipos e funções recursivas
- Funções de ordem superior
- Linguagem pura (declarativa)
- Avaliação *lazy*
- Maior facilidade de raciocínio sobre programas

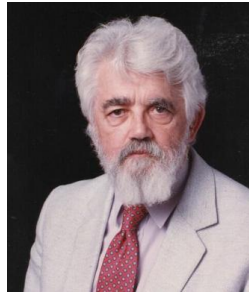
## 1.7 Antecedentes históricos

- Década de 1930:



Alonzo Church desenvolve o **cálculo lambda**, uma teoria de funções simples, mas poderosa.

- Década de 1950:



John McCarthy desenvolve **Lisp**, a primeira linguagem funcional, com algumas influências do **cálculo lambda**, mas mantendo as atribuições de variáveis.

- Década de 1960:



Peter Landin desenvolve **ISWIM**, a primeira linguagem funcional pura, baseada fortemente no **cálculo lambda**, sem atribuições.

- Década de 1970:



John Backus desenvolve **FP**, uma linguagem funcional que enfatiza funções de ordem superior e raciocínio sobre programas.

- Década de 1970:



Robin Milner e outros desenvolvem **ML**, a primeira linguagem funcional moderna, que introduziu a inferência de tipos e tipos polimórficos.

- Décadas de 1970 e 1980:



David Turner desenvolve uma série de linguagens funcionais com *avaliação lazy*, culminando com o sistema **Miranda**.

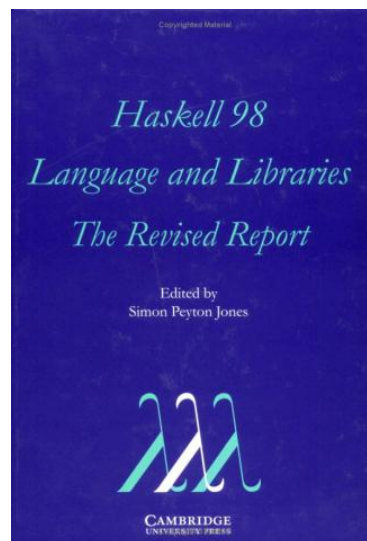
- 1987:

# Haskell

*A Purely Functional Language*

Um comitê internacional de pesquisadores inicia o desenvolvimento de **Haskell**, uma linguagem funcional *lazy* padrão.

- 2003:



O comitê publica o relatório **Haskell 98**, a definição de uma versão estável da linguagem Haskell.

- 2009:



O comitê publica o relatório **Haskell 2010**, uma revisão da definição da linguagem Haskell.

## 1.8 Algumas empresas que usam Haskell

- Exemplos de empresas que usam Haskell:
  - **ABN AMRO** análise de riscos financeiros
  - **AT&T** automatização de processamento de formulários
  - **Bank of America Merrill Lynch** transformação de dados
  - **Bump** servidores baseados em Haskell
  - **Facebook** manipulação da base de código PHP
  - **Google** infra-estrutura interna de TI
  - **MITRE** análise de protocolos de criptografia
  - **NVIDIA** ferramentas usadas internamente
  - **Qualcomm, Inc** geração de interfaces de programação para Lua
  - **The New York Times** processamento de imagens
- Para maiores detalhes visite a página *Haskell na indústria* em [http://www.haskell.org/haskellwiki/Haskell\\_in\\_industry](http://www.haskell.org/haskellwiki/Haskell_in_industry).

## 1.9 Curso online de Haskell



- Functional Programming in Haskell
- Universidade de Glasgow
- Início: 19 de setembro de 2016
- Duração: 6 semanas
- Dedicação: 4 horas por semana
- <https://www.futurelearn.com/courses/functional-programming-haskell>

## 2 Ambiente de Desenvolvimento Haskell

### Resumo

As atividades de programação serão desenvolvidas usando a linguagem funcional Haskell (<http://www.haskell.org/>).

Nesta aula o aluno irá se familiarizar com o ambiente de programação em Haskell através da avaliação de expressões no ambiente interativo, e edição e compilação de programas. Também ele irá aprender a fazer suas primeiras definições de função.

### Sumário

<b>2.1 Haskell</b>	<b>2-1</b>
<b>2.2 Instalação do ambiente de desenvolvimento</b>	<b>2-1</b>
2.2.1 Instalação das ferramentas de desenvolvimento em Haskell	2-2
<b>2.3 O ambiente interativo GHCi</b>	<b>2-2</b>
<b>2.4 Bibliotecas</b>	<b>2-5</b>

## 2.1 Haskell

**Haskell** é uma linguagem de programação **funcional pura** avançada. É um produto de **código aberto** de mais de vinte anos de pesquisa de ponta que permite o desenvolvimento rápido de software **robusto, conciso e correto**. Com um bom suporte para a **integração com outras linguagens, concorrência e paralelismo integrados, depuradores, ricas bibliotecas**, e uma **comunidade ativa**, Haskell pode tornar mais fácil a produção de software flexível, de alta qualidade, e de fácil manutenção.

**GHC** (Glasgow Haskell Compiler) (<http://www.haskell.org/ghc/>) é a implementação de Haskell mais usada:

- GHC é um software livre (de código aberto) para a linguagem Haskell.
- Está disponível para diversas plataformas, incluindo Windows e diversas variedades de Unix (como Linux, Mac OS X e FreeBSD).
- GHC é a implementação de Haskell mais usada.
- GHC compreende:
  - um **compilador** de linha de comando (`ghc`) usado para compilar programas gerando código executável
  - um **ambiente interativo** (`GHCi`), que permite a **avaliação de expressões** de forma interativa, muito útil para testes durante o desenvolvimento.
- Tem suporte particularmente bom para **concorrência** e **paralelismo**.
- Tem capacidades de **otimização**, incluindo otimização entre módulos.
- Gera código rápido, principalmente para programas concorrentes.

## 2.2 Instalação do ambiente de desenvolvimento

Para o desenvolvimento de aplicações na linguagem Haskell precisa-se minimamente de um **compilador ou interpretador de Haskell**, e de um **editor de texto** para digitação do código fonte. **Bibliotecas** adicionais e **ambientes integrados de desenvolvimento** também podem ser úteis.

São recomendados:

- **GHC**, o compilador de Haskell mais usado atualmente, que oferece também o ambiente interativo GHCi.
- **cabal-install** (<https://www.haskell.org/cabal>), um sistema para construção e empacotamento de bibliotecas e programas em Haskell. Fornece a ferramenta de linha de comando `cabal` que simplifica o processo de gerenciamento de software Haskell, automatizando a busca, configuração, compilação e instalação de bibliotecas e programas Haskell.
- **Haskell language server** (<https://github.com/haskell/haskell-language-server>), um servidor de linguagem que permite a integração com editores e ambientes de desenvolvimento.
- **Visual Studio Code** (<https://code.visualstudio.com>), um editor de texto com facilidades para o desenvolvimento de programas.

Uma outra ferramenta alternativa ao `cabal-install` é o **stack** (<https://docs.haskellstack.org/>). Na disciplina daremos preferência ao `cabal-install`.

## 2.2.1 Instalação das ferramentas de desenvolvimento em Haskell

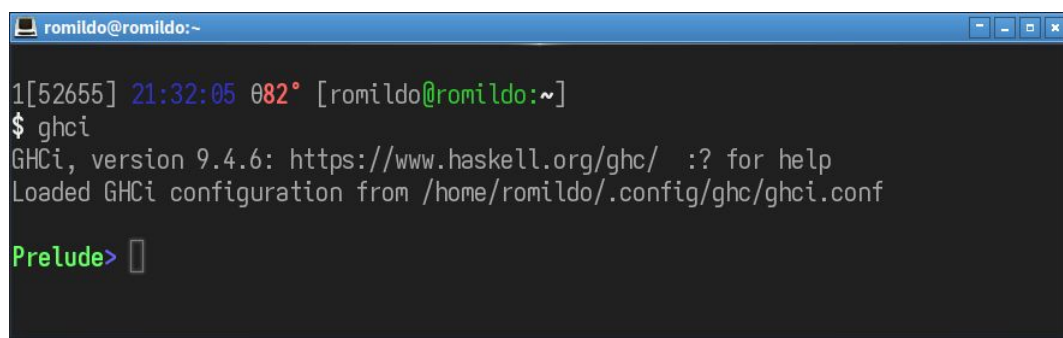
A maneira recomendada de instalação das ferramentas de desenvolvimento em Haskell é usando o **GHCup** (<https://www.haskell.org/ghcup>). Com ele é possível instalar:

- GHC
- cabal-install
- haskell-language-server
- stack

Para realizar a instalação desses programas, siga as instruções encontradas na página web do GHCup. Instale também o editor Visual Studio Code. No editor, instale a extensão Haskell.

## 2.3 O ambiente interativo GHCi

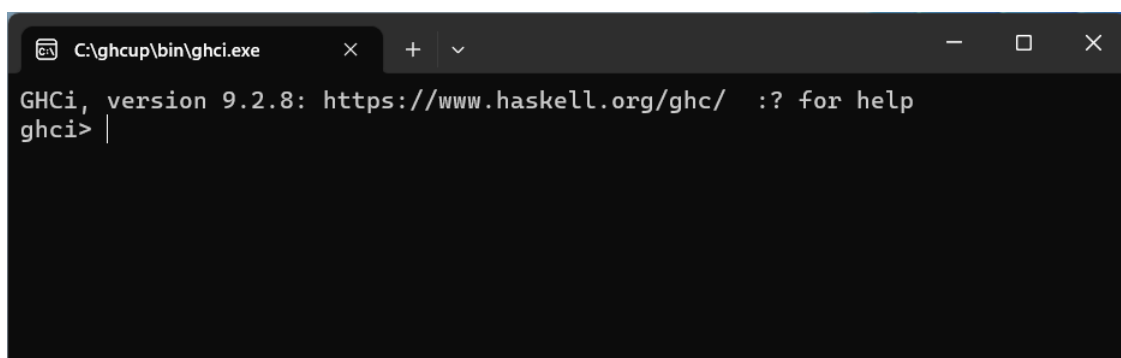
O **GHCi** pode ser iniciado a partir de um terminal simplesmente digitando `ghci`. Isto é ilustrado na figura seguinte, em um sistema Unix.



```
romildo@romildo:~
1[52655] 21:32:05 082° [romildo@romildo:~]
$ ghci
GHCi, version 9.4.6: https://www.haskell.org/ghc/  :? for help
Loaded GHCi configuration from /home/romildo/.config/ghc/ghci.conf

Prelude> |
```

No Windows pode-se iniciar o GHCi de maneira semelhante, a partir da janela *Prompt de Comandos*, ou a partir do menu iniciar.



```
C:\ghcup\bin\ghci.exe
GHCi, version 9.2.8: https://www.haskell.org/ghc/  :? for help
ghci> |
```



O **prompt** `Prelude>` significa que o sistema GHCi está pronto para avaliar expressões.

Uma aplicação Haskell é formada por um conjunto de módulos contendo definições de tipos, variáveis, funções, etc. À esquerda do prompt padrão do GHCi é mostrada a lista de módulos abertos (importados) que estão disponíveis. Um **módulo** é formado por definições que podem ser usadas em outros módulos. O módulo **Prelude** da biblioteca padrão do Haskell contém várias definições básicas e é importado automaticamente tanto no ambiente interativo quanto em outros módulos.

Na configuração padrão do GHCi o prompt é formado pela lista de módulos abertos seguida do símbolo `>`.

**Expressões** Haskell podem ser digitadas no prompt. Elas são compiladas e avaliadas, e o seu valor é exibido. Por exemplo:

```
Prelude> 2 + 3 * 4
14

Prelude> (2 + 3) * 4
20

Prelude> sqrt (3^2 + 4^2)
5.0
```

O GHCi também aceita **comandos** que permitem configurá-lo. Estes comandos começam com o caracter `:` (dois-pontos). Eles não fazem parte da linguagem Haskell. São específicos do ambiente interativo.

O comando `:quit` pode ser usado para encerrar a sessão interativa no GHCi. A sessão pode ser encerrada também pela inserção do caracter de fim de arquivo `Control-Z` no Windows e `Control-D` no Linux.

Normalmente a entrada para o GHCi deve ser feita em uma única linha. Assim que a tecla **ENTER** é digitada, encerra-se a leitura. Para realizar entrada usando várias linhas, pode-se delimitá-la pelos comandos `{` e `}`, colocados cada um em sua própria linha. Por exemplo:

```
Prelude> {:
Prelude| 2 + 3 * 4 ^
Prelude| 5 / (8 - 7)
Prelude| :}
3074.0
```

As linhas entre os delimitadores `{` e `}` são simplesmente unidas em uma única linha que será dada como entrada para o GHCi.

Alternativamente pode-se configurar o GHCi para usar o modo de linhas múltiplas por meio do comando `:set +m`. Neste modo o GHCi detecta automaticamente quando o comando não foi finalizado e permite a digitação de linhas adicionais. Uma linha múltipla pode ser terminada com uma linha vazia. Por exemplo:

```
Prelude> :set +m

Prelude> sqrt (2 +
Prelude|    3 * 4)
3.7416573867739413
```

Pode-se obter ajuda no GHCi com os comandos `:help` ou `:?`.

```
Prelude> :help
Commands available from the prompt:

<statement>          evaluate/run <statement>
:                    repeat last command
:\n ..lines.. \n:\n    multiline command
:add [*]<module> ...    add module(s) to the current target set
:browse[!] [[*]<mod>]   display the names defined by module <mod>
                        (!: more details; *: all top-level names)
:cd <dir>             change directory to <dir>
:cmd <expr>           run the commands returned by <expr>::IO String
:complete <dom> [<rng>] <s> list completions for partial input string
:ctags[!] [<file>]     create tags file <file> for Vi (default: "tags")
                        (!: use regex instead of line number)
:def[!] <cmd> <expr>   define command :<cmd> (later defined command has
                        precedence, ::<cmd> is always a builtin command)
                        (!: redefine an existing command name)
```

```

:doc <name>                display docs for the given name (experimental)
:edit <file>                edit file
:edit                      edit last module
:etags [<file>]             create tags file <file> for Emacs (default: "TAGS")
:help, :?                  display this list of commands
:info[!] [<name> ...]       display information about the given names
                             (!: do not filter instances)
:instances <type>          display the class instances available for <type>
:issafe [<mod>]             display safe haskell information of module <mod>
:kind[!] <type>            show the kind of <type>
                             (!: also print the normalised type)
:load[!] [*]<module> ...    load module(s) and their dependents
                             (!: defer type errors)
:main [<arguments> ...]     run the main function with the given arguments
:module [+/-] [*]<mod> ...  set the context for expression evaluation
:quit                      exit GHCi
:reload[!]                 reload the current module set
                             (!: defer type errors)
:run function [<arguments> ...] run the function with the given arguments
:script <file>             run the script <file>
:type <expr>               show the type of <expr>
:type +d <expr>            show the type of <expr>, defaulting type variables
:unadd <module> ...        remove module(s) from the current target set
:undef <cmd>               undefine user-defined command :<cmd>
:.<cmd>                     run the builtin command
:!!<command>               run the shell command <command>

-- Commands for debugging:

:abandon                   at a breakpoint, abandon current computation
:back [<n>]                go back in the history N steps (after :trace)
:break [<mod>] <l> [<col>]  set a breakpoint at the specified location
:break <name>              set a breakpoint on the specified function
:continue [<count>]        resume after a breakpoint [and set break ignore count]
:delete <number> ...       delete the specified breakpoints
:delete *                  delete all breakpoints
:disable <number> ...      disable the specified breakpoints
:disable *                  disable all breakpoints
:enable <number> ...       enable the specified breakpoints
:enable *                  enable all breakpoints
:force <expr>              print <expr>, forcing unevaluated parts
:forward [<n>]             go forward in the history N step s(after :back)
:history [<n>]             after :trace, show the execution history
:ignore <breaknum> <count> for break <breaknum> set break ignore <count>
:list                      show the source code around current breakpoint
:list <identifier>         show the source code for <identifier>
:list [<module>] <line>    show the source code around line number <line>
:print [<name> ...]        show a value without forcing its computation
:sprint [<name> ...]       simplified version of :print
:step                      single-step after stopping at a breakpoint
:step <expr>               single-step into <expr>
:steplocal                 single-step within the current top-level binding
:stepmodule                single-step restricted to the current module
:trace                     trace after stopping at a breakpoint
:trace <expr>              evaluate <expr> with tracing on (see :history)

-- Commands for changing settings:

:set <option> ...          set options
:seti <option> ...         set options for interactive evaluation only
:set local-config source | ignore
                             set whether to source .ghci in current dir

```

```

                                (loading untrusted config is a security issue)
:set args <arg> ...             set the arguments returned by System.Environment.getArgs
:set prog <progname>           set the value returned by System.Environment.getProgName
:set prompt <prompt>           set the prompt used in GHCi
:set prompt-cont <prompt>      set the continuation prompt used in GHCi
:set prompt-function <expr>    set the function to handle the prompt
:set prompt-cont-function <expr>
                                set the function to handle the continuation prompt
:set editor <cmd>              set the command used for :edit
:set stop [<n>] <cmd>          set the command to run when a breakpoint is hit
:unset <option> ...            unset options

```

Options for ':set' and ':unset':

```

+m                allow multiline commands
+r                revert top-level expressions after each evaluation
+s                print timing/memory stats after each evaluation
+t                print type after evaluation
+c                collect type/location info after loading modules
-<flags>           most GHC command line flags can also be set here
                   (eg. -v2, -XFlexibleInstances, etc.)
                   for GHCi-specific flags, see User's Guide,
                   Flag reference, Interactive-mode options

```

-- Commands for displaying information:

```

:show bindings      show the current bindings made at the prompt
:show breaks        show the active breakpoints
:show context       show the breakpoint context
:show imports       show the current imports
:show linker        show current linker state
:show modules       show the currently loaded modules
:show packages      show the currently active package flags
:show paths         show the currently active search paths
:show language      show the currently active language flags
:show targets       show the current set of targets
:show <setting>     show value of <setting>, which is one of
                   [args, prog, editor, stop]
:showi language     show language flags for interactive evaluation

```

The User's Guide has more information. An online copy can be found here:

[https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/html/users\\_guide/ghci.html](https://downloads.haskell.org/~ghc/latest/docs/html/users_guide/ghci.html)

## 2.4 Bibliotecas

Os programas em Haskell são organizados em módulos. Um **módulo** é formado por um conjunto de **definições** (tipos, variáveis, funções, etc.). Para que as definições de um módulo possam ser usadas o módulo deve ser **importado**. Uma **biblioteca** é formada por uma coleção de módulos relacionados.

A **biblioteca padrão**<sup>1</sup> é formada por um conjunto de módulos disponível em todas as implementações de Haskell. Ela contém o módulo **Prelude**<sup>2</sup> que é *importado automaticamente por padrão em todos os programas* em Haskell e contém tipos e funções comumente usados.

A **biblioteca padrão do GHC**<sup>3</sup> é uma versão expandida da biblioteca padrão contendo alguns módulos adicionais.

**Hackage**<sup>4</sup> é uma coleção de **pacotes** contendo bibliotecas disponibilizados pela comunidade de desenvol-

<sup>1</sup>Veja <http://www.haskell.org/onlinereport/haskell2010/haskellpa2.html>.

<sup>2</sup>Veja <http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/libraries/base/Prelude.html>.

<sup>3</sup>Veja <http://www.haskell.org/ghc/docs/latest/html/libraries/index.html>.

<sup>4</sup>Veja <http://hackage.haskell.org/>.

vedores. Estes pacotes podem ser *instalados* separadamente.

Todas as definições de um módulo podem ser listadas no ambiente interativo usando o comando `:browse`.  
Exemplo:

```
Prelude> :browse Prelude
($!) :: (a -> b) -> a -> b
(!!) :: [a] -> Int -> a
($) :: (a -> b) -> a -> b
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(<<=) :: Monad m => (a -> m b) -> m a -> m b
data Bool = False | True
:
```

### Tarefa 2.1

Use o ambiente interativo GHCi para avaliar todas as expressões usadas nos exemplos deste roteiro.

## 3 Expressões e Definições

### Resumo

Neste capítulo são apresentados alguns elementos básicos da linguagem Haskell que permitirão a construção de expressões envolvendo constantes, variáveis e funções.

### Sumário

3.1	Constantes . . . . .	3-1
3.2	Aplicação de função . . . . .	3-2
3.3	Nomeando valores . . . . .	3-6
3.4	Avaliando expressões . . . . .	3-7
3.5	Definindo variáveis e funções . . . . .	3-8
3.6	Comentários . . . . .	3-9
3.7	Definições locais em equações . . . . .	3-10
3.8	Regra de <i>layout</i> . . . . .	3-11
3.9	Comandos úteis do GHCi . . . . .	3-12
3.10	Exercícios . . . . .	3-12
3.11	Soluções . . . . .	3-15

### 3.1 Constantes

As formas mais básicas de expressões são os construtores constantes e os literais, que representam valores em sua forma mais simples, ou seja, já estão reduzidos à sua forma canônica. Uma expressão está na **forma canônica** quando ela não pode mais ser simplificada.

Os **literals** são **expressões com sintaxe especial** para escrever alguns valores. Já **construtores constantes** são **identificadores começando com letra maiúscula**.

Veja alguns exemplos de construtores constantes e literais na tabela a seguir.

descrição			exemplo
literais numéricos	inteiros	em decimal	8743
		em octal	0o7464
			00103
		em hexadecimal	0x5A0FF
	0xE0F2		
	fracionários	em decimal	140.58
			8.04e7
			0.347E+12
			5.47E-12
			47e22
literais caracter			'H'
			'\n'
			'\x65'
literais string			"bom dia"
			"ouro preto\nmg"
construtores booleanos			False
			True

Os literais numéricos são sempre positivos.

## 3.2 Aplicação de função

**Aplicação de função** é uma das formas de expressões mais comuns na programação funcional, uma vez que os programas são organizados em funções.

Sintaticamente uma aplicação de função em **notação prefixa** consiste em escrever a **função seguida dos argumentos**, se necessário *separados por caracteres brancos* (espaços, tabuladores, mudança de linha, etc.).

Exemplos:

```
Prelude> sqrt 25
5.0

Prelude> cos 0
1.0

Prelude> tan pi
-1.2246467991473532e-16

Prelude> exp 1
2.718281828459045

Prelude> logBase 3 81
4.0

Prelude> log 10
2.302585092994046

Prelude> mod 25 7
4

Prelude> negate 7.3E15
-7.3e15

Prelude> not True
False
```

Observe que, **diferentemente de várias outras linguagens** de programação, **os argumentos não são escritos entre parênteses e nem separados por vírgula**.

**Parênteses** podem ser usados para **agrupar subexpressões**. Por exemplo:

```
Prelude> sqrt (logBase 3 81)
2.0

Prelude> logBase (sqrt 9) 81
4.0
```

Aplicações de função também podem ser escritas em **notação infixa**, onde a função é escrita entre os seus argumentos. Neste caso dizemos que as funções são **operadores infixos**. Exemplos:

```
Prelude> 2 + 3
5

Prelude> 10 / 4
2.5

Prelude> (12 - 7) * 6
30

Prelude> 5 * sqrt 36
30.0

Prelude> 6 <= 17
True

Prelude> 'A' == 'B'
False

Prelude> 'A' /= 'B'
True

Prelude> True || False
True

Prelude> True && False
False
```

Assim como na Matemática e em outras linguagens de programação, os operadores possuem um **nível de precedência** (ou prioridade) e uma **associatividade**. **Parênteses** podem ser usados para agrupar subexpressões dentro de expressões maiores *quebrando* a precedência ou associatividade dos operadores.

O **nível de precedência** de um operador é dado por um número entre 0 e 9, inclusive. Se dois operadores disputam um operando, o operador de maior precedência é escolhido.

A tabela 3.1 lista os **operadores definidos no prelúdio**.

precedência	associativade	operador	descrição
9	esquerda direita	!! .	índice de lista composição de funções
8	direita	^ ^^ **	potenciação com expoente inteiro não negativo potenciação com expoente inteiro potenciação com expoente em ponto flutuante
7	esquerda	* / `div` `mod` `quot` `rem`	multiplicação divisão fracionária quociente inteiro truncado em direção a $-\infty$ módulo inteiro satisfazendo $(div\ x\ y)*y + (mod\ x\ y) == x$ quociente inteiro truncado em direção a 0 resto inteiro satisfazendo $(quot\ x\ y)*y + (rem\ x\ y) == x$
6	esquerda	+ -	adição subtração
5	direita	: ++	construção de lista não vazia concatenação de listas
4	não associativo	== /= < <= > >= `elem` `notElem`	igualdade desigualdade menor que menor ou igual a maior que maior ou igual a pertinência de lista negação de pertinência de lista
3	direita	&&	conjunção (e lógico)
2	direita		disjunção (ou lógico)
1	esquerda	>>= >>	composição de ações sequenciais composição de ações sequenciais (ignora o resultado da primeira)
0	direita	\$ \$! `seq`	aplicação de função aplicação de função estrita avaliação estrita

Tabela 3.1: Precedências e associatividades dos operadores do **Prelude**.

Exemplos:

```
Prelude> 2 + 3 * 4      -- * tem maior precedência que +
14

Prelude> 5 ^ 2 - 10     -- ^ tem maior precedência que -
15

Prelude> 2 ^ 3 ^ 2      -- ^ associa-se à direita
```



Aplicações de função em notação prefixa tem prioridade maior do que todos os operadores. Exemplos:

```
Prelude> abs 10 - 20          -- abs tem precedência maior que -
-10

Prelude> abs (10 - 20)
10

Prelude> succ 9 + max 5 4 * 3  -- succ e max tem precedência maior que + e *
25

Prelude> 2 * logBase (8/2) 256 + 1000
1008.0
```

Um operador pode ser associativo à esquerda, associativo à direita, ou não-associativo. Quando dois operadores com a mesma precedência disputam um operando,

- se eles forem **associativos à esquerda**, o operador da esquerda é escolhido,
- se eles forem **associativos à direita**, o operador da direita é escolhido,
- se eles forem **não associativos**, a expressão é mal formada e contém um erro de sintaxe,

Exemplos:

```
Prelude> 15 - 4 - 6          -- - associa-se à esquerda
5

Prelude> 15 - (4 - 6)
17

Prelude> 10 - 2 + 5          -- + e - tem a mesma precedência e associam-se à esquerda
13

Prelude> 10 - (2 + 5)
3

Prelude> 2^3^4                -- ^ associa-se à direita
2417851639229258349412352

Prelude> (2^3)^4
4096

Prelude> 3 > 4 > 5            -- > é não associativo
erro de sintaxe
```

O símbolo `-` merece atenção especial, pois ele pode tanto ser a função de **subtração** (operador infixo) como a função de **inversão de sinal** (operador prefixo).

```
Prelude> 6 - 2
4

Prelude> - 5
-5

Prelude> - (5 - 9)
4

Prelude> negate (5 - 9)
4

Prelude> 4 * (-3)
-12
```

```
Prelude> 4 * -3
erro de sintaxe
```

A **notação prefixa** é usada com nomes de funções que são **identificadores alfanuméricos**: formados por uma sequência de letras, dígitos decimais, sublinhado (`_`) e apóstrofo (`'`) começando com letra minúscula ou sublinhado (e que não seja uma palavra reservada).

Já a **notação infixa** é usada com nomes de funções **simbólicos**: formados por uma sequência de símbolos especiais (`! # $ % & + . / < = > ? @ | \ ^ - ~ :`) que não começa com `:`.

Qualquer operador pode ser usado em notação prefixa, bastando escrevê-lo entre parênteses. Exemplos:

```
Prelude> (+) 4 5
9

Prelude> (/) 18.2 2
9.1

Prelude> (>=) 10 20
False

Prelude> sqrt ((+) 4 5)
3
```

Qualquer função prefixa de dois argumentos pode ser usada em notação infixa, bastando escrevê-la entre apóstrofos invertidos (sinal de crase: ```), com precedência padrão 9 e associatividade à esquerda. Exemplos:

```
Prelude> 20 `div` 3
6

Prelude> 20 `mod` 3
2

Prelude> 20 `mod` 3 == 0
False

Prelude> 3 `logBase` 81
4.0

Prelude> (3 `logBase` 81) ^ 2
16.0

Prelude> 3 `logBase` (81 ^ 2)
8.0

Prelude> 3 `logBase` 81 ^ 2
16.0

Prelude> (20 `div` 3) ^ 2
36

Prelude> 20 `div` 3 ^ 2
2
```

### 3.3 Nomeando valores

Quando uma expressão é avaliada diretamente no ambiente interativo, uma variável chamada `it` é automaticamente definida para denotar o valor da expressão. Exemplo:

```
Prelude> 2 + 3 * 4
14
```

```
Prelude> it
14

Prelude> 7*(it - 4)
70

Prelude> it
70
```

Uma **declaração let** pode ser usada para **definir uma variável** no ambiente interativo. Por exemplo:

```
Prelude> let idade = 2 + 3 * 4

Prelude> idade
14

Prelude> 7*(idade - 4)
70
```

Desde a versão ghc-8.0.1, pode-se **associar um nome a uma variável ou função sem a declaração let** no ambiente interativo. Por exemplo:

```
Prelude> idade = 2 + 3 * 4

Prelude> idade
14
```

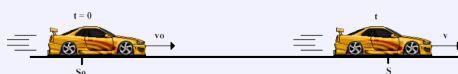
## 3.4 Avaliando expressões

### Tarefa 3.1: Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

A posição  $s$  de um corpo em movimento retilíneo uniformemente variado, em função do tempo  $t$ , é dado pela equação

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

onde  $s_0$  é a posição inicial do corpo,  $v_0$  é a sua velocidade inicial, e  $a$  é a sua aceleração.



Utilize o **ambiente interativo GHCi** para calcular a posição de uma bola em queda livre no instante  $t = 8$  s, considerando que a posição inicial é  $s_0 = 100$  m, a velocidade inicial é  $v_0 = 15$  m/s e a aceleração da gravidade é  $a = -9.81$  m/s<sup>2</sup>.

**Dicas:** Crie variáveis correspondentes aos dados e em seguida avalie a expressão correspondente à função horária do movimento usando estas variáveis.

### Tarefa 3.2: Expressões matemáticas

Utilize o **ambiente interativo** para avaliar as expressões aritméticas seguintes, considerando que  $x = 3$  e  $y = 4$ .

a)  $\frac{4}{3}\pi \sin x^2 - 1$

b)  $\frac{x^2 y^3}{(x - y)^2}$

c)  $\frac{1}{x^2 - y} - e^{-4x} + \sqrt[3]{\frac{35}{y}} \sqrt{xy}$

d)  $\frac{24 + 4.5^3}{e^{4.4} - \log_{10} 12560}$

e)  $\cos \frac{5\pi}{6} \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \frac{\tan(\frac{\pi}{6} \ln 8)}{\sqrt{7} + 2}$

## 3.5 Definindo variáveis e funções

Além de poder usar as funções das bibliotecas, o programador também pode *definir* e *usar* suas próprias funções. Novas funções são definidas em arquivos texto geralmente chamados de **código fonte** ou **programa fonte** ou ainda **script**. Um programa fonte contém definições (de variáveis, funções, tipos, etc.) usadas para estruturar o código da aplicação.

Por convenção, **arquivos de programas fonte** em Haskell normalmente tem a extensão **.hs** em seu nome. Isso não é obrigatório, mas é útil para fins de identificação.

**Variáveis** e **funções** são definidas usando **equações**. No **lado esquerdo** de uma equação colocamos o nome da variável ou o nome da função seguido de seus parâmetros formais. No **lado direito** colocamos uma expressão cujo valor será o valor da variável ou o resultado da função quando a função for aplicada a seus argumentos.

**Nomes** de **funções** e **variáveis** podem ser alfanuméricos ou simbólicos:

#### identificadores alfanuméricos

- começam com uma letra minúscula ou sublinhado e podem conter letras, dígitos decimais, sublinhado (`_`) e apóstrofo (aspa simples `'`)
- são normalmente usados em **notação prefixa**
- exemplos:  
`myFun`  
`fun1`  
`arg_2`  
`x'`

#### identificadores simbólicos

- formados por uma sequência de símbolos e não podem começar com dois pontos (`:`)
- são normalmente usados em **notação infixa**
- exemplos:  
`<+>`  
`===`  
`$*=$`  
`+=`

Ao desenvolver um programa pode ser útil manter duas janelas abertas, uma executando um **editor de texto** para editar o código, e outra para o **ambiente interativo** (GHCi) em execução. Na seção 2.2 são apresentadas algumas sugestões de editores de texto que poderão ser usados para escrever seus programas.

Os arquivos de programas em Haskell sempre devem ser salvos usando a codificação de caracteres **UTF-8**.

### Tarefa 3.3: Meu primeiro programa fonte

Inicie um editor de texto, digite as seguintes definições de função, e salve o arquivo com o nome `test.hs`.

```
-- calcula o dobro de um número
dobro x = x + x

-- calcula o quádruplo de um número
quádruplo x = dobro (dobro x)
```

Deixando o editor aberto, em outra janela execute o GHCi carregando o novo arquivo fonte:

```
$ ghci test.hs
GHCi, version 7.10.3: http://www.haskell.org/ghc/  :? for help
[1 of 1] Compiling Main                ( test.hs, interpreted )
Ok, modules loaded: Main.

*Main>
```

Agora, tanto `Prelude.hs` como `test.hs` são carregados, e as funções de ambos os arquivos fonte podem ser usadas:

```
*Main> quádruplo 10
40

*Main> 5*(dobro 2) - 3
17
```

Observe que o GHCi usa o nome de módulo `Main` se o arquivo fonte não define um nome para o módulo.

### Tarefa 3.4: Modificando meu primeiro programa fonte

Deixando o GHCi aberto, volte para o editor, adicione as seguintes definições ao arquivo fonte `test.hs`, e salve-o.

```
areaCirculo r = pi * r^2
```

O GHCi não detecta automaticamente que o arquivo fonte foi alterado. Assim o comando `:reload` deve ser executado para que as novas definições possam ser usadas:

```
*Main> :reload
[1 of 1] Compiling Main                ( test.hs, interpreted )
Ok, modules loaded: Main.
```

```
*Main> areaCirculo 5
78.53981633974483
```

## 3.6 Comentários

**Comentários** são usados para fazer anotações no programa que podem ajudar a entender o funcionamento do mesmo. Os comentários são ignorados pelo compilador.

Um **Comentário de linha** é introduzido por `--` e se estende até o final da linha.

Um **Comentário de bloco** é delimitado por `{-` e `-}`. Comentários de bloco podem ser **aninhados**.

## 3.7 Definições locais em equações

Em Haskell **equações** são usadas para **definir variáveis e funções**, como discutido anteriormente. Em muitas situações é desejável poder definir valores e funções auxiliares em uma definição principal. Isto pode ser feito escrevendo-se uma **cláusula where** ao final da equação. Uma cláusula where é formada pela palavra chave **where** seguida das definições auxiliares.

A **cláusula where** faz **definições** que são **locais** à equação, ou seja, o **escopo** dos nomes definidos em uma cláusula where restringe-se à **menor equação contendo a cláusula where**.

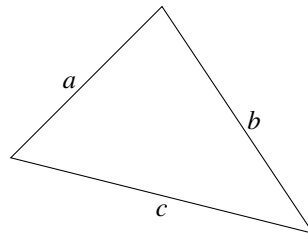
Por exemplo, considere a fórmula de Heron

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

para calcular a área de um triângulo com lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , sendo

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

o semiperímetro do triângulo.



Como  $s$  aparece várias vezes na fórmula, podemos defini-lo localmente uma única vez e usá-lo quantas vezes forem necessárias na equação.

```
areaTriangulo a b c = sqrt (s * (s-a) * (s-b) * (s-c))
  where
    s = (a + b + c)/2
```

Esta definição assume que os argumentos da função são valores válidos para os lados de um triângulo.

```
areaTriangulo 5 6 8
~> sqrt (s * (s-5) * (s-6) * (s-8))
  where
    s = (5 + 6 + 8)/2
      ~> 9.5
~> sqrt (9.5 * (9.5-5) * (9.5-6) * (9.5-8))
~> sqrt 224.4375
~> 14.981238266578634
```

Tanto **funções** como **variáveis** podem ser definidas localmente. A **ordem das equações** locais é irrelevante. Por exemplo:

```
minhaFuncao x = 3 + f x + f a + f b
  where
    f x = x + 7*c
    a = 3*c
    b = f 2
    c = 10
```

```

minhaFuncao 5
~> 3 + f 5 + f a + f b
  where f x = x + 7*c
        a = 3*c
          ~> 3*10
          ~> 30
        b = f 2
          ~> 2 + 7*10
          ~> 2 + 70
          ~> 72
        c = 10
~> 3 + (5 + 7*10) + (30 + 7*10) + (72 + 7*10)
~> 3 + (5 + 70) + (30 + 70) + (72 + 70)
~> 3 + 75 + 100 + 142
~> 320

```

## 3.8 Regra de *layout*

Em uma **seqüência de definições**, cada definição deve começar precisamente na **mesma coluna**:

```

a = 10
b = 20
c = 30

```



```

a = 10
  b = 20
  c = 30

```



```

a = 10
b = 20
  c = 30

```



Se uma definição for escrita em mais de uma linha, as linhas subsequentes à primeira devem começar em uma coluna mais à direita da coluna que começa a seqüência de definições.

```

a = 10 + 20 + 30 +
    40 + 50 + 60 +
    70 + 80
b = sum [10,20,30]

```



```

a = 10 + 20 + 30 +
  40 + 50 + 60 +
  70 + 80
  b = sum [10,20,30]

```



```

a = 10 + 20 + 30 +
  40 + 50 + 60 +
  70 + 80
b = sum [10,20,30]

```



A **regra de layout** evita a necessidade de uma sintaxe explícita para indicar o agrupamento de definições usando `{, }` e `;`.

```

-- agrupamento implícito

a = b + c
  where
    b = 1
    c = 2

d = a * 2

```

significa

```

-- agrupamento explícito

a = b + c
  where { b = 1 ; c = 2 }

d = a * 2

```

Para evitar problemas com a regra de *layout*, é recomendado não *utilizar caracteres de tabulação para indentação do código fonte*, uma vez que um único caracterizar de tabulação pode ser apresentado na tela como vários espaços. O texto do programa vai aparentar estar alinhado na tela do computador, mas na verdade pode não estar devido ao uso do tabulador.

## 3.9 Comandos úteis do GHCi

comando	abrev	significado
:load <i>name</i>	:l	carrega o programa fonte <i>name</i>
:reload	:r	recarrega o programa fonte atual
:edit <i>name</i>	:e	edita o programa fonte <i>name</i>
:edit	:e	edita o programa fonte atual
:type <i>expr</i>	:t	mostra o tipo de <i>expr</i>
:info <i>name</i>	:i	dá informações sobre <i>name</i>
:browse <i>Name</i>		dá informações sobre o módulo <i>Name</i> , se ele estiver carregado
let <i>id</i> = <i>exp</i>		associa a variável <i>id</i> ao valor da expressão <i>exp</i>
:! <i>comando</i>		executa <i>comando</i> do sistema
:help	:h, :?	lista completa dos comandos do GHCi
:quit	:q	termina o GHCi

## 3.10 Exercícios

Nas tarefas seguintes, quando for solicitado para definir funções, elas devem ser definidas em um arquivo fonte e testadas no GHCi.

### Tarefa 3.5: Encontrando os erros

Identifique e corrija os erros de sintaxe no programa fonte que se segue.

```
N = a 'div' length xs
where
  a = 10
  xs = [1,2,3,4,5]
```

### Tarefa 3.6

Defina uma função `quadradoDoDobro` para calcular o quadrado do dobro do seu argumento.

### Tarefa 3.7

Defina uma função `dobroDoQuadrado` para calcular o dobro do quadrado do seu argumento.

### Tarefa 3.8: Lados de um triângulo

Os lados de qualquer triângulo respeitam a seguinte restrição:

A soma dos comprimentos de quaisquer dois lados de um triângulo é superior ao comprimento do terceiro lado.

Escreva uma função `ladosTriangulo` que receba o comprimento de três segmentos de reta e resulte em um valor lógico indicando se satisfazem esta restrição.



### Tarefa 3.9: Energia armazenada em uma mola

A força requerida para comprimir uma mola linear é dada pela equação

$$F = kx$$

onde  $F$  é a força em  $N$  (Newton),  $x$  é a compressão da mola em  $m$  (metro), e  $k$  é a constante da mola em  $N/m$ .

A energia potencial armazenada na mola comprimida é dada pela equação

$$E = \frac{1}{2}kx^2$$

onde  $E$  é a energia em  $J$  (joule).

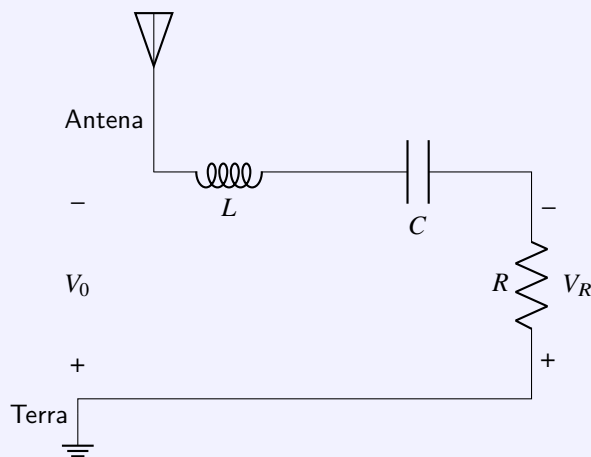
Defina as funções `compressao` para calcular a compressão, e `energia` para calcular a energia potencial armazenada em uma mola, dadas a constante elástica da mola e a força usada para comprimi-la.

### Tarefa 3.10: Custo da energia elétrica

Sabe-se que o quilowatt de energia elétrica custa um quinto do salário mínimo. Defina uma função `custoEnergia` que receba o valor do salário mínimo e a quantidade de quilowatts consumida por uma residência, e resulta no valor a ser pago com desconto de 15%.

### Tarefa 3.11: Receptor de rádio

Uma versão simplificada da parte frontal de um receptor de rádio AM é apresentada na figura abaixo. Esse receptor é composto por um circuito que contém um resistor  $R$ , um capacitor  $C$  e um indutor  $L$  conectados em série. O circuito é conectado a uma antena externa e aterrado conforme mostra a figura.



O circuito permite que o rádio selecione uma estação específica dentre as que transmitem na faixa AM. Na frequência de ressonância do circuito, essencialmente todo o sinal  $V_0$  da antena vai até o resistor, que representa o resto do rádio. Em outras palavras, o rádio recebe seu sinal mais forte na frequência de ressonância. A frequência de ressonância do circuito indutor-capacitor é dada pela equação

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

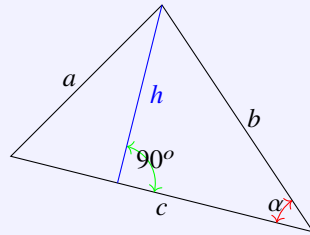
onde  $L$  é a indutância em  $H$  (henry) e  $C$  é a capacitância em  $F$  (farad).

Defina uma função `freqRes` que receba a indutância  $L$  e a capacitância  $C$ , e resulta na frequência de ressonância desse aparelho de rádio

Teste seu programa pelo cálculo da frequência do rádio quando  $L = 0,25mH$  e  $C = 0,10nF$ .

### Tarefa 3.12: Área de um triângulo usando relações métricas

A área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  pode ser calculada usando relações métricas em um triângulo qualquer.



Pela lei dos cossenos temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \implies \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \implies \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

Pela definição de seno temos:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \implies h = b \sin \alpha$$

Pela definição da área de um triângulo temos:

$$A = \frac{ch}{2}$$

Defina uma função `areaTri` para calcular a área de um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  usando as equações apresentadas.

**Dicas:** Use variáveis locais para calcular os valores  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  e  $h$  descritos acima.

## 3.11 Soluções

### Tarefa 3.1 on page 3-7: Solução

---

```
Prelude> s0 = 100
Prelude> v0 = 15.0
Prelude> a = -9.81
Prelude> t = 8
Prelude> s = s0 + v0*t + 1/2*a*t^2
Prelude> s
-93.920000000000002
```

### Tarefa 3.2 on page 3-8: Solução

---

```
Prelude> x = 3.0

Prelude> y = 4.0

Prelude> 4/3 * pi * sin (x^2) - 1
0.7262778741920746

Prelude> x^2 * y^3 / (x-y)^2
576.0

Prelude> 1/(x^2-y) - exp (-4*x) + (35/y)**(1/3)*(x*y)**(1/2)
7.3382693875428

Prelude> (24 + 4.5^3)/(exp 4.4 - logBase 10 12560)
1.4883284213683803

Prelude> cos (5*pi/6) * sin (7*pi/8) ^ 2 + tan (pi/6*log 8)/(sqrt 7 + 2)
0.28461655551252085
```

### Tarefa 3.5 on page 3-12: Solução

---

```
n = a `div` length xs
  where
    a = 10
    xs = [1,2,3,4,5]
```

### Tarefa 3.6 on page 3-12: Solução

---

```
quadradoDoDobro num = (2*num)^2
```

### Tarefa 3.7 on page 3-12: Solução

---

```
dobroDoQuadrado x = 2 * x^2
```

### Tarefa 3.8 on page 3-12: Solução

---

```
ladosTriangulo a b c =  
  a + b > c &&  
  a + c > b &&  
  b + c > a
```

### Tarefa 3.9 on page 3-13: Solução

---

```
compressao k f = f / k  
  
energia k f = 0.5 * k * (compressao k f)^2
```

### Tarefa 3.10 on page 3-13: Solução

---

```
custoEnergia salario energia =  
  0.85 * energia * salario/5
```

### Tarefa 3.11 on page 3-13: Solução

---

```
freqRes l c =  
  1 / (2 * pi * sqrt (l * c))  
  
f0 = freqRes 0.25e-3 0.10e-9
```

### Tarefa 3.12 on page 3-14: Solução

---

```
areaTri a b c = c*h/2  
  where  
    cosAlpha = (b^2 + c^2 - a^2)/(2*b*c)  
    sinAlpha = sqrt (1 - cosAlpha^2)  
    h = b*sinAlpha
```

# 4 Tipos de Dados

## Resumo

As linguagens funcionais modernas apresentam um sistema de tipos robusto que permite ao compilador verificar se os operandos usados nas operações são consistentes. Com a inferência de tipos isto pode ser feito sem o programador ter que necessariamente anotar os tipos das variáveis e funções usadas nos programas.

