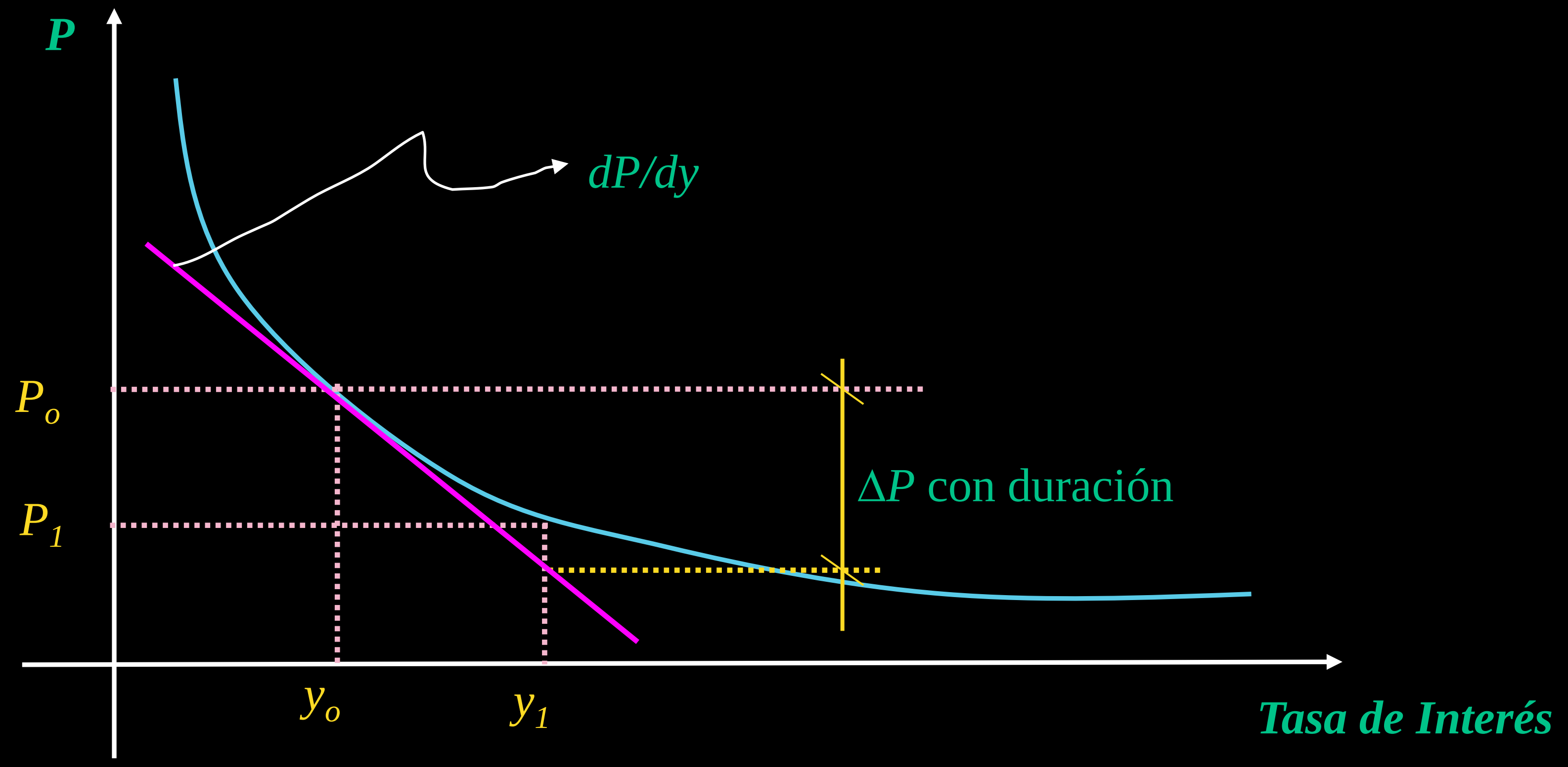
Duración y Convexidad

Precio vs Tasa de Interés

Duración

La pregunta entonces es: ¿Qué tan sensible es el precio a cambios en la tasa de interés?



Duración

Duración

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} \approx \frac{dP}{dy}$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{dP}{dy}\right) \cdot \Delta y$$

DURACIÓN MODIFICADA

$\Delta P = P.D.\ \Delta y +$ ALGO MÁS

Relación Entre Precio y Vida Promedio

- Suponga que tenemos dos Bonos: **Uno** a 5 años que paga cupón del 15% anual cada 6 meses. La tasa de interés es del 12% E.A. para todos los plazos. El **segundo** Bono es exactamente igual, salvo que el vencimiento es en 7 años. ¿Cuánto cambia el precio de cada Bono si la tasa de interés sube 1%?.

Relación Entre Precio y Vida Promedio

Podemos concluir entonces que en la medida en que la vida promedio aumenta, la sensibilidad del precio a la tasa de interés es mayor.

