概率论与数理统计

样本空间：

随机试验所有可能结果组成的几何，称为样本空间，记作 S，或者 Ω

样本点：

随机试验每一个可能的结果称为样本点，记为 e

样本空间 S，是由全部样本点构成的集合。$S = e$

即使样本相同，试验的目的不同的样本空间也不一样。

- 抛硬币，观察正反出现的情况，$S = H, T$
- 抛硬币三次，观察正反面出现的情况，$S = HHH, HHT.....$
- 将硬币抛三次，观察出现正面 H 的次数，$S = 0, 1, 2, 3$

求随机试验的样本空间，方法1：列举法(有限个) 方法2：描述法(无穷多个)

随机事件

样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，用 A, B 表示

事件发生

在每次实验中，当且仅当随机事件中的一个样本点出现，称为这个事件发生

基本事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件

必然事件

样本空间 S 包含了所有的样本点，在每次实验中它总发生，故称为必然事件。

不可能事件

空集不包含任何的样本点，在每次实验中都不发生，称为不可能事件

随机事件

5.事件关系运算

关系	集合论表示	概率论含义
包含关系	$A \subset B$	事件A发生必导致事件B发生
相等关系	$A = B$	事件A发生必导致事件B发生，反之亦然
互斥关系(互不相容)	$AB = \phi$	事件A和B不可能同时发生
对立关系	$AB = \phi$ $A \cup B = S$	在一次试验中，事件A和B有且只有一个发生.记为$B = \overline{A}$

在一次试验中，基本事件是两两互不相容的。

运算	集合论	概率论含义
和(并)	$A \cup B$ 或$A + B$	两个事件A，B中，至少有一个事件发生
积(交)	$A \cap B$ 或 AB	当且仅当事件A与B同时发生时，事件$A \cap B$发生
差	$A - B$($A\overline{B}$)	当且仅当事件A发生，B不发生时，$A - B$发生

并：若 $A + B$ 发生了，那么两个事件 A, B 至少有一个发生。

交：若 AB 发生，只有 AB 同时发生，才可能发生

差：$A - B$ 当事件 A 发生时候，且 B 不发生，$A - B$ 发生。

事件的运算法则和集合的运算法则基本一致，但从“事件发生”的角度解释

(1) 吸收律： 若 $A \subset B$，

则 $A \cup B = B$, $AB = A$, $\overline{A} \supset \overline{B}$；

(2) 交换律： $A \cup B = B \cup A, AB = BA$；

(3) 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(AB)C = A(BC)；$$

(4) 分配律： $A(B \cup C) = AB \cup AC$,

$$A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C),$$

$$A(B - C) = AB - AC；$$

(5) 对偶律(德摩根律)：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B \cup C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C},$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}.$$

$A + B$ 是 A, B 至少有一个发生，它的逆事件是，A 的逆 交 B 的逆，

AB 同时发生的逆事件是 A 的逆事件和 B 的逆事件至少有一个发生。

可以讲一个事件，表示为与它相等的形式，便于计算

6.频率与概率

概率的公理化定义：

设 E 是随机试验， S 是他的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P()$ 满足下列条件：

1. 非负性：$P(A) \geq 0$
2. 规范性：对必然事件 S，$P(S) = 1$
3. 可列可加性：设 $A_1, A_2, \ldots.$ 是两两互不相容的事件，即：A_iA_j 为空集，有 $P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

性质1：空集的概率为0

性质2：有限可加性，设 $A_1, A_2, \ldots A_n$

性质3：减法公式，$P(A-B) = P(A) - P(AB)$

性质4：单调性，若 B 包含于 A，则 $P(A-B) = P(A) - P(B), P(A) \geq P(B)$

性质5：有界性 $P(A) \leq 1$

性质6：加法公式，$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

7.古典概型

频率只是概率的估计，而非概率本身。

加法原理

设完成一件事有 n 类方法（只要选择其中一类方法即可完成这件事），若第一类方法有 m_1 种，第二类方法有 m_2 种，…，第 n 类方法有 m_n 种，则完成这件事共有$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种方法。

