Curso: Inversiones en Mercado de Capitales

Profesor: Juan Carlos Botero Ramírez

jcbotero@pim-capital.com   jcboteror@eafit.edu.co

https://www.linkedin.com/in/juan-carlos-botero-ramirez-1a86b228/

316 221-3811

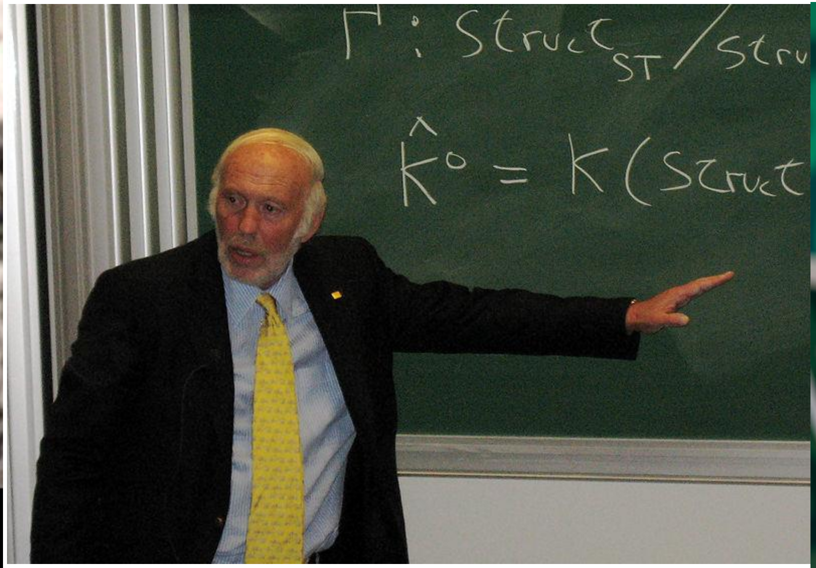
octubre de 2023

Universidad EAFIT

¿Quiénes le han dado forma al mundo de las Inversiones?

En la práctica

John Bogle
Fundador Vanguard



James Simons
Renaissance Technologies

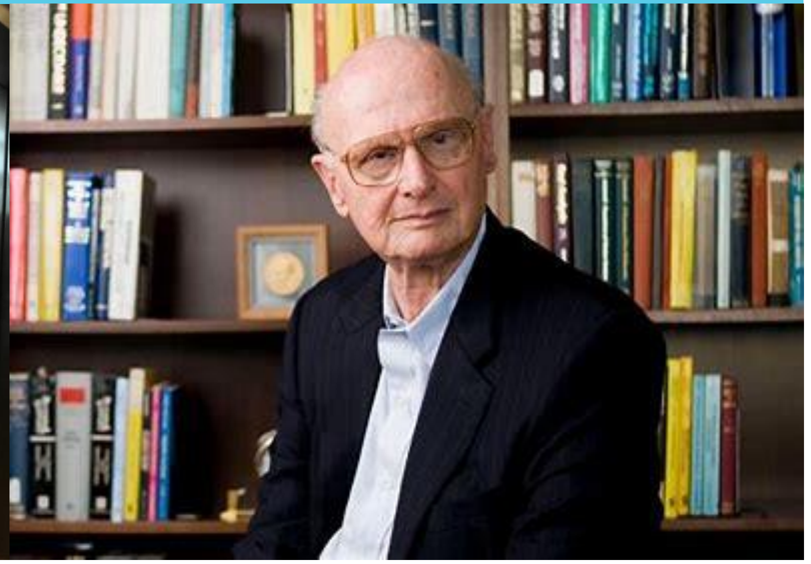
Warren Buffett
Berkshire Hathaway

Desde la teoría

Eugene Fama
Efficient Market Hypothesis

Myron Scholes
Black-Scholes Option Pricing

Robert C. Merton
Dynamic Finance



Harry Markowitz
Optimización de portafolios

mitsloan
MIT Sloan School of Management

"You'd be surprised how many people can't articulate why it is that they're investing in things or what they think the risks are."

Laura Kodres
Distinguished Senior Fellow,
Golub Center for Finance and Policy at MIT Sloan

MIT MANAGEMENT SLOAN SCHOOL

mitsloan
MIT Sloan School of Management

"Es sorprendente ver cuánta gente no puede articular una explicación de porqué están invirtiendo en algo o sobre cuáles piensan que son los riesgos que están tomando."

Laura Kodres
Distinguished Senior Fellow,
Golub Center for Finance and Policy at MIT Sloan

MIT MANAGEMENT SLOAN SCHOOL

Mercado de Capitales

El **mercado de capitales** es el escenario donde el ahorro se convierte en inversión, ayudando a los agentes del mercado, llámense empresas o personas naturales, a suplir sus necesidades de financiamiento

Existen dos grandes ramificaciones de los Mercados de Capitales:

a) Mercados Públicos
b) Mercados Privados

Mercados Públicos:

Aquellos en donde se transan títulos que pueden ser comprados o vendidos por cualquier persona (agente). Títulos del Mercado Público. Generalmente se transan en una Bolsa o en el mercado OTC (*Over The Counter*)

Mercado de Capitales

El **mercado de capitales** es el escenario donde el ahorro se convierte en inversión, ayudando a los agentes del mercado, llámense empresas o personas naturales, a suplir sus necesidades de financiamiento

Mercados Públicos:

Aquellos en donde se transan títulos que pueden ser comprados o vendidos por cualquier persona (agente). Títulos del Mercado Público. Generalmente se transan en una Bolsa o en el mercado OTC (*Over The Counter*)

Mercados Privados:

Aquellos no transados en una Bolsa o mercado público. Sólo inversionistas calificados pueden tener acceso a este mercado. Puede ser: Private Equity, Private Debt, VC, Growth, Real Estate, Infrastructure.

Participantes del Mercado

¿Por dónde comprar o vender activos financieros?

- **Bolsa:** Bolsa de Valores de Colombia: Acciones y Renta Fija
- **OTC:** *Over The Counter* (Informal)

Reguladores:

- Superintendencia Financiera
- AMV

Participantes del Mercado

Reguladores:

- Superintendencia Financiera
- AMV

Supervisión:

- Superintendencia Financiera

Participantes del Mercado

Supervisión:

- Superintendencia Financiera

Inversionistas:

- **Menores:** Personas Naturales
- **Grandes:** Empresas
- **Calificados:** Fondos de Pensiones, Aseguradoras y Sector Financiero

Participantes del Mercado

Inversionistas:

- **Menores:** Personas Naturales
- **Grandes:** Empresas
- **Calificados:** Fondos de Pensiones, Aseguradoras y Sector Financiero

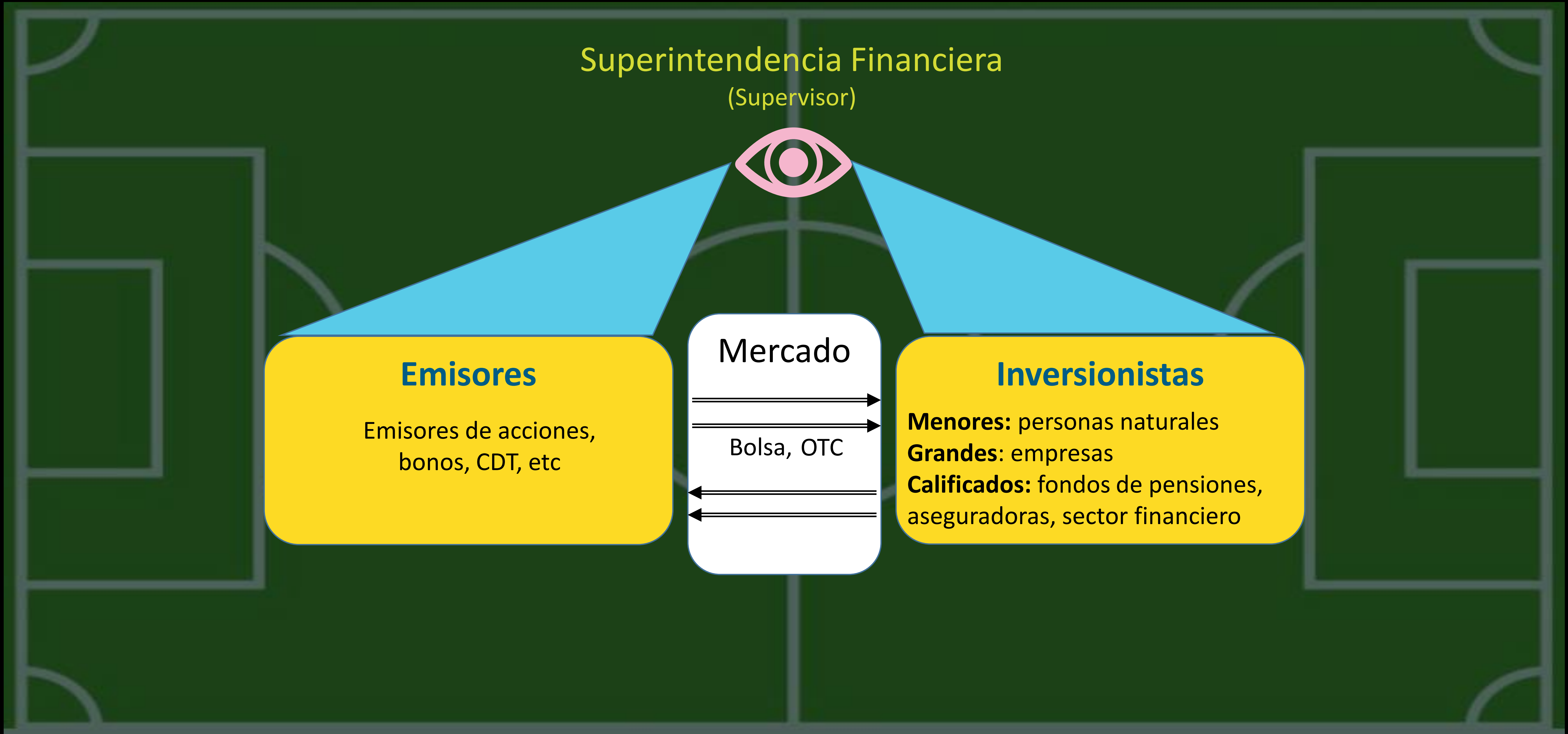
Emisores:

- De acciones, Bonos, CDT, etc

Participantes del Mercado

Superintendencia Financiera y AMV

(Regulador)



Información General Sobre el Mercado de Valores

UNIVERSIDAD EAFIT®

- En el documento PDF "Cartilla AMV Mercado de Valores" encontrarán una descripción didáctica del mercado de valores en Colombia.

Tipos de Mercados

Mercado Cambiario

El mercado de divisas o mercado cambiario es un mercado que se caracteriza por el libre cambio de divisas, es decir, su objetivo principal es el de facilitar el comercio internacional y la inversión. También se conoce como FOREX (*Foreign Exchange*, que se traduce como intercambio de monedas extranjeras). Dicho mercado es regulado por el Banco de la República (Resolución Externa 01 de 2018 que compendia y modifica la regulación cambiaria) y está compuesto por las operaciones realizadas en el mercado cambiario y en el mercado libre.

Intermediarios del Mercado Cambiario

La regulación establece 5 grupos de IMC según su objeto legal autorizado y patrimonio técnico: Grupo 1 y 2: establecimientos de crédito; Grupo 3: sociedades comisionistas de bolsa; Grupo 4: Sociedades de Intermediación Cambiaria y Servicios Financieros Especiales (SICSFE), Sociedades Especializadas en Depósitos y pagos Electrónicos (SEDPE), y Grupo 5: SEDPE.

¿Qué instrumentos hacen parte del mercado cambiario?

Tipos de Mercados

Mercado de Renta Fija

El mercado de renta fija hace referencia, por lo general, a aquellos mercados en los que se negocian activos financieros de deuda emitidos por los estados, organismos y entidades públicas y por empresas privadas. Estos instrumentos en Colombia se transan en un sistema llamado MasterTrader, administrado por la Bolsa de Valores de Colombia (BVC).

¿Qué instrumentos hacen parte del mercado de renta fija?

Bonos

Papeles Comerciales

Títulos de Tesorería de la Nación (TES)

CDT

Contenidos educativos – AMV Colombia

Tipos de Mercados

Mercado de Acciones (Renta Variable)

El mercado de las acciones es el mercado en el que las sociedades pueden emitir títulos con el fin de encontrar financiaciones. Los inversores que compran estos títulos se convierten entonces en accionistas de la sociedad y obtienen dividendos calculados a partir de los beneficios realizados por la empresa gracias a esta financiación y de manera proporcional al número de acciones compradas.

Así pues, el mercado de las acciones permite adquirir títulos de todas las sociedades cotizadas en Bolsa sobre los distintos mercados financieros mundiales.

¿Qué instrumentos hacen parte del mercado de acciones?