Nesta aula vamos conhecer alguns tipos básicos de Haskell.

## Sumário

4.1	Tipos . . . . .	4-1
4.2	Alguns tipos básicos . . . . .	4-1
4.3	Tipos função . . . . .	4-3
4.4	Checagem de tipos . . . . .	4-3
4.5	Assinatura de tipo em definições . . . . .	4-4
4.6	Consulta do tipo de uma expressão no GHCi . . . . .	4-4
4.7	Exercícios . . . . .	4-5
4.8	Soluções . . . . .	4-6

## 4.1 Tipos

Um **tipo** é uma *coleção de valores* relacionados. Tipos servem para *classificar os valores* de acordo com as suas características.

Em Haskell **nomes de tipo** são sequências de letras, dígitos decimais, sublinhados e apóstrofo, *começando com uma letra maiúscula*.

Por exemplo, o tipo **Bool** contém os dois valores lógicos **False** e **True**, comumente usados nas operações lógicas.

## 4.2 Alguns tipos básicos

A tabela 4.1 apresenta alguns tipos básicos de Haskell.

tipo	características	exemplos de valores
<b>Int</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– inteiros de precisão fixa</li> <li>– limitado (tem um valor mínimo e um valor máximo)</li> <li>– faixa de valores determinada pelo tamanho da palavra da plataforma</li> </ul>	876 2012
<b>Integer</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– inteiros de precisão arbitrária</li> <li>– ilimitado (qualquer número inteiro pode ser representado desde que haja memória suficiente)</li> <li>– menos eficiente que <b>Int</b></li> </ul>	10 7547387487840030454523342092382
<b>Float</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– aproximação de números reais em ponto flutuante</li> <li>– precisão simples</li> </ul>	4.56 0.201E10
<b>Double</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– aproximação de números reais em ponto flutuante</li> <li>– precisão dupla</li> </ul>	78643 987.3201E-60
<b>Rational</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– números racionais</li> <li>– precisão arbitrária</li> <li>– representados como uma razão de dois valores do tipo <b>Integer</b></li> <li>– os valores podem ser construídos usando o operador % do módulo <b>Data.Ratio</b> (precedência 7 e associatividade à esquerda) <code>import Data.Ratio</code></li> </ul>	3 % 4 8 % 2 5 % (-10)
<b>Bool</b>	– valores lógicos	<b>False</b> <b>True</b>
<b>Char</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– enumeração cujos valores representam caracteres unicode</li> <li>– estende o conjunto de caracteres ISO 8859-1 (latin-1), que é uma extensão do conjunto de caracteres ASCII</li> </ul>	<b>'B'</b> <b>'!'</b> <b>'\n'</b> nova linha <b>'\LF'</b> nova linha <b>'\^J'</b> nova linha <b>'\10'</b> nova linha <b>'\''</b> aspas simples <b>'\\'</b> barra invertida
<b>String</b>	– sequências de caracteres	<b>"Brasil"</b> <b>""</b> <b>"bom\ndia"</b> <b>"altura:\10\&amp;199.4"</b> <b>"primeiro/ /segundo"</b>

Tabela 4.1: Alguns tipos básicos de Haskell.

Alguns literais são **sobrecarregados**. Isto significa que um mesmo literal pode ter mais de um tipo, dependendo do contexto em que é usado. O tipo correto do literal é escolhido pela análise desse contexto.

Em particular:

- os **literais inteiros** podem ser de qualquer tipo numérico, como **Int**, **Integer**, **Float**, **Double** ou **Rational**, e
- os **literais fracionários** podem ser de qualquer tipo numérico fraconário, como **Float**, **Double** ou **Rational**.

Por exemplo:

- o literal inteiro 2016 pode ser de qualquer tipo numérico (como `Int`, `Integer`, `Float`, `Double` ou `Rational`)
- o literal 5.61 pode ser de qualquer tipo fracionário (como `Float`, `Double` ou `Rational`).

No capítulo 7 trataremos da sobrecarga com mais detalhes.

## 4.3 Tipos função

Nas linguagens funcionais uma **função** é um valor de primeira classe e, assim como os demais valores, tem um tipo. Este tipo é caracterizado pelos tipos dos argumentos e pelo tipo do resultado da função.

Em Haskell um **tipo função** é escrito usando o operador de tipo `->`:

```
 $t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_n$ 
```

onde

- $t_1, \dots, t_{n-1}$  são os tipos dos argumentos
- $t_n$  é o tipo do resultado

Exemplos:

`Bool -> Bool`

tipo das funções com um argumento do tipo `Bool`, e resultado do tipo `Bool`, como por exemplo a função `not`

`Bool -> Bool -> Bool`

tipo das funções com dois argumentos do tipo `Bool`, e resultado do tipo `Bool`, como por exemplo as funções `(&&)` e `(||)`

`Int -> Double -> Double -> Bool`

tipo das funções com três argumentos, sendo o primeiro do tipo `Int` e os demais do tipo `Double`, e o resultado do tipo `Bool`

## 4.4 Checagem de tipos

Toda expressão sintaticamente correta tem o seu tipo calculado em *tempo de compilação*. Se não for possível determinar o tipo de uma expressão ocorre um **erro de tipo** que é reportado pelo compilador.

A **aplicação** de uma função a um ou mais argumentos de *tipo inadequado* constitui um **erro de tipo**.

Por exemplo:

```
Prelude> not 'A'
```

```
<interactive>:6:5:
```

```
Couldn't match expected type `Bool' with actual type `Char'
```

```
In the first argument of `not', namely 'A'
```

```
In the expression: not 'A'
```

```
In an equation for `it': it = not 'A'
```

Neste exemplo o erro ocorre porque a função `not`, cujo tipo é `Bool -> Bool`, requer um valor booleano, porém foi aplicada ao argumento `'A'`, que é um caracter.

Haskell é uma linguagem **fortemente tipada**, com um **sistema de tipos** muito avançado. Todos os possíveis *erros de tipo* são encontrados em *tempo de compilação* (**tipagem estática**). Isto torna os programas *mais seguros* e *mais rápidos*, eliminando a necessidade de verificações de tipo em tempo de execução.

## 4.5 Assinatura de tipo em definições

Ao fazer uma definição de variável ou função, o seu tipo pode ser anotado usando uma **assinatura de tipo** imediatamente antes da equação. A anotação consiste em escrever o nome e o tipo separados pelo símbolo `::`.

Por exemplo:

```
media2 :: Double -> Double -> Double
media2 x y = (x + y)/2
```

```
notaFinal :: Double
notaFinal = media2 4.5 7.2
```

```
discriminante :: Double -> Double -> Double -> Double
discriminante a b c = b^2 - 4*a*c
```

```
ladosTriangulo :: Float -> Float -> Float -> Bool
ladosTriangulo a b c = a > 0 &&
                        b > 0 &&
                        c > 0 &&
                        a < b + c &&
                        b < a + c &&
                        c < a + b
```

## 4.6 Consulta do tipo de uma expressão no GHCi

No GHCi, o comando `:type` (ou de forma abreviada `:t`) calcula o *tipo* de uma expressão, sem avaliar a expressão.

Exemplos:

```
Prelude> not False
True

Prelude> :type not False
not False :: Bool

Prelude> :type 'Z'
'Z' :: Char

Prelude> :t 2*(5 - 8) <= 6 + 1
2*(5 - 8) <= 6 + 1 :: Bool

Prelude> :type not
not :: Bool -> Bool

Prelude> :t 69                -- 69 é de qualquer tipo a onde a é um tipo numérico
69 :: Num a => a
```



## 4.7 Exercícios

### Tarefa 4.1: Força gravitacional

A lei da gravitação universal, proposta por Newton a partir das observações de Kepler sobre os movimentos dos corpos celestes, diz que:

Dois corpos quaisquer se atraem com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Essa lei é formalizada pela seguinte equação:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde:

- $F$  é força de atração em Newtons (N),
  - $G$  é a constante de gravitação universal ( $6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ ),
  - $m_1$  e  $m_2$  são as massas dos corpos envolvidos, em quilos (kg), e
  - $d$  é a distância entre os corpos em metros (m).
- a) Defina uma variável `cteGravitaçãoUniversal` para denotar a constante de gravitação universal.
- b) Defina uma função `forçaGravidade` que recebe as massas dos dois corpos e a distância entre eles, e resulta na força de atração entre esses dois corpos. Use a variável definida em a).
- c) Teste suas definições no ambiente interativo calculando a força `forçaTerraLua` de atração entre a terra e a lua sabendo que a massa da terra é  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$ , a massa da lua é  $1 \times 10^{23} \text{ kg}$ , e a distância entre eles é  $4 \times 10^5 \text{ km}$ .

Use anotações de tipo apropriadas para os nomes sendo definidos.

Exemplos:

```
forçaGravidade 6e24 1e23 (4e5 * 1000) ~> 2.501249999999997e20
```

### Tarefa 4.2: Salário líquido

Defina uma função `salário` que recebe o salário base de um funcionário e resulta no salário líquido a receber, sabendo-se que o funcionário tem gratificação de 10% sobre o salário base e paga imposto de 7% sobre o salário base.

Use uma anotação de tipo para a função.

Exemplos:

```
salário 1000 ~> 1030.0  
salário 850 ~> 875.5
```

## 4.8 Soluções

### Tarefa 4.1 on page 4-5: Solução

---

```
cteGravitaçãoUniversal :: Double
cteGravitaçãoUniversal = 6.67e-11

forçaGravidade :: Double -> Double -> Double -> Double
forçaGravidade m1 m2 d = cteGravitaçãoUniversal * m1 * m2 / d^2

forçaTerraLua :: Double
forçaTerraLua = forçaGravidade 6e24 1e23 4e5
```

```
*Main> forçaTerraLua
2.5012499999999998e26
```

### Tarefa 4.2 on page 4-5: Solução

---

```
salário :: Double -> Double    -- poderiam ser outros tipos numéricos fracionários
                                -- no lugar de Double
salário salBase = salBase + 0.10*salBase - 0.07*salBase
```

# 5 Estruturas de dados básicas

## Resumo

Nesta aula vamos conhecer algumas estruturas de dados pré-definidas na biblioteca básica de Haskell: tuplas, listas e valores opcionais.

## Sumário

5.1	Tuplas . . . . .	5-1
5.2	Listas . . . . .	5-2
5.2.1	Progressão aritmética . . . . .	5-4
5.3	Strings . . . . .	5-5
5.4	Valores opcionais . . . . .	5-5
5.5	Exercícios . . . . .	5-6
5.6	Soluções . . . . .	5-7

## 5.1 Tuplas

**Tupla** é uma estrutura de dados formada por uma sequência de valores **possivelmente de tipos diferentes**. Os componentes de uma tupla são identificados pela **posição** em que ocorrem na tupla.

Em Haskell uma **expressão tupla** é formada por uma sequência de expressões separadas por vírgula e delimitada por parênteses:

$$(exp_1, \dots, exp_n)$$

onde  $n \geq 0$  e  $n \neq 1$ , e  $exp_1, \dots, exp_n$  são expressões cujos valores são os componentes da tupla.

O tipo de uma tupla é o **produto cartesiano** dos tipos dos seus componentes. Sintaticamente um **tipo tupla** é formado por uma sequência de tipos separados por vírgula e delimitada por parênteses:

$$(t_1, \dots, t_n)$$

onde  $n \geq 0$  e  $n \neq 1$ , e  $t_1, \dots, t_n$  são os tipos dos respectivos componentes da tupla. Observe que o tamanho de uma tupla (quantidade de componentes) é codificado no seu tipo.

Quando  $n = 0$  temos `()`, chamado de **unidade**<sup>1</sup> ou **tupla vazia**, do tipo `()`, chamado de **tipo unitário**<sup>2</sup>. Não existe tupla de um único componente.

A tabela a seguir mostra alguns exemplos de tuplas:

tupla	tipo
<code>('A', 't')</code>	<code>(Char, Char)</code>
<code>('A', 't', 'o')</code>	<code>(Char, Char, Char)</code>
<code>('A', True)</code>	<code>(Char, Bool)</code>
<code>("Joel", 'M', True, "COM")</code>	<code>(String, Char, Bool, String)</code>
<code>(True, ("Ana", 'f'), 43)</code>	<code>Num a =&gt; (Bool, (String, Char), a)</code>
<code>()</code>	<code>()</code>
<code>"nao eh tupla"</code>	<code>String</code>

<sup>1</sup>unit em inglês

<sup>2</sup>unit type em inglês

Vejamos algumas **operações com tuplas** definidas no prelúdio:

- **fst**: seleciona o primeiro componente de um *par*:

```
Prelude> fst ("pedro",19)
"pedro"
```

- **snd**: seleciona o segundo componente de um *par*:

```
Prelude> snd ("pedro",19)
19
```

## 5.2 Listas

**Lista** é uma estrutura de dados formada por uma sequência de valores (elementos) **do mesmo tipo**. Os elementos de uma lista são identificados pela **posição** em que ocorrem na lista.

Em Haskell uma **expressão lista** é formada por uma sequência de expressões separadas por vírgula e delimitada por colchetes:

$$[ \text{exp}_1 , \dots , \text{exp}_n ]$$

onde  $n \geq 0$ , e  $\text{exp}_1, \dots, \text{exp}_n$  são expressões cujos valores são os elementos da lista.

Um **tipo lista** é formado pelo tipo dos seus elementos delimitado por colchetes:

$$[ \text{t} ]$$

onde  $t$  é o tipo dos elementos da lista. Observe que o tamanho de uma lista (quantidade de elementos) não é codificado no seu tipo.

A tabela a seguir mostra alguns exemplos de listas:

lista	tipo
<code>['O','B','A']</code>	<code>[Char]</code>
<code>['B','A','N','A','N','A']</code>	<code>[Char]</code>
<code>[False,True,True]</code>	<code>[Bool]</code>
<code>[ [False,True], [], [True,False,True] ]</code>	<code>[[Bool]]</code>
<code>[1,8,6,10.48,-5]</code>	<code>[Double]</code>

Estruturalmente uma lista pode ser de duas formas:

- **lista vazia**

- não contém nenhum elemento
- é denotada pelo construtor constante `[]`

- **lista não vazia**

- contém pelo menos um elemento
- é formada por uma **cabeça** (o primeiro elemento da sequência) e por uma **cauda** (uma lista dos demais elementos da sequência)
- é construída pelo construtor `:`, um operador binário infix com associatividade à direita e precedência 5 (imediatamente inferior à precedência dos operadores aditivos (+) e (-))
  - \* o operando da esquerda é a cabeça da lista
  - \* o operando da direita é a cauda da lista

Por exemplo, a lista formada pela sequência dos valores 1, 8, e 6 pode ser escrita como

lista
<code>[1, 8, 6]</code>
<code>1 : [8, 6]</code>
<code>1 : (8 : [6])</code>
<code>1 : (8 : (6 : []))</code>
<code>1 : 8 : 6 : []</code>

Observe que os parênteses neste exemplo são desnecessários, já que o operador `:` associa-se à direita. Os exemplos anteriores podem ser reescritos com estes construtores de lista:

notação estendida	notação básica
<code>['O', 'B', 'A']</code>	<code>'O' : 'B' : 'A' : []</code>
<code>['B', 'A', 'N', 'A', 'N', 'A']</code>	<code>'B' : 'A' : 'N' : 'A' : 'N' : 'A' : []</code>
<code>[False, True, True]</code>	<code>False : True : True : []</code>
<code>[[False], [], [True, False, True]]</code>	<code>(False : []) : [] : (True : False : True : []) : []</code>
<code>[1., 8., 6., 10.48, -5.]</code>	<code>1. : 8. : 6. : 10.48 : -5. : []</code>

Vejam algumas **operações com listas** definidas na biblioteca padrão:

- **null**: verifica se uma lista é vazia:

```
Prelude> null []
True

Prelude> null [1,2,3,4,5]
False
```

- **head**: seleciona a **cabeça** (primeiro elemento) de uma lista:

```
Prelude> head [1,2,3,4,5]
1

Prelude> head []
*** Exception: Prelude.head: empty list
```

- **tail**: seleciona a **cauda** da lista, ou seja, a lista formada por todos os elementos exceto o primeiro:

```
Prelude> tail [1,2,3,4,5]
[2,3,4,5]

Prelude> tail [5*4, 6*5]
[30]

Prelude> tail [8-1]
[]

Prelude> tail []
*** Exception: Prelude.tail: empty list
```

- **length**: calcula o tamanho (quantidade de elementos) de uma lista:

```
Prelude> length [1,2,3,4,5]
5

Prelude> length []
0
```

- **(!!)**: seleciona o  $i$ -ésimo elemento de uma lista ( $0 \leq i < n$ , onde  $n$  é o comprimento da lista):

```
Prelude> [1,2,3,4,5] !! 2
3

Prelude> [1,2,3,4,5] !! 0
1

Prelude> [1,2,3,4,5] !! 10
*** Exception: Prelude.(!!): index too large

Prelude> [1,2,3,4,5] !! (-4)
*** Exception: Prelude.(!!): negative index
```

- **take**: seleciona os primeiros  $n$  elementos de uma lista:

```
Prelude> take 3 [1,2,3,4,5]
[1,2,3]
```

- **drop**: remove os primeiros  $n$  elementos de uma lista:

```
Prelude> drop 3 [1,2,3,4,5]
[4,5]
```

- **sum**: calcula a soma dos elementos de uma lista de números:

```
Prelude> sum [1,2,3,4,5]
15
```

- **product**: calcula o produto dos elementos de uma lista de números:

```
Prelude> product [1,2,3,4,5]
120
```

- **(++)**: concatena duas listas:

```
Prelude> [1,2,3] ++ [4,5]
[1,2,3,4,5]
```

- **reverse**: inverte uma lista:

```
Prelude> reverse [1,2,3,4,5]
[5,4,3,2,1]
```

- **zip**: junta duas listas em uma única lista formada pelos pares dos elementos correspondentes:

```
Prelude> zip ["pedro","ana","carlos"] [19,17,22]
[("pedro",19),("ana",17),("carlos",22)]
```

## 5.2.1 Progressão aritmética

Haskell oferece uma sintaxe simplificada para escrever listas cujos elementos constituem uma progressão aritmética: são indicados:

- o primeiro elemento
- o segundo elemento
- o último elemento

A razão é calculada automaticamente usando o primeiro e o segundo elementos. O segundo elemento é opcional. Se não for indicado a razão será 1. O último elemento também é opcional. Se não for indicado o último elemento será o maior valor possível. Se não houver um maior valor, a lista será infinita.

Por exemplo:

lista	elementos
[2, 4 .. 10]	[2,4,6,8,10]
[5, 10 .. 40]	[5,10,15,20,25,30,35,40]
[12, 9 .. 0]	[12,9,6,3,0]
[0, 11 .. 100]	[0,11,22,33,44,55,66,77,88,99]
[4 .. 9]	[4,5,6,7,8,9]
[2, 4 ..]	[3,4,6,8,10,12,14,16, <i>lista infinita</i> ]
[0 ..]	[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, <i>lista infinita</i> ]
[1.0, 1.3 .. 2.0]	[1.0,1.3,1.6,1.9000000000000001]
['a' .. 'f']	"abcdef"

## 5.3 Strings

Em Haskell **strings** são **listas de caracteres**. O tipo `String` é um sinônimo para o tipo `[Char]`. A tabela a seguir mostra alguns exemplos de strings:

string	notação de lista
<code>"ufop"</code>	<code>['u','f','o','p']</code>
<code>"bom\ndia"</code>	<code>['b','o','m','\n','d','i','a']</code>
<code>""</code>	<code>[]</code>

## 5.4 Valores opcionais

`Maybe` é uma estrutura de dados contendo zero ou um elemento. Ou seja, ela encapsula um valor que é **opcional**.

Valores opcionais podem ser de duas formas distintas:

- **valor opcional vazio**

- o valor está ausente
- é representado pela constante `Nothing`

- **valor opcional não vazio**

- existe um valor encapsulado
- é representado pelo construtor `Just`, que precisa de um argumento para indicar o valor que está na estrutura de dados.

A tabela a seguir mostra alguns exemplos de valores opcionais:

lista	tipo
<code>Just "Ouro Preto"</code>	<code>Maybe String</code>
<code>Just '\n'</code>	<code>Maybe Char</code>
<code>Just ("Ricardo", True)</code>	<code>Maybe (String, Bool)</code>
<code>Just ["maria", "gustavo", "ivo"]</code>	<code>Maybe [String]</code>
<code>Just not</code>	<code>Maybe (Bool -&gt; Bool)</code>
<code>Nothing</code>	<code>Maybe a</code>

A estrutura `Maybe` é muito utilizada para representar uma computação que pode suceder (com um resultado) ou falhar (sem nenhum resultado). Por exemplo, a função `lookup` da biblioteca padrão é usada para pesquisar uma chave em uma lista de associações. Como a chave pode não estar presente, a pesquisa pode falhar. Em caso de sucesso obtém-se também o valor associado à chave.

```
lookup "carlos" [("pedro", 17), ("carlos", 22), ("paula", 19), ("miguel", 17)]
~> Just 22

lookup "paula" [("pedro", 17), ("carlos", 22), ("paula", 19), ("miguel", 17)]
~> Just 19

lookup "marina" [("pedro", 17), ("carlos", 22), ("paula", 19), ("miguel", 17)]
~> Nothing
```

## 5.5 Exercícios

### Tarefa 5.1: Tipo de expressões

Verifique se as seguintes expressões são válidas e determine o seu tipo em caso afirmativo.

- a) `['a', 'b', 'c']`
- b) `('a', 'b', 'c')`
- c) `[(False, '0'), (True, '1')]`
- d) `[(False, True), ['0', '1']]`
- e) `(["bom", "dia", "brasil"], not, drop 6 "Velho mundo")`
- f) `['A' .. 'E']`
- g) `Just "Funcional"`
- h) `lookup "ilton" [("beatriz", True), ("carla", True), ("lucas", False)]`

### Tarefa 5.2: Último

Defina uma função chamada `último` que seleciona o último elemento de uma lista não vazia, usando as funções do prelúdio.

Observação: já existe a função `last` no prelúdio com este propósito. Você não deve usá-la.

### Tarefa 5.3: Primeiros

Defina uma função chamada `primeiros` que seleciona todos os elementos de uma lista não vazia, exceto o último, usando as funções do prelúdio.

Observação: já existe a função `init` no prelúdio com este propósito. Você não deve usá-la.

### Tarefa 5.4: Metade

Usando funções da biblioteca, defina a função `metade` que divide uma lista em duas metades. Por exemplo:

```
> metade [1, 2, 3, 4, 5, 6]
([1, 2, 3], [4, 5, 6])

> metade [1, 2, 3, 4, 5]
([1, 2], [3, 4, 5])
```



## 5.6 Soluções

### Tarefa 5.1 on page 5-6: Solução

---

- a) `['a', 'b', 'c']`  
`[Char]`
- b) `('a', 'b', 'c')`  
`(Char, Char, Char)`
- c) `[(False, '0'), (True, '1')]`  
`[(Bool, Char)]`
- d) `([False, True], ['0', '1'])`  
`([Bool], [Char])`
- e) `(["bom", "dia", "brasil"], not, drop 6 "Velho mundo")`  
`([String], Bool -> Bool, String)`
- f) `['A' .. 'E']`  
`String`
- g) `Just "Funcional"`  
`Maybe String`
- h) `lookup "ilton" [("beatriz", True), ("carla", True), ("lucas", False)]`  
`Maybe Bool`

### Tarefa 5.2 on page 5-6: Solução

---

```
último lista = head (reverse lista)

último' lista = lista !! (length lista - 1)

último'' lista = head (drop (length lista - 1) lista)
```

### Tarefa 5.3 on page 5-6: Solução

---

```
primeiros lista = reverse (tail (reverse lista))
```

### Tarefa 5.4 on page 5-6: Solução

---

```
metade lista = ( take k lista, drop k lista )
  where
    k = div (length lista) 2
```

# 6 Polimorfismo Paramétrico

## Resumo

Nesta aula vamos aprender sobre valores e tipos polimórficos.

## Sumário

6.1	Operação sobre vários tipos de dados	6-1
6.2	Variáveis de tipo	6-1
6.3	Valor polimórfico	6-2
6.4	Instanciação de variáveis de tipo	6-2
6.5	Algumas funções polimórficas predefinidas	6-2
6.6	Exercícios	6-3
6.7	Soluções	6-4

## 6.1 Operação sobre vários tipos de dados

Algumas funções podem operar sobre vários tipos de dados. Por exemplo: a função `head` recebe uma lista e retorna o primeiro elemento da lista:

```
head ['b','a','n','a','n','a']  ~> 'b'
head ["maria","paula","peixoto"] ~> "maria"
head [True,False,True,True]     ~> True
head [("ana",2.8),("pedro",4.3)] ~> ("ana",2.8)
```

Não importa qual é o tipo dos elementos da lista. Qual deve ser o tipo de `head`?

```
head :: [Char] -> Char
head :: [String] -> String
head :: [Bool] -> Bool
head :: [(String,Double)] -> (String,Double)
```

`head` pode ter vários tipos.

## 6.2 Variáveis de tipo

Quando um tipo pode ser *qualquer* tipo da linguagem, ele é representado por uma **variável de tipo**. Em uma definição de função usamos uma **variável de valor** para representar um parâmetro da função: um valor que não é conhecido no momento em que a definição é feita, e somente será determinado quando a função for aplicada. De forma semelhante usamos uma **variável de tipo** para representar um parâmetro de tipo da função: um tipo que não é conhecido no momento em que a definição é feita, e somente será determinado quando a função for aplicada.

No exemplo dado, sendo `a` o tipo dos elementos da lista que é passada como argumento para a função `head`, então

```
head :: [a] -> a
```

`a` é uma *variável de tipo* e pode ser substituída por qualquer tipo. O tipo de `head` estabelece que `head` recebe uma lista com elementos de um tipo qualquer, e retorna um valor deste mesmo tipo.

Em Haskell variáveis de tipo devem começar com uma *letra minúscula*, e são geralmente denominadas `a`, `b`, `c`, etc.

## 6.3 Valor polimórfico

Um valor é chamado **polimórfico** (*de muitas formas*) se o seu tipo contém uma ou mais *variáveis de tipo*. Por exemplo, o tipo da função `head` pode ser escrito como

```
head :: [a] -> a
```

Para qualquer tipo `a`, `head` recebe uma lista de valores do tipo `a` e retorna um valor do tipo `a`.

Já o tipo da função `length`, que recebe uma lista e resulta no tamanho da lista, é dado por:

```
length :: [a] -> Int
```

Para qualquer tipo `a`, `length` recebe uma lista de valores do tipo `a` e retorna um inteiro.

A função `fst` é do tipo:

```
fst :: (a,b) -> a
```

Para quaisquer tipos `a` e `b`, `fst` recebe um par de valores do tipo `(a,b)` e retorna um valor do tipo `a`.

## 6.4 Instanciação de variáveis de tipo

As variáveis de tipo podem ser *instanciadas* para diferentes tipos em diferentes circunstâncias.

Por exemplo, a função `length`

```
length :: [a] -> Int
```

pode ser aplicada em listas de diferentes tipos, como mostra a tabela:

expressão	valor	instanciação da variável de tipo
<code>length [False, True]</code>	2	<code>a = Bool</code>
<code>length "54321"</code>	5	<code>a = Char</code>
<code>length ["ana", "joel", "mara"]</code>	3	<code>a = String</code>
<code>length [("ana", True)]</code>	1	<code>a = (String, Bool)</code>
<code>length [(&amp;&amp;), (  )]</code>	2	<code>a = Bool -&gt; Bool -&gt; Bool</code>

## 6.5 Algumas funções polimórficas predefinidas

Muitas das funções definidas no prelúdio são polimórficas. Algumas delas são mencionadas a seguir:

```
id    :: a -> a           -- função identidade
fst   :: (a,b) -> a       -- seleciona o primeiro elemento de um par
snd   :: (a,b) -> b       -- seleciona o segundo elemento de um par
head  :: [a] -> a         -- seleciona o primeiro el. de uma lista
tail  :: [a] -> [a]       -- seleciona a cauda de uma lista
take  :: Int -> [a] -> [a] -- seleciona os primeiros el. de uma lista
zip   :: [a] -> [b] -> [(a,b)] -- combina duas listas, elemento a elemento
```

Observe que a lista vazia é polimórfica:

`[] :: [a]`

## 6.6 Exercícios

### Tarefa 6.1: Tipo de expressões

Verifique se as seguintes expressões são válidas e determine o seu tipo mais geral em caso afirmativo.

- a) `[tail, init, reverse]`
- b) `[[]]`
- c) `[[10, 20, 30], [], [5, 6], [24]]`
- d) `(10e-2, 20e-2, 30e-3)`
- e) `[(2, 3), (4, 5.6), (6, 4.55)]`
- f) `(["bom", "dia", "brasil"], sum, drop 7 "Velho mundo")`
- g) `[sum, length]`

### Tarefa 6.2: Tipo de funções

Determine o tipo de cada uma das funções definidas a seguir, e explique o que elas calculam.

- a) `second xs = head (tail xs)`
- b) `const x y = x`
- c) `swap (x,y) = (y,x)`
- d) `apply f x = f x`
- e) `flip f x y = f y x`
- f) `pair x y = (x, y)`
- g) `palindrome xs = reverse xs == xs`
- h) `twice f x = f (f x)`
- i) `mostra (nome,idade) = "Nome: " ++ nome ++ ", idade: " ++ show idade`

## 6.7 Soluções

### Tarefa 6.1 on page 6-3: Solução

---

- a) `[tail, init, reverse]`  
`[[a] -> [a]]`
- b) `[[]]`  
`[[a]]`
- c) `[[10, 20, 30], [], [5, 6], [24]]`  
`Num a => [[a]]`
- d) `(10e-2, 20e-2, 30e-3)`  
`(Fractional a, Fractional b, Fractional c) => (a, b, c)`
- e) `[(2, 3), (4, 5.6), (6, 4.55)]`  
`(Num a, Fractional b) => [(a, b)]`
- f) `(["bom", "dia", "brasil"], sum, drop 7 "Velho mundo")`  
`Num a => ([String], [a] -> a, String)`
- g) `[sum, length]`  
`[Int -> Int]`

### Tarefa 6.2 on page 6-3: Solução

---

- a) `second xs = head (tail xs)`  
`second :: [a] -> a`  
Recebe uma lista e resulta no segundo elemento da lista.
- b) `const x y = x`  
`const :: a -> b -> a`  
Recebe dois valores e resulta no segundo valor, ignorando o primeiro.
- c) `swap (x,y) = (y,x)`  
`swap :: (a,b) -> (b,a)`  
Recebe um par e resulta no par com os seus componentes invertidos.
- d) `apply f x = f x`  
`apply :: (a -> b) -> a -> b`  
Recebe uma função e um valor e aplica a função no valor.
- e) `flip f x y = f y x`  
`flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c`  
Recebe uma função e dois valores e aplica a função nos dois valores invertidos.
- f) `pair x y = (x, y)`  
`pair :: a -> b -> (a,b)`  
Recebe dois valores e resulta em um par formado pelos dois valores.
- g) `palindrome xs = reverse xs == xs`  
`palindrome :: Eq a => [a] -> Bool`  
Recebe uma lista e verifica se ela é uma palíndrome, isto é, se a lista é igual à própria lista invertida.
- h) `twice f x = f (f x)`  
`twice :: (a -> a) -> a -> a`  
Recebe uma função e um valor, e aplica sucessivamente a função no resultado da aplicação da função no valor.
- i) `mostra (nome,idade) = "Nome: " ++ nome ++ ", idade: " ++ show idade`  
`mostra :: Show a => (String,a) => String`  
Recebe um par formado por uma string e um valor e resulta na string contendo o primeiro e o segundo elementos inseridos em uma mensagem.

# 7 Sobrecarga

## Resumo

Haskell incorpora uma forma de polimorfismo que é a sobrecarga de funções, variáveis e literais. Um mesmo identificador de função pode ser usado para designar funções computacionalmente distintas. Esta característica é também chamada de polimorfismo *ad hoc*.

## Sumário

<b>7.1</b>	<b>Sobrecarga</b>	<b>7-1</b>
<b>7.2</b>	<b>Algumas classes de tipo pré-definidas</b>	<b>7-2</b>
7.2.1	Eq	7-2
7.2.2	Ord	7-3
7.2.3	Enum	7-3
7.2.4	Bounded	7-3
7.2.5	Show	7-4
7.2.6	Read	7-4
7.2.7	Num	7-4
7.2.8	Real	7-5
7.2.9	Integral	7-5
7.2.10	Fractional	7-5
7.2.11	Floating	7-6
7.2.12	RealFrac	7-6
7.2.13	RealFloat	7-7
<b>7.3</b>	<b>Sobrecarga de literais</b>	<b>7-7</b>
<b>7.4</b>	<b>Conversão entre tipos numéricos</b>	<b>7-8</b>
<b>7.5</b>	<b>Inferência de tipos</b>	<b>7-8</b>
<b>7.6</b>	<b>Dicas e Sugestões</b>	<b>7-9</b>
<b>7.7</b>	<b>Exercícios</b>	<b>7-9</b>
<b>7.8</b>	<b>Soluções</b>	<b>7-11</b>

## 7.1 Sobrecarga

Alguns tipos possuem **operações semelhantes**, porém com **implementações distintas** para cada tipo. Por exemplo, a comparação de igualdade pode ser feita entre dois números inteiros, ou dois números racionais, ou dois caracteres, ou dois valores lógicos, entre outros. Para cada tipo dos argumentos deve haver uma implementação da operação. Para se ter o benefício de uma **interface uniforme** pode ser desejável que estas operações que são semelhantes entre vários tipos **tenham o mesmo nome**.

Um mesmo nome de variável ou um mesmo nome de função pode estar associado a mais de um valor em um mesmo escopo de um programa, caracterizando a **sobrecarga**, também chamada de **polimorfismo *ad hoc***. Por exemplo o módulo **Prelude** apresenta algumas sobrecargas, como:

- o identificador `pi` é sobrecarregado e denota variáveis dos tipos numéricos com representação em ponto flutuante cujo valor é uma aproximação de  $\pi$ ,
- o identificador `abs` é sobrecarregado e denota funções que calculam o valor absoluto, cujo argumento pode ser de qualquer tipo numérico, e cujo resultado é do mesmo tipo que o argumento,
- o operador `(/)` é sobrecarregado e denota funções de divisão fracionária com dois argumentos de qualquer tipo numérico fracionário, e resultado do mesmo tipo dos argumentos.

Para expressar a sobrecarga, Haskell usa classes de tipo. Uma **classe de tipo** é uma **coleção de tipos** (chamados de **instâncias** da classe) para os quais é definido um conjunto de funções (aqui chamadas de **métodos**) que podem ter diferentes implementações, de acordo com o tipo considerado.

Uma **classe** especifica uma **interface** indicando o **nome** e a **assinatura de tipo** de cada função. Cada tipo que é **instância** (faz parte) da classe define (implementa) as funções especificadas pela classe.

Por exemplo:

- A classe **Num** é formada por todos os tipos numéricos e sobrecarrega algumas operações aritméticas básicas, como adição. Os tipos **Int** e **Double** são instâncias da classe **Num**. Logo existe uma definição da adição para o tipo **Int** e outra para o tipo **Double**, usando **algoritmos diferentes**.
- A classe **Eq** é formada por todos os tipos cujos valores podem ser verificados se são iguais ou diferentes, e sobrecarrega os operadores `(==)` e `(/=)`. Logo para cada instância desta classe existe uma definição destes operadores.

Todos os **tipos básicos** apresentados anteriormente são instâncias de **Eq**.

Nenhum **tipo função** é instância de **Eq**, pois de forma geral não é possível comparar duas funções.

Em uma **expressão de tipo** usamos **variáveis de tipo** para denotar um tipo qualquer desconhecido, e um **contexto** para restringi-las aos tipos que são instâncias de classes específicas.

Por exemplo:

- o tipo da função `abs` é `Num a => a -> a`, ou seja, `abs` é uma função que recebe um argumento de um tipo `a` e resulta em um valor do mesmo tipo `a`, sendo `a` qualquer tipo que seja instância da classe **Num**
- o tipo do operador `(*)` é `Num a => a -> a -> a`, ou seja, `(*)` é uma função que recebe dois argumentos de um mesmo tipo `a` e resulta em um valor deste mesmo tipo `a`, sendo `a` qualquer tipo que seja instância da classe **Num**
- o tipo da função `lookup` é `Eq a => a -> [(a, b)] -> Maybe b`, ou seja, `lookup` é uma função que recebe um valor de um tipo `a` e uma lista de associação onde para cada elemento a chave é desse mesmo tipo `a`, e o valor associado à chave é de um tipo `b`, e resulta em um valor do tipo **Maybe** `b`, sendo `a` qualquer tipo que seja instância da classe **Eq**

Quando uma função sobrecarregada é usada, a **escolha da implementação** adequada baseia-se nos tipos dos argumentos e no tipo do resultado da função no **contexto** em que ela é usada. Semelhantemente quando uma variável sobrecarregada é usada, a escolha da implementação é feita de acordo com o contexto. Se o contexto não oferecer informação suficiente pode ser necessário fazer **anotações de tipo**.

Classes de tipos podem ser parecidas com as classes das **linguagens orientadas a objetos**, mas elas são realmente **muito diferentes**. Elas são mais parecidas com **interfaces** (como na linguagem Java, por exemplo).

As classes de tipo podem ser **organizadas hierarquicamente**. Se uma classe `A` possuir uma **superclasse** `B`, os tipos que são instâncias de `A` também devem ser instâncias de `B`. Dizemos também neste caso que `A` é uma **subclasse** de `B`.

## 7.2 Algumas classes de tipo pré-definidas

Haskell tem várias classes predefinidas e o programador pode definir suas próprias classes. Listamos algumas classes a seguir com os seus principais métodos. Você não precisa conhecer todas elas. Use a informação para consulta quando estiver desenvolvendo em Haskell. No entanto é bom que se familiarize com **Eq**, **Ord**, **Num** e **Integral**.

### 7.2.1 Eq

Valores podem ser comparados quanto à igualdade e desigualdade.

## Algumas instâncias

`Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float`, `Double`, `Rational`

## Alguns métodos

<code>(==)</code>	<code>Eq a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	igual
<code>(/=)</code>	<code>Eq a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	diferente

### 7.2.2 Ord

Valores podem ser ordenados sequencialmente.

## Superclasses

`Eq`

## Algumas instâncias

`Bool`, `Char`, `String`, `Int`, `Integer`, `Float`, `Double`, `Rational`

## Alguns métodos

<code>(&lt;)</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	menor que
<code>(&lt;=)</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	menor ou igual a
<code>(&gt;)</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	maior que
<code>(&gt;=)</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; Bool</code>	maior ou igual a
<code>min</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	menor de dois valores
<code>max</code>	<code>Ord a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	maior de dois valores

### 7.2.3 Enum

Valores podem ser enumerados.

## Algumas instâncias

`Bool`, `Char`, `Int`, `Integer`, `Float`, `Double`, `Rational`

## Alguns métodos

<code>succ</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; a</code>	sucessor
<code>pred</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; a</code>	antecessor
<code>toEnum</code>	<code>Enum a =&gt; Int -&gt; a</code>	converte de inteiro
<code>fromEnum</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; Int</code>	converte para inteiro
<code>enumFrom</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; [a]</code>	<code>enumFrom x = [x ..]</code>
<code>enumFromThen</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; a -&gt; [a]</code>	<code>enumFromThen x y = [x, y ..]</code>
<code>enumFromTo</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; a -&gt; [a]</code>	<code>enumFromTo x y = [x .. y]</code>
<code>enumFromThenTo</code>	<code>Enum a =&gt; a -&gt; a -&gt; [a]</code>	<code>enumFromThenTo x y z = [x, y .. z]</code>

### 7.2.4 Bounded

Existem um valor mínimo e um valor máximo.



## Algumas instâncias

`Bool, Char, Int`

## Alguns métodos

<code>minBound</code>	<code>Bounded a =&gt; a</code>	menor valor
<code>maxBound</code>	<code>Bounded a =&gt; a</code>	maior valor

## 7.2.5 Show

Valores podem ser convertidos para string.

## Algumas instâncias

`Bool, Char, String, Int, Integer, Float, Double, Rational`

## Alguns métodos

<code>show</code>	<code>Show a =&gt; a -&gt; String</code>	converte para string
<code>showsPrec</code>	<code>Show a =&gt; Int -&gt; a -&gt; ShowS</code>	converte para string com precedência
<code>showList</code>	<code>Show a =&gt; [a] -&gt; ShowS</code>	converte lista para string

Observação: o tipo `ShowS` não será discutido no momento.

## 7.2.6 Read

Valores podem ser obtidos a partir de strings.

## Algumas instâncias

`Bool, Char, String, Int, Integer, Float, Double, Rational`

## Alguns métodos

<code>readsPrec</code>	<code>Read a =&gt; Int -&gt; ReadS a</code>	converte de string com precedência
<code>readList</code>	<code>Read a =&gt; ReadS [a]</code>	converte de string para lista

Observação: o tipo `ReadS` não será discutido no momento.

## Algumas funções

<code>read</code>	<code>Read a =&gt; String -&gt; a</code>	converte de string
-------------------	--	--------------------

Observação: `read` é uma função que usa métodos da classe `Read`.

## 7.2.7 Num

Valores numéricos.

## Algumas instâncias

`Int, Integer, Float, Double, Rational`

## Alguns métodos

(+)	<code>Num a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	adição
(-)	<code>Num a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	subtração
(*)	<code>Num a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	multiplicação
<code>negate</code>	<code>Num a =&gt; a -&gt; a</code>	mudança de sinal
<code>abs</code>	<code>Num a =&gt; a -&gt; a</code>	valor absoluto (módulo)
<code>signum</code>	<code>Num a =&gt; a -&gt; a</code>	sinal (negativo: -1, nulo: 0, positivo: 1)
<code>fromInteger</code>	<code>Num a =&gt; Integer -&gt; a</code>	converte de inteiro

### 7.2.8 Real

Números reais. Podem ser convertidos para frações.

#### Superclasses

`Num`, `Ord`

#### Algumas instâncias

`Int`, `Integer`, `Float`, `Double`, `Rational`

#### Alguns métodos

<code>toRational</code>	<code>Real a =&gt; a -&gt; Rational</code>	converte para racional
-------------------------	--	------------------------

### 7.2.9 Integral

Números inteiros.

#### Superclasses

`Real`, `Enum`

#### Algumas instâncias

`Int`, `Integer`

#### Alguns métodos

<code>div</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	quociente da divisão inteira em direção a 0
<code>mod</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	resto da divisão inteira em direção a 0
<code>quot</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	quociente da divisão inteira em direção a $-\infty$
<code>rem</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	resto da divisão inteira em direção a $-\infty$
<code>divMod</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; (a, a)</code>	quoc. e resto da div. inteira em direção a 0
<code>quotRem</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; a -&gt; (a, a)</code>	quoc. e resto da div. inteira em direção a $-\infty$
<code>toInteger</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; Integer</code>	converte para Integer

### 7.2.10 Fractional

Números fracionários.

## Superclasses

Num

## Algumas instâncias

Float, Double, Rational

## Alguns métodos

(/)	Fractional a => a -> a -> a	divisão fracionária
recip	Fractional a => a -> a	recíproco
fromRational	Fractional a => Rational -> a	recíproco

### 7.2.11 Floating

Tipos cujos valores são representados como números em ponto flutuante, com as funções transcendentais tradicionais.

## Superclasses

Fractional

## Algumas instâncias

Float, Double

## Alguns métodos

sqrt	Floating a => a -> a	raiz quadrada
pi	Floating a => a	$\pi$
(**)	Floating a => a -> a -> a	potenciação com expoente fracionário
exp	Floating a => a -> a	função exponencial (base $e$ )
log	Floating a => a -> a	logaritmo natural
logBase	Floating a => a -> a -> a	logaritmo
sin	Floating a => a -> a	seno
cos	Floating a => a -> a	coseno
tan	Floating a => a -> a	tangente
asin	Floating a => a -> a	arco seno
acos	Floating a => a -> a	arco coseno
atan	Floating a => a -> a	arco tangente
sinh	Floating a => a -> a	sen hiperbólico
cosh	Floating a => a -> a	coseno hiperbólico
tanh	Floating a => a -> a	tangente hiperbólica
asinh	Floating a => a -> a	arco seno hiperbólico
acosh	Floating a => a -> a	arco coseno hiperbólico
atanh	Floating a => a -> a	arco tangente hiperbólica

### 7.2.12 RealFrac

Tipos que implementam Real e Fractional.

## Superclasses

`Real`, `Fractional`

## Algumas instâncias

`Float`, `Double`, `Rational`

## Alguns métodos

<code>truncate</code>	<code>(RealFrac a, Integral b) =&gt; a -&gt; b</code>	trunca
<code>round</code>	<code>(RealFrac a, Integral b) =&gt; a -&gt; b</code>	arredonda
<code>ceiling</code>	<code>(RealFrac a, Integral b) =&gt; a -&gt; b</code>	arredonda para cima
<code>floor</code>	<code>(RealFrac a, Integral b) =&gt; a -&gt; b</code>	arredonda para baixo
<code>properFraction</code>	<code>(RealFrac a, Integral b) =&gt; a -&gt; (b, a)</code>	fração própria

### 7.2.13 RealFloat

Tipos que implementam `RealFrac` e `Floating`, com funções para manipulação de números em ponto flutuante padronizados pela IEEE.

## Superclasses

`RealFrac`, `Floating`

## Algumas instâncias

`Float`, `Double`

## Alguns métodos

<code>isNaN</code>	<code>RealFloat a =&gt; a -&gt; Bool</code>	teste para <i>not a number</i>
<code>isInfinite</code>	<code>RealFloat a =&gt; a -&gt; Bool</code>	teste para infinito
<code>isNegativeZero</code>	<code>RealFloat a =&gt; a -&gt; Bool</code>	teste para zero negativo
<code>atan2</code>	<code>RealFloat a =&gt; a -&gt; a -&gt; a</code>	arco tangente

## 7.3 Sobrecarga de literais

Algumas formas de literais são **sobrecarregadas**: **um mesmo literal pode ser considerado de diferentes tipos**. O tipo usado pode ser decidido pelo **contexto** em que o literal é usado ou por **anotações de tipo**. Se não for possível determinar o tipo, o compilador escolhe um **tipo default**.

