Chap3.多维随机变量及其分布

25.二维随机变量的定义

二维随机变量的定义：

设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$。

设 $X=X(e),Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的向量 (X,Y) 称为二维随机变量。

若 $X_1,X_2,...,X_n$ 是定义在同一个样本空间 S 上的 n 个随机变量，则称 $(X_1,X_2,...,X_n)$ 是 n 维随机变量，X_i 称为第 i 个分量。

研究思路：

二维随机变量 (X,Y) 的性质不仅与 X 及 Y 有关，而且还依赖于它们二者的相互关系。

放在一起当做整体来研究 (X,Y) 就是联合分布，包括联合分布律、联合概率密度函数、联合分布函数等

当做个体来研究，就是边缘分布，条件分布，考虑独立性

二维随机变量的(联合)分布函数

定义：设 (X,Y) 是二维随机变量，对任意实数 x,y，称二维函数

$$F(x,y)=P\left((X\le x)\cap(Y\le y)\right)=P\{X\le x,Y\le y\} \tag{1}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的（联合）分布函数。其中，$(x,y)R^2$

注：$F(x,y)$ 是事件 $A=\{X\le x\}$ 和 $B=\{Y\le y\}$ 同时发生的概率。

概率意义：

如果将 (X,Y) 看成平面上的随机点的坐标，则分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在以点 (x,y) 为顶点而位于该点下方的无穷矩形区域的概率。

$$P\{X\le x Y\le y\} \tag{2}$$

也就是 $X\le x$， $Y\le y$ 落在平面上的点。

分布函数的性质

定一议一，

1. 固定 y，当 $x_1\le x_2$ 时，单调不减的函数
2. 有界性，极限的相关性质 $F(x,y)\le 1$

固定 y 时：

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0 \tag{3}$$

固定 x 时：

$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{x \to -\infty, y \to -\infty} F(x, y) = 0 \tag{5}$$

当 $x \to +\infty$ 和 $y \to +\infty$ 时：

$$\lim_{x \to +\infty, y \to +\infty} F(x, y) = 1 \tag{6}$$

结论：

$$\lim_{x \to +\infty} F(x, y) \quad \text{不确定} \tag{7}$$

$$\lim_{y \to +\infty} F(x, y) \quad \text{不确定} \tag{8}$$

3. 关于 x, y 右连续
4. 不等式性质

对于任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，

$$\Delta = P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \tag{9}$$

$$= P\{X \leq x_2, Y \leq y_2\} - P\{X \leq x_2, Y \leq y_1\} \tag{10}$$

$$-P\{X \leq x_1, Y \leq y_2\} + P\{X \leq x_1, Y \leq y_1\} \tag{11}$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \tag{12}$$

且 > 0。

26.二维离散型随机变量

定义：

若二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$，则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

联合分布律：

称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$ 为二维离散型随机变量 (X, Y) 的（联合）分布律。

其表格形式为：

$$\begin{array}{c|ccccc}
Y & x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\
\hline
y_1 & p_{11} & p_{21} & \ldots & p_{i1} & \ldots \\
y_2 & p_{12} & p_{22} & \ldots & p_{i2} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
y_j & p_{1j} & p_{2j} & \ldots & p_{ij} & \ldots
\end{array} \tag{13}$$

性质：

1.

$$P_{ij} \geq 0 \tag{14}$$

2.

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=1 \tag{15}$$

设 (X,Y) 的联合分布为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots,$ 则 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}P\{X=x_i,Y=y_j\} \tag{16}$$

$$=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij} \tag{17}$$

其中和式是对一切满足的 $x_i\le x,y_j\le y$ 的 i,j 求和。

注：

1. $F(x,y)$ 是点 (x,y) 的左下角四分之一平面上 X 和 Y 所有可能取值的概率的和。
2. (X,Y) 落入平面区域 G 的概率等于 (X,Y) 在 G 内所有可能值的概率和。这是计算概率、求随机变量函数分布的一个重要公式。

27.二维连续型随机变量

定义：对二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$

如果存在非负函数 $f(x,y)$，使得对任意 x,y

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,du\,dv,\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty \tag{18}$$

则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量，称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的联合概率密度，记为 $(X,Y)\sim f(x,y)$。

$f(x,y)$ 的性质

1. 非负
2. 整个坐标平面做二重积分=1

联合分布函数、联合概率密度函数的性质

设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，概率密度为 $f(x,y)$，则：

1. $F(x,y)$ 是 (x,y) 的二维连续函数；

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,du\,dv \tag{19}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)}F(x,y)=F(1,2). \tag{20}$$

