Curso Matemáticas para finanzas con aplicaciones

Prof. María Gulnara Baldoquin de la Peña
mbaldoqu@eafit.edu.co

http://daltonorellana.info/wp-content/uploads/sites/436/2017/03/Matematicas-Aplicadas-Jagdish-Arya-Ed5.pdf

Texto 833 pág

PARTE UNO
ÁLGEBRA

PARTE DOS
MATEMÁTICAS FINITAS

7 PROGRESIONES Y MATEMÁTICAS FINANCIERAS 265

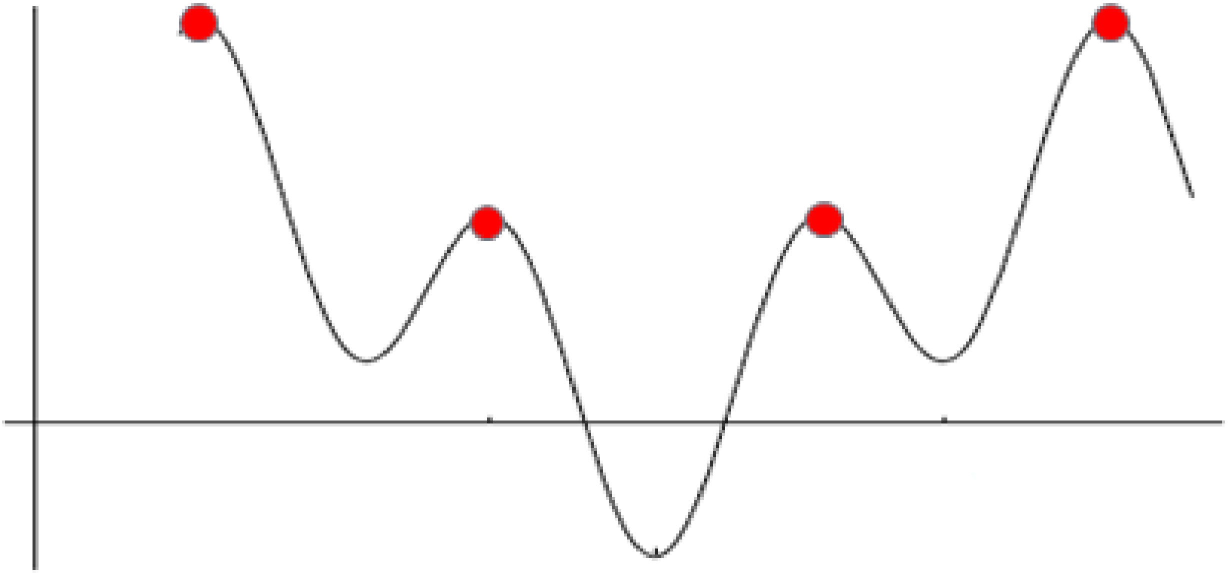
8 ÁLGEBRA DE MATRICES 316

9 INVERSAS Y DETERMINANTES 354

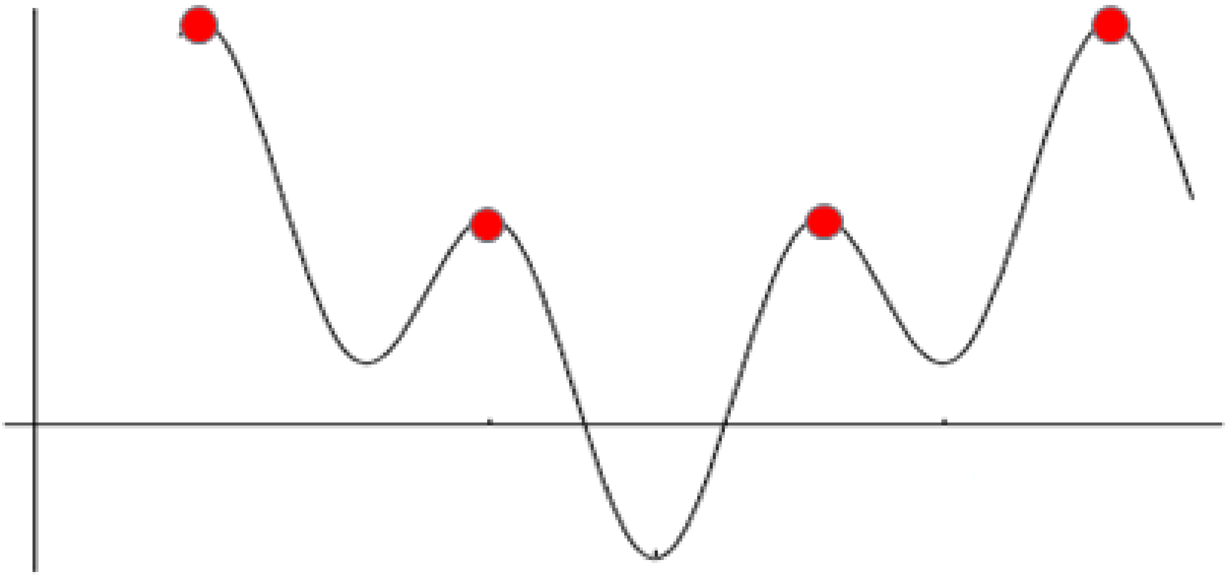
10 PROGRAMACIÓN LINEAL 399

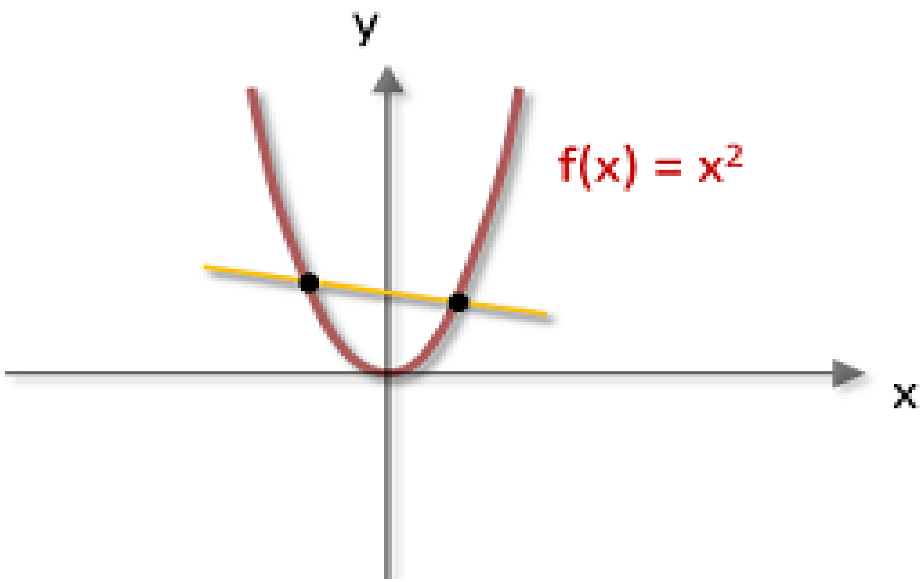
PARTE TRES
CÁLCULO

π



Estamos buscando un punto de máximo de la función. ¿Cuál de esos puntos me da el software?





¿Cómo distinguir sin el gráfico las características sobre óptimos de esas dos funciones?

Derivadas

Las derivadas en economía son una herramienta muy útil puesto que por su misma naturaleza permiten realizar cálculos marginales, es decir hallar la razón de cambio cuando se agrega una unidad adicional al total, sea cual sea la cantidad económica que se esté considerando: costo, ingreso, beneficio o producción.