Para Activos:	Para Pasivos:
$\uparrow r \xrightarrow{\text{Larga Vida}}$ Malo	$\uparrow \xrightarrow{\text{Larga Vida}}$ Bueno
$\uparrow r \xrightarrow{\text{Corta Vida}}$ Bueno	$\uparrow \xrightarrow{\text{Corta Vida}}$ Malo

Cálculo de la Vida Promedio

- ¿Cómo calcular la vida promedio?

La Duración de Macaulay es la solución

No es más que la sumatoria del tiempo en que se da cada flujo, ponderados por la contribución de cada flujo en el precio del Bono.

Cálculo de la Vida Promedio

En Años

$$\textbf{Duración de Macaulay} = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k \cdot VP(C_k)}{VP(1) + \sum_{k=1}^{N} VP(C_k)} + \frac{t_N \cdot VP(1)}{VP(1) + \sum_{k=1}^{N} VP(C_k)}$$

$$\textbf{Duración de Macaulay} = \frac{\left(\sum_{K=1}^{N} \frac{t_k (C/m)}{(1 + y/m)^k}\right) + \frac{t_N}{(1 + y/m)^N}}{P}$$

Donde:

	m	=	Número de pagos al Año
	t_k	=	Número de años hasta el *k*-ésimo cupón
	y	=	*Yield* del papel Nominal Vencido
	N	=	Número de cupones al vencimiento
	$C(k)$	=	*k-ésimo* cupón

Cálculo de la Vida Promedio

Ejemplo:

¿Cuál es la Duración de Macaulay de un TES a 5 años que paga un cupón del 10% anual una vez al año?. Suponga que la tasa de interés es del 12% a todos los plazos. El precio del Bono es de 92,79. El TES tiene un valor nominal de 100.

Cálculo de la Vida Promedio

$$\text{Duración Macaulay} = \frac{1.0\left(\frac{10\%}{(1+12\%)^1}\right)}{0.9279} + \frac{2.0\left(\frac{10\%}{(1+12\%)^2}\right)}{0.9279} + \frac{3.0\left(\frac{10\%}{(1+12\%)^3}\right)}{0.9279} + \frac{4.0\left(\frac{10\%}{(1+12\%)^4}\right)}{0.9279} + \frac{5.0\left(\frac{1+10\%}{(1+12\%)^5}\right)}{0.9279}$$

