Curso Matemáticas para finanzas con aplicaciones

Prof. María Gulnara Baldoquin de la Peña
mbaldoqu@eafit.edu.co

Observaciones importantes en SEL indeterminados en la práctica

¿Qué variable (o variables, si es más de una) escoger libre?
¿Puede manipular infinitas soluciones en un problema real?

Supongamos que el SEL visto responde a un conjunto de restricciones donde x,y,z es la cantidad de dinero a invertir en 3 tipos de acciones

La variable libre debe ser aquella acción que sea más significativa para uno, las otras dependerían del valor a darle.

Los valores a darle a la variable libre son razonables respecto a nuestros intereses, por ejemplo, no deben ser negativos, ni que sobrepasen un valor de presupuesto que se tiene.

¿Qué significa que en la matriz escalonada aparezcan filas totalmente nulas?

La cantidad de filas nulas indica la cantidad de ecuaciones ‘redundantes’ en el SEL, o sea, que si desde el principio se hubieran eliminado teníamos un SEL equivalente más sencillo.

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 2z &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La última fila nula indica que la última ecuación del SEL era innecesaria, en efecto si se suman las dos primeras da la tercera, pero en ocasiones es muy difícil ver a simple vista ecuaciones redundantes.

Ejemplo de un SEL incompatible

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 0 \\ 3x - y \quad\quad &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(A|b) = 3$ $r(A) = 2$ $r(A|b) \neq r(A)$ SEL incompatible

No tiene sentido intentar resolverlo!!!

Solución de SEL con MATLAB

Veremos por qué la teoría dada es importante para resolver algunos SEL con un software, entre otras cosas porque hay comandos más adecuados para SEL determinados, y otros para indeterminados.

Para calcular el rango de una matriz A: **rank**(A)

Para resolver un SEL determinado AX=B: X=A****B
Otra opción rref(A| B)

Resolvamos con MATLAB el SEL determinado visto

$$
\begin{aligned}
3x-2y+3z&=2\\
4x-3y+z&=-1\\
x+5y-6z&=5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x-2y+3z&=2\\
4x-3y+z&=-1\\
x+5y-6z&=5
\end{aligned}
$$

Única solución del SEL:

$x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

1. Introducir la matriz A, la matriz ampliada (A| B) y B

```
>>A=[3 -2 3;4 -3 1;1 5 -6];
>>B=[2;-1;5];
>>AB=[A  B]
AB =
3  -2  3  2
4  -3  1 -1
1   5  -6 5
```

2. Calcular rangos de AB y de A

```
>>rA=rank(A)
rA=3
>>rAB=rank(AB)
rAB=3
```

3. Resolver el SEL

```
>>X=A\B
X =
1
2
1
```

$$3x - 2y + 3z = 2$$
$$4x - 3y + z = -1$$
$$x + 5y - 6z = 5$$

Usando comando rref

Única solución del SEL: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

1. Introducir la matriz A, la matriz ampliada (A| B) y B

```
>>A=[3 -2 3;4 -3 1;1 5 -6];
>>B=[2;-1;5];
>>AB=[A B]
AB =
3  -2  3  2
4  -3  1 -1
1   5  -6 5
```

2. Calcular rangos de AB y de A

```
>>rA=rank(A)
rA=3
>>rAB=rank(AB)
rAB=3
```

3. Resolver el SEL

```
M=rref(AB)
M =
1 0 0 1
0 1 0 2
0 0 1 1
```

M es la matriz ampliada escalonada, donde lo que corresponde a A se convierte en la matriz idéntica, por lo que

x = 1 (F1)

y = 2 (F2)

z = 1 (F3)

Para resolver un SEL indeterminado: comando **solve o rref**

Resolvamos con MATLAB el SEL indeterminado visto

$$x - y + 3z = 4$$
$$2x - y - z = 6$$
$$3x - 2y + 2z = 10$$

Solución general del SEL:

$x=2+4z$, $y = -2 +7z$, $z \in R$

¿Qué hubiera pasado si usamos X=A\B?

```
>>A=[1 -1 3;2 -1 -1;3 -2 2];
>>B=[4;6;10];
>>AB=[A B];
>>rA=rank(A)
rA=2
>>rAB=rank(AB)
rAB=2
```

Ya sabemos que es indeterminado (ambos rangos iguales a 2 y una variable libre)

```
>>X=A\B
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled. Results may be inaccurate. RCOND = 4.625929e-18.
X =
-2.0000
-9.0000
-1.0000
```

NO es el apropiado, y da justo una única solución, la que quiere, en este caso cuando z = -1

RCOND da información sobre la matriz, que está bien condicionada si es 1 o cercano a 1, aquí da 4.625929×10^{-18} que es prácticamente cero, o sea, correr el decimal a la izquierda 18 cifras.

Para resolver un SEL indeterminado (ya vimos que lo es): comando **rref**

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

Solución general del SEL:

$x=2+4z$, $y = -2 +7z$, $z \in R$

AB=[1 -1 3 4;2 -1 -1 6;3 -2 2 10];
M=rref(AB)
M =

1	0	-4	2
0	1	-7	-2
0	0	0	0

Observar que en M las primeras 3 columnas no da la matriz idéntica pues no hay solución única.

De la matriz M se obtiene que:

x-4z = 2

y-7z=-2

Pasando el término z en ambas ecuaciones al segundo miembro:

x = 2+4z

y =-2 + 7z

Para resolver un SEL indeterminado (ya vimos que lo es): comando **solve**

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

Solución general del SEL:

$x=2+4z,\ y = -2 +7z\ ,\ z \in \mathbb{R}$

```
>> syms x y z
>>[x y]=solve(x-y+3*z==4,2*x-y-z==6,3*x-2*y+2*z==10,[x y])
```

Con el comando syms se declaran las 3 variables como variables simbólicas.

Dentro de solve cada ecuación se escribe explícita, pero con un doble signo de igualdad, separadas por coma. Al escribir [x,y] como hay una variable libre, se asume que es z. Respuesta de MATLAB:

```
x =
4*z + 2
y =
7*z - 2
```

¿Qué pasa si se intenta resolver con MATLAB un SEL incompatible sin averiguar previamente que no tiene solución?

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 0 \\ 3x - y \quad &= 2 \end{aligned}$$

```
>> A=[1 1 -1;2 -2 1;3 -1 0];
>> B=[1;0;2];,AB=[A B];
>> X=A\B
```

```
Warning: Matrix is close to singular or
badly scaled. Results may be inaccurate.
RCOND =  9.251859e-18.
 X =
1.0e+15 *
2.2518
6.7554
9.0072
```

Da una respuesta ‘no factible’, cada valor de variable se multiplica por 10^{15}, o sea, sería:

x = 2251800000000000
y = 6755400000000000
z = 9007200000000000

Por ejemplo, a pesar de números muy grandes, a simple vista puede verse que 3x – y = 0, no 2.

Competencias fundamentales a adquirir de esta unidad, en particular con SEL

1. Un problema verbal, modelarlo matemáticamente, usando el Algebra de Matrices (es un producto de matrices, un SEL, etc.).

2. Usar un comando adecuado de un software (en nuestro caso MATLAB) y resolverlo matemáticamente.

3. Interpretar la solución o soluciones obtenidas, dando respuesta verbal al problema original verbal.

Resolviendo uno de los problemas planteados de motivación

Una persona quiere invertir un total de 20,000 USD en tres inversiones al 6, 8 y 10 % de interés. Quiere que el ingreso anual total sea de 1624 USD y por otras razones que valora el ingreso de la inversión del 10% sea de dos veces el ingreso de la inversión al 6 %. ¿De cuánto debe ser cada inversión?

¿De qué tipo es el problema matemáticamente?

SEL

¿Variables? Son cuantitativas

x: USD invertidos al 6% de interés
y: USD invertidos al 8% de interés
z: USD invertidos al 10% de interés

NO son variables:
x: 6% de interés
y: 8% de interés
z: 10% de interés

Una persona quiere invertir un total de 20,000 USD en tres inversiones al 6, 8 y 10 % de interés. Quiere que el interés total obtenido sea de 1624 USD y por otras razones que valora el ingreso de la inversión del 10% sea de dos veces el ingreso de la inversión al 6 %. ¿De cuánto debe ser cada inversión?

Variables:

x: USD inv. al 6% de interés, y: USD inv. al 8% de interés, z: USD inv. al 10% de interés

¿Primera ecuación?

Quiere invertir un total de 20,000 USD

$x + y + z = 20{,}000$

¿Segunda ecuación?

El interés total obtenido sea de 1624 USD

$0.06x + 0.08y + 0.1z = 1624$

¿Otra ecuación equivalente?

$1.06x + 1.08y + 1.1z = 21624$

¿Tercera ecuación?

El ingreso de la inversión del 10% sea de dos veces el ingreso de la inversión al 6 %.

$0.1z = 2(0.06x) = 0.12x$

SEL obtenido

$$x + y + z = 20{,}000$$
$$0.06x + 0.08y + 0.1z = 1624$$
$$0.1z = 2(0.06x) = 0.12x$$

Organizándolo para que cada variable esté en una columna de la matriz del sistema

$$x + y + z = 20{,}000$$
$$0.06x + 0.08y + 0.1z = 1624$$
$$0.12x - 0.1z = 0$$

Usando el MATLAB:

```
>> A=[1 1 1; 0.06 0.08 0.1; 0.12 0 -0.1];
>> B=[20000;1624;0];,AB=[A B];
>> r1=rank(A)
r1 = 3
>> r2=rank(AB)
r2 = 3
```

Como r1 = r2 es compatible, y como el rango es = número de variables hay solución única.

```
X=A\B
X =
1.0e+03 *
6.0000
6.8000
7.2000
```

x = 6000
y = 6800
z = 7200

R/ Se debe invertir 6000 USD al 6%, 6800 USD al 8% y 7200 USD al 10%

¿Qué faltó realmente en la modelación y por qué no se tuvo en cuenta?

$x + y + z = 20{,}000$

$0.06x + 0.08y + 0.1z = 1624$ Que las variables x,y,z sean ≥ 0

$0.1z = 2(0.06x) = 0.12x$

Adicionar esas restricciones de desigualdad modifica el modelo, más complejo, no sería exactamente un SEL.

En este caso no fue necesario, pues la única solución cumple que todas las variables son no negativas.

Si el SEL tuviera infinitas soluciones, se daba valores a variables independientes tal que el valor de todas las variables obtenidas fueran no negativas.

Funciones matemáticas

Una **función** (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio (los que forman el recorrido, también llamado rango o ámbito).