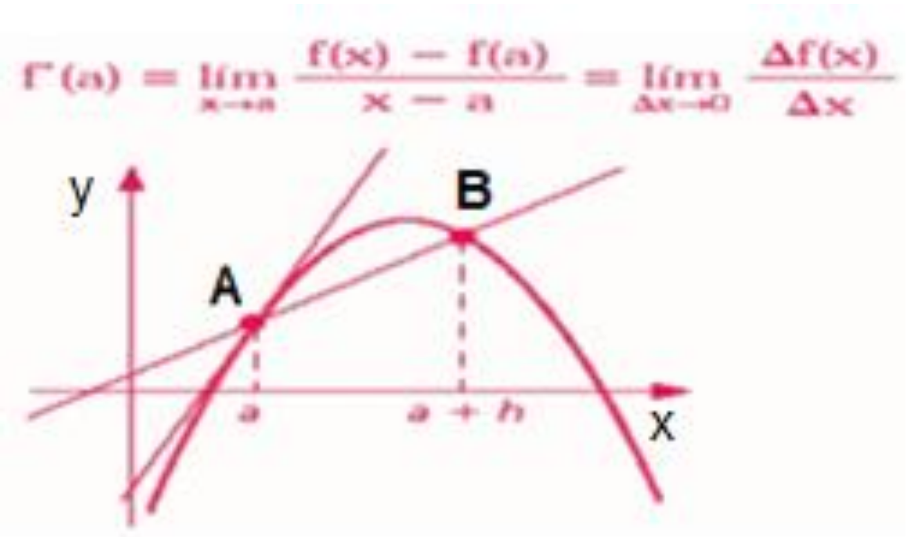
Por ejemplo, la razón del cambio (tasa de cambio) de la ganancia o costo, llamado la ganancia o costo marginal, es la derivada de la ganancia o costo.

La razón del cambio de la ganancia promedio llamada la ganancia marginal promedio es la derivada de la ganancia promedio.

La razón del cambio del costo promedio llamada el costo marginal promedio es la derivada del costo promedio.

Definición de derivada de una función de una variable

Sea f una función continua en un dominio D y a un punto interior de D.
Se define la derivada de f en a, si existe, y se denota f’(a) o df/da como:

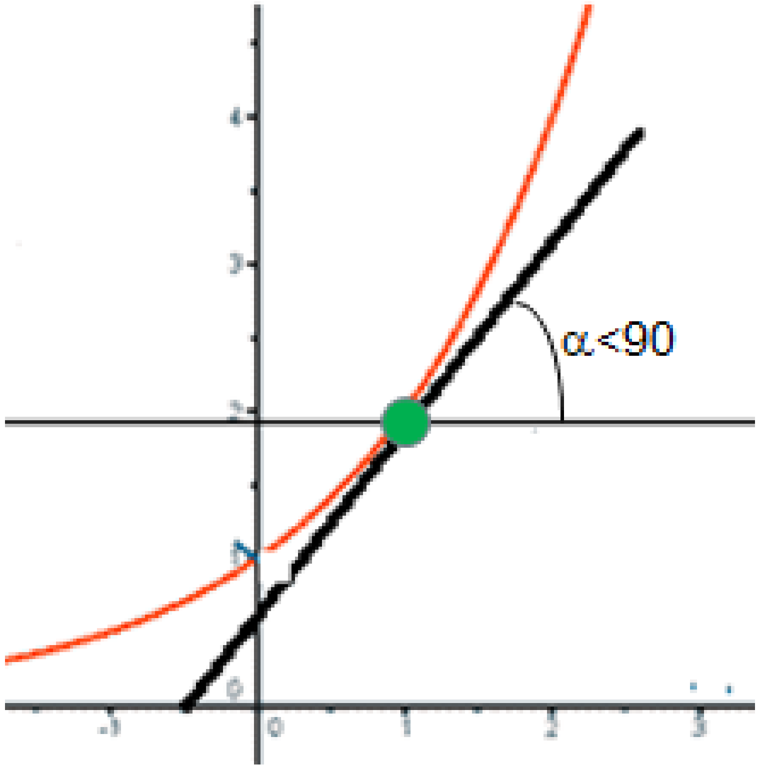


x = a+h

Con palabras: Es el cociente de la diferencia de las y de B-A dividido por la diferencia de las x de B-A, cuando esos puntos están ‘casi juntos’.

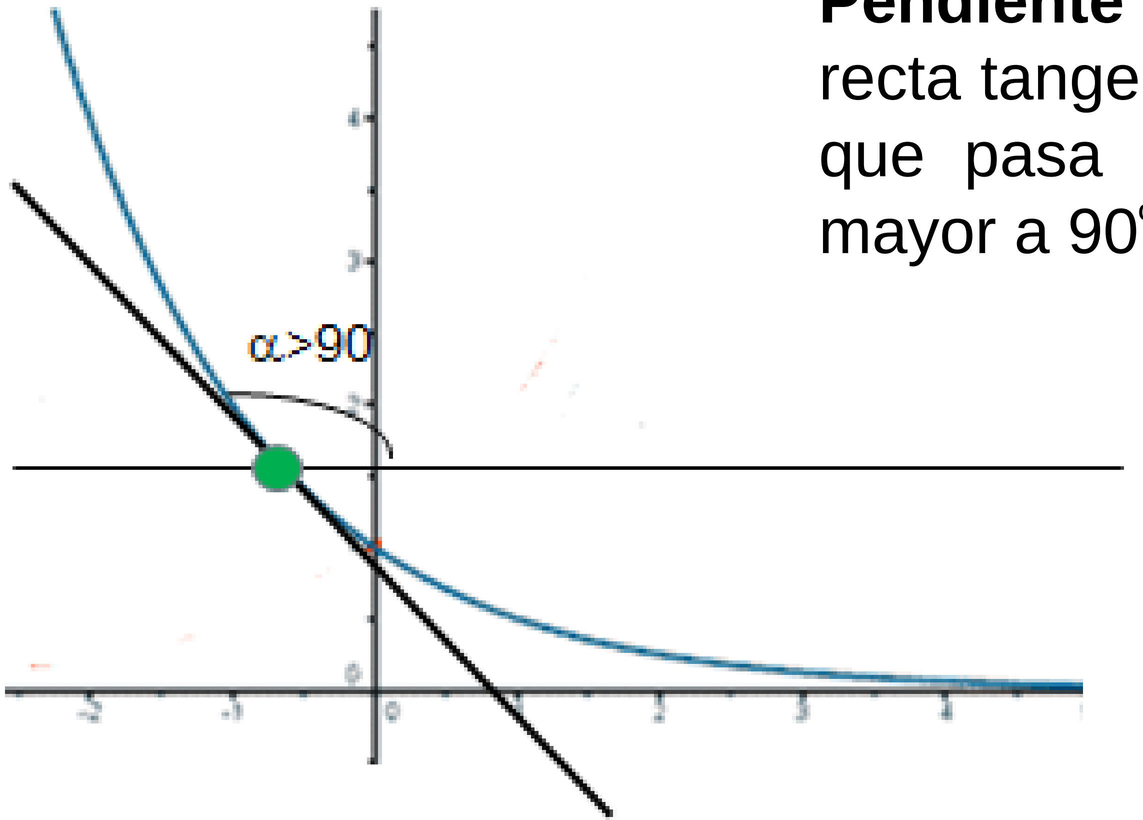
Si f tiene derivada en todo punto de un dominio D, entonces se dice que f es derivable en D.

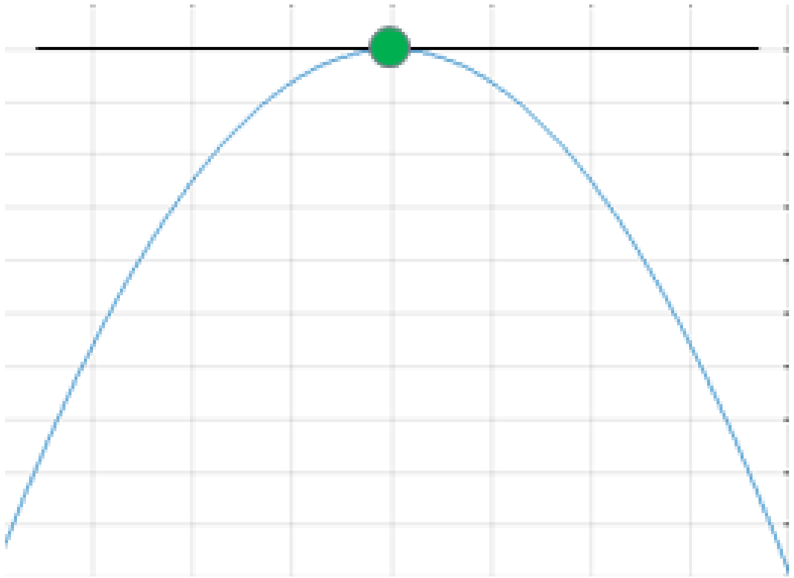
Interpretación geométrica: La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto.