2. 在 $f(x,y)$ 的连续点处，有

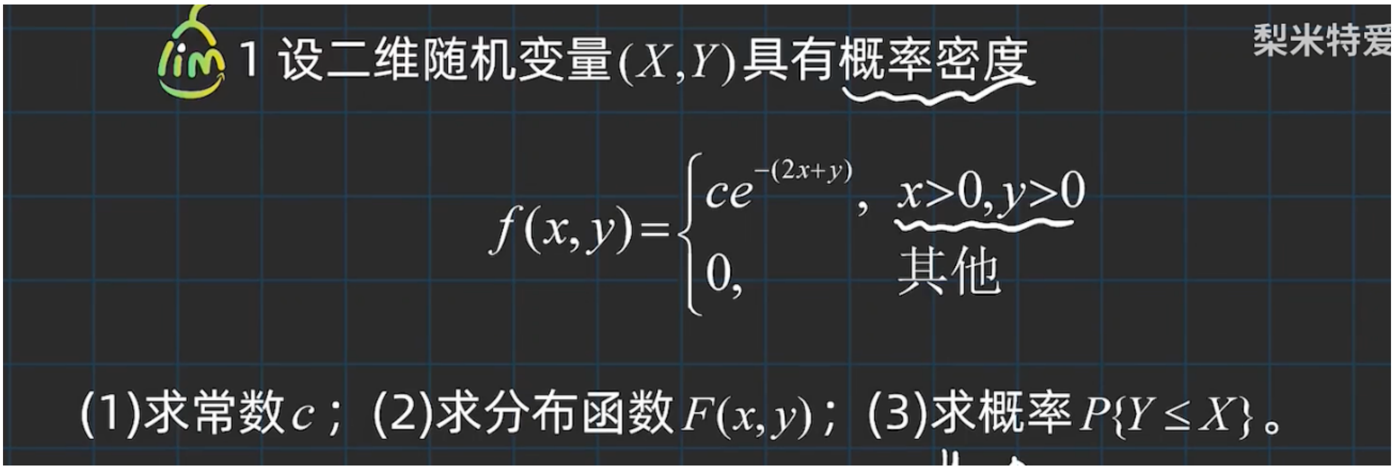
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,du\,dv \tag{21}$$

则 $F(x,y)$ 具有二阶偏导数，并且

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y). \tag{22}$$

3. 若 $F(x,y)$ 可导，则 (X,Y) 是二维连续型随机变量，且 $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ 是它的一个概率密度。
4. 设 G 是平面上的某个区域，则

$$P\{(X,Y) \in G\} = \int\int_G f(x,y)\,dx\,dy. \tag{23}$$



1.

$$f(x,y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0 \tag{24}$$

$$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} c \cdot e^{-(2x+y)}\,dx\,dy \tag{25}$$

$$= c\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx \tag{26}$$

$$= c \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy\right] \cdot \left[\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx\right] \tag{27}$$

$$= c \cdot \left[\lim_{y\to\infty}(-e^{-y}) + 1\right] \cdot \left[\lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-2x}) + \frac{1}{2}\right] \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2}c \quad \Rightarrow \quad c = 2. \tag{29}$$

2. 对于非零值：

$$F(x,y) = \int_0^y\int_0^x f(u,v)\,du\,dv \tag{30}$$

$$= \int_0^y\int_0^x e^{-(2u+v)}\,du\,dv \tag{31}$$

$$= 2\int_0^y e^{-v}\int_0^x e^{-2u}\,du\,dv \tag{32}$$

$$= (1-e^{-y}) \cdot (1-e^{-2x}) \tag{33}$$

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-y})(1-e^{-2x}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{34}$$

3. $D: 0 < x < +\infty, 0 < y < x$

$$P\{Y \le X\} = \int_0^{\infty} \int_0^{x} f(x,y)\,dx\,dy \tag{35}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx \int_0^{x} e^{-y}\,dy \tag{36}$$

$$= \frac{1}{3} \tag{37}$$

28.边缘分布

已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，而 X,Y 都是二维随机变量，各自也有分布函数，将其分别记为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$，分布称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数。

(X,Y) **的边缘概率密度**

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \tag{38}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \tag{39}$$

29.条件分布

二维离散随机变量 (X,Y) 的条件分布律

定义：已知二维离散型随机变量 (X,Y) 的（联合）分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\} = p_{ij}, \quad i,j=1,2,\dots \tag{40}$$

(X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为：

$$P\{X=x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i=1,2,\dots \tag{41}$$

$$P\{Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j=1,2,\dots \tag{42}$$

对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布。

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_j}, \quad i=1,2,\dots \tag{43}$$

对于固定的 i，若 $P\{X=x_i\}>0$，则称为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布。

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_i}, \quad j=1,2,\dots \tag{44}$$

二维连续随机变量 (X,Y) 的条件分布

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$。

在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \tag{45}$$

在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx \tag{46}$$

在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \tag{47}$$

在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件分布函数为：

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy \tag{48}$$

联合分布 = 边缘分布 × 条件分布

30.相互独立的随机变量

二维离散型随机变量 (X,Y) 的相互独立性

1. 称 X 和 Y 相互独立：如果对于 (X,Y) 所有可能取的值 (x_i,y_j) 有：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \tag{49}$$