Ejemplos:

1. Precio de un producto (p) en función de la oferta (q):

p(q)=3/2q +1

2. Precio de un producto (p) en función de la demanda (q):

p(q)=10-2q

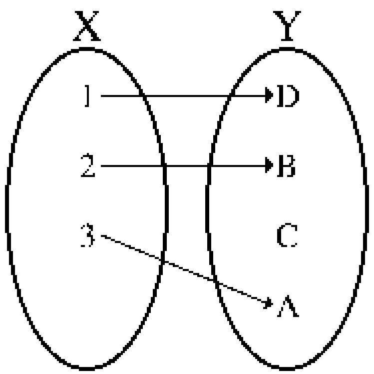
3. El valor de los activos de una empresa es una función del tiempo. Aquí el dominio es el conjunto de valores del tiempo, y el codominio es el conjunto de valores de los activos (digamos en dólares).

Para que una relación de un conjunto A en otro B sea función, debe cumplir dos condiciones:

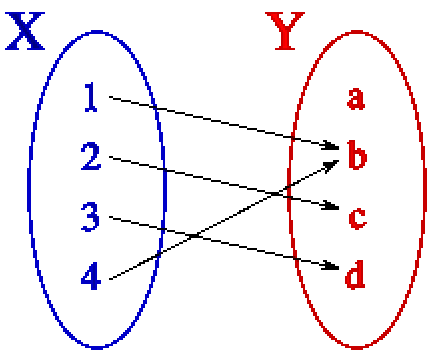
1. Todo elemento del conjunto de partida A debe tener una imagen
2. La imagen de cada elemento x E A debe ser única. Es decir, ningún elemento del dominio puede tener más de una imagen.

Ejemplos:

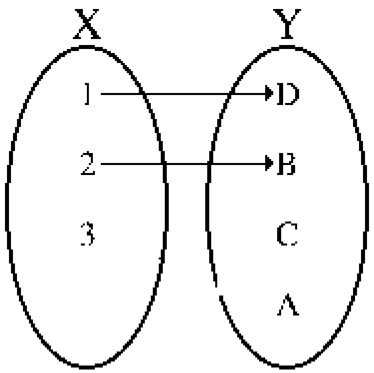
Suponer que X: Conjuntos de productos Y: Precios $f:X \rightarrow Y$



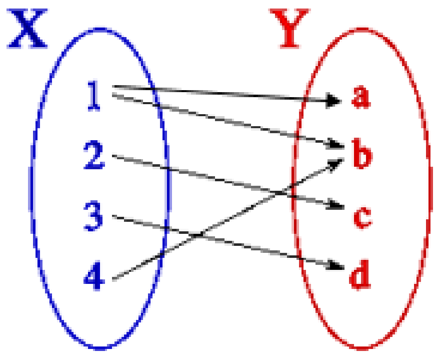
Función



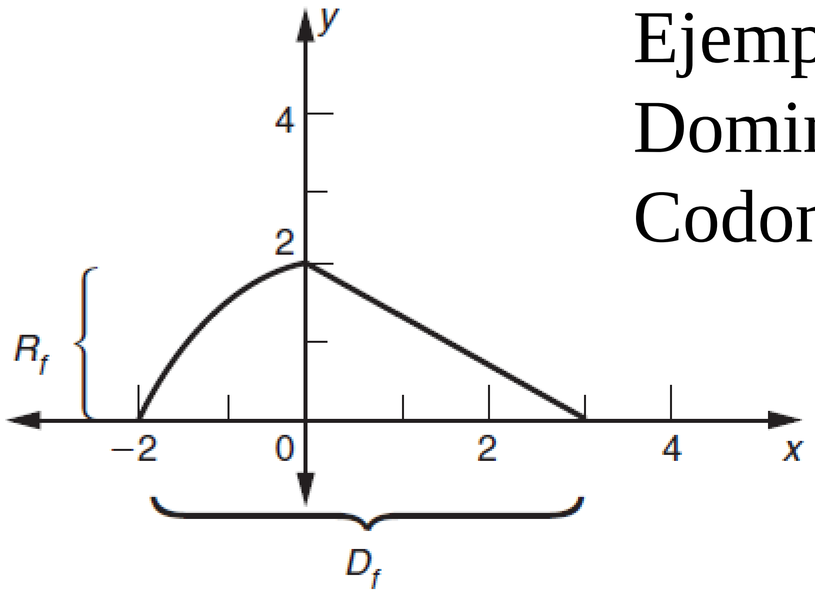
Función



No Función



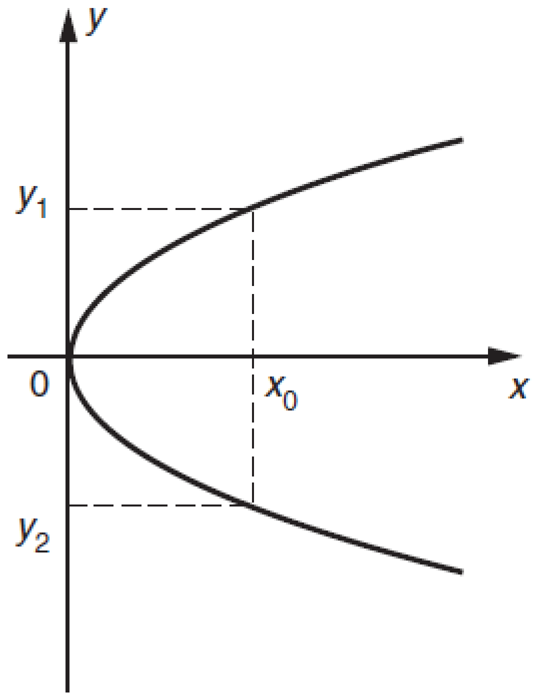
No Función



Ejemplo de función y=f(x)

Dominio: [-2,3] (Valores que toma la variable x)

Codominio: [0,2] (Valores que toma f(x)

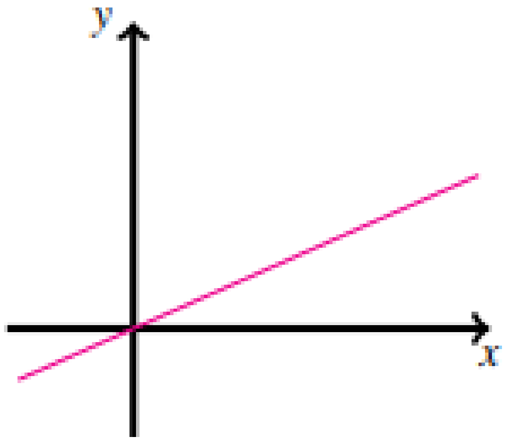


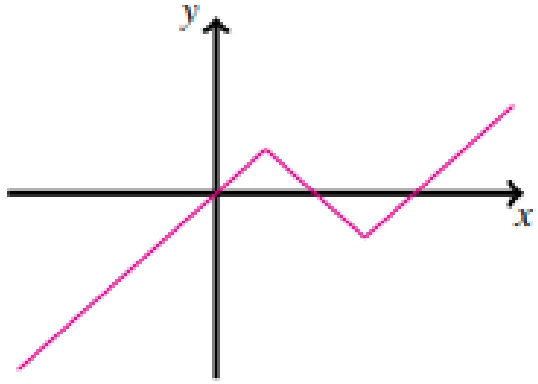
Ejemplo de NO función.

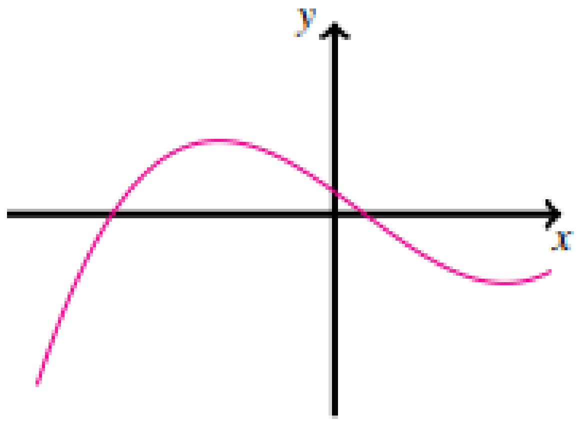
Por ejemplo, x_0 tiene 2 imágenes.

Se reconoce si alguna recta paralela al eje y corta a la curva en más de un punto.

Funciones continuas

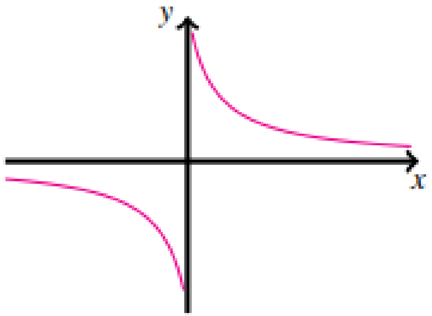


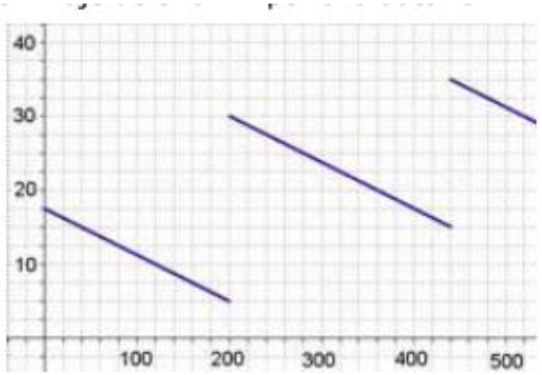




Puede trazar su gráfico 'sin levantar el lápiz del papel'.
Funciones continuas son las que básicamente aparecen en Finanzas