Pendiente positiva: El ángulo que forma la recta tangente con la recta paralela al eje *x* y que pasa por ese punto de tangencia es menor de 90º (o $\pi/2$)

Pendiente negativa: El ángulo que forma la recta tangente con la recta paralela al eje *x* y que pasa por ese punto de tangencia es mayor a 90º (o $\pi/2$)





Pendiente cero: La recta tangente es paralela al eje x

Aplicación de derivadas: utilidad marginal

Utilidad marginal: El aumento (o disminución) en la utilidad total que nos supone el hecho de consumir una unidad **adicional** de lo ya consumido.

Utilidad total: La utilidad que proporciona toda la cantidad consumida del bien, o sea la satisfacción total que tiene una persona por la posesión o consumo de un bien; es decir aumenta a medida que se incrementa el número de unidades del bien.

¿Por qué la utilidad marginal puede ser un valor negativo?

Ejemplo: Beber un vaso de agua fría en un día caluroso, y tal vez también un segundo vaso. En la medida que va bebiendo más vasos de agua, la satisfacción o utilidad total que obtiene, respecto a la satisfacción con lo ya bebido, aumentará pero en una proporción cada vez menor hasta llegar un momento que consumir un vaso más de agua ocasionará una des utilidad es decir, molestias, y si sigue bebiendo, aumentarán más las molestias.

Reglas básicas de derivación

Sean f, g funciones derivables en D, $\alpha \in R$.

1. $(\alpha f)' = \alpha f'$
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$
4. $(f/g)' = (f'.g - f.g')/g^2$
5. $(\alpha)' = 0$

Funciones básicas y sus derivadas en nuestro contexto:

1. $x' = 1$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(\ln x)' = 1/x$

Ejemplos:

1. $(x^3)' = 3x^{(3-1)} = 3x^2$
2. $(5x^4)' = 5(x^4)' = 5(4x^3) = 20x^3$
3. $(6e^x)' = 6(e^x)' = 6e^x$
4. $(8\ln x)' = 8(\ln x)' = 8(1/x) = 8/x$
5. $(x^2e^x)' = (x^2)'.e^x + x^2(e^x)'$

   $= 2x.e^x + x^2e^x$
6. $(3x^5+9)' = 3(x^5)' + (9)'$

   $= 15x^4$

Comandos para calcular la primera derivada de una función de una variable f(x)

Comandos:

syms: para declarar la variable independiente

diff(f): Devuelve la función derivada de la función f, previamente definida.

Ejemplo:

Dada $f(x) = 2x^3-x^2-2x$, calcular $f\,'(x)$

```
>> syms x
>> f=2*x^3-x^2-2*x;
>> df=diff(f)
df = 6*x^2 - 2*x - 2
```

O sea, $f'(x) = 6x^2-2x-2$

Ejemplo donde se combina la teoría vista, la práctica para resolver un problema específico, y el software para resolverlo

π

Sea la función de costo

$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$ donde x: unidades de productos producidos

a. Determine el costo marginal como una función de x.

b. Evalúe el costo marginal cuando la producción es de x=50, x=100 y x= 150.

c. Interprete los resultados.

¿Qué es el costo marginal matemáticamente?

La función derivada $C'(x)$

¿Comando del matlab para ello?

diff(C)

¿Comando para evaluar la función resultante df en un punto dado a ?

subs(df,a)

Sea la función de costo

$C(x)= 0.001x^3 - 0.3x^2+ 40x+1000$

a. Determine el costo marginal como una función de x.

b. Evalúe el costo marginal cuando la producción es de x=50, x=100 y x= 150.

c. Interprete los resultados.

```
>> syms x
>> C=0.001*x^3-0.3*x^2+40*x+1000;
>> dC=diff(C)
dC = (3*x^2)/1000 - (3*x)/5 + 40
```

O sea, $C'(x)=0.003x^2-0.6x+40$

Para hallar $C'(50)$

```
>> dc50=double(subs(dC,50))
dc50 = 17.5000
```

$C'(50)=17.5$

Para hallar $C'(100)$

```
>> dc100=double(subs(dC,100))
dc50 = 10.0000
```

$C'(100)=10$

Para hallar $C'(150)$

```
>> dc150=double(subs(dC,150))
dc100 = 17.5000
```

$C'(150)=17.5$

$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$ $C'(50)=17.5$, $C'(100)=10$, $C'(150)=17.5$

c. Interprete los resultados.

¿Qué significa, por ejemplo, que el costo marginal cuando se hacen 50 unidades es de 17.5?

Que el costo que se tenía cuando se hacen 50 unidades, o sea, C(50), se incrementa en **$17.50** al producir el número 51.
O sea, C(51)=C(50)+17.5

El costo que se tenía cuando se hacen 100 unidades, o sea, C(100), se incrementa en **$10** al producir el número 101.
O sea, C(101)=C(100)+10

El costo que se tenía cuando se hacen 150 unidades, o sea, C(150), se incrementa en **$17.5** al producir el número 151.
O sea, C(151)=C(150)+17.5

Otra pregunta por responder

$C'(50)=17.5$, $C'(100)=10$, $C'(150)=17.5$

Si C(51)=C(50)+17.5, entonces $C'(50)$ debe ser igual a calcular C(51), C(50) y buscar la diferencia C(51)-C(50)

Hallando C(51) con MATLAB:

```
>> d2=double(subs(C,51))
2.3924e+03, o sea, 2392.4
```

Entonces C(51)-C(50) = 2392.4 – 2375 = 17.4

Pero $C'(50)=17.5$

¿Dónde está el error cometido?

La derivada da la tasa de un incremento infinitesimalmente pequeño en la variable independiente, no para un incremento unitario.
Luego el usarla es una aproximación al valor buscado

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$x \to a \Leftrightarrow x - a \to 0$$

Si la derivada da una aproximación al valor buscado del costo marginal, por qué en el ejemplo visto, por ejemplo, para calcular el costo marginal para x=50 no se buscó directamente C(51)-C(50) y se usó la aproximación *C'*(50)?

En el campo de las Finanzas y Economía se usa mucho los costos, utilidades y ganancias marginales.

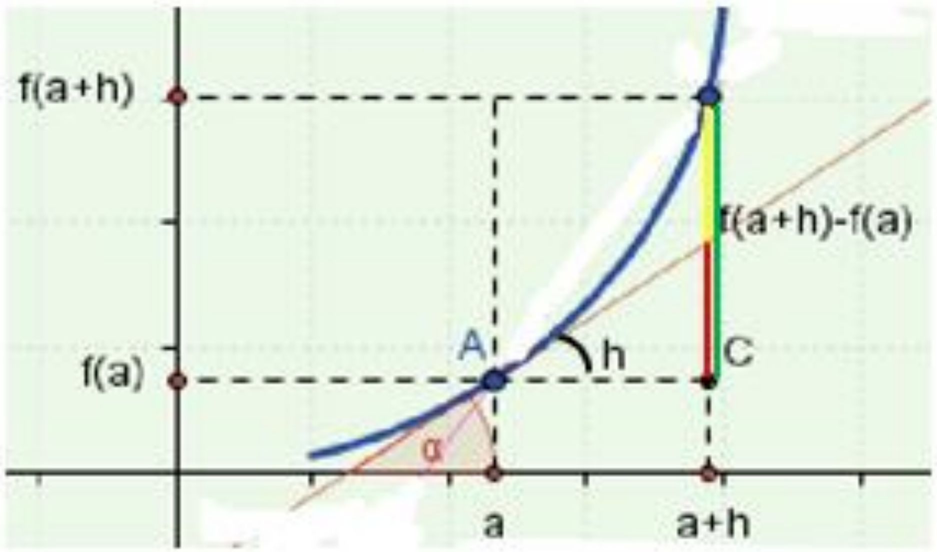
Si hubiera que calcular por ejemplo, 200 de ellas para una función dada, habría que hacer 400 cálculos de la función (para cada valor marginal a, evaluar la función, sea C, en (a+1), en (a), y luego hacer 200 diferencias.

La función derivada se calcula una sola vez, y se haría 200 evaluaciones de ella, en cada punto donde se busca el valor marginal (la mitad de evaluaciones).

Computacionalmente uno de los aspectos más costosos es evaluar una función en un punto.

Usando la derivada, el error cometido es siempre el mismo, o sea, por ejemplo, al hallar los costos marginales en 50, 100, 150 usando *C’*(50), *C’*(100), *C’*(150)?

No, depende de la pendiente de la curva que representa la función en el punto en cuestión (la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto).