- Acciones Ordinarias
- Acciones Privilegiadas
- Acciones Preferenciales

¿Qué debe saber un inversionista sobre renta variable? (amvcolombia.org.co)

Tipos de Mercados

Mercado Monetario (*Money Market*)

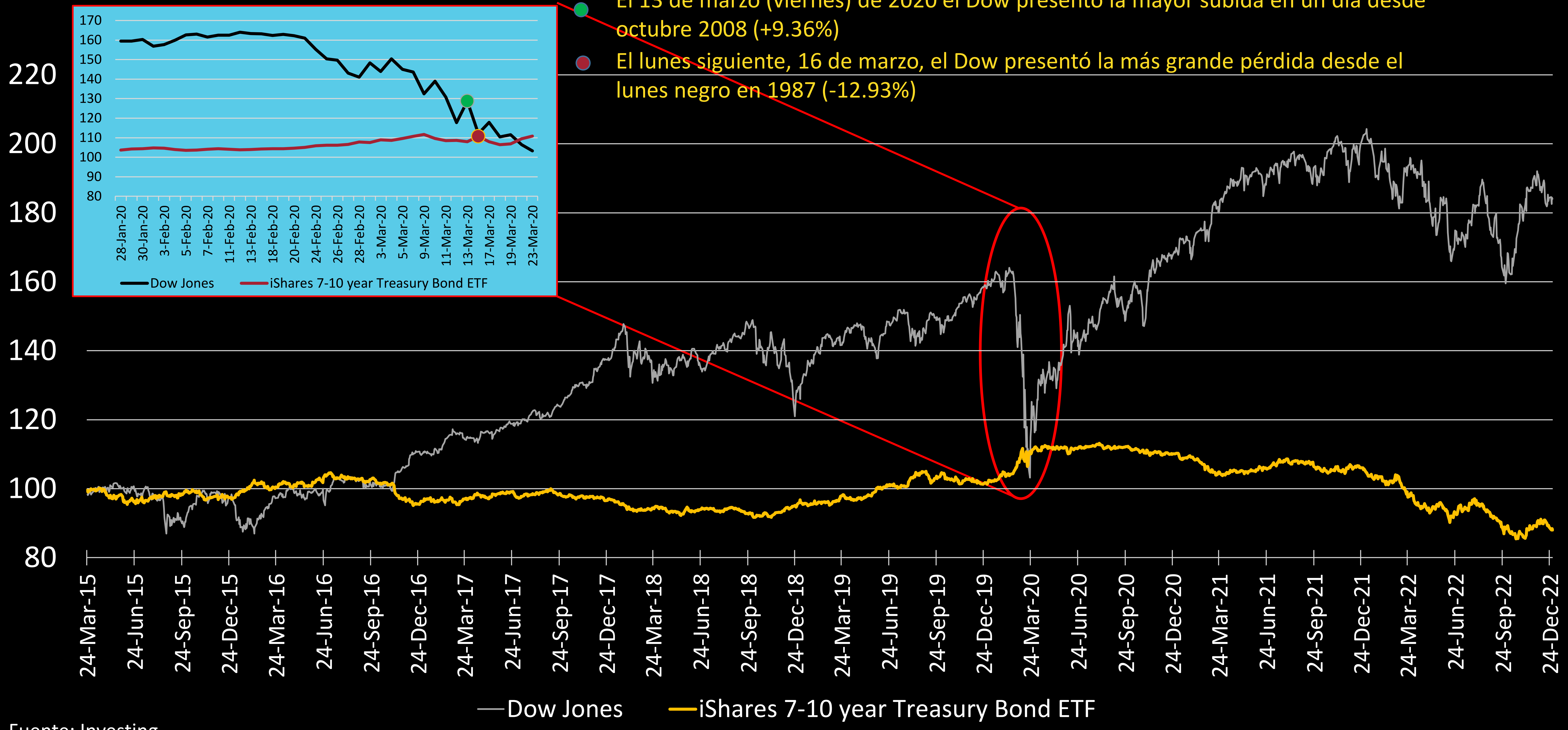
El mercado monetario es una rama dentro del mercado financiero donde se negocian activos financieros (certificado de depósitos, pagarés, etc.) a corto plazo. Su finalidad es ofrecer a los agentes económicos la opción de transformar su riqueza en títulos o valores con alto grado de liquidez.

¿Qué instrumentos hacen parte del mercado monetario?

Evolución Precio US Treasury 7-10y y Dow Jones

UNIVERSIDAD EAFIT

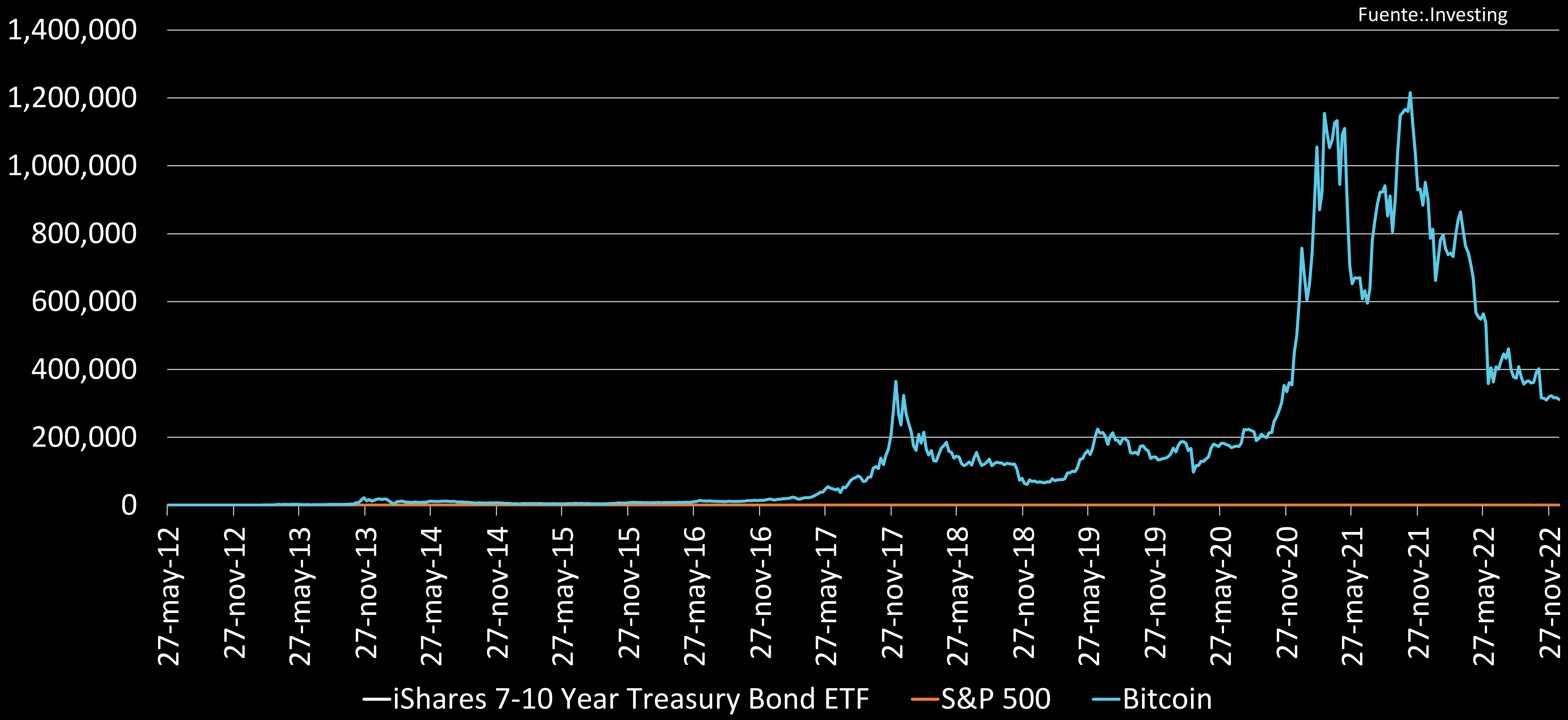
- El 13 de marzo (viernes) de 2020 el Dow presentó la mayor subida en un día desde octubre 2008 (+9.36%)
- El lunes siguiente, 16 de marzo, el Dow presentó la más grande pérdida desde el lunes negro en 1987 (-12.93%)



Fuente: Investing

Ahora comparemos con Bitcoin

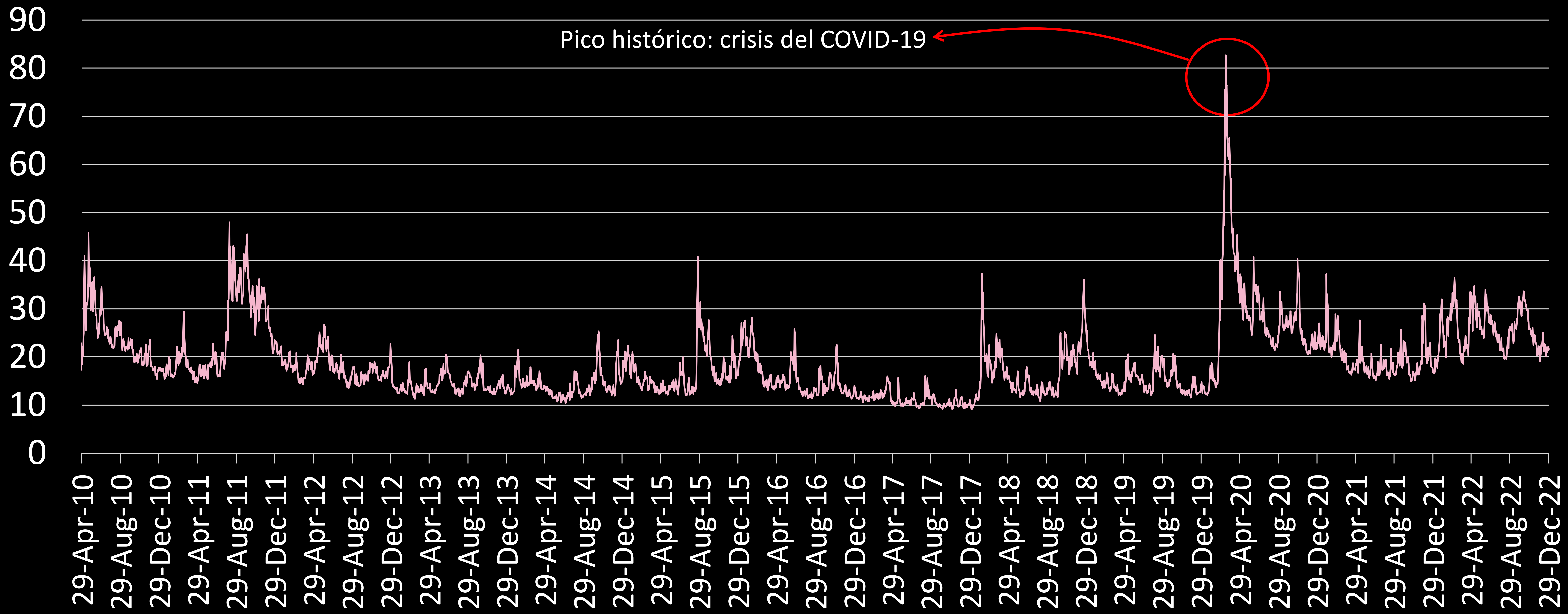
Evolución Precio US Treasury 7-10y, S&P 500 y Bitcoin



Esto nos da pie para comenzar a hablar de volatilidad como medida del riesgo

Evolución VIX (Volatilidad del Mercado Accionario)

El índice VIX (también conocido como el Índice del Miedo) es un indicador que mide la volatilidad en el mercado bursátil estadounidense a los siguientes 30 días. El VIX se considera una señal del sentimiento -o del pesimismo- del mercado en cuanto a las fluctuaciones esperadas.



Fuente:.Yahoo Finance

Algunos Conceptos Estadísticos

Media

$$\mu = E(r) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot r_i$$

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i [r_i - E(r)]^2$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Estimador de la Media:

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i$$

Estimador de la Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^2$$

Algunos Conceptos Estadísticos

Varianza

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i [r_i - E(r)]^2$$

Estimador de la Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^2$$

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Skewness

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^3}{\sigma^3}$$

Estimador del Skewness: (coef. de Simetría)

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^3}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^3}$$

Algunos Conceptos Estadísticos

Desviación Estándar

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Skewness

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^3}{\sigma^3}$$

Kurtosis

$$kurt = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^4}{\sigma^4}$$

Estimador del Skewness: (coef. de Simetría)

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^3}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^3}$$

Estimador de la Kurtosis:

$$kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^4}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^4}$$

Algunos Conceptos Estadísticos

Skewness

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^3}{\sigma^3}$$

Kurtosis

$$kurt = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^4}{\sigma^4}$$

Covarianza

$$\sigma_{rR} = \sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu_r)(R_i - \mu_R)$$

Estimador del Skewness: (coef. de Simetría)

$$skew = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^3}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^3}$$

Estimador de la Kurtosis:

$$kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^4}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^4}$$

Estimador de la Covarianza:

$$\widehat{\sigma_{rR}} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \mu_r)(R_i - \mu_R)$$

Algunos Conceptos Estadísticos

Kurtosis

$$kurt = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu)^4}{\sigma^4}$$

Covarianza

$$\sigma_{rR} = \sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \mu_r)(R_i - \mu_R)$$

Correlación

$$\rho_{rR} = \frac{\sigma_{rR}}{\sigma_r \cdot \sigma_R}$$

Estimador de la Kurtosis:

$$kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{N} [r_i - \mu_r]^4}{N \cdot \widehat{\sigma_r}^4}$$