乘法原理

设完成一件事须有 n 个步骤（仅当 n 个步骤都完成，才能完成这件事），若第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事共有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种方法。

排列

从 n 个不同的元素中任取 m (m ≤ n) 个按照一定的顺序排列成一列，称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个排列，从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的所有排列种数，记为

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)] = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1}$$

从 n 个不同的元素中全部取出的排列称为全排列，其排列的种数，记为

$$P_n = n! \tag{2}$$

允许重复的排列

从 n 个不同的元素中有放回地取 m 个按照一定顺序排列成一列，其排列的种数为

$$N = n \times n \times \cdots \times n = n^m \tag{3}$$

组合

从 n 个不同的元素中取出 m 个元素，不管其顺序并成一组，称为从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的一个组合，其组合总数为

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{4}$$

古典概型的定义

若随机试验 E 满足：

1. 样本空间 S，只包含有限个样本点，$S = e_1, e_2, \ldots, e_n$
2. 每个基本事件(样本点)发生的可能性相同

则称此随机试验的概率模型为等可能概型，也成为古典概型

8.几何概型

若随机试验 E 满足：

1. 样本空间 S 是 $R^n(n = 1, 2, 3)$ 中一个可度量的几何区域；
2. 每个样本点出现的概率相等，即样本点落入 S 某一可度量的子区域 A 的可能性大小与 A 的几何量成正比，而与 A 的位置及形状无关。

9.条件概率

若已知某个事件发生，如何求另一个事件发生的概率？----条件概率

$S = HH, HT, TH, TT$

$A = HH, HT, TH$

$B = HH, TT$

$AB = HH$

已知 A 发生，当前样本空间可以认为是 A ，B 发生，就是 HH 出现

故在 A 发生条件下 B 发生的概率，记为 $P(B \mid A)$

即在 A 发生的条件下考虑 B 发生的概率。

条件概率的定义

设 A, B 是两个条件，且 $P(A)>0$，称 $P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 在发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

$P(AB)$ 是在样本空间为 S 的时候，A, B 同时发生的可能性

$P(B \mid A)$ 表示在 A 发生的条件下， B 发生的可能性，此时样本空间已经变为 A

条件概率的性质

当 $P(A)>0$ 时,

1. $P(B|A) \geq 0$;
2. $P(S|A)=1, P(\varnothing|A)=0$;
3. $P(B \cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$;
4. 当 B, C 互不相容时,
$$P(B \cup C|A)=P(B|A)+P(C|A) \tag{5}$$
5. $P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A)$;
6. $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$。

10.乘法公式

$P(AB)=P(A)P(B \mid A)$

这个式子是由条件概率得来的，同样还可以得到 $P(AB)=P(B)P(B \mid A)$

图像卷积、数学卷积

推广

(1) 设 A, B, C 为事件，且 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB). \tag{6}$$

证明：

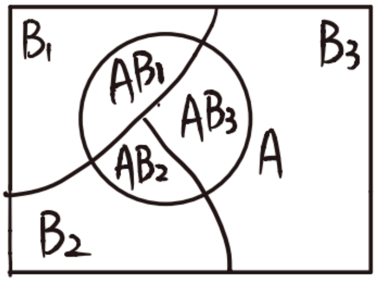
$$P(ABC)=P(AB) \cdot P(C|AB)=P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB). \tag{7}$$

(2) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个事件，$n \geq 2$，且 $P(A_1A_2 \ldots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots P(A_n|A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{8}$$

11.全概率公式、贝叶斯公式

很多实际问题中，$P(A)$ 不容易求，但是容易得到一组两两不互相容且和事件为样本空间，并且知道相关事件概率，则此时就可以求出 $P(A)$



(1) E: S 划分

B_1, B_2, B_3 两两互不相容，且

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = S$

样本空间的划分

定义：设 S 为随机试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 E 的一组事件。若

1. $B_i B_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n)$；
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$,