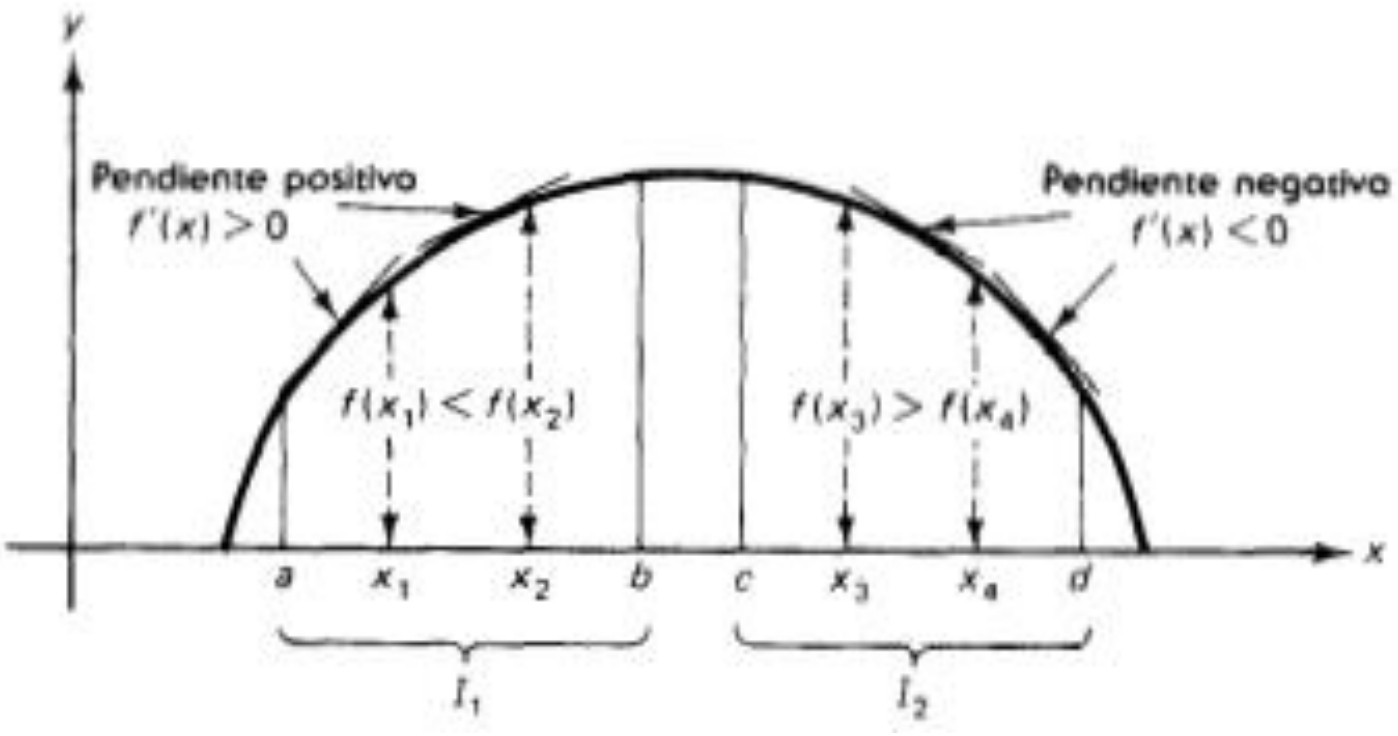
Funciones discontinuas



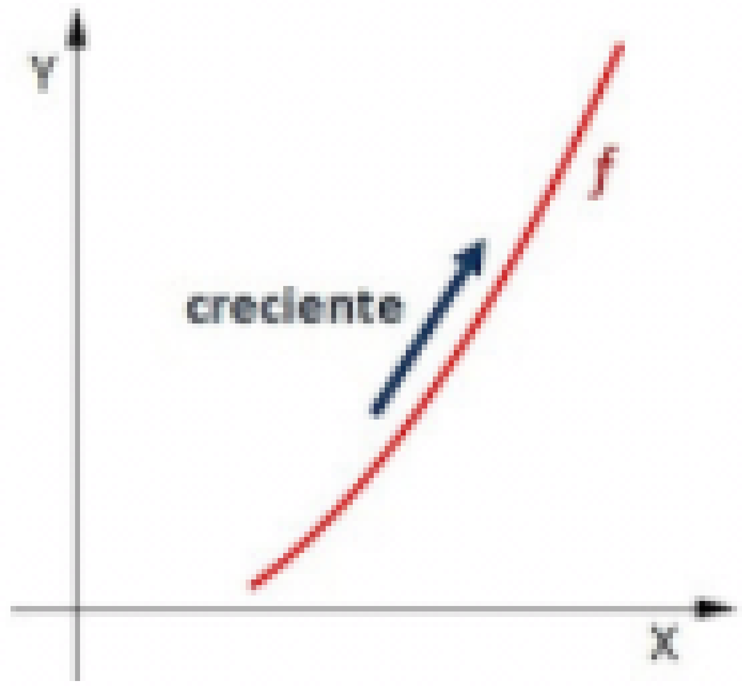


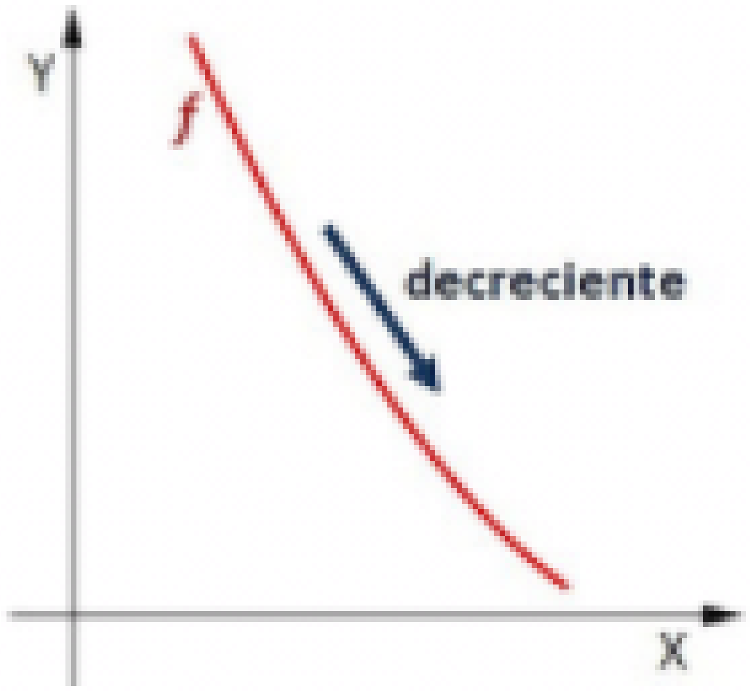
Muestra cómo varía la gasolina que hay en un auto en un viaje de 520 km por una autovía.

Funciones crecientes y decrecientes



En I_1 la función es creciente   **En I_2 la función es decreciente**

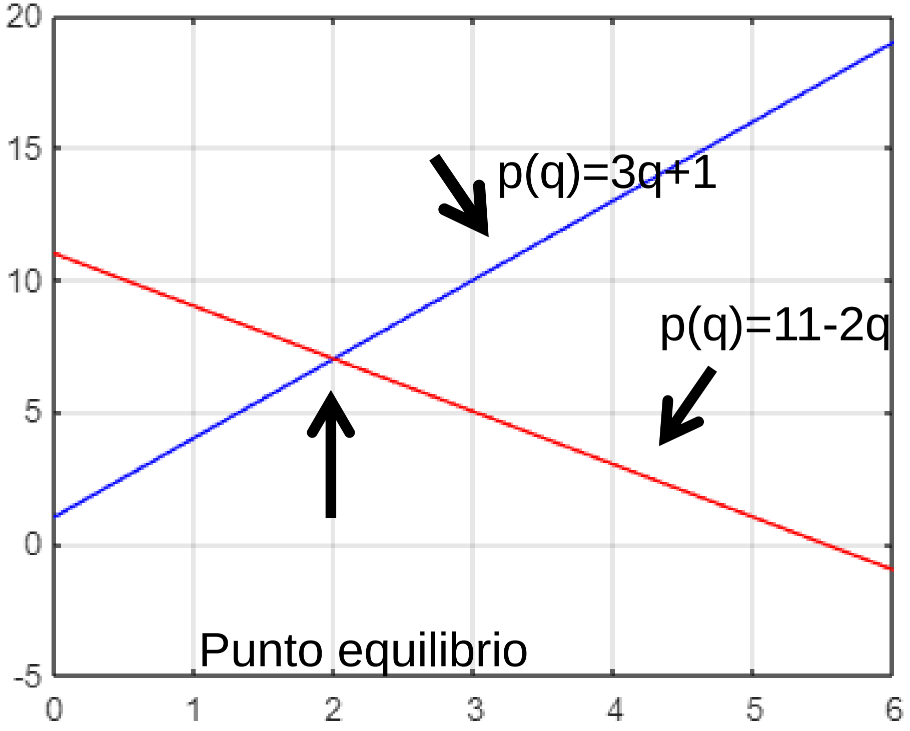

Y
f
creciente
X


Y
f
decreciente
X

Precio de un producto (p) en función de la oferta (q):
p(q)=3q +1

Precio del producto (p) en función de la demanda (q):
p(q)=11-2q

```
q=0:0.1:6;
p1=3.*q+1;
plot(q,p1,'b')
hold on
p2=11-2.*q;
plot(q,p2,'r')
grid
```



La función precio de un producto en función de la oferta es en general <u>creciente</u>, pues a menor precio los proveedores lo venden menos.

La función precio de un producto en función de la demanda es en general <u>decreciente</u>, pues a precios altos, los consumidores lo adquirirán menos.

El punto de equilibrio del mercado ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda.

Tipos de funciones más representativas en el campo de las finanzas:

- ✓ Lineales
- ✓ Cuadráticas
- ✓ Polinomiales
- ✓ Exponenciales
- ✓ Logarítmicas

Haremos una breve caracterización de cada una de ellas.

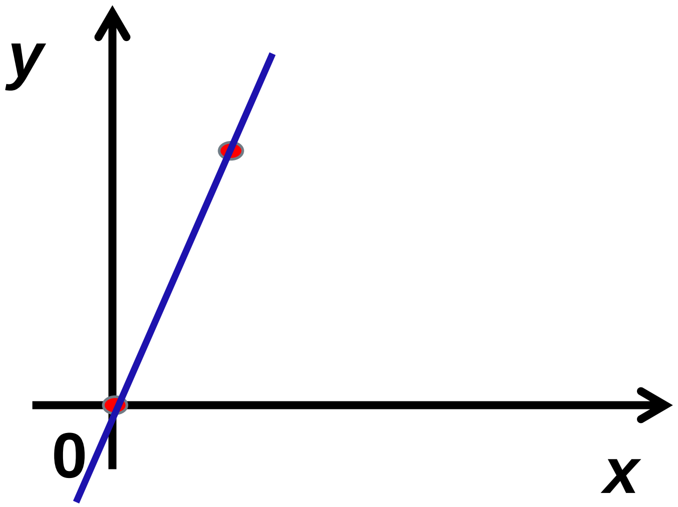
1. Funciones lineales

f(x)=mx + b, m, b $\in$ R Dominio: *R*   Codominio o Imagen: *R*

Este tipo de funciones son de grado 1, y como su nombre lo dice, su gráfica es lineal (línea recta)

m es la pendiente de la recta, b el punto donde corta al eje y

<u>Ejemplo</u>: f(x)=2x, donde 2 es un costo fijo por unidad de producto hecho, no depende de cuántos se han hecho, x es la cantidad de productos hechos. En este caso como b = 0, pasa por el origen de coordenadas. m =2



Basta conocer dos puntos para dibujar la recta.
En este caso
P1: (x1,y1) = (0,0)
P2: (x2,y2) = (1,2)

Conociendo dos puntos podemos obtener la pendiente m
m=(y2-y1)/(x2-x1)
m=(2-0)/(1-0) = 2/1 = 2

Otro ejemplo:

Supóngase que un fabricante de zapatos colocaría en el mercado 50 (miles de pares) cuando el precio es 35 (dólares por par) y 35 cuando su precio es de 30. Obtenga la ecuación de oferta, suponiendo que el precio p y la cantidad q tienen una relación lineal.