### Literais inteiros

- Podem ser de qualquer **tipo numérico** (como `Int`, `Integer`, `Float`, `Double` e `Rational`).
- Logo o seu tipo mais geral é `Num a => a`.
- O tipo default é `Integer`.

## Literais em ponto flutuante

- Podem ser de qualquer **tipo numérico fracionário** (como `Float`, `Double` e `Rational`).
- Logo o seu tipo mais geral é `Fractional a => a`.
- O tipo default é `Double`.

Exemplos:

```
187      :: Num a => a
5348     :: Num a => a
3.4      :: Fractional a => a
56.78e13 :: Fractional a => a
```

## 7.4 Conversão entre tipos numéricos

Devido ao sistema de tipos rígido de Haskell, **não podemos converter entre os tipos numéricos arbitrariamente**. Às vezes pode não ser imediatamente claro como converter de um tipo numérico para outro. A tabela 7.1 lista funções que podem ser utilizadas para converter entre os tipos mais comuns.

	<code>Int</code>	<code>Integer</code>	<code>Rational</code>	<code>Float</code>	<code>Double</code>
<code>Int</code>	<code>id</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>fromIntegral</code>
<code>Integer</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>id</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>fromIntegral</code>	<code>fromIntegral</code>
<code>Rational</code>	<code>round</code>	<code>round</code>	<code>id</code>	<code>fromRational</code>	<code>fromRational</code>
<code>Float</code>	<code>round</code>	<code>round</code>	<code>toRational</code>	<code>id</code>	<code>realToFrac</code>
<code>Double</code>	<code>round</code>	<code>round</code>	<code>toRational</code>	<code>realToFrac</code>	<code>id</code>

Tabela 7.1: Funções para conversão entre tipos numéricos.

## 7.5 Inferência de tipos

Toda expressão bem formada tem um **tipo mais geral**, que pode ser calculado *automaticamente em tempo de compilação* usando um processo chamado **inferência de tipos**.

A capacidade de inferir tipos automaticamente *facilita a programação*, deixando o programador livre para omitir anotações de tipo ao mesmo tempo que permite a verificação de tipos pelo compilador.

A inferência de tipo é feita usando as **regras de tipagem** de cada forma de expressão.

### Literais inteiros

Os literais inteiros são do tipo `Num a => a`.

### Literais fracionários

Os literais fracionários são do tipo `Fractional a => a`.

### Literais caracteres

Os literais caracteres são do tipo `Char`.

### Literais strings

Os literais strings são do tipo `String`.

## Construtores constantes

Os construtores constantes são do tipo que os define. Assim:

- os construtores constantes booleanos `True` e `False` são do tipo `Bool`.

## Aplicação de função

Em uma aplicação de função:

- o tipo do argumento deve ser compatível com o domínio da função
- o tipo do resultado deve ser compatível com o contra-domínio da função

$$\frac{\begin{array}{c} f :: a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \rightarrow b \\ x_1 :: a_1 \\ \vdots \\ x_n :: a_n \end{array}}{f\ x_1\ \dots\ x_n :: b}$$

## 7.6 Dicas e Sugestões

- Ao definir uma nova função em Haskell, é útil começar por **escrever o seu tipo**.
- Dentro de um *script*, é uma **boa prática indicar o tipo** de cada nova função definida.
- Ao indicar os tipos de funções polimórficas que usam números, igualdade, ou ordenações (ou outras restrições), tome o cuidado de incluir as **restrições de classe** necessárias.

## 7.7 Exercícios

### Tarefa 7.1: Avaliação de expressões

Determine o valor e o tipo das expressões seguintes caso a expressão esteja correta. Se a expressão estiver incorreta, indique qual é o problema encontrado.

- 1) `58 /= 58`
- 2) `abs == negate`
- 3) `False < True`
- 4) `"elefante" > "elegante"`
- 5) `min 'b' 'h'`
- 6) `max "amaral" "ana"`
- 7) `show True`
- 8) `show 2014`
- 9) `show 'A'`
- 10) `show "adeus"`
- 11) `show max`
- 12) `read "()"`
- 13) `read "123"`
- 14) `read "123" :: Int`
- 15) `mod (read "123") 100`
- 16) `read "'@'" :: Char`
- 17) `read "@ " :: Char`

```

18) read "\"marcos\"" :: String
19) read "marcos" :: String
20) succ 'M'
21) fromEnum 'A'
22) toEnum 65 :: Char
23) toEnum 0
24) not (toEnum 0)
25) maxBound :: Int
26) signum (-13)
27) fromInteger 99 :: Double
28) fromInteger 99 :: Rational
29) fromInteger 99
30) toRational (-4.5)
31) fromIntegral 17 :: Double
32) sin (pi/2)
33) floor (3*pi/2)

```

### Tarefa 7.2: Área do círculo

Defina uma função que recebe a medida do raio  $r$  de um círculo e resulta na área  $A$  do círculo, dada por:

$$A = \pi r^2$$

Indique o tipo mais geral da função usando uma anotação de tipo.

### Tarefa 7.3: Número de degraus

Defina uma função que recebe a altura dos degraus de uma escada e a altura que o usuário deseja alcançar subindo a escada, e resulta na quantidade mínima de degraus que ele deverá subir para atingir seu objetivo, sem se preocupar com a altura do usuário.

Faça uma anotação do tipo mais geral da função.

### Tarefa 7.4

Determine o tipo mais geral de cada função definida a seguir.

- 1) `dobro x = x*2`
- 2) `aprovado nota = nota >= 6`
- 3) `myLog x b = log x / log b`

### Tarefa 7.5

Defina uma função que verifica se uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

possui raízes reais. Para tanto é necessário que o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  seja não negativo.

Determine o tipo mais geral da função e use-o em uma anotação de tipo na sua definição.

## 7.8 Soluções

### Tarefa 7.1 on page 7-9: Solução

---

- 1) `58 /= 58`  
`False`  
`Bool`
- 2) `abs == negate`  
*erro de tipo: (==) não está definido para funções*
- 3) `False < True`  
`True`  
`Bool`
- 4) `"elefante" > "elegante"`  
`False`  
`Bool`
- 5) `min 'z' 'h'`  
`'h'`  
`Char`
- 6) `max "amaral" "ana"`  
`"ana"`  
`String`
- 7) `show True`  
`"True"`  
`String`
- 8) `show 2014`  
`"2014"`  
`String`
- 9) `show 'A'`  
`"'A'"`  
`String`
- 10) `show "adeus"`  
`"\"adeus\""`  
`String`
- 11) `show max`  
*erro de tipo: show não está definida para funções*
- 12) `read "()"`  
`()`  
`Read a => a`
- 13) `read "123"`  
*erro em tempo de execução: sintaxe*
- 14) `read "123" :: Int`  
`123`  
`Int`
- 15) `mod (read "123") 100`  
`23`  
`(Integral a, Read a) => a`
- 16) `read "'@'" :: Char`  
`'@'`  
`Char`
- 17) `read "@" :: Char`  
*erro em tempo de execução: sintaxe*



- 18) `read "\"marcos\""` :: `String`  
`"marcos"`  
`String`
- 19) `read "marcos"` :: `String`  
*erro em tempo de execução: sintaxe*
- 20) `succ 'M'`  
`'N'`  
`Char`
- 21) `fromEnum 'A'`  
`65`  
`Int`
- 22) `toEnum 65` :: `Char`  
`'A'`  
`Char`
- 23) `toEnum 0`  
`()`  
`Enum a => a`
- 24) `not (toEnum 0)`  
`True`  
`Bool`
- 25) `maxBound` :: `Int`  
`9223372036854775807`  
`Int`
- 26) `signum (-13)`  
`-1`  
`Num a => a`
- 27) `fromInteger 99` :: `Double`  
`99.0`  
`Double`
- 28) `fromInteger 99` :: `Rational`  
`99 % 1`  
`Rational`
- 29) `fromInteger 99`  
`99`  
`Num a => a`
- 30) `toRational (-4.5)`  
`(-9) % 2`  
`Rational`
- 31) `fromIntegral 17` :: `Double`  
`17.0`  
`Double`
- 32) `sin (pi/2)`  
`1.0`  
`Floating a => a`
- 33) `floor (3*pi/2)`  
`4`  
`Integral a => a`

Tarefa 7.2 on page 7-10: Solução

---

```
areaCirculo :: Floating a => a -> a
areaCirculo r = pi * r^2
```

### Tarefa 7.3 on page 7-10: Solução

---

```
numDegraus :: (Integral b, RealFrac a) => a -> a -> b
numDegraus alturaDegrau alturaDesejada =
    ceiling (alturaDesejada / alturaDegrau)
```

### Tarefa 7.4 on page 7-10: Solução

---

- 1) `dobro :: Num a => a -> a`
- 2) `aprovado :: (Num a, Ord a) => a -> Bool`
- 3) `myLog :: Floating a => a -> a -> a`

### Tarefa 7.5 on page 7-10: Solução

---

```
possuiRaizesReais :: (Num a, Ord a) => a -> a -> a -> Bool

possuiRaizesReais a b c = b^2 - 4*a*c >= 0
```

# 8 Expressão Condicional

## Resumo

Expressões condicionais permitem a escolha entre duas alternativas na obtenção do valor da expressão, com base em uma condição (expressão lógica).

Nesta aula vamos nos familiarizar com o uso de expressões condicionais.

## Sumário

8.1	Expressão condicional . . . . .	8-1
8.2	Definição de função com expressão condicional . . . . .	8-2
8.3	Equações com guardas . . . . .	8-3
8.4	Definições locais e guardas . . . . .	8-5
8.5	Exercícios . . . . .	8-7
8.6	Soluções . . . . .	8-9

## 8.1 Expressão condicional

Uma **expressão condicional** tem a forma

```
if condição then exp1 else exp2
```

onde *condição* é uma *expressão booleana* (chamada **predicado**) e *exp<sub>1</sub>* (chamada **consequência**) e *exp<sub>2</sub>* (chamada **alternativa**) são expressões de um *mesmo tipo*. O valor da expressão condicional é o valor de *exp<sub>1</sub>* se a condição é verdadeira, ou o valor de *exp<sub>2</sub>* se a condição é falsa.

Seguem alguns exemplos de expressões condicionais e seus valores.

```
if True then 1 else 2      ~> 1
if False then 1 else 2     ~> 2
if 2>1 then "OK" else "FAIL" ~> "OK"
if even 5 then 3+2 else 3-2 ~> 1
```

A expressão condicional é uma **expressão**, e portanto *sempre tem um valor*. Assim uma expressão condicional pode ser usada *dentro de outra expressão*. Veja os exemplos seguintes.

```
5 * (if True then 10 else 20)      ~> 50
5 * if True then 10 else 20         ~> 50
length (if 2<=1 then "OK" else "FAIL") ~> 4
```

Observe nos exemplos seguintes que uma expressão condicional se *estende à direita* o quanto for possível.

```
(if even 2 then 10 else 20) + 1 ~> 11
if even 2 then 10 else 20 + 1   ~> 10
```

A cláusula **else** de uma expressão condicional **não é opcional**. Omiti-la é um *erro de sintaxe*. Se fosse possível omiti-la, qual seria o valor da expressão quando a condição fosse falsa? Não teria nenhum valor neste caso, o que seria um problema. Assim uma expressão condicional *sempre* deve ter as duas alternativas. Por exemplo, a seguinte expressão apresenta um erro de sintaxe, pois foi omitida a cláusula **else**.

```
if True then 10 ~> ERRO DE SINTAXE
```

## Regra de inferência de tipo

$$\frac{\begin{array}{c} test :: Bool \\ e_1 :: a \\ e_2 :: a \end{array}}{if\ test\ then\ e_1\ else\ e_2 :: a}$$

Observe que a *consequência* e a *alternativa* devem ser do mesmo tipo, que também é o tipo do resultado. Exemplos no ambiente interativo:

```
Prelude> :type if 4>5 then 'S' else 'N'
if 4>5 then 'S' else 'N' :: Char

Prelude> :type if odd 8 then "pedro" else "mariana"
if odd 8 then "pedro" else "mariana" :: [Char]

Prelude> :type if mod 17 2 == 0 then length "banana" else 0
if mod 17 2 == 0 then length "banana" else 0 :: Int
```

```
Prelude> if fromEnum 'A' then "ok" else "bad"
<interactive>:2:4:
  Couldn't match expected type `Bool' with actual type `Int'
  In the return type of a call of `fromEnum'
  In the expression: fromEnum 'A'
  In the expression: if fromEnum 'A' then "ok" else "bad"

Prelude> if mod 17 2 /= 0 then not True else 'H'
<interactive>:7:37:
  Couldn't match expected type `Bool' with actual type `Char'
  In the expression: 'H'
  In the expression: if mod 17 2 /= 0 then not True else 'H'
  In an equation for `it':
    it = if mod 17 2 /= 0 then not True else 'H'
```

### Tarefa 8.1

Determine o valor e o tipo das expressões seguintes caso a expressão esteja correta. Se a expressão estiver incorreta, indique qual é o problema encontrado.

- `if sqrt (abs (10 - 35) * 100) < 5 then "aceito" else "negado"`
- `if pred 'B' then 10 else 20`
- `if odd 1 then sqrt 9 else pred 'B'`
- `4 * if 'B' < 'A' then 2 + 3 else 2 - 3`
- `signum (if 'B' < 'A' then 2 + 3 else 2) - 3`

## 8.2 Definição de função com expressão condicional

Como na maioria das linguagens de programação, *funções* podem ser *definidas usando expressões condicionais*. Por exemplo, a função para calcular o valor absoluto de um número inteiro pode ser definida como segue:

```
valorAbsoluto :: Int -> Int
valorAbsoluto n = if n >= 0 then n else -n
```

`valorAbsoluto` recebe um inteiro `n` e resulta em `n` se ele é não-negativo, e `-n` caso contrário.

Expressões condicionais podem ser *aninhadas*, como mostra o exemplo a seguir onde é definida uma função para determinar o sinal de um número inteiro.

```
sinal :: Int -> Int
sinal n = if n < 0
          then -1
          else if n == 0
                then 0
                else 1
```

#### Tarefa 8.2: Maior de três valores

Defina uma função `max3` que recebe três valores inteiros e resulta no maior deles. Use expressões condicionais aninhadas.

Faça uma anotação de tipo para a função em seu código.

Teste sua função no ambiente interativo.

## 8.3 Equações com guardas

Funções podem ser definidas através de **equações com guardas**, onde uma sequência de expressões lógicas, chamadas **guardas**, é usada para *escolher entre vários possíveis resultados*.

Uma **equação com guarda** é formada por uma *sequência de cláusulas* escritas logo após a lista de argumentos. Cada **cláusula** é introduzida por uma barra vertical (`|`) e consiste em uma *condição*, chamada **guarda**, e uma expressão (*resultado*), separados por `=`.

```
f arg1 ... argn
  | guarda1 = exp1
  |
  |
  | guardam = expm
```

Observe que:

- cada guarda deve ser uma *expressão lógica*, e
- os resultados devem ser todos do *mesmo tipo*.

Quando a função é aplicada, as guardas são verificadas na *sequência* em que foram escritas. A *primeira* guarda verdadeira define o resultado.

Como exemplo, considere uma função para calcular o valor absoluto de um número:

```
vabs :: Integer -> Integer
vabs n | n >= 0 = n
       | n < 0 = - n
```

Nesta definição de `abs`, as guardas são

- `n >= 0`
- `n < 0`

e as expressões associadas são respectivamente

- `n`
- `-n`

Veja um exemplo de aplicação da função:

```
vabs 89
?? 89 >= 0
?? ~> True
~> 89
```

Observe que quando o cálculo do valor de uma expressão é escrito passo a passo, indicamos o cálculo das guardas separadamente em linhas que começam com `??`.

Veja outro exemplo de aplicação da função:

```

vabs (75 - 2*50)
?? 75 - 2*50 >= 0
?? ~> 75 - 100 >= 0
?? ~> -25 >= 0
?? ~> False
?? -25 < 0
?? ~> True
~> - (-25)
~> 25

```

Note que o argumento  $(75 - 2*50)$  é avaliado uma única vez, na primeira vez em que ele é necessário (para verificar a primeira guarda). O seu valor não é recalculado quando o argumento é usado novamente na segunda guarda ou no resultado. Esta é uma característica da **avaliação lazy**:

Um argumento é avaliado somente se o seu valor for necessário, e o seu valor é guardado caso ele seja necessário novamente.

Logo um argumento nunca é avaliado mais de uma vez.

Observe que na definição de `vabs` o teste  $n < 0$  pode ser substituído pela constante `True`, pois ele somente será usado se o primeiro teste  $n >= 0$  for falso, e se isto acontecer, com certeza  $n < 0$  é verdadeiro:

```

vabs n | n >= 0 = n
      | True   = -n

```

A condição `True` pode também ser escrita como `otherwise`:

```

vabs n | n >= 0      = n
      | otherwise   = -n

```

`otherwise` é uma condição que captura todas as outras situações que ainda não foram consideradas. `otherwise` é definida no prelúdio simplesmente como o valor *verdadeiro*:

```

otherwise :: Bool
otherwise = True

```

Equações com guardas podem ser usadas para tornar definições que envolvem *múltiplas condições* mais fáceis de ler, como mostra o exemplo a seguir para determinar o sinal de um número inteiro:

```

sinal :: Int -> Int
sinal n | n < 0      = -1
      | n == 0      = 0
      | otherwise    = 1

```

Como outro exemplo temos uma função para análise o índice de massa corporal:

```

analisaIMC :: Float -> String
analisaIMC imc
| imc <= 18.5 = "Você está abaixo do peso, seu emo!"
| imc <= 25.0 = "Você parece normal. Deve ser feio!"
| imc <= 30.0 = "Você está gordo! Perca algum peso!"
| otherwise   = "Você está uma baleia. Parabéns!"

```

Uma definição pode ser feita com várias equações. Se todas as guardas de uma equação forem falsas, a *próxima equação* é considerada. Se não houver uma próxima equação, ocorre um *erro em tempo de execução*. Por exemplo:

```

funcaoTeste :: Int -> Int -> Int
funcaoTeste x y | x > y = 1
                | x < y = -1

```

```
funcaoTeste 2 3 ~> -1
funcaoTeste 3 2 ~> 1
funcaoTeste 2 2 ~> ERRO
```

### Tarefa 8.3: Menor de três valores

Dada a definição de função

```
min3 a b c | a < b && a < c = a
           | b < c           = b
           | otherwise       = c
```

mostre o cálculo passo a passo das expressões:

- a) `min3 2 3 4`
- b) `min3 5 (4-3) 6`
- c) `min3 (div 100 5) (2*6) (4+5)`

### Tarefa 8.4

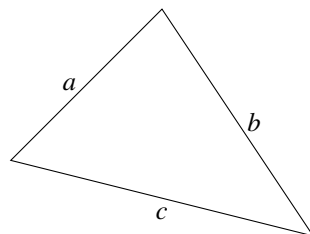
Redefina a função a seguir usando guardas no lugar de expressões condicionais.

```
describeLetter :: Char -> String
describeLetter c =
  if c >= 'a' && c <= 'z'
  then "Lower case"
  else if c >= 'A' && c <= 'Z'
  then "Upper case"
  else "Not an ASCII letter"
```

## 8.4 Definições locais e guardas

Uma equação pode ter definições locais que são introduzidas na **cláusula where** (veja a seção 3.7). O escopo dos nomes definidos localmente restringe-se à menor equação contendo a cláusula **where**, incluindo as **guardas** (quando houver) e os **resultados** da equação.

Por exemplo, a função a seguir calcula a área de um triângulo somente quando as medidas dos lados do triângulo são válidas. Isto acontece somente quando cada medida é positiva e menor do que a soma das medidas dos outros dois lados. Caso as medidas não sejam válidas o resultado da função é zero.



Utiliza-se a fórmula de Hieron

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

para o cálculo da área  $A$ , sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados, e  $s$  o semiperímetro do triângulo,

```

areaTriangulo a b c
| medidasValidas = sqrt (s * (s-a) * (s-b) * (s-c))
| otherwise      = 0
where
    medidasValidas = a > 0 && b > 0 && c > 0 &&
                      a < b + c &&
                      b < a + c &&
                      c < a + b

    s = (a + b + c)/2

```

Veja outro exemplo de definição local em uma equação com guardas:

```

g x y | x <= 10 = x + a
      | x > 10  = x - a
where a = (y+1)^2

```

O escopo de `a` inclui os dois possíveis resultados determinados pelas guardas.

O próximo exemplo mostra uma função para análise do índice de massa corporal.

```

analisaIMC peso altura
| imc <= 18.5 = "Você está abaixo do peso, seu emo!"
| imc <= 25.0 = "Você parece normal. Deve ser feio!"
| imc <= 30.0 = "Você está gordo! Perca algum peso!"
| otherwise  = "Você está uma baleia. Parabéns!"
where
    imc = peso / altura^2

```

Ou ainda:

```

analisaIMC peso altura
| imc <= magro  = "Você está abaixo do peso, seu emo!"
| imc <= normal = "Você parece normal. Deve ser feio!"
| imc <= gordo  = "Você está gordo! Perca algum peso!"
| otherwise    = "Você está uma baleia. Parabéns!"
where
    imc    = peso / altura^2
    magro  = 18.5
    normal = 25.0
    gordo  = 30.0

```



## 8.5 Exercícios

### Tarefa 8.5: Número de raízes reais da equação do segundo grau

Defina uma função chamada `numRaizes` que recebe os três coeficientes de uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e calcula a quantidade de raízes reais distintas da equação. Assuma que a equação é não degenerada (isto é, o coeficiente do termo de grau dois não é zero).

Use uma definição local para calcular o discriminante da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se  $\Delta$  for positivo a equação tem duas raízes reais e distintas, se for nulo, a equação tem uma raiz real, e se for negativo, a equação não tem raízes reais.

Especifique o tipo da função.

### Tarefa 8.6: Custo do retrato

O estúdio fotográfico Boa Imagem cobra de seus clientes por retratos antigos baseando-se no número de indivíduos incluídos no retrato. As tarifas constam da tabela seguinte.

indivíduos no retrato	preço base
1	R\$100,00
2	R\$130,00
3	R\$150,00
4	R\$165,00
5	R\$175,00
6	R\$180,00
7 ou mais	R\$185,00

Retratos antigos tirados aos sábados ou aos domingos custam 20% a mais do que o preço base.

Defina uma função `precoRetrato` do tipo `Integer -> String -> Double` que recebe como argumentos o número de pessoas no retrato e o dia da semana agendado, e calcula o custo do retrato.

Exemplos:

```
precoRetrato 4 "quinta" ~> 165.0
precoRetrato 9 "sexta" ~> 185.0
precoRetrato 9 "sábado" ~> 222.0
precoRetrato 2 "domingo" ~> 156.0
```

### Tarefa 8.7: Notas de um estudante

A nota final de um estudante é calculada a partir de três notas atribuídas respectivamente a um trabalho de laboratório, a uma avaliação semestral e a um exame final. A média ponderada das três notas mencionadas obedece aos pesos a seguir:

nota	peso
trabalho de laboratório	2
avaliação semestral	3
exame final	5

O programa a seguir, que está incompleto, recebe as três notas e determina e exibe o conceito obtido pelo aluno usando a tabela:

média ponderada	conceito
[8.0 – 10.0]	A
[7.0 – 8.0[	B
[6.0 – 7.0[	C
[5.0 – 6.0[	D
[0.0 – 5.0[	E

Considera-se que as notas digitadas são válidas.

```
module Main where

import System.IO (hSetBuffering, stdout, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main =
    do hSetBuffering stdout NoBuffering
       putStr "Digite a nota do trabalho de laboratório ...: "
       laboratório <- readLn
       putStr "Digite a nota da avaliação semestral .....: "
       semestral <- readLn
       putStr "Digite a nota do exame final .....: "
       final <- readLn
       putStrLn ""
       putStr "Conceito obtido: "
       let conceitoObtido = conceito laboratório semestral final
       putStrLn [conceitoObtido]

conceito :: Float -> Float -> Float -> Char
-- complete a definição da função
```

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> main
Digite a nota do trabalho de laboratório ...: 7.8
Digite a nota da avaliação semestral .....: 8.0
Digite a nota do exame final .....: 4.9

Conceito obtido: C
```

Você deve completar a definição do função `conceito`. Use uma definição local para calcular a média, e guardas para selecionar uma das cinco alternativas.

## 8.6 Soluções

### Tarefa 8.1 on page 8-2: Solução

- 1) `if sqrt (abs (10 - 35) * 100) < 5 then "aceito" else "negado"`  
`"negado"`  
`String`
- 2) `if pred 'B' then 10 else 20`  
*erro de tipo: o test do if é do tipo Char e deveria ser do tipo Bool*
- 3) `if odd 1 then sqrt 9 else pred 'B'`  
*erro de tipo: as alternativas do if têm tipos incompatíveis: Floating a => a e Char*
- 4) `4 * if 'B' < 'A' then 2 + 3 else 2 - 3`  
`-4`  
`Num a => a`
- 5) `signum (if 'B' < 'A' then 2 + 3 else 2) - 3`  
`-2`  
`Num a => a`

### Tarefa 8.2 on page 8-3: Solução

```
-- solução usando expressões condicionais
max3 :: Integer -> Integer -> Integer -> Integer
max3 n1 n2 n3 =
    if n1 > n2 && n1 > n3
    then n1
    else if n2 > n3
    then n2
    else n3

-- solução sem usar expressões condicionais
max3' :: Integer -> Integer -> Integer -> Integer
max3' n1 n2 n3 =
    max n1 (max n2 n3)
```

### Tarefa 8.3 on page 8-5: Solução

```
min3 2 3 4
?? 2 < 3 && 2 < 4
?? ~> True && 2 < 4
?? ~> True && True
?? ~> True
~> 2
```

```
min3 5 (4-3) 6
?? 5 < (4-3) && 5 < 6
?? ~> 5 < 1 && 5 < 6
?? ~> False && 5 < 6
?? ~> False
?? 1 < 6
?? ~> True
~> 1
```

```

min3 (div 100 5) (2*6) (4+5)
?? div 100 5 < 2*6 && div 100 5 < 4+5
?? ~> 20 < 2*6 && 20 < 4+5
?? ~> 20 < 12 && 20 < 4+5
?? ~> False && 20 < 4+5
?? ~> False
?? 12 < 4+5
?? ~> 12 < 9
?? ~> False
?? otherwise
?? ~> True
~> 9

```

#### Tarefa 8.4 on page 8-5: Solução

---

```

describeLetter :: Char -> String
describeLetter c
| c >= 'a' && c <= 'z' = "Lower case"
| c >= 'A' && c <= 'Z' = "Upper case"
| otherwise           = "Not an ASCII letter"

```

#### Tarefa 8.5 on page 8-7: Solução

---

```

numRaizes :: Double -> Double -> Double -> Int
numRaizes a b c | delta > 0 = 2
                 | delta == 0 = 1
                 | otherwise = 0
where delta = b^2 - 4*a*c

```

#### Tarefa 8.6 on page 8-7: Solução

---

```

precoRetrato :: Integer -> String -> Float
precoRetrato individuos diaSemana = precoBase + taxaExtra * precoBase
where
  precoBase | individuos == 1 = 100
            | individuos == 2 = 130
            | individuos == 3 = 150
            | individuos == 4 = 165
            | individuos == 5 = 175
            | individuos == 6 = 180
            | otherwise       = 185

  taxaExtra | diaSemana == "sábado" || diaSemana == "domingo" = 0.2
            | otherwise                                         = 0

```

#### Tarefa 8.7 on page 8-7: Solução

---

```
conceito :: Float -> Float -> Float -> Char
conceito notaLaboratorio notaSemestral notaFinal
  | media >= 8 = 'A'
  | media >= 7 = 'B'
  | media >= 6 = 'C'
  | media >= 5 = 'D'
  | otherwise = 'E'
where
  media = (2*notaLaboratorio + 3*notaSemestral + 5*notaFinal)/10
```

# 9 Programas Interativos

## Resumo

Programas interativos se comunicam com o usuário recebendo dados e exibindo resultados. Nesta aula vamos aprender como desenvolver programas funcionais que interagem com o usuário.

## Sumário

<b>9.1</b>	<b>Interação com o mundo</b>	<b>9-1</b>
9.1.1	Programas interativos	9-1
9.1.2	Linguagens puras	9-2
9.1.3	O mundo	9-2
9.1.4	Modificando o mundo	9-3
9.1.5	Ações de entrada e saída	9-3
<b>9.2</b>	<b>O tipo unit</b>	<b>9-3</b>
<b>9.3</b>	<b>Ações de saída padrão</b>	<b>9-3</b>
<b>9.4</b>	<b>Ações de entrada padrão</b>	<b>9-4</b>
<b>9.5</b>	<b>Programa em Haskell</b>	<b>9-5</b>
<b>9.6</b>	<b>Combinando ações de entrada e saída</b>	<b>9-6</b>
<b>9.7</b>	<b>Exemplos de programas interativos</b>	<b>9-7</b>
<b>9.8</b>	<b>Saída bufferizada</b>	<b>9-9</b>
<b>9.9</b>	<b>Mais exemplos de programas interativos</b>	<b>9-11</b>
<b>9.10</b>	<b>Exercícios</b>	<b>9-12</b>
<b>9.11</b>	<b>Soluções</b>	<b>9-18</b>

## 9.1 Interação com o mundo

### 9.1.1 Programas interativos

**Programas interativos** podem exibir mensagens para o usuário e obter valores informados pelo usuário. De forma geral um programa poderá *trocar informações* com o *restante do sistema computacional* para obter dados do sistema computacional e gravar dados no sistema computacional.

Em *linguagens imperativas* as operações de entrada e saída produzem **efeitos colaterais**, refletidos na *atualização de variáveis globais* que representam o *estado* do sistema de computação.

**Exemplo de programa interativo em C** Programa que obtém dois caracteres digitados pelo usuário e exibe-os em maiúsculas na tela:

```
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>

int main(void)
{
    char x = getchar();
    char y = getchar();
    printf("%c%c\n", toupper(x), toupper(y));
    return 0;
}
```

Supondo que o usuário informe os caracteres 'A' e 'b', a execução do programa produzirá a seguinte interação:

```
Ab
AB
```

A aplicação de função `getchar()` *retorna valores diferentes mesmo quando chamada com os mesmos argumentos* (nenhum argumento, neste caso). A primeira chamada retorna 'A' e a segunda chamada retorna 'b'. Isto acontece porque `getchar()` utiliza uma variável global representando o dispositivo de entrada padrão (`stdin`). Durante a chamada da função esta variável é atualizada (*efeito colateral*), removendo o próximo caracter disponível na entrada e retornando-o como resultado. Assim, quando a função `getchar()` é chamada novamente, o próximo caracter disponível na entrada padrão (representada pela variável global `stdin`) é o segundo caracter digitado pelo usuário.

## 9.1.2 Linguagens puras

Em **linguagens puras** o valor retornado por uma função *depende única e exclusivamente dos argumentos* especificados na aplicação da função. Portanto toda vez que uma função é aplicada em um dado argumento, *o resultado é o mesmo*. Assim não é possível implementar uma função que lê um caracter da mesma maneira que em linguagens impuras, como C.

Exemplo:

```
teste = ...
where x = getchar ()
      y = getchar ()
```

Em uma linguagem pura os valores de `x` e `y` serão iguais, uma vez que são definidos aplicando a função `getchar` ao mesmo argumento (a tupla vazia).

## 9.1.3 O mundo

Para interagir com o usuário, precisamos de uma *representação do sistema de computação* onde o programa está sendo executado: o **mundo** (*world*). O **mundo** é formado por todas as informações no contexto de execução da aplicação, incluindo:

- dispositivo de entrada padrão (o teclado)
- dispositivo de saída padrão (a tela)
- sistema de arquivos (arquivos em disco)
- conexões de rede
- gerador de números pseudo-aleatórios (usa uma semente que depende do sistema, como por exemplo o horário atual)

## 9.1.4 Modificando o mundo

Em **linguagens impuras** o mundo (ou parte dele) corresponde a uma *variável global atualizável* pré-definida. Uma função impura que interage com o mundo pode alterar esta variável, de forma que uma aplicação posterior da função ao mesmo argumento pode retornar um valor diferente.

Em uma **linguagem pura** não há a possibilidade de alterar uma variável. Uma função pura que interage com o mundo tem um *argumento* e um *resultado* adicionais que representam *o mundo antes* e *o mundo depois* da interação.

## 9.1.5 Ações de entrada e saída

Uma **ação de entrada e saída** (E/S) é um valor que representa uma interação com o mundo. Uma ação de E/S pode ser *executada* pelo sistema computacional para interagir com o mundo e *retornar um valor* obtido através desta interação.

Em Haskell `IO a` é o **tipo das ações de entrada e saída** que interagem com o mundo e retornam um valor do tipo `a`. `IO a` é um **tipo abstrato**, logo sua representação não está disponível nos programas.

Haskell provê algumas ações de entrada e saída primitivas, e um mecanismo para combinar ações de entrada e saída.

## 9.2 O tipo unit

É comum nas linguagens de programação a existência de um tipo cujo conjunto de valores é vazio ou unitário. Ou seja, não há nenhum valor, ou há exatamente um valor desse tipo.

Em Haskell o tipo que só possui um valor é escrito como `()` e é comumente chamado **unit**. O seu único valor também é escrito como `()` e é chamado de **tupla vazia**.

O tipo **unit** é comumente usado para indicar o tipo de uma expressão que não possui um valor interessante, irrelevante para o cálculo da expressão maior que a contém. Corresponde à noção do tipo `void` da linguagem C. Ele ocorre com frequência nos tipos das ações de entrada e saída que, quando executadas, não têm nenhum valor interessante para o retorno. Neste caso o mais importante é o efeito que a ação produz no *mundo*. Por exemplo, uma ação para exibir uma mensagem na saída padrão produz um efeito, porém não tem nenhum valor de retorno útil. Por este motivo o valor retornado por esta ação é a tupla vazia.

## 9.3 Ações de saída padrão

### A função putChar

```
putChar :: Char -> IO ()
```

`putChar` é uma função que recebe um caracter e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, interage com o mundo inserindo o caracter na saída padrão e retorna a tupla vazia `()`.

Quando executada, a ação `putChar x` apenas insere `x` na saída padrão e não há nenhum valor interessante para ser retornado. Como toda ação deve retornar um valor quando executada, a tupla vazia `()` é usada.

Exemplo: o valor da expressão

```
putChar 'H'
```

é uma ação de E/S que, quando executada, interage com o mundo inserindo o caracter `'H'` na saída padrão e retorna a tupla vazia.

### A função putStr

```
putStr :: String -> IO ()
```

A função `putStr` recebe uma string e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, interage com o mundo inserindo a string na saída padrão e retorna a tupla vazia.



## A função putStrLn

```
putStrLn :: String -> IO ()
```

A função `putStrLn` recebe uma string e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, interage com o mundo inserindo a string seguida do caracter `'\n'` na saída padrão e retorna a tupla vazia.

## A função print

```
print :: Show a => a -> IO ()
```

A função `print` recebe um valor e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, insere na saída padrão o valor convertido para string, seguido de mudança de linha, e retorna a tupla vazia.

A conversão para string é feita usando a função `show :: Show a => a -> String`. Portanto o tipo do valor deve ser instância da classe `Show`.

# 9.4 Ações de entrada padrão

## A ação getChar

```
getChar :: IO Char
```

A ação de E/S `getChar`, quando executada, interage com o mundo extraindo o próximo caracter disponível da entrada padrão e retorna este caracter.

A ação `getChar` levanta uma exceção (que pode ser identificada pelo predicado `isEOFError` do módulo `IO`) se for encontrado fim de arquivo na entrada padrão.

## A ação getLine

```
getLine :: IO String
```

A ação de E/S `getLine`, quando executada, interage com o mundo extraindo a próxima linha disponível na entrada padrão e retorna esta linha. A ação `getLine` pode falhar com uma exceção se encontrar o fim de arquivo ao ler o primeiro caracter.

## A ação getContents

```
getContents :: IO String
```

A ação de E/S `getContents`, quando executada, interage com o mundo extraindo todos os caracteres da entrada padrão e retorna a string formada pelos caracteres.

## A ação readLn

```
readLn :: Read a => IO a
```

A ação de E/S `readLn`, quando executada, interage com o mundo extraindo a próxima linha disponível na entrada padrão e retorna um valor obtido dessa string.

A conversão da string para o valor é feita usando uma função similar à função `read`, com a diferença de que se a conversão falhar o programa não termina, mas uma exceção é levantada no sistema de E/S. Portanto o tipo do valor deve ser instância da classe `Read`<sup>1</sup>.

A ação `readLn` é sobrecarregada no seu retorno, uma vez que este retorno pode ser de qualquer tipo que permita a conversão a partir do tipo `String`.

## 9.5 Programa em Haskell

Já que Haskell é uma linguagem pura, você pode estar perguntando quando é que uma ação de entrada e saída é executada.

Um *programa* em Haskell é uma *ação de E/S*.

Quando o *sistema operacional* executa o programa, a ação de E/S é executada. **Executar** o programa implica em executar a ação de E/S que o constitui. Logo não é Haskell que é responsável pela interação com o mundo, mas o **sistema operacional**. Desta forma a linguagem continua sendo pura.

Um **programa** é organizado como uma *coleção de módulos*. Um dos módulos deve ser chamado `Main` e deve exportar a variável `main`, do tipo `IO t`, para algum tipo `t`. Quando o programa é *executado* pelo sistema operacional, a ação `main` é executada, e o seu resultado (do tipo `t`) é descartado.

### Exemplo de programa em Haskell

Exibir um caracter.

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = putChar 'A'
```

Quando o programa é **executado**:

1. `main` recebe (automaticamente) como argumento o mundo existente antes de sua execução,
2. realiza ações de entrada e saída,
3. resultando em uma tupla vazia (nenhum valor interessante é produzido), e
4. produzindo um novo mundo que reflete o efeito das ações de entrada e saída realizadas.

---

<sup>1</sup>Classes de tipo serão estudadas detalhadamente em capítulos posteriores. Elas são usadas para indicar **sobrecarga**, ou seja, a possibilidade de um mesmo nome representar vários valores diferentes de tipos diferentes no mesmo contexto.

### Tarefa 9.1: Preparando e executando um programa em Haskell

1. Grave o código fonte do programa em um arquivo texto, digamos `putchar-a.hs`.

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = putChar 'A'
```

2. Compile o programa (por exemplo usando o Glasgow Haskell Compiler em um terminal):

```
$ ghc --make putchar-a
[1 of 1] Compiling Main          ( putchar-a.hs, putchar-a.o )
Linking putchar-a ...
```

3. Execute o programa já compilado:

```
$ ./putchar-a
A
```

## 9.6 Combinando ações de entrada e saída

Sendo `IO a` um tipo abstrato, como poderíamos combinar duas ações em *sequência*? Por exemplo, como exibir os caracteres 'A' e 'B' em sequência?

Haskell tem uma forma de expressão (expressão `do`) que permite combinar ações de entrada e saída a serem executadas em sequência. Exemplo:

```
do { putChar 'A'; putChar 'B' }
```

Uma **expressão do** permite combinar várias ações de E/S de forma *sequencial*. Uma **expressão do** é da forma

$$\text{do } \{ \text{ação}_1 ; \dots ; \text{ação}_n ; \text{expressão} \}$$

onde  $n \geq 0$ , e *expressão* é uma ação de E/S.

Cada  $\text{ação}_i$  pode ser da forma:

- **expressão**  
uma ação de E/S cujo retorno é ignorado
- **padrao <- expressão**  
uma ação de E/S cujo retorno é casado com o padrão indicado. O escopo das variáveis introduzidas no casamento de padrão estende-se até o final da expressão `do`. Se o casamento falhar, toda a ação falha. Em sua forma mais simples o padrão é uma variável cujo valor é o retorno da ação. Estudaremos casamento de padrão detalhadamente em capítulos posteriores.
- **let declarações**  
permite fazer declarações locais de variáveis e funções cujo escopo se estende até o final da expressão `do`.

O *valor* da **expressão do** é uma ação de E/S formada pela combinação sequencial das ações de E/S que a compõem. Quando a **expressão do** é *executada*, as ações que a compõem são executadas em sequência, e o *valor retornado* pela expressão `do` é o valor retornado pela última ação.

### Exemplo de expressão do em um programa

Exibe três caracteres na saída padrão.

```

module Main (main) where

main :: IO ()
main = do { putChar 'F' ; putChar 'i' ; putChar 'm' }

```

O código seguinte é idêntico ao anterior, porém com um *layout* diferente:

```

module Main (main) where

main :: IO ()
main = do { putChar 'F'
           ; putChar 'i'
           ; putChar 'm'
         }

```

## Regra de *layout* com a expressão **do**

A expressão **do** pode usar a **regra de *layout*** da mesma maneira que declarações locais na cláusula **where**. Assim as chaves **{** e **}** e os pontos-e-vírgula **;** podem ser omitidos na sequência de ações, sendo substituídos por uso de indentação adequada.

Neste caso, cada ação que compõe a expressão **do** deve começar na mesma coluna e, se continuar em linhas subsequentes, deve sempre ocupar as colunas à direita da coluna onde iniciou. Uma linha que começa em uma coluna mais à esquerda da coluna de referência encerra a expressão **do**.

Exemplo: exibe três caracteres na saída padrão.

```

module Main (main) where

main :: IO ()
main = do putChar 'F'
         putChar 'i'
         putChar 'm'

```

## 9.7 Exemplos de programas interativos

### Exemplo: ler um caracter

Obter um caracter da entrada padrão.

```

module Main (main) where

main :: IO Char
main = getChar

```

### Exemplo: ler e exibir um caracter

Obter um caracter da entrada padrão e exibi-lo na saída padrão.

```

module Main (main) where

main :: IO ()
main = do character <- getChar
         putChar character

```

## Exemplo: ler e exibir um caracter (v2)

Ler um caracter e exibi-lo em minúsculo e em maiúsculo.

```
module Main (main) where

import Data.Char (toLower, toUpper)

main :: IO ()
main = do letra <- getChar
        putChar (toLower letra)
        putChar (toUpper letra)
```

## Exemplo: saudação

Ler o nome do usuário e exibir uma saudação.

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = do putStrLn "Qual é o seu nome? "
        nome <- getLine
        putStr nome
        putStrLn ", seja bem vindo(a)!"
```

## Exemplo: soma de dois números

Ler dois números e exibir a soma dos mesmos.

```
module Main where

main :: IO ()
main =
    do putStrLn "Digite um número: "
       s1 <- getLine
       putStrLn "Digite outro número: "
       s2 <- getLine
       putStr "Soma dos números digitados: "
       let n1 = read s1 :: Double
           n2 = read s2
           s  = n1 + n2
       putStrLn (show s)
```

## Exemplo: soma de dois números (v2)

Ler dois números e exibir a soma dos mesmos.

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = do putStrLn "Digite um número: "
        n1 <- readLn
        putStrLn "Digite outro número: "
        n2 <- readLn
        putStr "Soma dos números digitados: "
        putStrLn (show (n1 + n2))
```

### Tarefa 9.2

Escreva um programa que solicita ao usuário três números em ponto flutuante, lê os números, e calcula e exibe o produto dos números.

**Dicas:** Provavelmente será necessária uma anotação de tipo para que o programa funcione com números em ponto flutuante, pois a operação de multiplicação é definida para todos os tipos numéricos e, não havendo informações no contexto suficientes para decidir o tipo numérico a ser usado, o tipo `Integer` é escolhido. A anotação de tipo pode ser feita em qualquer subexpressão do programa.

#### Exemplo de execução da aplicação

```
Digite um número:
10
Digite outro número:
2.3
Digite outro número:
5
Produto dos números digitados: 115.0
```

## 9.8 Saída bufferizada

Reconsidere o exemplo do programa para calcular e exibir a soma de dois números, onde o usuário deve digitar cada número na mesma linha da mensagem que solicita o número.

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main =
  do putStr "Digite um número: "    -- observe que não há uma mudança de linha
     s1 <- getLine
     putStr "Digite outro número: " -- observe que não há uma mudança de linha
     s2 <- getLine
     putStr "Soma dos números digitados: "
     putStrLn (show (read s1 + read s2))
```

Execução do programa onde o usuário informa os números 34 e 17:

```
34
17
Digite um número: Digite outro número: Soma dos números digitados: 51
```

*O que aconteceu de errado?*

A saída para o dispositivo padrão de saída é *bufferizada*. Isto significa que o sistema operacional mantém uma área da memória (chamada de **buffer**) onde armazena os caracteres a serem enviados para o dispositivo de saída. Geralmente os caracteres enviados para a saída padrão somente são transferidos para o dispositivo de saída quando o **buffer** estiver cheio. Este mecanismo reduz o número de acesso aos dispositivos de saída (que são muito mais lentos que o processador), melhorando o desempenho da aplicação. Por este motivo as mensagens não aparecem imediatamente quando o programa anterior é executado.

A função `hFlush` (definida no módulo `System.IO`) recebe um manipulador de arquivo (*handle*) e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, faz com que os itens armazenados no *buffer* de saída do manipulador sejam *enviados imediatamente* para a saída.

```
hFlush :: Handle -> IO ()
```

O tipo `Handle` (definido no módulo `System.IO`) é um tipo abstrato que representa um dispositivo de E/S internamente para o Haskell.