则称 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分（或完全事件组）。

注：

1. 若 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分，则对每次试验，事件 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 中必有一个且仅有一个发生。
2. 样本空间的划分一般不唯一。$S = 1, 2, 3, 4, 5, 6 = B_1 = 1, 3, 5 + B_2 = 2, 4, 6$

互不相容，不含有公共的样本点

全概率公式

引入：设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$，那么 $P(A) = ?$

由定义，$P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n))$

由于 $B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为划分，故

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \tag{9}$$

这等价于：

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A|B_n) \tag{10}$$

定理：设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1, B_2, \ldots, B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i) > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$，则

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A|B_n) \tag{11}$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i) \tag{12}$$

注：

1. 若把全概率公式中的 A 视为“果”，把 $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 视为“因”，则全概率公式反应的是“由因求果”的概率问题；
2. 应用时首先要对所涉及的事件赋予概率符号；哪些是因？
3. 关键是找到导致事件 B 发生的样本空间的一个划分，完备事件组

贝叶斯公式

贝叶斯公式是由全概率公式得来的，问题：A 已经发生， B_i 出现的概率。

定理：设 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，$B_1,B_2,\ldots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(A)>0,P(B_i)>0\ (i=1,2,\ldots,n)$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A|B_j)},\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

注：

1. 此公式首先是应用条件概率公式，分母为全概率公式，是 n 项之和，分子是分母中的某一项。贝叶斯公式：由果求因。
2. 形式平淡，但富有哲理，贝叶斯统计应用广泛。

乘法公式分解+全概率公式。

已经结果发生，对于每个原因的概率都可以计算出来。

在统计学中，往往是依靠收集的数据，去寻找感兴趣的问题的答案，这就是一个由结果找原因的过程。

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的，且无区别的标志.(1)在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；(2)在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，求此次品由三家工厂生产的概率分别是多少?

解：设 A：取到一只次品，B_i：所取产品由第 i 家工厂提供，$i=1,2,3$

已知：B_1,B_2,B_3 是 S 的一个划分

$P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05$

$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03$

(1) “由因求果” 由全概率公式：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)\\&=0.15\times0.02+0.80\times0.01+0.05\times0.03=0.0125\end{aligned}\tag{14}$$

(2) “由果导因” 由贝叶斯公式：

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times0.02}{0.0125}=0.24\tag{15}$$

$$P(B_2|A)=0.64,P(B_3|A)=0.12\tag{16}$$

3　对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为 98%，而当机器发生某种故障时，其合格率为 55%. 每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 95%. 试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整良好的概率是多少?

由果索因，假设 B_1,B_2 为机器良好，A 为产品合格。则：

$$P(B_1) = 0.95 \text{ , } P(B_2) = 0.05 \text{ , } P(B_1 \mid A) = 0.98 \text{ , } P(B_2 \mid A) = 0.05 \tag{17}$$

$$P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B_2)P(B_2 \mid A) \tag{18}$$

由贝叶斯公式：

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = 0.97 \tag{19}$$

先验概率、后验概率

$P(B_1) = 0.95$，是根据以往的经验分析得到的，是先验概率

$P(B \mid A) = 0.97$，是在得到信息，生产出的第一件产品是合格品的条件下得到的，是后验概率

12.独立性

设 A, B 是两事件，若满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A, B 相互独立。

1. 两个事件相互独立与互不相容不能同时成立

若独立 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$，若互不相容，则 $P(AB) = P(\varnothing) = 0$

2. 必然事件及不可能事件与任意事件相互独立

定理一：

设 A, B 是两事件，且 $P(A) > 0$，若 A, B 相互独立，则 $P(B|A) = P(B)$，反之亦然。

证明：由 A, B 独立，知 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$,

而 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$.

定理二：

若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件也相互独立： A 与 $\overline{B}$ ， $\overline{A}$ 与 B ， $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

也就是说，若 A, B 独立，则 A, B 中任意一个事件换成逆事件后得到的事件组仍然成立。

简单的来说，若 A, B 独立，A 的发生对 B 的发生没有影响

$$\begin{gathered} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(A \mid B) = P(A) \\ P(B \mid A) = P(B) \end{gathered} \tag{20}$$

三事件两两独立

1. 三事件两两独立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases} \tag{21}$$

则称事件 A, B, C 两两独立

2. 三事件相互独立：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases} \tag{22}$$

则称事件 A, B, C 相互独立.