¿Cuál es el modelo matemático? Una recta, p=f(q), q oferta, p precio

¿Ecuación general de la recta en este caso? p(q)=mq+b

¿Cómo hallar la pendiente m? Datos dos puntos: (50,35), (35,30)

m=(35-30)/(50-35)=5/15=1/3 p(q)=q/3+b **¿Cómo hallar b?**

Sustituir en p(q) cualquiera de los puntos, ejemplo, 35=50/3+b

b=35-50/3=55/3 p(q)=q/3+55/3 **p(q)=(q+55)/3**

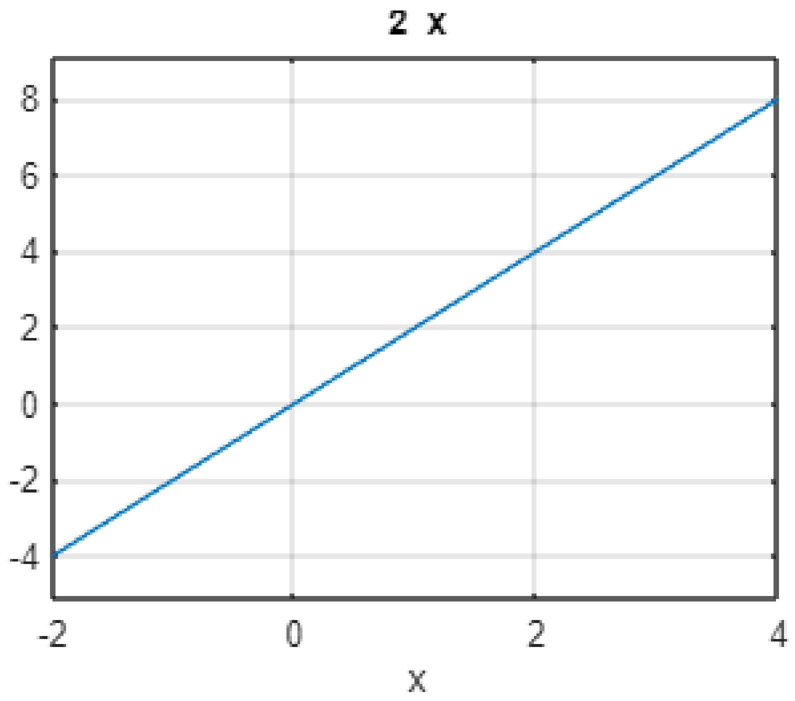
Graficando con MATLAB

Existen varias formas de graficar. Una de ellas con el comando **ezplot**.

1. Se define con syms la variable independiente
2. Se escribe la función f que depende de la variable independiente declarada
3. Sintaxis: ezplot(f,a,b) donde [a,b] es el intervalo donde se quiere graficar

En ejemplo visto f(x)= 2x

```
>> syms x
>> f=2*x
>> ezplot(f,-2,4)
>> grid
```



syms: Declarar variables x

ezplot: Graficar

grid: Hacer ‘enrejillado’ del área

Todos los comandos de MATLAB en minúscula

En muchos ejemplos prácticos una función que representa un problema es lineal ‘a trozos’.

Ejemplo (Función de costo de la electricidad):
La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de \$10 por unidad para las primeras 50 unidades y a \$3 por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades.

¿Cómo se modela el problema a través de una función matemática?

x: unidades consumidas, c(x): función de costo
tarifa de \$10 por unidad para las primeras 50 unidades…

$c(x)= 10x$, si $0 \leq x \leq 50$

\$3 por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades

Si $x=51$ $c(x) = 10(50)+1(3) = 503$ si $x=52$ $c(x) = 10(50)+2(3) = 506$, ,…

$c(x) = 500 +3(x-50)$ para $x>50$ $c(x) = 350 +3x$ para $x>50$

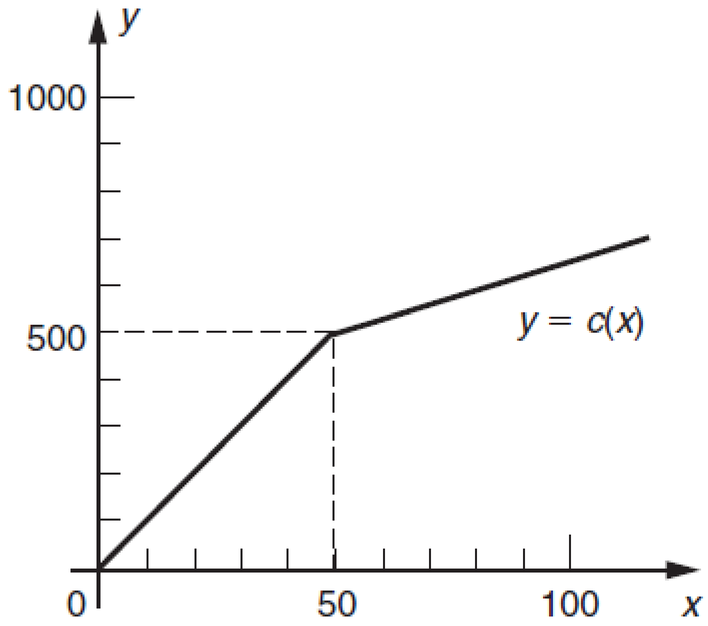
$$c(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } x \leq 50 \\ 350 + 3x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

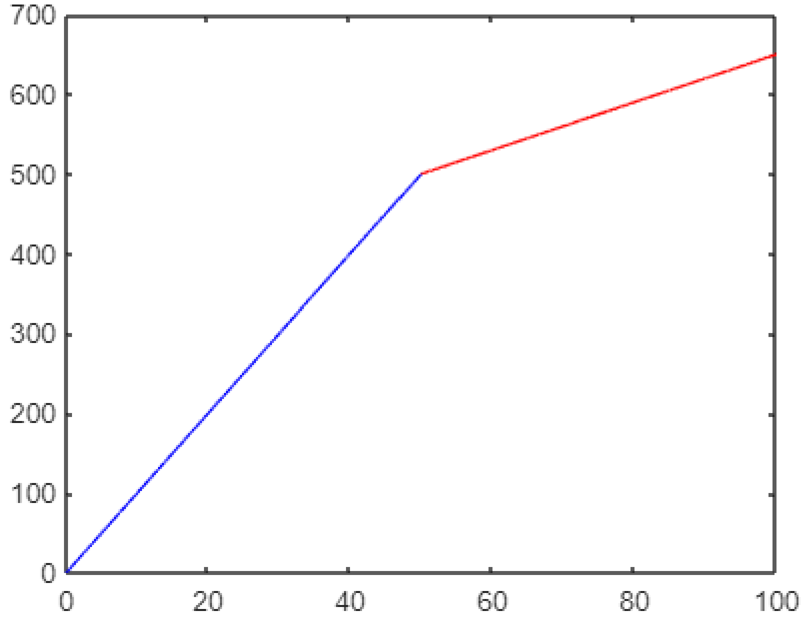
$$c(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } x \leq 50 \\ 350 + 3x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Observar que el primer segmento de recta tiene una pendiente mayor (10) que la segunda (3)

¿Cómo se grafica con MATLAB más de un gráfico en uno?

```
>> x=0:0.01:50;
>> y=10.*x;
>> plot(x,y,'b')  ('b' indica en azul)
>> hold on
>> x2=50:0.01:100;
>> y2=350+3.*x2;
>> plot(x2,y2,'r') (‘r' indica en rojo)
```





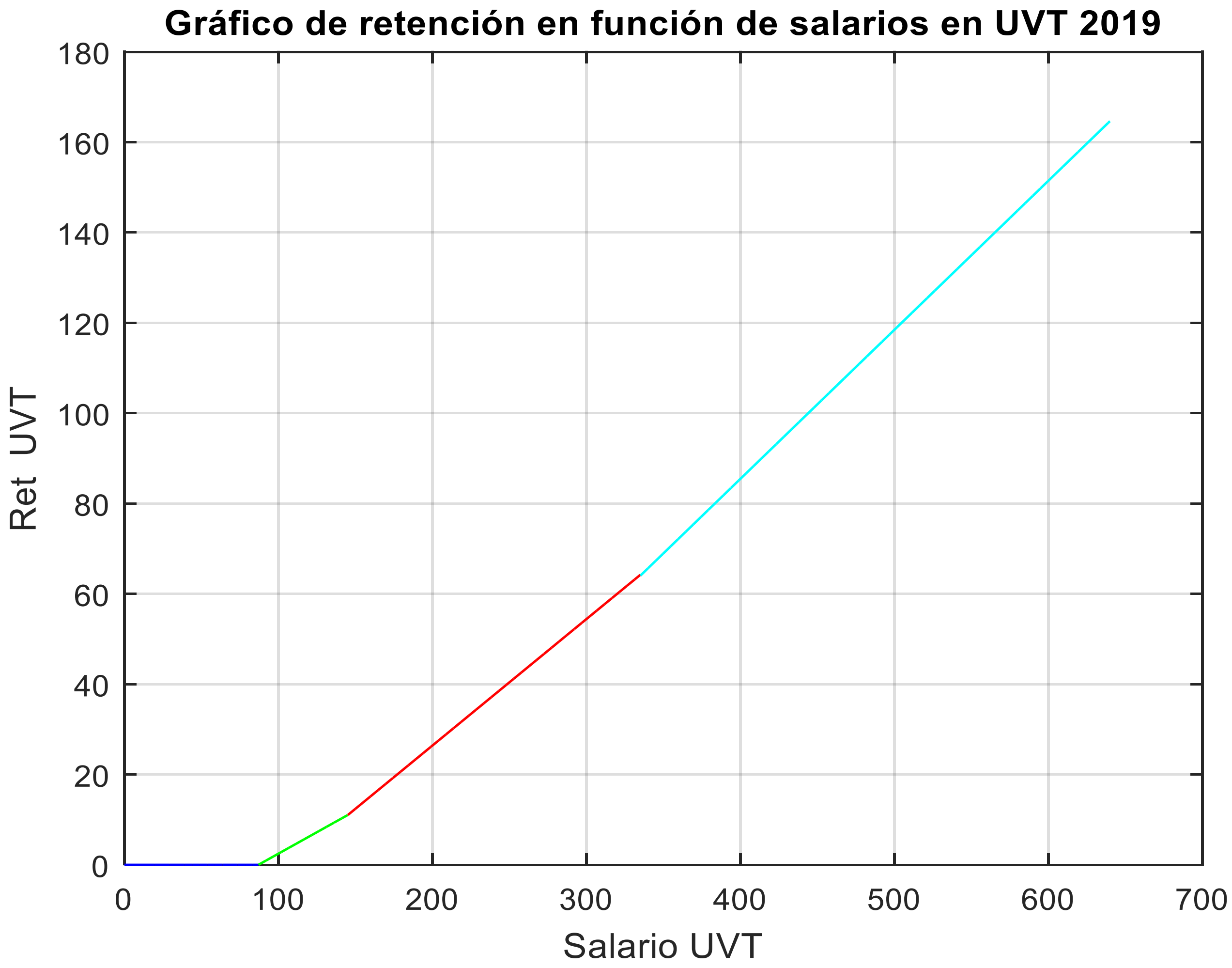
Otro tipo de función lineal ‘a trozos’: impuesto de renta.