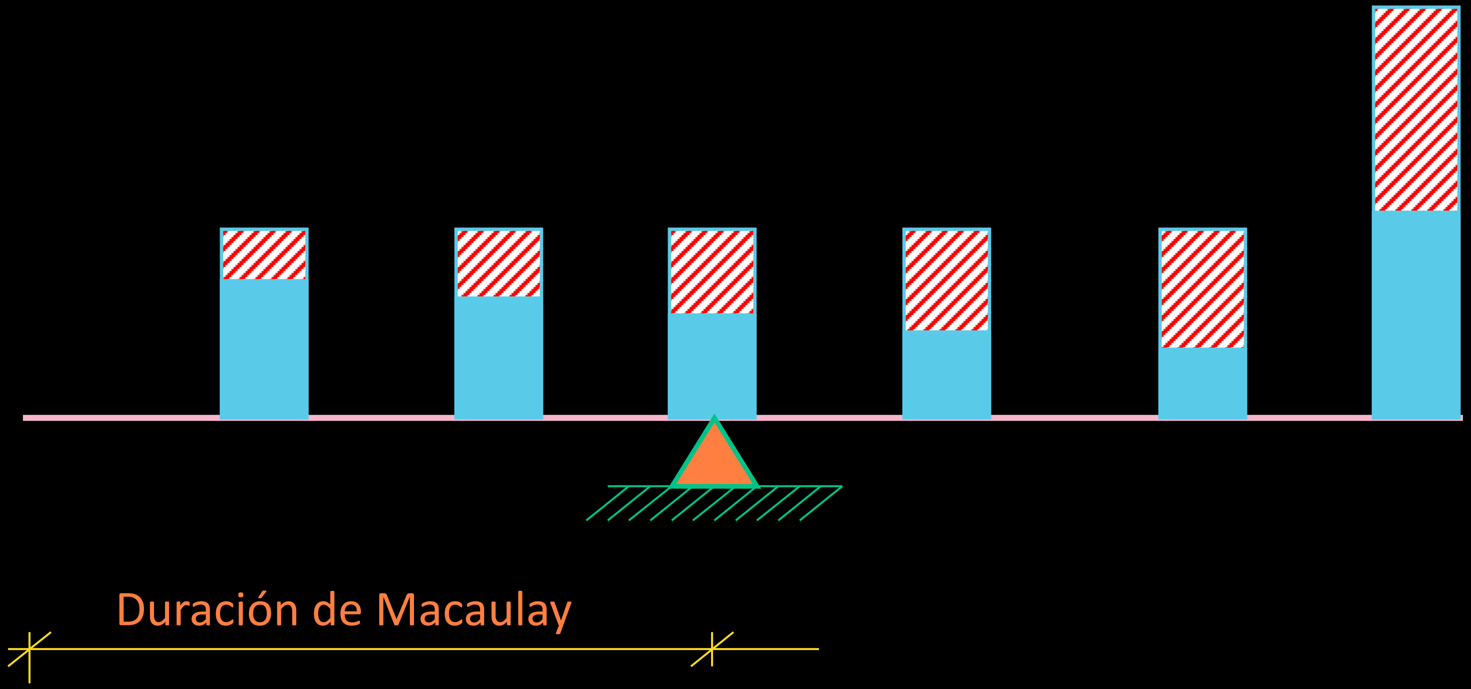
= 4,14 años

¿Cuál es la Duración de Macaulay de un Bono Par?

¿Cuál es la Duración de Macaulay de un Bono cero cupón?

Duración de Macaulay

El concepto de **Duración de Macaulay** es similar al concepto físico de una barra sosteniendo contenedores con agua. La altura de cada contenedor (líneas oblicuas rojas) equivale al valor de cada flujo, mientras que el nivel de agua de cada contenedor equivale al valor presente del flujo. El centro de gravedad corresponde a la **Duración de Macaulay**.



Duración

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{dP}{dy}\right) \cdot \Delta y$$

$$\text{Duración} = -\frac{1}{P} \cdot \left(\frac{dP}{dy}\right)$$

Duración

- La variación en términos de pesos del precio del Bono =
  -(Duración) (Precio) (Cambio en el *Yield*)

- Cambio porcentual en el precio del Bono =
  -(Duración) (Cambio en tasa de interés)

- Esta duración también se conoce como **Duración Modificada (D)**

Duración

UNIVERSIDAD EAFIT

- Para un instrumento financiero que **pague cupones** cada 1/m años, el precio es:

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C/m}{(1+y/m)^k} + \frac{1}{(1+y/m)^N}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{(1/m)(k)(C/m)}{(1+y/m)^{k+1}} + \frac{(1/m)(N)}{(1+y/m)^{N+1}}\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{1+y/m}\right)\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{t_k(C/m)}{(1+y/m)^k} + \frac{t_N}{(1+y/m)^N}\right]$$

Duración

Por lo tanto:

➔ Duración = $-\left(\frac{1}{1+y/m}\right)$ (Duración de Macaulay)

➔ Duración en Pesos = **(Duración) (Precio)**

➔ Duración en Pesos = $\frac{dP}{dy}$

Duración

Ejemplo: Suponga un Bono Par con 10 años a la madurez y un cupón del 13% pagadero anualmente

DURACIÓN = 5,43 Años

Para un incremento en el *Yield* de 0,5%:

$\Delta y = 0{,}005$

$\boldsymbol{\Delta P \approx -5{,}43\,(100)\,(0{,}005) \approx -2{,}7150}$

$P + \Delta P = 100 - 2{,}7150 = 97{,}2850$

El precio de un bono a 10 años, con un cupón anual del 13% y un *Yield* del 13,50% será de 97,34

La diferencia entre el valor real y el cambio pronosticado por la duración es de 97,34 – 97,2850 = 0,055*pb* = 0,056% del precio real

Duración

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la Duración de una Perpetuidad Constante que paga un cupón anual de C, si la tasa de interés es i.?

2. ¿Cuál es la duración de un Bono Cero Cupón a N años si la tasa de interés es y ?

Ejercicio

- Suponga que el Ministerio de Hacienda está planeando emitir un TES a 10 años, es decir, con vencimiento el 5 de noviembre de 2032. El cupón es del 10%. Utilice los betas vigentes hoy.

1. ¿Cuánto esperaría Usted pagar por este papel?.
2. ¿Cuál sería la TIR esperada para ese papel?
3. ¿A qué precio espera Usted que se cotice un Bono cero cupón a 3 años de plazo que tiene un valor facial de $100?
4. ¿Cuál es la Duración y la Duración de Macaulay de ese papel?

Precios de Bonos vs Estimación Basada en Duración

UNIVERSIDAD EAFIT

SUPONGA UN BONO PAR A 10 AÑOS CON CUPÓN ANUAL.

YIELD = 13%.

DURACIÓN = 5,43 AÑOS

YIELD (%)	PRECIO DEL BONO	ESTIMACIÓN BASADA EN DURACIÓN	DIFERENCIA
9,00	125,67	121,70	3,97
9,50	121,98	118,99	2,98
10,00	118,43	116,28	2,16
10,50	115,04	113,57	1,47
11,00	111,78	110,85	0,93

Precios de Bonos vs Estimación Basada en Duración

UNIVERSIDAD EAFIT

SUPONGA UN BONO PAR A 10 AÑOS CON CUPÓN ANUAL.

