Sistema de representación

Informática Gráfica I

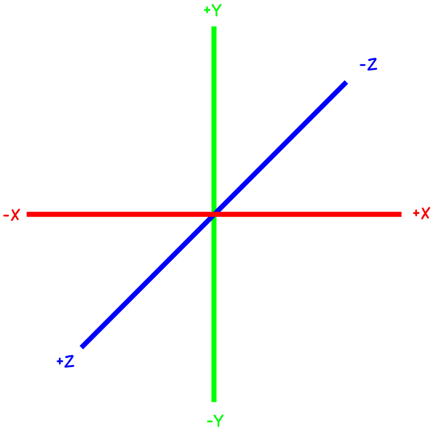
Material de: **Ana Gil Luezas**
Adaptado por: **Elena Gómez** y **Rubén Rubio**
{mariaelena.gomez,rubenrub}@ucm.es

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Contenido

Sistema cartesiano

- Sistema cartesiano: origen (O) y tres ejes ortogonales: X, Y, Z



Sistema cartesiano

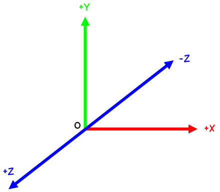
Right-handed system:

Right = X positivo

Up = Y positivo

Backwards = Z positivo

Forwards = Z negativo



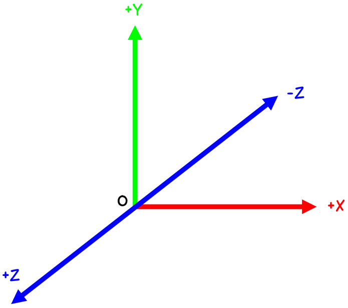
Sistema cartesiano

- **Coordenadas cartesianas**:
  Un punto en el espacio 3D está representado por un triple de valores de coordenadas (x, y, z), representando las distancias en las 3 direcciones perpendiculares (eje de coordenadas).
- **Coordenadas homogéneas**:
  Se añade un cuarto valor w, tal que un punto es representado por (x', y', z', w), siendo: $x = x'/w$, $y = y'/w$ y $z = z'/w$.

Sistema cartesiano

Matriz del marco cartesiano

$$\text{Matriz identidad} = \begin{array}{cccc} X & Y & Z & O \\ \multicolumn{4}{c}{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \end{array}$$



Matrices 4×4 que se aplican a puntos y vectores en **coordenadas homogéneas**: (x, y, z, w)
$w = 1 \Rightarrow$ punto (vértice)
$w = 0 \Rightarrow$ vector

En OpenGL las matrices son 4×4 **column-major**.

Transformaciones afines

Existen 3 tipos de transformaciones afines:

- Traslación: cambian la **posición** de un objeto.
- Rotación: cambia la **orientación** de un objeto, sin deformar el objeto (transformaciones rígidas).
- Escala: las escalas uniformes cambian el **tamaño** de un objeto. Las escales no uniformes pueden deformar el objeto.

Transformaciones afines

- Las **rotaciones**, **traslaciones** y **escalas** se expresan con matrices de la forma:

$$F = \left(\begin{array}{c|c} M & T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & t_y \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Composición**: Las transformaciones se pueden componer multiplicando las matrices.

El producto de matrices es asociativo, pero no conmutativo:

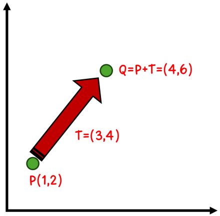
$$(M_1 \cdot M_2) \cdot V = M_1 \cdot (M_2 \cdot V), \text{ pero } M_1 \cdot M_2 \neq M_2 \cdot M_1$$

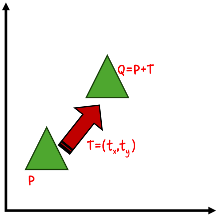
Traslaciones

- **Traslación** con **vector** $T = (t_x, t_y, t_z)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

siendo $Q = (x', y', z')$ las coordenadas del punto $P = (x, y, z)$ una vez trasladado.