Longitud Línea verde: Valor buscado
Longitud Línea roja: Aproximación con derivada
Longitud Línea amarilla:Error cometido

Otra aplicación de derivadas:.Elasticidad de una función

Elasticidad de una función f respecto a una variable x, denotemos $E_{f,x}$:

$E_{f,x}$= Función marginal/Función promedio:

$E_{f,x} = f'(x)/(f(x)/x)$

$E_{f,x} = x.f'(x)/f(x)$

Interpretación: La variación **porcentual** aproximada del valor de f(x) ante un aumento un **1%** de la variable x, a partir de un valor inicial dado x_0.

Una función se dice elástica en un punto si $|E_{f,x}|>1$

Significa que una variación en la variable independiente origina una variación proporcionalmente mayor en la variable dependiente (función). Es muy sensible al cambio de la variable independiente.

Una función se dice inelástica en un punto si $|E_{f,x}|<1$

Significa que una variación en la variable independiente origina una variación proporcionalmente menor en la variable dependiente (función). Es poco sensible al cambio de la variable independiente.

Una función se dice unitaria en un punto si $|E_{f,x}|=1$
Significa que una variación en la variable independiente origina una variación proporcionalmente igual en la variable dependiente (función).

El “signo” del resultado es el que determina el sentido de la variación (disminución o aumento de la demanda).

Una de las elasticidades más utilizadas en el campo de la Economía es la de la demanda, la cual expresa la sensibilidad que se expresa en la demanda para pequeños cambios de precios.

Ejemplo La función de demanda de un cierto bien está dada por:
$Q(p)=8000p^{-1.5}$
Clasifique el tipo de elasticidad e interprétela.

$E_{Q,p}= p.Q'(p)/Q(p)$

$Q'(p)=8000(-1.5)p^{-2.5}$
$E_{Q,p}= p.Q'(p)/Q(p) = p. 8000(-1.5)p^{-2.5}/8000p^{-1.5} = -1.5$

$|E_{Q,p}|= 1.5 \rightarrow$ Demanda elástica

Interpretación: Un incremento del precio en un **1%** origina una disminución de la demanda en un **1.5%** (disminución porque el valor dio negativo)

Valores numéricos que no son números reales con el MATLAB

```
>>  f=2*x^3+7*x^2+13*x-21;
>> double(solve(diff(f)))
```

¿Qué se está resolviendo con ese comando?

Resolviendo la ecuación f ’(x) =0

```
ans =
  -1.1667 - 0.8975i
  -1.1667 + 0.8975i
```

Cuando aparece en una respuesta numérica un número real seguido de un sigo + o – con otro número multiplicado por i, y el que acompaña a la i es diferente de cero, significa que estamos ante un número complejo (no real)

¿Qué significa?

Que ese valor no lo tenemos en cuenta. En el ejemplo visto, esa ecuación NO tiene soluciones para nosotros.

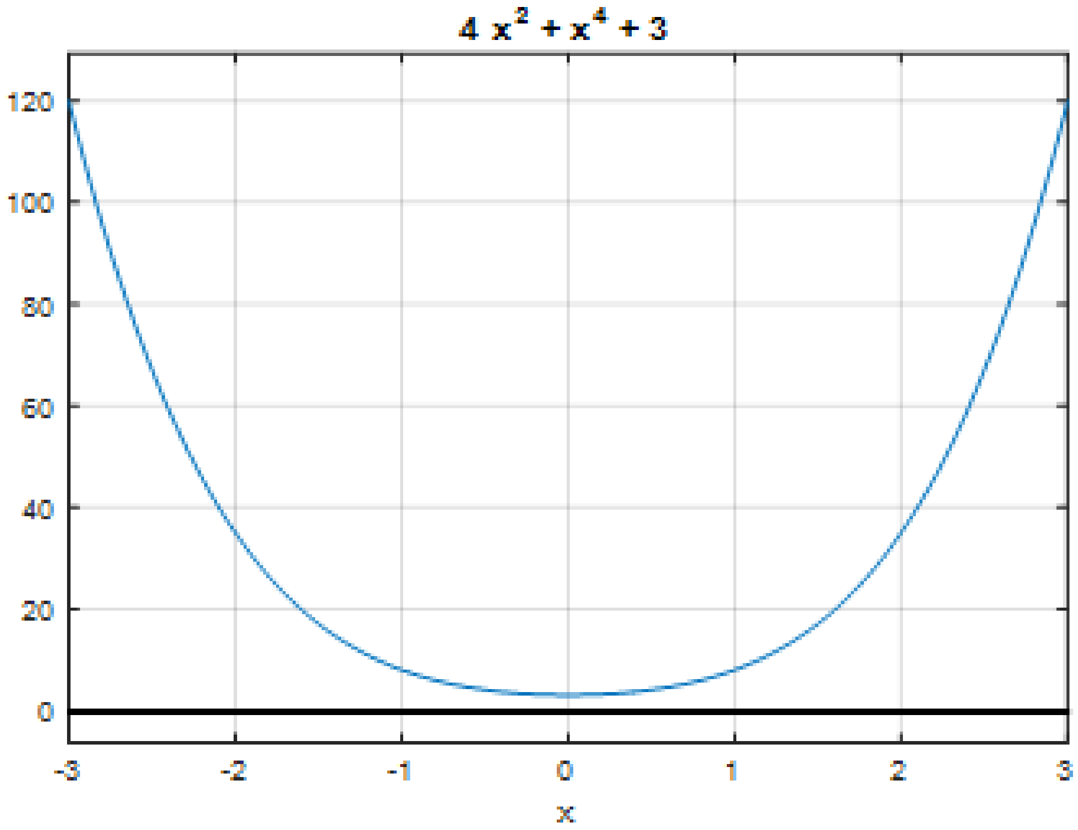
Ejemplo 2:

Hallar los puntos, si existen, donde la gráfica de la función dada corta al eje x: $f(x)=x^4+4x^2+3$

Hay que resolver la ecuación f(x) =0

```
f=x^4+4*x^2+3;
>> double(solve((f)))
```

0.0000 - 1.0000i
0.0000 + 1.0000i
0.0000 - 1.7321i
0.0000 + 1.7321i



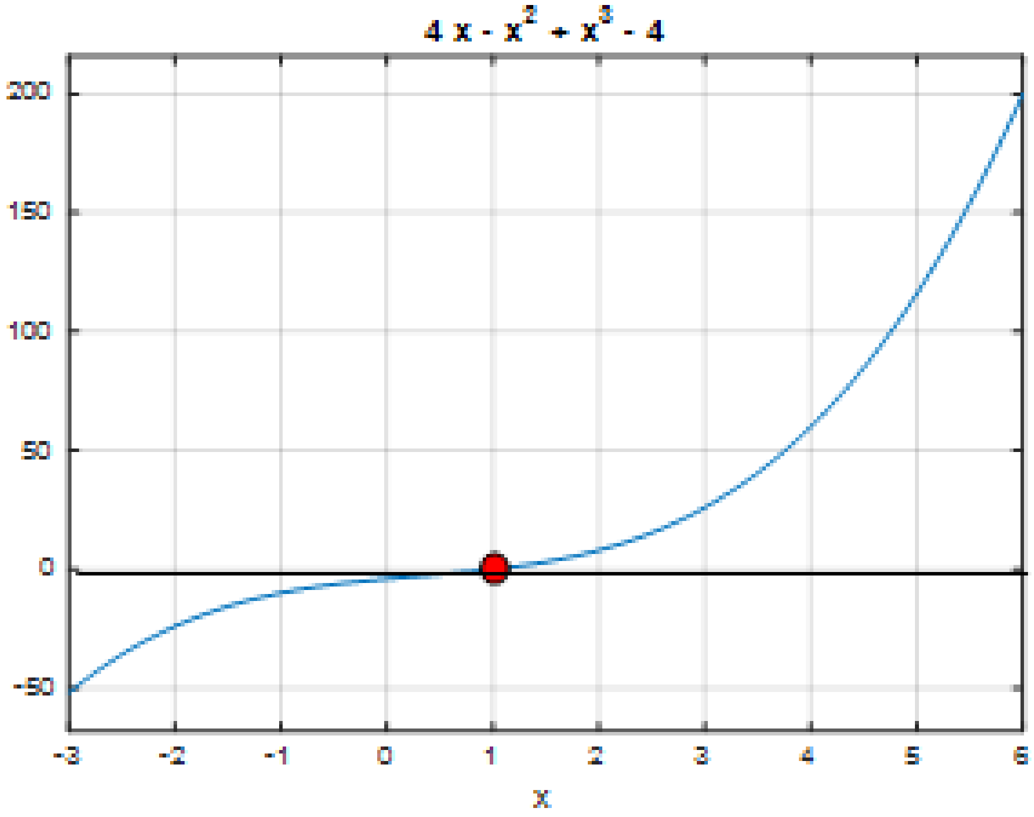
Observar que la gráfica NO corta al eje x, luego no hay valores reales que satisfacen f(x)=0

Ejemplo 3:

Hallar los puntos, si existen, donde la gráfica de la función dada corta al eje x: $f(x)=x^3-x^2+4x-4$

Hay que resolver la ecuación f(x) =0

```
f=x^3-x^2+4*x-4;
>> double(solve((f)))
```



ans =

1.0000 + 0.0000i

0.0000 - 2.0000i

0.0000 + 2.0000i

Tiene una sola raíz (solución) real, x=1

Optimización sin restricciones

Se desea maximizar o minimizar una función f: $D \subset R \to R$

Condición necesaria de extremos

Sea f derivable. Entonces si x* es un extremo local se cumple que:

$$f'(x)=0$$

Los puntos que cumplen la condición anterior se llaman puntos críticos de f y son candidatos a máximos o mínimos, pero pueden no serlo.