O módulo `System.IO` define variáveis que representam alguns dispositivos padrões:

```
stdin  :: Handle -- entrada padrão
stdout :: Handle -- saída padrão
stderr :: Handle -- saída de erro padrão
```

Para que o exemplo dado funcione corretamente é necessário esvaziar o buffer da saída padrão antes de fazer a entrada de dados, como mostra a nova versão do programa.

```
module Main (main) where

import System.IO (stdout, hFlush)

main :: IO ()
main = do putStr "Digite um número: "
          hFlush stdout -- esvazia o buffer de saída
          s1 <- getLine
          putStr "Digite outro número: "
          hFlush stdout -- esvazia o buffer de saída
          s2 <- getLine
          putStr "Soma dos números digitados: "
          putStrLn (show (read s1 + read s2))
```

Execução do programa onde o usuário informa os números 34 e 17:

```
Digite um número: 34
Digite outro número: 17
Soma dos números digitados: 51
```

A função `hSetBuffering` (definida no módulo `System.IO`) pode ser utilizada para configurar o modo de *bufferização* de um dispositivo.

```
hSetBuffering :: Handle -> BufferMode -> IO ()
```

O tipo `BufferMode` (definido no módulo `System.IO`) representa um modo de *bufferização*:

- sem buferização: `NoBuffering`
- buferização por linha: `LineBuffering`
- buferização por bloco: `BlockBuffering`

Normalmente a saída para o dispositivo padrão é feita com *buferização por linha*. A expressão

```
hSetBuffering hdl mode
```

é uma ação que, quando executada, configura o modo de *bufferização* para o *handler* `hdl`.

Então podemos corrigir o problema no exemplo dado anteriormente adicionando a ação

```
hSetBuffering stdout NoBuffering
```

no começo da sequência de ações para desabilitar a *bufferização* da saída padrão.

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main = do hSetBuffering stdout NoBuffering -- desabilita a bufferização
  putStr "Digite um número: "
  s1 <- getLine
  putStr "Digite outro número: "
  s2 <- getLine
  putStr "Soma dos números digitados: "
  putStrLn (show (read s1 + read s2))

```

Execução do programa onde o usuário informa os números 34 e 17:

```

Digite um número: 34
Digite outro número: 17
Soma dos números digitados: 51

```

## 9.9 Mais exemplos de programas interativos

### Peso ideal

Escrever um programa em Haskell que recebe a altura e o sexo de uma pessoa e calcula e mostra o seu peso ideal, utilizando as fórmulas constantes na tabela a seguir.

sexo	peso ideal
masculino	$72.7 \times h - 58$
feminino	$62.1 \times h - 44.7$

onde  $h$  é a altura da pessoa.

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStr "Altura (m): "
    h <- readLn
    putStr "Sexo (f/m): "
    s <- getLine
    if s == "F" || s == "f"
    then putStrLn ("Peso ideal: " ++ show (62.1 * h - 44.7))
    else if s == "M" || s == "m"
    then putStrLn ("Peso ideal: " ++ show (72.7 * h - 58))
    else putStrLn "Sexo inválido"

```

### Situação do aluno

Faça um programa que receba três notas de um aluno, e calcule e mostre a média aritmética das notas e a situação do aluno, dada pela tabela a seguir.

média das notas	situação
menor que 3	reprovado
entre 3 (inclusive) e 7	exame especial
acima de 7 (inclusive)	aprovado



```

module Main (main) where
import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

prompt msg = do putStr msg
                readLn

main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
          n1 <- prompt "Nota 1: "
          n2 <- prompt "Nota 2: "
          n3 <- prompt "Nota 3: "
          let media = (n1 + n2 + n3)/3
          putStrLn ("Média: " ++ show media)
          putStr "Situação: "
          if media < 3
            then putStrLn "reprovado"
            else if media < 7
                  then putStrLn "exame especial"
                  else putStrLn "aprovado"

```

## 9.10 Exercícios

### Tarefa 9.3: Palíndromes

Escreva um programa em Haskell que solicita ao usuário para digitar uma frase, lê a frase da entrada padrão, e testa se a frase lida é uma palíndrome, exibindo uma mensagem apropriada.

A frase deve ser lida como a próxima linha da entrada.

#### Exemplo de execução da aplicação

```

Digite uma frase:
abcddcba
É uma palíndrome.

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```

Digite uma frase:
ABCdCBA
É uma palíndrome.

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```

Digite uma frase:
ouro preto
Não é uma palíndrome.

```

**Dicas:** Para verificar se uma frase é palíndrome basta verificar se ela é igual à sua reversa. Para reverter uma string pode-se usar a função `reverse` do prelúdio.

#### Tarefa 9.4: Conversão de temperaturas

Escreva um programa em Haskell que solicita ao usuário uma temperatura na escala Fahrenheit, lê esta temperatura, converte-a para a escala Celsius, e exibe o resultado.

Para fazer a conversão, defina uma função `celsius :: Double -> Double` que recebe a temperatura na escala Fahrenheit e resulta na temperatura correspondente na escala Celsius. Use a seguinte equação para a conversão:

$$C = \frac{5}{9} \times (F - 32)$$

onde  $F$  é a temperatura na escala Fahrenheit e  $C$  é a temperatura na escala Celsius.

Use a função `celsius` para definir a variável `main` no módulo `Main`.

A digitação da temperatura em Fahrenheit deve ser feita na mesma linha onde é exibida a mensagem que a solicita.

##### Exemplo de execução da aplicação

```
Temperatura em Fahrenheit: 100
Temperatura em Celsius: 37.77777777777778
```

#### Tarefa 9.5: Linha de crédito

A prefeitura de Contagem abriu uma linha de crédito para os funcionários estatutários. O valor máximo da prestação não poderá ultrapassar 30% do salário bruto.

Fazer um programa que permita entrar com o salário bruto e o valor da prestação, e informar se o empréstimo pode ou não ser concedido.

##### Exemplo de execução da aplicação

```
Análise de crédito
-----
Salário bruto: 1000
Valor da prestação: 20
O empréstimo pode ser concedido
```

##### Exemplo de execução da aplicação

```
Análise de crédito
-----
Salário bruto: 1000
Valor da prestação: 430.23
O empréstimo não pode ser concedido
```

### Tarefa 9.6: Classe eleitoral

Crie um programa que leia a idade de uma pessoa e informe a sua classe eleitoral:

**não eleitor** abaixo de 16 anos;

**eleitor obrigatório** entre 18 (inclusive) e 65 anos;

**eleitor facultativo** de 16 até 18 anos e acima de 65 anos (inclusive).

#### Exemplo de execução da aplicação

Classe eleitoral

-----  
Digite a idade da pessoa: 11  
não eleitor

#### Exemplo de execução da aplicação

Classe eleitoral

-----  
Digite a idade da pessoa: 17  
eleitor facultativo

#### Exemplo de execução da aplicação

Classe eleitoral

-----  
Digite a idade da pessoa: 20  
eleitor obrigatório

#### Exemplo de execução da aplicação

Classe eleitoral

-----  
Digite a idade da pessoa: 73  
eleitor facultativo

### Tarefa 9.7: Impostos

Faça um programa que apresente o menu a seguir, permita ao usuário escolher a opção desejada, receba os dados necessários para executar a operação, e mostre o resultado.

-----  
Opções:

- 1. Imposto  
2. Novo salário  
3. Classificação  
-----

Digite a opção desejada:

Verifique a possibilidade de opção inválida.

Na **opção 1** receba o salário de um funcionário, calcule e mostre o valor do imposto sobre o salário usando as regras a seguir:

salário	taxa de imposto
Abaixo de R\$500,00	5%
De R\$500,00 a R\$850,00	10%
Acima de R\$850,00	15%

Na **opção 2** receba o salário de um funcionário, calcule e mostre o valor do novo salário, usando as regras a seguir:

salário	aumento
Acima de R\$1.500,00	R\$25,00
De R\$750,00 (inclusive) a R\$1.500,00 (inclusive)	R\$50,00
De R\$450,00 (inclusive) a R\$750,00	R\$75,00
Abaixo de R\$450,00	R\$100,00

Na **opção 3** receba o salário de um funcionário e mostre sua classificação usando a tabela a seguir:

salário	classificação
Até R\$750,00 (inclusive)	mal remunerado
Acima de R\$750,00	bem remunerado

#### Exemplo de execução da aplicação

Análise de salário

Opções:

1. Imposto
2. Novo salário
3. Classificação

Digite a opção desejada: 1

Cálculo do imposto

Digite o salário: 700

Imposto calculado: 70.0

#### Exemplo de execução da aplicação

Análise de salário

Opções:

1. Imposto
2. Novo salário
3. Classificação

Digite a opção desejada: 2

Cálculo do novo salário

Digite o salário: 700

Novo salário: 775

#### Exemplo de execução da aplicação

Análise de salário

-----  
Opções:

- 1. Imposto  
2. Novo salário  
3. Classificação  
-----

Digite a opção desejada: 3

Classificação do salário

Digite o salário: 700

Classificação obtida: mal remunerado

#### Exemplo de execução da aplicação

Análise de salário

-----  
Opções:

- 1. Imposto  
2. Novo salário  
3. Classificação  
-----

Digite a opção desejada: 4

Opção inválida!

### Tarefa 9.8: Terno pitagórico

Em Matemática um **terno pitagórico** (ou trio pitagórico, ou ainda tripla pitagórica) é formado por três números  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que  $a^2 + b^2 = c^2$ . O nome vem do *teorema de Pitágoras* que afirma que se as medidas dos lados de um triângulo retângulo são números inteiros, então elas formam um terno pitagórico.

Codifique um programa que leia três números positivos e verifique se eles formam um terno pitagórico.

#### Exemplo de execução da aplicação

Verificação de ternos pitagóricos

-----

Digite o primeiro número positivo .....: 3

Digite o segundo número positivo .....: 4

Digite o terceiro número positivo .....: 5

Os números formam um terno pitagórico

#### Exemplo de execução da aplicação

Verificação de ternos pitagóricos

-----

Digite o primeiro número positivo .....: 6

Digite o segundo número positivo .....: 5

Digite o terceiro número positivo .....: 4

Os números não formam um terno pitagórico

#### Exemplo de execução da aplicação

Verificação de ternos pitagóricos

-----

Digite o primeiro número positivo .....: 3

Digite o segundo número positivo .....: -4

Digite o terceiro número positivo .....: 0

Números inválidos

## 9.11 Soluções

### Tarefa 9.2 on page 9-9: Solução

---

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = do putStrLn "Digite um número: "
          n1 <- readLn :: IO Double
          putStrLn "Digite outro número: "
          n2 <- readLn
          putStrLn "Digite outro número: "
          n3 <- readLn
          putStr "Produto dos números digitados: "
          print (n1 * n2 * n3)
```

### Tarefa 9.3 on page 9-12: Solução

---

```
module Main (main) where

main :: IO ()
main = do putStrLn "Digite uma frase:"
          frase <- getLine
          if frase == reverse frase
            then putStrLn "É uma palíndrome."
            else putStrLn "Não é uma palíndrome."
```

### Tarefa 9.4 on page 9-13: Solução

---

```
module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

converte :: Double -> Double
converte f = 5/9 * (f - 32)

main :: IO ()
main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
          putStr "Temperatura em Fahrenheit: "
          str <- getLine
          let f = read str
              c = converte f
          putStrLn ("Temperatura em Celsius: " ++ show c)
```

### Tarefa 9.5 on page 9-13: Solução

---

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Análise de crédito"
    putStrLn "-----"
    putStr "Salário bruto: "
    salario <- readLn
    putStr "Valor da prestação: "
    prestação <- readLn
    if prestação <= 0.3 * salario
      then putStrLn "O empréstimo pode ser concedido"
      else putStrLn "O empréstimo não pode ser concedido"

```

---

#### Tarefa 9.6 on page 9-14: Solução

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

classeEleitoral idade
  | idade < 16 = "não eleitor"
  | idade >= 18 && idade < 65 = "eleitor obrigatório"
  | otherwise = "eleitor facultativo"

main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Classe eleitoral"
    putStrLn "-----"
    putStr "Digite a idade da pessoa: "
    idade <- readLn
    putStrLn (classeEleitoral idade)

```

---

#### Tarefa 9.7 on page 9-14: Solução



```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Análise de salário"
    putStrLn "-----"
    putStrLn "Opções:"
    putStrLn "-----"
    putStrLn "1. Imposto"
    putStrLn "2. Novo salário"
    putStrLn "3. Classificação"
    putStrLn "-----"
    putStr "Digite a opção desejada: "
    opção <- readLn
    putStrLn ""
    if opção == 1
      then do putStrLn "Cálculo do imposto"
              putStr "Digite o salário: "
              salário <- readLn
              let taxa | salário < 500 = 5
                      | salário < 850 = 10
                      | otherwise     = 15
                  imposto = taxa * salário / 100
              putStrLn ("Imposto calculado: " ++ show imposto)
            else if opção == 2
              then do putStrLn "Cálculo do novo salário"
                      putStr "Digite o salário: "
                      salário <- readLn
                      let aumento | salário > 1500 = 25
                                  | salário >= 750 = 50
                                  | salário >= 450 = 75
                                  | otherwise     = 100
                      novoSalário = salário + aumento
                      putStrLn ("Novo salário: " ++ show novoSalário)
            else if opção == 3
              then do putStrLn "Classificação do salário"
                      putStr "Digite o salário: "
                      salário <- readLn
                      let classificação | salário <= 750 = "mal remunerado"
                                      | otherwise       = "bem remunerado"
                      putStrLn ("Classificação obtida: " ++ classificação)
            else putStrLn "Opção inválida!"

```

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Verificação de ternos pitagóricos"
    putStrLn "-----"
    n1 <- prompt "Digite o primeiro número positivo .....: "
    n2 <- prompt "Digite o segundo número positivo .....: "
    n3 <- prompt "Digite o terceiro número positivo .....: "
    if n1 <= 0 || n2 <= 0 || n3 <= 0
    then putStrLn "Números inválidos"
    else if ternoPitagórico n1 n2 n3
    then putStrLn "Os números formam um terno pitagórico"
    else putStrLn "Os números não formam um terno pitagórico"

prompt mensagem = do putStr mensagem
                    readLn

ternoPitagórico n1 n2 n3 = n1^2 == n2^2 + n3^2 ||
                          n2^2 == n1^2 + n3^2 ||
                          n3^2 == n1^2 + n2^2

```

# 10 Funções Recursivas

## Resumo

Definições recursivas são comuns na programação funcional. Nesta aula vamos aprender a definir funções recursivas.

## Sumário

10.1	Recursividade	10-1
10.2	Recursividade mútua	10-5
10.3	Recursividade de cauda	10-6
10.4	Vantagens da recursividade	10-9
10.5	Exercícios	10-9
10.6	Soluções	10-11

## 10.1 Recursividade

**Recursividade** é uma idéia *inteligente* que desempenha um papel central na *programação funcional* e na *ciência da computação* em geral. **Recursividade** é o mecanismo de programação no qual *uma definição* de função ou de outro objeto *refere-se ao próprio objeto* sendo definido. Assim **função recursiva** é uma função que é definida em termos de si mesma. São sinônimos: recursividade, recursão, recorrência.

Recursividade é o mecanismo básico para *repetições* nas linguagens funcionais.

**Estratégia** para a definição recursiva de uma função:

1. *dividir* o problema em problemas menores do mesmo tipo
2. *resolver* os problemas menores (dividindo-os em problemas ainda menores, se necessário)
3. *combinar* as soluções dos problemas menores para formar a solução final

Ao dividir o problema sucessivamente em problemas menores eventualmente os casos simples são alcançados:

- não podem ser mais divididos
- suas soluções são definidas explicitamente

De modo geral, uma **definição de função recursiva** é dividida em duas partes:

- Há um ou mais **casos base** que dizem o que fazer em situações simples, onde não é necessária nenhuma recursão.
  - Nestes casos **a resposta pode ser dada de imediato**, sem chamar recursivamente a função sendo definida.
  - Isso garante que a recursão eventualmente pode **parar**.
- Há um ou mais **casos recursivos** que são mais gerais, e definem a função em termos de uma **chamada mais simples a si mesma**.

Como exemplo de função recursiva, considere o cálculo do fatorial de um número natural. A função que calcula o fatorial de um número natural pode ser definida recursivamente como segue:

```
fatorial :: Integer -> Integer
fatorial n
  | n == 0 = 1
  | n > 0  = fatorial (n-1) * n
```

Nesta definição:

- A primeira guarda estabelece que o fatorial de 0 é 1. Este é o *caso base*.
- A segunda guarda estabelece que o fatorial de um número positivo é o produto deste número e do fatorial do seu antecessor. Este é o *caso recursivo*.

Observe que no caso recursivo o subproblema `fatorial (n-1)` é *mais simples* que o problema original `fatorial n` e está mais próximo do caso base `fatorial 0`.

Aplicando a função fatorial:

```
fatorial 4
~> fatorial 3 * 4
~> (fatorial 2 * 3) * 4
~> ((fatorial 1 * 2) * 3) * 4
~> (((fatorial 0 * 1) * 2) * 3) * 4
~> (((1 * 1) * 2) * 3) * 4
~> ((1 * 2) * 3) * 4
~> (2 * 3) * 4
~> 6 * 4
~> 24
```

Em muitas implementações de linguagens de programação uma *chamada de função* usa um espaço de memória (chamado de **quadro**, **frame** ou **registro de ativação**) em uma área da memória (chamada **pilha** ou **stack**) onde são armazenadas informações importantes, tais como:

- argumentos da função
- variáveis locais
- variáveis temporárias
- endereço de retorno da função

Normalmente para cada nova chamada de função que é realizada, um novo quadro é alocado na pilha. Quando a função retorna, o quadro é desalocado.

De maneira bastante simplificada a sequência de alocação de quadros na pilha de execução na chamada da função `fatorial 6` do exemplo anterior é indicada nas figuras seguintes.

fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2 fatorial 2 n = 2 ↪ 2 * fatorial 1	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2 fatorial 2 n = 2 ↪ 2 * fatorial 1 fatorial 1 n = 1 ↪ 1 * fatorial 0	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2 fatorial 2 n = 2 ↪ 2 * fatorial 1 fatorial 1 n = 1 ↪ 1 * fatorial 0 fatorial 0 n = 0 ↪ 1
---	--	---	--	--

fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2 fatorial 2 n = 2 ↪ 2 * fatorial 1 fatorial 1 n = 1 ↪ 1 * 1 = 1	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * fatorial 2 fatorial 2 n = 2 ↪ 2 * 1 = 2	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * fatorial 3 fatorial 3 n = 3 ↪ 3 * 2	fatorial 4 n = 4 ↪ 4 * 6 = 24
---	--	---	-------------------------------------

### Tarefa 10.1: Aplicando `fatorial`

Digite a função `fatorial` em um arquivo fonte Haskell e carregue-o no ambiente interativo de Haskell.

- Mostre que `fatorial 7 = 5040` usando uma sequência de passos de simplificação.
- Determine o valor da expressão `fatorial 7` usando o ambiente interativo.
- Determine o valor da expressão `fatorial 1000` usando o ambiente interativo. Se você tiver uma calculadora científica, verifique o resultado na calculadora.
- Qual é o valor esperado para a expressão `div (fatorial 1000) (fatorial 999)`? Determine o valor desta expressão usando o ambiente interativo.
- O que acontece ao se calcular o valor da expressão `fatorial (-2)`?

Vejamos outro exemplo. A função que calcula a potência de dois (isto é, a base é dois) para números naturais pode ser definida recursivamente como segue:

```
potDois :: Integer -> Integer
potDois n
  | n == 0 = 1
  | n > 0  = 2 * potDois (n-1)
```

Nesta definição:

- A primeira cláusula estabelece que  $2^0 = 1$ . Este é o *caso base*.
- A segunda cláusula estabelece que  $2^n = 2 \times 2^{n-1}$ , sendo  $n > 0$ . Este é o *caso recursivo*.

Observe que no caso recursivo o subproblema `potDois (n-1)` é *mais simples* que o problema original `potDois n` e está mais próximo do caso base `potDois 0`.

Aplicando a função potência de dois:

```
potDois 4
~> 2 * potDois 3
~> 2 * (2 * potDois 2)
~> 2 * (2 * (2 * potDois 1))
~> 2 * (2 * (2 * (2 * potDois 0)))
~> 2 * (2 * (2 * (2 * 1)))
~> 2 * (2 * (2 * 2))
~> 2 * (2 * 4)
~> 2 * 8
~> 16
```

## Tarefa 10.2

Considere a seguinte definição para a função potência de dois:

```
potDois' :: Integer -> Integer
potDois' n
| n == 0    = 1
| otherwise = 2 * potDois' (n-1)
```

O que acontece ao calcular o valor da expressão `potDois' (-5)`?

Vejamos mais um exemplo de definição recursiva. A multiplicação de inteiros está disponível na biblioteca como uma operação primitiva por questões de eficiência. Porém ela pode ser definida usando adição e recursividade em um de seus argumentos:

```
mul :: Int -> Int -> Int
mul m n
| n == 0    = 0
| n > 0     = m + mul m (n-1)
| otherwise = negate (mul m (negate n))
```

Nesta definição:

- A primeira cláusula estabelece que quando o multiplicador é zero, o produto também é zero. Este é o *caso base*.
- A segunda cláusula estabelece que  $m \times n = m + m \times (n - 1)$ , sendo  $n > 0$ . Este é um *caso recursivo*.
- A terceira cláusula estabelece que  $m \times n = -(m \times (-n))$ , sendo  $n < 0$ . Este é outro *caso recursivo*.

Aplicando a função de multiplicação:

```
% mul 7 (-3)
~> negate (mul 7 (negate (-3)))
~> negate (mul 7 3)
~> negate (7 + mul 7 2)
~> negate (7 + (7 + mul 7 1))
~> negate (7 + (7 + (7 + mul 7 0)))
~> negate (7 + (7 + (7 + 0)))
~> negate (7 + (7 + 7))
~> negate (7 + 14)
~> negate 21
~> -21
```

A definição recursiva da multiplicação formalisa a idéia de que a multiplicação pode ser reduzida a adições repetidas.

### Tarefa 10.3

Mostre que `mul 5 6 = 30`.

Vamos analisar outro exemplo de função recursiva: a sequência de Fibonacci. Na sequência de Fibonacci

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

os dois primeiros elementos são 0 e 1, e cada elemento subsequente é dado pela soma dos dois elementos que o precedem na sequência. A função a seguir calcula o  $n$ -ésimo número de Fibonacci, para  $n \geq 0$ :

```
fib :: Int -> Int
fib n
  | n == 0 = 0
  | n == 1 = 1
  | n > 1  = fib (n-2) + fib (n-1)
```

Nesta definição:

- A primeira e a segunda cláusulas são os *casos base*.
- A terceira cláusula é o *caso recursivo*.

Neste caso temos **recursão múltipla**, pois a função sendo definida é usada mais de uma vez em sua própria definição.

Aplicando a função de fibonacci:

```
fib 5
~> fib 3 + fib 4
~> (fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3)
~> (1 + (fib 0 + fib 1)) + ((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2))
~> (1 + (0 + 1)) + ((0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1)))
~> (1 + 1) + (1 + (1 + (0 + 1)))
~> 2 + (1 + (1 + 1))
~> 2 + (1 + 2)
~> 2 + 3
~> 5
```

### Tarefa 10.4

Mostre que `fib 6 = 8`.

## 10.2 Recursividade mútua

**Recursividade mútua** ocorre quando duas ou mais funções são definidas em termos uma da outra. Para exemplificar vamos definir as funções `par` e `impar` usando recursividade mútua. As funções da biblioteca `even` (par) e `odd` (ímpar), que determinam se um número é par ou ímpar, respectivamente, geralmente são definidas usando o resto da divisão por dois:

```
par, impar :: Int -> Bool

par n = mod n 2 == 0

impar n = not (par n)
```

No entanto elas também podem ser definidas usando recursividade mútua:

```

par :: Int -> Bool
par n | n == 0    = True
      | n > 0     = impar (n-1)
      | otherwise = par (-n)

impar :: Int -> Bool
impar n | n == 0    = False
        | n > 0     = par (n-1)
        | otherwise = impar (-n)

```

Nestas definições observamos que:

- Zero é par, mas não é ímpar.
- Um número positivo é par se seu antecessor é ímpar.
- Um número positivo é ímpar se seu antecessor é par.
- Um número negativo é par (ou ímpar) se o seu oposto for par (ou ímpar).

Aplicando as função `par` e `impar`:

```

par (-5)
~> par 5
~> impar 4
~> par 3
~> impar 2
~> par 1
~> impar 0
~> False

```

## 10.3 Recursividade de cauda

Uma função recursiva apresenta **recursividade de cauda** se o *resultado final* da chamada recursiva é o resultado final da própria função. Se o resultado da chamada recursiva deve ser processado de alguma maneira para produzir o resultado final, então a função não apresenta recursividade de cauda.

Por exemplo, a função recursiva a seguir não apresenta recursividade de cauda:

```

fatorial :: Integer -> Integer
fatorial n
  | n == 0 = 1
  | n > 0  = fatorial (n-1) * n

```

No caso recursivo, o resultado da chamada recursiva `fatorial (n-1)` é multiplicado por `n` para produzir o resultado final.

A função recursiva a seguir também não apresenta recursividade de cauda:

```

par :: Integer -> Bool
par n
  | n == 0 = True
  | n > 0  = not (par (n-1))

```

No caso recursivo, a função `not` é aplicada ao resultado da chamada recursiva `par (n-1)` para produzir o resultado final.

Já a função recursiva `pdois` a seguir apresenta recursividade de cauda:



```

pdois :: Integer -> Integer
pdois n = pdois' n 1

pdois' :: Integer -> Integer -> Integer
pdois' n y
  | n == 0 = y
  | n > 0  = pdois' (n-1) (2*y)

```

No caso recursivo, o resultado da chamada recursiva `pdois' (n-1) (2*y)` é o resultado final.

### Tarefa 10.5

Mostre que `pdois 5 = 32`.

### Tarefa 10.6

Faça uma definição recursiva da função par usando recursividade de cauda.

## Otimização de chamada de cauda

Uma **chamada de cauda** acontece quando uma função chama outra função como sua *última ação*, não tendo mais nada a fazer além desta última ação. O *resultado final* da função é dado pelo resultado da chamada de cauda. Em tais situações o programa não precisa voltar para a função que chama quando a função chamada termina. Portanto, após a chamada de cauda, o programa não precisa manter qualquer informação sobre a função chamadora na pilha.

Algumas implementações de linguagem tiram proveito desse fato e na verdade não utilizam qualquer espaço extra de pilha quando fazem uma chamada de cauda, pois o espaço na pilha da própria função chamadora é reutilizado, já que ele não será mais necessário para a função chamadora. Esta técnica é chamada de **eliminação da cauda**, **otimização de chamada de cauda** ou ainda **otimização de chamada recursiva**. A **otimização de chamada de cauda** permite que funções com recursividade de cauda recorram indefinidamente *sem estourar a pilha*.

Considere novamente as funções `pdois` e `pdois'`.

```

pdois :: Integer -> Integer
pdois n = pdois' n 1

pdois' :: Integer -> Integer -> Integer
pdois' n y
  | n == 0 = y
  | n > 0  = pdois' (n-1) (2*y)

```

A figura a seguir ilustra a situação da pilha de execução na avaliação da expressão `pdois 3`, sem otimização de chamada de cauda.

<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 1 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 1 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 5 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 1 4 x = 1 y = 4 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 5 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 1 4 x = 1 y = 4 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 0 8 x = 0 y = 8 ↪ y ↪ 8</p>
<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 5 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 1 4 x = 1 y = 4 ↪ pdois' (x-1) (2*y) ↪ 8</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 5 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p> <p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y) ↪ 8</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p> <p>pdois' 3 1 x = 3 y = 5 ↪ pdois' (x-1) (2*y) ↪ 8</p>	<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1 ↪ 8</p>	

Já com otimização de chamada de cauda, as chamadas recursivas reaproveitam o quadro da função chamadora, não havendo necessidade de crescimento da pilha.

<p>pdois 3 n = 3 ↪ pdois' n 1</p>	<p>pdois' 3 1 x = 3 y = 1 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois' 2 2 x = 2 y = 2 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois' 1 4 x = 1 y = 4 ↪ pdois' (x-1) (2*y)</p>	<p>pdois' 0 8 x = 0 y = 8 ↪ y ↪ 8</p>
---	--	--	--	---

## Estruturas de repetição

Muitas linguagens funcionais não possuem *estruturas de repetição* e usam funções recursivas para fazer repetições. Nestes casos a otimização de chamada de cauda é fundamental para uma boa eficiência dos programas.

Em particular a linguagem Haskell não possui estruturas de repetição.

## 10.4 Vantagens da recursividade

A recursividade permite que:

- muitas funções possam ser naturalmente definidas em termos de si mesmas,
- propriedades de funções definidas usando recursão podem ser provadas usando **indução**, uma técnica matemática simples, mas poderosa.

## 10.5 Exercícios

### Tarefa 10.7: Fatorial duplo

O fatorial duplo de um número natural  $n$  é o produto de todos os números de 1 (ou 2) até  $n$ , contados de 2 em 2. Por exemplo, o fatorial duplo de 8 é  $8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ , e o fatorial duplo de 7 é  $7 \times 5 \times 3 \times 1 = 105$ . Defina uma função para calcular o fatorial duplo usando recursividade.

### Tarefa 10.8: Multiplicação em um intervalo

Defina uma função recursiva que recebe dois números naturais  $m$  e  $n$ , e retorna o produto de todos os números no intervalo  $[m, n]$ :

$$m \times (m + 1) \times \cdots \times (n - 1) \times n$$

### Tarefa 10.9: Fatorial

Usando a função definida no exercício 10.8, escreva uma definição não recursiva para calcular o fatorial de um número natural.

### Tarefa 10.10: Adição

Defina uma função recursiva para calcular a soma de dois números naturais, sem usar os operadores  $+$  e  $-$ . Utilize as funções `succ` e `pred` da biblioteca, que calculam respectivamente o sucessor e o antecessor de um valor.

### Tarefa 10.11: Potenciação

Defina uma função recursiva para calcular a potência de um número, considerando que o expoente é um número natural. Utilize o método das multiplicações sucessivas:

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ vezes}}$$

### Tarefa 10.12: Raiz quadrada inteira

A raiz quadrada inteira de um número inteiro positivo  $n$  é o maior número inteiro cujo quadrado é menor ou igual a  $n$ . Por exemplo, a raiz quadrada inteira de 15 é 3, e a raiz quadrada inteira de 16 é 4.

Defina uma função recursiva para calcular a raiz quadrada inteira.

### Tarefa 10.13: Quociente e resto da divisão inteira

Defina duas funções recursivas que calculam o quociente e o resto da divisão inteira de dois números naturais usando subtrações sucessivas.

#### Tarefa 10.14: Máximo divisor comum

Defina uma função recursiva para calcular o máximo divisor comum de dois números inteiros não negativos  $a$  e  $b$ , usando o algoritmo de Euclides:

$$\text{mdc}(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } b = 0, \\ \text{mdc}(b, a \bmod b) & \text{se } b > 0, \\ \text{mdc}(a, -b) & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

Nota: o prelúdio já tem a função `gcd` que calcula o máximo divisor comum de dois números inteiros.

#### Tarefa 10.15: Fatorial

Considere a seguinte função para calcular o fatorial de um número:

```
fat n = fat' n 1
  where
    fat' n x
      | n == 0 = x
      | n > 0 = fat' (n-1) (n*x)
```

- Mostre que `fat 6 = 720`.
- Compare o cálculo de `fat 6` com o cálculo de `fatorial 6` apresentado anteriormente. Qual versão da função fatorial é mais eficiente: `fatorial` ou `fat`? Explique.

#### Tarefa 10.16: Sequência de Fibonacci

Defina uma função com recursividade de cauda para calcular o  $n$ -ésimo ( $n \geq 0$ ) número de Fibonacci.

## 10.6 Soluções

### Tarefa 10.1 on page 10-3: Solução

```
fatorial 7
~> fatorial 6 * 7
~> (fatorial 5 * 6) * 7
~> ((fatorial 4 * 5) * 6) * 7
~> (((fatorial 3 * 4) * 5) * 6) * 7
~> ((((fatorial 2 * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> ((((((fatorial 1 * 2) * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> (((((((fatorial 0 * 1) * 2) * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> (((((((1 * 1) * 2) * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> ((((((1 * 2) * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> (((((2 * 3) * 4) * 5) * 6) * 7
~> (((6 * 4) * 5) * 6) * 7
~> ((24 * 5) * 6) * 7
~> 120 * 6 * 7
~> 720 * 7
~> 5040
```

a)

b) **\*Main>** fatorial 7  
5040

c) **\*Main>** fatorial 1000

```
402387260077093773543702433923003985719374864210714632543799910429938
512398629020592044208486969404800479988610197196058631666872994808558
901323829669944590997424504087073759918823627727188732519779505950995
276120874975462497043601418278094646496291056393887437886487337119181
045825783647849977012476632889835955735432513185323958463075557409114
262417474349347553428646576611667797396668820291207379143853719588249
808126867838374559731746136085379534524221586593201928090878297308431
392844403281231558611036976801357304216168747609675871348312025478589
320767169132448426236131412508780208000261683151027341827977704784635
868170164365024153691398281264810213092761244896359928705114964975419
909342221566832572080821333186116811553615836546984046708975602900950
537616475847728421889679646244945160765353408198901385442487984959953
319101723355556602139450399736280750137837615307127761926849034352625
200015888535147331611702103968175921510907788019393178114194545257223
865541461062892187960223838971476088506276862967146674697562911234082
439208160153780889893964518263243671616762179168909779911903754031274
622289988005195444414282012187361745992642956581746628302955570299024
324153181617210465832036786906117260158783520751516284225540265170483
304226143974286933061690897968482590125458327168226458066526769958652
682272807075781391858178889652208164348344825993266043367660176999612
831860788386150279465955131156552036093988180612138558600301435694527
224206344631797460594682573103790084024432438465657245014402821885252
470935190620929023136493273497565513958720559654228749774011413346962
715422845862377387538230483865688976461927383814900140767310446640259
899490222221765904339901886018566526485061799702356193897017860040811
889729918311021171229845901641921068884387121855646124960798722908519
296819372388642614839657382291123125024186649353143970137428531926649
875337218940694281434118520158014123344828015051399694290153483077644
569099073152433278288269864602789864321139083506217095002597389863554
```



fib 6

↪ fib 4 + fib 5

↪ (fib 2 + fib 3) + (fib 3 + fib 4)

↪ ((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2)) + ((fib 1 + fib 2) + (fib 2 + fib 3))

↪ ((0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))) + ((1 + (fib 0 + fib 1)) + ((fib 0 + fib 1) + (fib 1 + fib 2)))

↪ ((0 + 1) + (1 + (0 + 1))) + ((1 + (0 + 1)) + ((0 + 1) + (1 + (fib 0 + fib 1))))

↪ ((0 + 1) + (1 + (0 + 1))) + ((1 + (0 + 1)) + ((0 + 1) + (1 + (0 + 1))))

↪ 8

Tarefa 10.5 on page 10-7: Solução

---

pdois 5

↪ pdois' 5 1

↪ pdois' 4 2

↪ pdois' 3 4

↪ pdois' 2 8

↪ pdois' 1 16

↪ pdois' 0 32

↪ 32

Tarefa 10.6 on page 10-7: Solução

---

```
par n = par' n True
```

```
par' n y
```

```
| n == 0 = y
```

```
| otherwise = par' (n-1) (not y)
```

Tarefa 10.7 on page 10-9: Solução

---

```
fatorialDuplo n
```

```
| n == 0 = 1
```

```
| n == 1 = 1
```

```
| n > 1 = n * fatorialDuplo (n - 2)
```

Tarefa 10.8 on page 10-9: Solução

---

```
produtoIntervalo m n
```

```
| m > n = 1
```

```
| otherwise = m * produtoIntervalo (m+1) n
```

Tarefa 10.9 on page 10-9: Solução

---

```
fatorial n = produtoIntervalo 1 n
```

#### Tarefa 10.10 on page 10-9: Solução

---

```
soma m n
| n == 0 = m
| otherwise = soma (succ m) (pred n)
```

#### Tarefa 10.11 on page 10-9: Solução

---

```
potencia x n
| n == 0 = 1
| otherwise = x * potencia x (n-1)
```

#### Tarefa 10.12 on page 10-9: Solução

---

```
raizInteira n = raizInteira' n n
where
  raizInteira' n i
    | i2 > n = raizInteira' n (i-1)
    | otherwise = i
```

#### Tarefa 10.13 on page 10-9: Solução

---

```
quociente p q
| p < q = 0
| otherwise = 1 + quociente (p - q) q

resto p q
| p < q = p
| otherwise = resto (p - q) q
```

#### Tarefa 10.14 on page 10-10: Solução

---

```
mdc a b
| b == 0 = a
| b > 0 = mdc b (mod a b)
| b < 0 = mdc a (negate b)
```

#### Tarefa 10.15 on page 10-10: Solução

---

a) Cálculo:



```
fat 6
↪ fat' 6 1
↪ fat' 5 6
↪ fat' 4 30
↪ fat' 3 120
↪ fat' 2 360
↪ fat' 1 720
↪ fat' 0 720
↪ 720
```

- b) `fat` é mais eficiente, pois as operações de multiplicação não ficam pendentes aguardando o retorno das chamadas recursivas.

#### Tarefa 10.16 on page 10-10: Solução

---

```
fibonacci n = fibonacci' n 0 1
where
  fibonacci' n a b
    | n == 0 = a
    | n == 1 = b
    | n >= 2 = fibonacci' (n-1) b (a+b)
```

# 11 Ações de E/S Recursivas

## Resumo

Nesta aula vamos aprender a definir ações de entrada e saída recursivas, que nos permitirá definir ações repetitivas através de recursividade.

## Sumário

11.1 A função <code>return</code> . . . . .	11-1
11.2 Exemplo: exibir uma sequência . . . . .	11-1
11.3 Exemplo: somar uma sequência . . . . .	11-2
11.4 Problemas . . . . .	11-3
11.5 Soluções . . . . .	11-6

## 11.1 A função `return`

Às vezes é necessário escrever uma ação de E/S que não faz nenhuma interação com o mundo e retorna um valor previamente especificado. Isto é possível usando a função `return`.

```
return :: a -> IO a
```

A função `return` recebe um valor e resulta em uma ação de E/S que não interage com o mundo e retorna o valor recebido.

A função `return` é muito utilizada nos casos bases de definições recursivas.

## 11.2 Exemplo: exibir uma sequência

Faça um programa que exiba todos os números naturais pares menores ou iguais a 30.

```
module Main (main) where

mostraLista :: Show a => [a] -> IO ()
mostraLista [] = return ()
mostraLista (x:xs) = do print x
                        mostraLista xs

mostraListaETamanho :: Show a => [a] -> IO ()
mostraListaETamanho lista =
  do mostraLista lista
     print (length lista)

main :: IO ()
main = do mostraLista [0,2..30]
         mostraListaETamanho [True, False, False]
```

## 11.3 Exemplo: somar uma sequência

Escreva um programa que obtém uma sequência de números inteiros até encontrar o valor zero, e mostra a soma dos números lidos.

```
-- solução sem recursividade de cauda

module Main (main) where

main = do putStrLn "Digite uma sequência de números (um por linha)"
          putStrLn "Para terminar digite o valor zero"
          soma <- lerESomar
          putStr "A soma dos números digitados é "
          print soma

lerESomar = do n <- readLn
              if n == 0
                then return 0
                else do somaResto <- lerESomar
                        return (n + somaResto)
```

```
-- solução com recursividade de cauda

module Main (main) where

main = do putStrLn "Digite uma sequência de números (um por linha)"
          putStrLn "Para terminar digite o valor zero"
          soma <- lerESomar 0
          putStr "A soma dos números digitados é "
          print soma

lerESomar total = do n <- readLn
                    if n == 0
                      then return total
                      else lerESomar (total + n)
```

```
-- solução que separa a leitura do processamento
-- sem recursividade de cauda

module Main (main) where

main = do putStrLn "Digite uma sequência de números (um por linha)"
          putStrLn "Para terminar digite o valor zero"
          lista <- lerLista
          putStr "A soma dos números digitados é "
          print (sum lista)

lerLista = do x <- readLn
             if x == 0
               then return []
               else do resto <- lerLista
                       return (x:resto)
```

```

-- solução que separa a leitura do processamento
-- com recursividade de cauda

module Main (main) where

main = do putStrLn "Digite uma sequência de números (um por linha)"
          putStrLn "Para terminar digite o valor zero"
          lista <- lerLista []
          putStr "A soma dos números digitados é "
          print (sum lista)

lerLista xs = do x <- readLn
                if x == 0
                then return (reverse xs)
                else lerLista (x:xs)

```

## 11.4 Problemas

### Tarefa 11.1: Soma de uma sequência de números

Faça um programa que leia um número natural  $n$ , e então leia outros  $n$  números e calcule e exiba a soma destes números.

#### Exemplo de execução da aplicação

```

Quantidade de números: 4
Digite um número: 10
Digite um número: -5
Digite um número: 1
Digite um número: 20
Soma dos números digitados: 26

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```

Quantidade de números: -6
Soma dos números digitados: 0

```

### Tarefa 11.2: Média aritmética de uma sequência de números

Faça um programa que leia uma sequência de números não negativos e determine a média aritmética destes números. A entrada dos números deve ser encerrada com um número inválido (negativo).

#### Exemplo de execução da aplicação

```
Cálculo da média aritmética
-----
Digite uma sequência de números (um por linha)
Para terminar digite um valor negativo
10
9
8
9.2
-1
A média dos números digitados é 9.171428571428573
```

#### Exemplo de execução da aplicação

```
Cálculo da média aritmética
-----
Digite uma sequência de números (um por linha)
Para terminar digite um valor negativo
-5
Sequência vazia
```

### Tarefa 11.3: Perda de massa por radioatividade

Um elemento químico radioativo perde sua massa de acordo com a função

$$m(t) = m_0 e^{-kt}$$

onde,  $t$  é o tempo (em segundos),  $m_0$  é a massa inicial (em gramas) e  $k$  é a constante  $5 \times 10^{-2}$ .

Faça uma aplicação que, dada a massa inicial desse elemento, calcule a perda de massa durante um minuto, exibindo as massas resultantes em intervalos de 10 segundos.

### Tarefa 11.4: Cálculo aproximado de $\pi$

A série abaixo converge para o número  $\pi$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

$$4 \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

Defina uma função `valorPi :: Integer -> Double` que recebe o número desejado de termos, e resulta no valor aproximado de  $\pi$  calculado de acordo com a definição dada.

Dica 1: defina e use uma função recursiva `soma :: Integer -> Integer -> Double` para o cálculo da série mencionada, recebendo como argumentos os limites inferior e superior do somatório.

Dica 2: para converter de inteiro para double, use a função `fromIntegral`.

Defina a ação de entrada e saída `main :: IO ()` que ao ser executada solicita ao usuário o número de parcelas a ser usado para o cálculo aproximado de  $\pi$ , e calcula (usando a função `valorPi`) e exibe o valor aproximado de  $\pi$  usando esse número de parcelas.

### Tarefa 11.5: Aumento salarial

Um funcionário de uma empresa recebe aumento salarial anualmente. O primeiro aumento é de 1,5% sobre seu salário inicial. Os aumentos subsequentes sempre correspondem ao dobro do percentual de aumento do ano anterior. Faça uma aplicação onde o usuário deve informar o salário inicial do funcionário, o ano de contratação e o ano atual, e calcula e exibe o seu salário atual.

### Tarefa 11.6: Fechamento de notas de uma disciplina

Faça uma aplicação para fechamento das notas de uma disciplina. Cada aluno recebe uma nota para cada uma das três atividades desenvolvidas. O usuário deverá informar a quantidade de alunos na turma, e em seguida a matrícula e as três notas de cada aluno. A nota final de um aluno é dada pela média aritmética de suas três notas.

A aplicação deverá calcular e exibir:

- a nota final de cada aluno,
- a situação do aluno, dada pela tabela seguinte

nota final	situação
até 3	reprovado
entre 3 (inclusive) e 7	exame especial
acima de 7 (inclusive)	aprovado

- a média da turma
- o percentual de alunos aprovados
- o percentual de alunos em exame especial
- o percentual de alunos reprovados

#### Dicas

- Primeiramente obtenha os dados armazenando-os em uma lista.
- Posteriormente processe os dados para calcular e exibir cada um dos itens solicitados.
- Faça uma função para calcular a resposta em cada um dos itens indicados no exercício, e use a função na definição de `main`.

### Tarefa 11.7: Correção de provas de múltipla escolha

Faça um programa para corrigir provas de múltipla escolha que foram aplicadas em uma turma de alunos. O usuário deverá informar:

- o gabarito (as respostas corretas de cada questão) da prova
- a matrícula e as respostas de cada aluno da turma

As notas devem ser normalizadas na faixa de zero a dez. Assim para calcular a nota obtida em uma prova, divida a soma dos pontos obtidos (um ponto para cada resposta correta) pelo número de questões na prova, e multiplique o resultado por dez.

Calcule e mostre:

1. a matrícula e a nota de cada aluno
2. a taxa (em porcentagem) de aprovação, sabendo-se que a nota mínima para aprovação é sete.

#### Dicas

- Faça uma ação de E/S para obter os dados do gabarito (uma string onde caracter é a resposta correta de uma questão).
- Faça uma ação de E/S para obter os dados das provas dos alunos (uma lista de pares, onde o primeiro componente do par é a matrícula do aluno (um número inteiro), e o segundo componente do par são as respostas do aluno (uma string)).
- Faça uma função que recebe o gabarito e a lista das provas dos alunos e resulta na lista dos resultados, formada por pares contendo a matrícula e a nota do aluno.
- Faça uma função que recebe a lista dos resultados e resulta na porcentagem de aprovação.
- Use estas funções para montar a aplicação.

