Chap7.参数估计

对总体中的未知参数给出估计

1. 点估计，利用统计量和样本给出一个近似值
2. 区间估计，给出真实值可能落入的范围，并告诉可信程度有多高

53.点估计与矩估计

点估计问题：

设总体 X 的分布函数（概率密度，分布律）的形式已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数的值的问题，称为参数的点估计问题。

> 具体来说，比如已经知道一组数据已知服从泊松分布，但是具体的参数 λ 未知。

点估计问题的提法：

- **已知**：总体 X 的分布函数的 $F(x;\theta)$ 的形式，
- **未知**：θ 待估参数。$\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$
- **利用**：$X_1,X_2,...,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,...,x_n$ 是相应一个样本值。

点估计的解决办法：

构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,...,x_n)$ 作为未知参数 θ 的近似值。

- 称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,...,X_n)$ 为 θ 的估计量。
- 称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,...,x_n)$ 为 θ 的估计值。

注：

1. 称估计量和估计值为估计。
2. 由于估计量是样本的函数，对不同样本值，估计值一般不同。

矩估计

理论依据是：样本的 k 阶矩依概率收敛于总体的 k 阶矩

总体 X 的 k 阶原点矩 $E[X^k]$

样本 $x_1,x_2,...,x_n$ 的 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$

借助样本的 k 阶原点矩近似估计总体 X 的 k 阶原点矩

矩估计求解步骤

设总体 X 的分布中含有 m 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$，则：

1. 求总体的各阶矩 $E(X^k) \quad (k = 1, 2, ..., m)$；
2. 令样本的各阶矩等于总体的各阶矩，得到含有 m 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ 的方程；

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X) \tag{1}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E(X^2) \tag{2}$$

$$\vdots \tag{3}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^m = E(X^m) \tag{4}$$

3. 解上述方程，所求得的解 $\hat{\theta}_k(X_1, X_2, ..., X_n)$ 称为未知参数 θ_k 的估计量，简称估计。

> 实际上，几个参数就写到几阶矩，例如正态分布两个参数，就写到两阶矩

常用的一个公式：

$$E(X^2) = D(X) + E^2(X) \tag{5}$$

设总体 X 的均值 μ 及方差 σ^2 都存在，且 $\sigma^2 > 0$。但 μ，σ^2 均为未知。又设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是来自 X 的样本，试求 μ，σ^2 的估计量。

$$\begin{gathered} E(x) = \mu \\ E(x) = D(x) + E^2(x) = \sigma^2 + \mu^2 \\ A_1 = \overline{X} = \mu \\ A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{gathered} \tag{6}$$

则有

$$\mu = \overline{X} \tag{7}$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{9}$$

也就是说，不管 X 的分布是什么，总体的均值与方差的估计量是相同的。

54.最大似然估计

离散型

设总体 X 为离散型，分布律已知，但分布中含有 m 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$，$X_1,X_2,...,X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1,x_2,...,x_n$ 是相应的样本值。

易知 $X_1,X_2,...,X_n$ 取到观察值 $x_1,x_2,...,x_n$ 的概率，即事件 $P\{X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n\}$ 发生的概率为

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\} \tag{10}$$

这一步骤的概率随 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ 的取值而变化，它是 m 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ 的函数，称其为样本的似然函数，需注意的是 $x_1,x_2,...,x_n$ 是已知的样本值。

最大似然估计法的思想：

已知样本值 $x_1,x_2,...,x_n$ 了，这时说取到这一样本值的概率函数

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m) \tag{11}$$

比较大。因此，可以固定样本观察值 $x_1,x_2,...,x_n$，挑选使得似然函数

$$L(x_1,x_2,...,x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_m) \tag{12}$$

达到最大值的参数值 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,...,x_n) \quad (i=1,2,...,m)$。

用这思想求出的参数值

$$\hat{\theta}_i(x_1,x_2,...,x_n) \quad (i=1,2,...,m) \tag{13}$$

称为 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ 的最大似然估计量。

相应的统计量 $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,...,X_n), \quad i=1,2,...,m$ 称为参数的最大似然估计量。