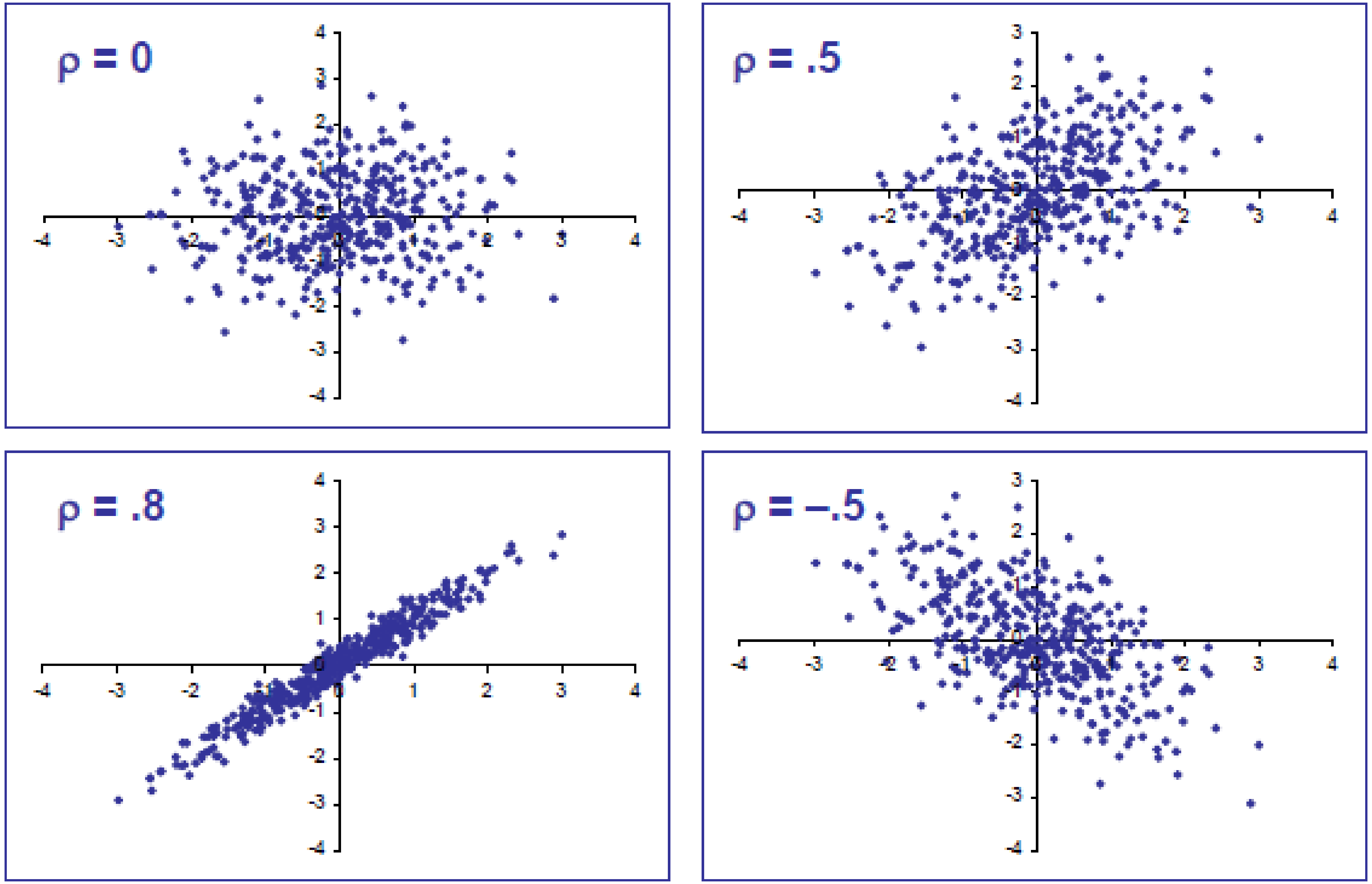
Estimador de la Covarianza:

$$\widehat{\sigma_{rR}} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (r_i - \mu_r)(R_i - \mu_R)$$

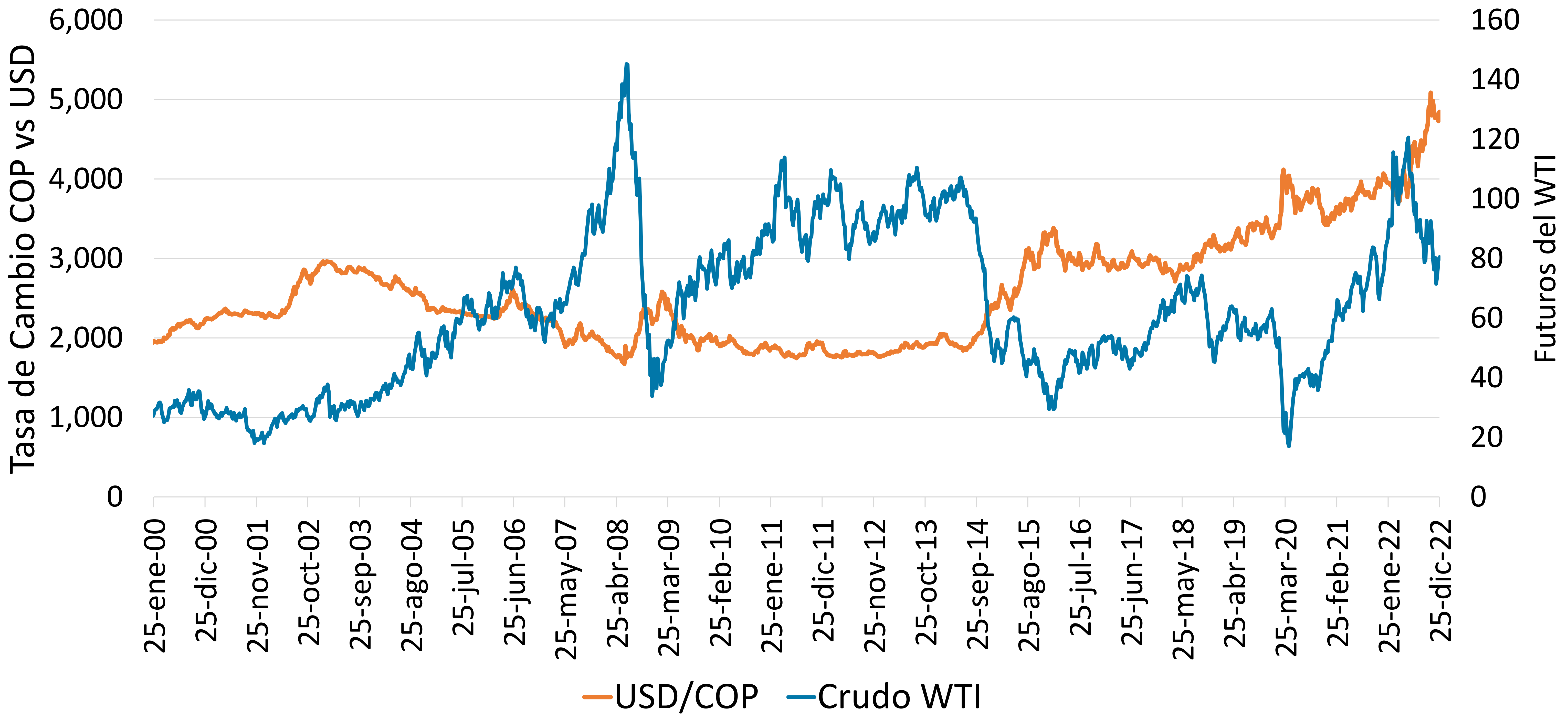
Estimador de la Correlación:

$$\widehat{\rho_{rR}} = \frac{\widehat{\sigma_{rR}}}{\widehat{\sigma_r} \cdot \widehat{\sigma_R}}$$

Ejemplos de Correlación Entre dos Variables Aleatorias

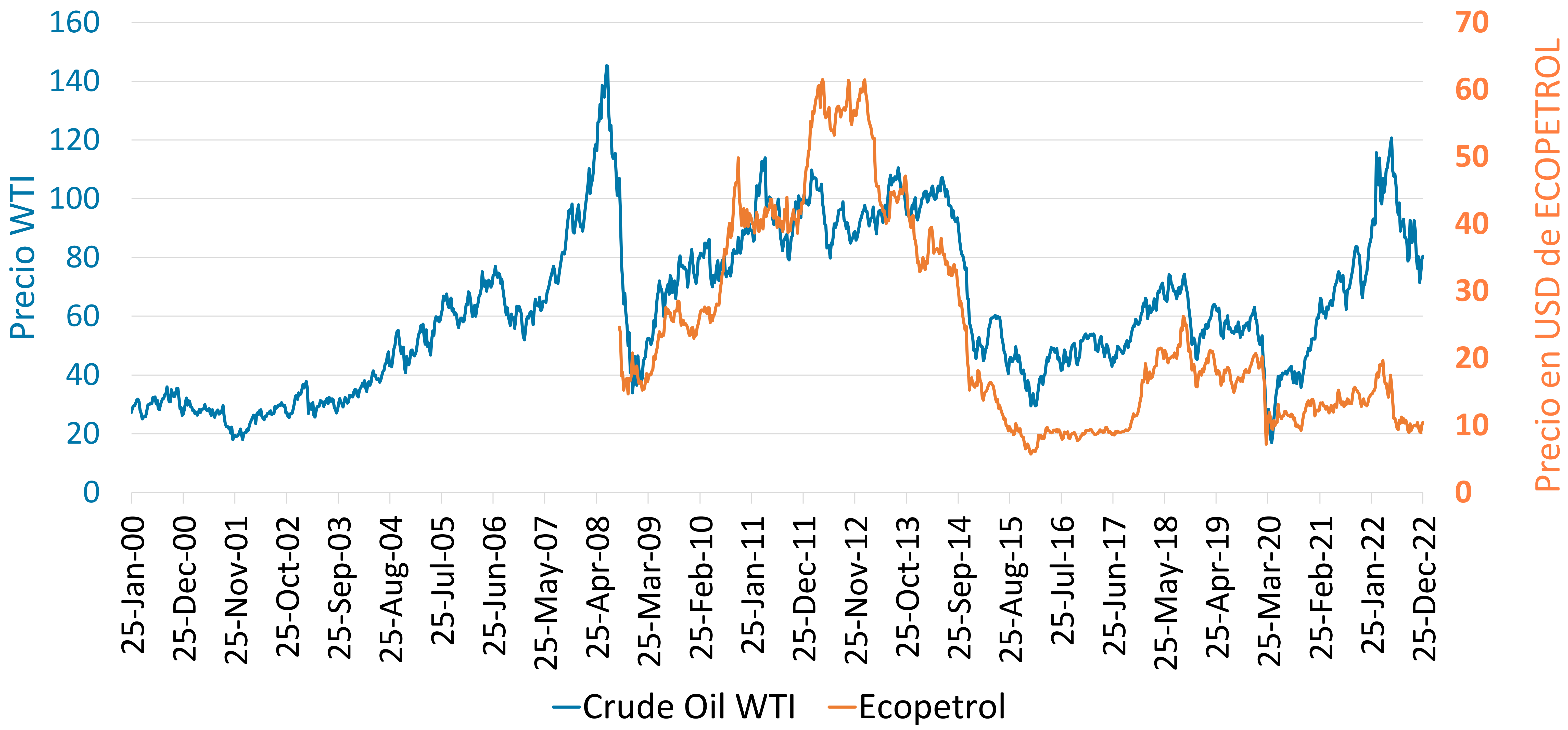


Tasa de Cambio COP vs USD y Precio Petróleo
Ejemplo de Correlación Negativa



Fuente: Investing

Ecopetrol vs Petróleo (Ejemplo de Correlación Positiva)



Fuente: Investing

Ejercicios

Ejercicio 1:

Vamos al archivo “Retornos Apple y NASDAQ.xls” y calculemos media, desviación estándar, varianza, simetría y *kurtosis*.

Eventos Aleatorios

¿Qué hace que un evento sea aleatorio?

¿Cree Usted que el retorno de mañana de una acción es un evento aleatorio?

Podemos calcular el valor esperado de eventos aleatorios. Si la probabilidad de que el precio de una acción suba el 8% en 2023 es del 40% y la probabilidad de que caiga 4% es del 60%, **¿**Cuál es el valor esperado del retorno de esa acción en 2023**?**

¿Cómo Manejamos Eventos Aleatorios?

Para esto usamos las **distribuciones de probabilidad**.