## 11.5 Soluções

### Tarefa 11.1 on page 11-3: Solução

Primeira versão: sem recursividade de cauda

```
module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
  putStr "Quantidade de números: "
  n <- readLn
  s <- lerESomar n
  putStr "Soma dos números digitados: "
  print s

lerESomar :: Integer -> IO Integer
lerESomar n | n <= 0 = return 0
            | n > 0  = do putStr "Digite um número: "
                          x <- readLn
                          s <- lerESomar (n-1)
                          return (x+s)
```

Segunda versão: com recursividade de cauda

```
module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
  putStr "Quantidade de números: "
  n <- readLn
  s <- lerESomar n 0
  putStr "Soma dos números digitados: "
  print s

lerESomar n s | n <= 0 = return s
            | n > 0  = do putStr "Digite um número: "
                          x <- readLn
                          lerESomar (n-1) (x+s)
```

Terceira versão: entrada dos dados e cálculos separados

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
  putStr "Quantidade de números: "
  n <- readLn
  lista <- leLista n
  let soma = sum lista
  putStrLn ("Soma dos números digitados: " ++ show soma)

leLista n | n <= 0    = return []
          | otherwise = do putStr "Digite um número: "
                           x <- readLn
                           xs <- leLista (n-1)
                           return (x:xs)

```

Tarefa 11.2 on page 11-4: Solução

---

```

module Main (main) where

main = do putStrLn "Cálculo da média aritmética"
  putStrLn "-----"
  putStrLn "Digite uma sequência de números (um por linha)"
  putStrLn "Para terminar digite um valor negativo"
  lista <- lerLista
  case lista of
    [] -> putStrLn "Sequência vazia"
    _  -> do putStr "A média dos números digitados é "
             print (sum lista / fromIntegral (length lista))

lerLista = do x <- readLn
  if x < 0
  then return []
  else do xs <- lerLista
         return (x:xs)

```

Tarefa 11.4 on page 11-4: Solução

---

```

module Main where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Cálculo aproximado de  por série"
    putStrLn "===== "
    putStr "Digite o número de termos desejados na série: "
    qtdeTermos <- readLn
    let pi = valorPi (qtdeTermos - 1)
    putStrLn (" : " ++ show pi)

valorPi :: Integer -> Double
valorPi n =
  4 * soma 0 n

```



```
soma :: Integer -> Integer -> Double
soma i n
  | i <= n = (-1)^i / (2 * fromIntegral i + 1) + soma (i + 1) n
  | otherwise = 0
```

#### Tarefa 11.6 on page 11-5: Solução

```
module Main where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

type Matricula = Int
type Nota = Float

main :: IO ()
main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "====="
    putStrLn "Fechamento de Notas BCC222 v1.0"
    putStrLn "====="
    putStr "Quantidade de alunos no turma: "
    qtde <- readLn
    dados <- leDadosAlunos qtde
    let notasFinais = calculaNotaFinal dados
    putStrLn ""
    putStrLn "Notas finais:"
    exibeLista notasFinais
    let situações = calculaSituacao notasFinais
    putStrLn ""
    putStrLn "Situações:"
    exibeLista situações
    let médiaTurma = calculaMediaTurma notasFinais
    putStrLn ""
    putStrLn "Média da turma:"
    putStrLn (show médiaTurma)
    let percAprov = calculaAprovados notasFinais
    putStrLn ""
    putStrLn "Percentual de aprovação:"
    putStrLn (show percAprov)
    let percReprov = calculaReprovados notasFinais
    putStrLn "Percentual de reprovação:"
    putStrLn (show percReprov)
    let percExame = calculaExames notasFinais
    putStrLn "Percentual de exames:"
    putStrLn (show percExame)
    putStrLn "====="
    putStrLn "Thank you for using our software. It rocks!"
    putStrLn "====="

-- Lê da entrada padrão a matrícula e as 3 notas de cada aluno

leDadosAlunos :: Int -> IO [(Matricula, Nota, Nota, Nota)]
leDadosAlunos n | n <= 0 = return []
                | otherwise = do putStr "Matrícula: "
                                m <- readLn
                                putStr "Nota 1: "
                                n1 <- readLn
```

```

        putStr "Nota 2: "
        n2 <- readLn
        putStr "Nota 3: "
        n3 <- readLn
        demais <- leDadosAlunos (n-1)
        return ((m, n1, n2, n3) : demais)

-- Calcula a nota final de cada aluno
calculaNotaFinal :: [(Matricula, Nota, Nota, Nota)] -> [(Matricula, Nota)]
calculaNotaFinal [] = []
calculaNotaFinal ((m,n1,n2,n3):demais) = (m,media) : calculaNotaFinal demais
    where media = (n1+n2+n3)/3

-- Calcula a situação de cada aluno
calculaSituacao :: [(Matricula, Nota)] -> [(Matricula, String)]
calculaSituacao [] = []
calculaSituacao ((m,nota):demais) = (m,situacao) : calculaSituacao demais
    where situacao | nota < 3 = "reprovado"
                  | nota < 7 = "exame"
                  | otherwise = "aprovado"

-- Calcula a média da turma
calculaMediaTurma :: [(Matricula, Nota)] -> Nota
calculaMediaTurma [] = 0
calculaMediaTurma dados = somaNotas dados / fromIntegral (length dados)
    where somaNotas [] = 0
          somaNotas ((_,nota):demais) = nota + somaNotas demais

-- Calcula percentual de aprovação
calculaAprovados :: [(Matricula, Nota)] -> Float
calculaAprovados dados = 100 * contaAprovados dados / fromIntegral (length dados)
    where contaAprovados [] = 0
          contaAprovados ((_,nota):demais) | nota >= 7 = 1 + contaAprovados demais
          | otherwise = contaAprovados demais

-- Calcula percentual de reprovação
calculaReprovados :: [(Matricula, Nota)] -> Float
calculaReprovados dados = 100 * contaReprovados dados / fromIntegral (length dados)
    where contaReprovados [] = 0
          contaReprovados ((_,nota):demais) | nota >= 3 && nota < 7 = 1 + contaReprovados demais
          | otherwise = contaReprovados demais

-- Calcula percentual de exame
calculaExames :: [(Matricula, Nota)] -> Float
calculaExames dados = 100 * contaExames dados / fromIntegral (length dados)
    where contaExames [] = 0
          contaExames ((_,nota):demais) | nota < 3 = 1 + contaExames demais
          | otherwise = contaExames demais

-- Exibir uma lista de pares
exibeLista :: (Show a, Show b) => [(a,b)] -> IO ()
exibeLista [] = return ()
exibeLista ((a, b):demais) = do putStrLn (show a ++ " => " ++ show b)
                                exibeLista demais

```

# 12 Casamento de Padrão

## Resumo

Linguagens funcionais modernas usam casamento de padrão em várias situações, como por exemplo na seleção de componentes de estruturas de dados, na escolha de alternativas em expressões de seleção múltipla, e na aplicação de funções.

Nesta aula vamos aprender as principais formas de padrão e como funciona a operação casamento de padrão. Vamos ainda conhecer algumas construções de Haskell que usam casamento de padrão, como definições de valores e funções e expressões de seleção múltipla.

## Sumário

<b>12.1 Casamento de padrão</b>	<b>12-1</b>
12.1.1 Casamento de padrão	12-1
12.1.2 Padrão constante	12-2
12.1.3 Padrão variável	12-2
12.1.4 Padrão curinga	12-2
12.1.5 Padrão tupla	12-3
12.1.6 Padrões lista	12-3
12.1.7 Padrão lista na notação especial	12-4
<b>12.2 Definição de função usando padrões</b>	<b>12-5</b>
12.2.1 Definindo funções com casamento de padrão	12-5
<b>12.3 Casamento de padrão em definições</b>	<b>12-9</b>
<b>12.4 Problema: validação de números de cartão de crédito</b>	<b>12-10</b>
<b>12.5 Problema: torres de Hanoi</b>	<b>12-12</b>
<b>12.6 Soluções</b>	<b>12-14</b>

## 12.1 Casamento de padrão

### 12.1.1 Casamento de padrão

Em ciência da computação, **casamento de padrão**<sup>1</sup> é o ato de verificação da presença de um **padrão** em um dado ou em um conjunto de dados. O padrão é rigidamente especificado. O casamento de padrão é usado para testar se o objeto de estudo possui a estrutura desejada.

Algumas linguagens de programação funcionais como Haskell, ML e Mathematica possuem uma sintaxe especial para expressar padrões e uma construção na linguagem para execução condicional baseada no casamento de padrões.

Em Haskell um **padrão** é uma construção da linguagem de programação que permite *analisar* a estrutura de um valor e *associar variáveis* aos seus componentes.

**Casamento de padrão** é uma operação envolvendo *um padrão* e *uma expressão* que faz a correspondência (*casamento*) entre o padrão e o valor da expressão. Um casamento de padrão pode *sucedder* ou *falhar*, dependendo da forma do padrão e da expressão envolvidos. Quando o casamento de padrão sucede as **variáveis** que ocorrem no padrão são *associadas* aos componentes correspondentes do valor.

<sup>1</sup>Pattern matching em inglês.

Por exemplo o padrão ("ana", peso, \_) especifica valores que são triplas onde o primeiro componente é a string "ana", o segundo componente é chamado de **peso**, e o terceiro componente é irrelevante. O valor ("ana", 58.7, 'F') casa com este padrão e em consequência a variável **peso** é associada ao valor 58.7. Já o valor ("pedro", 75.3, 'M') não casa com esse padrão.

Em um casamento de padrão, o padrão e a expressão devem ser do *mesmo tipo*.

Existem várias **formas de padrão**. Na seqüência algumas delas são apresentadas.

## 12.1.2 Padrão constante

O **padrão constante** é simplesmente uma *constante*. O **casamento** *sucede* se e somente se o padrão for *idêntico* ao valor. Nenhuma associação de **variável** é produzida.

Veja os exemplos seguintes, onde ✓ indica sucesso e ✗ indica falha:

padrão	valor	casamento
10	10	✓
10	28	✗
10	'P'	erro de tipo
'P'	'P'	✓
'P'	'q'	✗
'P'	True	erro de tipo
True	True	✓
True	False	✗
True	65	erro de tipo
GT	GT	✓
GT	EQ	✗

✓: sucede

✗: falha

## 12.1.3 Padrão variável

O **padrão variável** é simplesmente um identificador de *variável* de valor (e como tal deve começar com letra minúscula). O **casamento** *sucede sempre*. A **variável** é associada ao *valor*.

Exemplos:

padrão	valor	casamento
x	10	✓ x ↦ 10
alfa	563.1223	✓ alfa ↦ 563.1223
letra	'K'	✓ letra ↦ 'K'
nomeCliente	"Ana Maria"	✓ nomeCliente ↦ "Ana Maria"
pessoa	("Ana", 'F', 16)	✓ pessoa ↦ ("Ana", 'F', 16)
notas	[5.6, 7.1, 9.0]	✓ notas ↦ [5.6, 7.1, 9.0]

## 12.1.4 Padrão curinga

O **padrão curinga** é escrito como um sublinhado (\_). O **casamento** *sucede sempre*. *Nenhuma* associação de **variável** é produzida. \_ é também chamado de **variável anônima**, pois, assim como a variável, casa com qualquer valor, porém não nomeia o valor.

Exemplos:

padrão	valor	casamento
-	10	✓
-	28	✓
-	'P'	✓
-	()	✓
-	(18,3,2012)	✓
-	"Ana Maria"	✓
-	[5.6,7.1,9.0]	✓

### 12.1.5 Padrão tupla

Uma **tupla** de padrões também é um padrão:

$$( \text{padrão}_1, \dots, \text{padrão}_n )$$

O **casamento** *sucede* se e somente se cada um dos padrões casar com o componente correspondente do valor. Se as *aridades* (tamanhos) do padrão tupla e do valor tupla forem *diferentes*, então ocorre um *erro de tipo*.

Exemplos de padrão tupla:

padrão	valor	casamento
(18, True)	(18, True)	✓
(97, True)	(18, True)	×
(18, False)	(18, True)	×
(18, 'M')	(18, True)	erro de tipo
(18, True, 'M')	(18, True)	erro de tipo
()	()	✓
(x, y)	(5, 9)	✓ $x \mapsto 5, y \mapsto 9$
(d, _, a)	(5, 9, 2012)	✓ $d \mapsto 5, a \mapsto 2012$
(x, y, z)	(5, 9)	erro de tipo
(18, m, a)	(18, 3, 2012)	✓ $m \mapsto 3, a \mapsto 2012$
(d, 5, a)	(18, 3, 2012)	×
(nome, sexo, _)	("Ana", 'F', 18)	✓ $\text{nome} \mapsto \text{"Ana"}, \text{sexo} \mapsto \text{'F'}$
(_, _, idade)	("Ana", 'F', 18)	✓ $\text{idade} \mapsto 18$
(_, (_, fam), 9)	('F', ("Ana", "Dias"), 9)	✓ $\text{fam} \mapsto \text{"Dias"}$
(_, (_, fam), 5)	('F', ("Ana", "Dias"), 9)	×

### 12.1.6 Padrões lista

Estruturalmente uma lista pode ser vazia ou não vazia:

- **padrão lista vazia**

[]

- é um padrão constante
- o casamento sucede se e somente se o valor for a lista vazia

- **padrão lista não vazia**

$$\text{pad}_1 : \text{pad}_2$$

- é formado por dois padrões  $\text{pad}_1$  e  $\text{pad}_2$
- o casamento sucede se e somente se o valor for uma lista não vazia cuja cabeça casa com  $\text{pad}_1$  e cuja cauda casa com  $\text{pad}_2$
- **:** é o construtor de lista não vazia, um operador binário infix associativo à direita com precedência 5 (logo abaixo dos operadores aritméticos aditivos (+) e (-)).

Exemplos de padrões lista:

- O padrão `[]` casa somente com a lista vazia.

padrão	valor	casamento
<code>[]</code>	<code>[]</code>	✓
<code>[]</code>	<code>[1,2,3]</code>	✗

- O padrão `x:xs` casa com qualquer lista não vazia, associando as variáveis `x` e `xs` com a cabeça e com a cauda da lista, respectivamente.

padrão	valor	casamento
<code>x:xs</code>	<code>[]</code>	✗
<code>x:xs</code>	<code>[1,2,3,4]</code>	✓ $x \mapsto 1, xs \mapsto [2,3,4]$
<code>x:xs</code>	<code>['A']</code>	✓ $x \mapsto 'A', xs \mapsto []$

- O padrão `x:y: _` casa com qualquer lista que tenha pelo menos dois elementos, associando as variáveis `x` e `y` ao primeiro e segundo elementos da lista, respectivamente.

padrão	valor	casamento
<code>x:y: _</code>	<code>[]</code>	✗
<code>x:y: _</code>	<code>["ana"]</code>	✗
<code>x:y: _</code>	<code>[1,2]</code>	✓ $x \mapsto 1, y \mapsto 2$
<code>x:y: _</code>	<code>[1,2,3,4]</code>	✓ $x \mapsto 1, y \mapsto 2$

- O padrão `x:_:z:[]` casa com qualquer lista que tenha exatamente três elementos, associando as variáveis `x` e `z` ao primeiro e ao terceiro elementos da lista, respectivamente.

padrão	valor	casamento
<code>x:_:z:[]</code>	<code>[]</code>	✗
<code>x:_:z:[]</code>	<code>["ana"]</code>	✗
<code>x:_:z:[]</code>	<code>[1,2,3]</code>	✓ $x \mapsto 1, z \mapsto 3$
<code>x:_:z:[]</code>	<code>[1,2,3,4,5]</code>	✗

- O padrão `0:a:_` casa com qualquer lista de números que tenha pelo menos dois elementos, sendo o primeiro igual a zero, associando a variável `a` ao segundo elemento da lista.

padrão	valor	casamento
<code>0:a:_</code>	<code>[]</code>	✗
<code>0:a:_</code>	<code>[0]</code>	✗
<code>0:a:_</code>	<code>[0,2,3]</code>	✓ $a \mapsto 2$
<code>0:a:_</code>	<code>[0,10,6,3]</code>	✓ $a \mapsto 10$
<code>0:a:_</code>	<code>[7,0,8]</code>	✗

- O padrão `(m,_):_` casa com qualquer lista não vazia de pares, associando a variável `m` ao primeiro componente do primeiro elemento da lista.

padrão	valor	casamento
<code>(m,_):_</code>	<code>[]</code>	✗
<code>(m,_):_</code>	<code>[("fim",True)]</code>	✓ $m \mapsto \text{"fim"}$
<code>(m,_):_</code>	<code>[(10,'M'),(20,'F')]</code>	✓ $m \mapsto 10$

## 12.1.7 Padrão lista na notação especial

O padrão

$[ \text{padrão}_1 , \dots , \text{padrão}_n ]$

é uma *abreviação sintática* para

$$padr\tilde{a}o_1 : \dots : padr\tilde{a}o_n : []$$

cujo casamento sucede somente se o valor for uma lista com exatamente  $n$  elementos.

Exemplos: o padrão `[1,alfa]` casa com qualquer lista de dois números que começa com 1, associando a variável `alfa` ao segundo elemento da lista.

padrão	valor	casamento
<code>[1,alfa]</code>	<code>[]</code>	×
<code>[1,alfa]</code>	<code>[1]</code>	×
<code>[1,alfa]</code>	<code>[1,5]</code>	✓ <code>alfa ↦ 5</code>
<code>[1,alfa]</code>	<code>[9,5]</code>	×
<code>[1,alfa]</code>	<code>[1,2,3]</code>	×

## 12.2 Definição de função usando padrões

### 12.2.1 Definindo funções com casamento de padrão

Uma **definição de função** é formada por uma *seqüência de equações*. Os **parâmetros** usados em uma equação para representar os argumentos são *padrões*. Em uma **aplicação de função** o resultado é dado pela primeira equação cujos *parâmetros casam* com os respectivos argumentos, e cuja *guarda* (se houver) é *verdadeira*. Se em todas as equações os casamentos de padrão *falharem* ou todas as guardas forem *falsas*, ocorre um *erro de execução*.

Geralmente o uso de padrões para especificar os argumentos torna a definição da função mais *clara* e *concisa*.

Exemplo: a função `not` mapeia `False` a `True`, e `True` a `False`:

```
not :: Bool -> Bool
not False = True
not True  = False
```

```
not False  ~> True
not (even 6) ~> False
```

Exemplo: a função `(&&)` calcula a conjunção (e lógico) de dois valores lógicos:

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True  && True   = True
True  && False  = False
False && True   = False
False && False  = False
```

```
True  && True   ~> True
False && True   ~> False
2>3 && odd 4    ~> False
```

Exemplo: outra possível definição para `(&&)`:

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True  && True   = True
_     && _      = False
```

```
True  && True   ~> True
False && True   ~> False
2>3 && 2<3      ~> False
```

Exemplo: outra definição para `(&&)`:

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True  && b = b
False && _ = False
```

```
True && True  ~> True
2>3 && 2<3    ~> False
2<3 && even 5 ~> False
```

Exemplo: de novo outra definição para (&&):

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
b && b = b
_ && _ = False
```

Esta definição está *incorreta*, pois *não é possível usar uma variável mais de uma vez nos padrões (princípio da linearidade)*.

Outros exemplos:

```
fst :: (a,b) -> a
fst (x,_) = x
```

```
snd :: (a,b) -> b
snd (_,y) = y
```

```
fst (1+2,1-2) ~> 3
snd (div 5 0,even 9) ~> False
```

### Tarefa 12.1: Disjunção lógica

Dê três definições diferentes para o operador lógico ou (`||`), utilizando casamento de padrão.

### Tarefa 12.2: Conjunção lógica

Redefina a seguinte versão do operador lógico e (&&) usando expressões condicionais ao invés de casamento de padrão:

```
True && True = True
_ && _ = False
```

### Tarefa 12.3: Conjunção lógica

Redefina a seguinte versão do operador lógico e (&&) usando expressões condicionais ao invés de casamento de padrão:

```
True && b = b
False && _ = False
```

Comente sobre o diferente número de expressões condicionais necessárias em comparação com o exercício 12.2.



#### Tarefa 12.4: Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$  no espaço é dada por

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Defina uma função que recebe dois pontos no espaço e retorna a distância entre eles. Considere que um ponto no espaço é representado por uma tripla de números que são as coordenadas do ponto. Use casamento de padrão.

#### Tarefa 12.5

Estude a seguinte definição e apresente uma definição alternativa mais simples desta função, usando padrões.

```
opp :: (Int, (Int, Int)) -> Int
opp z = if fst z == 1
        then fst (snd z) + snd (snd z)
        else if fst z == 2
              then fst (snd z) - snd (snd z)
              else 0
```

#### Tarefa 12.6

Defina uma função usando casamento de padrão que retorna o sucessor do primeiro elemento de uma lista, se houver, e zero caso contrário.

#### Tarefa 12.7

Usando casamento de padrão, defina uma função que, dada uma lista de números, retorna

- a soma dos dois primeiros elementos se a lista tiver pelo menos dois elementos,
- a cabeça da lista se ela contiver apenas um elemento, e
- zero caso contrário.

#### Tarefa 12.8

Resolva os exercícios 12.6 e 12.7 usando funções da biblioteca ao invés de casamento de padrão.

#### Tarefa 12.9: Média das notas

A seguir é mostrada uma aplicação (incompleta) para fechamento das notas de uma disciplina. Cada aluno recebe três notas nas atividades desenvolvidas. O usuário deverá informar a quantidade de alunos na turma, e em seguida as notas de cada aluno. A aplicação calcula e exibe a média da turma.

Complete a aplicação definindo as funções `somaNotas` e `mediaTurma`.

A função `somaNotas` recebe uma lista com as três notas de cada aluno, e resulta na soma das médias das três notas de todos os alunos. Esta função deverá ser recursiva:

- caso base: lista vazia; neste caso a soma é zero (elemento neutro da adição)
- caso recursivo: lista não vazia; neste caso a soma é obtida somando a média das notas do primeiro elemento da lista com a soma do resto da lista

A função `mediaTurma` recebe uma lista com as três notas de cada aluno, e resulta na média de todas as notas. Esta função deve usar a função `somaNotas` e a função `length`. Como o resultado de `length` é do tipo `Int`, será necessário convertê-lo para o tipo `Float` para calcular a média. Use a função `fromIntegral` do prelúdio para converter um número de um tipo integral para qualquer tipo numérico que for apropriado no contexto.

```

module Main where

import System.IO (hSetBuffering, stdout, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Fechamento de notas"
    putStrLn "===== "
    putStr "Quantidade de alunos: "
    qtdeAlunos <- readLn
    notas <- leNotas qtdeAlunos 1
    let media = mediaTurma notas
    putStrLn ("Média da turma: " ++ show media)

leNotas :: Int -> Int -> IO [(Float, Float, Float)]
leNotas n i
    | i > n      = return []
    | otherwise = do putStrLn ("aluno " ++ show i)
        putStr "  nota 1: "
        n1 <- readLn
        putStr "  nota 2: "
        n2 <- readLn
        putStr "  nota 3: "
        n3 <- readLn
        resto <- leNotas n (i+1)
        return ((n1,n2,n3):resto)

somaNotas :: [(Float, Float, Float)] -> Float
-- complete a definição da função

mediaTurma :: [(Float, Float, Float)] -> Float
-- complete a definição da função

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> main
Fechamento de notas
=====
Quantidade de alunos: 5
aluno 1
  nota 1: 10
  nota 2: 10
  nota 3: 10
aluno 2
  nota 1: 4
  nota 2: 6
  nota 3: 8
aluno 3
  nota 1: 6
  nota 2: 7
  nota 3: 6
aluno 4
  nota 1: 9
  nota 2: 3
  nota 3: 6
aluno 5
  nota 1: 0
  nota 2: 7
  nota 3: 5
Média da turma: 6.466667
```

## 12.3 Casamento de padrão em definições

Definições podem ocorrer um módulo (globais ao módulo), em uma cláusula `where` (locais a uma equação), ou em uma expressão `let` (locais a uma expressão).

O lado esquerdo de uma equação pode ser um padrão. Neste caso o lado direito deve ser uma expressão. O valor da expressão e o padrão devem casar. Caso o casamento de padrão falhe ocorre um erro em tempo de execução.

Por exemplo, na equação

```
(prefixo,sufixo) = splitAt 6 "Hello World!"
```

são definidas duas variáveis, `prefixo` e `sufixo`, correspondentes ao primeiro e segundo componentes do par resultante da função `splitAt`, que divide uma lista em duas partes, em uma dada posição.

Definições locais com `where` não são compartilhadas entre diferentes equações de uma definição principal. Por exemplo:

```
saudacao :: String -> String

saudacao "Joana"    = saudacaoLegal ++ " Joana!"

saudacao "Ferando" = saudacaoLegal ++ " Fernando!"

saudacao nome      = saudacaoInfeliz ++ " " ++ nome
  where
    saudacaoLegal    = "Olá! Que bom encontrar você, "
    saudacaoInfeliz = "Oh! Pfft. É você, "
```

Esta definição de função está incorreta. Para corrigi-la, transforme as definições locais de `saudacaoLegal` e `saudacaoInfeliz` em definições globais.

## 12.4 Problema: validação de números de cartão de crédito

Alguma vez você já se perguntou como os sites validam o número do seu cartão de crédito quando você faz compras *online*? Eles não verificam um enorme banco de dados de números, e muito menos usam magia. Na verdade, a maioria dos provedores de crédito dependem de uma fórmula de verificação de soma (*checksum*) para distinguir entre números válidos de cartões e sequências aleatórias de dígitos (ou erros de digitação).



Nesta atividade você vai implementar o algoritmo de validação para cartões de crédito. A validação segue as etapas seguintes:

- Dobre o valor de cada segundo dígito começando pela direita. Ou seja, o último dígito não é alterado, o penúltimo dígito é dobrado, o antepenúltimo não é alterado, e assim por diante. Por exemplo,  $[1, 3, 8, 6]$  torna-se  $[2, 3, 16, 6]$ .
- Adicione os dígitos dos valores dobrados e não dobrados a partir do número original. Por exemplo,  $[2, 3, 16, 6]$  torna-se  $2 + 3 + 1 + 6 + 6 = 18$ .
- Calcule o resto da divisão desta soma por 10. No exemplo acima, o resto é 8.
- O número é válido se e somente se o resultado for igual a 0.

### Tarefa 12.10

Precisamos primeiramente encontrar os dígitos de um número natural para processarmos o número do cartão de crédito.

Defina as funções

```
toDigits    :: Integer -> [Integer]
toDigitsRev :: Integer -> [Integer]
```

`toDigits` deve converter um número natural na lista dos dígitos que formam este número. Para números negativos, `toDigits` deve resultar na lista vazia.

`toDigitsRev` deve fazer o mesmo, mas com os dígitos em ordem invertida.

Exemplos:

```
toDigits 1234  ==> [1,2,3,4]
toDigitsRev 1234 ==> [4,3,2,1]
toDigits 0     ==> [0]
toDigits (-17) ==> []
```

Para obter os dígitos decimais que formam um número natural você deverá considerar os casos:

- Se o número for menor que 10, a lista dos dígitos é uma lista unitária contendo o próprio número.
- Caso contrário, divida o número por 10. O *resto* desta divisão é o dígito menos significativo. Os demais dígitos são obtidos de maneira similar usando o quociente desta divisão. Por exemplo, se o número é 538, então o dígito menos significativo é 8 (o resto da divisão de 538 por 10), e os demais dígitos são obtidos a partir de 53 (o quociente da divisão de 538 por 10).

Lembre-se de considerar o caso do número negativo.

**Dica:** Primeiro defina `toDigitsRev`, e depois `toDigits` usando `toDigitsRev`.

### Tarefa 12.11

Uma vez obtidos os dígitos na ordem correta, precisamos dobrar um dígito não e outro sim, contando de trás para frente (ou seja, da direita para a esquerda, ou ainda, do dígito menos significativo para o dígito mais significativo).

Defina a função

```
doubleEveryOther :: [Integer] -> [Integer]
```

para este propósito. Lembre-se de que `doubleEveryOther` deve dobrar os números da lista de dois em dois, começando pelo penúltimo de trás para frente.

Exemplos:

```
doubleEveryOther [9,4,8,7,6,5] ~> [18,4,16,7,12,5]
doubleEveryOther [4,8,7,6,5]   ~> [4,16,7,12,5]
doubleEveryOther [1,2,3]       ~> [1,4,3]
```

**Dica:** Defina uma função auxiliar que dobra os elementos de uma lista de dois em dois, *do começo para o fim*. Isto é, o primeiro elemento não é dobrado, o segundo é, o terceiro não é, o quarto é, e assim por diante. Depois use esta função para definir `doubleEveryOther`. Neste caso será necessário inverter a lista antes e depois de chamar a função auxiliar.

### Tarefa 12.12

O resultado de `doubleEveryOther` pode conter números de um dígito ou de dois dígitos. Defina a função

```
sumDigits :: [Integer] -> Integer
```

para calcular a soma de todos os dígitos.

Exemplos:

```
sumDigits [16,7,12,5] ~> 1 + 6 + 7 + 1 + 2 + 5 ~> 22
```

#### Dicas:

- Observe que são os dígitos dos números que devem ser somados, e não os próprios números.
- Faça uma definição recursiva que soma os elementos da lista. Divida cada elemento da lista por dez e considere tanto o quociente quanto o resto ao efetuar a soma.

### Tarefa 12.13

Defina a função

```
validate :: Integer -> Bool
```

que indica se um número inteiro pode ser um número válido de cartão de crédito. Sua definição usará todas as funções definidas nos itens anteriores.

Exemplos:

```
validate 401288888881881 ~> True
validate 401288888881882 ~> False
```

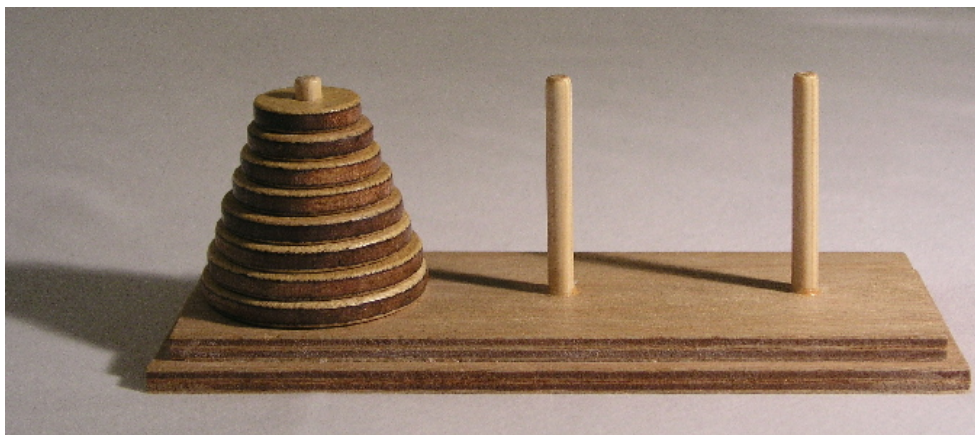


Figura 12.1: Torres de Hanoi.

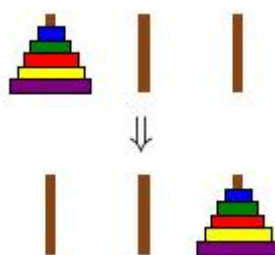


Figura 12.2: As torres de Hanoi.

#### Tarefa 12.14

Para concluir sua aplicação defina a variável `main :: IO ()` como uma ação de E/S que permita interação com o usuário, solicitando o número do cartão de crédito e informando se o mesmo é válido ou não.

## 12.5 Problema: torres de Hanoi

Torres de Hanoi (figura 12.1) é um quebra-cabeça clássico com uma solução que pode ser descrita de forma recursiva. Vários discos de tamanhos diferentes são empilhados em três cavilhas. O objetivo é obter, a partir de uma configuração inicial com todos os discos empilhados sobre a primeira cavilha, uma configuração que termina com todos os discos empilhados sobre a última cavilha, como mostrado na figura 12.2.

As únicas regras são:

1. somente um disco pode ser movido de cada vez, e
2. um disco maior nunca pode ser empilhado em cima de um menor.

Por exemplo, como o primeiro passo tudo o que você pode fazer é mover o disco menor que se encontra no topo do pino, para outro pino diferente, uma vez que apenas um disco pode ser movido de cada vez. A partir desta situação, é ilegal mover para a configuração mostrada na figura 12.4, porque você não tem permissão para colocar o disco verde em cima do disco azul, que é menor.

Para mover  $n$  discos (empilhados em ordem crescente de tamanho) de um pino  $a$  para um pino  $b$  usando um pino  $c$  como armazenamento temporário:

1. mova  $n - 1$  discos de  $a$  para  $c$  usando  $b$  como armazenamento temporário,
2. mova o disco no topo de  $a$  para  $b$ , e

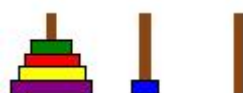


Figura 12.3: Um primeiro movimento válido.

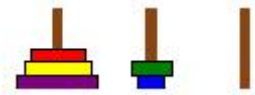


Figura 12.4: Uma configuração ilegal.

3. mova  $n - 1$  discos de  $c$  para  $b$  usando  $a$  como armazenamento temporário.

#### Tarefa 12.15: Torres de Hanoi

Defina uma função `hanoi` do tipo especificado a seguir.

```
type Pino = String
type Movimento = (Pino,Pino)

hanoi :: Integer -> Pino -> Pino -> Pino -> [Movimento]
```

Dados o número de discos e os nomes dos pinos para os três pinos, `hanoi` deve resultar na lista dos movimentos que devem ser realizados para mover a pilha de discos do primeiro pino para o segundo pino, usando o terceiro pino como armazenamento temporário.

Note que uma declaração de tipo usando a palavra chave `type`, como em `type Pino = String`, define um *sinônimo de tipo*. Neste caso `Pino` é declarado como um sinônimo para `String`, e os dois nomes de tipo `Pino` e `String` podem agora ser usado um no lugar do outro. Nomes descritivos para tipos dados desta maneira podem ser usados para dar nomes mais curtos para tipos complicados, ou para simplesmente ajudar na documentação, como foi feito aqui.

Exemplo:

```
hanoi 2 "a" "b" "c" ~> [("a","c"), ("a","b"), ("c","b")]
```

## 12.6 Soluções

### Tarefa 12.1 on page 12-6: Solução

---

```
ou1 True  True  = True
ou1 True  False = True
ou1 False True  = True
ou1 False False = False

ou2 False False = False
ou2 _          _ = True

ou3 True  _ = True
ou3 False x = x
```

### Tarefa 12.2 on page 12-6: Solução

---

```
e a b = a == if a
              then if b
                  then True
                  else False
              else False
```

### Tarefa 12.3 on page 12-6: Solução

---

```
e a b = a == if a
              then b
              else False
```

### Tarefa 12.4 on page 12-7: Solução

---

```
distancia :: Floating a => (a,a,a) -> (a,a,a) -> a

distancia (x1,y1,z1) (x2,y2,z2) =
  sqrt ( (x1-x2)^2 + (y1-y2)^2 + (z1-z2)^2 )
```

### Tarefa 12.5 on page 12-7: Solução

---

```
opp :: (Int,(Int,Int)) -> Int

opp (1,(m,n)) = m + n
opp (2,(m,n)) = m - n
opp _         = 0
```

### Tarefa 12.6 on page 12-7: Solução

---



```
sucPrimLista :: (Num a, Enum a) => [a] -> a

sucPrimLista [] = 0
sucPrimLista (x:_) = succ x
```

#### Tarefa 12.7 on page 12-7: Solução

---

```
flist :: Num a => [a] -> a

flista (x:y:_) = x + y
flista [x] = x
flista _ = 0
```

#### Tarefa 12.8 on page 12-7: Solução

---

```
sucPrimLista' lista = succ (head lista)

flista' lista | null lista          = 0
              | null (tail lista)  = head lista
              | otherwise          = head lista + head (tail lista)
```

#### Tarefa 12.9 on page 12-7: Solução

---

```

module Main where

import System.IO (hSetBuffering, stdout, BufferMode(NoBuffering))

main :: IO ()
main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
  putStrLn "Fechamento de notas"
  putStrLn "====="
  putStr "Quantidade de alunos: "
  qtdeAlunos <- readLn
  notas <- leNotas qtdeAlunos 1
  let media = mediaTurma notas
  putStrLn ("Média da turma: " ++ show media)

leNotas :: Int -> Int -> IO [(Float, Float, Float)]
leNotas n i
  | i > n    = return []
  | otherwise = do putStrLn ("aluno " ++ show i)
    putStr "  nota 1: "
    n1 <- readLn
    putStr "  nota 2: "
    n2 <- readLn
    putStr "  nota 3: "
    n3 <- readLn
    resto <- leNotas n (i+1)
    return ((n1,n2,n3):resto)

somaNotas :: [(Float, Float, Float)] -> Float
somaNotas [] = 0
somaNotas ( (n1,n2,n3) : resto ) = (n1+n2+n3)/3 + somaNotas resto

mediaTurma :: [(Float, Float, Float)] -> Float
mediaTurma notas = somaNotas notas / fromIntegral (length notas)

```

```

toDigitsRev :: Integer -> [Integer]
toDigitsRev n | n < 0 = []
               | n < 10 = [ n ]
               | otherwise = mod n 10 : toDigitsRev (div n 10)

toDigits :: Integer -> [Integer]
toDigits n = reverse (toDigitsRev n)

-- toDigits = reverse . toDigitsRev

doubleEveryOther' :: [Integer] -> [Integer]
doubleEveryOther' [] = []
doubleEveryOther' [x] = [x]
doubleEveryOther' (x:y:resto) = x : 2*y : doubleEveryOther' resto

doubleEveryOther :: [Integer] -> [Integer]
doubleEveryOther lista = reverse (doubleEveryOther' (reverse lista))

-- doubleEveryOther = reverse . doubleEveryOther' . reverse

somaDigitos :: [Integer] -> Integer
somaDigitos [] = 0
somaDigitos (n:ns) | n < 10 = n + somaDigitos ns
                   | otherwise = div n 10 + mod n 10 + somaDigitos ns

validate :: Integer -> Bool
validate num = mod (somaDigitos (doubleEveryOther (toDigits num))) 10 == 0

```

#### Tarefa 12.15 on page 12-13: Solução

---

```

module Hanoi where

type Pino = String
type Movimento = (Pino,Pino)

hanoi :: Integer -> Pino -> Pino -> Pino -> [Movimento]
hanoi 0 _ _ _ = []
hanoi n a b c = hanoi (n-1) a c b ++ [(a,b)] ++ hanoi (n-1) c b a

```

# 13 Expressão de Seleção Múltipla

## Resumo

Linguagens funcionais modernas usam casamento de padrão para selecionar componentes de estruturas de dados e também para selecionar alternativas em expressões `case` e em aplicações de funções definidas com várias equações.

Nesta aula vamos aprender as principais formas de padrão. Vamos também aprender como funciona o casamento de padrão. Vamos ainda conhecer algumas construções de Haskell que usam casamento de padrão, como a expressão `case` e definições usando padrões.

## Sumário

13.1	Expressão <code>case</code> . . . . .	13-1
13.2	Forma e regras de tipo da expressão <code>case</code> . . . . .	13-1
13.3	Regra de <i>layout</i> para a expressão <code>case</code> . . . . .	13-2
13.4	Avaliação de expressões <code>case</code> . . . . .	13-2
13.5	Exemplos de expressões <code>case</code> . . . . .	13-3
13.6	Expressão <code>case</code> com guardas . . . . .	13-5
13.7	Soluções . . . . .	13-7

## 13.1 Expressão `case`

**Expressão `case`** é uma forma de expressão que permite *selecionar* um entre vários resultados possíveis baseando-se no casamento de padrões. Uma expressão **`case`** é formada por:

- uma *expressão de controle*, cujo valor é usado para escolher uma das alternativas
- uma sequência de *alternativas*, onde cada alternativa é formada por:
  - um *padrão*, usado para decidir se a alternativa será escolhida
  - uma *expressão*, usada para dar o resultado caso a alternativa seja escolhida

Exemplo:

```
case calculo x (div y 2) of
{ 0 -> x^2 + 5*x + 6;
  1 -> 4*y - 8;
  n -> (x^2 + y^2) / n
}
```

## 13.2 Forma e regras de tipo da expressão `case`

Uma expressão `case` é da forma:

```
case    exp of
{   padrão1 -> res1 ;
    :
    padrãon -> resn
}
```

onde:

- a *expressão de controle* é *exp*
- os *resultados alternativos* são dados pelas expressões  $res_1, \dots, res_n$ , selecionados pelos respectivos *padrões padrão*  $padrão_1, \dots, padrão_n$

Regras de tipo:

- a expressão de controle *exp* e os padrões  $padrão_1, \dots, padrão_n$  devem ser todos de um *mesmo tipo*
- os resultados  $res_1, \dots, res_n$  devem ser todos do *mesmo tipo*, o que determina o *tipo* da expressão *case* (ou seja, o tipo do resultado final)

## 13.3 Regra de *layout* para a expressão *case*

A *regra de layout* pode ser aplicada para uma expressão *case*, permitindo a omissão dos sinais de pontuação `{`, `,` `;` e `}`:

- Todas as alternativas devem estar alinhadas (ou seja, devem começar na mesma coluna: a coluna de alinhamento).
- Se uma alternativa precisar se estender nas linhas seguintes, estas linhas devem começar em uma coluna mais à direita em relação à coluna de alinhamento.
- Uma linha que começa em uma coluna mais à esquerda em relação à coluna de alinhamento encerra a sequência de alternativas (e não faz parte da expressão *case*)

Exemplo:

```
case calculo x (div y 2) of
  0 -> x^2 + 5*x + 6
  1 -> 4*y - 8
  n -> (x^2 + y^2) / n
proxima_expressao
```

é traduzido para

```
case calculo x (div y 2) of
{ 0 -> x^2 + 5*x + 6;
  1 -> 4*y - 8;
  n -> (x^2 + y^2) / n
}
proxima_expressao
```

## 13.4 Avaliação de expressões *case*

- É feito o *casamento de padrão* do valor de *exp* com os padrões, na sequência em que foram escritos, até que se obtenha sucesso ou se esgotem os padrões
- O *primeiro* padrão cujo casamento suceder é escolhido
- O *resultado* final da expressão *case* é dado pela expressão associada ao padrão escolhido
- O resultado é avaliado em um *ambiente estendido* com as associações de variáveis resultantes do casamento de padrão
- Se a expressão *não casar* com nenhum padrão, a avaliação da expressão *case* resulta em um *erro*

## 13.5 Exemplos de expressões case

A expressão

```
case 3 - 2 + 1 of
  0 -> "zero"
  1 -> "um"
  2 -> "dois"
  3 -> "tres"
```

resulta em "dois", pois o valor da expressão  $3-2+1$  é 2, que casa com o terceiro padrão 2, selecionando "dois" como resultado.

A expressão

```
case 23 > 10 of
  True  -> "beleza!"
  False -> "oops!"
```

resulta em "beleza!", pois o valor da expressão  $23 > 10$  é **True**, que casa com o primeiro padrão **True**, selecionando "beleza!" como resultado.

A expressão

```
case toUpper (head "masculino") of
  'F' -> 10.2
  'M' -> 20.0
```

resulta em 20.0, pois o valor da expressão `toUpper (head "masculino")` é 'M', que casa com o segundo padrão 'M', selecionando 20.0 como resultado.

A expressão

```
case head "masculino" of
  'F' -> 10.2
  'M' -> 20.0
```

resulta em um erro em tempo de execução, pois o valor da expressão `head "masculino"` não casa com nenhum dos padrões.

A expressão

```
case toUpper (head "masculino") of
  'F' -> "mulher"
  'M' -> 20.0
```

está incorreta, pois os resultados "mulher" e 20.0 não são do mesmo tipo.

A expressão

```
case head "Masculino" == 'F' of
  True  -> "mulher"
  1      -> "homem"
```

está incorreta, pois os padrões **True** e 1 não são do mesmo tipo.

A expressão

```
case head "Masculino" of
  True  -> "mulher"
  False -> "homem"
```

está incorreta, pois a expressão `head "Masculino"` e os padrões **True** e **False** não são do mesmo tipo.

A expressão

```
case toUpper (head "masculino") of
  'F' -> 10.0
  'M' -> 20.0
```

está incorreta, uma vez que não segue a regra de *layout* (os padrões não estão na mesma coluna).

A expressão

```
case 3 - 2 + 1 of
  x -> 11 * x
```

resulta em 22, pois o valor da expressão  $3 - 2 + 1$  é 2, que casa com o primeiro padrão `x`, associando a variável `x` com o valor 2, e selecionando  $11 * x$  como resultado

A expressão

```
case mod 256 10 of
  7 -> 0
  n -> n * 1000
```

resulta em 6000, pois o valor da expressão `mod 256 10` é 6, que casa com o segundo padrão `n`, associando a variável `n` com o valor 6, e selecionando  $n * 1000$  como resultado

A expressão

```
case mod 257 10 of
  7 -> 0
  n -> n * 1000
```

resulta em 0, pois 7 é o primeiro padrão que casa com o valor da expressão `mod 257 10`.

Já a expressão

```
case mod 257 10 of
  n -> n * 1000
  7 -> 0
```

resulta em 7000, pois `n` é o primeiro padrão que casa com o valor da expressão `mod 257 10`.

A expressão

```
case 46 - 2*20 of
  0 -> "zero"
  1 -> "um"
  2 -> "dois"
  3 -> "tres"
  4 -> "quatro"
  _ -> "maior que quatro"
```

resulta em "maior que quatro", pois `_` é o primeiro padrão que casa com o valor da expressão  $46 - 2*20$ .

A expressão

```
case (3+2,3-2) of
  (0,0) -> 10
  (_,1) -> 20
  (x,2) -> x^2
  (x,y) -> x*y - 1
```

resulta em 20, pois `(_,1)` é o primeiro padrão que casa com o valor da expressão  $(3+2,3-2)$ .

A expressão

```
case tail [10] of
  [] -> "vazia"
  _ -> "nao vazia"
```

resulta em "vazia", pois o valor da expressão `tail [10]` casa com o padrão para lista vazia `[]`.

A expressão

```
case [10,20,30,40] of
[]   -> "lista vazia"
x:xs -> "cabeca: " ++ show x ++ " cauda: " ++ show xs
```

resulta em "cabeca: 10 cauda: [20,30,40]", pois a lista `[10,20,30,40]` casa com o padrão para lista não vazia `x:xs`, associando `x` com 10 e `xs` com `[20,30,40]`.

A expressão

```
case [10..20] of
x:y:z:_ -> x + y + z
_        -> 0
```

resulta em 33, pois a lista `[10..20]` casa com o padrão `x:y:z:_`, associando `x` com 10, `y` com 11 e `z` com 12.

A expressão

```
case [10,20] of
x:y:z:_ -> x + y + z
_        -> 0
```

resulta em 0, pois a lista `[10,20]` não casa com o primeiro padrão `x:y:z:_`, mas casa com o segundo `_`. Observe que o primeiro padrão casa somente com listas que tenham *peelo menos três elementos*.

A expressão