YIELD = 13%.

DURACIÓN = 5,43 AÑOS

YIELD (%)	**PRECIO DEL BONO**	**ESTIMACIÓN BASADA EN DURACIÓN**	**DIFERENCIA**
11,50	108,65	108,14	0,51
12,00	105,65	105,43	0,22
12,50	102,77	102,71	0,06
13,00	100,00	100,00	0,00
13,50	97,34	97,29	0,05

Precios de Bonos vs Estimación Basada en Duración

SUPONGA UN BONO PAR A 10 AÑOS CON CUPÓN ANUAL.

YIELD = 13%.

DURACIÓN = 5,43 AÑOS

YIELD (%)	PRECIO DEL BONO	ESTIMACIÓN BASADA EN DURACIÓN	DIFERENCIA
14,00	94,78	94,57	0,21
14,50	92,33	91,86	0,47
15,00	89,96	89,15	0,81

Duración Para Varios Cupones y Madurez de Bonos con Cupón Anual

YIELD=13%

CUPÓN	AÑOS A LA MADUREZ			
	3	5	7	10
0,00	2,66	4,43	6,20	8,85
8,00	2,45	3,75	4,80	5,96
9,00	2,43	3,69	4,70	5,82
10,00	2,41	3,64	4,62	5,70
11,00	2,39	3,60	4,55	5,60
12,00	2,38	3,56	4,48	5,51
13,00	2,36	3,52	4,42	5,43
14,00	2,35	3,48	4,37	5,35
15,00	2,33	3,45	4,32	5,29

Duración Para Varios Cupones y Madurez de Bonos con Cupón Anual

CUPÓN=13%

YIELD (%)	AÑOS A LA MADUREZ 3	5	7	10
0,00	2,72	4,21	5,57	7,46
8,00	2,49	3,77	4,84	6,16
9,00	2,46	3,72	4,75	6,01
10,00	2,44	3,67	4,67	5,86
11,00	2,41	3,62	4,59	5,71
12,00	2,39	3,57	4,50	5,57
13,00	2,36	3,52	4,42	5,43
14,00	2,34	3,47	4,34	5,29
15,00	2,31	3,42	4,27	5,15

Ejercicio

- Suponga que sus activos están compuestos por una inversión de \$100 millones a 5 años que paga un cupón del 10% anual cada 6 meses. Sus pasivos suman \$80 millones y están compuestos por unos pagos de intereses del 10% anual, pagaderos cada 6 meses durante 10 años.

- Usted quiere quedar inmune a cambios en la tasa de interés. En el mercado es posible conseguir un Bono que paga un cupón fijo anual del 12% cada 6 meses durante 5 años.

    - Las tasas de interés son del 10% semestre vencido a todos los plazos.

Pregunta:

¿Cuánto deberá invertir en dicho Bono para obtener la inmunidad?

Duración de Notas Flotantes

Supongamos un bono que paga cupón *m* veces al año. Llamemos *r* la tasa de interés de referencia. Después de que la tasa para el primer cupón se ha fijado a $\bar{r}$

$$P = \frac{\bar{r}/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=2}^{N} \frac{(r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + 1$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{m}\left[\frac{1+\frac{\bar{r}}{m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^2}\right]$$

Duración de Notas Flotantes

Si inicialmente $\bar{r} = r$, entonces:

$$\frac{-\left(\frac{dP}{dr}\right)}{P} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1+\frac{r}{m}}\right)$$

La duración inicial de una nota flotante con 1/*m* años al próximo reprecio de la tasa de interés =

Duración de un cero cupón a 1/ *m* años de plazo.

Por ejemplo, si es un bono que reprecia cada 6 meses:

Duración Inicial = Duración de un Cero Cupón a 6 meses

Ejercicio de Duración

- ¿Cuál es la duración de una Nota Flotante a 2 años que paga DTF cada 3 meses? Actualmente la DTF T.V es del 8%.

Duración de Notas Flotantes

Ejercicio:

Suponga un <u>Bono Flotante Inverso</u> que funciona de la siguiente manera:

Cada 6 meses durante la vida del Bono, la tasa del cupón que se va a pagar dentro de 6 meses es igual a 12% menos la tasa de interés de referencia. Por ejemplo, si la tasa de interés de referencia dentro de un año es 8%, entonces el cupón por cada peso de valor facial que se pagará dentro de un año y medio será:

$(0,12 - 0,08) / 2 = 0,02$

Normalmente el cupón se quedará en cero si la tasa de interés se pone por encima del 12%, pero para este caso supongamos que el pago del cupón puede ser negativo. La tasa de interés es del 6%. El Bono tiene una madurez de 10 años y un valor facial de $100.