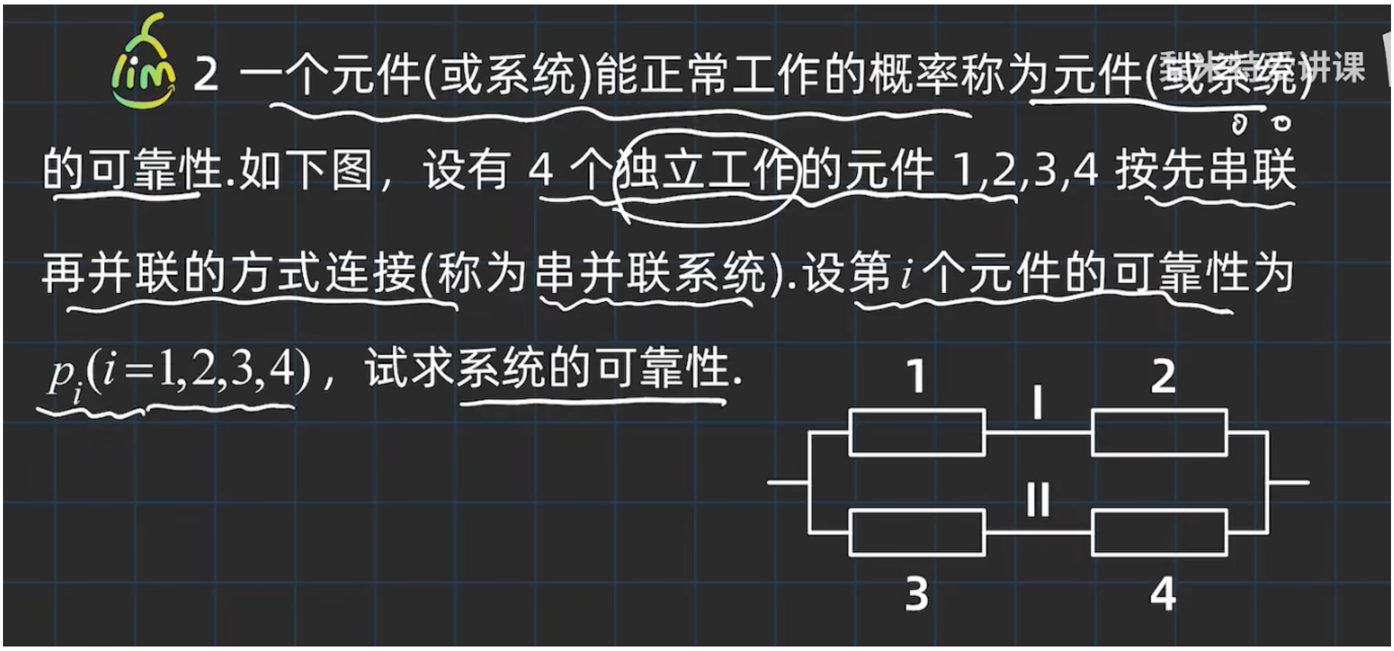
注：三个事件A, B, C 相互独立 $\Rightarrow$ A, B, C 两两独立，反之不成立.

n 个事件的独立性

定义 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 $n(n \geq 2)$ 个事件，如果对于其中任意 2 个，任意 3 个，...，任意 n 个事件的概率，都等于各事件概率的乘积，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立

独立性的判定

1. 直观判断，根据事件的实际意义去判断。
2. 利用定义和定理，$P(AB) = P(A)P(B)$



$$P(A) = P(A_1A_2 + A_3A_4) \tag{23}$$

$$= P(A_1A_2) + P(A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)(\text{加法公式}) \tag{24}$$

$$P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)(\text{独立性}) \tag{25}$$