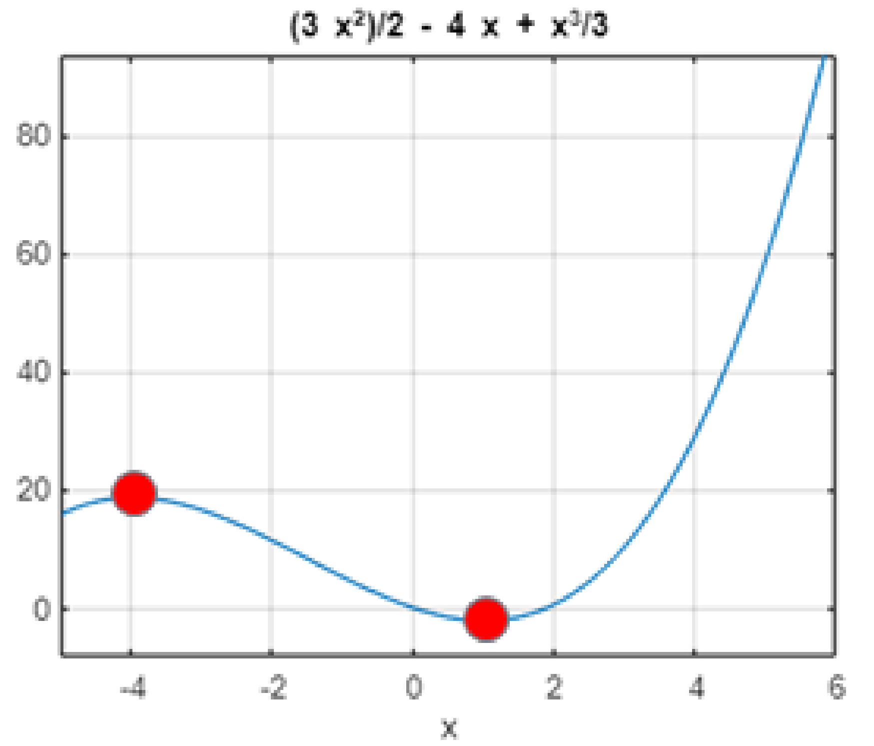
Ejemplo: Calcular los puntos críticos de:

1. $f(x) = \ln x$.
2. $f(x) = x^3/3 + (3/2)x^2 - 4x$.

1. No tiene puntos críticos, $f'(x)=1/x$

2. $f'(x)=x^2+3x-4 = (x-1).(x+4)$

Puntos críticos: x=1, x=-4

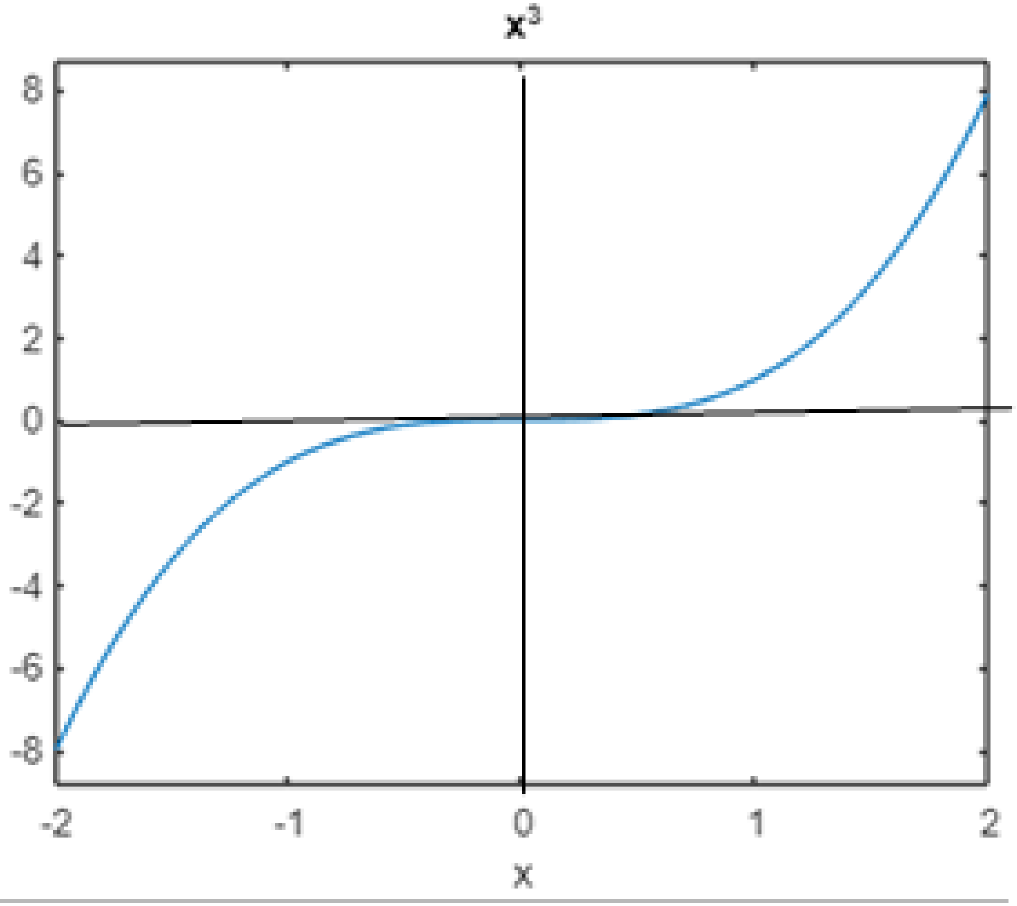


Con matlab:

```
syms x
f=x^3/3+1.5*x^2-4*x;
df=diff(f)
s=solve(df)
s=-4, 1
```

La condición necesaria de extremos no es suficiente.

Ejemplo: $f(x)= x^3$, $f'(x)= 3x^2$. En $x=0$ tiene un punto crítico y no es extremo.



Derivadas superiores

Se puede hablar de la segunda derivada de una función, la tercera derivada, y así la derivada *n*-sima (si existen).

Las que nos interesarán serán las segundas derivadas

$f''(x) = (f'(x))'$

Ejemplo:

Si $f(x) = 4x^3+5x^2+8x+4$, hallar $f''(x)$

Aplicaciones:

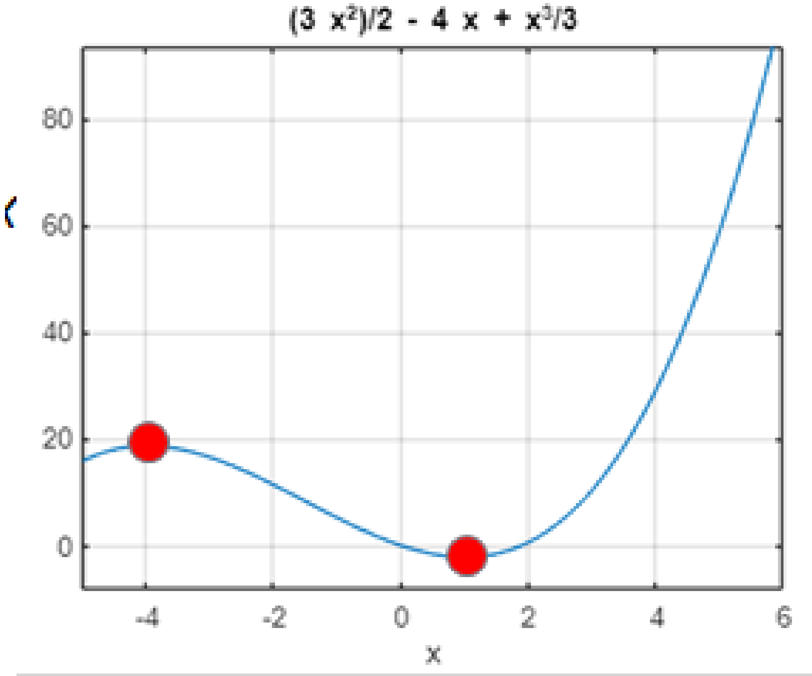
Las segundas derivadas en funciones de una variable dan condiciones suficientes de mínimo (máximo) local.