Resolución 000084 de la DIAN correspondiente a 2020 (se fija en $35.607 la UVT).

Rangos en UVT		Tarifa marginal	Impuesto
Desde	Hasta		
> 0	87	0%	0
> 87	145	19%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 87 UVT) X 19%
> 145	335	28%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 145 UVT) X 28% más 11 UVT
> 335	640	33%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 335 UVT) X 33% más 64 UVT
> 640	945	35%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 640 UVT) X 35% más 165 UVT
> 945	2.300	37%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 945 UVT) X 37% más 272 UVT
> 2.300	En adelante	39%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 2.300 UVT) X 39% más 773 UVT

Rangos en UVT		Tarifa marginal	Impuesto
Desde	Hasta		
> 0	87	0%	0
> 87	145	19%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 87 UVT) X 19%
> 145	335	28%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 145 UVT) X 28% más 11 UVT
> 335	640	33%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 335 UVT) X 33% más 64 UVT
> 640	945	35%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 640 UVT) X 35% más 165 UVT
> 945	2.300	37%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 945 UVT) X 37% más 272 UVT
> 2.300	En adelante	39%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 2.300 UVT) X 39% más 773 UVT

```
>> x1=0:0.1:87;
>> yx1=0*x1;
>> x2=87.1:0.1:145;
>> yx2=(x2-87)*0.19;
>> x3=145.1:0.1:335;
>> yx3=(x3-145)*0.28+11;
>> x4=335.1:0.1:640;
>> yx4=(x4-335)*0.33+64;
>> plot(x1,yx1,'b')
>> hold on
>> plot(x2,yx2,'g')
>> plot(x3,yx3,'r')
>> plot(x4,yx4,'c')
>> grid
```

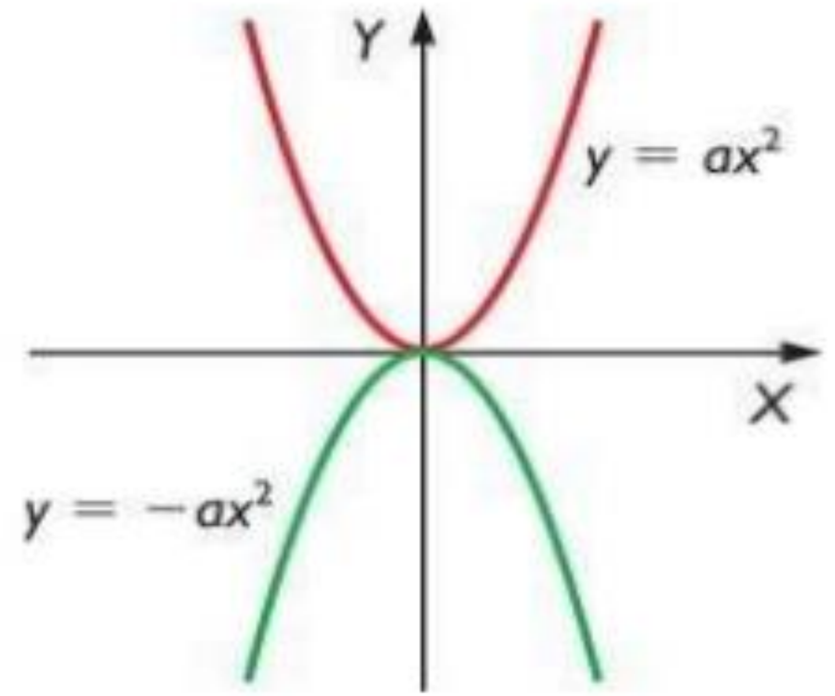


Función cuadrática

Tiene la expresión $f(x)=ax^2+ bx + c$ $(a\neq 0)$, es de grado 2 y su gráfica es una curva, llamada parábola, con vértice en $-b/2a$.

Si $a>0$, presenta un punto de mínimo en el vértice
Si $a<0$, presenta un punto de máximo en el vértice

Ejemplo: $f(x)=ax^2$, $a>0$



Dominio de f. cuadráticas: *R*

Codominio o imagen: Sea $v=-b/2a$,
Si $a>0$, $Im(f) = [f(v), +\infty)$
Si $a<0$, $Im(f) = (-\infty, f(v)]$

En muchas ocasiones en la vida real, al ofertar un servicio o producto se disminuye su valor según la cantidad, o sea, no es una función lineal porque no hay un costo o ganancia fija por unidad servida o vendida.

Ejemplo:
Una línea de autobuses para turistas cobra 20 USD por persona al viajar en un tour hacia el Volcán Arenal, este es para 30 personas. Sin embargo cobra 0.5 USD menos por cada turista adicional a las 30 (uno adicional, se le cobra 19.5; 2 adicionales, 19 a cada adicional, etc.).¿Cuál es la cantidad de turistas adicionales, para maximizar los ingresos?

Este es un problema de optimización (que resolveremos después al dar ese tema), pero para resolverlo tenemos primero que definir la función a optimizar, y previo a ello la (o las) variables de que depende esa función.

Una línea de autobuses para turistas cobra 20 USD por persona al viajar en un tour hacia el Volcán Arenal, este es para 30 personas. Sin embargo cobra 0.5 USD menos por cada turista adicional a los 30 (uno adicional, se le cobra 19.5; 2 adicionales, 19 a cada adicional, etc.).¿Cuál es la cantidad de turistas adicionales, para maximizar los ingresos?

¿Variable? Muchas veces está en la pregunta:¿Cuál es la cantidad de turistas adicionales

n:número de turistas adicionales, I(n): Ingreso total con n turistas adicionales.

¿La función I(n) contiene alguna constante?

Si buscamos adicionales, es porque asumimos una cantidad mínima de 30 personas, que sumaría al ingreso 20*30 = 600 USD

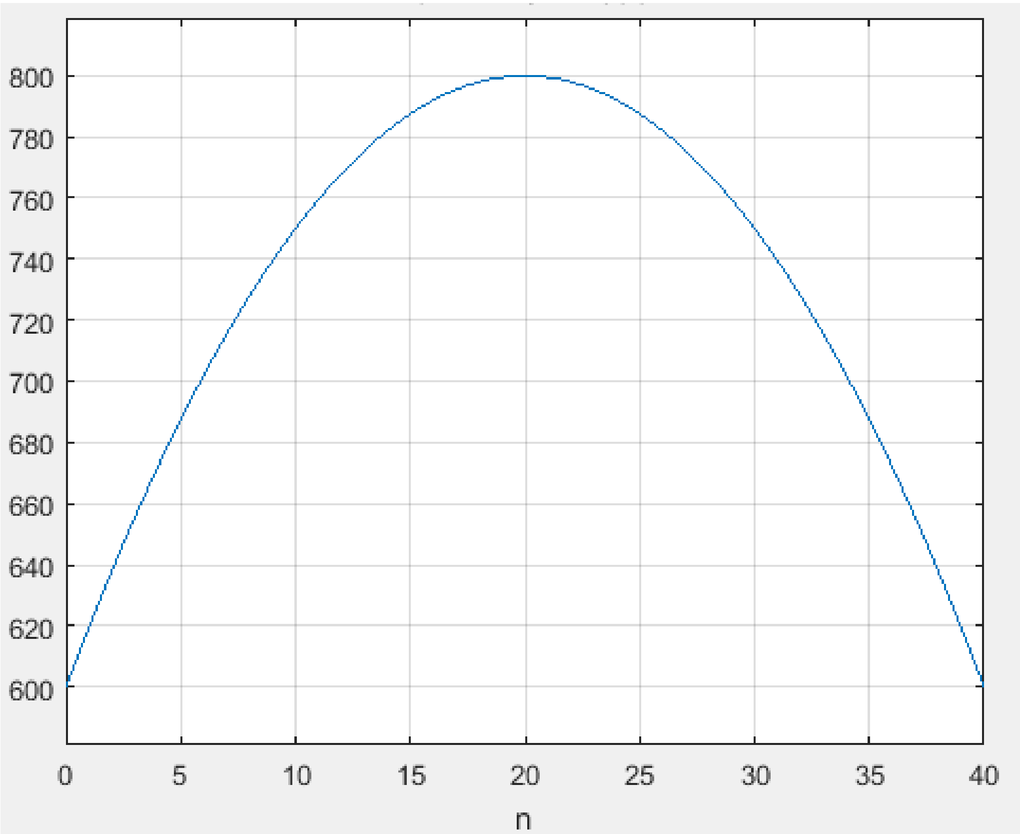
n= 1 se le cobra 19.5=20-0.5(1) n=2 $\rightarrow$ 19=20-0.5(2) n=3 $\rightarrow$ 18.5=20-0.5(3)

Luego a **n** adicionales se le cobra a **cada uno** 20-0.5(n) A los n: n*(20-0.5(n))

$I(n) = 600 + n*(20-0.5(n))= -0.5n^2+20n+600$ $\leftarrow$función cuadrática

Representación gráfica con MATLAB de $I(n) = -0.5n^2+20n+600$

```
>> syms n
>> f=600 + 20*n - 0.5*n^2;
>> ezplot(f,0,40)
>> grid
```



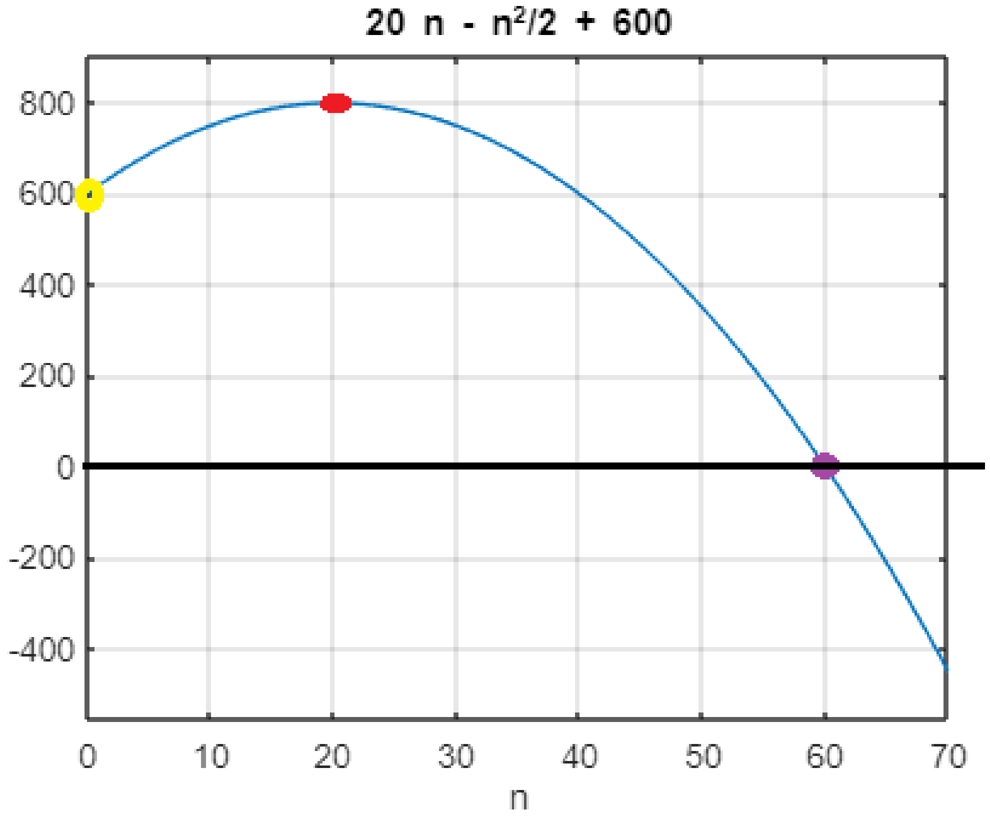
Solo mirando el gráfico, cuántos turistas adicionales maximizan el ingreso?