Duración de Notas Flotantes

UNIVERSIDAD EAFIT

Ejercicio:

Los precios y duraciones de de 3 Bonos con madurez de 10 años y que pagan cupón fijo, cada uno con un valor facial de $100, son las siguientes:

Cupón	Precio	Duración
12,00%	144,63	6,5697
6,00%	100,00	7,4387
0,00%	55,37	9,7087

Los Bonos tienen un precio equivalente al valor presente de los flujos de caja, descontados a la tasa de interés de referencia.

1. ¿Cuál es el valor actual del Bono flotante inverso?
2. ¿Es la duración del flotante Inverso mayor o menor que la duración del Bono cero cupón a 10 años?

Swap de Tasa de Interés

- Swap de tasa de interés para el manejo de duración.

1. **En la revista inglesa "*The Economist*" aparece el siguiente comentario en un artículo titulado "*the temptations of yield*" (las tentaciones del *yield*):**

"…Inversionistas institucionales también han estado en una espiral de compras. Los pasivos de los fondos de pensiones y compañías aseguradoras generalmente son muy altos y a tasas de interés fijas. En la medida en que las tasas de interés caen, el valor presente de estos pasivos sube.

pregunta →

Swap de Tasa de Interés

- ¿Cree Usted que si estos inversionistas institucionales entraran en un *swap* de tasa de interés por medio del cual recibieran tasa de interés fija y entregaran tasa de interés variable, lograrían disminuir la sensibilidad de sus pasivos a la tasa de interés? ¿Por qué?

Swap de Tasa de Interés

- ¿Cuál es la duración de un *Swap* de tasa de interés a 3 años de plazo en el cual Usted paga tasa fija anual del 13% cada 6 meses y recibe a cambio DTF?.

  Suponga que la DTF anual semestre vencido actualmente es del 11% y que los flujos en tasa variable se descuentan a la DTF mientras que los flujos que están a tasa fija se descuentan al 12% semestre vencido a todos los plazos.

Definiciones Estándar de Duración y *Yield* Para un Portafolio de Bonos

1 Duración del Portafolio = Duración de los Bonos ponderados por el valor de cada Bono

2 *Yield* del Portafolio = *Yield-to-Maturity* de los flujos de caja de todos los Bonos en el Portafolio

3 Los dos puntos siguientes serán exactamente lo mismo únicamente cuando la curva de rendimientos (*Yield*) es plana:

a. Duración calculada como promedio ponderado
b. Duración calculada directamente con los flujos de caja combinados.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos un portafolio compuesto por 2 Bonos:

Definiciones Estándar de Duración y *Yield* Para un Portafolio de Bonos

B_1 = 101,3825 *Yield* = 8,50% Cupón Anual = 10%

Plazo a la Madurez = 1 año

B_2 = 79,6169 *Yield* = 10,50% Cupón Anual = 4%

Plazo a la Madurez = 4 años

$B_1 + B_2 = 181$

Definiciones Estándar de Duración y *Yield* Para un Portafolio de Bonos

Duración del Bono 1 = 0,922 Años. **Madurez =** 1 año

Duración del Bono 2 = 3,388 Años. **Madurez =** 4 años

Duración calculada como promedio ponderado =

(0,5510) (0,922) + (0,4490) (3,388) = 2,0292 Años

Flujos de Caja del Portafolio:

1.0 Años	2.0 Años	3.0 Años	4.0 Años
114	4	4	104

***Yield* con flujos de caja combinados:**

$$181 = \frac{114}{(1+y)} + \frac{4}{(1+y)^2} + \frac{4}{(1+y)^3} + \frac{104}{(1+y)^4}$$

***Yield* = 9,99%**

Definiciones Estándar de Duración y *Yield* Para un Portafolio de Bonos

Duración de los flujos de caja combinados:

$$\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{(1.0)\ 114}{(1+y)}+\frac{(2.0)\ 4}{(1+y)^2}+\frac{(3.0)\ 4}{(1+y)^3}+\frac{(4.0)\ 104}{(1+y)^4}\right]/181$$

$$= \ 2{,}0265$$

Del promedio ponderado, **Duración = 2,0292**

¿Cómo Conseguir Una Duración Objetivo?

UNIVERSIDAD EAFIT

YIELDS : 13% para todos los plazos

OBJETIVO: Bono Par de 5 Años

Componentes del Portafolio:

BONO	PRECIO	DURACIÓN
1 Año Cero Cupón	88,4956	0,8850
Bono Par a 10 Años	100,00	5,4262

x = Número de Cero Cupón a un año

y = Número de Bonos Par a 10 años

¿Cómo Conseguir Una Duración Objetivo?