Si f es derivable en *a*, y *a* es un punto crítico (donde $f'(a)=0$) y se cumple que ***f*”(*a*) > 0**, entonces *a* es un **mínimo local** de *f*; por el contrario si ***f*”(*a*) <0**, entonces *a* es un **máximo local** de *f*.

Mínimo o máximo local significa el menor o mayor valor alrededor de ese punto.

En Ejemplo visto

$f(x) = x^3/3 + (3/2)x^2 - 4x$



Optimización sin restricciones: Condición suficiente

Funciones de una variable con segundas derivadas. Sea x=c un punto crítico de f (donde $f'(x) = 0$)

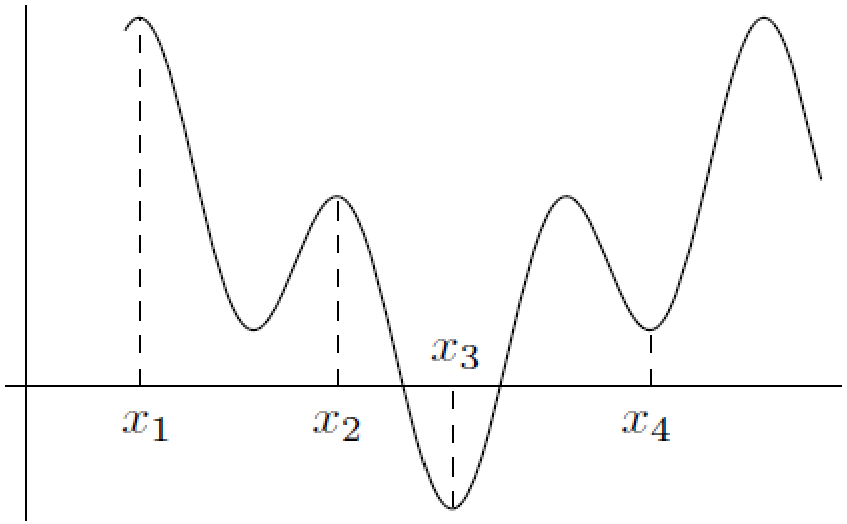
1. Si $f''(c) > 0$ entonces en c se alcanza un mínimo
2. Si $f''(c) < 0$ entonces en c se alcanza un máximo
3. Si $f''(c) = 0$ habría que evaluar las siguientes derivadas hasta encontrar la primera que no sea nula

Si esa derivada es de orden impar, entonces el punto no es óptimo (punto de inflexión)

Si esa derivada es de orden par, el punto sería mínimo o máximo dependiendo de su signo (< o >)

Ejemplo visto de $f(x)=x^3$, c=0.

$f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$, $f'(0)=f''(0)=0$, $f'''(0)=6$ Impar



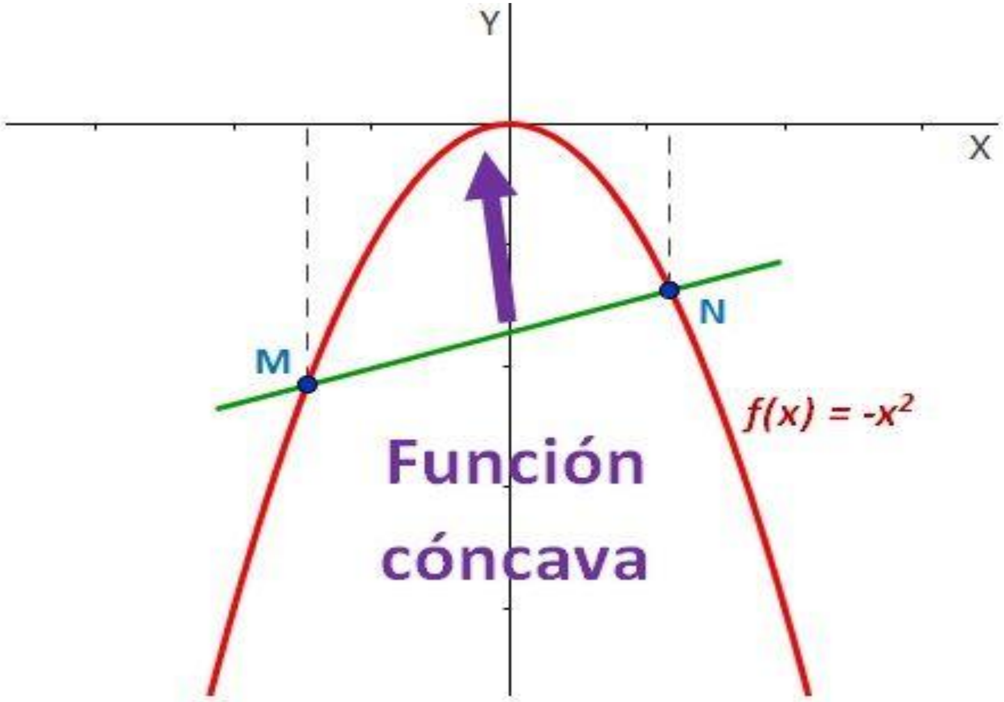
En el gráfico anterior:
x_2 es un máximo local, x_1 es un máximo global o absoluto
x_4 es un mínimo local, x_3 es un mínimo global o absoluto

Con MATLAB:
diff(f) :Primera derivada de f
diff(f,n): Derivada n-sima de f

En Ejemplo visto, hallar f ''(x)
$f(x) = x^3/3 + (3/2)x^2 - 4x$

Funciones importantes a la hora de determinar óptimos de una función (máximos y mínimos)

Funciones cóncavas:
Tienen la propiedad de que la recta que une dos puntos cualquiera queda siempre por debajo de la función (curva)

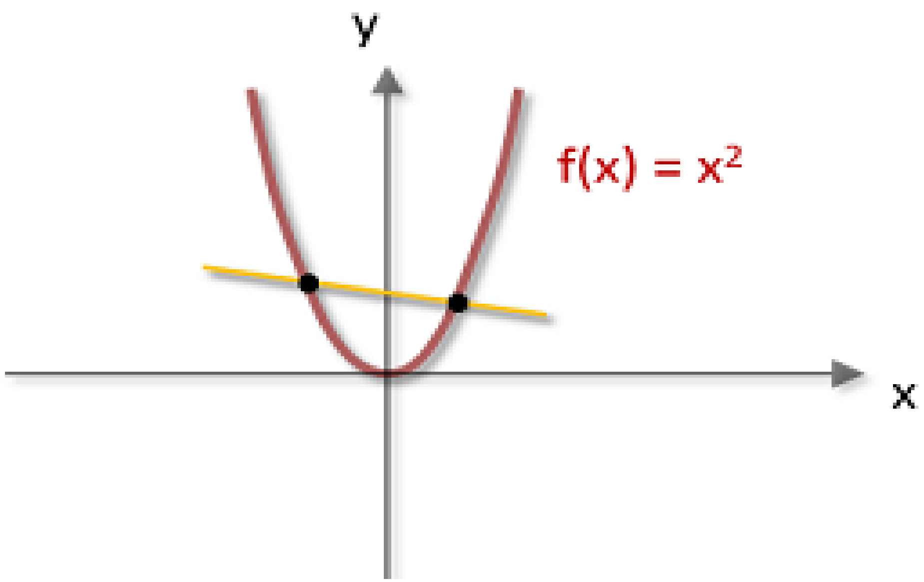


Un máximo local es global (absoluto)

f ’’ (x) ≤ 0 para toda x

Funciones convexas:

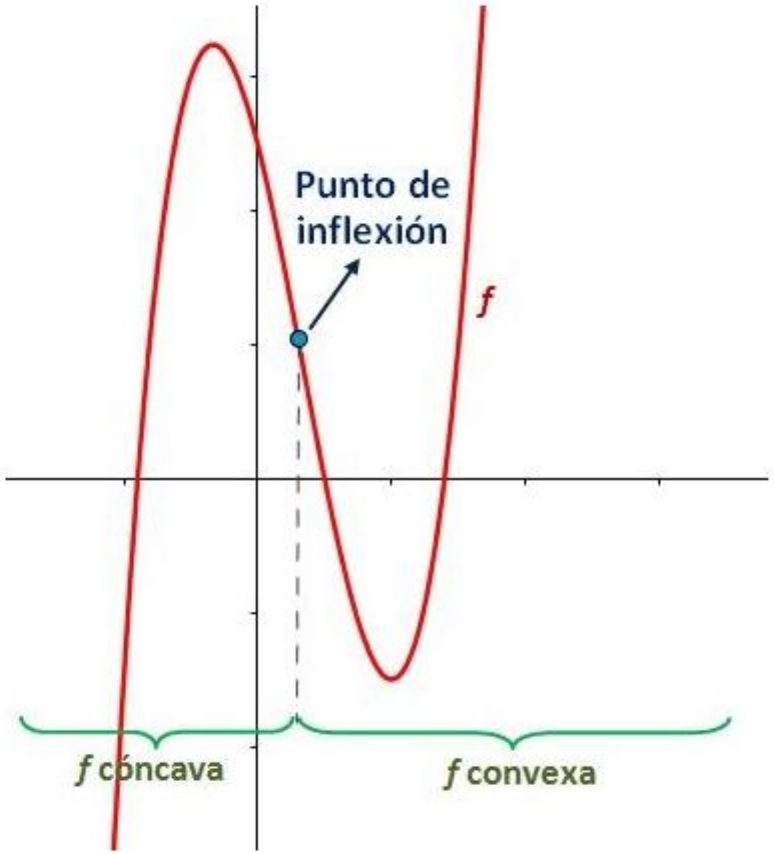
Tienen la propiedad de que la recta que une dos puntos cualquiera queda siempre por arriba de la función (curva)



Un mínimo local es global (absoluto)

f ’’ (x) ≥ 0 para toda x

Funciones que no son cóncavas y convexas, si por “tramos”



Otra de las aplicaciones importantes de las segundas derivadas de una función

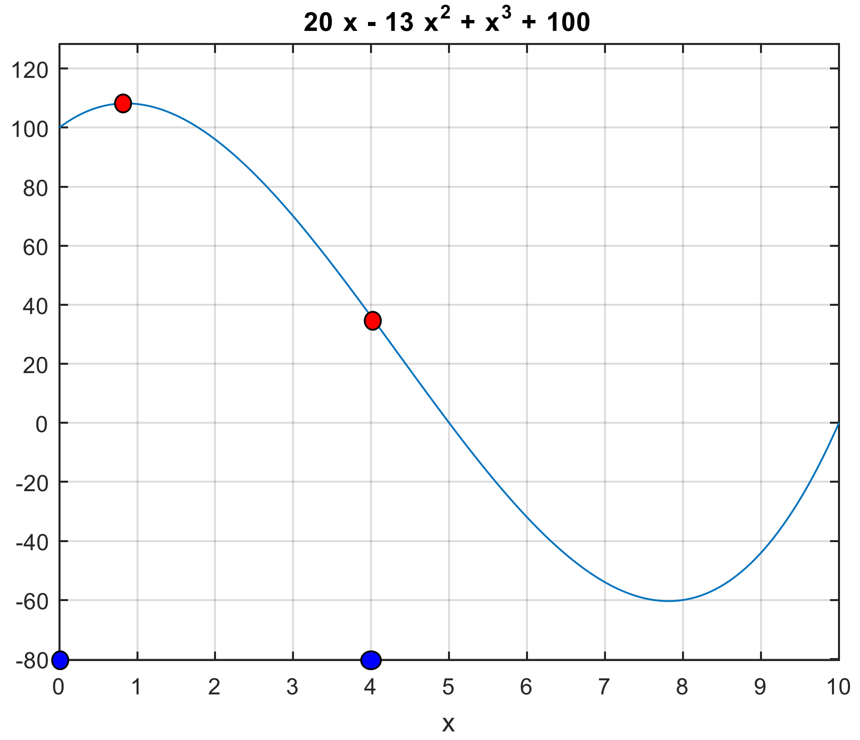
- ✓ Determinar si la función es cóncava o convexa, o regiones donde lo es.

Si la función es **cóncava** se cumple que f''(x)≤0 para toda x en su dominio y un **máximo local es global**

Si la función es **convexa** se cumple que f'' (x)≥0 para toda x en su dominio un **mínimo local es global**

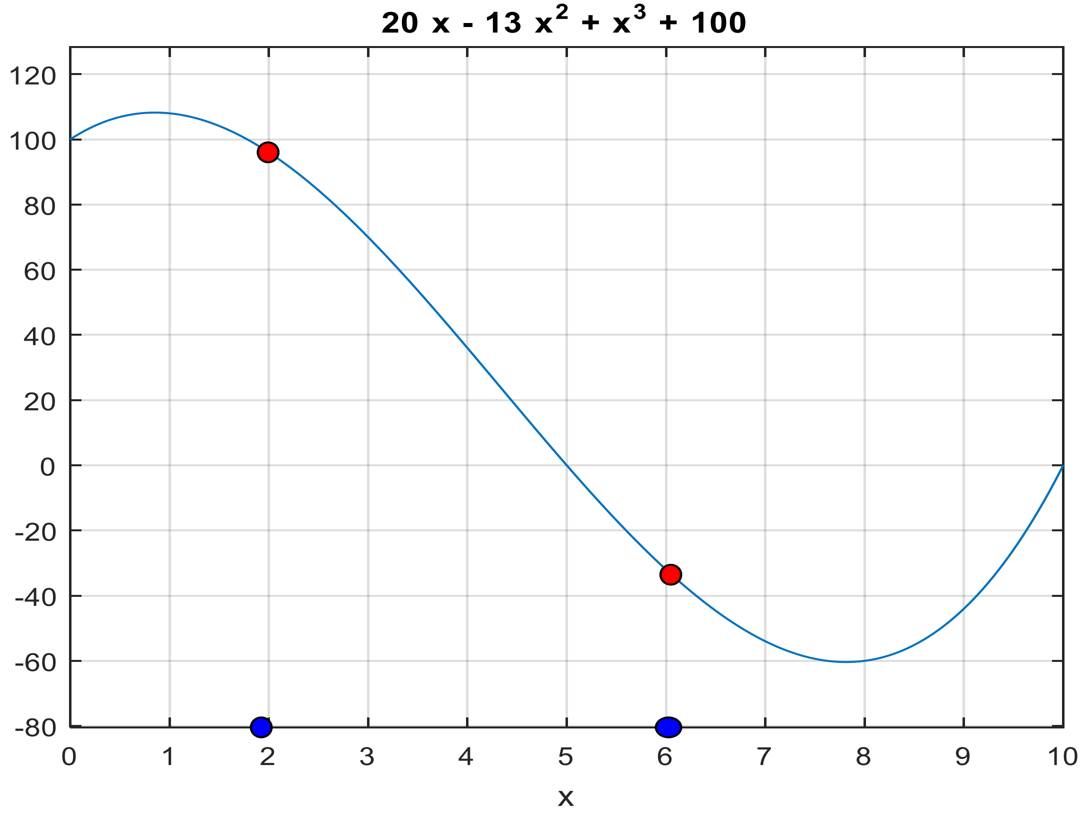
Optimización de funciones de una variable con restricciones

Sea f(x) función a maximizar o minimizar en un intervalo [a,b] y x* es el valor máximo o mínimo de f en [a,b] . Entonces f '(x*)=0 o x*=a o x*=b