$n= 20$

A partir de cuántos turistas adicionales se empieza a tener pérdidas?

Cuando $I(n) = 0$, o sea $-0.5n^2+20n+600 = 0$

I(n) = 0, o sea $-0.5n^2+20n+600 = 0$



Resolviendo esta ecuación de segundo grado con el comando solve del MATLAB:
solve(f) resuelve la ecuación f=0

```
>> syms n
>>f=600 + 20*n - 0.5*n^2;
>>s=solve(f)
s =
-20
60
```

La solución n = -20 no tiene sentido para el problema real, se descarta.

Observar del gráfico: La curva corta al eje vertical (Valores de I(n)) cuando n=0 (da 600 USD, no lleva turistas adicionales). Corta al eje del dominio (n) cuando I=0, en n= 60. Para n>60 I(n) es negativo, hay pérdidas.

Dos consideraciones prácticas:

1. Compañías aéreas, agencias de viaje, cadenas hoteleras, aplican múltiples modelos matemáticos de optimización para definir precios a ofertar y maximizar ganancias.

2. Uno de los tantos aspectos que veremos por qué los software no pueden ser una caja ‘negra’ y la necesidad de apoyarse también en contenidos del curso: Del gráfico podemos deducir la información que requerimos, pero:

- ✓ Para graficar hay que darle al software la función que representa el problema, no lo hace ningún software.

- ✓ Hay que introducirle también el intervalo donde visualizar. ¿Cómo sabemos con anterioridad todo el intervalo que me daría en cada caso información interesante para el problema que manejamos?

Funciones polinomiales

Tienen la forma:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in R$, $a_n \neq 0$

El grado del polinomio es el exponente de la variable que tiene el valor numérico mayor.

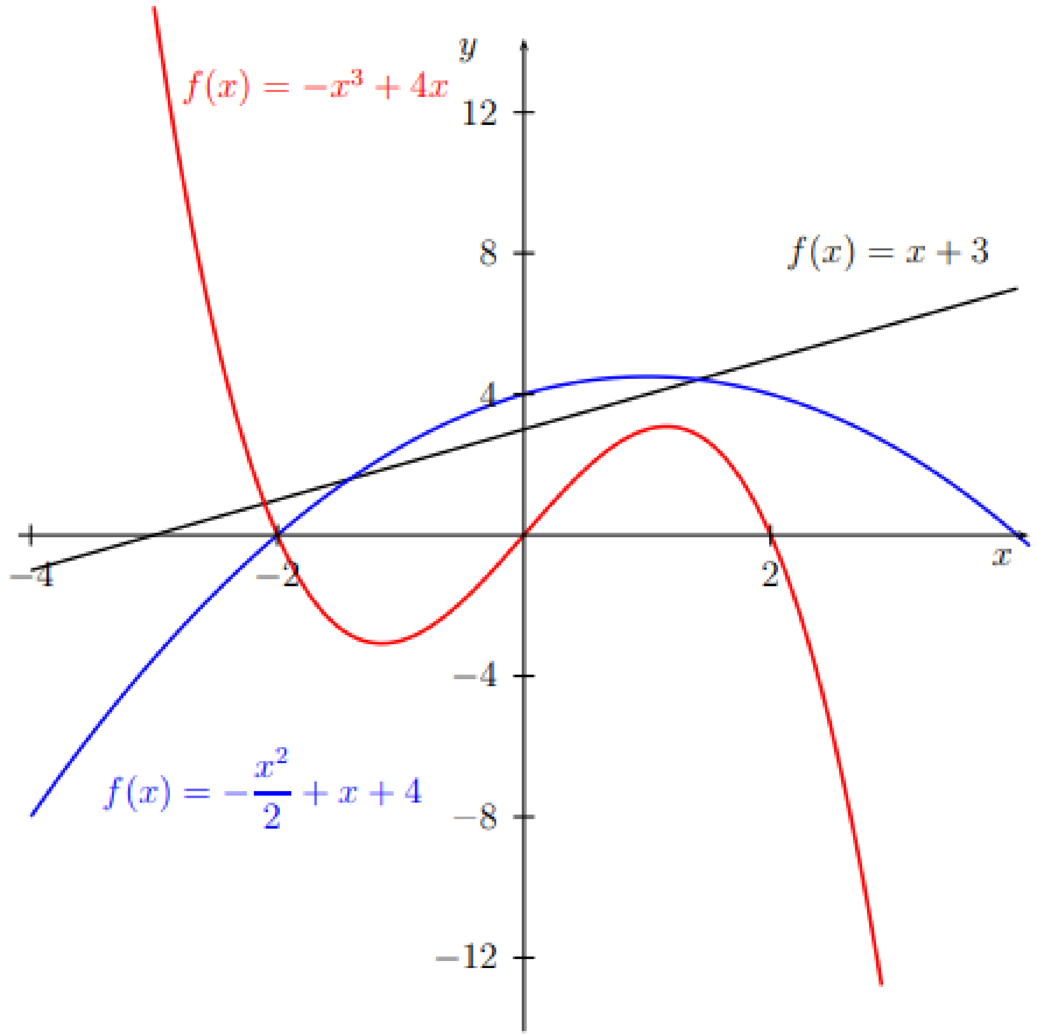
Si n=1 es una función lineal

Si n=2, es una función cuadrática

<u>Características</u>:

- ✓ Dominio:R
- ✓ Continuas
- ✓ Derivables (De todos los órdenes)

Gráfico de 3 funciones polinomiales de grados diferentes



Muchos problemas prácticos donde aparecen funciones polinomiales de grado 3 o superior es cuando es el resultado de una función compuesta de otras.

Ejemplo.

Se quiere obtener la función que dé los ingresos totales en función del número de empleados (m) que se tienen. Se conoce la función que da el número de unidades de producción vendidas al día (q) en función del número de empleados (m) y los ingresos totales que reciben (r) en función de la venta de unidades diarias (q)

$q(m)=(40m-m^2)/4 \quad r(q) = 8q^2 \qquad r = g(q)$, $q=f(m)$, $\mathbf{r(m)}=gof(\mathbf{m})$

$r(m) = 8q^2 =8((40m-m^2)/4)^2$

$\uparrow$

$r(m) = 8q^2 =8(40m-m^2)^2/4^2$

Función compuesta da r directamente dependiendo de m

$r(m) = [(40m-m^2)^2]/2=(1600m^2-80m^3+m^4)/2$

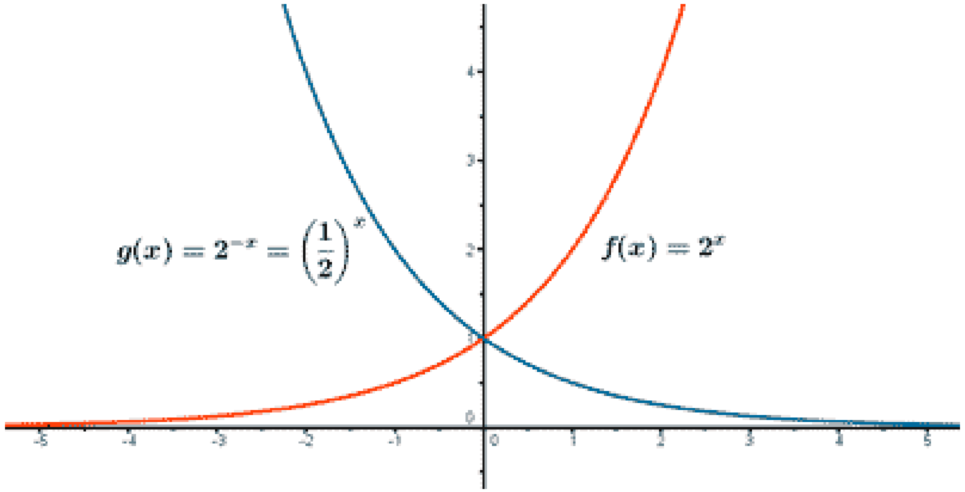
$r(m) = 800m^2-40m^3+m^4/2$ $\leftarrow$ Polinomio 4to grado

Funciones exponenciales

Tienen la expresión:
$f(x)=a^x$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$

Características:

- ✓ Dominio: R
- ✓ Imagen: $(0,+\infty)$
- ✓ Continuas
- ✓ Si $a>1$ es creciente
- ✓ Si $0<a<1$ es decreciente



Ejemplo en Finanzas: Inversiones que crecen con interés compuesto

Elementos que intervienen en una operación de interés compuesto son:
C: es el capital que se invierte
R: la tasa de interés % anual, $i=R/100$
n: el periodo de capitalización
M: el monto total al terminar el periodo n, equivalente al capital más los intereses