Escoja “x” y “y” de tal manera que:

1 Valor del Portafolio = Valor del Objetivo

$$88{,}4956\,x + 100\,y = 100$$

2 La Duración en pesos del portafolio = La Duración en pesos del Objetivo:

$$0{,}8850\,(88{,}4956)\,x + 5{,}4262\,(100)\,y = 3{,}5172\,(100)$$

Solución:

$x = 0{,}4750$ $y = 0{,}5796$

Ejercicio Portafolio Ajustado a Duración Objetivo

- Uno de los clientes de su firma le ha pedido que construya un portafolio ajustado por duración. El objetivo es un Bono par a 20 años. El portafolio debe contener sólo dos tipos de papeles: el primero es un Bono par a 30 años; el otro es un contrato *forward* a un año sobre un Bono par de 10 años. El precio *forward* para este contrato es de $100. Todos los Bonos pagan cupón cada 6 meses y tienen un valor facial de $100. La curva cero cupón vigente está plana en el 8%, en términos semi-anual compuesto. Las duraciones de los Bonos son 6,7951 años para el de 10 años, 9,8964 años para el de 20 años y 11,3117 años para el de 30 años. **¿Qué recomendación le daría a su cliente?**

Ejercicio Portafolio Ajustado a Duración Objetivo

UNIVERSIDAD EAFIT

El valor presente del *Forward* es de 0 y por lo tanto la primera ecuación sería:

100 X + 0 Y = 100 Es decir, X = 1

El siguiente paso es crear la ecuación para ajustar las duraciones:

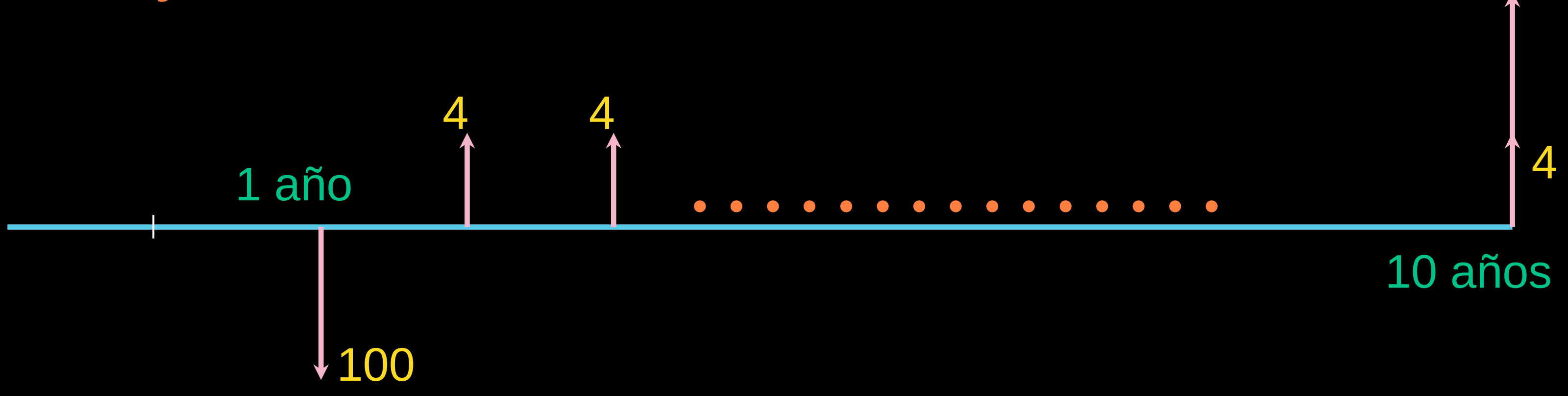
11,3117 (100) X + (Duración *Forward*) Y = 9,8964 (100)

¿Cómo obtener la Duración del *Forward*?

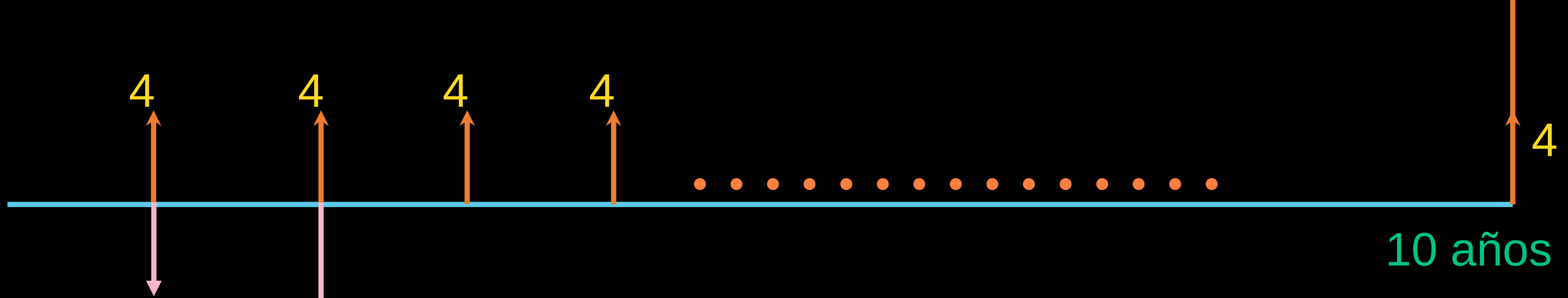
Determinemos la composición de los flujos del *Forward*, tal como se muestra en el siguiente *slide*.