```
case [10,20,30] of
[x1,_,x3] -> x1 + x3
_          -> 0
```

resulta em 40, pois a lista `[10,20,30]` casa com o primeiro padrão `[x1,_,x3]`. Observe que este padrão casa somente com listas que tenham *exatamente três elementos*.

## 13.6 Expressão case com guardas

- Em uma expressão case cada padrão pode ser acompanhado de uma sequência de *cláusulas*.
- Cada cláusula é introduzida por uma barra vertical (|) e consiste em uma *condição (guarda)* e uma expressão (*resultado*), separados por `->`.
- Para que o resultado de uma cláusula seja escolhido é necessário que o *casamento de padrão suceda*, e que a *guarda correspondente seja verdadeira*.

No exemplo a seguir, a expressão

```
case ("Paulo Roberto", 'M', 28, 69.3) of
(_,_,idade,peso) | idade < 18 -> 2*peso
                  | idade < 21 -> 3*peso
(_, 'F',_,peso)   -> peso
(_, 'M',idade,peso) | idade < 40 -> peso + 10
                   | otherwise -> 0.9 * peso
```

resulta em 79.3, pois a tupla `("Paulo Roberto", 'M', 28, 69.3)`

- casa com o primeiro padrão, porém nenhuma guarda é satisfeita
- não casa com o segundo padrão
- casa com o terceiro padrão, e a primeira guarda é satisfeita, logo o resultado é dado por `peso + 10`

A expressão



```

case [100,20,3] of
  a:b:xs | a > b -> b:a:xs
          | a == b -> a:xs
          xs      -> xs

```

resulta em `[20,100,3]`, pois a lista `[100,20,3]` casa com o primeiro padrão `a:b:xs` e o primeiro elemento é maior do que o segundo.

### Tarefa 13.1: Seleção de um prefixo de uma lista

Defina a função `prefixo :: Int -> [a] -> [a]` que recebe um número inteiro  $n$  e uma lista  $l$  e resulta na lista dos  $n$  primeiros elementos de  $l$ .

Exemplos:

```

prefixo 0 [10, 20, 30, 40, 50] ~> []
prefixo 2 [10, 20, 30, 40, 50] ~> [10, 20]
prefixo 9 [10, 20, 30, 40, 50] ~> [10, 20, 30, 40, 50]

```

Sua definição deve consistir de uma única equação sem usar casamento de padrão ou guardas para obter o resultado. Porém o corpo da função deverá usar uma expressão `case`, na qual deve-se usar casamento de padrão.

**Observação** A função `take` do prelúdio é similar a esta função.

## 13.7 Soluções

Tarefa 13.1 on page 13-6: Solução

---

```
prefixo :: Int -> [a] -> [a]
prefixo n lista = case (n,lista) of
    (0,_)    -> []
    (_,[])   -> []
    (_,x:xs) -> x : prefixo (n-1) xs

prefixo' 0 _      = []
prefixo' _ []     = []
prefixo' n (x:xs) = x : prefixo' (n-1) xs
```

# 14 Valores Aleatórios

## Resumo

A geração de valores pseudo-aleatórios em aplicações em Haskell pode ser feita através de ações de E/S. Nesta aula vamos aprender a desenvolver aplicações que usam valores aleatórios. Estes tópicos serão usados na implementação do jogo *adivinha o número*.

## Sumário

14.1 Instalação do pacote random . . . . .	14-1
14.2 Valores aleatórios . . . . .	14-1
14.3 Jogo: adivinha o número . . . . .	14-2
14.4 Soluções . . . . .	14-9

## 14.1 Instalação do pacote random

A biblioteca `random`, que usaremos para geração de valores aleatórios, não faz parte da Plataforma Haskell e muito provavelmente precisa ser instalada separadamente em seu sistema. Para tanto pode-se usar a ferramenta `cabal` (um gerenciador de pacotes do Haskell), ou um gerenciador de pacotes nativo do seu sistema operacional. Neste último caso serão necessários privilégios de administrador para instalar a biblioteca.

A instalação da biblioteca `random` usando `cabal` é feita por meio dos seguintes comandos que devem ser executados em um terminal:

```
$ cabal update
$ cabal install random
```

O primeiro comando acessa o repositório de pacotes (`hackage.haskell.org`) e obtém uma lista atualizada dos pacotes disponíveis. O segundo comando instala o pacote `random`, acessando o repositório para fazer o download do seu código fonte, que é em seguida compilado e instalado no sistema.

No Ubuntu basta executar o comando seguinte para instalar a biblioteca usando o gerenciador de pacotes (o que requer privilégios de administrador):

```
$ sudo apt-get install libghc-random-dev
```

## 14.2 Valores aleatórios

A biblioteca `random`, que define o módulo `System.Random`, lida com a tarefa comum de geração de valores pseudo-aleatórios em Haskell.

Atavés da classe `Random` é possível obter valores aleatórios de uma variedade de tipos. Esta classe fornece uma maneira de extrair valores de um gerador de números aleatórios. Por exemplo, a instância `Float` da classe `Random` permite gerar valores aleatórios do tipo `Float`.

A geração de números aleatórios pode ser feita através da manipulação explícita de um gerador de números aleatórios, ou através de um gerador global acessível através de ações de entrada e saída. Vamos considerar apenas o segundo caso.

A classe `Random` define dois métodos para geração de números aleatórios usando o gerador global:

- `randomIO`:

```
randomIO :: Random a => IO a
```

`randomIO` é uma ação de E/S que, quando executada, extrai o próximo valor aleatório do tipo `a` do gerador global de números aleatórios (disponível no sistema de computação), e retorna este valor.

A faixa de possíveis valores normalmente é:

- para tipos limitados: todo o tipo.
- para tipos fracionários: o intervalo semi-fechado  $[0, 1)$ .
- para o tipo `Integer`: a faixa de `Int`.

- `randomRIO`:

```
randomRIO :: Random a => (a, a) -> IO a
```

Esta função recebe um par de valores  $(inf, sup)$  e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, extrai o próximo valor aleatório do tipo `a`, uniformemente distribuído no intervalo fechado  $[inf, sup]$ , do gerador global de números aleatórios (disponível no sistema de computação), e retorna este valor.

## Exemplo: lançamento de dados

`lancadados.hs`

```
module Main (main) where

import System.Random (randomRIO)

main :: IO ()
main =
  do putStrLn "Lançamento de dois dados"
     x <- randomRIO (1,6::Int)
     y <- randomRIO (1,6)
     putStrLn ("Faces obtidas: " ++ show x ++ " e " ++ show (y::Int))
```

### Exemplo de execução da aplicação

```
$ ./lancadados
Lancamento de dois dados
Faces obtidas: 3 e 5
```

### Exemplo de execução da aplicação

```
$ ./lancadados
Lancamento de dois dados
Faces obtidas: 4 e 1
```

## 14.3 Jogo: adivinha o número

Ao executar as tarefas que se seguem você estará escrevendo uma aplicação para jogar o jogo **adivinha o número**, como explicado a seguir.

1. O programa escolhe um número a ser adivinhado pelo jogador (usuário) selecionando um número inteiro aleatório no intervalo de 1 a 1000.
2. O programa exibe a mensagem *Adivinhe um número entre 1 e 1000*.
3. O jogador informa o seu palpite.
4. Se o palpite do jogador estiver incorreto:

- o programa exibe a mensagem *Muito alto* ou *Muito baixo* convenientemente para ajudar o jogador a acertar o número nas próximas jogadas.
- o jogo continua com o programa solicitando o próximo palpite e analisando a resposta do usuário.

5. Quando o jogador insere a resposta correta:

- o programa exibe a mensagem *Parabéns, você adivinhou o número*, e
- permite que o usuário escolha se quer jogar novamente, e joga novamente em caso afirmativo.

#### Exemplo de execução da aplicação

```
$ ./advinha
Adivinha o número v1.0
=====
Digite um número entre 1 e 1000: 444
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 200
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 111
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 157
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 138
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 123
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 130
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 125
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 128
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 129
Parabéns, você acertou

Deseja jogar novamente? n
```

### Tarefa 14.1

Em um arquivo `adivinha.hs` defina o módulo `Main` exportando a variável `main`.

### Tarefa 14.2

Defina `main` como uma ação de E/S que, quando executada:

- configura o sistema para não realizar **bufferização** da saída de dados padrão, e
- exibe uma mensagem identificando o programa e sua versão

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> main
Adivinha o número v1.0
=====
```

### Tarefa 14.3

Defina uma função `simOuNao` que recebe uma string e resulta em uma ação de E/S que, quando executada:

- exibe a string na saída padrão (com o objetivo de fazer uma pergunta do tipo *sim ou não* ao usuário)
- lê a resposta do usuário
- verifica se a resposta é
  - *s* ou *S*, retornando verdadeiro
  - *n* ou *N*, retornando falso
  - qualquer outra coisa, chamando `simOuNao` novamente para que o usuário responda corretamente.

Use uma expressão `case`.

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> simOuNao "Quer jogar novamente?"
Quer jogar novamente? talvez
Quer jogar novamente? k
Quer jogar novamente? S
True

*Main> simOuNao "Você é inteligente?"
Você é inteligente? com certeza
Você é inteligente?
Você é inteligente? acho que sim
Você é inteligente? n
False
```

Esta função deve ser usada em `jogar` (veja a tarefa 14.5) para verificar se o usuário deseja continuar jogando ou não.

#### Tarefa 14.4

Defina uma função `acertar` que recebe um número a ser adivinhado e resulta em uma ação de E/S que, quando executada:

- exibe uma mensagem solicitando um número entre 1 e 1000
- lê o número informado pelo usuário
- compara o número informado com o número a ser adivinhado:
  - se forem iguais, exibe uma mensagem parabenizando o usuário por ter adivinhado o número
  - caso contrário
    - \* exibe uma mensagem informando que o número é muito pequeno ou muito grande, adequadamente
    - \* exibe uma mensagem solicitando ao usuário uma nova tentativa
    - \* faz uma nova tentativa através de uma chamada recursiva de `acertar`

##### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> acertar 119
Digite um número entre 1 e 1000: 600
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 23
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 119
Parabéns, você acertou
```

A função `acertar` deverá ser usada na definição de `jogar` (veja a tarefa 14.5).

### Tarefa 14.5

O programa deve permitir ao usuário jogar várias vezes, o que nos leva à necessidade do uso de recursão. Defina uma ação de E/S `jogar` que, quando executada

- gera um número inteiro aleatório entre 1 e 1000, inclusive
- interage com o usuário até que o usuário acerte o número (veja a tarefa 14.4)
- verifica se o usuário deseja jogar novamente (veja a tarefa 14.3)
  - se sim, executa `jogar` recursivamente
  - se não, não faz nada

Para gerar um número aleatório, utilize a função `randomRIO` do módulo

**System.Random.** A classe `Random` é formada pelos tipos para os quais pode-se gerar valores aleatórios. Os tipos inteiros `Int` e `Integer` são instâncias desta classe.

A função `randomRIO :: Random a => (a, a) -> IO a` recebe um par de valores como argumento e resulta em uma ação de E/S que, quando executada, gera e retorna um número pseudo-aleatório no intervalo fechado definido pelo par.

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> jogar
Digite um número entre 1 e 1000: 509
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 780
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 640
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 700
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 744
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 730
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 720
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 725
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 1 e 1000: 728
Parabéns, você acertou

Deseja jogar novamente? n
```

A ação `jogar` deve ser usada em `main` para que o usuário possa jogar o jogo.



### Tarefa 14.6

Modifique o programa `adivinha.hs` de forma que quando o palpite do usuário estiver errado, o programa informe a faixa os limites inferior e superior do intervalo considerando os valores que o usuário já tenha digitado.

**Sugestão:** modifique a função `acertar` acrescentando dois argumentos correspondentes aos limites inferior e superior do intervalo

#### Exemplo de execução da aplicação

```
*Main> jogar
Digite um número entre 1 e 1000: 509
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 510 e 1000: 780
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 510 e 779: 640
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 641 e 779: 700
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 701 e 779: 744
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 701 e 743: 730
Muito grande
Tente novamente

Digite um número entre 701 e 729: 720
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 721 e 729: 725
Muito pequeno
Tente novamente

Digite um número entre 726 e 729: 728
Parabéns, você acertou

Deseja jogar novamente?  n
```

### Tarefa 14.7

Modifique o programa `adivinha.hs` de forma que o usuário possa especificar o intervalo a ser utilizado para adivinhar o número através de dois argumentos na linha de comando.

### Tarefa 14.8

Modifique o programa `adivinha.hs` para que seja exibido o número de tentativas feitas pelo usuário.

#### **Tarefa 14.9**

Modifique o programa `adivinha.hs` para que o número máximo de tentativas feitas pelo usuário possa ser limitado. O número máximo de tentativas deverá ser informado na linha de comando. Caso ele não seja informado não haverá um limite máximo de tentativas.

## 14.4 Soluções

Tarefa 14.5 on page 14-6: Solução

```
module Main where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))
import Data.Char (toUpper)
import System.Random (randomRIO)
import Control.Monad (when)

main :: IO ()
main =
    do hSetBuffering stdout NoBuffering
       putStrLn "Adivinha o número v1.0"
       putStrLn "===== "
       jogar

simOuNao :: String -> IO Bool
simOuNao pergunta =
    do putStr pergunta
       resposta <- getLine
       case map toUpper resposta of
         "S" -> return True
         "N" -> return False
         _   -> do putStrLn " RESPOSTA INVÁLIDA"
                  simOuNao pergunta

acertar :: Integer -> IO ()
acertar secreto =
    do putStr "Digite um número entre 1 e 1000: "
       x <- readLn
       if x == secreto
       then putStrLn "Parabéns, você acertou"
       else do putStrLn (if x < secreto then "Muito pequeno" else "Muito grande")
              putStrLn "Tente novamente"
              acertar secreto

jogar :: IO ()
jogar =
    do num <- randomRIO (1, 1000)
       acertar num
       resposta <- simOuNao "Deseja jogar novamente?"
       when resposta jogar
```

# 15 Expressão Lambda

## Resumo

Expressões lambdas são funções anônimas que podem ser usadas como qualquer outro valor de primeira classe. Nesta aula vamos aprender sobre expressões lambda.

## Sumário

<b>15.1 Valores de primeira classe</b>	<b>15-2</b>
15.1.1 Valores de primeira classe	15-2
15.1.2 Valores de primeira classe: Literais	15-2
15.1.3 Valores de primeira classe: Variáveis	15-2
15.1.4 Valores de primeira classe: Argumentos	15-3
15.1.5 Valores de primeira classe: Resultado	15-3
15.1.6 Valores de primeira classe: Componentes	15-3
<b>15.2 Expressão lambda</b>	<b>15-3</b>
15.2.1 Expressões lambda	15-3
15.2.2 Exemplos de expressões lambda	15-4
15.2.3 Uso de expressões lambda	15-4
15.2.4 Exercícios	15-5
<b>15.3 Aplicação parcial de funções</b>	<b>15-6</b>
15.3.1 Aplicação parcial de funções	15-6
15.3.2 Aplicação parcial de funções: exemplos	15-6
<b>15.4 Currying</b>	<b>15-8</b>
15.4.1 Funções <i>curried</i>	15-8
15.4.2 Por que <i>currying</i> é útil?	15-8
15.4.3 Convenções sobre <i>currying</i>	15-8
<b>15.5 Seções de operadores</b>	<b>15-9</b>
15.5.1 Operadores	15-9
15.5.2 Seções de operadores	15-10
<b>15.6 Utilidade de expressões lambda</b>	<b>15-11</b>
15.6.1 Por que seções são úteis?	15-11
15.6.2 Utilidade de expressões lambda	15-12
15.6.3 Exercícios	15-14
<b>15.7 Soluções</b>	<b>15-15</b>

## 15.1 Valores de primeira classe

### 15.1.1 Valores de primeira classe

- Tipo de **primeira classe**: não há restrições sobre como os seus valores podem ser usados.
- São valores de primeira classe:
  - números
  - caracteres
  - tuplas
  - listas
  - *funções*entre outros

### 15.1.2 Valores de primeira classe: Literais

- Valores de vários tipos podem ser escritos *literalmente*, sem a necessidade de dar um nome a eles:

valor	tipo	descrição
<code>True</code>	<code>Bool</code>	o valor lógico <i>verdadeiro</i>
<code>'G'</code>	<code>Char</code>	o caracter <i>G</i>
<code>456</code>	<code>Num a =&gt; a</code>	o número <i>456</i>
<code>2.45</code>	<code>Fractional a =&gt; a</code>	o número em ponto flutuante <i>2.45</i>
<code>"haskell"</code>	<code>String</code>	a cadeia de caracteres <i>haskell</i>
<code>[1,6,4,5]</code>	<code>Num a =&gt; [a]</code>	a lista dos números <i>1, 6, 4, 5</i>
<code>("Ana",False)</code>	<code>([Char],Bool)</code>	o par formado por <i>Ana</i> e <i>falso</i>

- Funções também podem ser escritas sem a necessidade de receber um nome:

valor	tipo	descrição
<code>\x -&gt; 3*x</code>	<code>Num a =&gt; a -&gt; a</code>	função que calcula o triplo
<code>\n -&gt; mod n 2 == 0</code>	<code>Integral a =&gt; a -&gt; Bool</code>	função que verifica se é par
<code>\(p,q) -&gt; p+q</code>	<code>Num a =&gt; (a,a) -&gt; a</code>	função que soma par

### 15.1.3 Valores de primeira classe: Variáveis

- Valores de vários tipos podem ser *nomeados*:

```
matricula = 456
sexo      = 'M'
aluno     = ("Ailton Mizuki Sato",101408,'M',"com")
disciplinas = ["BCC222","BCC221","MTM153","PRO300"]
livroTexto = ("Programming in Haskell","G. Hutton",2007)
```

- Funções também podem ser nomeadas:

```
triplo = \x -> 3*x
```

Esta equação define a variável `triplo`, associando-a a um valor que é uma função.

Haskell permite escrever esta definição de forma mais sucinta:

```
triplo x = 3 * x
```

### 15.1.4 Valores de primeira classe: Argumentos

- Valores de vários tipos podem ser *argumentos* de funções:

```
sqrt 2.45
not True
length [1,6,4,5]
take 5 [1,8,6,10,23,0,0,100]
```

- Funções também podem ser argumentos de outras funções:

```
map triplo [1,2,3] ~> [3,6,9]
```

A função `triplo` é aplicada a cada elemento da lista `[1,2,3]`, resultando na lista `[3,6,9]`

### 15.1.5 Valores de primeira classe: Resultado

- Valores de vários tipos podem ser *resultados* de funções:

```
not False ~> True
length [1,6,4,5] ~> 4
snd ("Ana", 'F') ~> 'F'
tail [1,6,4,5] ~> [6,4,5]
```

- Funções também podem ser resultados de outras funções:

```
(abs . sin) (3*pi/2) ~> 1.0
(sqrt . abs) (-9) ~> 3.0
```

O operador binário infixo `(.)` faz a composição de duas funções.

### 15.1.6 Valores de primeira classe: Componentes

- Valores de vários tipos podem ser *componentes* de outros valores:

```
("Ana", 'F', 18)
["BCC222", "BCC221", "MTM153", "PRO300"]
[("Ailton", 101408), ("Lidiane", 102408)]
```

- Funções também podem ser componentes de outros valores:

```
map (\g -> g (-pi)) [abs,sin,cos]
~> [3.141592653589793,-1.2246467991473532e-16,-1.0]
```

O segundo argumento de `map` é a lista das funções `abs`, `sin` e `cos`.

## 15.2 Expressão lambda

### 15.2.1 Expressões lambda

- Da mesma maneira que um número inteiro, uma string ou um par podem ser escritos sem ser nomeados, uma função também pode ser escrita sem associá-la a um nome.
- Expressão lambda** é uma função anônima (sem nome), formada por uma sequência de padrões representando os argumentos da função, e um corpo que especifica como o resultado pode ser calculado usando os argumentos:

```
\padrão1 ... padrãon -> expressao
```

- O termo *lambda* provém do cálculo lambda (teoria de funções na qual as linguagens funcionais se baseiam), introduzido por Alonzo Church nos anos 1930 como parte de uma investigação sobre os fundamentos da Matemática.
- No cálculo lambda expressões lambdas são introduzidas usando a letra grega  $\lambda$ . Em Haskell usa-se o caracter `\`, que se assemelha-se um pouco com  $\lambda$ .

## 15.2.2 Exemplos de expressões lambda

Função anônima que calcula o dobro de um número:

```
\x -> x + x
```

O tipo desta expressão lambda é `Num a => a -> a`

Função anônima que mapeia um número  $x$  a  $2x + 1$ :

```
\x -> 2*x + 1
```

cujo tipo é `Num a => a -> a`

Função anônima que calcula o fatorial de um número:

```
\n -> product [1..n]
```

cujo tipo é `(Enum a, Num a) => a -> a`

Função anônima que recebe três argumentos e calcula a sua soma:

```
\a b c -> a + b + c
```

cujo tipo é `Num a => a -> a -> a -> a`

Definições de função usando expressão lambda:

```
f          = \x -> 2*x + 1
somaPar    = \(x,y) -> x + y
fatorial   = \n -> product [1..n]
```

é o mesmo que

```
f x          = 2*x + 1
somaPar (x,y) = x + y
fatorial n    = product [1..n]
```

## 15.2.3 Uso de expressões lambda

- Apesar de não terem um nome, funções construídas usando *expressões lambda* podem ser usadas da mesma maneira que outras funções.
- **Exemplos** de aplicações de função usando expressões lambda:

```
(\x -> 2*x + 1) 8
~> 17
```

```
(\a -> (a,2*a,3*a)) 5
~> (5,10,15)
```

```
(\x y -> sqrt (x*x + y*y)) 3 4  
~> 5.0
```

```
(\xs -> let n = div (length xs) 2 in (take n xs, drop n xs)) "Bom dia"  
~> ("Bom", " dia")
```

```
(\ (x1,y1) (x2,y2) -> sqrt ((x2-x1)^2 + (y2-y1)^2)) (6,7) (9,11)  
~> 5.0
```

## 15.2.4 Exercícios

### Tarefa 15.1

Escreva uma função anônima que recebe uma tripla formada pelo nome, peso e altura de uma pessoa e resulta no seu índice de massa corporal, dado pela razão entre o peso e o quadrado da altura da pessoa.

### Tarefa 15.2

Escreva uma expressão para selecionar (filtrar) os elementos múltiplos de 3 em uma lista de números. Utilize a função `filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]` do prelúdio. Especifique a função que determina a propriedade a ser satisfeita pelos elementos selecionados usando uma expressão lambda.

### Tarefa 15.3

Determine o tipo mais geral da seguinte expressão:

```
\a (m,n) -> if a then (m+n)^2 else (m+n)^3
```

Dica: do prelúdio tem-se  
(`^`) :: (Num a, Integral b) => a -> b -> a.

### Tarefa 15.4

Composição de funções é uma operação comum em Matemática, que a define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Em Haskell podemos definir uma função para compor duas outras funções dadas como argumentos. O resultado é uma função: a função composta.

Defina a função `composta` que recebe duas funções como argumentos e resulta na função composta das mesmas. Use uma definição local para definir a função resultante:

```
composta f g = ...  
  where  
    ...
```

### Tarefa 15.5

1. Escreva outra definição para a função `composta` usando uma expressão lambda para determinar o seu resultado. Nesta versão não use definições locais.
2. Determine o tipo mais geral da função `composta`.
3. Teste a função `composta` calculando o tipo e o valor da expressão  
(`composta even length`) "linguagens modernas"



## Tarefa 15.6

O módulo **Prelude** define o operador binário `(.)` para fazer composição de funções. Este operador tem precedência 9 e associatividade à direita:

```
infixr 9 .  
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
```

Determine o tipo e o valor das seguintes expressões que usam composição de funções e expressões lambda:

- `(toUpper . head . head) ["maria","jose","silva"]`
- `(not . odd . length) "felicidade"`
- `(isLetter . head . head . reverse) ["maria","silva","pereira"]`
- `(even . (\x -> x*2 + 3) . (\x -> div x 2) . snd) (9+4,9-4)`

## 15.3 Aplicação parcial de funções

### 15.3.1 Aplicação parcial de funções

- Uma função com *múltiplos argumentos* pode também ser considerada como uma função que retorna outra *função como resultado*.

### 15.3.2 Aplicação parcial de funções: exemplos

- Seja a seguinte função:

```
f    :: Int -> Int -> Int  
f x y = 2*x + y
```

A função `f` recebe dois argumentos inteiros `x` e `y` e resulta na soma  $2*x + y$ .

- Alternativamente esta função pode ser definida em duas etapas:

```
f' :: Int -> (Int -> Int)  
f' x = h  
  where h y = 2*x + y
```

A função `f'` recebe um argumento inteiro `x` e resulta na função `h`, que por sua vez recebe um argumento inteiro `y` e calcula  $2*x + y$ .

- Aplicando a função:

```
f' 2 3  
~> (f' 2) 3  
~> h 3  
~> 2*2 + 3  
~> 7
```

- As funções `f` e `f'` produzem o mesmo resultado final, mas `f` foi definida de uma forma mais breve.
- Podemos ainda definir a função usando uma expressão lambda:

```
f'' :: Int -> (Int -> Int)  
f'' x =  
  \y -> 2*x + y
```

Da mesma forma que `f'`, a função `f''` recebe um argumento inteiro `x` e resulta em uma função. Esta função recebe um argumento inteiro `y` e calcula  $2*x + y$ .

- Aplicando a função:

```
f'' 2 3
  ~> (f'' 2) 3
  ~> (\y -> 2*2 + y) 3
  ~> 2*2 + 3
  ~> 7
```

- Podemos ainda definir a função usando duas expressões lambda:

```
f''' :: Int -> (Int -> Int)
f''' =
  \x -> (\y -> 2*x + y)
```

- Aplicando a função:

```
f''' 2 3
  ~> (\x -> (\y -> 2*x + y)) 2 3
  ~> (\y -> 2*2 + y) 3
  ~> 2*2 + 3
  ~> 7
```

- Todas as versões apresentadas para a função `f` (`f`, `f'`, `f''` e `f'''`) são equivalentes.
- Portanto a função `f` pode ser considerada como uma função que recebe um argumento e resulta em outra função que, por sua vez, recebe outro argumento e resulta na soma do dobro do primeiro argumento com o segundo argumento.
- Isto permite a *aplicação parcial* da função:

```
let g = f 5 in (g 8, g 1)
  ~> (18,11)

map (f 2) [1,8,0,19,5]
  ~> [5,12,4,23,9]

(f 2 . length) "entendeu?"
  ~> 13

filter (not . even . f 10) [1,8,0,19,5]
  ~> [1,19,5]
```

- Outro exemplo: multiplicação de três números:

```
mult      :: Int -> Int -> Int -> Int
mult x y z = x * y * z
```

A função `mult` recebe três argumentos e resulta no produto destes argumentos.

- Na verdade `mult` recebe um argumento de cada vez. Ou seja, `mult` recebe um inteiro `x` e resulta em uma função que por sua vez recebe um inteiro `y` e resulta em outra função, que finalmente recebe um inteiro `z` e resulta no produto  $x * y * z$ .
- Este entendimento fica claro quando usamos expressões lambda para definir a função de maneira alternativa:

```
mult' :: Int -> (Int -> (Int -> Int))
mult' = \x -> \y -> \z -> x * y * z
```

## 15.4 Currying

### 15.4.1 Funções *curried*

- Outra opção para passar vários argumentos em uma aplicação de função é formar uma estrutura de dados com os dados desejados e passar a estrutura como argumento.
- Neste caso fica claro que haverá um único argumento, que é a estrutura de dados.
- Exemplo: usando uma tupla:

```
somaPar :: (Int,Int) -> Int
somaPar (x,y) = x + y
```

A função `somaPar` recebe *um único* argumento que é um par, e resulta na soma dos componentes do par.

- Evidentemente este mecanismo não permite a aplicação parcial da função.
- Funções que *recebem os seus argumentos um por vez* são chamadas de **funções *curried***<sup>1</sup>, celebrando o trabalho de **Haskell Curry** no estudo de tais funções.
- Funções com mais de um argumento *curried*, resultando em funções aninhadas.

### 15.4.2 Por que *currying* é útil?

- Funções *curried* são mais flexíveis do que as funções com tuplas, porque muitas vezes funções úteis podem ser obtidas pela *aplicação parcial* de uma função *curried*.
- Por exemplo:

```
take 5 :: [a] -> [a]           -- função que seleciona os 5
                                -- primeiros elementos de uma lista

drop 5 :: [a] -> [a]           -- função que descarta os 5
                                -- primeiros elementos de uma lista

div 100 :: Integral a => a -> a -- função que divide 100 pelo seu argumento

elem 'a' :: String -> String   -- função que verifica se 'a' é
                                -- elemento de uma lista
```

### 15.4.3 Convenções sobre *currying*

- Para evitar excesso de parênteses ao usar funções *curried*, duas regras simples foram adotadas na linguagem Haskell:
- A seta `->` (construtor de tipos função) *associa-se à direita*.
- Exemplo:

```
Int -> Int -> Int -> Int
```

significa

```
Int -> (Int -> (Int -> Int))
```

- A *aplicação de função* tem *associatividade à esquerda*.

<sup>1</sup>Funções *curried* às vezes são chamadas de **funções *currificadas*** em português.

- Exemplo:

```
mult x y z
```

significa

```
((mult x) y) z
```

- A menos que seja explicitamente necessário o uso de tuplas, todas as funções em Haskell são normalmente definidas na forma *curried*.

## 15.5 Seções de operadores

### 15.5.1 Operadores

- Um **operador binário infixo** é uma *função de dois argumentos* escrita em *notação infix*, isto é, entre os seus (dois) argumentos, ao invés de precedê-los.
- Por exemplo, a função (+) do prelúdio, para somar dois números, é um operador infix, portanto deve ser escrita entre os operandos:

```
3 + 4
```

- Lexicalmente, operadores consistem inteiramente de *símbolos*, em oposição aos identificadores normais que são *alfanuméricos*.
- Haskell não tem **operadores prefixos**, com exceção do menos (-), que pode ser tanto infix (subtração) como prefixo (negação).
- Por exemplo:

```
3 - 4 ~> -1 {- operador infix: subtração -}
- 5    ~> -5 {- operador prefixo: negação -}
```

- Um identificador alfanumérico pode ser usado como operador infix quando escrito entre sinais de crase ('').
- Por exemplo, a função `div` do prelúdio calcula o quociente de uma divisão inteira:

```
div 20 3 ~> 6
```

Usando a notação de operador infix:

```
20 `div` 3 ~> 6
```

- Um operador infix (escrito entre seus dois argumentos) pode ser convertido em uma função *curried* normal (escrita antes de seus dois argumentos) usando *parênteses*.
- **Exemplos:**

- (+) é a função que soma dois números.

```
1 + 2    ~> 3
(+) 1 2  ~> 3
```

- (>) é a função que verifica se o primeiro argumento é maior que o segundo.

```
100 > 200    ~> False
(>) 100 200  ~> False
```

- `(++)` é a função que concatena duas listas.

```
[1,2] ++ [30,40,50]  ~> [1,2,30,40,50]
(++) [1,2] [30,40,50] ~> [1,2,30,40,50]
```

## 15.5.2 Seções de operadores

- Como os operadores infixos são de fato funções, eles podem ser aplicados parcialmente.
- Haskell oferece uma notação especial para a *aplicação parcial de um operador infix*, chamada de **seção** do operador. Uma seção de um operador é escrita colocando o operador e o argumento desejado entre parênteses.
- **Exemplo:**

```
(1+)
```

é a função que incrementa (soma um) ao seu argumento. É o mesmo que

```
\x -> 1 + x
```

```
(1+) 8 ~> 9
```

- **Exemplo:**

```
(*2)
```

é a função que dobra (multiplica por 2) o seu argumento. É o mesmo que

```
\x -> x * 2
```

```
(*2) 8 ~> 16
```

- **Exemplo:**

```
(100>)
```

é a função que verifica se 100 é maior que o seu argumento. É o mesmo que

```
\x -> 100 > x
```

```
(100>) 8 ~> True
```

- **Exemplo:**

```
(<0)
```

é a função que verifica se o seu argumento é negativo. É o mesmo que

```
\x -> x < 0
```

```
(<0) 8 ~> False
```

- Outros **Exemplos** de aplicação de seções de operador:

```
(1+) 2 ~> 3  
(+1) 2 ~> 3
```

```
(100>) 200 ~> False  
(>100) 200 ~> True
```

```
([1,2]++) [30,40,50] ~> [1,2,30,40,50]  
(++[1,2]) [30,40,50] ~> [30,40,50,1,2]
```

- Em geral, se  $\oplus$  é um operador binário infix, então as formas

$(\oplus)$

$(x \oplus)$

$(\oplus y)$

são chamados de **seções**.

- Seções são equivalentes às definições com expressões lambdas:

```
(\oplus) = \x y -> x \oplus y
```

```
(x \oplus) = \y -> x \oplus y
```

```
(\oplus y) = \x -> x \oplus y
```

- **Nota:**

- Como uma exceção, o operador binário – para *subtração* não pode formar uma seção direita

```
(-x)
```

porque isso é interpretado como negação unária na sintaxe Haskell.

- A função `subtract` do prelúdio é fornecida para este fim. Em vez de escrever  $(-x)$ , você deve escrever

```
(subtract x)
```

```
(subtract 8) 10 ~> 2
```

## 15.6 Utilidade de expressões lambda

### 15.6.1 Por que seções são úteis?

- *Funções úteis* às vezes podem ser construídas de uma forma simples, utilizando seções.
- **Exemplos:**

seção	descrição
(1+)	função sucessor
(1/)	função recíproco
(*2)	função dobro
(/2)	função metade

- Seções são necessárias para anotar o tipo de um operador.

#### Exemplos:

```
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
(+)  :: Num a => a -> a -> a
(:)  :: a -> [a] -> [a]
```

- Seções são necessárias para passar operadores como argumentos para outras funções.

#### Exemplo:

A função `and` do prelúdio, que verifica se todos os elementos de uma lista são verdadeiros, pode ser definida como:

```
and :: [Bool] -> Bool
and = foldr (&&) True
```

onde `foldr` é uma função do prelúdio que reduz uma lista de valores a um único valor aplicando uma operação binária aos elementos da lista.

## 15.6.2 Utilidade de expressões lambda

- Expressões lambda podem ser usadas para dar um sentido formal para as funções definidas usando currying e para a *aplicação parcial de funções*.

#### Exemplo:

A função

```
soma x y = x + y
```

pode ser entendida como

```
soma = \x -> (\y -> x + y)
```

isto é, `soma` é uma função que recebe um argumento `x` e resulta em uma função que por sua vez recebe um argumento `y` e resulta em `x+y`.

```
soma
  ~> \x -> (\y -> x + y)
```

```
soma 2
  ~> (\x -> (\y -> x + y)) 2
  ~> \y -> 2 + y
```

```
soma 2 3
  ~> (\x -> (\y -> x + y)) 2 3
  ~> (\y -> 2 + y) 3
  ~> 2 + 3
  ~> 5
```

- Expressões lambda também são úteis na definição de *funções que retornam funções como resultados*.

- **Exemplo:**

A função `const` definida na biblioteca retorna como resultado uma função constante, que sempre resulta em um dado valor:

```
const    :: a -> b -> a
const x _ = x
```

```
const 6 0 ~> 6
const 6 1 ~> 6
const 6 2 ~> 6
const 6 9 ~> 6
const 6 75 ~> 6
```

```
h = const 6 ~> \_ -> 6
```

```
h 0 ~> 6
h 4 ~> 6
h 75 ~> 6
```

A função `const` pode ser definida de uma maneira mais natural usando expressão lambda, tornando explícito que o resultado é uma função:

```
const    :: a -> (b -> a)
const x = \_ -> x
```

- Expressões lambda podem ser usadas para evitar a nomeação de funções que são *referenciados apenas uma vez*.

- **Exemplo:**

A função

```
impares n = map f [0..n-1]
  where
    f x = x*2 + 1
```

que recebe um número  $n$  e retorna a lista dos  $n$  primeiros números ímpares, pode ser simplificada:

```
impares n = map (\x -> x*2 + 1) [0..n-1]
```



## 15.6.3 Exercícios

### Tarefa 15.7

Para cada uma das seguintes funções:

- descreva a função
- determine o tipo mais geral da função
- reescreva a função usando expressões lambda ao invés de seções de operadores

- a) (`'c':`)
- b) (`:"fim"`)
- c) (`==2`)
- d) (`++"\\n"`)
- e) (`^3`)
- f) (`3^`)
- g) (``elem` "AEIOU"`)

### Tarefa 15.8

Determine o valor da expressão:

```
let pares = [(1,8),(2,5),(0,1),(4,4),(3,2)]
    h = sum . map (\(x,y) -> x*y-1) . filter (\(x,_) -> even x)
in h pares
```

### Tarefa 15.9

Mostre como a definição de função *curried*

```
mult x y z = x * y * z
```

pode ser entendida em termos de expressões lambda.  
*Dica:* Redefina a função usando expressões lambda.

## 15.7 Soluções

### Tarefa 15.1 on page 15-5: Solução

---

```
imc :: (String, Double, Double) -> Double
imc (_, peso, altura) =
    peso / altura ^ 2
```

### Tarefa 15.2 on page 15-5: Solução

---

```
filter (\n -> mod n 3 == 0) [1,2,5,6,7,11,20,30]
```

### Tarefa 15.3 on page 15-5: Solução

---

```
(Num t) => Bool -> (t,t) -> t
```

### Tarefa 15.4 on page 15-5: Solução

---

```
composta f g = h
  where
    h x = f (g x)
```

### Tarefa 15.5 on page 15-5: Solução

---

```
composta :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
composta f g =
    \x -> f (g x)
```

```
(composta even length) "linguagens modernas" !\result! False :: Bool
```

### Tarefa 15.6 on page 15-6: Solução

---

1. 'M' :: Char
2. True :: Bool
3. True :: Bool
4. False :: Bool

### Tarefa 15.7 on page 15-14: Solução

---

- a) ('c':) :: [Char] -> [Char]  
acrescenta o caracter 'c' na cabeça do argumento
- b) (: "fim") :: Char -> [Char]  
coloca o argumento na cabeça da lista "fim"

- c) `(==2) :: (Num a) => a -> Bool`  
verifica se o argumento é igual a 2
- d) `(++ "\n") :: String -> String`  
acrescenta uma mudança de linha no final do argumento
- e) `(^3) :: (Num a) => a -> a`  
calcula o cubo do argumento
- f) `(3^) :: (Num a, Integral b) => b -> a`  
calcula a potência de 3
- g) `(`elem` "AEIOU") :: Char -> Bool`  
verifica se um caracter é uma vogal maiúscula

---

**Tarefa 15.8 on page 15-14: Solução**

23

---

**Tarefa 15.9 on page 15-14: Solução**

`mult = \x -> \y -> \z -> x * y * z`

# 16 Funções de Ordem Superior

## Resumo

Uma função é conhecida como *função de ordem superior* quando ela tem uma função como argumento ou resulta em uma função. Nesta aula vamos aprender sobre funções de ordem superior.

## Sumário

<b>16.1 Funções de Ordem Superior</b>	<b>16-1</b>
<b>16.2 Um operador para aplicação de função</b>	<b>16-1</b>
<b>16.3 Composição de funções</b>	<b>16-2</b>
<b>16.4 A função filter</b>	<b>16-3</b>
<b>16.5 A função map</b>	<b>16-3</b>
<b>16.6 A função zipWith</b>	<b>16-4</b>
<b>16.7 As funções foldl e foldr, foldl1 e foldr1</b>	<b>16-4</b>
16.7.1 foldl	16-4
16.7.2 foldr	16-5
16.7.3 foldl1	16-5
16.7.4 foldr1	16-6
<b>16.8 List comprehension</b>	<b>16-6</b>
16.8.1 List comprehension	16-6
16.8.2 List comprehension e funções de ordem superior	16-7
<b>16.9 Cupom fiscal do supermercado</b>	<b>16-8</b>
<b>16.10 Soluções</b>	<b>16-13</b>

## 16.1 Funções de Ordem Superior

Uma **função de ordem superior** é uma função que

- tem outra *função* como *argumento*, ou
- produz uma *função* como *resultado*.

## 16.2 Um operador para aplicação de função

O operador (\$) definido no prelúdio se destina a substituir a aplicação de função normal, mas com uma precedência e associatividade diferente para ajudar a evitar parênteses. O operador (\$) tem precedência zero e associa-se à direita. Já a aplicação de função normal tem precedência maior que todos os operadores e associa-se à esquerda. O operador (\$) é usado principalmente para eliminar o uso de parênteses nas aplicações de funções.

## Exemplos de aplicação de função com (\$)

```
sqrt 36 ~> 6.0
sqrt $ 36 ~> 6.0
($) sqrt 36 ~> 6.0
head (tail "asdf") ~> 'a'
head $ tail $ "asdf" ~> 'a'
head $ tail "asdf" ~> 'a'
even (succ (abs (negate 36))) ~> False
even $ succ $ abs $ negate 36 ~> False
```

## Definição de (\$)

```
infixr 0 $

($) :: (a -> b) -> a -> b

f $ x = f x
```

## 16.3 Composição de funções

Composição de funções é uma operação comum na Matemática. Dadas duas funções  $f$  e  $g$ , a função composta  $f \circ g$  é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ou seja, quando a função composta  $f \circ g$  é aplicada a um argumento  $x$ , primeiramente  $g$  é aplicada a  $x$ , e em seguida  $f$  é aplicada a este resultado  $gx$ .

A operação de composição de funções faz parte do prelúdio de Haskell. A função `(.)` recebe duas funções como argumento e resulta em uma terceira função que é a *composição* das duas funções dadas. A função `(.)` é um operador binário infix de precedência 9 e associatividade à esquerda.

Observe que a operação `(.)` é uma função de ordem superior, pois recebe duas funções como argumento e resulta em outra função.

## Exemplos de composição de funções

```
sqrt . abs ~> a função composta de sqrt e abs
(sqrt . abs) 9 ~> 3
(sqrt . abs) (16 - 25) ~> 3
(sqrt . abs . sin) (3*pi/2) ~> 1.0
(not . null) "abc" ~> True
(sqrt . abs . snd) ('Z', -36) ~> 6
```

## Definição de (.)

```
infixr 9 .

(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c

f . g = h
  where h x = f (g x)
```

## 16.4 A função filter

A função `filter` do prelúdio recebe uma função e uma lista como argumentos, e seleciona (*filtra*) os elementos da lista para os quais a função dada resulta em verdadeiro.

Note que `filter` é uma função de ordem superior, pois recebe outra função como argumento.

### Exemplos de aplicação de filter

```
filter even [1,8,10,48,5,-3]    ~> [8,10,48]
filter odd  [1,8,10,48,5,-3]    ~> [1,5,-3]
filter isDigit "A186 B70"       ~> "18670"
filter (not . null) ["abc","", "ok",""] ~> ["abc", "ok"]
```

### Importando um módulo

A função `isDigit` não faz parte do módulo `Prelude`, mas está definida no módulo `Data.Char`. Para usar `isDigit` é necessário *importar* o módulo `Data.Char`:

- no ambiente interativo use o comando `:module` (ou simplesmente `:m`):

```
:m + Data.Char
```

- em um script e no ambiente interativo use a declaração

```
import Data.Char
```

### Definição de filter

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]

filter _ [] = []
filter f (x:xs) | f x = x : filter f xs
                 | otherwise = filter f xs
```

## 16.5 A função map

A função `map` do prelúdio recebe uma função e uma lista como argumentos, e aplica a função a cada um dos elementos da lista, resultando na lista dos resultados. `map` é uma função de ordem superior, pois recebe outra função como argumento.

### Exemplos de aplicação de map

```
map sqrt [0,1,4,9]    ~> [0.0,1.0,2.0,3.0]
map succ "HAL"        ~> "IBM"
map head ["bom","dia","turma"] ~> "bdt"
map even [8,10,-3,48,5] ~> [True,True,False,True,False]
map isDigit "A18 B7"  ~> [False,True,True,False,False,True]
map length ["ciência", "da", "computação"] ~> [6,2,10]
map (sqrt.abs.snd) [( 'A',100), ( 'Z',-36)] ~> [10,6]
```

## Definição de map

```
map      :: (a -> b) -> [a] -> [b]

map _ [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

## 16.6 A função zipWith

`zipWith` recebe uma função binária e duas listas e retorna a lista formada pelos resultados da aplicação da função aos elementos correspondentes das listas dadas. Se as listas forem de tamanhos diferentes, o tamanho do resultado é o menor tamanho.

Observe que `zipWith` é uma função de ordem superior, pois recebe outra função como argumento.

### Exemplos de aplicação de zipWith

```
zipWith (+) [] [] ~> []
zipWith (+) [1,2,3,4,5] [3,3,4,1,5] ~> [4,5,7,5,10]
zipWith (++) ["AB","cde"] ["?","123"] ~> ["AB?", "cd123"]
zipWith (^) [5,6,7,8] [2,3,4,5] ~> [25,216,2401,32768]
zipWith (*) [5,6,7,8] [2,3] ~> [10,18]
```

## Definição de zipWith

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]

zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
zipWith _ _ _ = []
```

## 16.7 As funções foldl e foldr, foldl1 e foldr1

### 16.7.1 foldl

`foldl` reduz uma lista, usando uma função binária e um valor inicial, de forma associativa à esquerda.

```
foldl (⊕) e [x0, x1, ..., xn-1]
≡
(...((e ⊕ x0) ⊕ x1) ...) ⊕ xn-1
```

### Exemplos de aplicação de foldl

```
foldl (+) 0 [] ~> 0
foldl (+) 0 [1] ~> 1
foldl (+) 0 [1,2] ~> 3
foldl (+) 0 [1,2,4] ~> 7
foldl (*) 1 [5,2,4,10] ~> 400
foldl (&&) True [2>0,even 6,odd 5,null []] ~> True
foldl (||) False [2>3,even 6,odd 5,null []] ~> True
```

## Definição

```
foldl      :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a

foldl f z []      = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

### 16.7.2 foldr

`foldr` reduz uma lista, usando uma função binária e um valor inicial, de forma associativa à direita.