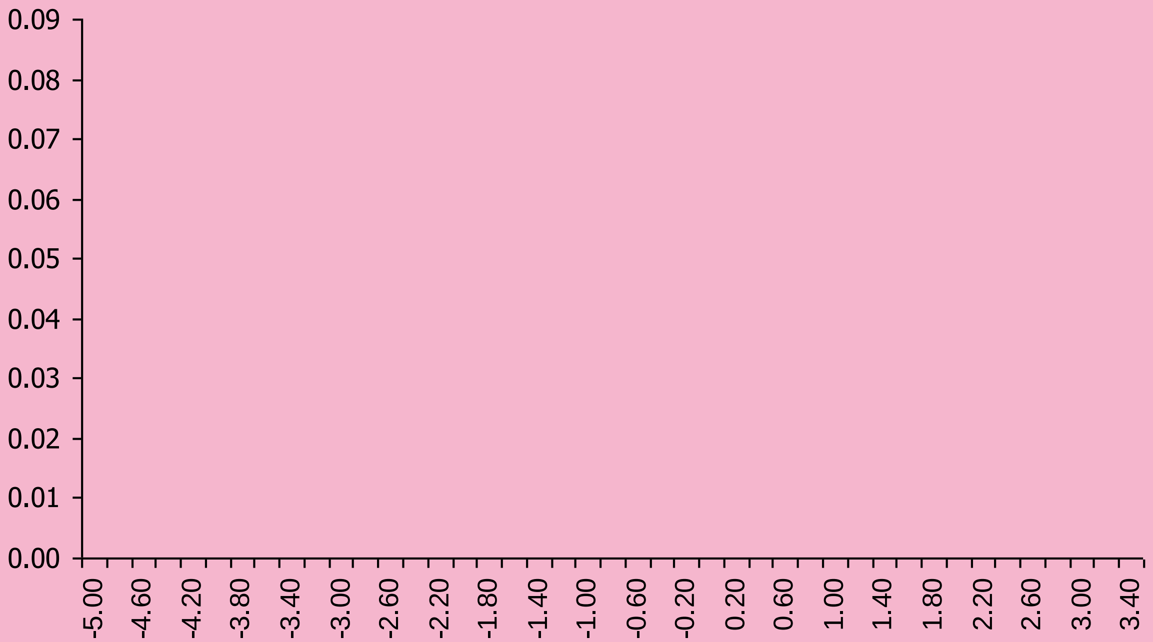
Son la herramienta matemática para tratar eventos aleatorios

Dos de las distribuciones de probabilidad más usadas son:

Distribución Binomial

$$X = \begin{cases} 0 \text{ con probabilidad } p \\ 1 \text{ con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

Distribución Normal



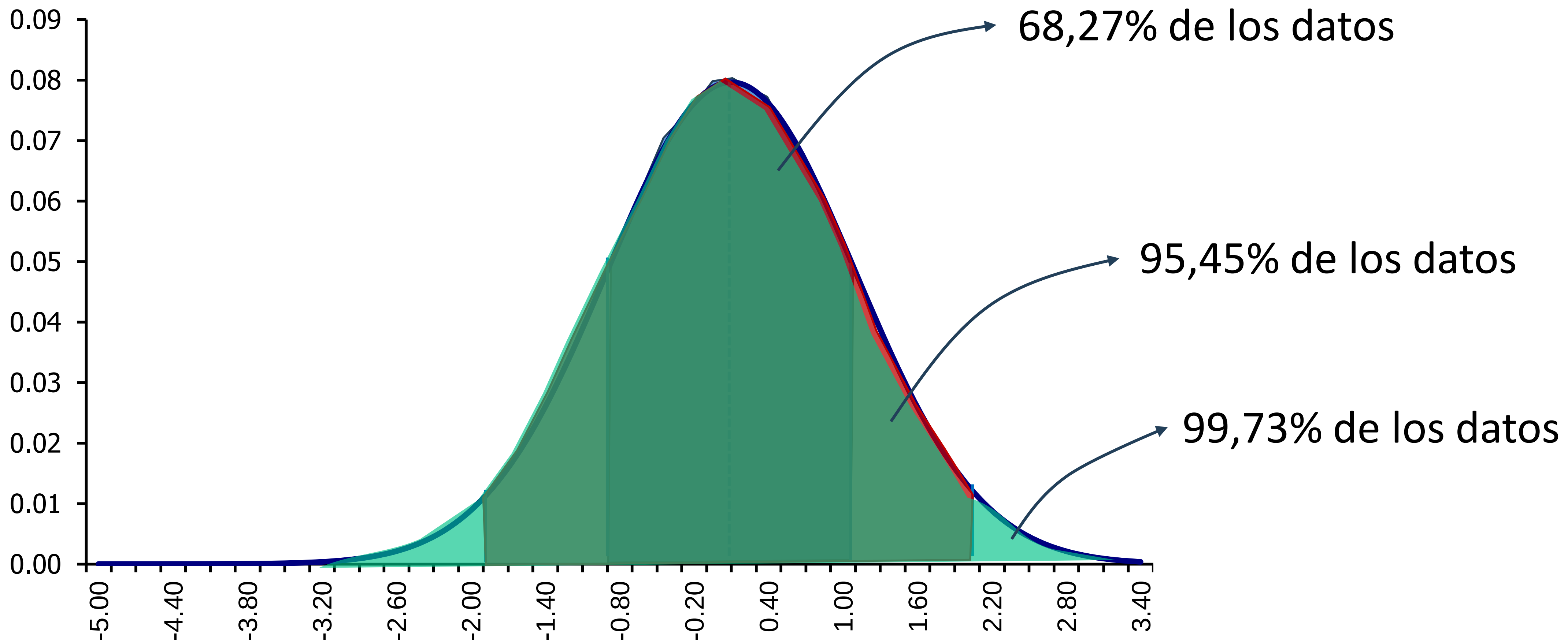
Distribuciones de Probabilidad

1 desviación estándar 68,27% de probabilidad

2 desviaciones estándar 95,45% de probabilidad

3 desviaciones estándar 99,73% de probabilidad

Para el caso de la distribución normal

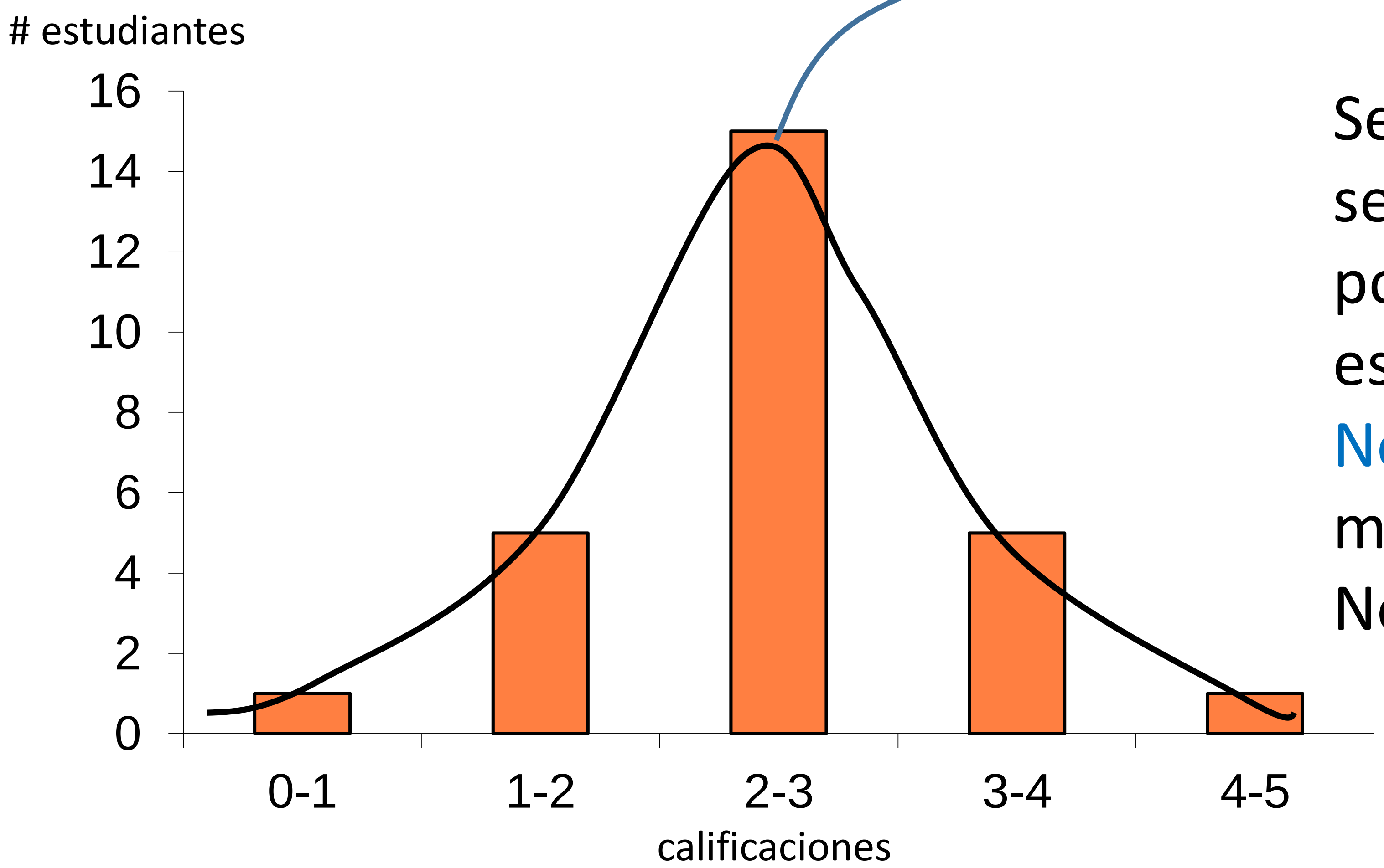


Distribuciones de Probabilidad

t - Student

Por ejemplo, si graficáramos las calificaciones de los estudiantes del curso de inversiones podríamos obtener:

Es probable que siga una distribución de probabilidad conocida como *t-estadístico* o *t de student*.

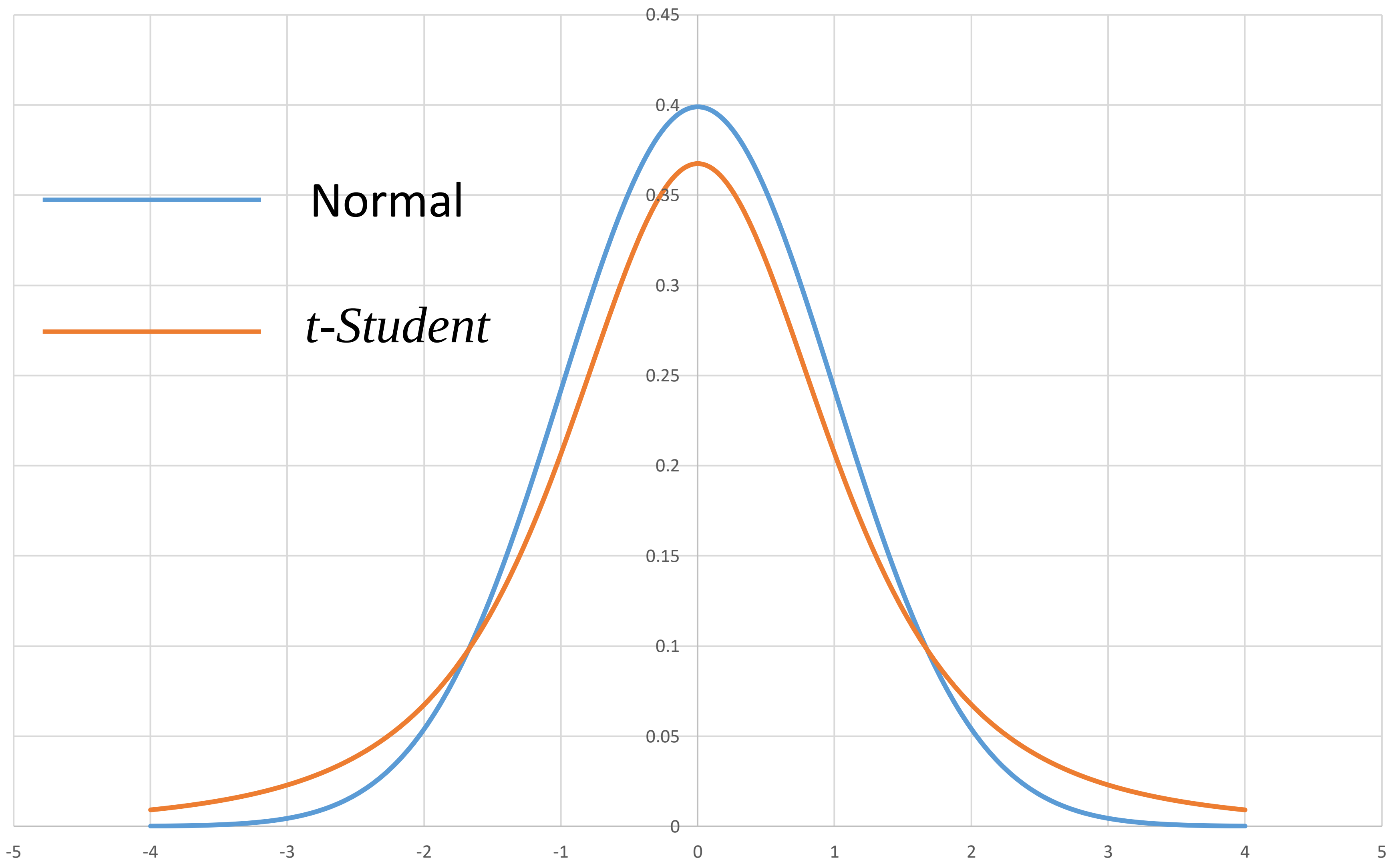


Se utiliza cuando se tiene una muestra que puede ser pequeña comparada con el tamaño de la población. Por el **LTC**, cuando el número de datos es grande, la distribución tiende a ser una Normal; sin embargo, cuando el tamaño de la muestra es pequeño, sigue algo parecido a una Normal, pero sin serlo.

Distribuciones de Probabilidad

t - Student

Miremos una comparación entre una distribución Normal y una Distribución *t-student*.