Ejercicio Portafolio Ajustado a Duración Objetivo

Los flujos del *Forward* son:



Y los del Bono:



Para igualar los flujos del *forward*:

1. Vende 4 unidades de Cero Cupón a 6 meses
2. Vende 104 unidades de Cero Cupón a 1 año

Ejercicio – Portafolio Ajustado a Duración Objetivo

Por lo tanto, **Duración *Forward*** =

$6{,}7951\ (100) – 0{,}4808\mathbf{[}(0{,}9615)\ (4)\mathbf{]} – 0{,}9615\mathbf{[}(0{,}9246)\ (104)\mathbf{]} \quad = \quad 585{,}2045$

Por lo tanto la ecuación para duraciones sería:

$11{,}3117\ (100)\ X + 585{,}2045\ Y \ = \ 9{,}8964\ (100)$

Ya sabíamos que $X = 1$

Con esta ecuación determinamos que $Y = – 0{,}2418$

Ejercicio

Usted es un *trader* al que le atrae la compra de un bono a 5 años por un valor nominal de $10.000 millones, pagando cupones anuales del 10%. La TIR de compra es del 11%. Usted quiere tener un *stop-loss* para esta inversión por $300 millones. **¿A qué nivel deberá subir la tasa de interés para llegar a su *stop-loss* y liquidar la inversión?.**

Duración Efectiva

Es otra forma de medir la **duración**.

Se define como:

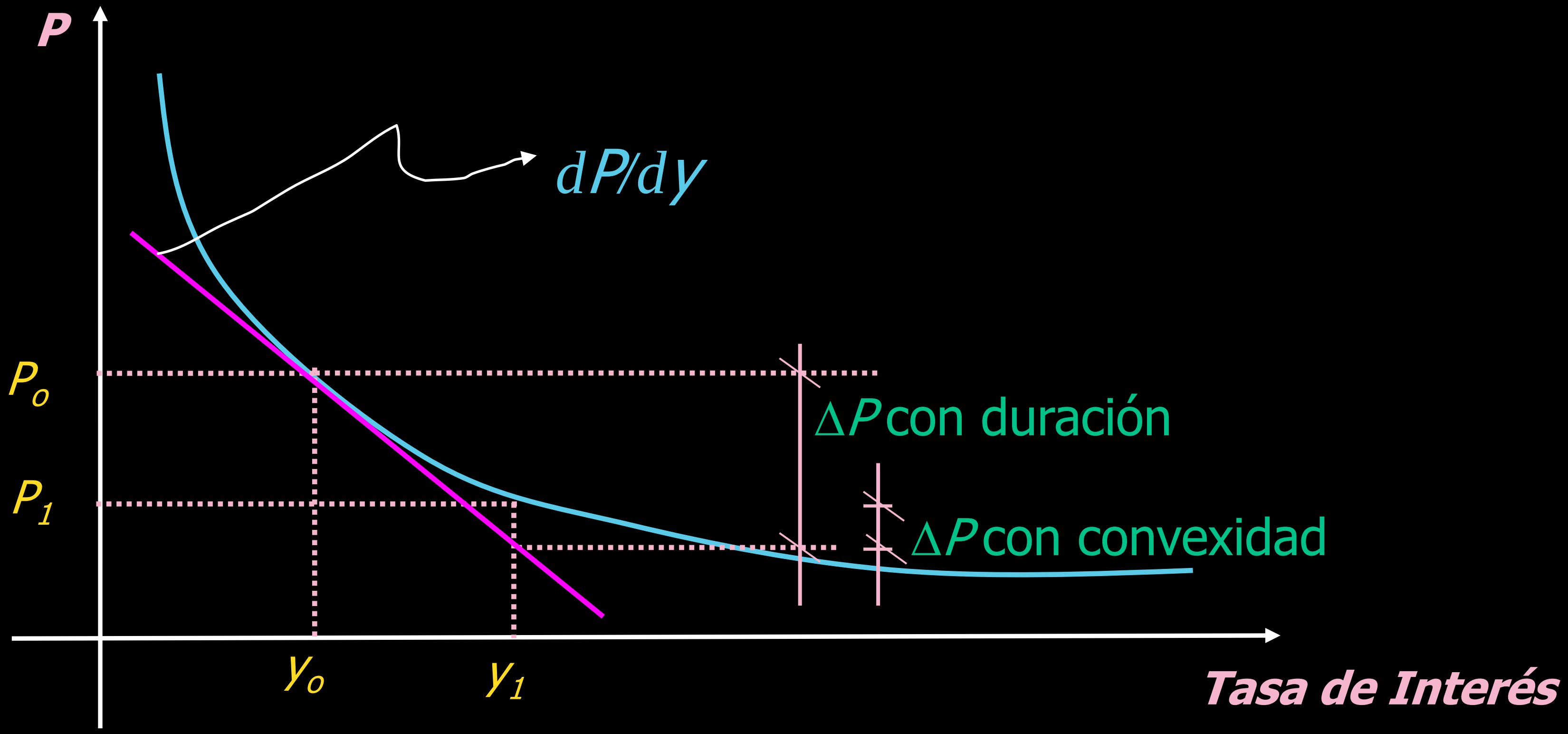
$$\frac{\mathbf{P_{-} - P_{+}}}{\mathbf{P_{o}(y_{+} - y_{-})}}$$