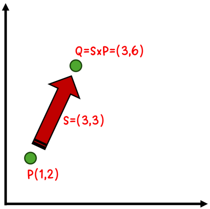
Escalas

- **Escala** con **factor** $S = (s_x, s_y, s_z)$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \\ 1 \end{pmatrix}$$

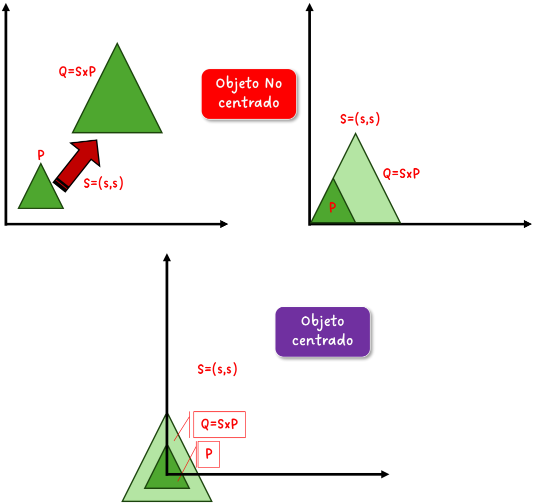
siendo $Q = (x', y', z')$ las coordenadas del punto $P = (x, y, z)$ una vez escalado.

La escala es **uniforme** si $s_x = s_y = s_z$.



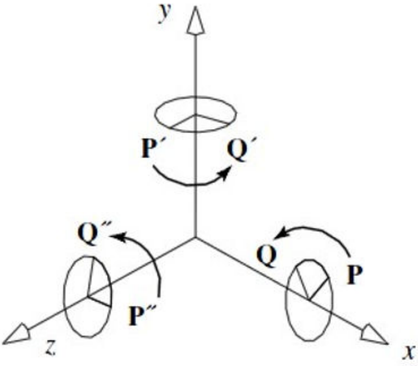
Escalas

- **Escala** con **factor** $S = (s, s, s)$:



Rotaciones

- **Rotaciones elementales** sobre los ejes:



Ángulo positivo → giro **CCW** (antihorario)

Rotaciones sobre el eje Z (Z-Roll)

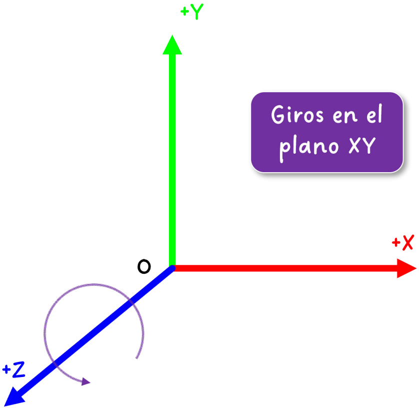
- Una **rotación sobre el eje Z de θ radianes**:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\theta) \cdot x - sin(\theta) \cdot y \\ sin(\theta) \cdot x + cos(\theta) \cdot y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

siendo $Q = (x', y', z')$ las coordenadas del punto $P = (x, y, z)$ una vez rotado

Rotaciones sobre el eje Z (Z-Roll)

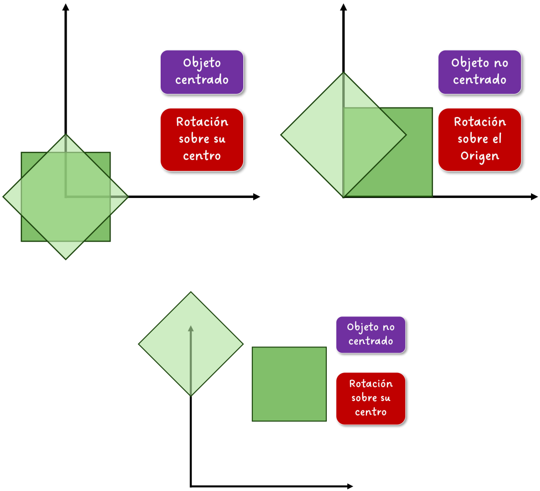


Giros en el plano XY

Ángulo positivo → giro **CCW** (antihorario)

Rotación sobre el eje Z (Z-Roll)

- Una **rotación sobre el eje Z de 45 grados**:



Rotaciones

Matriz de Rotación

Z-Roll:
$$\begin{pmatrix} cos(\beta) & -sin(\beta) & 0 & 0 \\ sin(\beta) & cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y-Yaw:
$$\begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X-Pitch:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sin(\beta) & 0 \\ 0 & sin(\beta) & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$