```
foldr (⊕) e [x0, ..., xn-2, xn-1]
≡
x0 ⊕ (... (xn-2 ⊕ (xn-1 ⊕ e)) ...)
```

## Exemplos de aplicação de foldr

```
foldr (+) 0 []           ~ 0
foldr (+) 0 [1]          ~ 1
foldr (+) 0 [1,2]        ~ 3
foldr (+) 0 [1,2,4]      ~ 7
foldr (*) 1 [5,2,4,10]   ~ 400
foldr (&&) True [2>0,even 6,odd 5,null []] ~ True
foldr (||) False [2>3,even 6,odd 5,null []] ~ True
```

## Definição

```
foldr      :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b

foldr f z []      = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

### 16.7.3 foldl1

`foldl1` reduz uma lista não vazia usando uma função binária, de forma associativa à esquerda.

`foldl1` é uma variante de `foldl` que não tem valor inicial, e portanto deve ser aplicada a listas não-vazias.

## Exemplos de aplicação de foldl1

```
foldl1 (+) []           ~ erro
foldl1 (+) [1]          ~ 1
foldl1 (+) [1,2,4]      ~ 7
foldl1 (*) [5,2,4,10]   ~ 400
foldl1 (&&) [2>0,even 6,odd 5,null []] ~ True
foldl1 max [1,8,6,10,-48,5] ~ 10
```

## Definição

```
foldl1     :: (a -> a -> a) -> [a] -> a

foldl1 f (x:xs) = foldl f x xs
```



## 16.7.4 foldr1

`foldr1` reduz uma lista não vazia usando uma função binária, de forma associativa à esquerda.  
`foldr1` é uma variante de `foldr` que não tem valor inicial, e portanto deve ser aplicada a listas não-vazias.

### Exemplos de aplicação de foldr1

```
foldr1 (+) [] ~> erro
foldr1 (+) [1] ~> 1
foldr1 (+) [1,2,4] ~> 7
foldr1 (*) [5,2,4,10] ~> 400
foldr1 (&&) [2>0,even 6,odd 5,null []] ~> True
foldr1 max [1,8,6,10,-48,5] ~> 10
```

### Definição

```
foldr1 :: (a -> a -> a) -> [a] -> a

foldr1 _ [x] = x
foldr1 f (x:xs) = f x (foldr1 f xs)
```

## 16.8 List comprehension

### 16.8.1 List comprehension

Em Matemática a **notação de compreensão** pode ser usada para construir novos conjuntos a partir de conjuntos já conhecidos. Por exemplo,

$$\{x^2 | x \in [1..5]\}$$

é o conjunto  $\{1, 4, 9, 16, 25\}$  de todos os números  $x^2$  tal que  $x$  é um elemento do conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Em Haskell também há uma notação de compreensão similar que pode ser usada para construir novas listas a partir de listas conhecidas. Por exemplo

```
[ x^2 | x <- [1..5] ]
```

é a lista  $[1, 4, 9, 16, 25]$  de todos os números  $x^2$  tal que  $x$  é um elemento da lista  $[1, 2, 3, 4, 5]$ .

A frase `x <- [1..5]` é chamada **gerador**, já que ela informa como gerar valores para a variável `x`. Compreensões podem ter múltiplos geradores, separados por vírgula. Por exemplo:

```
[(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [4,5]] ~> [(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)]
```

Se a ordem dos geradores for trocada, a ordem dos elementos na lista resultante também é trocada. Por exemplo:

```
[(x,y) | y <- [4,5], x <- [1,2,3]] ~> [(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5)]
```

Geradores múltiplos são semelhantes a *loops* aninhados: os últimos geradores são como *loops* mais profundamente aninhados cujas variáveis mudam mais frequentemente. No exemplo anterior, como `x <- [1,2,3]` é o último gerador, o valor do componente `x` de cada par muda mais frequentemente.

Geradores posteriores podem depender de variáveis introduzidas em geradores anteriores. Por exemplo:

```
[(x,y) | x <- [1..3], y <- [x..3]] ~> [(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)]
```

é a lista  $[(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)]$  de todos os pares de números  $(x,y)$  tal que  $x$  e  $y$  são elementos da lista  $[1..3]$  e  $y \geq x$ .

Como exemplo, usando geradores dependentes pode-se definir a função que concatena uma lista de listas:

```
concat :: [[a]] -> [a]
concat xss = [x | xs <- xss, x <- xs]
```

```
concat [[1,2,3],[4,5],[6]] ~> [1,2,3,4,5,6]
```

*List comprehensions* podem usar **guardas** para restringir os valores produzidos por geradores anteriores. Por exemplo:

```
[x | x <- [1..10], even x] ~> [2,4,6,8,10]
```

é a lista de todos os números  $x$  tal que  $x$  é um elemento da lista  $[1..10]$  e  $x$  é par.

Como exemplo, usando uma guarda podemos definir uma função para calcular a lista de divisores de um número inteiro positivo:

```
divisores :: Int -> [Int]
divisores n = [x | x <- [1..n], mod n x == 0]
```

Exemplos de aplicação da função:

```
divisores 15 ~> [1,3,5,15]
divisores 120 ~> [1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120]
```

Um número inteiro positivo é *primo* se seus únicos divisores são 1 e ele próprio. Assim, usando `divisores`, podemos definir uma função que decide se um número é primo:

```
primo :: Int -> Bool
primo n = divisores n == [1,n]
```

Exemplos de aplicação da função:

```
primo 15 ~> False
primo 7 ~> True
```

Usando um guarda agora podemos definir uma função que retorna a *lista de todos os números primos* até um determinado limite:

```
primos :: Int -> [Int]
primos n = [x | x <- [2..n], primo x]
```

Exemplos de aplicação da função:

```
primos 40 ~> [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37]
primos 12 ~> [2,3,5,7,11]
```

## 16.8.2 List comprehension e funções de ordem superior

*List comprehension* nada mais é que uma abreviação sintática que é traduzida em aplicações das funções `map` e `filter`. Os exemplos a seguir ilustram como esta tradução é feita.

```
[ x^2 | x <- [1..5] ] ~> [1,4,9,16,25]
map (^2) [1..5]         ~> [1,4,9,16,25]

[(x,y) | x <- [1,2,3], y <- [4,5]] ~> [(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)]
map (\x->map (\y->(x,y)) [4,5]) [1,2,3] ~> [(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)]

primos n = [x | x <- [2..n], primo x]
primos' n = filter primo [2..n]
```

## 16.9 Cupom fiscal do supermercado

Nas tarefas que se seguem temos por objetivo desenvolver uma aplicação em Haskell para **automatizar o caixa de um supermercado** usando técnicas de manipulação de listas empregando funções de ordem superior.

Um leitor de código de barras é usado no caixa de um supermercado para produzir uma lista de códigos de barras a partir dos produtos que se encontram em um carrinho de compras contendo os produtos comprados. Usando os códigos de barra cria-se uma nota descritiva da compra. Considere por exemplo a seguinte lista de códigos de barra:

```
[1234,4719,3814,1112,1113,1234]
```

Esta lista deve ser convertida para uma conta como mostra a figura a seguir:

```
Haskell Stores

Dry Sherry, 1lt.....5.40
Fish Fingers.....1.21
Orange Jelly.....0.56
Hula Hoops (Giant).....1.36
Unknown Item.....0.00
Dry Sherry, 1lt.....5.40

Total.....13.90
```

Primeiro devemos decidir como modelar os objetos envolvidos. Códigos de barra e preços (**em centavos**) podem ser representados por números inteiros, e nomes de mercadorias podem ser representados por strings. Então usaremos os seguintes tipos:

```
type Nome    = String
type Preço   = Int
typeCodigo   = Int
```

A conversão dos códigos de barras será baseada em um banco de dados que relaciona códigos de barras, nomes de mercadorias, e preços. Usaremos uma lista para representar o banco de dados de mercadorias:

```
type Mercadorias = [ (Codigo, Nome, Preço) ]
```

O banco de dados para o exemplo dado é:

```
tabelaMercadorias :: Mercadorias
tabelaMercadorias = [ (4719, "Fish Fingers",    121 )
                     , (5643, "Nappies",        1010)
                     , (3814, "Orange Jelly",    56  )
                     , (1111, "Hula Hoops",      21  )
                     , (1112, "Hula Hoops (Giant)", 133 )
                     , (1234, "Dry Sherry, 1lt",  540 )
                     ]
```

O objetivo do programa é primeiramente converter uma lista de códigos de barra em uma lista de pares (**Nome**, **Preço**) por meio de uma consulta à tabela de mercadorias. Em seguida esta lista de pares deve ser convertida em uma string para exibição na tela. Usaremos as seguintes definições de tipo:

```
type Carrinho = [Codigo]
type Conta    = [(Nome,Preço)]
```

para representar um carrinho de compras e uma conta (cupom fiscal) corresponde a uma compra.

### Tarefa 16.1: Formatação do preço em reais

Defina uma função `formataCentavos :: Preço -> String` que recebe o preço em centavos e resulta em uma string representando o preço em reais.

Por exemplo:

```
formataCentavos 1023  ~> "10.23"
formataCentavos 56015 ~> "560.15"
formataCentavos 780   ~> "7.80"
formataCentavos 309   ~> "3.09"
formataCentavos 15    ~> "0.15"
formataCentavos 5     ~> "0.05"
```

Use as funções `div`, `mod` e `show`. Observe que ao dividir o preço em centavos por 100, o quociente corresponde à parte inteira do preço em reais, e o resto corresponde à parte fracionária do preço em reais. Preste atenção no caso do resto menor do que 10: deve-se inserir um 0 à esquerda explicitamente.

### Tarefa 16.2: Formatação de uma linha do cupom fiscal

Defina uma função `formataLinha :: (Nome,Preço) -> String` que recebe um par formado pelo nome e preço de uma mercadoria e resulta em uma string representando uma linha da conta do supermercado.

Por exemplo:

```
formataLinha ("Dry Sherry, 1lt",540) ~> "Dry Sherry, 1lt.....5.40\n"
formataLinha ("Nappies, 1lt",1010)  ~> "Nappies.....10.10\n"
```

O tamanho de uma linha em uma conta deve ser 30. Use a variável abaixo para representar este valor.

```
tamanhoLinha :: Int
tamanhoLinha = 30
```

Use as funções `(++)`, `show`, `length` e `replicate` do prelúdio, e a função `formataCentavos` da tarefa 16.1.

A função `replicate :: Int -> a -> [a]` recebe um número inteiro  $n$  e um valor  $x$  e resulta em uma lista de comprimento  $n$  onde todos os elementos são  $x$ . Por exemplo:

```
replicate 5 13 ~> [13,13,13,13,13]
replicate 8 '.' ~> "....."
```

### Tarefa 16.3: Formatação de várias linhas do cupom fiscal

Defina a função `formataLinhas :: [(Nome,Preco)] -> String` que recebe uma lista de pares formados pelos nomes das mercadorias e seus respectivos preços em uma compra, e resulta na string correspondente ao corpo da conta do supermercado.

Por exemplo:

```
formataLinhas [ ("Dry Sherry, 1lt", 540)
               , ("Fish Fingers", 121)
               , ("Orange Jelly", 056)
               , ("Hula Hoops (Giant)", 136)
               , ("Unknown Item", 000)
               , ("Dry Sherry, 1lt", 540)
               ]
```

~~~>

```
"Dry Sherry, 1lt.....5.40\n\
\Fish Fingers.....1.21\n\
\Orange Jelly.....0.56\n\
\Hula Hoops (Giant).....1.36\n\
\Unknown Item.....0.00\n\
\Dry Sherry, 1lt.....5.40\n"
```

Use a função `formataLinha` da tarefa 16.3 para obter as linhas correspondentes a cada produto, e concatene estas linhas usando a função `(++)` do prelúdio. Não use recursividade explícita, mas use as funções `map` e `foldr` ou `foldl` do prelúdio. Alternativamente você poderá usar *list comprehension*.

### Tarefa 16.4: Formatação do total

Defina a função `formataTotal :: Preco -> String` que recebe o valor total da compra, e resulta em uma string representado a parte final da conta do supermercado.

Por exemplo:

```
formataTotal 1390 ~> "\nTotal.....13.90"
```

Use as dicas da tarefa 16.2.

### Tarefa 16.5: Formatação do cupom fiscal

Defina a função `formataConta :: Conta -> String` que recebe a lista dos itens comprados e resulta na string representando a conta do supermercado, já formatada.

Por exemplo:

```
formataConta [ ("Dry Sherry, 1lt", 540)
               , ("Fish Fingers", 121)
               , ("Orange Jelly", 056)
               , ("Hula Hoops (Giant)", 136)
               , ("Unknown Item", 000)
               , ("Dry Sherry, 1lt", 540)
               ]
```

resulta na string que é exibida pela função `putStr` como

```
Haskell Stores

Dry Sherry, 1lt.....5.40
Fish Fingers.....1.21
Orange Jelly.....0.56
Hula Hoops (Giant).....1.36
Unknown Item.....0.00
Dry Sherry, 1lt.....5.40

Total.....13.90
```

Use as funções definadas nas tarefas 16.3 e 16.4.

### Tarefa 16.6: Cálculo do valor total da compra

Defina a função `calculaTotal :: Conta -> Preco` que recebe uma conta (lista de pares formados pelo nome e preço das mercadorias de uma compra), e resulta no preço total da compra.

Por exemplo:

```
calculaTotal [("a",540),("b",121),("c",12)] ~> 673
calculaTotal [("vinho",3540),("carne",7201)] ~> 10741
calculaTotal [] ~> 0
```

Não use recursividade explícita, mas use as funções `map` e `sum` do prelúdio.

### Tarefa 16.7: Pesquisa do código de um produto

Defina uma função `procuraCodigo :: Mercadorias -> Codigo -> (Nome,Preco)` que recebe o banco de dados com os nomes e preços das mercadorias disponíveis no supermercado e o código de barras da mercadoria comprada, e resulta no par formado pelo nome e pelo preço da mercadoria, de acordo com o banco de dados. Se o código de barras não constar no banco de dados, o resultado deve ser o par `("Unknown Item",0)`.

Por exemplo:

```
procuraCodigo tabelaMercadorias 5643 ~> ("Nappies", 1010)
procuraCodigo tabelaMercadorias 9999 ~> ("Unknown Item", 0)
```

Use recursão explícita.

### Tarefa 16.8: Criação da conta da compra

Defina a função `criaConta :: Mercadorias -> Carrinho -> Conta` que recebe o banco de dados com os nomes e preços das mercadorias disponíveis no supermercado, e a lista de códigos de barra correspondente a uma compra, e resulta na lista dos pares `(Nome, Preço)` para as mercadorias compradas. Por exemplo:

```
criaConta tabelaMercadorias [3814, 5643]
  ~> [("Orange Jelly", 56), ("Nappies", 1010)]
```

Use uma aplicação parcial da função `procuraCodigo` definida na tarefa 16.7 e a função `map` do prelúdio. Não use recursão explícita.

### Tarefa 16.9: Criação do cupom fiscal

Defina a função `fazCompra :: Mercadorias -> Carrinho -> String` que recebe o banco de dados com os nomes e preços das mercadorias disponíveis no supermercado, e a lista de códigos de barra correspondente a uma compra, e resulta na string correspondente à nota da compra.

Use a função `criaConta` (definida na tarefa 16.8) para criar a conta a partir dos argumentos, e a função `formataConta` (definida na tarefa 16.5) para converter a conta para string. Use composição de funções.

### Tarefa 16.10: Ação main

Defina a variável `main :: IO ()` como uma ação de entrada e saída que interage com o usuário. Quando `main` for executada, o usuário deve digitar os códigos de barras das mercadorias compradas e em seguida a conta do supermercado deve ser exibida na tela.

Para fazer a entrada de um valor (digitado pelo usuário) você pode usar a função `readLn` do prelúdio.

### Tarefa 16.11

Complete a aplicação com a definição do módulo `Main` contendo as definições feitas anteriormente, e exportando a variável `main`. Compile a aplicação gerando um programa executável. Teste a aplicação.

Se necessário, importe `stdout`, `hSetBuffering`, `BufferMode` e `NoBuffering` do módulo `System.IO` e cancele a *bufferização* da saída padrão.

## 16.10 Soluções

Tarefa 16.11 on page 16-12: Solução

```
module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

type Nome      = String
type Preço     = Int
type Codigo    = Int
type Mercadorias = [(Codigo,Nome,Preco)]
type Carrinho  = [Codigo]
type Conta     = [(Nome,Preco)]

tabelaMercadorias :: Mercadorias
tabelaMercadorias =
  [ (4719, "Fish Fingers",      121 )
  , (5643, "Nappies",          1010)
  , (3814, "Orange Jelly",      56  )
  , (1111, "Hula Hoops",        21  )
  , (1112, "Hula Hoops (Giant)", 133 )
  , (1234, "Dry Sherry, 1lt",    540 )
  ]

formataCentavos :: Preço -> String
formataCentavos preco = show quo ++
  "." ++
  (if res < 10 then "0" else "") ++
  show res
  where
    (quo,res) = divMod preco 100
    -- quo = div preco 100
    -- res = mod preco 100

tamanhoLinha :: Int
tamanhoLinha = 30

formataLinha :: (Nome,Preco) -> String
formataLinha (nome,preco) = nome ++
  (replicate qtdepts '.') ++
  precoStr ++
  "\n"
  where
    precoStr = formataCentavos preco
    qtdepts = tamanhoLinha - length nome - length precoStr

-- usando funções de ordem superior
formataLinhas :: [(Nome,Preco)] -> String
formataLinhas itens = foldl (++) "" (map formataLinha itens)

-- usando recursividade explícita
formataLinhas2 :: [(Nome,Preco)] -> String
formataLinhas2 [] = ""
formataLinhas2 (item:resto) = formataLinha item ++ formataLinhas2 resto

formataTotal :: Preço -> String
formataTotal preco = "\nTotal" ++
```



```

        (replicate qtdepts '.') ++
        precoStr

where
    precoStr = formataCentavos preco
    qtdepts = tamanhoLinha - length "Total" - length precoStr

calculaTotal :: Conta -> Preco
calculaTotal itens = sum (map snd itens)

formataConta :: Conta -> String
formataConta itens = "Haskell Store\n" ++
    "\n" ++
    formataLinhas itens ++
    formataTotal (calculaTotal itens)

procuraCodigo :: Mercadorias -> Codigo -> (Nome, Preco)
procuraCodigo [] _ = ("Unknown item", 0)
procuraCodigo ((cod1,nome,preco):resto) cod2 | cod1 == cod2 = (nome,preco)
                                              | otherwise = procuraCodigo resto cod2

criaConta :: Mercadorias -> Carrinho -> Conta
criaConta tabela itens = map (procuraCodigo tabela) itens

fazCompra :: Mercadorias -> Carrinho -> String
fazCompra tabela itens = formataConta (criaConta tabela itens)

leCodigos :: IO [Codigo]
leCodigos = do x <- readLn
    if x == 0
    then return []
    else do xs <- leCodigos
        return (x:xs)

main :: IO ()
main = do hSetBuffering stdout NoBuffering
    putStrLn "Emissão de cupom fiscal v1.0"
    putStrLn "======"
    putStrLn ""
    putStrLn "Digite os códigos de barra das mercadorias (0 termina):"
    codigos <- leCodigos
    putStrLn "======"
    putStr (fazCompra tabelaMercadorias codigos)
    putStrLn "======"

```

# Argumentos da Linha de Comando e Arquivos

## Resumo

Nesta aula vamos aprender a escrever aplicações que obtêm dados de arquivos e que gravam os resultados calculados em arquivos. Vamos também aprender a usar argumentos passados para um programa na linha de comando.

## Sumário

|                                                              |       |
|--------------------------------------------------------------|-------|
| 17.1 Argumentos da linha de comando . . . . .                | 17-1  |
| 17.2 Encerrando o programa explicitamente . . . . .          | 17-2  |
| 17.3 Formatando dados com a função printf . . . . .          | 17-4  |
| 17.4 Arquivos . . . . .                                      | 17-5  |
| 17.5 As funções lines e unlines, e words e unwords . . . . . | 17-6  |
| 17.6 Exemplo: processar notas em arquivo . . . . .           | 17-7  |
| 17.7 Problemas . . . . .                                     | 17-8  |
| 17.8 Soluções . . . . .                                      | 17-11 |

## 17.1 Argumentos da linha de comando

Quando um programa é iniciado, ele pode receber argumentos através da linha de comando, e estes argumentos podem ser usados durante a execução do programa. O módulo `System.Environment` exporta algumas definições que podem ser usadas para acessar estes argumentos.

### A ação `getArgs`

```
getArgs :: IO [String]
```

A ação de E/S `getArgs` (definida no módulo `System.Environment`), quando executada, retorna uma lista formada pelos argumentos da linha de comando do programa.

### A ação `getProgName`

```
getProgName :: IO String
```

A ação de E/S `getProgName` (definida no módulo `System.Environment`), quando executada, retorna o nome do programa.

### Exemplo: argumentos do programa

```
args.hs
```

```

module Main (main) where

import System.Environment (getArgs, getProgName)

main =
  do progName <- getProgName
     putStr "The program name is ....: "
     print progName
     args <- getArgs
     putStr "The arguments are.....: "
     print args

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```

$ ghc --make args
[1 of 1] Compiling Main                ( args.hs, args.o )
Linking args ...

$ ./args a b c -o test
The program name is ....: "args"
The arguments are.....: ["a","b","c","-o","test"]

```

Quando o programa for executado no ambiente interativo, o nome do programa e os argumentos a serem usados pelo programa podem ser especificados usando os comandos `:set prog` e `:set args`, respectivamente.

#### Exemplo de execução da aplicação

```

*Main> main
The program name is ....: "<interactive>"
The arguments are.....: []

```

#### Exemplo de execução da aplicação

```

*Main> :set prog test-args

*Main> :set args -pdf entrada.txt saida.txt

*Main> main
The program name is ....: "test-args"
The arguments are.....: ["-pdf","entrada.txt","saida.txt"]

```

## 17.2 Encerrando o programa explicitamente

O módulo `System.Exit` exporta algumas definições úteis para encerrar a execução do programa explicitamente.

### O tipo `ExitCode`

Quando a execução de um programa termina, o ambiente onde o programa foi executado (normalmente o sistema operacional) recebe um código (*status*) de retorno. Este código pode ser inspecionado pelo ambiente de execução para verificar em que condições a execução do programa terminou. Tipicamente o valor zero indica sucesso, e um valor diferente de zero indica falha.

O tipo `ExitCode` define códigos de saída que podem ser retornados por um programa quando ele é encerrado. Este tipo possui dois construtores de dados:

- `ExitSuccess`: indica término com sucesso.

- **ExitFailure Int**: indica falha com um código de saída; a interpretação exata do código é dependente do sistema operacional.

## A função `exitWith`

```
exitWith :: ExitCode -> IO a
```

A função `exitWith` pode ser usada para criar uma ação de E/S que, quando executada, termina o programa com o código de saída especificado.

## A ação de E/S `exitFailure`

```
exitFailure :: IO ()
```

A ação de E/S `exitFailure`, quando executada, termina o programa com um código de falha que é dependente da implementação.

## A ação de E/S `exitSuccess`

```
exitSuccess :: IO ()
```

A ação de E/S `exitSuccess`, quando executada, termina o programa com uma indicação de sucesso.

## Exemplo: validando os argumentos da linha de comando

```
module Main (main) where

import System.Environment (getArgs, getProgName)
import System.Exit (exitFailure)

main =
  do args <- getArgs
  case args of
    [input,output] ->
      do putStrLn ("Entrada: " ++ input)
         putStrLn ("Saída  : " ++ output)
    - ->
      do progName <- getProgName
         putStrLn ("Chamada inválida do programa " ++ progName)
         putStrLn ("Uso: " ++ progName ++ " <arquivo-entrada> <arquivo-saída>")
         exitFailure
```

### Exemplo de execução da aplicação

```
$ ./validate-args arquivo1.txt arquivo2.txt
Entrada: arquivo1.txt
Saída  : arquivo2.txt
```

### Exemplo de execução da aplicação

```
$ ./validate-args -pdf arquivo1.txt arquivo2.txt fim
Chamada inválida do programa validate-args
Uso: validate-args <arquivo-entrada> <arquivo-saída>
```

## 17.3 Formatando dados com a função printf

O módulo `Text.Printf` oferece a possibilidade de formatação de textos usando formatadores semelhantes àqueles disponíveis em C através da função `printf`.

```
printf :: PrintfType r => String -> r
```

A função `printf` (definida no módulo `Text.Printf`) formata um número variável de argumentos usando uma string de formatação no estilo da função `printf` da linguagem C. O resultado pode ser de qualquer tipo que seja instância da classe `PrintfType`, que inclui os tipos `String` e `IO a`.

A string de formatação consiste de caracteres comuns e especificações de conversão, que podem especificar como formatar um dos argumentos na string de saída. Uma especificação de formato é introduzida pelo caracter `%` e termina com um caracter de formato que é a principal indicação de como o valor deve ser formatado. Use `%%` para inserir o próprio caracter `%` na string de formatação. O restante da especificação de conversão é opcional, podendo ser caracteres de *flag*, especificador de tamanho, especificador de precisão, e caracteres modificadores de tipo, nesta ordem.

### Caracteres de *flag*

|        |                                                                |
|--------|----------------------------------------------------------------|
| -      | alinhamento à esquerda (o padrão é à direita)                  |
| +      | sempre use um sinal (+ ou -) para conversão com sinal          |
| espaço | espaço na frente de números positivos para conversão com sinal |
| 0      | complete com zeros (o padrão é espaços)                        |
| #      | use uma forma alternativa (veja abaixo)                        |

### Formas alternativas

|           |                                              |
|-----------|----------------------------------------------|
| %o        | prefixa com um 0 se necessário               |
| %x        | prefixa com um 0x se diferente de zero       |
| %X        | prefixa com um 0X se diferente de zero       |
| %b        | prefixa com um 0b se diferente de zero       |
| %[eEfFgG] | garante que o número contém um ponto decimal |

### Tamanho de campo

|     |                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------|
| num | largura mínima do campo                               |
| *   | largura mínima do campo tomada da lista de argumentos |

### Precisão

|       |                                        |
|-------|----------------------------------------|
| . num | precisão                               |
| .     | o mesmo que .0                         |
| .*    | precisão tomada da lista de argumentos |

O significado da precisão depende do tipo de conversão:

|                  |                                           |
|------------------|-------------------------------------------|
| <b>Integral</b>  | número mínimo de dígitos a serem exibidos |
| <b>RealFloat</b> | número de dígitos depois do ponto decimal |
| <b>String</b>    | número máximo de caracteres               |

## Modificadores de tamanho

|    |       |
|----|-------|
| hh | Int8  |
| h  | Int16 |
| l  | Int32 |
| ll | Int64 |
| L  | Int64 |

## Caracteres de formatação

|   |                              |               |
|---|------------------------------|---------------|
| c | caracter                     | Integral      |
| d | decimal                      | Integral      |
| o | octal                        | Integral      |
| x | hexadecimal                  | Integral      |
| X | hexadecimal                  | Integral      |
| b | binário                      | Integral      |
| u | decimal sem sinal            | Integral      |
| f | ponto flutuante              | RealFloat     |
| F | ponto flutuante              | RealFloat     |
| g | ponto flutuante geral        | RealFloat     |
| G | ponto flutuante geral        | RealFloat     |
| e | ponto flutuante com expoente | RealFloat     |
| E | ponto flutuante com expoente | RealFloat     |
| s | string                       | String        |
| v | padrão                       | qualquer tipo |

## Exemplos

```
Text.Printf> printf "%d\n" 23
23

Text.Printf> printf ":%7d:%-7d:%+7d:%7d:%07d:\n" 2014 2015 2016 2017 2018
: 2014:2015 : +2016: 2017:0002018:

Text.Printf> printf "%d %o %x %b %#b" 123 123 123 123 123
123 173 7b 1111011 0b1111011

Text.Printf> printf "%d/%7d/%*d/%4f/%.2f/" 745 745 10 745 pi pi
/745/ 745/ 745/3.141592653589793/3.14/

Text.Printf> printf "%s %s!\n" "Hello" "World"
Hello World!

Text.Printf> printf "sin(%.2f) = %f\n" pi (sin pi)
sin(3.14) = 0.00000000000000012246467991473532
```

Veja a documentação completa da função `printf` em <http://hackage.haskell.org/package/base-4.7.0.1/docs/Text-Printf.html>

## 17.4 Arquivos

Haskell possui várias definições para manipular arquivos definidas no módulo `System.IO`. Algumas delas são mencionadas a seguir.

```
type FilePath = String
```

Tipo usado para representar o caminho de um arquivo, incluindo o seu nome.

```
readFile :: FilePath -> IO String
```

Lê o conteúdo de um arquivo como uma única string.

```
writeFile :: FilePath -> String -> IO ()
```

Grava uma string em um arquivo.

```
appendFile :: FilePath -> String -> IO ()
```

Acrescenta uma string no final de um arquivo.

## 17.5 As funções `lines` e `unlines`, e `words` e `unwords`

### A função `lines`

```
lines :: String -> [String]
```

A função `lines` divide uma string em uma lista de strings nas mudanças de linha. As strings resultantes não contêm o caractere de mudança de linha.

Por exemplo:

```
lines "aa\nbb\nbb\nnzz\n"
~> ["aa", "bb", "bb", "", "zz"]

lines "1234 Pedro 1.5 1.7\n1111 Carla 6.2 7.0\n2121 Rafael 8.1 8.8"
~> ["1234 Pedro 1.5 1.7", "1111 Carla 6.2 7.0", "2121 Rafael 8.1 8.8"]
```

### A função `unlines`

```
unlines :: [String] -> String
```

A função `unlines` é uma operação inversa de `lines`. Ela junta as strings da lista dada após acrescentar o caractere de mudança de linha no final de cada uma delas.

Por exemplo:

```
unlines ["aa", "bb", "bb", "zz"]
~> "aa\nbb\nbb\nzz\n"
```

### A função `words`

```
words :: String -> [String]
```

A função `words` divide uma string em uma lista de strings nos caracteres brancos (espaço, tabulação, mudança de linha, etc). As strings resultantes não contêm caracteres brancos.

Por exemplo:

```
words "aa bb\tbb      zz"
  ~> ["aa", "bb", "bb", "zz"]
```

## A função unwords

```
unwords :: [String] -> String
```

A função `unwords` é uma operação inversa de `lines`. Ela junta as strings da lista dada acrescentando um espaço entre elas.

Por exemplo:

```
unlines ["aa", "bb", "bb", "zz"]
  ~> "aa bb bb zz"
```

## 17.6 Exemplo: processar notas em arquivo

### Tarefa 17.1

Criar um programa para ler de um arquivo os dados dos alunos de uma turma (a matrícula, o nome, a nota na primeira avaliação, e a nota na segunda avaliação), calcular a média aritmética das notas das duas avaliações, e determinar a situação de cada aluno, gravando os resultados em outro arquivo.

A situação do aluno é dada pela tabela seguinte

| média aritmética das notas | situação       |
|----------------------------|----------------|
| até 3                      | reprovado      |
| entre 3 (inclusive) e 7    | exame especial |
| acima de 7 (inclusive)     | aprovado       |

Os nomes dos arquivos de entrada e saída devem ser informados como argumentos da linha de comando.

Exemplo de arquivo de entrada:

```
1234  Pedro  1.5    1.7  abobora
1111  Carla  6.2    7.0
2121  Rafael 8.1    8.8
4321  Ivan   5.0    5.2
```

Arquivo de saída correspondente:

```
1234 Pedro 1.5 1.7 1.6 reprovado
1111 Carla 6.2 7.0 6.6 exame especial
2121 Rafael 8.1 8.8 8.45 aprovado
4321 Ivan 5.0 5.2 5.1 exame especial
```



```

module Main (main) where

import System.Environment (getArgs)
import System.Exit (exitFailure)

main :: IO ()
main =
    do argumentos <- getArgs
      case argumentos of
        [entrada, saida] -> do conteudo <- readFile entrada
                               writeFile saida (processa conteudo)
        _ -> exitFailure

-- processa :: String -> String
-- processa texto =
--     unlines (map processaAluno (lines texto))

processa :: String -> String
processa =
    unlines . map processaAluno . lines

processaAluno :: String -> String
processaAluno linha =
    case words linha of
      [mat, nome, n1, n2] ->
        let media = (read n1 + read n2)/2
            situacao | media < 3 = "reprovado"
                    | media < 7 = "exame especial"
                    | otherwise = "aprovado"
        in unwords [mat, nome, n1, n2, show media, situacao]
      _ ->
        error "dados não estão no formato esperado"

```

## 17.7 Problemas

### Tarefa 17.2: Popularidade de nomes próprios

O arquivos texto `boynames.txt` e `girlnames.txt`, que estão disponíveis no sítio da disciplina, contêm uma lista dos 1.000 nomes de garotos e garotas mais populares nos Estados Unidos para o ano de 2003 como compilados pela Administração do Seguro Social.

Estes arquivos consistem dos nomes mais populares listados por linha, onde o nome mais popular é listada em primeiro lugar, o segundo nome mais popular é listada em segundo lugar, e assim por diante, até o 1000 nome mais popular, que é listada por último. Cada linha é composta pelo primeiro nome seguido de um espaço em branco e, em seguida, do número de nascimentos registrados usando esse nome no ano. Por exemplo, o arquivo `girlnames.txt` inicia com

```

Emily 25494
Emma 22532
Madison 19986

```

Isso indica que entre as garotas Emily foi o nome mais popular em 2003, com 25.494 nomes registrados, Emma foi o segundo mais popular, com 22.532 registros, e Madison foi o terceiro mais popular, com 19.986 registros.

Escreva um programa que lê os arquivos com os dados dos garotos e das garotas e em seguida, permita que o usuário insira um nome. O programa deve pesquisar ambas as listas de nomes. Se houver uma correspondência, então ele deve emitir o *classificação* de popularidade e o número de nascimentos registrados com este nome. O programa deve também indicar se não houver correspondência.

Por exemplo, se o usuário digita o nome *Justice*, o programa deve produzir a saída

*Justice* é classificado como 456 em popularidade entre garotas com 655 registros.

Justice é classificado como 401 em popularidade entre garotos com 653 registros.

Se o usuário digitar o nome *Walter*, o programa deve produzir a saída

Walter não está classificado entre os 1000 nomes mais populares de garotas.

Walter é classificado como 356 em popularidade entre garotos com 775 registros.

O programa deve terminar quando o usuário digitar um nome em branco.

---

#### Dicas:

1. Defina uma função recursiva `tabela` para fazer a análise de um texto (string) contendo uma tabela de nomes, obtendo como resultado uma lista de triplas onde cada tripla é formada pela posição, pelo nome, e pela quantidade de registros.

Por exemplo:

```
tabela "ana 1234\npaula 561\nbeatriz 180"
↪ [(1, "ana", 1234), (2, "paula", 561), (3, "beatriz", 180)]
```

2. Defina uma função `pesquisa` que recebe uma string descrevendo a tabela de nomes usada, uma lista de triplas formadas pela posição, pelo nome (a tabela de nomes), e pela quantidade de registros de uma tabela de nomes, e um nome (string) a ser pesquisado na tabela. O resultado da função deve ser uma ação de E/S que, quando executada, pesquisa o nome na lista e exibe o resultado na saída padrão, retornando a tupla vazia.

Por exemplo:

```
pesquisa
"garotas"
[(1, "ana", 1234), (2, "paula", 561), (3, "beatriz", 180)]
"paula"
↪
ana e classificado como 2 em popularidade entre garotas com 561 registros
```

```
pesquisa
"garotas"
[(1, "ana", 1234), (2, "paula", 561), (3, "beatriz", 180)]
"Maria"
↪
Maria nao esta classificado entre os 3 nomes mais populares de garotas.
```

3. Defina uma função `go` que recebe as duas tabelas de nomes e resulta em uma ação de E/S que, quando executada:

- solicita ao usuário para digitar o nome a ser pesquisado,
- lê o nome,
- analisa o nome lido
  - se for a string vazia, retorna a tupla vazia
  - caso contrário:
    - \* pesquisa o nome entre os garotos e exibe o resultado da pesquisa,
    - \* pesquisa o nome entre as garotas e exibe o resultado da pesquisa, e
    - \* chama `go` recursivamente para continuar a interação com o usuário.

4. Defina a ação `main` para fazer o sequenciamento:

- desligar a bufferização da saída padrão,
- ler o arquivo com a tabela de nomes de garotos,
- ler o arquivo com a tabela de nomes de garotas, e
- interagir com o usuário usando a função `go`.

### Tarefa 17.3: Correção de provas de múltipla escolha

Faça um programa para corrigir provas de múltipla escolha que foram aplicadas em uma turma de alunos. Os dados deverão ser obtidos de um arquivo texto cujo nome é informado na linha de comando.

- o **gabarito** (as respostas corretas de cada questão) da prova: primeira linha do arquivo
- a **matrícula** e as **respostas** de cada aluno da turma: demais linhas do arquivo, uma linha para cada aluno; a primeira palavra da linha é a matrícula do aluno, e as demais palavras são as respostas da prova do aluno

Exemplo:

```
      a b c a d c c e e d c b
5002 a c a d a c a d e d b c
5003 b b c a b c c e d d c c
5015 a a a a c c c b c d b e
5405 c a e a d c b e b a c c
5420 a b c a e c c a a d e c
5449 a b c a e c d a e d c a
5450 e e c a d c c e e d c c
```

As notas devem ser normalizadas na faixa de zero a dez. Assim para calcular a nota obtida em uma prova, divida a soma dos pontos obtidos (um ponto para cada resposta correta) pelo número de questões na prova, e multiplique o resultado por dez.

Calcule e grave os resultados em um arquivo texto cujo nome deve ser informado na linha de comando:

1. a matrícula e a nota de cada aluno
2. a taxa (em porcentagem) de aprovação, sabendo-se que a nota mínima para aprovação é sete.

#### Dicas

- Faça a entrada, o processamento e a saída da forma mais independente possível. Ou seja, separe estas etapas no programa.
- Faça uma função que recebe o gabarito e a lista das provas dos alunos e resulta na lista dos resultados, formada por pares contendo a matrícula e a nota do aluno.
- Faça uma função que recebe a lista dos resultados e resulta na porcentagem de aprovação.
- Use estas funções para montar o resultado.

## 17.8 Soluções

Tarefa 17.2 on page 17-8: Solução

```
module Main where

import Text.Printf (printf)
import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))

tabela :: String -> [(Int,String,Int)]
tabela texto =
    montaTabela 1 (lines texto)

montaTabela :: Int -> [String] -> [(Int,String,Int)]
montaTabela _ [] = []
montaTabela i (x:xs) = let [nome, regs] = words x
                        in (i, nome, read regs) : montaTabela (i+1) xs

pesquisa :: String -> [(Int,String,Int)] -> String -> IO ()
pesquisa tipo [] nome =
    printf "%s não encontrado entre %s\n" nome tipo
pesquisa tipo ((c,n,r):resto) nome
    | nome == n =
        printf "%s classificado na posição %d entre %s com %d registros\n"
            nome c tipo r
    | otherwise =
        pesquisa tipo resto nome

go :: [(Int,String,Int)] -> [(Int,String,Int)] -> IO ()
go tabGarotos tabGarotas =
    do putStr "Nome: "
       n <- getLine
       case n of
           "" -> return ()
           _ -> do pesquisa "garotos" tabGarotos n
                    pesquisa "garotas" tabGarotas n
                    go tabGarotos tabGarotas

main :: IO ()
main =
    do hSetBuffering stdout NoBuffering
       texto1 <- readFile "boynames.txt"
       texto2 <- readFile "girlnames.txt"
       go (tabela texto1) (tabela texto2)
```

# 18 Tipos Algébricos

## Resumo

Um tipo algébrico é um tipo onde são especificados a forma de cada um dos seus elementos. *Algébrico* se refere à propriedade de que um tipo algébrico é criado por operações *algébricas*. A álgebra aqui é *somas* e *produtos*:

- *soma* é a alternância:  $A|B$  significa  $A$  ou  $B$ , mas não ambos, e
- *produto* é a combinação:  $AB$  significa  $A$  e  $B$  juntos.

Somas e produtos podem ser combinados repetidamente em estruturas arbitrariamente largas.

Nesta aula vamos aprender como definir e usar tipos algébricos (ou seja, estruturas de dados), em Haskell.

## Sumário

|       |                                            |       |
|-------|--------------------------------------------|-------|
| 18.1  | Novos tipos de dados . . . . .             | 18-1  |
| 18.2  | Tipos algébricos . . . . .                 | 18-2  |
| 18.3  | Exemplo: formas geométricas . . . . .      | 18-2  |
| 18.4  | Exemplo: sentido de movimento . . . . .    | 18-3  |
| 18.5  | Exemplo: cor . . . . .                     | 18-5  |
| 18.6  | Exemplo: coordenadas cartesianas . . . . . | 18-5  |
| 18.7  | Exemplo: horário . . . . .                 | 18-5  |
| 18.8  | Exemplo: booleanos . . . . .               | 18-6  |
| 18.9  | Exemplo: listas . . . . .                  | 18-6  |
| 18.10 | Exercícios básicos . . . . .               | 18-7  |
| 18.11 | Números naturais . . . . .                 | 18-8  |
| 18.12 | Árvores binárias . . . . .                 | 18-9  |
| 18.13 | O construtor de tipo Maybe . . . . .       | 18-9  |
| 18.14 | Exercício: lógica proposicional . . . . .  | 18-10 |
| 18.15 | Soluções . . . . .                         | 18-16 |

## 18.1 Novos tipos de dados

### ▪ Tipos básicos:

- `Bool`
- `Char`
- `Int`
- `Integer`
- `Float`
- `Double`

### ▪ Tipos Compostos:

- tuplas:  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$
- listas:  $[t]$
- funções:  $t_1 \rightarrow t_2$

▪ **Novos tipos:** como definir?

- dias da semana
- estações do ano
- figuras geométricas
- árvores
- tipos cujos elementos são inteiros ou strings
- ...

## 18.2 Tipos algébricos

Uma **declaração de tipo algébrico** é da forma:

```
data cx => T u1 ... uk = C1 t11 ... t1n1
                        ⋮
                        | Cm tm2 ... tmnm
```

onde:

- $cx$  é um contexto
- $u_1 \dots u_k$  são variáveis de tipo
- $T$  é o **construtor de tipo**
- $T u_1 \dots u_k$  é um novo tipo introduzido pela declaração **data**
- $C_1, \dots, C_m$  são **construtores de dados**
- $t_{ij}$  são tipos
- Construtores de tipo e construtores de dados são *identificadores alfanuméricos* começando com letra maiúscula, ou *identificadores simbólicos*.
- Um **construtor de dados** é utilizado para
  - construir valores do tipo definido, funcionando como uma função (eventualmente, constante) que recebe argumentos (do tipo indicado para o construtor), e constrói um valor do novo tipo de dados;
  - decompor um valor do tipo em seus componentes, através de casamento de padrão
- Construtores de dados são funções especiais, pois não tem nenhuma definição (algoritmo) associada.

## 18.3 Exemplo: formas geométricas

- Definição de um novo tipo para representar formas geométricas:

```
data Figura = Circulo Double
            | Retangulo Double Double
```

- O **construtor de tipo** é **Figura**.

- Os **construtores de dados** deste tipo são:

```
Circulo    :: Double -> Figura
Retangulo  :: Double -> Double -> Figura
```

e com eles é possível construir todo e qualquer valor do tipo **Figura**:

```
a :: Figura
a = Circulo 2.3  -- um círculo de raio 2.3
```

```
b :: Figura
b = Retangulo 2.8 3.1  -- um retângulo de base 2.8 e altura 3.1
```

```
lfig :: [Figura]
lfig = [Retangulo 5 3, Circulo 5.7, Retangulo 2 2]
```

- Expressões como `Circulo 2.3` ou `Retangulo 2.8 3.1` *não podem ser reduzidas*, pois já estão em sua forma mais simples.
- Os construtores são utilizados em casamento de *padrões* para acessar os componentes de um valor do tipo algébrico.
- Podemos definir *funções* envolvendo os tipos algébricos.

```
eRedondo :: Figura -> Bool
eRedondo (Circulo _)      = True
eRedondo (Retangulo _ _) = False
```

```
eRedondo (Circulo 3.2)      ~> True
eRedondo (Retangulo 2 5.1) ~> False
```

```
area :: Figura -> Double
area (Circulo r)      = pi * r^2
area (Retangulo b a) = b * a
```

```
area (Circulo 2.5)      ~> 19.634954084936208
area (Retangulo 2 5.1) ~> 10.2
```

```
quadrado :: Double -> Figura
quadrado lado = Retangulo lado lado
```

```
area (quadrado 2.5) ~> 6.25
```

## 18.4 Exemplo: sentido de movimento

- Definição de um novo tipo para representar direções de movimento:

```
data Sentido = Esquerda | Direita | Acima | Abaixo
```

- O **construtor de tipo** é **Sentido**.
- Os **construtores de dados** deste tipo, todos constantes, são:

```
Esquerda :: Sentido
Direita  :: Sentido
Acima    :: Sentido
Abaixo   :: Sentido
```

- Quando os construtores de dados são **constantes**, (ou seja, não tem argumentos), dizemos que o tipo é uma **enumeração**.
- Neste exemplo os únicos valores do tipo **Sentido** são **Direita**, **Esquerda**, **Acima** e **Abaixo**.
- Podemos definir funções envolvendo o tipo algébrico:

```
type Pos = (Double,Double)
```

```
move :: Sentido -> Pos -> Pos
move Esquerda (x,y) = (x-1,y )
move Direita  (x,y) = (x+1,y )
move Acima    (x,y) = (x ,y+1)
move Abaixo   (x,y) = (x ,y-1)
```

```
moves :: [Sentido] -> Pos -> Pos
moves []      p = p
moves (s:ss) p = moves ss (move s p)
```

```
moves [Direita,Acima,Acima,Abaixo,Acima,Direita,Acima] (0,0)
~> (2.0,3.0)
```

Definição alternativa usando funções de ordem superior:

```
moves :: [Sentido] -> Pos -> Pos
moves sentidos pontoInicial = foldl (flip move) pontoInicial sentidos
```

```
flipSentido :: Sentido -> Sentido
flipSentido Direita = Esquerda
flipSentido Esquerda = Direita
flipSentido Acima = Abaixo
flipSentido Abaixo = Acima
```

```
flipSentido Direita ~> erro:
No instance for (Show Sentido) arising from a use of `print'
```

Oops!

- A princípio Haskell não sabe como exibir valores dos novos tipos.
- O compilador pode definir automaticamente funções necessárias para exibição:

```
data Sentido = Esquerda | Direita | Acima | Abaixo
  deriving (Show)
```

- A cláusula **deriving** permite declarar as classes das quais o novo tipo será instância, automaticamente.
- Logo, segundo a declaração dada, o tipo **Sentido** é uma instância da classe **Show**, e a função **show** é sobrecarregada para o tipo **Sentido**.

