复旦大学计算机科学技术学院

2013-2014 学年第二学期《代数结构与数理逻辑》补考缓考试卷

B卷　共 2 页

课程代码：COMP130005.01　　考试形式：☐ 开卷　☑ 闭卷　　**2014 年 9 月**

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

姓　名：________　学　号：________　专　业：________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

本试卷涵盖整个一学期的内容，包括代数结构，数理逻辑。与期终考试试卷内容有所区别，这是因为期终考试试卷在总成绩中占 40%, 期中 40%，作业和平时测验各占 10%, 故期终试卷中不单独考核期中考试已考过的内容，而补考则仅以本卷子为惟一依据，因此要覆盖整个学期的内容。

说明：7 大题，共 2 页

一、判断下列结论是否正确, 并说明理由(12%)。.

1.商环 $Z_3[x]/(x^5+1)$是整环。

2.项 $f_2^1(x_2,x_3)$对谓词合式公式$\exists x_2(R_2^1(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_3R_3^1(x_1,x_2,x_3))\rightarrow\forall x_1\neg R_2^2(x_1,x_2)$中的自由变元 x_2 是自由的。

二、设 $G=\{(x,\ y)|x,y\in R，x\neq 0\}$, 在 G 上定义二元运算如下：

$(x,\ y)\bullet(z,w)=(xz,\ xw+y)$ 对任意$(x,y),(z,w)\in G$。

1. 证明 (G; ●)是群。(9%)

2. (G;●)是 *Abel* 群?(3%)

3. 设 $H=\{(1,y)|y\in R\}$，证明 (H; ●)是群(G;●) 的正规子群。(8%)

三、设[R;+′,•]是没有单位元的环，[Z;+.×]是整数环，在Z×R上定义运算如下：

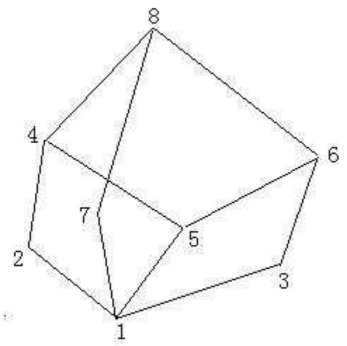
$(m, a)\oplus(n, b) = (m+n, a+'b)$; $(m,a)\otimes(n,b) = (m\times n, mb+'na+'a\bullet b)$:

1.证明：[Z×R; ⊕,⊗]是一个有单位元的环。(10%)

2.$f(r) = (0,r)$是 R 到 R×Z 的一对一同态映射。(6%)

四、证明 x^5+x^3+1 是 Z_2 上的本原多项式。(8%)

五、设 S={1,2,3,4,5,6,7,8}，S 上的偏序关系 R 由下面的 Hasse 图表示
1.设 L={1,2,5,7,8}，是否为 S 的子格？请说明理由。(5%)
2.请给出一个有 6 个元素的 S 的子格，并且包含元素 6。(5%)



六、1.求命题合式公式$((x_1 \vee x_3) \wedge x_2) \leftrightarrow (x_1 \to \neg x_2)$的标准析取范式和标准合取范式。(8%)

2.求谓词合式公式$\exists x_2(R_2^1(x_1,x_2) \to \forall x_3 R_3^1(x_1,x_2,x_3)) \to \forall x_1 \neg R_2^2(x_1,x_2)$的前束范式。(8%)

在求解中可使用的等价公式如下：

(1)$p\to q \vdash\dashv \neg p\vee q$；(2)$p\leftrightarrow q \vdash\dashv (\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$；

(3)$p\leftrightarrow q \vdash\dashv (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$；(4)$\neg\neg p \vdash\dashv p$；

(5)$\neg\theta x p(x) \vdash\dashv \theta' x \neg p(x)$，这里约定：用$\forall'$和$\exists'$分别表示$\exists$和$\forall$；

(6)$p\wedge\theta x q(x) \vdash\dashv \theta x(p\wedge q(x))$，$x\notin var(p)$；(7)$p\vee\theta x q(x) \vdash\dashv \theta x(p\vee q(x))$，$x\notin var(p)$；

(8)$\forall x p(x)\wedge\forall x q(x) \vdash\dashv \forall x(p(x)\wedge q(x))$；　(9)$\exists x p(x)\vee\exists x q(x) \vdash\dashv \exists x(p(x)\vee q(x))$；

(10)$\theta_1 x p(x)\wedge\theta_2 y q(y) \vdash\dashv \theta_1 x\theta_2 y(p(x)\wedge q(y))$，$x\notin var(q(y)), y\notin var(p(x))$；

(11)$\theta_1 x p(x)\vee\theta_2 y q(y) \vdash\dashv \theta_1 x\theta_2 y(p(x)\vee q(y))$，$x\notin var(q(y)), y\notin var(p(x))$。

七、1.用解释赋值的方法证明$\models (p\to\exists x q(x))\to\exists x(p\to q)$ (8%)

2 用公理集 *A* 证明 $\vdash(p\to\exists x q(x))\to\exists x(p\to q)$　　　(10%)

可使用演绎定理，MP 规则和 G 规则，以及下述 3 个定理：

T1: $\vdash(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$，

T2: $\vdash\neg(p\to q)\to p$，

T3: $\vdash\neg(p\to q)\to\neg q$

但除此之外不能使用其他定理。

这里 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$,

$A_1=\{p\to(q\to p)|p,q\in P(Y)\}$；

$A_2=\{(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))|p,q,r\in P(Y)\}$；

$A_3=\{\neg\neg p\to p|p\in P(Y)\}$;

$A_4=\{\forall x(p\to q)\to(p\to\forall x q)|p,q\in P(Y),x\notin var(p)\}$;

$A_5=\{\forall x p(x)\to p(t)|p(x)\in P(Y)$,项 t 对 p(x)中的 x 是自由的$\}$。