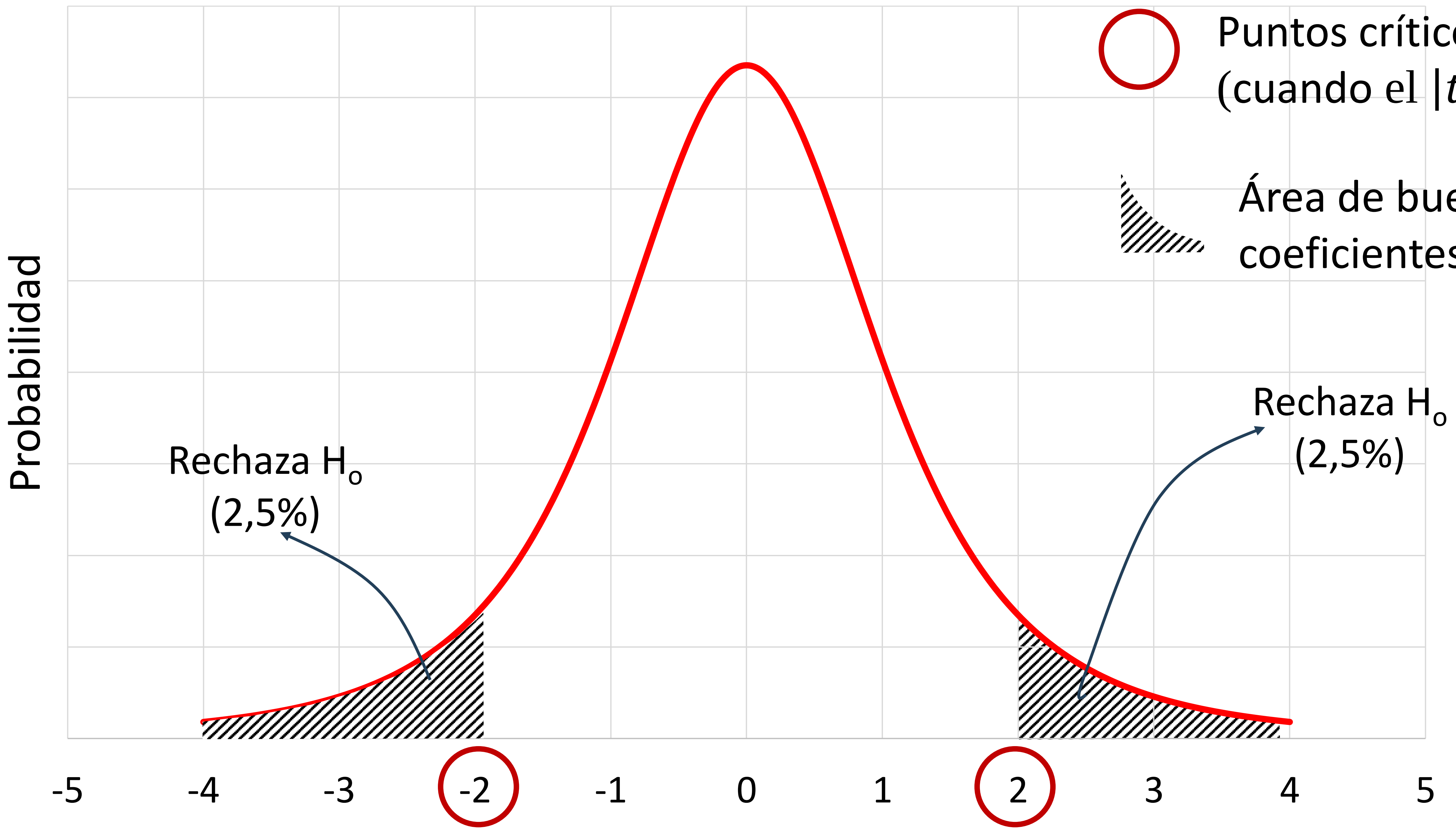


Como se aprecia, la distribución *t-student* tiene colas más gruesas.

La utilizamos, por ejemplo, cuando queremos determinar la significancia de los coeficientes obtenidos en una regresión lineal.

Importantes Consideraciones Sobre la Significancia de los Coeficientes Estimados en una Regresión Lineal

Distribución del *t-estadístico* o *t-student*



Puntos críticos al 95% de confianza (cuando el $|t - student| > 2$)

Área de buena significancia de los coeficientes estimados

Distribución de Probabilidad

- La mayoría de los eventos aleatorios se asume que siguen una distribución normal
- Esto es porque el tratamiento matemático se facilita considerablemente
- Una distribución Normal está determinada por la media y la varianza:

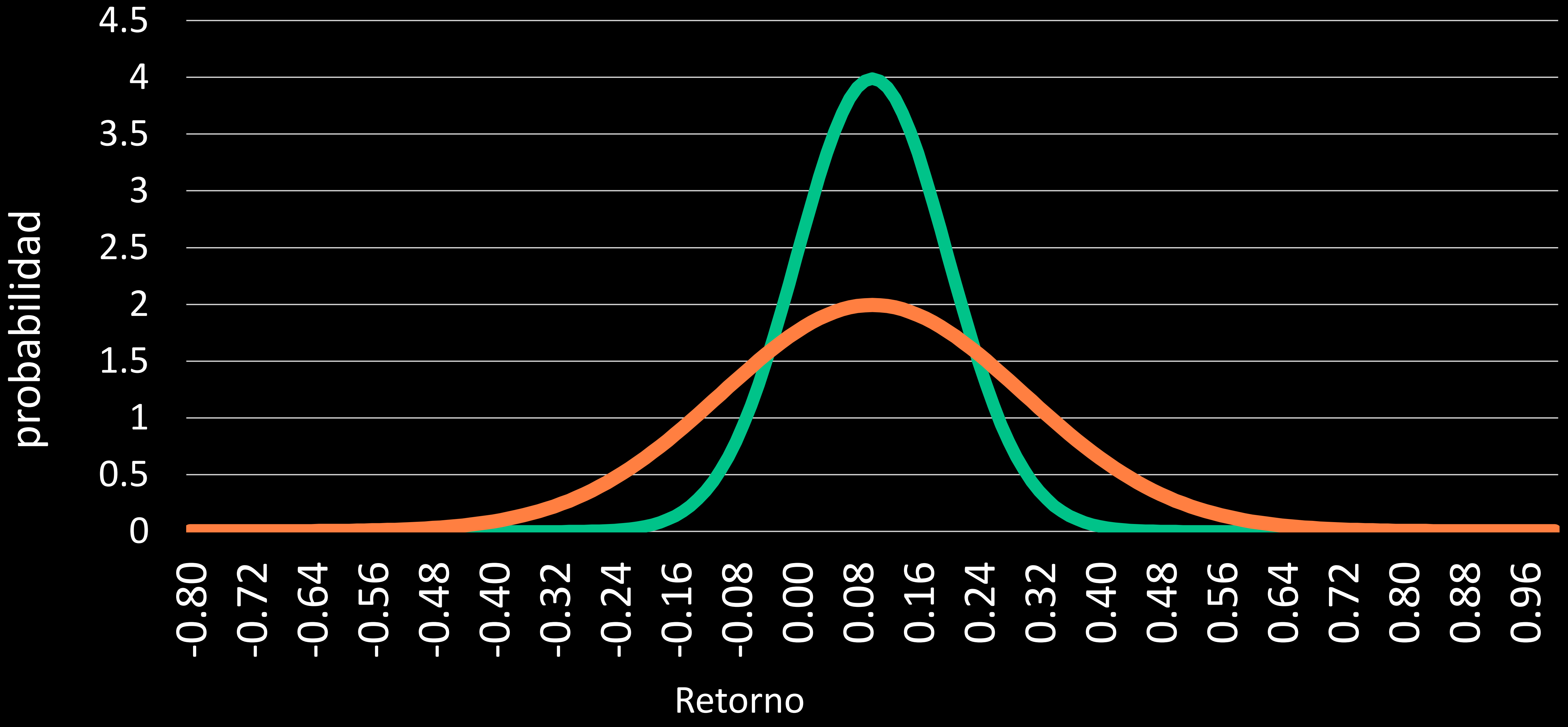
  $X \sim N(\mu ;\sigma^2)$

  Quiere decir que la variable aleatoria X sigue una distribución Normal con media μ y varianza σ^2

Tenga en cuenta que la **Kurtosis** de una distribución Normal es igual a 3

y el **Coeficiente de Simetría** de una distribución Normal es igual a cero

Distribución de Probabilidad de los Retornos



Una de las distribuciones tiene media = 10% y σ = 10%, mientras que la otra tiene media = 10% y σ = 20%. ¿Cuál es cuál?

Distribución Normal

¿Cómo estandarizar variables que siguen una distribución Normal?

- La Distribución Normal Estándar (DNE) tiene media cero y varianza 1.
- Una variable aleatoria no estandarizada tiene media $\hat{\mu}$ y varianza $\hat{\sigma}^2$.
- Para estandarizar y obtener intervalos de confianza, debemos restarle a este indicador a la media y dividirlo por la desviación estándar. Así, la variable normalizada $\boldsymbol{z}$ queda:

$$\boxed{z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}} \sim N(0,1)}$$

Noten cómo el $\boldsymbol{z}$ nos indica cuántas desviaciones estándar por encima y por debajo de la media nos estamos moviendo. Por ejemplo, un $\boldsymbol{z}$ de 2 quiere decir que los datos están entre +2 y -2 desviaciones estándar alejados de la media.

Distribución Normal

- Suponga que de una muestra obtenemos: $\hat{\mu} = 0{,}10$ $\hat{\sigma} = 0{,}20$ $n = 64$

Es $\hat{\mu} = 0{,}10$ significativo?

O en otras palabras, ¿Podemos decir que la media obtenida en esta muestra no difiere significativamente de la media de la población?

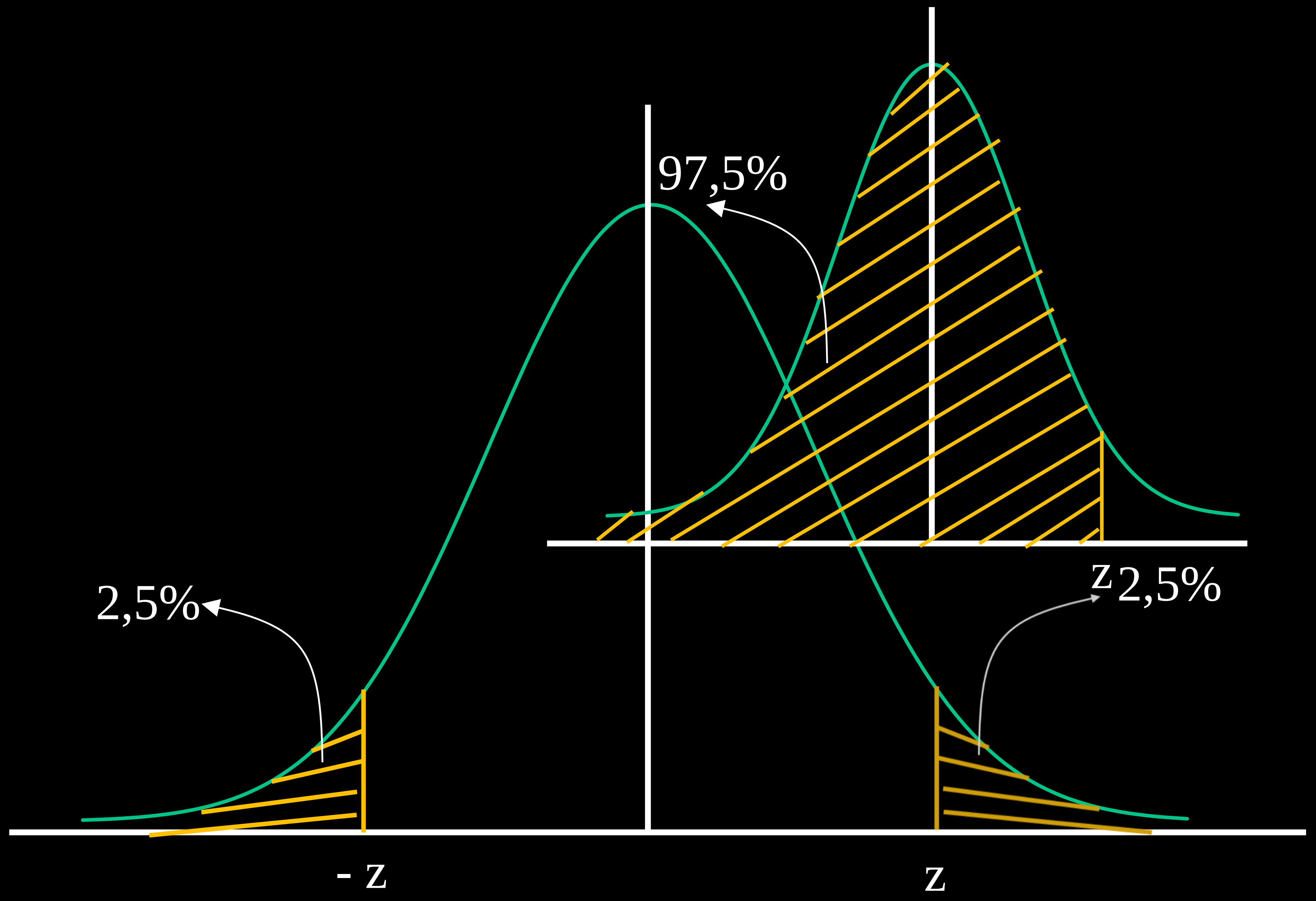
- Para el caso de la media:

Queremos tener una certeza del 95%. En Excel decimos:

  - Insertar/Función/Distr.Norm.Estand.Inv/0,975

- Noten que estamos utilizando 97,5% y no 95%. ¿Por qué?
- Es importante tener en cuenta que esta función de Excel nos entrega la distribución de probabilidad acumulada. Entonces, un nivel de confianza del 95% implica dejar a cada lado de la función de probabilidad 2,5%. Pero como Excel nos entrega la acumulada, en realidad el porcentaje acumulado, dejando 2,5% en la cola derecha es de 100% - 2,5% = 97,5%

Distribución Normal Estándar Inversa



Distribución Normal

- Suponga que de una muestra obtenemos: $\hat{\mu} = 0{,}10$ $\hat{\sigma} = 0{,}20$ $n = 64$

Es $\hat{\mu} = 0{,}10$ significativo?

O en otras palabras, ¿Podemos decir que la media obtenida en esta muestra no difiere significativamente de la media de la población?