Donde:

P_{-}	=	Precio si el *yield* cae en Δy
P_{+}	=	Precio si el *yield* se incrementa en Δy
P_{o}	=	Precio Inicial
y	=	Inicial *Yield*
y_{+}	=	$y + \Delta y$
y_{-}	=	$y - \Delta y$

CONVEXIDAD

Convexidad



P
dP/dy
P_o
P_1
ΔP con duración
ΔP con convexidad
y_o
y_1
Tasa de Interés

Convexidad

$\Delta P = -P.D.\ \Delta y + \text{ALGO MÁS}$

$$\text{ALGO MÁS} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \mathrm{C} \cdot \Delta \mathrm{y}^2$$

Donde **C** es la **Convexidad**, medida como:

$$\mathrm{C} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{P}}{\mathrm{dy}^2}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{P}}$$

Convexidad

Recordemos que:

$$\frac{dP}{dy} = -\left(\frac{1}{1+y/m}\right)\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{t_k(C/m)}{(1+y/m)^k} + \frac{t_N}{(1+y/m)^N}\right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{1}{m^2}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)(C/m)}{(1+y/m)^{k+2}} + \frac{N(N+1)}{(1+y/m)^{N+2}}\right]$$

Convexidad

Análisis de la expresión:

$$\Delta P = P.D.\ \Delta y + \tfrac{1}{2}.P.C.\ \Delta y^2$$

Precio de Bonos vs. Estimación Basada en Convexidad

Suponga un Bono Par a 10 años con un *Yield* = 13%

DURACIÓN = 5,43 Años **CONVEXIDAD =** 43,37

YIELD	PRECIO DEL BONO	ESTIMACIÓN BASADA EN CONVEXIDAD	DIFERENCIA	DIFERENCIA CALCULADA CON DURACIÓN
9,00	125,67	125,17	0,50	3,97
9,50	121,98	121,65	0,33	2,98
10,00	118,43	118,23	0,20	2,16
10,50	115,04	114,92	0,12	1,47
11,00	111,78	111,72	0,06	0,93
11,50	108,65	108,63	0,02	0,51
12,00	105,65	105,64	0,01	0,22
12,50	102,77	102,77	0,00	0,06

Precio de Bonos vs. Estimación Basada en Convexidad

Suponga un Bono Par a 10 años con un *Yield* = 13%

DURACIÓN = 5,43 Años   **CONVEXIDAD =** 43,37

YIELD	PRECIO DEL BONO	ESTIMACIÓN BASADA EN CONVEXIDAD	DIFERENCIA	DIFERENCIA CALCULADA CON DURACIÓN
13,00	100,00	100,00	0,00	0,00
13,50	97,34	97,34	0,00	0,05
14,00	94,78	94,79	-0,01	0,21
14,50	92,33	92,35	-0,02	0,47
15,00	89,96	90,01	-0,05	0,81

Convexidad Para Varios *Yields* y Madurez de Bonos con Cupón Anual

CUPÓN=13%	AÑOS A LA MADUREZ			
YIELD	3	5	7	10
0,00	10,50	23,70	40,75	72,70
8,00	8,87	19,39	32,02	53,21
9,00	8,69	18,92	31,07	51,10
10,00	8,51	18,46	30,15	49,07
11,00	8,34	18,02	29,25	47,10
12,00	8,18	17,58	28,38	45,21
13,00	8,02	17,16	27,53	43,37
14,00	7,86	16,75	26,71	41,61
15,00	7,71	16,36	25,91	39,90

Convexidad Para Varios *Yields* y Madurez de Bonos con Cupón Anual

YIELD=13%

CUPÓN	AÑOS A LA MADUREZ			
	3	5	7	10
0,00	9,40	23,49	43,86	86,15
8,00	8,44	18,77	30,96	50,02
9,00	8,34	18,39	30,12	48,33
10,00	8,26	18,05	29,38	46,85
11,00	8,17	17,73	28,70	45,55
12,00	8,09	17,44	28,09	44,40
13,00	8,02	17,16	27,53	43,37
14,00	7,95	16,91	27,02	42,45
15,00	7,88	16,67	26,55	41,62