

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน T ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1 ให้ $T: \mathbb{M}_{m \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times m}$ กำหนดโดย $T(A) = A^T$ สำหรับทุก $A \in \mathbb{M}_{m \times n}$

1.2 ให้ $T: \mathbb{M}_{2 \times 1} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 1}$ กำหนดโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

สำหรับทุก $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 1}$

1.3 ให้ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((x, y, z)) = (x - y, z)$ สำหรับทุก $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

1.4 ให้ $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T((x, y)) = (e^{x+y}, 0)$ สำหรับทุก $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

วิธีทำ

การแปลงเชิงเส้นต้องเป็นไปตามทฤษฎีบท 2 ข้อ

1. สมบัติการบวก: $T(u+v) = T(u) + T(v)$

2. สมบัติการคูณสเกลาร์: $T(cu) = cT(u)$

1.1 $T(A) = A^T$

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ และ c เป็นสเกลาร์

$$\bullet T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

$$\bullet T(cA) = (cA)^T = cA^T = cT(A)$$

\therefore เป็นการแปลงเชิงเส้น

1.2 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = R_{18^\circ} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

\bullet ตรวจสอบเงื่อนไขการแปลงเชิงเส้นที่ตรวจสอบได้เป็นเมทริกซ์หมุน R ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{bmatrix}$$

\bullet ตรวจสอบสมบัติ

$$T(u+v) = R(u+v) = Ru + Rv = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = R(cu) = cRu = cT(u)$$

\therefore เป็นการแปลงเชิงเส้น

$$1.3 \quad T(x, y, z) = (x - y, z)$$

\bullet ตรวจสอบสมบัติการบวก

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

\bullet ตรวจสอบสมบัติการคูณสเกลาร์

$$T(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T(u) + T(v)$$

$$T(cu) = A(cu) = c(Au) = cT(u)$$

\therefore เป็นการแปลงเชิงเส้น

$$1.4 \quad T(x, y) = (e^{x+y}, 0)$$

\bullet ตรวจสอบสมบัติการบวก

$$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (e^{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)}, 0)$$

$$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (e^{x_1 + y_1}, 0) + (e^{x_2 + y_2}, 0) = (e^{x_1 + y_1} + e^{x_2 + y_2}, 0)$$

ไม่เท่ากัน \rightarrow ไม่ใช่การแปลงเชิงเส้น

\therefore ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 2. ให้ $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ที่กำหนดโดย

$$T((1, 1, 0)) = (1, 2, 3), \quad T((1, 0, 0)) = (-1, 0, 2) \quad \text{และ} \quad T((1, 0, 1)) = (2, 2, 7)$$

เมื่อ $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ เป็นฐานหลักลำดับสำหรับปริภูมิเวกเตอร์ \mathbb{R}^3

2.1 จงหาพิกัด $\left[\begin{pmatrix} 5, 3, 1 \end{pmatrix} \right]_B$

2.2 จงหาค่าของ $T((5, 3, 1))$

วิธีทำ

2.1 จงหาพิกัด $\left[\begin{pmatrix} 5, 3, 1 \end{pmatrix} \right]_B$

ให้ $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ เป็นฐานหลักลำดับสำหรับ \mathbb{R}^3

ต้องการพิกัดของเวกเตอร์ $v = (5, 3, 1)$ ในฐาน B

นั่นคือ c_1, c_2, c_3

$$c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 0, 0) + c_3(1, 0, 1) = (5, 3, 1)$$

จัดรูป

$$c_1 + c_2 + c_3 = 5$$

$$c_1 = 3$$

$$c_3 = 1$$

แก้สมการข้อ 2. $c_1 = 3, c_2 = 1, c_3 = 1$

$$\left[\begin{pmatrix} 5, 3, 1 \end{pmatrix} \right]_B = (3, 1, 1)$$

2.2 จงหา $T(5, 3, 1)$

$$T(1, 1, 0) = (1, 2, 3), \quad T(1, 0, 0) = (-1, 0, 2), \quad T(1, 0, 1) = (2, 2, 7)$$

ใช้สูตร 1.1 มาได้

$$(5, 3, 1) = 3(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0) + 1(1, 0, 1)$$

ใช้สูตร 1.1 มาได้

$$T(5, 3, 1) = 3T(1, 1, 0) + 1T(1, 0, 0) + 1T(1, 0, 1)$$

$$= 3(1, 2, 3) + 1(-1, 0, 2) + 1(2, 2, 7)$$

$$= (3, 6, 9) + (-1, 0, 2) + (2, 2, 7)$$

$$= (3-1+2, 6+0+2, 9+2+7)$$

$$= (4, 8, 18)$$

$$\therefore T(5, 3, 1) = (4, 8, 18)$$

SC402101 พีชคณิตเชิงเส้น 1 (Linear Algebra I) 2/2567

ใบงาน 7 : บทที่ 3 การแปลงเชิงเส้น

ข้อที่ 3. ให้ $T : \mathbb{M}_{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 1}$ ที่กำหนดโดย

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ y - 2z \\ 3z \end{bmatrix}$$

3.1 จงหาเมทริกซ์มาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T (หาเมทริกซ์ A ที่ทำให้ $T(u) = Au$)3.2 กำหนดให้ $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานหลักลำดับสำหรับ $\mathbb{M}_{3 \times 1}$ จงหาเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T จากฐานหลักลำดับ B ไปยังฐานหลักลำดับธรรมชาติ E_3

วิธีทำ

3.1. หาเมทริกซ์ A : $AzT \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

๐. ดำเนินการแปลงเวกเตอร์ในมิติ

$$\text{แถวแรก} : 2(2) - 1 - 0 = 4 - 1 = 3$$

$$\text{แถวสอง} : 2 + 2(1) - 0 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{แถวสาม} : 2(2) + 2(1) + 3(0) = 4 + 2 = 6$$

$$\text{ดังนั้น } A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3.2. $B = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

ดำเนินการแปลงเวกเตอร์ในมิติ

$$\text{แถวแรก} : 2(1) - 2 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

$$\text{แถวสอง} : 1 + 2(2) - 1 = 1 + 4 - 1 = 4$$

$$\text{แถวสาม} : 2(1) + 2(2) + 3(1) = 2 + 4 + 3 = 9$$

$$\text{ดังนั้น } B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$