- Para el caso de la media:

Queremos tener una certeza del 95%. En Excel decimos:

- Insertar/Función/Distr.Norm.Estand.Inv/0,975

El resultado es z = 1,96

$$\frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim N(0{,}1) \Rightarrow -1{,}96 < \mathrm{z} < +1{,}96$$

$$\Rightarrow -1{,}96 < \frac{0{,}1 - \mu}{0{,}2/\sqrt{64}} < +1{,}96 \Rightarrow 0{,}0510 < \mu$$

$$< 0{,}1490$$

Distribución Normal

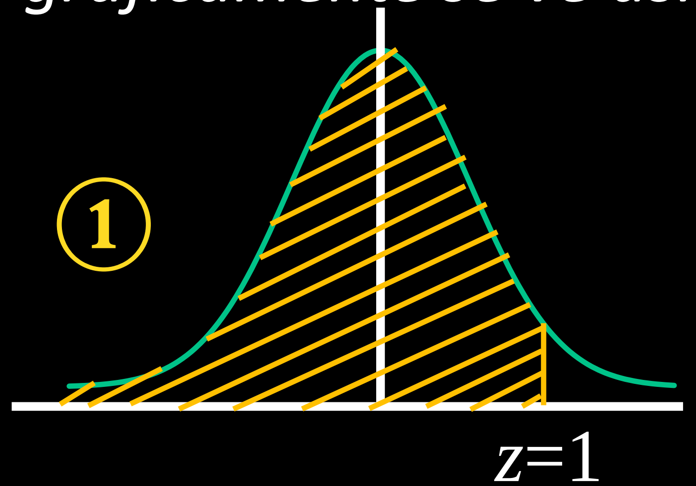
- Recuerden un *slide* anterior donde decíamos que si la distribución de probabilidad es normal, el 68,26% de los datos están entre +1 y -1 desviaciones estándar; con una probabilidad del 95,54% están entre +2 y -2 desviaciones estándar y con el 99,74% de probabilidad están entre +3 y -3 desviaciones estándar. ¿Cómo verificamos esto en Excel?

- Entonces, cuando estandarizamos la distribución normal, el z = 1 para una probabilidad entre +1 y -1 desviaciones estándar. El z = 2 para una probabilidad entre +2 y -2 desviaciones estándar y el z = 3 para una probabilidad entre +3 y -3 desviaciones estándar.

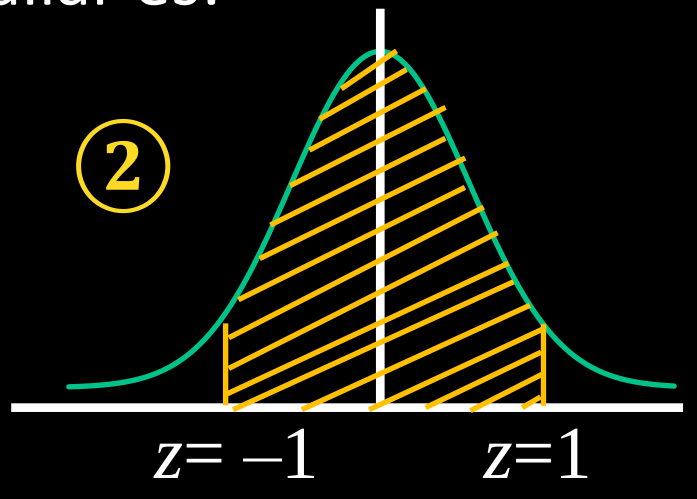
Por lo tanto, dado que queremos hallar la probabilidad, decimos en Excel:

- Insertar/Función/Distr.Norm.Estand/1

El resultado es *0,8413, que gráficamente se ve así:*



Pero lo que queremos hallar es:



Por lo tanto a la probabilidad hallada en 1 debemos restarle el área no sombreada en 1, que en este caso es de 1 – 0,8413 = 0,1587. Es decir, en $+\sigma$ y $-\sigma$ se encuentran el 68,26% de los datos.

Ejercicio 3

- Si después de 100 eventos X sigue una **distribución Normal** con media 10% y varianza 5%, ¿Cuáles son los intervalos de confianza con un nivel de significancia del 95%**?**

¿Por qué Usamos Distribución Normal?

La verdad es que el tratamiento matemático es más fácil con la distribución Normal

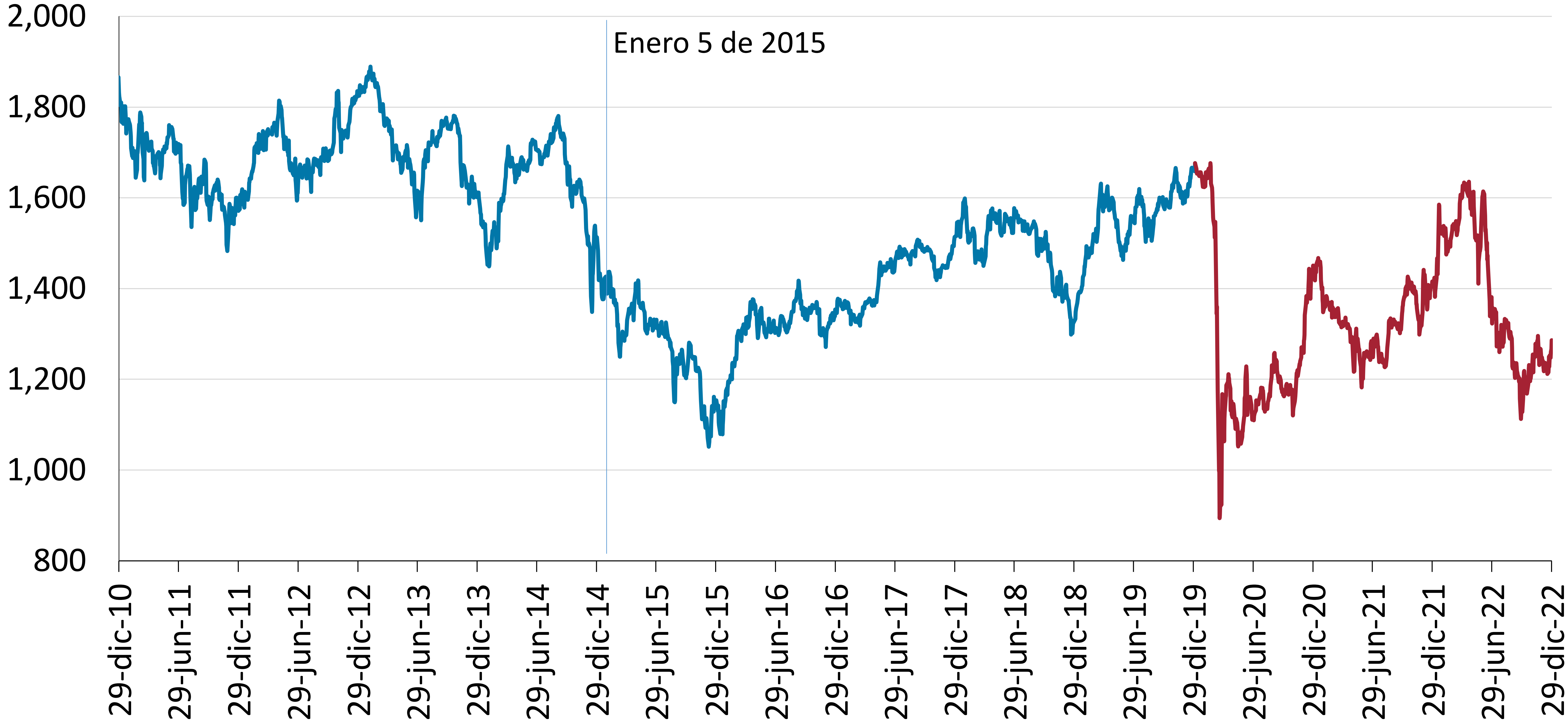
¿Qué implicaciones tiene**?** Por ejemplo, si queremos determinar la probabilidad de la caída que se presentó en el Colcap el 5 de enero del 2015 que fue del 4.39%, ¿qué nos diría la distribución normal**?** **(Remitámonos al archivo "Colcap Historical Data").**

Probabilidad Real vs. Probabilidad asumiendo distribución Normal

Recordemos que $X = \frac{r - \mu}{\sigma}$

Nos diría que la probabilidad es que ocurra una vez cada 9.385 años

Evolución Histórica Colcap



Ejercicio 4

Ahora miremos la diferencia entre la probabilidad asumiendo distribución normal y la probabilidad real, cuando el dato no se encuentra en las colas, es decir, cuando se encuentra cerca de la media.

- Tomemos la serie histórica del Colcap (Colcap Historical Data) y calculemos la probabilidad de que el retorno diario sea negativo (asumiendo que sigue una distribución normal).

¿En Qué Consiste el Problema de la Inversión?

Términos Importantes

UNIVERSIDAD EAFIT

ESTAR LARGO

QUIERE DECIR COMPRAR UN ACTIVO. ESTAR LARGO EN DÓLARES SIGNIFICA QUE USTED POSEE LOS DÓLARES

ESTAR CORTO

QUIERE DECIR VENDER UN ACTIVO SIN TENERLO. PARA ACORTARSE EN DÓLARES USTED PIDE UN PRÉSTAMO EN DÓLARES Y LOS VENDE PARA EN UNA FECHA FUTURA COMPRARLOS CON EL FIN DE DEVOLVERLOS A QUIEN SE LOS PRESTÓ.

¿De qué dependerá la función de Utilidad?

U = **retorno** – **riesgo**

$U = E(r) - \sigma^2$

Pero el riesgo no afecta en la misma medida a un inversionista averso al riesgo que a uno tomador de riesgo. Para solucionar esto agregamos el factor de aversión al riesgo (A).

$U = E(r) - \frac{1}{2} \cdot A \cdot \sigma^2$

El ½ aparece considerando que la función de Utilidad es convexa.

Descripción del Problema

UNIVERSIDAD EAFIT

1 Oportunidad de la Inversión:

Tenemos una tasa libre de riesgo → $r_f = 8\%$

Tenemos un portafolio riesgoso: → $E[r_p]=15\%$ y $\sigma(r_p) = 20\%$

2 Un inversionista cuya función de utilidad se define de la siguiente manera:

$U(r_T) = E(r_T) - ½.A.\sigma_T^2$

A se puede trabajar con números enteros entre 1 y 5.

Esta es una función de Utilidad de Media-Varianza, muy útil para encontrar portafolios con el máximo retorno esperado dado un nivel de riesgo; o con el menor riesgo posible, dado un objetivo de rentabilidad.

Para inversores muy aversos al riesgo A será muy grande.

Descripción del Problema

❸ La Selección Óptima de Portafolios:

Invierta una porción y de la riqueza en el portafolio riesgoso, dejando el resto para el activo libre de riesgo.

Posibles portafolios: $E[r_T] = (1 - y) \cdot r_f + y \cdot E[r_p]$

Portafolio Óptimo: $\underset{y \in \mathfrak{R}}{Max} \; U(r_T)$

Construcción del Portafolio

$E\,[r_T] = E\,[(1 - y)\,r_f] + E\,[y.\,r_p] = r_f + y.(r_p - r_f)$

En nuestro caso $\boldsymbol{E\,[r_T]} = 8\% + 7\%.\,y$

$\mathbf{Var}(\boldsymbol{r_T}) = \mathrm{Var}[r_f \cdot (1-y)] + \mathrm{Var}[y.\,r_p] + 2 \cdot \mathrm{cov}[(1-y) \cdot r_f\;, y \cdot r_p\,]$

$\mathrm{Var}(r_f)$ será cero y $2 \cdot \mathrm{cov}[r_f\;, r_p\,]$ será cero también. Por lo tanto, para nuestro caso:

$\mathbf{Var}(\boldsymbol{r_T}) = 0 + 0{,}20^2 \cdot y^{\,2} + 0$

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r_T}) = 0{,}20 * y$

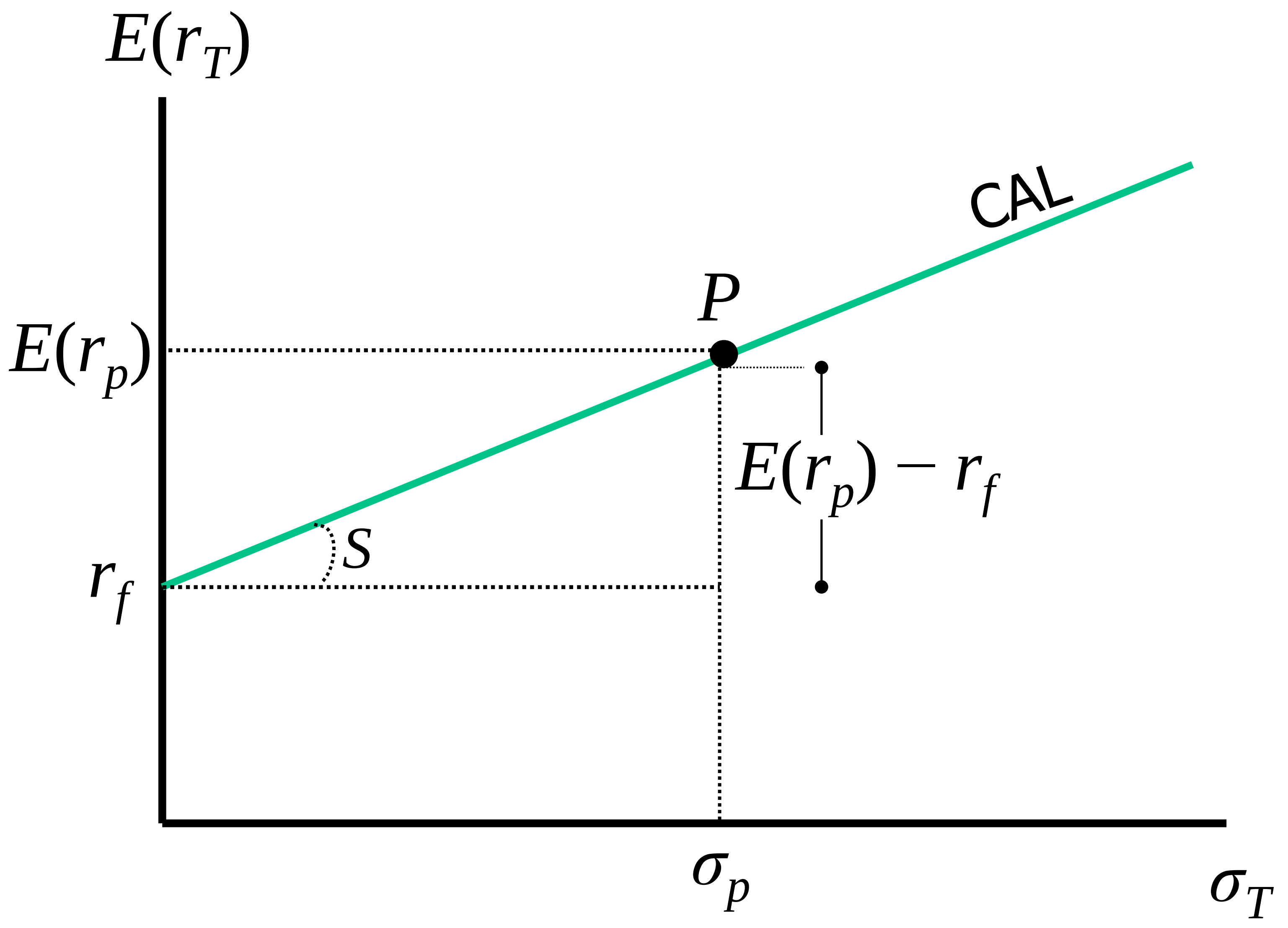
Despejando *y* en la ec. del valor esperado y la de la *σ* podemos decir:

$$y = \frac{E[r_T] - r_f}{E[r_p] - r_f} = \frac{\sigma(r_T)}{\sigma(r_p)}$$

$$E[r_T] - r_f = \frac{E[r_p] - r_f}{\sigma(r_p)} \cdot \sigma(r_T) \qquad (1)$$

Línea de Asignación de Capital (CAL)

