逆变换采样(Inverse Transform Sampling or Inversion Method)是一种从标准均匀分布的随机数出发，通过变换生成按我们指定的概率密度分布的随机数的方法。[1][2]

问题

已知：随机变量X满足标准均匀分布，即$X \sim U[0,1]$，然后要求生成随机变量Y，使得Y满足概率密度分布$f(y)$，其中$f(y)$对应的累积分布函数$F(y)$是严格单调增的。

方法

1. 生成标准均匀分布的随机数X
2. 计算累积分布函数的反函数$F^{-1}(y)$
3. 带入反函数生成随机变量$Y = F^{-1}(X)$，则Y满足概率密度分布$f(y)$

证明

对于随机变量X，如果满足标准均匀分布的话，对任给的$a \in [0,1]$，有$Pr(X \leq a) = a$，那么有：

$$Pr(X \leq F(y)) = F(y)$$

然后$F(y)$是值域$[0,1]$上的严格单调递增函数，它一定存在反函数，且反函数也是严格单调递增的，于是：

$$Pr(F^{-1}(X) \leq y) = F(y)$$

根据累积分布函数的定义$F(y) = Pr(X \leq y)$，上式表明$F^{-1}(X)$是个满足累积分布函数$F(y)$的随机数，证毕。

例子

从标准均匀分布随机数生成满足指数分布的随机数，指数分布 $X \sim exp(1)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1. 累积分布函数：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

2. $F(x)$的反函数：$F^{-1}(x) = -ln(1-x)$，其中$x \in [0,1)$
3. X满足$U[0,1]$分布，则$-ln(1-X)$满足指数分布。

python代码：

```
import math
import random
import matplotlib.pyplot as plt

N = 200000
Q = 20
S = 10
```

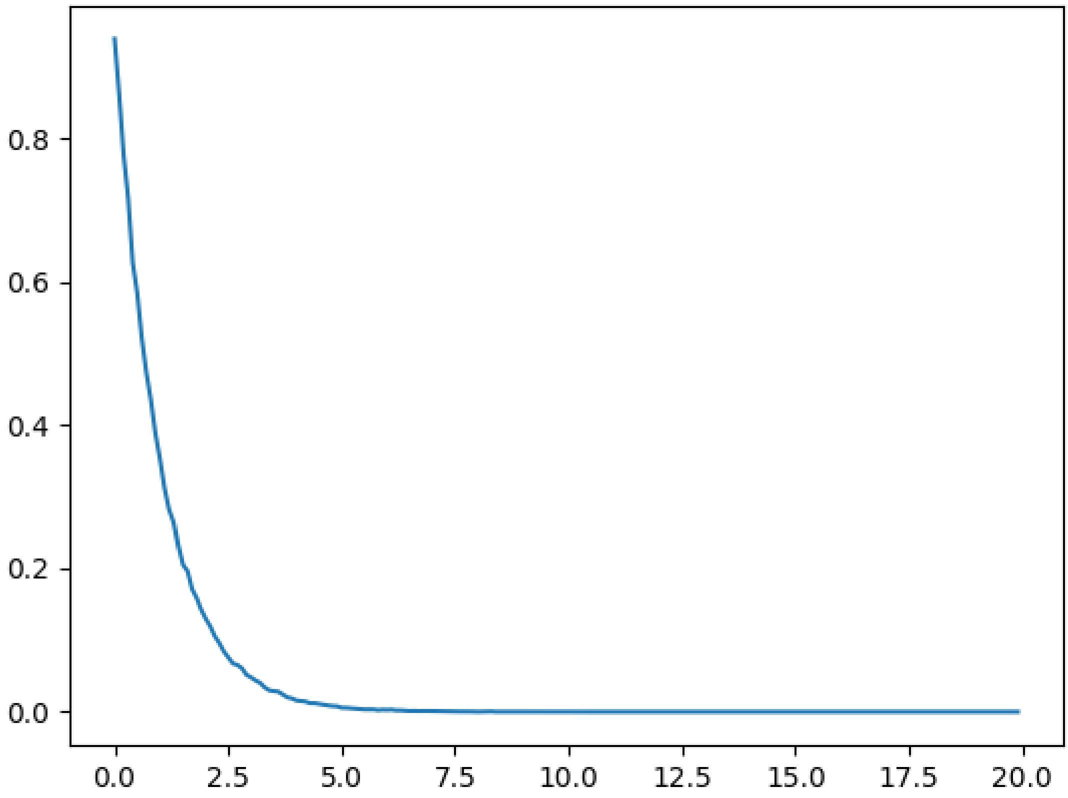
```
rand_counts = [0] * Q * S     # random value counter, the counter proportion is the pdf(probability distribution function)

for i in range(N):
    r = random.uniform(0, 1)  # gen uniform random in range(0, 1)
    r = -math.log(1 - r)    # inverse transform to get exp distribution
    c = (int)(r * S)
    if c < Q * S:
        rand_counts[c] = rand_counts[c] + 1

total = sum(rand_counts)
print ("total = ", total)

x = [0] * Q * S
y = [0] * Q * S
for i in range(Q * S):
    x[i] = i / S
    y[i] = rand_counts[i] * S / total
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

基本符合$y = e^{-x}$



Reference

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_transform_sampling
2. https://www.pbr-book.org/3ed-2018/Monte_Carlo_Integration/Sampling_Random_Variables
3. http://corysimon.github.io/articles/uniformdistn-on-sphere/