连续型

若总体 X 是连续型，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 来自总体 X 的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是相应的一个样本值，则 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的联合概率密度函数为

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \tag{14}$$

随机点 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 落在点 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的邻域（边长分别为 $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ 的 n 为立方体）内的概率近似为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) dx_i \tag{15}$$

其值随 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的取值而变化，最大似然估计的思想是取 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的估计值使得上述概率取得最大值。注意到 $\prod_{i=1}^{n} dx_i$ 不随 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 而变，因此只需考虑函数

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \tag{16}$$

的最大值。称为样本的似然函数。

使似然函数取得最大值的参数值

$$\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{17}$$

称为 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的最大似然估计值。

相应的统计量 $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m$ 称为参数的最大似然估计量。

求解步骤

(1) 写出似然函数

若 X 为离散型，似然函数为

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} \tag{18}$$

若 X 为连续型，似然函数为

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \tag{19}$$

(2) 对似然函数两边取对数，得到对数似然函数

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \sum_{i=1}^{n} \ln P\{X = x_i\} \tag{20}$$

或

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \tag{21}$$

(3) 对数似然函数关于各未知参数求偏导，得到对数似然方程

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_1} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_2} = 0 \tag{23}$$

$$\vdots \tag{24}$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_m} = 0 \tag{25}$$

(4) 求解对数似然方程，若有解

$$\theta_1 = \theta_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{26}$$

$$\theta_2 = \theta_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{27}$$

$$\vdots \tag{28}$$

$$\theta_m = \theta_m(X_1, X_2, \ldots, X_n) \tag{29}$$

则是 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ 的最大似然估计量。

(5) 当对数似然方程无解时，利用高等数学中的单调性直接观察似然函数

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m) \tag{30}$$

达到最大值时的 $\theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 即可。

exp1：

1. 设 $X \sim b(1, p)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 来自 X 的一个样本，试求参数 p 的最大似然估计量。

解：

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为独立的样本，且每个样本服从 $X \sim b(1, p)$ 的二项分布。则

$$P\{X_i = x_i\} = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \quad x_i = 0, 1 \tag{31}$$

于是样本的联合分布为

$$L(p) = P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} \tag{32}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} \tag{33}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \tag{34}$$

$$= p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} \tag{35}$$

对似然函数取对数

$$\ln L(p) = \ln\left[p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}\right] \tag{36}$$

$$= \sum x_i \ln p + (n - \sum x_i) \ln(1-p) \tag{37}$$

求导数，得对数似然方程

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n - \sum x_i}{1-p} \tag{38}$$

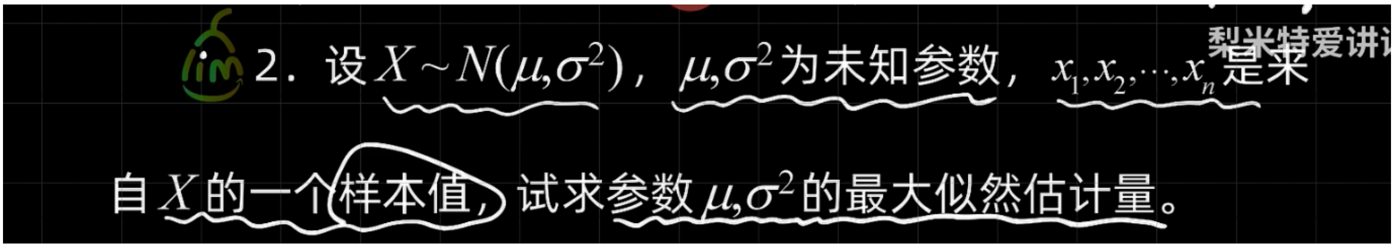
令其为零，得到

$$\frac{\sum x_i}{p} = \frac{n - \sum x_i}{1-p} \tag{39}$$

解方程，得到 p 的最大似然估计值

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n} = \overline{X} \tag{40}$$

exp2：



设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则其概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{41}$$