Note que la ec. (1) es la ecuación de una recta. Gráficamente:



La línea de asignación de capital es el conjunto de puntos que representan las posibles combinaciones de retorno y riesgo que ofrece el mercado

¿Cuál es la pendiente de la CAL?

El Radio de *Sharpe*

Es una medida de qué tan atractivo es un portafolio.

$$S = \frac{E[r_p] - r_f}{\sigma_p}$$

Indica el exceso de retorno que se obtiene por cada unidad de riesgo tomado

Radio de Sharpe en práctica:
¿Cuál de estos dos activos preferiría?

¿Qué Activo Prefieren?

Radio Sharpe S&P500 ===➔ 0.43

Radio Sharpe Pfizer ===➔ 0.35

Fuente: Investing

La Optimización

Recordemos que queremos maximizar la función de Utilidad. $U(r_T) = E\ (r_T) - ½.A.\sigma_T{}^2$

Recordemos también que $E\ [r_T] = r_f + y.(r_p - r_f)$

Reemplazando en la ec. de Utilidad:

$U(r_T) = r_f + y.(r_p - r_f) - ½.A.\sigma_p{}^2.y^2$

En el ejemplo, $U(r_T) = 0.08 + 0.07\ y\ - ½.A.(0.20)^2 y^2$

$U(r_T) = 0.08 + 0.07y - (0.02).A.y^2$

¿Cómo encontrar el máximo de una función?

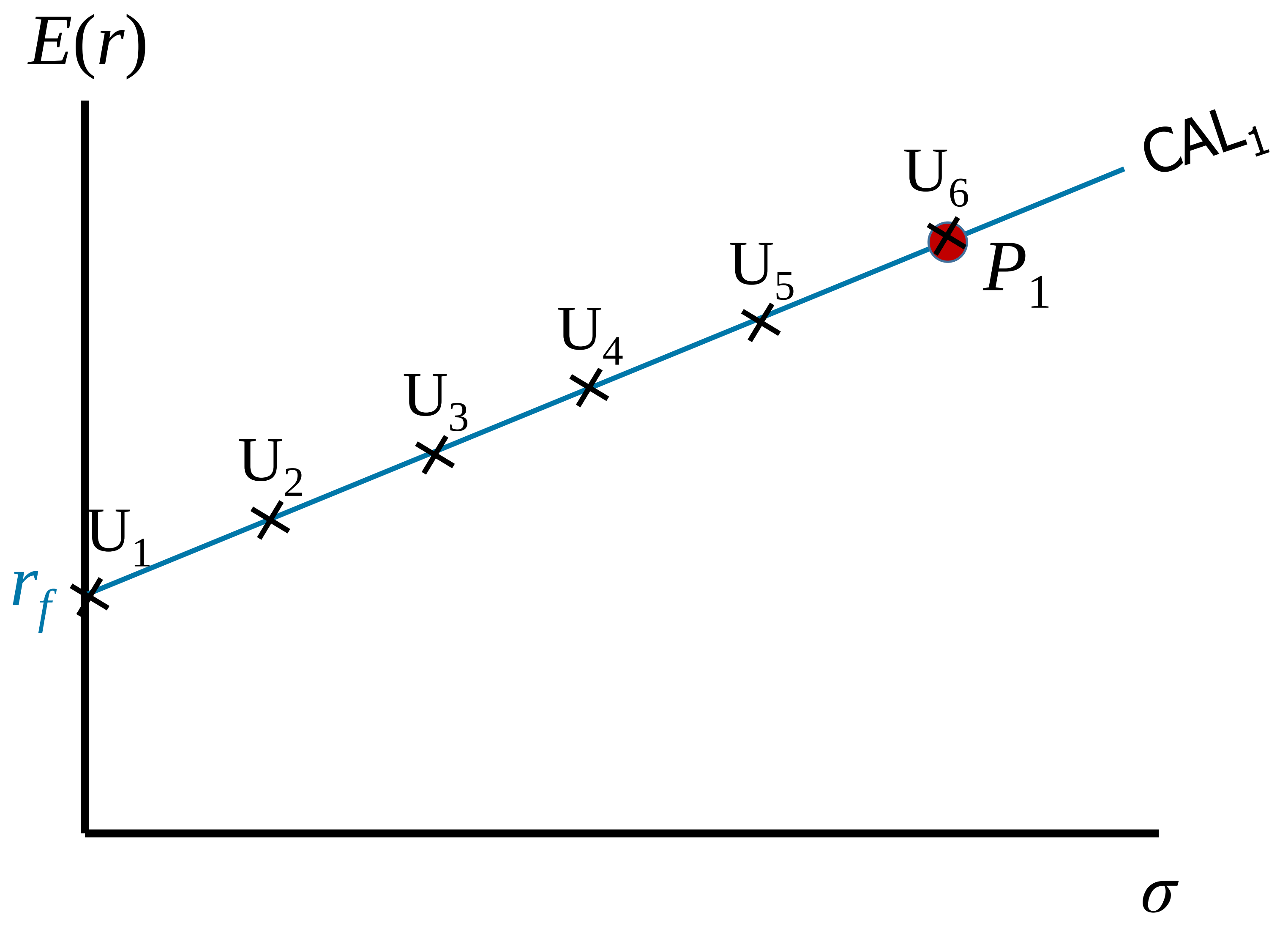
$\partial U/\partial y = (r_p - r_f) - (A)\ \sigma_p{}^2.y = 0$

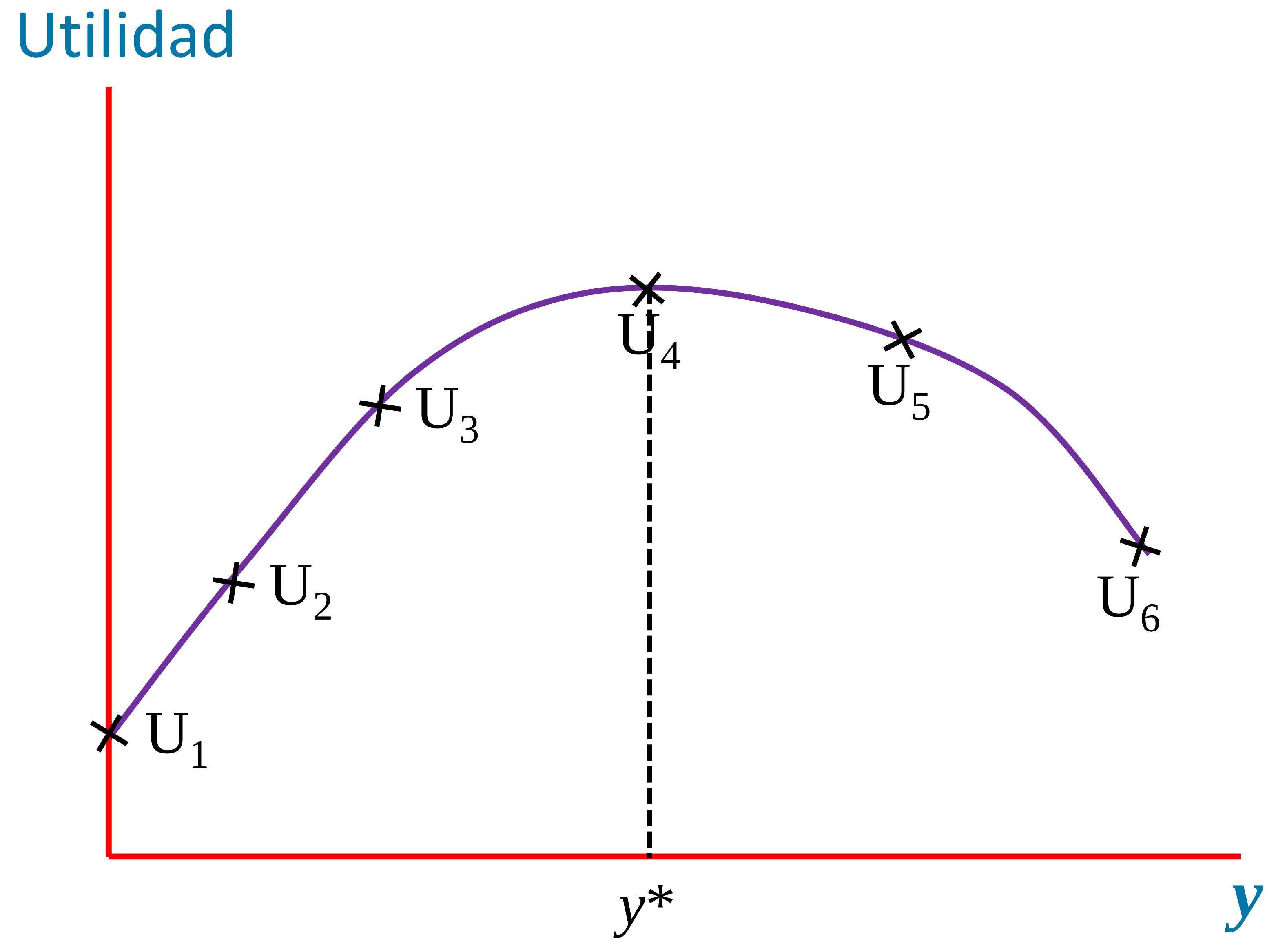
$$y^* = \frac{r_p - r_f}{A \cdot \sigma_p^2}$$

¿Qué pasará con y^* si el inversionista es más tomador de riesgo?

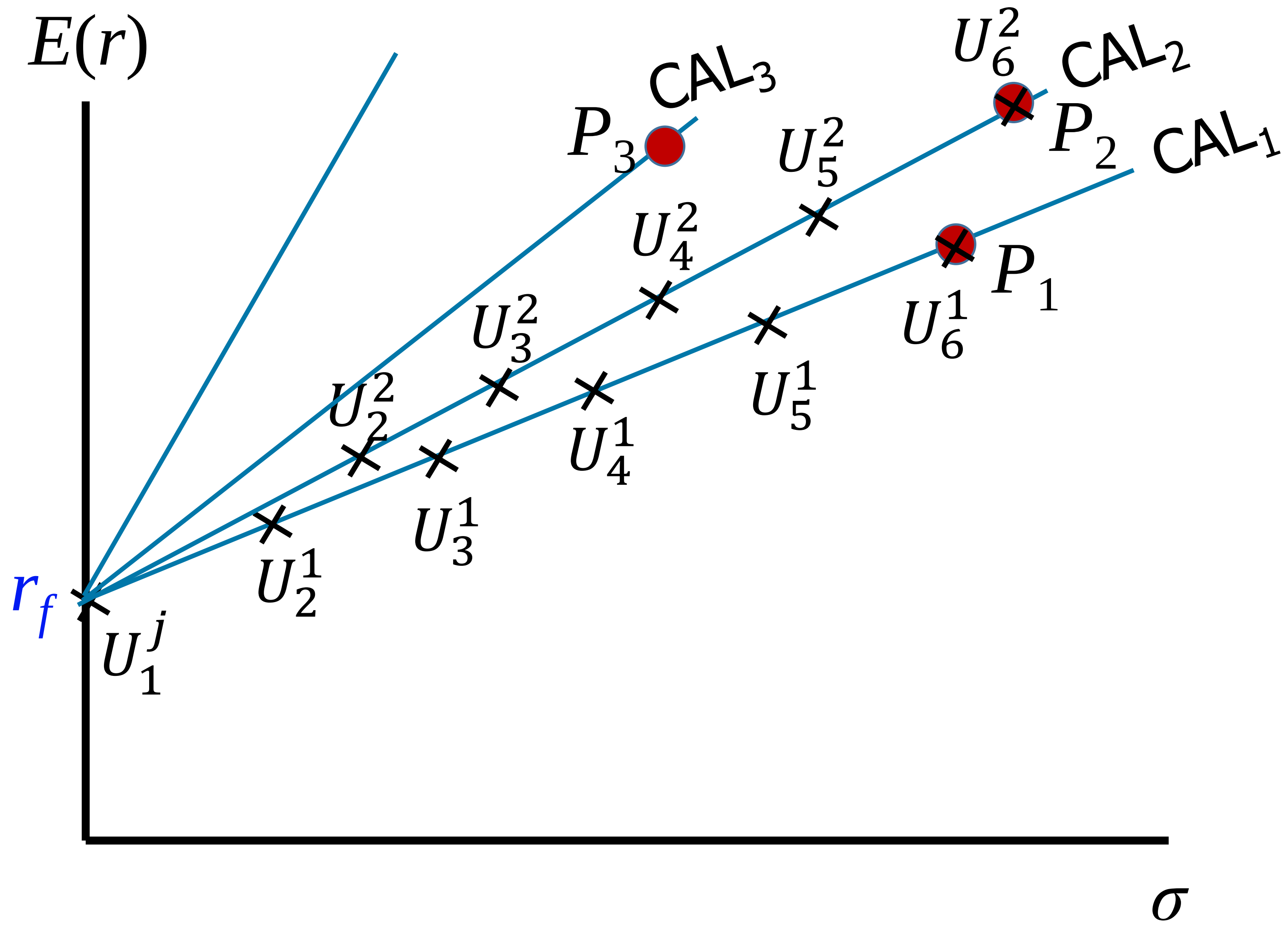
Si hacemos A = 4: $y^* = \dfrac{0.07}{4 \cdot (0.20)^2} = 43{,}75\%$