```
show Direita      ~> "Direita"
flipSentido Direita ~> Esquerda
```



## 18.5 Exemplo: cor

- Definição de um novo tipo para representar cores:

```
data Cor = Azul | Amarelo | Verde | Vermelho
```

- O construtor de tipo é **Cor**.
- Os construtores de dados deste tipo são:

```
Azul      :: Cor  
Amarelo   :: Cor  
Verde     :: Cor  
Vermelho  :: Cor
```

- Podemos agora definir funções envolvendo cores:

```
fria :: Cor -> Bool  
fria Azul    = True  
fria Verde   = True  
fria _       = False
```

```
fria Amarelo ~?= False
```

```
quente :: Cor -> Bool  
quente Amarelo = True  
quente Vermelho = True  
quente _       = False
```

```
quente Amarelo ~?= True
```

## 18.6 Exemplo: coordenadas cartesianas

- Definição de um novo tipo para representar coordenadas cartesianas:

```
data Coord = Coord Double Double
```

- O construtor de tipo é **Coord**.
- O construtor de dados deste tipo é:

```
Coord :: Double -> Double -> Coord
```

- Podemos agora definir funções envolvendo coordenadas:

```
somaVet :: Coord -> Coord -> Coord  
somaVet (Coord x1 y1) (Coord x2 y2) = Coord (x1+x2) (y1+y2)
```

## 18.7 Exemplo: horário

- Definição de um novo tipo para representar horários:

```
data Horario = AM Int Int Int | PM Int Int Int
```

- Os construtores do tipo `Horario` são:

```
AM :: Int -> Int -> Int -> Horario
PM :: Int -> Int -> Int -> Horario
```

e podem ser vistos como uma *etiqueta* (*tag*) que indica de que forma os argumentos a que são aplicados devem ser entendidos.

- Os valores `AM 5 10 30`, `PM 5 10 30` e `(5,10,30)` não contém a mesma informação. Os construtores `AM` e `PM` tem um papel essencial na interpretação que fazemos destes termos.
- Podemos agora definir funções envolvendo horários:

```
totalSegundos :: Horario -> Int
totalSegundos (AM h m s) = (h*60 + m)*60 + s
totalSegundos (PM h m s) = ((h+12)*60 + m)*60 + s
```

## 18.8 Exemplo: booleanos

- O tipo `Bool` da biblioteca padrão é um tipo algébrico:

```
data Bool = True | False
```

- O construtor de tipo é `Bool`.
- Os construtores de dados deste tipo são:

```
True  :: Bool
False :: Bool
```

- Exemplos de uso do tipo:

```
infixr 3 &&
(&&) :: Bool -> Bool -> Bool
True && True = True
_    && _    = False
```

```
infixr 3 ||
(||) :: Bool -> Bool -> Bool
False || False = False
_      || _     = True
```

```
not :: Bool -> Bool
not True  = False
not False = True
```

## 18.9 Exemplo: listas

- Um tipo algébrico pode ser **polimórfico**.
- O tipo `Lista` a é um tipo algébrico polimórfico:

```
data Lista a = Nil | Cons a (Lista a)
```

- Os **constructores de dados** são:

- `Nil :: Lista a`  
um construtor constante representando a lista vazia
- `Cons :: a -> Lista a -> Lista a`  
um construtor para listas não vazias, formadas por uma cabeça e uma cauda.

- **Exemplo:** a lista do tipo `Lista Int` formada pelos elementos 3, 7 e 1 é representada por `Cons 3 (Cons 7 (Cons 1 Nil))`.
- O **construtor de tipo** `Lista` está parametrizado com uma variável de tipo `a`, que poderá ser substituída por um tipo qualquer. É neste sentido que se diz que `Lista` é um construtor de tipo.
- Operações com lista:

```
comprimento :: Lista a -> Int
comprimento Nil = 0
comprimento (Cons _ xs) = 1 + comprimento xs
```

```
elemento :: Eq a => a -> Lista a -> Bool
elemento _ Nil = False
elemento x (Cons y xs) = x == y || elemento x xs
```

- O tipo `Lista a` deste exemplo é similar ao tipo `[a]` da biblioteca padrão do Haskell:

```
data [a] = [] | a : [a]
```

- Observe apenas que Haskell usa:
  - uma notação especial para o construtor de tipo: `[a]`
  - uma notação especial para o construtor de lista vazia: `[]`
  - um identificador simbólico com status de operador infix para o construtor de lista não vazia: `(:)`

## 18.10 Exercícios básicos

### Tarefa 18.1: Perímetro de uma figura

Defina uma função para calcular o perímetro de uma forma geométrica do tipo `Figura`. Qual é o tipo desta função?

### Tarefa 18.2: Item do supermercado

Considere a seguinte definição de tipo para produtos em um supermercado:

```
-- nome, quantidade e preço unitário de um item
type ShopItem = (String, Int, Double)
```

1. Redefina este tipo como um novo tipo, ao invés de um tipo sinônimo.
2. Defina uma função que recebe uma lista de itens como argumento e resulta no valor total a ser pago pelos itens na lista. Escreva a assinatura de tipo da função.

### Tarefa 18.3: Adicionando triângulos às figuras

Adicione um novo construtor de dados ao tipo **Figura** para triângulos, e extenda as funções **eRedondo**, **area** e **perimetro** para incluir triângulos.

**Dicas:**

- Um triângulo pode ser representado pelas medidas dos seus lados.
- A área de um triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

sendo  $p$  o seu semi-perímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

e  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados.

### Tarefa 18.4: Figuras regulares

Defina uma função para verificar se uma figura é regular. São figuras regulares: o círculo, o quadrado, o triângulo equilátero.

### Tarefa 18.5: Endereçamento

Algumas casas tem um número; outras tem um nome.

1. Como você implementaria o tipo para identificar uma casa usando uma *string* ou um *número*, usados como parte de um endereço?
2. Escreva uma função que receba uma identificação de casa (de acordo com o item anterior) e dê a sua representação textual (isto é, a função deve converter para uma *string*).
3. Dê a definição de um tipo para endereçamento contendo o nome e o endereço do destinatário. Use o tipo que você definiu.

## 18.11 Números naturais

### Tarefa 18.6: Um tipo para os números naturais

Vamos implementar um tipo para representar simbolicamente os números naturais.

1. Defina um tipo algébrico **Nat** para representar números naturais. Um número natural pode ser:
  - zero, ou
  - positivo, sendo neste caso o sucessor de outro número natural

O seu tipo deve ter dois construtores de dados: **Zero**, um construtor constante, para representar o valor zero, e **Suc**, um construtor de aridade um, para representar um número positivo.

Observe que o tipo **Nat** deve ser recursivo, já que ele deverá ser usado em sua própria definição. Use derivação automática da classe **Show**.

2. Defina as variáveis **um**, **dois** e **tres** do tipo **Nat** cujos valores são os números naturais 1, 2 e 3, respectivamente.
3. Defina a função **nat2integer :: Nat -> Integer** que converte um número natural em um número inteiro. Faça uma definição recursiva onde o caso base corresponde 0, e o caso recursivo corresponde aos números positivos.
4. Defina a função **integer2nat :: Integer -> Nat** que converte um número inteiro em um número natural.
5. Defina a função **natLt :: Nat -> Nat -> Bool** que recebe dois números naturais e verifica se o primeiro é menor que o segundo.

6. Defina a função `natAdd :: Nat -> Nat -> Nat` que recebe dois números naturais e resulta na soma dos números. A função deve ser recursiva no segundo argumento.
7. Defina a função `natSub :: Nat -> Nat -> Nat` que recebe dois números naturais e resulta na diferença dos números. A função deve ser recursiva no segundo argumento.
8. Defina a função `natMul :: Nat -> Nat -> Nat` que recebe dois números naturais e resulta no produto dos números. A função deve ser recursiva no segundo argumento.
9. Defina as funções `natDiv :: Nat -> Nat -> Nat` e `natMod :: Nat -> Nat -> Nat`, que recebem dois números naturais e resultam no quociente e no resto dos números, respectivamente.

## 18.12 Árvores binárias

### Tarefa 18.7: Um tipo para árvores binárias

Usando tipos algébricos torna-se fácil a representação de estruturas de dados comumente encontradas em computação. Neste exercício vamos explorar a representação de árvores.

1. Defina um construtor de tipo algébrico `BinTree` para representar árvores binárias de busca. Uma árvore binária de busca pode ser
  - vazia
  - não vazia (nó), formada por um valor qualquer (uma informação armazenada no nó da árvore) e duas sub-árvores.

O tipo `BinTree a` será o tipo das árvores binárias de busca que armazenam valores do tipo `a` em seus nós. Observe que este tipo será **polimórfico** e **recursivo**. Observe ainda que o construtor de tipo `BinTree` tem aridade um, ou seja, ele espera um argumento de tipo (correspondente ao tipo dos valores armazenados nos nós da árvore).

Use derivação automática da classe `Show`.

2. Defina uma função `btLength :: BinTree a -> Int` que recebe uma árvore binária de busca e resulta no número de elementos armazenados na árvore (tamanho da árvore).
3. Defina uma função `btDepth :: BinTree a -> Int` que recebe uma árvore binária de busca e resulta na profundidade da árvore.
4. Defina uma função `btElem :: a -> BinTree a -> Bool` que recebe um valor e uma árvore, e verifica se o valor é um elemento da árvore.

## 18.13 O construtor de tipo Maybe

O prelúdio define o tipo `Maybe a` que pode ser usado para indicar um valor opcional. A definição de `Maybe` é

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

O construtor de tipo é `Maybe`, de aridade um, que espera um argumento de tipo representando o tipo do dado encapsulado pelo construtor de dados `Just`.

Os **construtores de dados** deste tipo são:

```
Nothing :: Maybe a
Just    :: a -> Maybe a
```

Os valores do tipo `Maybe a` podem ser de duas formas possíveis:

- `Nothing`, uma constante que indica que o valor opcional não foi informado, e
- `Just x`, onde o valor opcional `x` foi informado.

O tipo `Maybe a` também pode ser usado para indicar sucesso ou falha de alguma operação:

- **Nothing** indica falha, e
- **Just** *x* indica sucesso, resultando no valor *x*.

Exemplo: divisão segura

```
safediv :: Double -> Double -> Maybe Double
safediv _ 0 = Nothing
safediv x y = Just (x / y)

test :: IO ()
test =
  do putStrLn "digite dois números"
     a <- readLn
     b <- readLn
     case safediv a b of
       Nothing -> do putStrLn "divisão por zero"
                     putStrLn "tente novamente"
                     test
       Just z   -> putStrLn ("resposta: " ++ show z)
```

#### Tarefa 18.8: Conversão para string com segurança

A função `readMaybe :: Read a => String -> Maybe a`, definida no módulo `Text.Read`, converte uma string em um valor do tipo *a* (que deve ser instância da classe `Read`). A conversão sucede se e somente se há exatamente um resultado válido.

Faça um programa que leia uma temperatura na escala Celsius e calcula e exibe a temperatura correspondente na escala Fahrenheit. O programa deve verificar se a entrada de dados sucede ou falha. Uma nova entrada deve ser feita enquanto a leitura for inválida.

## 18.14 Exercício: lógica proposicional

Neste exercício vamos implementar um programa para verificar se uma sentença da lógica proposicional (**proposição**) é uma tautologia.

#### Tarefa 18.9: Avaliando proposições

1. Defina um módulo **Prop** onde será definido um tipo para representar proposições (sentenças da lógica proposicional), e algumas operações sobre estas sentenças, como indicado a seguir.
2. Defina um tipo algébrico para representar uma proposição. Uma proposição pode ser:
  - uma constante lógica (verdadeiro ou falso)
  - uma variável
  - a negação de uma proposição
  - a conjunção de duas proposições (e lógico)
  - a disjunção de duas proposições (ou lógico)

Defina o tipo das proposições usando o nome **Prop** para o construtor de tipo, com os seguintes construtores de dados:

```
Cte :: Bool -> Prop      -- constantes
Var :: String -> Prop   -- variáveis
Neg :: Prop -> Prop      -- negação
Con :: Prop -> Prop -> Prop -- conjunção (e)
Dis :: Prop -> Prop -> Prop -- disjunção (ou)
```

3. Os construtores de dados são usados para escrever valores do tipo algébrico que foi definido. Por exemplo, a proposição

$$\neg(\neg p \vee \neg(F \wedge (p \vee \neg q)))$$

pode ser escrita em Haskell como

```
Neg (Dis (Neg (Var "p"))
         (Neg (Con (Cte False))
              (Dis (Var "p")
                   (Neg (Var "q"))))))
```

Como exercício escreva as seguintes proposições como valores do tipo **Prop** definido anteriormente:

$$p_1 = a \vee (b \wedge V)$$

$$p_2 = a \vee \neg a$$

$$p_3 = a \wedge \neg a$$

$$p_4 = \neg(p \wedge \neg p)$$

$$p_5 = p \vee \neg(p \wedge q)$$

$$p_6 = (p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$$

$$p_7 = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

4. Você pode utilizar o módulo **ParseProp** a seguir para converter uma string em uma proposição. Em outro capítulo estudaremos a construção de analisadores sintáticos, que permitem fazer conversões como esta.

A função `parseProp :: String -> Maybe Prop` recebe uma string e a converte para uma proposição, quando possível.

Por exemplo:

```
parseProp "p + ~q"
~~~
Just (Dis (Var "p") (Neg (Var "q"))))

parseProp "p q + ~(p r + ~r)"
~~~
Just (Dis (Con (Var "p") (Var "q"))
         (Neg (Dis (Con (Var "p") (Var "r"))
                  (Neg (Var "r"))))))

parseProp "a ~ + b"
~~~
Nothing
```

```

module ParseProp where

import Text.Parsec
import Prop

type Parser = Parsec String () Prop

parseProp :: String -> Maybe Prop
parseProp str =
  case parse pExp "" str of
    Left _ -> Nothing
    Right e -> Just e

lexeme :: Parsec String () a -> Parsec String () a
lexeme p = do spaces
             x <- p
             spaces
             return x

pExp :: Parser
pExp = pDis

pAtm :: Parser
pAtm = try (lexeme (string "V") >> return (Cte True))
      <|>
      try (lexeme (string "F") >> return (Cte False))
      <|>+
      try (fmap Var (lexeme (many1 letter)))
      <|>
      try (between (lexeme (string "(")) (lexeme (string ")")) pExp)
      <|>
      (lexeme (string "~") >> (fmap Neg pAtm))

pCon :: Parser
pCon = fmap (foldl1 Con) (many1 pAtm)

pDis :: Parser
pDis = fmap (foldl1 Dis) (sepBy1 pCon (lexeme (string "+")))

```

5. Para determinar o valor de uma proposição é necessário conhecer o valor das variáveis que ocorrem na proposição.

Defina um tipo **Memoria** para representar uma *memória*, isto é, um mapeamento de identificadores (nomes das variáveis) a valores lógicos.

*Dica:* Use listas de associações. Uma lista de associação é uma lista de pares onde o primeiro elemento do par funciona como chave.

6. Defina uma função **avalua** que recebe uma memória e uma proposição e calcula o valor da proposição usando a memória. Considere que o valor de uma variável indefinida é *falso*.

*Dica:* Para pesquisar o valor de uma variável na memória utilize a função `lookup` do prelúdio. Esta função permite encontrar o valor associado a uma chave em uma lista de associações.

Por exemplo:

```

avalua [("a",True),("b",False)] (Cte True)           ~> True
avalua [("a",True),("b",False)] (Var "a")             ~> True
avalua [("a",True),("b",False)] (Var "c")             ~> False
avalua [("a",True),("b",False)] (Neg (Var "a"))        ~> False
avalua [("a",True),("b",False)] (Con (Var "a") (Cte True)) ~> True
avalua [("a",True),("b",False)] (Dis (Var "b") (Neg (Var "a"))) ~> False

```



7. Defina uma função `variaveis` que recebe uma proposição e resulta na lista das variáveis que ocorrem na expressão. Cada variável deve ocorrer uma única vez na lista.

Por exemplo:

```
variaveis (Cte True)           ~> []
variaveis (Var "a")           ~> ["a"]
variaveis (Var "c")           ~> ["c"]
variaveis (Neg (Var "a"))      ~> ["a"]
variaveis (Con (Var "a") (Var "b")) ~> ["a", "b"]
variaveis (Dis (Con (Var "p") (Var "q")) (Neg (Var "p"))) ~> ["p", "q"]
```

*Dica:* Defina e use uma função auxiliar `merge` para concatenar duas listas ordenadas, resultando em uma lista também ordenada, sem repetição de elementos. Por exemplo:

```
merge [] [1,5]      ~> [1,5]
merge [1,5] []      ~> [1,5]
merge [1,5] [1,2,3,7] ~> [1,2,3,5,7]
```

8. Defina uma função `booleanos :: Int -> [[Bool]]` de forma que `booleanos n` resulte na lista de todas as permutações de  $n$  valores lógicos.

Por exemplo:

```
booleanos 0
~>
[[]]

booleanos 1
~>
[ [False],
  [True ]
]

booleanos 2
~>
[ [False,False],
  [False,True ],
  [True , False],
  [True , True ]
]

booleanos 3
~>
[ [False, False, False],
  [False, False, True ],
  [False, True , False],
  [False, True , True ],
  [True , False, False],
  [True , False, True ],
  [True , True , False],
  [True , True , True ],
]
```

*Dica:* Observe na estrutura da lista resultante que `booleanos 3` possui duas cópias de `booleanos 2`, a primeira precedida do valor `False` em cada caso, e a segunda precedida pelo valor `True` em cada caso:

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| False | False | False |
| False | False | True  |
| False | True  | False |
| False | True  | True  |
| True  | False | False |
| True  | False | True  |
| True  | True  | False |
| True  | True  | True  |

Esta observação leva a uma definição recursiva de `booleanos`:

- no caso base, `booleanos 0`, o resultado é a lista de todas as listas com zero valores lógicos (ou seja, a lista contendo apenas a lista vazia), e
  - no caso recursivo, `booleanos n`, tomamos duas cópias da lista produzida por `booleanos (n-1)`, colocamos `False` na frente de cada lista da primeira cópia, `True` em frente de cada lista da segunda cópia, e concatenamos os resultados.
9. Defina uma função `substs :: Prop -> [Memoria]` que gera todas as substituições possíveis para as variáveis que ocorrem em uma proposição, obtendo a lista das variáveis, gerando todas as possíveis listas de valores lógicos para esta quantidade de variáveis, e então *zipando* a lista de variáveis com cada uma das substituições.

Por exemplo:

```
substs (Cte True)
  ~>
  [[]]

substs (Var "p")
  ~>
  [ [ ("p", False) ],
    [ ("p", True ) ]
  ]

substs (Con (Var "a") (Var "b"))
  ~>
  [ [ ("a", False), ("b", False) ],
    [ ("a", False), ("b", True ) ],
    [ ("a", True ), ("b", False) ],
    [ ("a", True ), ("b", True ) ]
  ]
```

10. Defina uma função `tautologia :: Prop -> Bool` para verificar se uma proposição é uma tautologia. Basta checar se o valor da proposição é verdadeiro para todas as substituições possíveis das variáveis.

Por exemplo:

```
tautologia (Cte True)           ~> True
tautologia (Var "p")           ~> False
tautologia (Con (Var "a") (Var "b")) ~> False
tautologia (Dis (Var "a") (Neg (Var "a"))) ~> True
```

11. Em um módulo chamado `Main` defina uma ação de E/S `main :: IO ()` que, quando executada, solicita ao usuário para digitar uma proposição, e em seguida informa se a proposição é uma tautologia ou não.

Exemplos de execução do programa:

```
$ ./verifica-tautologia
Verificação de tautologias v1.0
```

```
-----  
Digite uma proposição do cálculo proposicional:  
a + b  
Não é uma tautologia  
  
$ ./verifica-tautologia  
Verificação de tautologias v1.0  
-----  
Digite uma proposição do cálculo proposicional:  
a + ~a  
É uma tautologia  
  
$ ./verifica-tautologia  
Verificação de tautologias v1.0  
-----  
Digite uma proposição do cálculo proposicional:  
a (a + b) (a + ~b)  
Não é uma tautologia
```

## 18.15 Soluções

### Tarefa 18.1 on page 18-7: Solução

---

```
perimetro :: Figura -> Double
perimetro (Circulo r) = 2 * pi * r
perimetro (Retangulo b h) = 2 * (b + h)
```

### Tarefa 18.2 on page 18-7: Solução

---

```
data ShopItem = Item String Int Double

valorCompra :: [ShopItem] -> Double
valorCompra = sum . (map \(Item _ qtde preco) -> qtde * preco)
```

### Tarefa 18.3 on page 18-8: Solução

---

```
data Figura = Circulo Double
            | Retangulo Double Double
            | Triangulo Double Double Double
            deriving (Show)

eRedondo :: Figura -> Bool
eRedondo (Circulo _) = True
eRedondo (Retangulo _ _) = False
eRedondo (Triangulo _ _ _) = False

area :: Figura -> Double
area (Circulo r) = pi * r^2
area (Retangulo b a) = b * a
area (Triangulo a b c) = sqrt (p * (p-a) * (p-b) * (p-c))
    where p = (a + b + c)/2

perimetro :: Figura -> Double
perimetro (Circulo r) = 2 * pi * r
perimetro (Retangulo b h) = 2 * (b + h)
perimetro (Triangulo a b c) = a + b + c
```

### Tarefa 18.4 on page 18-8: Solução

---

```
regular :: Figura -> Bool
regular (Circulo _) = True
regular (Retangulo b h) = b == h
regular (Triangulo a b c) = a == b && b == c
```

### Tarefa 18.5 on page 18-8: Solução

---

```
data Ident = Nome String
           | Numero Int
           deriving (Show)

identToString :: Ident -> String
identToString (Nome n) = n
identToString (Numero n) = show n

data Endereco = Endereco String -- nome
               String           -- rua
               Ident             -- casa
               deriving (Show)
```

```

module Nat where

data Nat
  = Zero
  | Suc Nat
  deriving (Show)

zero, um, dois, tres :: Nat
zero = Zero
um   = Suc zero
dois = Suc um
tres = Suc dois

nat2integer :: Nat -> Integer
nat2integer Zero     = 0
nat2integer (Suc n) = succ (nat2integer n)

integer2nat :: Integer -> Nat
integer2nat 0        = Zero
integer2nat n | n > 0 = Suc (integer2nat (pred n))

natLt :: Nat -> Nat -> Bool
natLt _ Zero      = False
natLt Zero (Suc _) = True
natLt (Suc m) (Suc n) = natLt m n

natAdd :: Nat -> Nat -> Nat
natAdd m Zero     = m
natAdd m (Suc n) = natAdd (Suc m) n

natSub :: Nat -> Nat -> Nat
natSub m Zero     = m
natSub (Suc m) (Suc n) = natSub m n

natMul :: Nat -> Nat -> Nat
natMul _ Zero     = Zero
natMul m (Suc n) = natAdd m (natMul m n)

natDiv :: Nat -> Nat -> Nat
natDiv m n | natLt m n = Zero
           | otherwise = Suc (natDiv (natSub m n) n)

natMod :: Nat -> Nat -> Nat
natMod m n | natLt m n = m
           | otherwise = natMod (natSub m n) n

```

```

module BinTree where

data BinTree a = V
               | N a (BinTree a) (BinTree a)
               deriving (Show)

a1 :: BinTree Integer
a1 = N 12
      (N 5
        (N 2 V V)
        (N 9
          (N 6 V V)
          V))
      (N 20
        V
        (N 30
          (N 25 V V)
          (N 31 V V)))

btLength :: BinTree a -> Int
btLength V = 0
btLength (N _ e d) = 1 + btLength e + btLength d

btDepth :: BinTree a -> Int
btDepth V = 0
btDepth (N _ e d) = 1 + max (btDepth e) (btDepth d)

btElem :: (Eq a) => a -> BinTree a -> Bool
btElem _ V = False
btElem x (N y e d) = x == y || btElem x e || btElem x d

```

#### Tarefa 18.8 on page 18-10: Solução

```

module Main (main) where

import System.IO (stdout, hSetBuffering, BufferMode(NoBuffering))
import Text.Read (readMaybe)

main :: IO ()
main =
  do hSetBuffering stdout NoBuffering
     putStrLn "Conversão de temperaturas"
     putStrLn "======"
     c <- leTemperatura
     let f = 32 + 9/5 * c
     putStrLn ("Temperatura em °F: " ++ show f)

leTemperatura :: IO Double
leTemperatura =
  do putStr "Digite a temperatura em °C: "
     entrada <- getLine
     case readMaybe entrada of
       Just x -> return x
       Nothing -> do putStrLn "Seu !!!!!!"
                     putStrLn "Tente novamente!"
                     leTemperatura

```

# 19 Classes de Tipos

## Resumo

Nesta aula vamos aprender a definir classes de tipos e instâncias de classes de tipos.

## Sumário

|                                                     |              |
|-----------------------------------------------------|--------------|
| <b>19.1 Polimorfismo <i>ad hoc</i> (sobrecarga)</b> | <b>19-1</b>  |
| <b>19.2 Tipos qualificados</b>                      | <b>19-2</b>  |
| <b>19.3 Classes e Instâncias</b>                    | <b>19-2</b>  |
| <b>19.4 Tipo principal</b>                          | <b>19-3</b>  |
| <b>19.5 Definição padrão</b>                        | <b>19-3</b>  |
| <b>19.6 Exemplos de instâncias</b>                  | <b>19-4</b>  |
| <b>19.7 Instâncias com restrições</b>               | <b>19-4</b>  |
| <b>19.8 Derivação de instâncias</b>                 | <b>19-5</b>  |
| 19.8.1 Herança                                      | 19-5         |
| <b>19.9 Algumas classes do prelúdio</b>             | <b>19-5</b>  |
| 19.9.1 A classe Show                                | 19-5         |
| 19.9.2 A classe Eq                                  | 19-6         |
| 19.9.3 A classe Ord                                 | 19-6         |
| 19.9.4 A classe Enum                                | 19-6         |
| 19.9.5 A classe Num                                 | 19-7         |
| <b>19.10 Exercícios</b>                             | <b>19-8</b>  |
| <b>19.11 Soluções</b>                               | <b>19-11</b> |

## 19.1 Polimorfismo *ad hoc* (sobrecarga)

Além do polimorfismo paramétrico, Haskell tem uma outra forma de polimorfismo que é a **sobrecarga de nomes**. Um mesmo identificador de variável (o que inclui função) pode ser usado para designar valores computacionalmente distintos. Esta característica também é chamada **polimorfismo *ad hoc***.

Por exemplo:

- O operador (+) tem sido usado para somar tanto valores inteiros como valores fracionários.
- O operador (==) pode ser usado para comparar inteiros, caracteres, listas de inteiros, strings, booleanos, ...

Afinal, qual é o tipo de (+)? E de (==)? A sugestão

```
(+) :: a -> a -> a
(==) :: a -> a -> Bool
```

não serve, pois são tipos demasiado *genéricos* e fariam com que fossem aceitas expressões como



```
'a' + 'b'
True + False
"está" + "errado"
div == mod
```

e estas expressões resultariam em erro, pois estas operações não estão definidas para trabalhar com valores destes tipos.

Em Haskell esta situação é resolvida através de **tipos qualificados** (*qualified types*), fazendo uso da noção de **classe de tipos**.

## 19.2 Tipos qualificados

Conceitualmente um **tipo qualificado** pode ser visto como um tipo polimórfico, só que, em vez da quantificação universal da forma

para todo tipo  $a$ , ...

vai-se poder dizer

para todo tipo  $a$  que pertence à classe  $C$ , ...

Uma **classe** pode ser vista como um conjunto de tipos. Por exemplo: Sendo **Num** uma classe (a classe dos tipos numéricos) que tem como elementos os tipos:

**Int**, **Integer**, **Float**, **Double**, **Rational**, ...,

pode-se dar a  $(+)$  o tipo

$$\forall a \in \text{Num}. a \rightarrow a \rightarrow a$$

o que em Haskell é escrito como:

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
```

e lê-se

para todo o tipo  $a$  que pertence à classe **Num**,  $(+)$  tem tipo  $a \rightarrow a \rightarrow a$ .

Desta forma uma classe surge como uma forma de classificar tipos quanto às funcionalidades a ele associadas. Neste sentido as classes podem ser vistas como os tipos dos tipos.

Os tipos que pertencem a uma classe são chamados de **instâncias** da classe.

A capacidade de qualificar tipos polimórficos é uma característica inovadora de Haskell.

## 19.3 Classes e Instâncias

Uma **classe** estabelece um conjunto de assinaturas de variáveis (o que inclui funções): os **métodos** da classe. Deve-se definir os métodos de uma classe para cada um dos tipos que são instâncias desta classe.

Como exemplo, considere a seguinte **declaração de classe** simplificada:

```
class Num a where
  (+) :: a -> a -> a
  (*) :: a -> a -> a
```

Todo tipo  $a$  da classe **Num** deve ter as operações  $(+)$  e  $(*)$  definidas. Para declarar **Int** e **Float** como elementos da classe **Num**, tem que se fazer as seguintes **declarações de instância**:

```
instance Num Int where
  (+) = primPlusInt
  (*) = primMulInt
```

```
instance Num Float where
    (+) = primPlusFloat
    (*) = primMulFloat
```

Neste caso as funções `primPlusInt`, `primMulInt`, `primPlusFloat` e `primMulFloat` são funções primitivas da linguagem. Se `x::Int` e `y::Int`, então `x + y`  $\equiv$  `primPlusInt x y`. Se `x::Float` e `y::Float`, então `x + y`  $\equiv$  `primPlusFloat x y`.

## 19.4 Tipo principal

O **tipo principal** de uma expressão ou de uma função é o tipo mais geral que lhe é possível associar, de forma que todas as possíveis instâncias desse tipo constituam ainda tipos válidos para a expressão ou função. Qualquer expressão ou função válida tem um tipo principal único.

Haskell **inere** sempre o tipo principal das expressões e funções, mas é sempre possível associar tipos mais específicos (que são instâncias do tipo principal). Por exemplo, o tipo principal inferido por haskell para o operador `(+)` é

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
```

mas,

```
(+) :: Int -> Int -> Int
(+) :: Float -> Float -> Float
```

também são tipos válidos, dado que tanto `Int` como `Float` são instâncias da classe `Num`, e portanto podem substituir a variável de tipo `a`.

Note que `Num a` não é um tipo, mas antes uma restrição sobre um tipo. Diz-se que `Num a` é o **contexto** para o tip apresentado.

Como outro exemplo, considere:

```
sum [] = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

O tipo principal da função `sum` é

```
sum :: Num a => [a] -> a
```

`sum :: [a] -> a` seria um tipo demasiado geral. **Porquê? Qual será o tipo principal da função `product`?**

## 19.5 Definição padrão

Considere a função pré-definida `elem`:

```
elem _ [] = False
elem x (y:ys) = (x == y) || elem x ys
```

- Qual é o seu tipo?
- É necessário que `(==)` esteja definido para o tipo dos elementos da lista.

A classe pré-definida `Eq` é formada pelos tipos para os quais existem operações de comparação de igualdade e desigualdade:

```
class Eq a where
    (==) :: a -> a -> Bool
    (/=) :: a -> a -> Bool
    -- Minimal complete definition: (==) or (/=)
    x == y = not (x /= y)
    x /= y = not (x == y)
```

Esta classe introduz as funções (==) e (/=), e também fornece definições padrão para estes métodos, chamados **métodos default**.

Caso a definição de uma função seja omitida numa declaração de instância, o sistema assume a definição padrão feita na classe. Se existir uma nova definição do método na declaração de instância, esta definição será usada.

## 19.6 Exemplos de instâncias

- O tipo **Cor** é uma instância da classe **Eq** com (==) definido como segue:

```
data Cor = Azul | Verde | Amarelo | Vermelho

instance Eq Cor where
  Azul    == Azul    = True
  Verde   == Verde   = True
  Amarelo == Amarelo = True
  Vermelho == Vermelho = True
  _       == _       = False
```

O método (/=) utiliza a definição padrão dada na classe **Eq**.

- O tipo **PontoCor** abaixo também pode ser declarado como instância da classe **Eq**:

```
data PontoCor = Pt Double Double Cor

instance Eq PontoCor where
  (Pt x1 y1 c1) == (Pt x2 y2 c2) = (x1 == x2) &&
                                   (y1 == y2) &&
                                   (c1 == c2)
```

- O tipo **Nat** também pode ser declarado como instância da classe **Eq**:

```
data Nat = Zero | Succ Nat

instance Eq Nat where
  Zero    == Zero    = True
  (Succ m) == (Succ n) = m == n
  _       == _       = False
```

## 19.7 Instâncias com restrições

- Considere a seguinte definição de tipo para árvores binárias:

```
data BinTree a = V
               | N a (BinTree a) (BinTree a)
```

- Como podemos fazer o teste de igualdade para árvores binárias?
- Duas árvores são iguais se tiverem a mesma estrutura (a mesma forma) e se os valores que estão nos nós também forem iguais.
- Portanto, para fazer o teste de igualdade para o tipo **BinTree a**, necessariamente tem que se saber como testar a igualdade entre os valores que estão nos nós.
- Só poderemos declarar **BinTree a** como instância da classe **Eq** se **a** também for uma instância de **Eq**.
- Este tipo de **restrição** pode ser colocado na declaração de instância.

```
instance (Eq a) => Eq (BinTree a) where
  V == V = True
  (N x1 l1 r1) == (N x2 l2 r2) = x1 == x2 && l1 == l2 && r1 == r2
  _ == _ = False
```

## 19.8 Derivação de instâncias

- Os testes de igualdade definidos nos exemplos anteriores implementam a **igualdade estrutural**: dois valores são iguais quando resultam da aplicação do mesmo construtor de dados a argumentos também iguais.
- Nestes casos o compilador pode gerar sozinho a definição da função a partir da definição do tipo.
- Para tanto basta acrescentar a instrução `deriving Eq` no final da declaração do tipo:

```
data BinTree a = V
               | N a (BinTree a) (BinTree a)
               deriving (Eq)
```

- Instâncias de algumas outras classes também podem ser derivadas automaticamente.

### 19.8.1 Herança

- O sistema de classes de Haskell também suporta a noção de **herança**, onde uma classe pode herdar todos os métodos de uma outra classe, e ao mesmo tempo ter seus próprios métodos.
- Exemplo**: a classe `Ord`:

```
class (Eq a) => Ord a where
  (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
  min, max           :: a -> a -> a
```

- `Eq` é uma **superclasse** de `Ord`.
- `Ord` é uma **subclasse** de `Eq`.
- `Ord` **herda** todos os métodos de `Eq`.
- Todo tipo que é instância de `Ord` tem que ser necessariamente instância de `Eq`.
- Haskell suporta **herança múltipla**: uma classe pode ter mais do que uma superclasse.

## 19.9 Algumas classes do prelúdio

### 19.9.1 A classe Show

- Define métodos para conversão de um valor para string.
- `Show` pode ser derivada.
- Definição completa mínima: `showsPrec` ou `show`.

```
type ShowS = String -> String
```

```
class Show a where
  show      :: a -> String
  showsPrec :: Int -> a -> ShowS
  showList  :: [a] -> ShowS
```

```
shows :: (Show a) => a -> ShowS
shows = showsPrec 0
```

- Exemplo:

```
data Horario = AM Int Int Int
             | PM Int Int Int

instance Show Horario where
  show (AM h m s) = show h ++ ":" ++ show m ++ ":" ++ show s
                  ++ " am"
  show (PM h m s) = show h ++ ":" ++ show m ++ ":" ++ show s
                  ++ " pm"
```

### 19.9.2 A classe Eq

- Define igualdade (==) e desigualdade (/=).
- Todos os tipos básicos exportados por Prelude são instâncias de **Eq**.
- **Eq** pode ser derivada para qualquer tipo cujos constituintes são instâncias de **Eq**.
- Definição completa mínima: == ou /=.

```
class Eq a where
  (==) :: a -> a -> Bool
  (/=) :: a -> a -> Bool
```

### 19.9.3 A classe Ord

- Tipos com ordenação total.
- **Ord** pode ser derivada para qualquer tipo cujos constituintes são instâncias de **Ord**. A ordenação dos valores é determinada pela ordem dos construtores na declaração do tipo.
- Definição completa mínima: `compare` ou `<=`.
- `compare` pode ser mais eficiente para tipos complexos.

```
data Ordering = LT | EQ | GT
```

```
class (Eq a) => Ord a where
  compare :: a -> a -> Ordering
  (<), (<=), (>), (>=) :: a -> a -> Bool
  max, min :: a -> a -> a
```

### 19.9.4 A classe Enum

- Define operações em tipos sequencialmente ordenados (enumerações).
- **Enum** pode ser derivada para qualquer tipo enumerado (os construtores de dados são todos constantes). Os construtores são numerados da esquerda para a direita começando com 0.
- Definição completa mínima: `toEnum` e `fromEnum`.

```
class Enum a where
  succ      :: a -> a
  pred      :: a -> a
  toEnum    :: Int -> a
  fromEnum  :: a -> Int
  enumFrom  :: a -> [a]
  enumFromThen :: a -> a -> [a]
  enumFromTo   :: a -> a -> [a]
  enumFromThenTo :: a -> a -> a -> [a]
```

- As operações da classe `Enum` permitem construir sequências aritméticas.

```
take 5 (enumFrom 'c')      ⇒ "cdefg"
take 5 (enumFromThen 7 10) ⇒ [7,10,13,16,19]
enumFromTo 'A' 'Z'        ⇒ "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
enumFromThenTo 5 10 38     ⇒ [5,10,15,20,25,30,35]
```

- As sequências aritméticas são abreviações sintáticas para estas operações:

```
take 5 ['c'..]      ⇒ "cdefg"
take 5 [7, 10 ..]    ⇒ [7,10,13,16,19]
['A' .. 'Z']        ⇒ "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
[5,10 .. 38]         ⇒ [5,10,15,20,25,30,35]
```

## 19.9.5 A classe Num

- Define operações numéricas básicas.
- `Num` não pode ser derivada.
- Definição completa mínima: todos, exceto `negate` ou `(-)`.

```
class (Eq a, Show a) => Num a where
  (+), (-), (*)      :: a -> a -> a
  negate            :: a -> a
  abs               :: a -> a
  signum           :: a -> a
  fromInteger       :: Integer -> a
```

- Um literal inteiro representa a aplicação da função `fromInteger` ao valor apropriado do tipo `Integer`. Portanto o tipo destes literais é `(Num a) => a`.
- Exemplo: 35 é na verdade `fromInteger 35`

```
:t 35
35 :: Num a => a
```

```
35 :: Double  ⇒ 35.0
35 :: Rational ⇒ 35 % 1
```

## 19.10 Exercícios

### Tarefa 19.1

Em JavaScript e em algumas outras linguagens com tipagem dinâmica o tipo do teste em uma expressão condicional pode ser de quase qualquer tipo. Por exemplo, em JavaScript, você pode escrever expressões

como

```
if (0) alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

```
if ("") alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

```
if (false) alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

Todos estes exemplos emitem um alerta "NO!".

Já os códigos seguintes emitem um alerta "YEAH!":

```
if ("WHAT") alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

```
if (2+3) alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

```
if (true) alert("YEAH!") else alert("NO!")
```

Embora em Haskell a limitação do tipo do teste em uma expressão condicional ao tipo **Bool** funcione melhor, vamos implementar um comportamento semelhante ao encontrado no JavaScript, *just for fun!*

1. Vamos começar com uma declaração de classe de tipo. Defina uma classe **YesNo** contendo um método chamado **yesno** que permita converter um valor de qualquer tipo que seja instância desta classe para o tipo **Bool**.

Em outras palavras, a classe **YesNo** deve introduzir uma função **yesno** que recebe um valor de um tipo que seja instância da classe, resultando em um valor do tipo **Bool**. O argumento de **yesno** pode ser interpretado como tendo algum conceito de veracidade, e a função **yesno** nos diz claramente se ele é verdadeiro ou falso.

Lembre-se que na definição da classe enumeramos os seus métodos com as respectivas assinaturas de tipo.

2. O próximo passo é definir algumas instâncias. Com certeza o tipo **Bool** pode ser uma instância da classe **YesNo**. Faça a definição de instância da classe **YesNo** para o tipo **Bool**.
3. A lista vazia é considerada como falso, enquanto que listas não vazias são consideradas como verdadeiro. Defina uma instância da classe **YesNo** para o tipo das listas **[a]**.
4. Um valor do tipo **Maybe** a pode ser interpretado como um indicativo de sucesso ou falha de uma computação, tendo um valor agregado do tipo **a** em caso de sucesso. Com certeza o tipo **Maybe a** também pode ser uma instância da classe **YesNo**. Defina esta instância.
5. Para números vamos assumir que (como no JavaScript) qualquer número que não seja zero é verdadeiro e zero é falso. Defina uma instância da classe **YesNo** para o **Int**.
6. Defina um tipo algébrico **Semaforo** para representar os possíveis estados de um semáforo de trânsito: verde, amarelo e vermelho. Use os respectivos construtores de dados **Verde**, **Amarelo** e **Vermelho**.

Um sinal do semáforo também pode ser um valor **yesno**. Se ele for vermelho, o condutor deve parar. Se for verde, o condutor pode seguir. E se for amarelo? Eh! Eu geralmente acelero e passo no amarelo, porque gosto de viver com adrenalina!

Defina uma instância do tipo **Semaforo** para a classe **YesNo**.

7. Agora que temos algumas instâncias da classe **YesNo**, podemos brincar. Determine o valor das seguintes expressões:

(a) **yesno** \$ length []

(b) **yesno** "bom dia"

- (c) `yesno ""`
- (d) `yesno (Just 12.4)`
- (e) `yesno True`
- (f) `yesno []`
- (g) `yesno [("ana",10), ("pedro",12), ("beatriz", 9)]`
- (h) `yesno Vermelho`

Assim você pode confirmar que `yesno` é uma função sobrecarregada, com uma versão específica para cada um dos tipos que são instâncias da classe `YesNo`.

8. Agora vamos fazer uma função chamada `yesnoIf` que imita a expressão `if` do Haskell, mas que aceita expressões de qualquer tipo que seja instância da classe `YesNo` como sendo o teste. Defina a função `yesnoIf`, indicando também o seu tipo.

A função `yesnoIf` recebe um valor `YesNo` e dois outros valores de um determinado tipo. Se o primeiro valor corresponder ao conceito de `yes`, o resultado deve ser o primeiro dos outros dois valores; caso contrário a função resulta no segundo dos outros dois valores.

9. Finalmente teste a sua função `yesnoIf` com as seguintes expressões:

- (a) `yesnoIf [] "YEAH!" "NO!"`
- (b) `yesnoIf [2,3,4] "YEAH!" "NO!"`
- (c) `yesnoIf True "YEAH!" "NO!"`
- (d) `yesnoIf (Just ("carla",34,174)) "YEAH!" "NO!"`
- (e) `yesnoIf Nothing "YEAH!" "NO!"`
- (f) `yesnoIf Verde "YEAH!" "NO!"`

## Tarefa 19.2

Complete as seguintes declarações de instância:

- 1. `instance (Ord a, Ord b) => Ord (a,b) where ...`
- 2. `instance (Ord a) => Ord [a] where ...`

onde pares e listas devem ser ordenadas lexicographicamente, como palavras em um dicionário.



### Tarefa 19.3

Considere a seguinte declaração de tipo para representar números naturais:

```
data Nat = Zero | Succ Nat
```

1. Defina uma instância da classe `Eq` para o tipo `Nat`.
2. Defina uma instância da classe `Ord` para o tipo `Nat`.
3. Defina uma instância da classe `Num` para o tipo `Nat`.
4. Defina uma instância da classe `Enum` para o tipo `Nat`.
5. Defina uma instância da classe `Real` para o tipo `Nat`.
6. Defina uma instância da classe `Integral` para o tipo `Nat`.
7. Defina uma instância da classe `Show` para o tipo `Nat`. A string resultante da aplicação da função `show` deve ser da form `#i`, onde `i` é o número escrito em notação decimal. Por exemplo:

```
show Zero           ~> #0
show (Succ Zero)    ~> #1
show (Succ (Succ Zero)) ~> #2
show (Succ (Succ (Succ Zero))) ~> #3
```

8. Defina uma instância da classe `Read` para o tipo `Nat`. O argumento da função `read` deverá ser uma string da form `#i`, onde `i` é o número escrito em notação decimal. Por exemplo:

```
read "#0" ~> #0 -- Zero
read "#1" ~> #1 -- Succ Zero
read "#2" ~> #2 -- Succ (Succ Zero)
read "#3" ~> #3 -- Succ (Succ (Succ Zero))
```

### Tarefa 19.4

Considere o tipo

```
data BinTree a = V | N a (BinTree a) (BinTree a)
```

para representar árvores binárias de busca.

1. Defina uma função que verifica se uma árvore binária é vazia ou não.
2. Defina uma função que recebe um valor e uma árvore binária e insere o valor na árvore binária mantendo-a a ordenada, resultando na nova árvore assim obtida.
3. Defina uma função que recebe um valor e uma árvore binária e verifica se o valor é um elemento da árvore.
4. Modifique a definição do tipo para que sejam criadas automaticamente instâncias desse tipo para as classes `Read` e `Show`.
5. Declare uma instância de `BinTree a` para a classe `Eq`.
6. Declare uma instância de `BinTree a` para a classe `Ord`.
7. Declare uma instância de `BinTree a` para a classe `Functor`. A classe functor tem apenas um método chamado `fmap` que permite mapear uma função aos elementos de uma estrutura de dados, resultando em uma estrutura de dados similar contendo os resultados obtidos pela aplicação da função.

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```