样本的似然函数为

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \tag{42}$$

对似然函数取对数：

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \tag{43}$$

对 μ 和 σ^2 求偏导，得到对数似然方程：

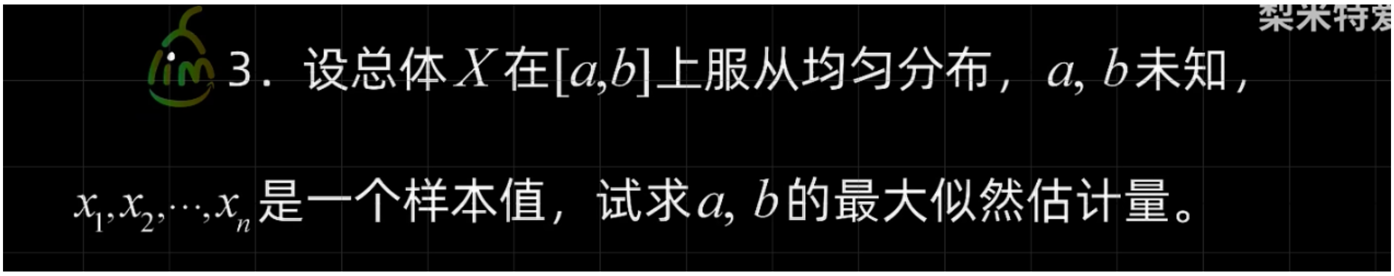
$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \tag{44}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0 \tag{45}$$

样本的均值和方差的最大似然估计量：

$$\hat{\mu} = \overline{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \tag{46}$$

exp3：



解：样本：$X_1, X_2, ..., X_n$，X_i 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{47}$$

似然函数：

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n, \quad a \le x_i \le b \tag{48}$$

$$\ln L(a,b) = n \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) = -n\ln(b-a) \tag{49}$$

求导数：

$$\frac{\partial \ln L(a,b)}{\partial a} = -\frac{n}{b-a} \tag{50}$$

$$\frac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b} = -\frac{n}{b-a} \tag{51}$$

求解上面方程：无解

问题：最大似然估计的思想：

设 a, b 满足 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b$ 时

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n} \tag{52}$$

得到最大值的参数值：

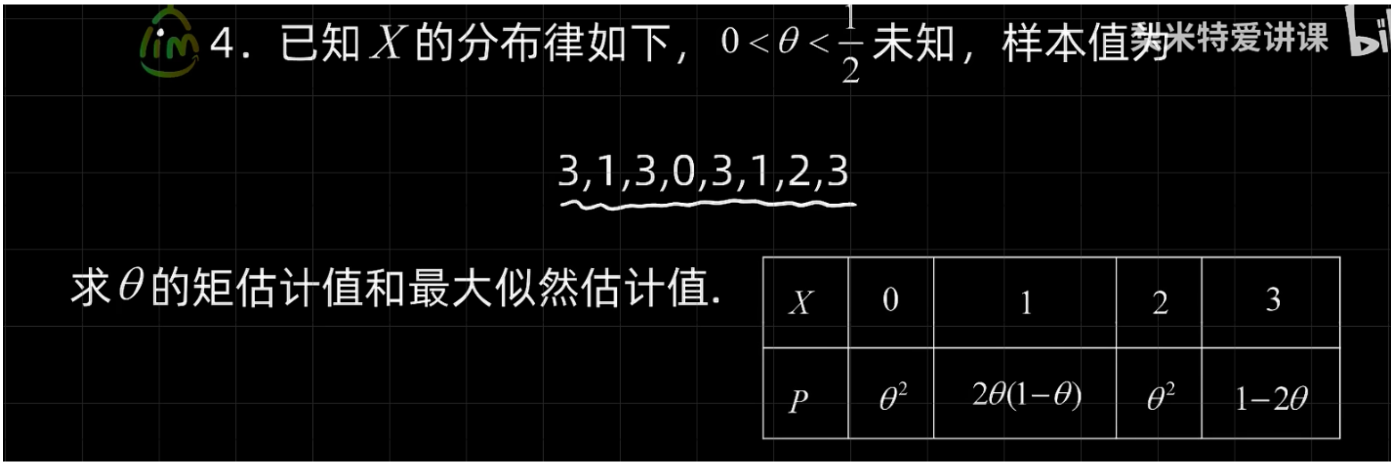
- 分析：$b-a$ 越小，$L(a,b)$ 值越大；
- 当 b 越小，a 越大时，$b-a$ 越小。

