复旦大学计算机科学技术学院

2012-2013 学年第二学期《代数结构与数理逻辑》期末考试试卷

A 卷　　共 7 页

课程代码：COMP130005.01　　　考试形式：闭卷　　　2013 年 6 月 28 日

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

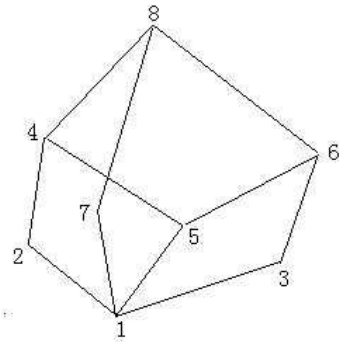
专业____________________学号________________________姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、设 L 是格，对于任意的 a,b,c∈L，若当 $a \le c$ 时必有 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ 成立，则称格 L 为模格。

1.证明 L 是模格当且仅当 L 不含有与 M5 同构的子格。(10%)

2.设 S={1,2,3,4,5,6,7,8}，S 上的偏序关系 R 由下面的 Hasse 图表示，问 S 是否为模格？(5%)



3.请给出一个是模格但不是分配格的含有 6 个元素的格(用 Hasse 图表示)。(5%)

二、1.求命题合式公式$(x_1\vee\neg x_2)\rightarrow(x_2\leftrightarrow(x_1\wedge\neg x_3))$的标准析取范式和标准合取范式。(10%)

2.求谓词合式公式$\exists x_3R_3^1(x_1,x_2,x_3)\leftrightarrow\forall x_2(\exists x_1R_2^1(x_1,x_2)\rightarrow R_2^2(x_1,x_3))$的前束范式。(10%)

在求解中可使用的等价公式如下：

(1)$p\rightarrow q \dashv\vdash \neg p\vee q$；(2)$p\leftrightarrow q \dashv\vdash (\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$；

(3)$p\leftrightarrow q \dashv\vdash (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$；(4)$\neg\neg p \dashv\vdash p$；

(5)$\neg\theta xp(x) \dashv\vdash \theta' x\neg p(x)$，这里约定：用$\forall'$和$\exists'$分别表示$\exists$和$\forall$；

(6)$p\wedge\theta xq(x) \dashv\vdash \theta x(p\wedge q(x))$，$x\notin var(p)$；(7)$p\vee\theta xq(x) \dashv\vdash \theta x(p\vee q(x))$，$x\notin var(p)$；

(8)$\forall xp(x)\wedge\forall xq(x) \dashv\vdash \forall x(p(x)\wedge q(x))$；　(9)$\exists xp(x)\vee\exists xq(x) \dashv\vdash \exists x(p(x)\vee q(x))$；

(10)$\theta_1xp(x)\wedge\theta_2yq(y) \dashv\vdash \theta_1x\theta_2y(p(x)\wedge q(y))$，$x\notin var(q(y)),y\notin var(p(x))$；

(11)$\theta_1xp(x)\vee\theta_2yq(y) \dashv\vdash \theta_1x\theta_2y(p(x)\vee q(y))$，$x\notin var(q(y)), y\notin var(p(x))$。

三、设谓词合式公式 $p=\exists x_2(R_2^1(x_1,x_2))\vee\forall x_3R_3^1(x_1,x_2, x_3))$

1.将 p 写成自由$\{F, \rightarrow, \forall x|x\in X\}$-代数 P(Y)中的元素形式。(8%)

2.求层次 $l(p)$(6%)

3.指出谓词合式公式 p 中的自由变元和约束变元(8%)。

4.项 $f_2^1(x_1,x_2)$对谓词合式公式 p 中的哪些自由变元是自由的，哪些是不自由的？分别说明理由。 (6%)

四、判断下述结论是否正确，并必须用解释赋值的方式说明理由。(12%)

1.若 $A\cup\{p\}\models q$，并且 $x\notin var(A)$，$x\notin var(q)$, 则 $A\cup\{\exists xp\}\models q$。

2. $\models\forall x(p\to q)\to(p\to\forall xq)$

五、在可满足性定理证明过程中，关键是证明所构造的函数 $v: P(Y^{U,\varphi}) \to Z_2$ 是满足赋值函数的定义。请证明在可满足性定理证明过程中所构造的函数 v 满足赋值函数定义中的(c_k)。(6%)

六、用公理集 A 直接证明：

1. $\models(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$　　　　　　　　(5%)

2. $\{\forall x(Q(x)\to R(x))$，$\forall x(N(x)\to R(x))$，$\forall x(C(x)\to\neg R(x))\}\vdash\forall x\,(C(x)\to(\neg Q(x)\wedge\neg N(x))$ (9%)

证明时可使用演绎定理，MP 规则和 G 规则，以及下述定理：

T: $\vdash p\to\neg\neg p$

但除此之外不能使用其他定理。

这里 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$,

$A_1=\{p\to(q\to p)|p,q\in P(Y)\}$；

$A_2=\{(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))\,|\,p,q,r\in P(Y)\}$;

$A_3=\{\neg\neg p\to p\,|\,p\in P(Y)\}$;

$A_4=\{\forall x(p\to q)\to(p\to\forall xq)|p,q\in P(Y),x\notin var(p)\}$;

$A_5=\{\forall xp(x)\to p(t)|p(x)\in P(Y)$,项 t 对 p(x)中的 x 是自由的$\}$。