

# Metodo de Euler/Runge-Kutta

Universidad de Concepción — Israel Bravo

## 1. Metodo de Euler

Para empezar con el metodo de Euler tenemos que establecer la forma general de las ecuaciones que resolveremos con este metodo:

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (1)$$

al encontrar cualquier funcion de este tipo, el metodo de euler nos dice que:

$$u_{n+1} = f_n + f(u_n, t_n)\Delta t \quad (2)$$

Podemos hacer lo siguiente en python para programar un metodo de resolver edos de la siguiente manera:

Listing 1: Programar el metodo de Euler

```

1 #Primero que nada, definimos el metodo de euler como
2
3 def euler(f, u, t):
4     u = np.copy(u)
5     dt = t[1] - t[0]
6     for n in range(len(t)-1):
7         u[n+1] = u[n] + f(u[n], t[n])*dt
8
9     return u

```

Con esto definido ya podemos empezar a usar el metodo de euler de la siguiente manera, no sin antes ver cual es la ecuacion que representa el pendulo simple

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \\ \theta(0) = \theta_0, \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (3)$$

con esta ecuacion dada, podemos definir la edo que resolveremos ahora:

Listing 2: Definamos la funcion y todos los parametros

```

1 #Importemos los modulos numpy y ademas programemos la edo que resolveremos:
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 #Definamos los parametros:
5 g = 9.81
6 l = 1.0
7 dt = 0.01
8 t = np.arange(0, N*dt, dt)
9 #Una vez hecho esto, tenemos que definir los valores iniciales:
10 u0 = np.array([omega, - (g/l) * np.sin(theta)])
11 #Una vez hecho esto, podemos empezar a usar la funcion de euler, y ademas graficarla
12 # Inicializamos la matriz para almacenar la solucion
13 # Cada fila es [theta, omega]
14 u = np.zeros((N, 2))
15 u[0] = u0
16
17
18 #Ejecutamos euler
19 u = euler(f, u, t)

```

Y si hacemos el grafico de la funcion, nos quedaria lo siguiente:

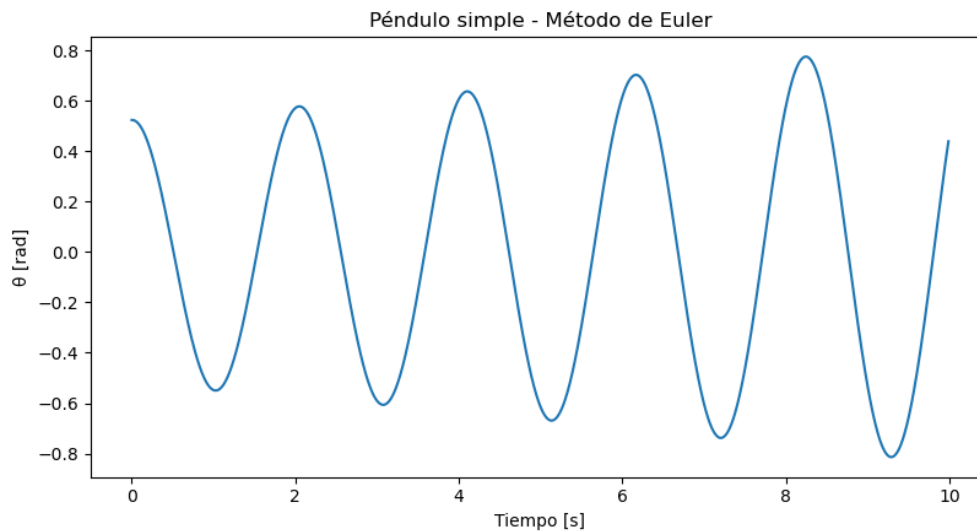


Figura 1: Pendulo simple

Se puede llegar a apreciar, el como esta funcion retrata al movimiento de este pendulo, de buena manera al principio, pero que segun van pasando los segundos cada vez va aumentando, esto se debe a que el metodo de euler es un metodo que no conserva la energia, y que va inyectando por asi decirlo energia y aumentandola. Esto se puede arreglar si disminuimos el valor de h, pero en si el metodo de euler es el peor metodo o de los peores para resolver edos, debido a este y otros problemas mas que conlleva usarlo.

### 1.1. Pendulo doble

Ahora resolveremos la ecuacion del pendulo pero esta vez sera doble. Esta ecuacion es un poco mas complicada y enrevesada de lo que es la Edo de un pendulo simple, se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{-g(2m_1 + m_2) \sin \theta_1 - m_2 g \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) m_2 [\omega_2^2 l_2 + \omega_1^2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{l_1 [2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{2 \sin(\theta_1 - \theta_2) [\omega_1^2 l_1 (m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2) \cos \theta_1 + \omega_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{l_2 [2m_1 + m_2 - m_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)]}.\end{aligned}\quad (4)$$

### Notas rápidas

- $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin(\theta) - gt$  describe la velocidad vertical.
- El tiempo total de vuelo es  $T = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$ .