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b$ 时，设 $\hat{a} = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$；设 $\hat{b} = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$。

$$\hat{a} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\} \tag{53}$$

$$\hat{b} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \tag{54}$$

exp4:



$E(X) = 3 - 4\theta$

$\overline{X} = E(X) = 3 - 4\theta = 2$ ，$\hat{\theta} = \frac{3}{4}$ 是求得的 θ 的最大似然估计量。

$$L(\theta) = P\{X_1 = 3, X_2 = 1, \ldots\ldots X_8 = 3\} = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4 \tag{55}$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(2-\theta) \tag{56}$$

55.估计量的评选标准

矩估计和最大似然估计，对同一组样本的估计值可能不同?

怎么评估估计量的好坏呢?

估计量是随机变量，对于不同的样本值，有不同的估计值，希望这些估计只最好在待估参数真值的附近，判断这种性质的有效方法是：无偏性。

无偏性

定义： 设 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是总体参数 θ 的估计量。如果估计量 $\hat{\theta}$ 的期望值 $E(\hat{\theta}) = \theta$，则我们称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。

样本方差：

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \tag{57}$$

因为 $\frac{1}{n}$ 不是总体 σ^2 的无偏估计。

样本的 k 阶矩 A_k 是总体 k 阶矩 μ_k 的无偏估计

有效性

设 $\hat{\theta_1}$ 和 $\hat{\theta_2}$ 均为 θ 的无偏估计。如果有：$D(\hat{\theta_1}) \leq D(\hat{\theta_2})$，则称 $\hat{\theta_1}$ 比 $\hat{\theta_2}$ 更有效。

相合性

设 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是总体参数 θ 的估计量。如果对任意的 $\epsilon > 0$，有：

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon\right) = 1 \tag{58}$$

即随着样本量 n 趋近于无穷大，估计量 $\hat{\theta}$ 收敛于真实参数 θ，则称 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是 θ 的相合估计量，或者又叫做一致估计量。

样本的 k 阶矩 依概率收敛与总体的 k 阶矩，所以样本的 k 阶矩是总体 k 阶矩的相合估计量。

样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 $E[X]$ 的相合估计量

样本方差 s^2 是总体方差 $D(X)$ 的相合估计量

56.区间估计

点估计，给出未知参数的估计值，不能反应估计精确程度

区间估计：估计出一个范围，并给出此范围包含参数 θ 真值的可信程度

例如天气：明天有80%的可能在27度-30度之间

一般用区间长度来刻画精确度，可信度不变的条件下，区间越短，精确度越高

定义：

设总体 Λ 的分布函数为 $F(x;\theta;\ell)$，其中 θ 是未知的参数，$\theta \in \Theta$（Θ 是 θ 可能取值的范围）。

对于给定的置信度 α（$0 < \alpha < 1$），由样本数据 $X_1, X_2, ..., X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \theta(X_1, X_2, ..., X_n)$，对于任意的 $\theta \in \Theta$，如果满足：