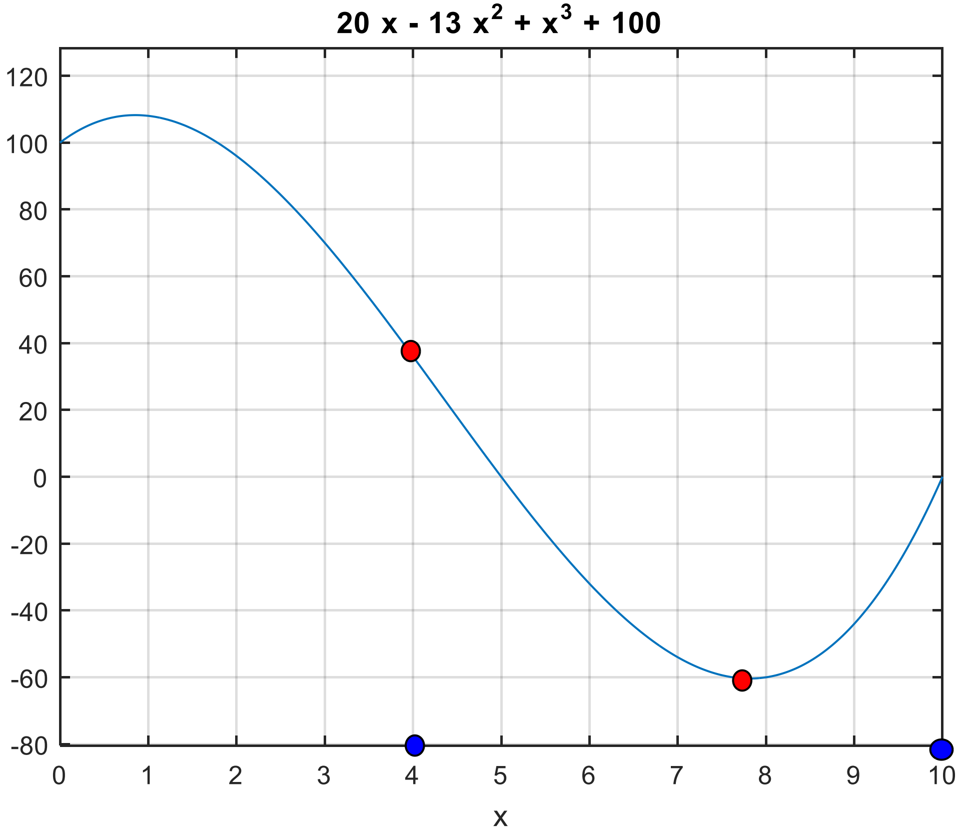
Dado el gráfico de la función:

Si consideramos el intervalo [0,4], el valor máximo absoluto está en x=0.8532 (punto donde la derivada de f es cero) y el mínimo en x=4 (un extremo del intervalo)



Si consideramos el intervalo [2,6], el valor máximo absoluto está en x=2 (un extremo del intervalo) y el mínimo en x=6 (el otro extremo del intervalo)

Ninguno de los puntos críticos está en el intervalo considerado.



Si consideramos el intervalo [4,10], el valor máximo absoluto está en $x=4$ (un extremo del intervalo) y el mínimo en $x=7.8134$ (uno de los puntos donde la derivada de f es cero)

Procedimiento para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de funciones de una variable en un intervalo dado [a,b]

1. Hallar los puntos críticos de f (o sea, donde f'(x)=0)

2. Seleccionar de los puntos críticos de f hallados en el Paso 1 los que están en el intervalo [a,b]

3. Evaluar la función dada en los puntos obtenidos del Paso 2, y en a y b(extremos del intervalo).
El mínimo absoluto será la x donde f vale menos, el máximo absoluto donde f vale más de todos los puntos evaluados.

Aplicación práctica de lo visto

Suponga que f(x) es la función de utilidad que da la ganancia esperada en función de la producción de x artículos.

Si usted puede producir entre 15 y 35 artículos (dado en miles de ellos).
¿Qué información le proporciona hallar los extremos absolutos de f en el intervalo [15,35]?

Ejemplo

Hallar el rango de valores entre los que se mueve los costos de producción dados por la función $C(x)=x^3/3-7/2x^2+10x$ si la producción está entre 1 y 6

$C'(x)=x^2-7x+10 = 0 \iff (x-5)(x-2) = 0$

Puntos críticos: $x=2$, $x=5$ ambos en el intervalo dado

Candidatos a extremos absolutos en intervalo [1,6]

Puntos críticos: $x=2$, $x=5$

Extremos del intervalo: $x=1$, $x=6$

Evaluar C(x) en cada candidato anterior:

$C(1)=6.8333$

$C(2)=8.6667$ El mayor de todos

$C(5)=4.1667$ El menor de todos

$C(6)=6$

Todos los costos en ese rango de producción están entre 4.1667 y 8.6667

Evaluar C(x) en cada candidato anterior:

C(1)=6.8333

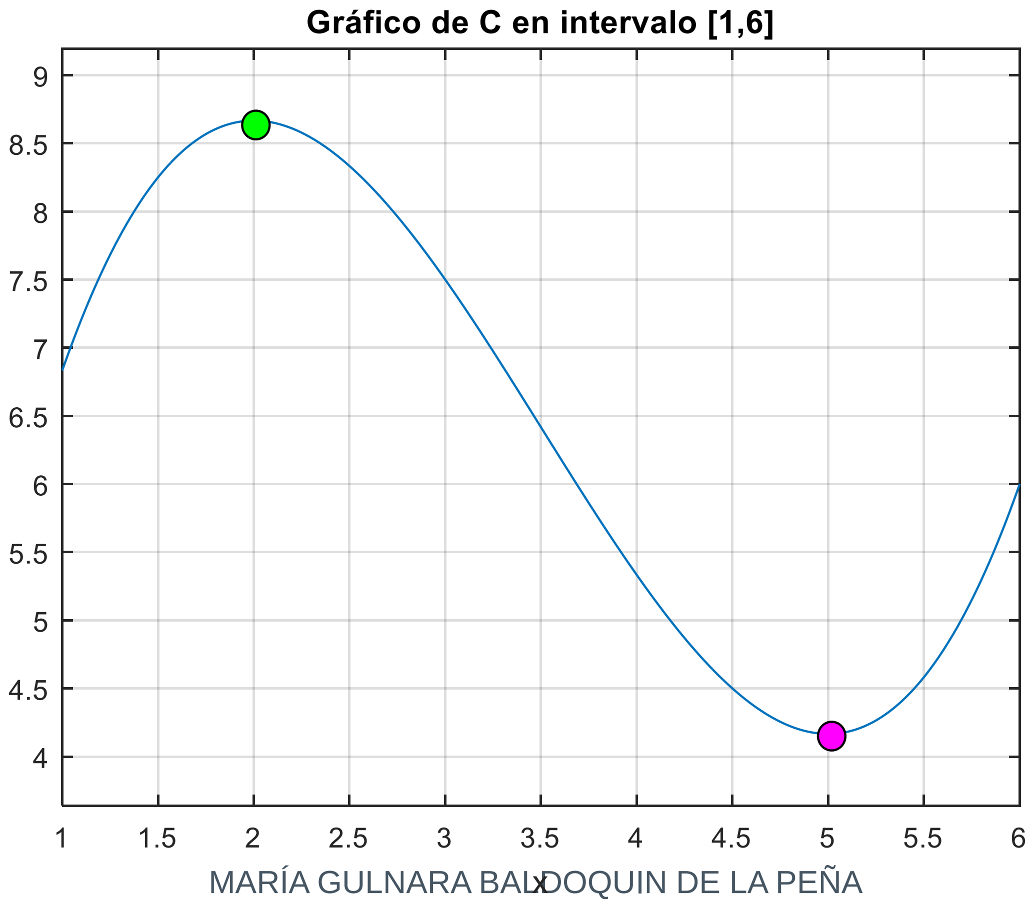
C(2)=8.6667 El mayor de todos

C(5)=4.1667 El menor de todos

C(6)=6

Todos los costos en ese rango de producción están entre 4.1667 y 8.6667

Tanto el punto de mínimo como de máximo son puntos críticos



Ejemplo con MATLAB

Hallar el rango de valores entre los que se mueve los costos de producción dados por la función $C(x)=x^3/3-7/2x^2+10x$ si la producción está entre 1 y 6

```
syms x
C=x^3/3-3.5*x^2+10*x;
dC=diff(C)
S=double(solve(dC))  % Para hallar puntos críticos : 2,5
C1=double(subs(C,1)) % Para hallar C(1)
C6=double(subs(C,6)) % Para hallar C(6)
C2=double(subs(C,2)) % Para hallar C(2)
C5=double(subs(C,5)) % Para hallar C(5)
```