复旦大学计算机科学技术学院

2013-2014 学年第二学期《代数结构与数理逻辑》期末考试试卷

A 卷

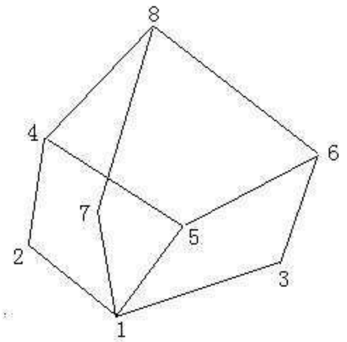
课程代码：COMP130005.01　　　　**考试形式：闭卷**　　　　**2014 年 7 月 1 日**

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业______________________学号__________________________姓名____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、若格 L 的 Hasse 图如下图所示，问 L 是否为分配格？请说明理由。(6%)



二、设φ是格L到格L'的映射。称φ是反序的，若对任意$a,b\in L,$ 当$a\le b$时，必有 $\varphi(a)\ge\varphi(b)$。称 φ 是反同态，若对任意 $a,b\in L,$ $\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\vee\varphi(b),$ $\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\wedge\varphi(b)$。若$\varphi$既是双射，又是反同态，则称$\varphi$是反同构。试证明：$\varphi$是格 L 到格$L'$的反同构当且仅当$\varphi$和$\varphi^{-1}$是反序的。(12%)

三、1.求命题合式公式$(\neg x_1\rightarrow(x_2\wedge x_3))\leftrightarrow(x_1\vee\neg x_2)$的标准析取范式和标准合取范式。(10%)

2.求谓词合式公式$\forall x_2R_2^1(x_1,x_2)\leftrightarrow\forall x_2(\exists x_3R_3^1(x_1,x_2,x_3)\rightarrow R_2^2(x_1,x_3))$的前束范式。(10%)

在求解中可使用的等价公式如下：

(1)$p\rightarrow q \dashv\vdash \neg p\vee q$；(2)$p\leftrightarrow q \dashv\vdash (\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$；

(3)$p\leftrightarrow q \dashv\vdash (p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$；(4)$\neg\neg p \dashv\vdash p$；

(5)$\neg\theta xp(x) \dashv\vdash \theta' x\neg p(x)$，这里约定：用$\forall'$和$\exists'$分别表示$\exists$和$\forall$；

(6)$p\wedge\theta xq(x) \dashv\vdash \theta x(p\wedge q(x))$，$x\notin var(p)$；(7)$p\vee\theta xq(x) \dashv\vdash \theta x(p\vee q(x))$，$x\notin var(p)$；

(8)$\forall xp(x)\wedge\forall xq(x) \dashv\vdash \forall x(p(x)\wedge q(x))$；　(9)$\exists xp(x)\vee\exists xq(x) \dashv\vdash \exists x(p(x)\vee q(x))$；

(10)$\theta_1xp(x)\wedge\theta_2yq(y) \dashv\vdash \theta_1x\theta_2y(p(x)\wedge q(y))$，$x\notin var(q(y)),y\notin var(p(x))$；

(11)$\theta_1xp(x)\vee\theta_2yq(y) \dashv\vdash \theta_1x\theta_2y(p(x)\vee q(y))$，$x\notin var(q(y)), y\notin var(p(x))$。

四、设谓词合式公式 $p=\forall x_2 R_2^1(x_1,x_2)\leftrightarrow \forall x_1(R_2^2(x_1,x_2)\rightarrow \exists x_2 R_3^1(x_1,x_2,x_3))$

1.将 p 写成自由$\{F, \rightarrow, \forall x|x\in X\}$-代数 P(Y)中的元素形式。(8%)

2.指出谓词合式公式 p 中的自由变元和约束变元(7%)。

3.项 $f_2^1(x_2,x_3)$对谓词合式公式 p 中的哪些自由变元是自由的，哪些是不自由的？分别说明理由。 (6%)

4.求 l(p) 。 (7%)

五、语义蕴含 A $\models$p 表示：不存在一个使得 v(A)$\subseteq$\{1\}而 v(p)=0 的解释域和项解释。而语义蕴含 A $\models^{*}$ p 表示 ：不存在一个使得 v(A)$\subseteq$\{1\}而 v(p)=0 的解释域 *U*。说明：所谓在解释域 *U* 下 v(p)=1，表示解释域 *U* 的任一项解释都使得 v(p)=1；在解释域 *U* 下 v(p)=0 则表示在解释域 *U* 中至少存在一个项解释使得 v(p)=0。判断下述结论是否正确，其中 1.和 2.这两题必须用解释赋值的方式说明理由。(18%)

1. $\models$ (p→∃xq（x））→∃x（p→q）。

2. {p(x)} $\models^{*}$ ∀x p(x)

3.若 A $\models^{*}$ p，则 A $\vdash$p。

六、设 $A \subseteq P(Y)$，$p \in P(Y)$，若 A 协调，且 $A \vdash \neg\neg p$，则 $A \cup \{p\}$协调。(6%)

七、用公理集 A 直接证明：

$\{\forall x(W(x) \to \neg C(x)), \forall x(\neg C(x) \to B(x)), \exists x \neg B(x)\} \vdash \exists x \neg W(x)$（10%）
证明时可使用演绎定理，MP 规则和 G 规则，以及下述定理：

T: $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

但除此之外不能使用其他定理。

这里 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$,

$A_1 = \{p \to (q \to p) | p, q \in P(Y)\}$；

$A_2 = \{(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) | p, q, r \in P(Y)\}$；

$A_3 = \{\neg\neg p \to p | p \in P(Y)\}$;

$A_4 = \{\forall x(p \to q) \to (p \to \forall x q) | p, q \in P(Y), x \notin var(p)\}$;

$A_5 = \{\forall x p(x) \to p(t) | p(x) \in P(Y)$,项 t 对 p(x)中的 x 是自由的$\}$。