ชื่อ-สกุล นายวรภพ แก้วใบนเห็ด รหัสประจำตัว 643020641-0 section 3 **หน้า 1**

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน T ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1 ให้ $T : \mathbb{M}_{m\times n} \to \mathbb{M}_{n\times m}$ กำหนดโดย $T(A) = A^T$ สำหรับทุก $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$

1.2 ให้ $T : \mathbb{M}_{2\times 1} \to \mathbb{M}_{2\times 1}$ กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}$

1.3 ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((x, y, z)) = (x - y, z)$ สำหรับทุก $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1.4 ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((x, y)) = (e^{x+y}, 0)$ สำหรับทุก $(x, y) \in \mathbb{R}^3$

วิธีทำ

การแปลงเชิงเส้นต้องเป็นไปตามสมบัติ 2 ข้อ

1. สมบัติการบวก : $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2. สมบัติการคูณสเกลาร์ : $T(cu) = cT(u)$

1.1 $T(A) = A^T$

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ และ c เป็นค่าคงที่

• $T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$

• $T(cA) = (cA)^T = cA^T = cT(A)$

∴ เป็นการแปลงเชิงเส้น

1.2 $T(x,y) = R_{18^\circ}(x,y)$

• การหมุนเป็นการแปลงเชิงเส้นที่สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์หมุน R ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{bmatrix}$$

• ตรวจสอบสมบัติ

$T(u+v) = R(u+v) = Ru + Rv = T(u) + T(v)$

$T(cu) = R(cu) = cRu = cT(u)$

∴ เป็นการแปลงเชิงเส้น

1.3 $T(x,y,z) = (x-y, z)$

• เขียนเป็นเมทริกซ์ได้

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

• ตรวจสอบสมบัติ

$T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v)$

$T(cu) = A(cu) = c(Au) = cT(u)$

∴ เป็นการแปลงเชิงเส้น

1.4 $T(x,y) = (e^{x+y}, 0)$

• ตรวจสอบสมบัติ

$T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (e^{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)}, 0)$

$T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2) = (e^{x_1+y_1}, 0) + (e^{x_2+y_2}, 0) = (e^{x_1+y_1} + e^{x_2+y_2}, 0)$

ไม่เท่ากัน → ผิดเงื่อนไข

∴ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 2. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ที่กำหนดโดย

$$T((1,1,0)) = (1,2,3),\ T((1,0,0)) = (-1,0,2) \text{ และ } T((1,0,1)) = (2,2,7)$$

เมื่อ $B = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,0,1)\}$ เป็นฐานหลักลำดับสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$

2.1 จงหาพิกัด $\left[(5,3,1)\right]_B$

2.2 จงหาค่าของ $T((5,3,1))$

วิธีทำ

2.1 จงหาพิกัด $[5,3,1]_B$

ให้ $B = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,0,1)\}$ เป็นฐานของ $\mathbb{R}^3$

ต้องการหาพิกัดของเวกเตอร์ $v = (5,3,1)$ ในฐาน B

หาค่า c_1, c_2, c_3

$c_1(1,1,0) + c_2(1,0,0) + c_3(1,0,1) = (5,3,1)$

ได้ระบบ

$c_1 + c_2 + c_3 = 5$

$c_1 = 3$

$c_3 = 1$

$\therefore$ แก้ระบบได้ $c_1 = 3,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1$

$[5,3,1]_B = (3,1,1)$

2.2 จงหาค่า $T(5,3,1)$

$T(1,1,0) = (1,2,3),\ T(1,0,0) = (-1,0,2),\ T(1,0,1) = (2,2,7)$

จากข้อ 2.1 เราได้ว่า

$(5,3,1) = 3(1,1,0) + 1(1,0,0) + 1(1,0,1)$

ใช้ความเป็นเชิงเส้นของ T

$T(5,3,1) = 3T(1,1,0) + 1T(1,0,0) + 1T(1,0,1)$

$= 3(1,2,3) + 1(-1,0,2) + 1(2,2,7)$

$= (3,6,9) + (-1,0,2) + (2,2,7)$

$= (3-1+2, 6+0+2, 9+2+7)$

$= (4,8,18)$

$\therefore T(5,3,1) = (4,8,18)$

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 3. ให้ $T : \mathbb{M}_{3\times1} \to \mathbb{M}_{3\times1}$ ที่กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ y - 2z \\ 3z \end{bmatrix}$$

3.1 จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T (หาเมทริกซ์ A ที่ทำให้ $T(u) = Au$)

3.2 กำหนดให้ $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักลำดับสำหรับ $\mathbb{M}_{3\times1}$

จงหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T จากฐานหลักลำดับ B ไปยังฐานหลักลำดับธรรมชาติ E_3

วิธีทำ

3.1. สำหรับ A: $A = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

- คำนวณแต่ละรายการในเมทริกซ์

แถวแรก : $2(2) - 1 - 0 = 4 - 1 = 3$

แถวสอง ; $2 + 2(1) - 0 = 2 + 2 = 4$

แถวสาม ; $2(2) + 2(1) + 3(0) = 4 + 2 = 6$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3.2. $B = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

คำนวณแต่ละรายการในเมทริกซ์

แถวแรก : $2(1) - 2 - 2 - 3 = 2 - 2 - 3 = -3$

แถวสอง : $1 + 2(2) - 3 = 1 + 4 - 3 = 2$

แถวสาม : $2(1) + 2(2) + 3(3) = 2 + 4 + 9 = 15$

ดังนั้น $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$