$$P\left(\hat{\theta} < \theta < \bar{\theta}\right) \geq 1 - \alpha \tag{59}$$

则称随机区间 $(\hat{\theta},\bar{\theta})$ 是参数 θ 的**置信区间**，且置信水平为 $1-\alpha$。

置信区间的上下限和置信水平：

•$\hat{\theta}$：表示置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限。

•$\bar{\theta}$：表示置信水平为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信上限。

•$1-\alpha$：置信水平，通常取值为 95% 或 99%。置信水平 $1-\alpha$ 反映了我们对于参数 θ 落在置信区间内的信心。

1. **置信区间的定义**：
   - 置信区间 $(\hat{\theta},\bar{\theta})$ 是一个随机区间，θ 是待估计的总体参数，$\hat{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 是根据样本数据计算的估计量（例如，样本均值）。置信区间反映了我们对总体参数的估计范围。
2. **置信度 α 和置信水平**：
   - α: 置信水平的补充值，通常设定为 $\alpha=0.05$，对应 95% 的置信水平。
   - $1-\alpha$: 表示置信区间的置信水平。例如，$\alpha=0.05$ 对应的置信水平是 95%。
3. **概率表达式**：
   - $P\left(\hat{\theta}<\theta<\bar{\theta}\right)\geq 1-\alpha$ 说明在多个独立抽样的情况下，置信区间 $(\hat{\theta},\bar{\theta})$ 包含真实总体参数 θ 的概率至少为 $1-\alpha$。例如，95% 的置信区间意味着有 95% 的概率该区间包含真实参数。
4. **计算置信区间的方法**：
   - 对于**连续型数据**，可以根据样本数据计算出估计量 $\hat{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$，并得到置信区间。
   - 对于**离散型数据**，可以通过样本数据的频率分布来构造置信区间，利用分布的特性进行推断。
5. **反复抽样和置信区间**：
   - 在反复抽样（例如，100次独立抽样）后，每个样本的估计值会落在某个区间内，称为**置信区间**。例如，若 $\alpha=0.01$，即置信水平为 99%，那么100次抽样中有99次所构造的置信区间会包含真实值，只有1次不包含。
6. **实际例子**：
   - **若** $\alpha=0.01$，意味着每次抽样产生的置信区间有 99% 的概率包含真实参数值，而1% 的置信区间不包含真实值。
   - **若** $\alpha=0.05$，则置信区间有 95% 的概率包含真实参数值，5% 的概率不包含。

exp1：

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，方差 $\sigma^2>0$ 已知，设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自 X 的一个样本，要求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

解：

未知参数 $\mu=E[X]$

寻找一个统计量，与 μ 相关，分布确定，用以确定 $(\underline{\mu},\bar{\mu})$ 使得 $P\{\underline{\mu}<\mu<\bar{\mu}\}$

由点估计可知，$\bar{X}$ 是 $E[X]=\mu$ 的无偏估计，且是相合估计。

由 $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，可推得：

$$\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{60}$$

因此，概率公式为：

$$P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \tag{61}$$

此处，$z_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的临界值。

$$P\left\{X-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2} < \mu < X+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \tag{62}$$

即 μ 的置信区间可以表示为：

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right) \tag{63}$$

例如：

设 $\alpha=0.05$，即置信水平为 95%，$z_{\alpha/2}=1.96$，样本均值为 $\overline{X}$，设已知总体标准差 σ，样本容量 $n=16$。

则置信区间为：

$$\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{4}, \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{4}\right) \tag{64}$$

这个区间的置信水平为 95%，表示95%的置信区间包含真实的总体均值 μ。

寻找一个样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 和 θ 的函数
设 $W=W(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta)$，$W$ 的分布不依赖于 θ 以及其他未知参数，称为具有这种性质的函数 W 为枢轴量。例如：

$$\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{65}$$

给定置信水平 $1-\alpha$，确定两个常数 a 和 b，使得$P\left\{a < W(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta) < b\right\} = 1-\alpha$ ，若能从 $a < W(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta) < b$ 中解得与之等价的 $\theta_1 < \theta < \theta_2$， 其中 $\theta = \theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 和 $\theta_2 = \theta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 都是统计量，那么 (θ_1, θ_2) 就是 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

枢轴量 $W(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta)$ 推导方法： 通过从 θ 的估计值着手推导。

示例：单正态总体 $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$

1. $X \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
2. $\frac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

3. $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
4. $\frac{X-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

57.正态总体均值与方差的区间估计