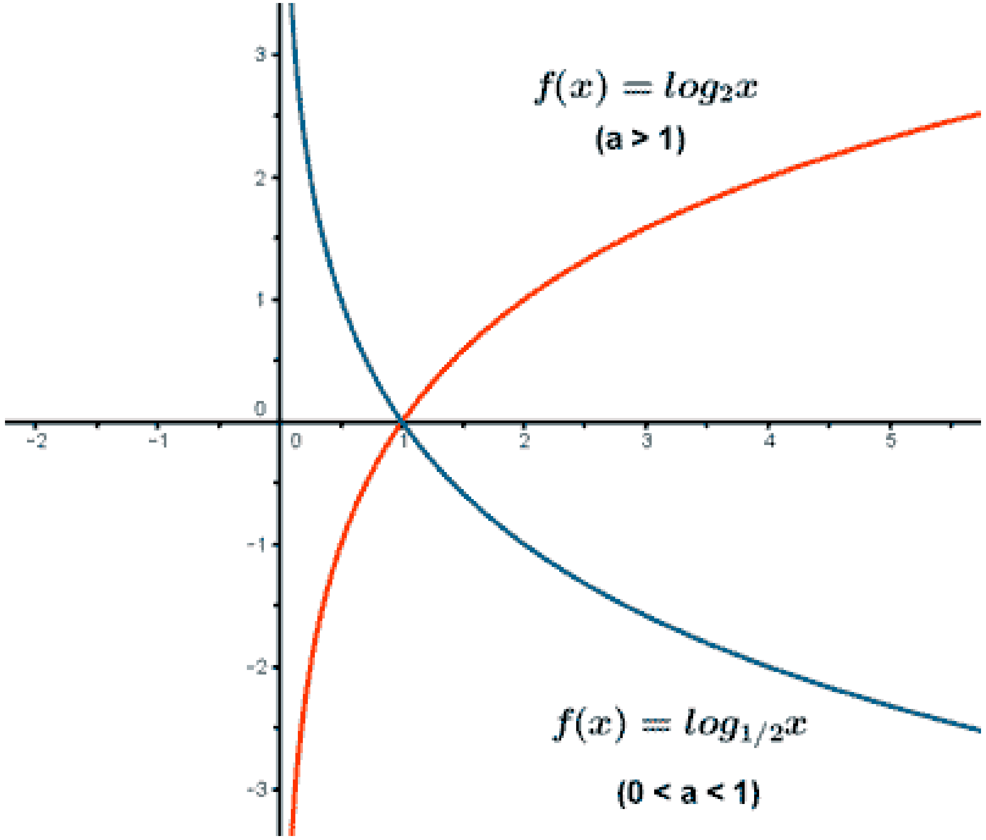
$$M(n)=C(1+i)^n$$

Funciones logarítmicas

Tienen la expresión:
$f(x)=\log_a x$, siendo $a > 0$, $a \neq 1$

Es la inversa de la función exponencial $f(x)=a^x$

- ✓ Dominio: Reales positivos, $(0,+\infty)$
- ✓ Imagen: R
- ✓ Continuas
- ✓ Si $a>1$ es creciente
- ✓ Si $0<a<1$ es decreciente



Aplicación de función logarítmica:

Se usan, entre otras aplicaciones, en depreciación de activos fijos, mostrando la disminución de un activo, en un tiempo determinado.

Por ejemplo, la depreciación de un carro (se asume una tasa de reducción de un 25%), la función $f(x)=\log_{1/4}x$, da la depreciación al cabo de x años.

Uso de logaritmos en Finanzas: Plazo en inversión con interés compuesto

¿En cuánto tiempo se acumulan $44,365 si se invierten $40,000 ganando intereses del 0.8% mensual capitalizable por meses?

$M = C(1+i)^x$ donde:

M=44365

C=40000

i=0.008

x? meses

Para despejar x:

$M/C = (1+i)^x$ (1)

Aplicando logaritmo a ambos miembros de (1)

$\log(M/C) = \log[(1+i)^x]$

Aplicando propiedad de logaritmos: $\log(a^b) = b\log(a)$

$\log(M/C) = x\log(1+i) \Rightarrow x = \log(M/C)/\log(1+i)$

$x = \log(44365/40000)/\log(1+0.008)$

$x = \log(1.109125)/\log(1.008)$

$x = 0.04498049/0.00346053$
$= 12.9981$

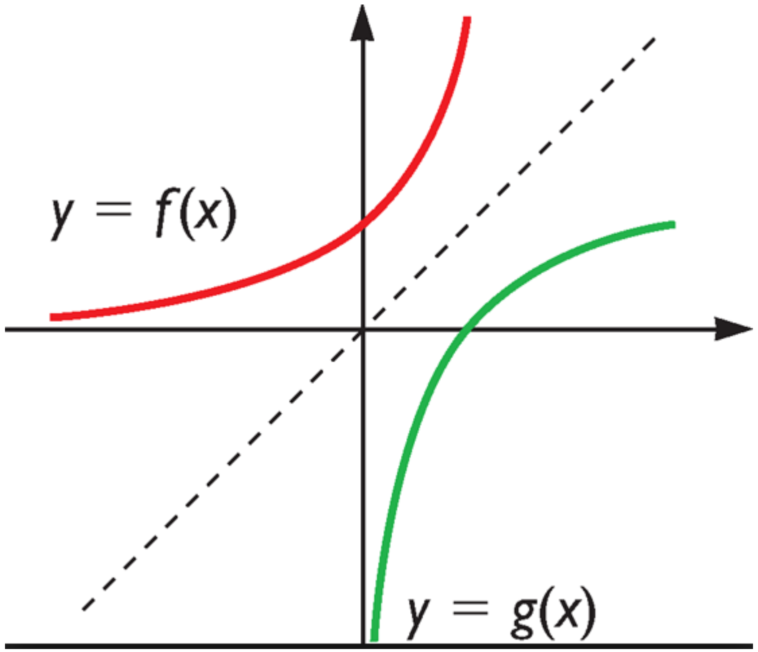
R/En 13 meses los $40,000 iniciales se incrementarán a $44,365.

Funciones y sus inversas

Una función y su inversa verifican que:

- ✓ Las gráficas de f y de f^{-1}, referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante (o sea, a la recta y=x).
- ✓ Los dominios y codominios se intercambian.
- ✓ Si $f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$

Ejemplo: $y=f(x)=e^x$, $y=g(x)=\ln(x)$, $g=f^{-1}$



Dom (f): R

Im(f):$(0,+\infty)$

Dom (g):$(0,+\infty)$

Im(g): R

$f(0)=e^0=1$

$g(1)=\ln(1)=0$

¿Qué importancia práctica puede tener que una función tenga inversa y obtenerla?

Ejemplo en Finanzas

En las inversiones durante N años a una tasa de interés r, las relaciones entre inversión inicial realizada (P) y capital acumulado al final de los N años (C)

Si queremos expresar C en función de P: $C(P)= (1+r)^N.P$

Si queremos expresar P en función de C: $P(C)= C/(1+r)^N$

Supongamos que $N= 4$, $r= 0.05$

$C(P)= (1+0.05)^4.P = (1.05)^4.P =1.2155(P)$

$P(C)= C/(1.05)^4 = C/1.2155$

Funciones de utilidad

Una función de utilidad es una expresión del deseo en términos matemáticos. Pretende representar la utilidad (bienestar) de un individuo para todas las combinaciones de posibilidades disponibles para su nivel de ingresos, representando así tanto su bienestar y sus preferencias.

Una función de utilidad no tiene que coincidir necesariamente con el concepto de función matemática, mostrado en el siguiente ejemplo:

$f(x)=6 \quad f(y)=2$

Si f es simplemente una función matemática, indica que el valor de f para x es 3 veces el de y, pues $f(x)=6 = 3*2 = 3*f(y)$

Si f es de utilidad, simplemente significa que <u>x es estrictamente preferida a y</u>, porque $f(x)> f(y)$, <u>no que x es 3 veces preferida a y</u>.

Las funciones de utilidad presuponen la existencia de supuestos sobre las preferencias de cualquier consumidor, los principales son:

1. Completitud: Cualesquiera dos alternativas a y b a evaluar por una función de preferencia son comparables: o **a** es preferido a **b** (a < b) o **b** es preferido a **a** (b < a)

2. Reflexividad: Toda alternativa es preferida a sí misma

3. Transitividad: Si **a** es preferida a **b**, y **b** es preferida a **c**, entonces **a** es preferida a **c**.

¿Estos supuestos se satisfacen siempre?

No, veamos ejemplos

No completitud

Al querer comprar un inmueble con dos alternativas A y B donde su toma de decisiones está basada en 4 criterios: precio, calidad, localización de la misma, que esté en planta baja.

En dos de los criterios A aventaja a B, en los otros dos B aventaja a A, y no tiene elementos para comparar y decidir cuál sería la mejor opción, porque depende también de los pesos que le dé a cada criterio.

En la Optimización Multicriterio (no veremos en este curso) se dan métodos que ayudan a esta toma de decisiones cuando hay criterios en conflicto (como precio y calidad), entre los que se encuentran ELECTRE, PROMETHEE, TOPSIS.

No transitividad

Suponga ahora que quiere comprar un pasaje aéreo y dos criterios importantes para usted son la hora del vuelo y precio.

Le presentan solo dos ofertas de tiquetes A y B, donde el A cuesta $100.000, el B cuesta $120.000 pero usted prefiere el B porque siendo un poquito más caro tiene mejor horario para usted.

Suponga ahora que las dos ofertas de tiquetes que le dan son B y C, donde el B cuesta $120.000, el C cuesta $150.000 pero comparando los dos usted prefiere el C porque siendo un poquito más caro tiene mejor horario aún que el B.

Pero si las ofertas que le hubieran dado fueran A y C, pudiera irse por el A, porque teniendo C mucho mejor horario que A, ya lo encuentra mucho más caro que A.

O sea: C preferido a B, B preferido a A, pero C no es preferido a A.

Definición de Curvas de indiferencia

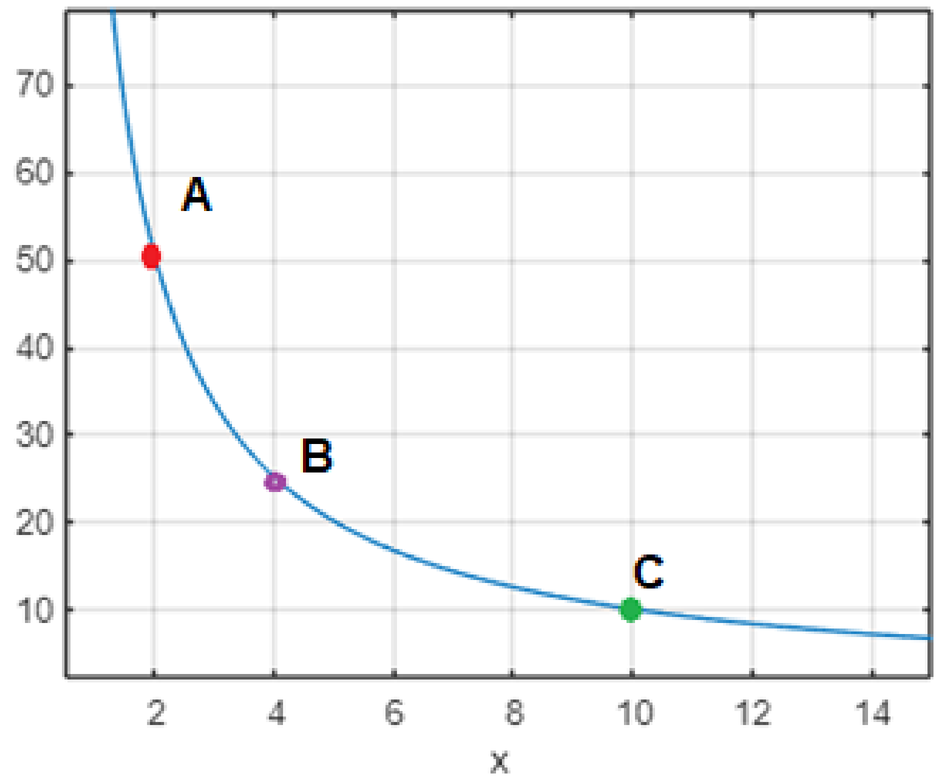
Muestran las diferentes combinaciones de bienes que producen al individuo igual nivel de utilidad.