注：

1. 联合分布 = 边缘分布乘以条件分布，$i=1,2,\ldots,n$，$j=1,2,\ldots,m$
2. $n\times m$ 个事件同时发生。

2. X 和 Y 相互独立等价于：对于所有的 x,y,

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\} \tag{50}$$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \tag{51}$$

二维连续型随机变量 (X,Y) 的相互独立性

1. 称 X 和 Y 相互独立：如果对于所有的 x,y,

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\quad \forall x,y \tag{52}$$

注：

1. 上式对于所有的 x,y 都成立。
2. 且有 $f(x,y)$，即 $f_X(x),f_Y(y)$ 存在。

2. X 和 Y 相互独立等价于：对于所有的 x,y,

$$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\} \tag{53}$$

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y) \tag{54}$$

31.二维正态分布与二维均匀分布

二维正态分布

定义：设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \quad (55)$$

其中，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 的服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布，记为：

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho) \quad (56)$$

当 $\rho=0$，表明 X,Y 相互独立

二维均匀分布

设 G 是平面上的有界区域，其面积为 A。若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \quad (57)$$

则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布。

例：(X,Y) 在 $G:x^2+y^2\le 1$ 上服从的分布：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \quad (58)$$

$x^2+y^2=1$ 表示单位圆。

32.两个随机变量的函数的分布(离散型)

太简单了，没什么好说的

33.两个随机变量和的分布(连续型)

和的分布：

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X+Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx \quad (59)$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy \quad (60)$$

注：若 X,Y 独立，则：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad (61)$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy \quad (62)$$

证明：

设 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}=P\{(X,Y)\in G\} \tag{63}$$

其中，$G:X+Y\leq z$

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx\right]dy \tag{64}$$

转换得到：

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)du\right]dy \tag{65}$$

因此，$Z=X+Y$ 的分布函数为：

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u-y,y)dy\right]du \tag{66}$$

从而得到 $Z=X+Y$ 的概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy \tag{67}$$

同样，$f_Z(z)$ 也可以写为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx \tag{68}$$

注：

1. 若 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。
2. 若 n 个独立随机变量的和服从正态分布：

   线性组合也服从正态分布。

若 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\dots,n$，则：

$$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim N(M_1+M_2+\cdots+M_n,\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2) \tag{69}$$

令：

$$S_4\triangleq a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n\sim N(\dots,\dots) \tag{70}$$

34.两个随机变量商和积的分布(连续型)

商的分布：

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，它具有概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=\frac{Y}{X}$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)dx \tag{71}$$

若 X,Y 独立，则：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx \tag{72}$$

积的分布：

设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=X\cdot Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx \tag{73}$$

若 X,Y 独立，则：

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx \tag{74}$$

35.两个随机变量的最大值、最小值的分布(连续型)

最大值分布：

设 X,Y 的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数及概率密度函数。

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\max\{X,Y\}\leq z\} \tag{75}$$

$$=P\{X\leq z,Y\leq z\} \tag{76}$$

若 X,Y 独立，则：

$$P\{X\leq z,Y\leq z\}=F_X(z)\cdot F_Y(z) \tag{77}$$

因此，Z 的分布函数为：

$$F_Z(z)=[F(z)]^2 \tag{78}$$

扩展：

设 $Z=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$

$$F_Z(z)=P\{\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}\leq z\} \tag{79}$$

$$=P\{X_1\leq z,X_2\leq z,\ldots,X_n\leq z\} \tag{80}$$

若 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立，则：

$$P\{X_1\leq z\}\cdot P\{X_2\leq z\}\ldots P\{X_n\leq z\} \tag{81}$$

因此，Z 的分布函数为：

$$F_Z(z)=[F(z)]^n \tag{82}$$

求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的 $f_Z(z)$：

若 X,Y 相互独立，则 $F_Z(z)=[F(z)]^2$，此时：

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'_z=\left[F(z)^2\right]'_z \tag{83}$$

$$=2F(z)\cdot F'(z) \tag{84}$$

$$=2F(z)\cdot f(z) \tag{85}$$

最小值分布：

设 X,Y 的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数及概率密度函数。

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{\min\{X,Y\}\leq z\} \tag{86}$$

$$=1-P\{\min\{X,Y\}>z\} \tag{87}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\} \tag{88}$$

若 X, Y 独立，则：

$$= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\} \tag{89}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \tag{90}$$

因此，Z 的分布函数为：在 X, Y 独立且同分布的情况下

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^2 \quad (F(z) : X(Y)\text{的分布函数}) \tag{91}$$

扩展：

设 $Z = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 独立同分布，则：

$$F_Z(z) = 1 - [1 - F(z)]^n \tag{92}$$

$$f_Z(z) = [F_Z(z)]'_z = [1 - [1 - F(z)]^n]'_z \tag{93}$$

$$= -n[1 - F(z)]^{n-1} \cdot [-f(z)] \tag{94}$$

$$= nf(z) \cdot [1 - F(z)]^{n-1} \tag{95}$$