Conjunto de todas las ‘canastas’ de bienes que le entregan igual satisfacción a un individuo.

Es una curva que refleja (únicamente) aquellas combinaciones de bienes que le dan el mismo grado de satisfacción o utilidad al consumidor.

Sea la función de utilidad $U(x,y)=x^{1/2}.y^{1/2},=(x.y)^{1/2}$ un caso particular de las funciones Cobb Douglas, muy utilizadas también como funciones de producción.

La gráfica corresponde para todos los valores de bienes x,y tal que la utilidad es 10, o sea, $U(x,y)=(x.y)^{1/2}= \sqrt{(xy)}= 10$



A=(2,50): $U(2,50)= \sqrt{(2.50)}=\sqrt{100}=10$

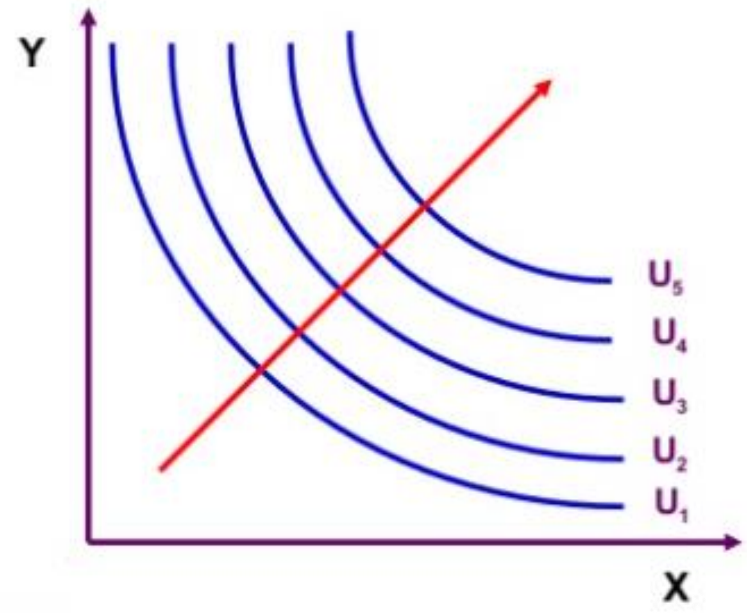
B=(4,25): $U(4,25)= \sqrt{(4.25)}=\sqrt{100}=10$

C=(10,10): $U(10,10)= \sqrt{(10.10)}=\sqrt{100}=10$

Un ejemplo puede ser la elección de dos tipos de carnes (carne de res y pescado) que una persona selecciona de forma tal que combinaciones de cantidades de cada una le aporte una cantidad de proteínas determinada.

Características fundamentales de las curvas de indiferencia.

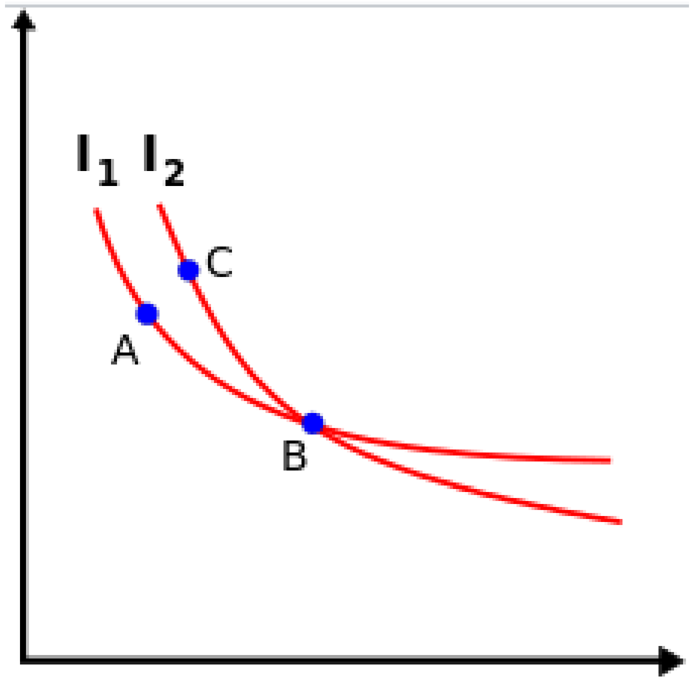
1. No se cruzan, son paralelas entre ellas, y mientras más alejadas del origen de coordenadas, la utilidad es mayor



$U_1<U_2<U_3<U_4<U_5$

¿Por qué no se pueden cortar?

Suponga que se cortan como en el gráfico mostrado, las curvas con utilidades I_1 e I_2.

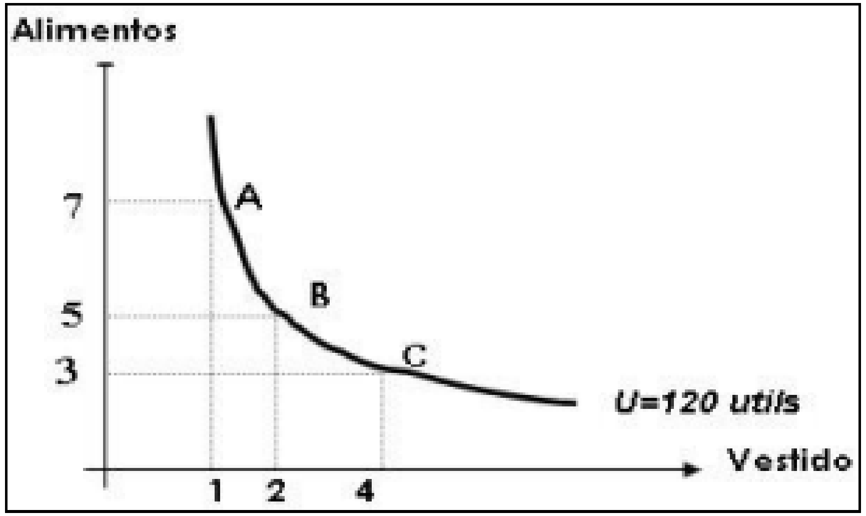


A es indiferente a B pues pertenecen ambos a I_1

B es indiferente a C pues pertenecen ambos a I_2

Por transitividad, A debía ser indiferente a C pero pertenecen a curvas diferentes.

2. Curvas decrecientes, o lo que es equivalente, pendiente de las rectas tangentes a las curvas negativas.

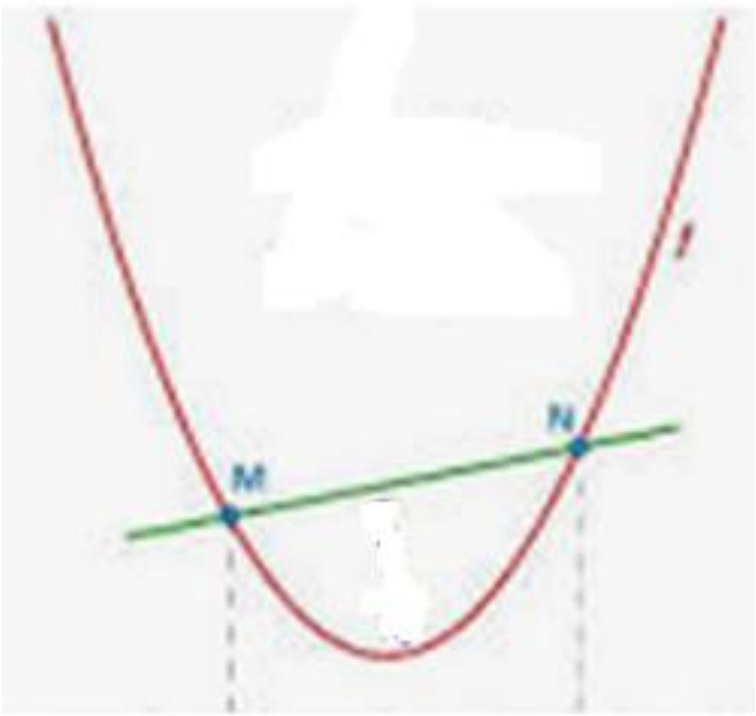


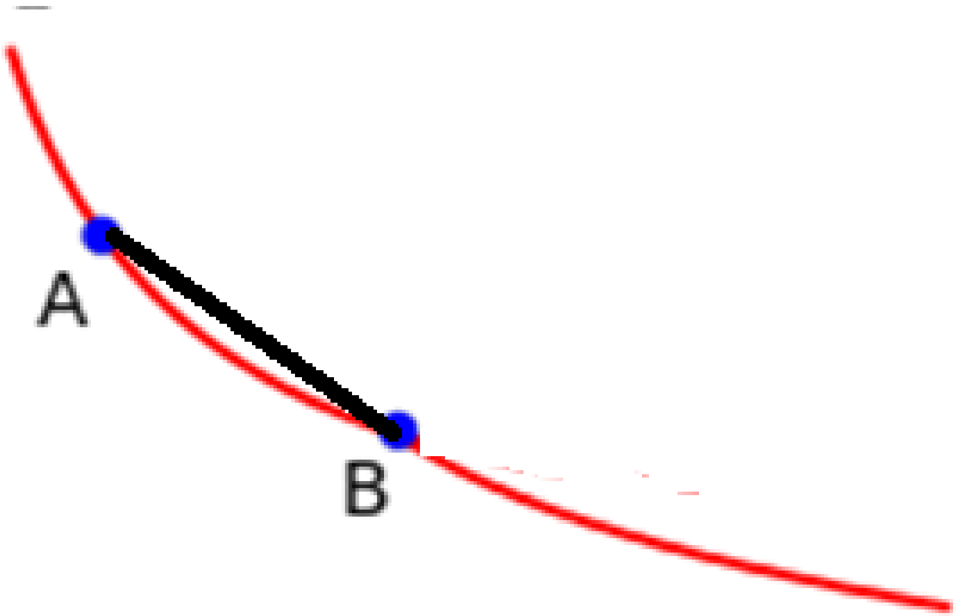
Los puntos A, B y C sobre la curva representan las diferentes combinaciones de alimento y vestido que ofrecen al individuo la misma utilidad de 120.

Para mantener la utilidad constante sobre la curva, el individuo deberá estar dispuesto a renunciar al consumo de cierta cantidad de alimento, para poder disponer más de vestido (Al pasar de A a B mejora en vestido, sacrificando alimento).

3. En general son curvas convexas.

Una curva es convexa (si no es el caso particular de una recta) si al tomar dos puntos cualesquiera sobre la curva, el segmento de la recta que los une está sobre la curva.





4. En general las combinaciones en curvas convexas son al menos tan buenas que las que están en la curva de indiferencia.

Si tomamos dos canastas extremas de una curva de indiferencia estrictamente convexa entre las cuales el consumidor sea indiferente, (en gráfico A y B), el consumidor tenderá a preferir una canasta por encima de la curva, como el punto C del gráfico (punto medio del segmento de recta entre A y B), que es más balanceada y está en una curva de indiferencia con una utilidad mayor.