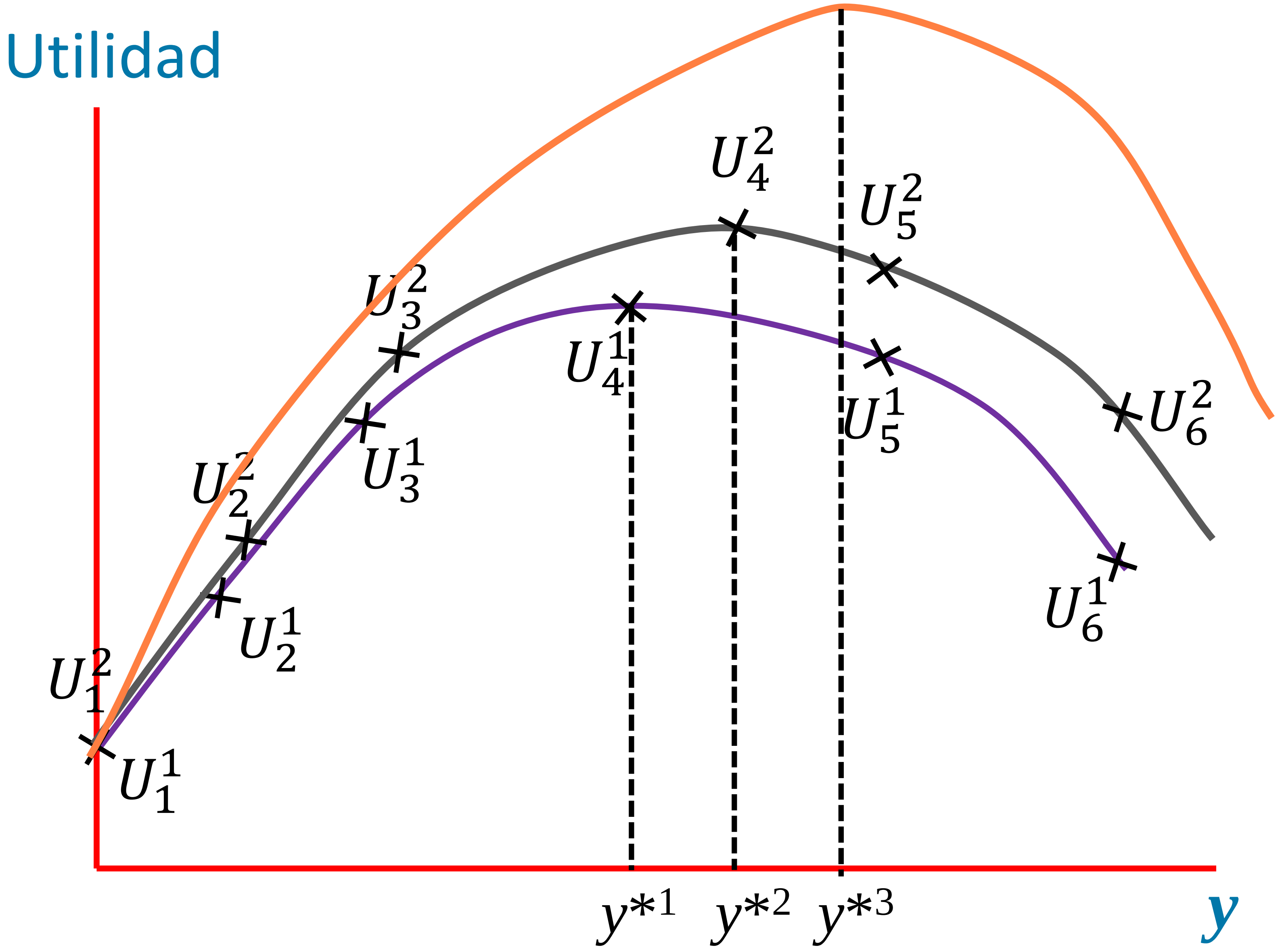
La Optimización

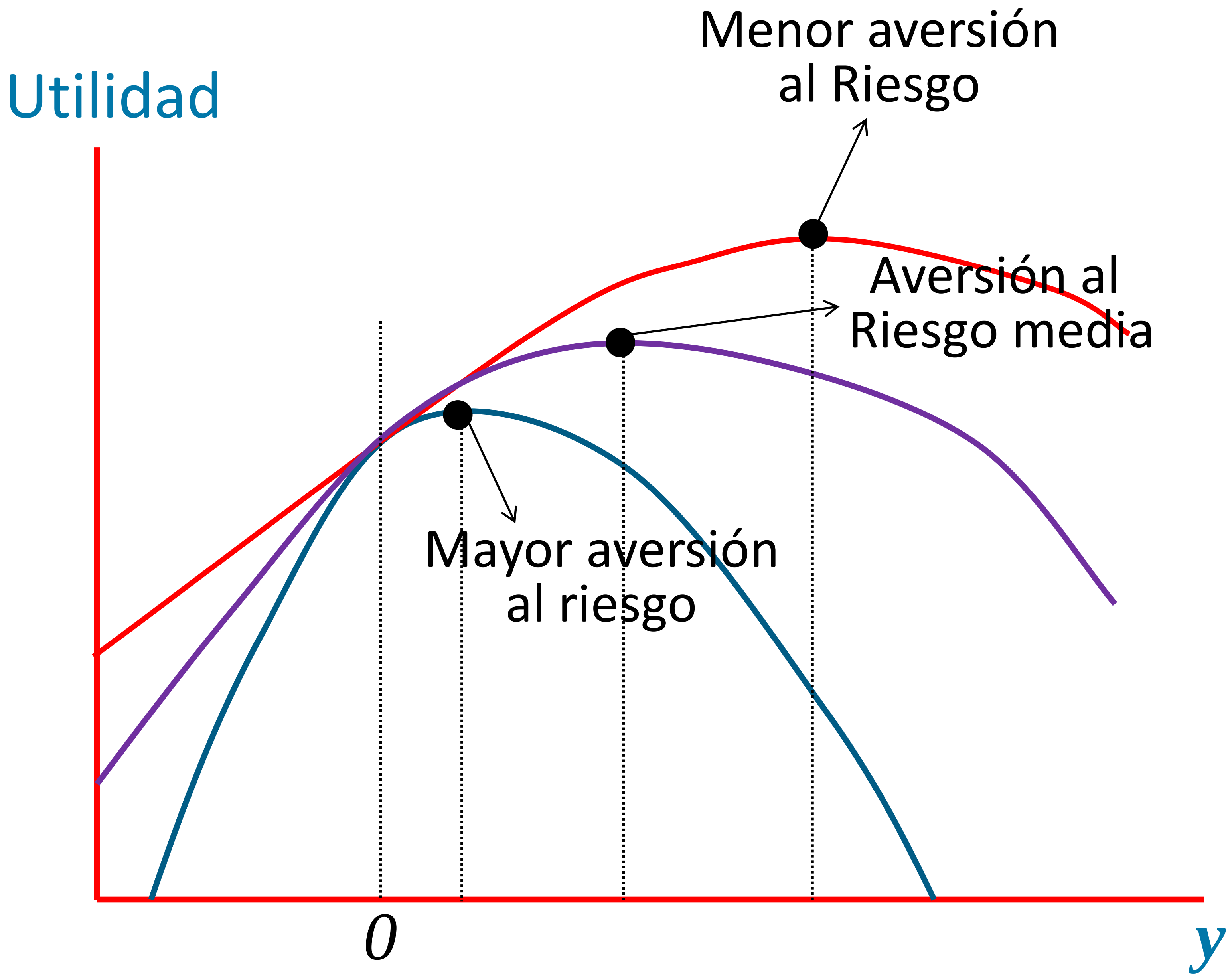




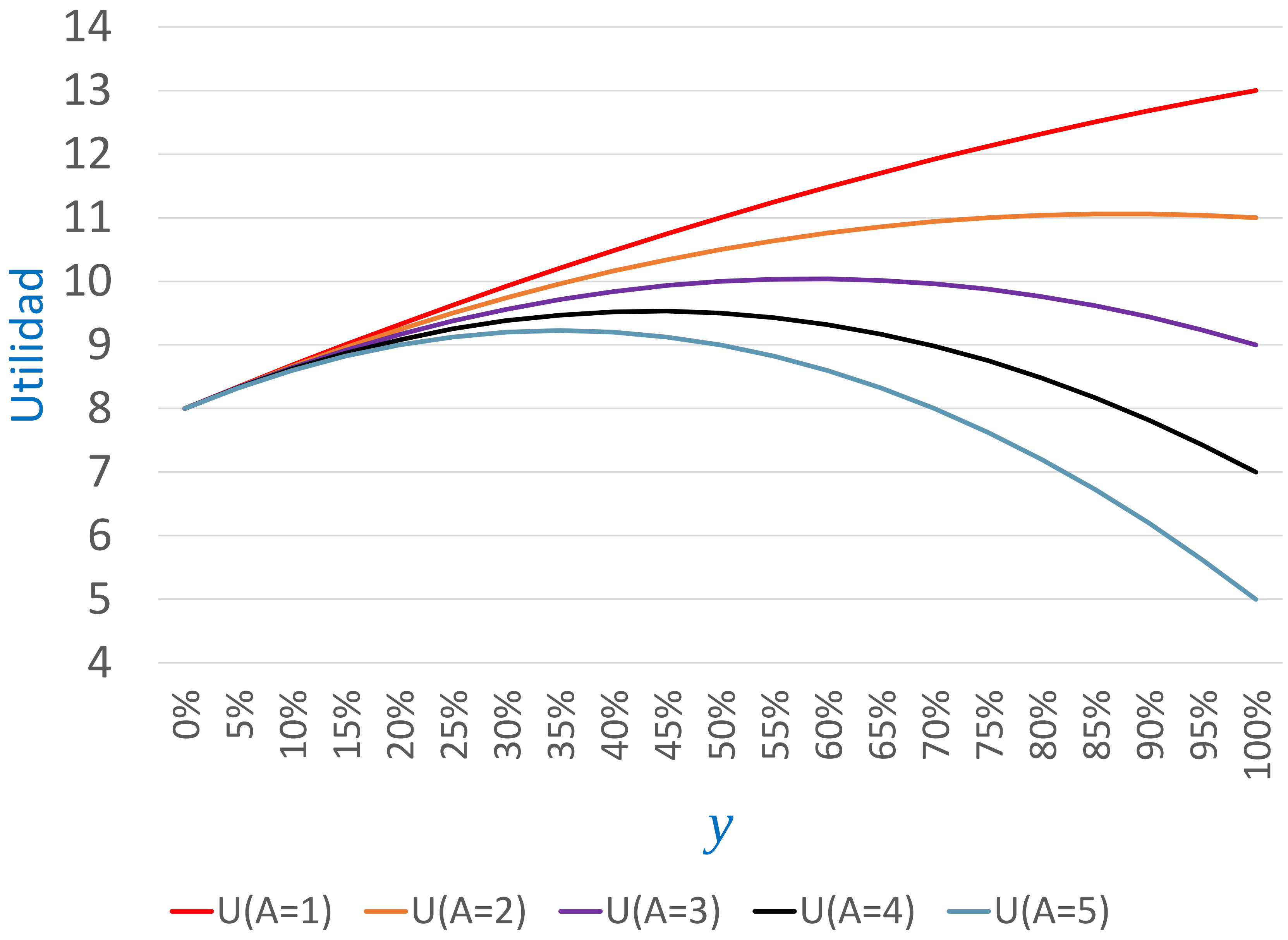
La Optimización







Utilidad
Menor aversión
al Riesgo
Aversión al
Riesgo media
Mayor aversión
al riesgo
0
y



14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
Utilidad
0%
5%
10%
15%
20%
25%
30%
35%
40%
45%
50%
55%
60%
65%
70%
75%
80%
85%
90%
95%
100%
y
U(A=1)
U(A=2)
U(A=3)
U(A=4)
U(A=5)

Ejercicio 5

- **Suponga que tenemos un portafolio compuesto por dos activos de riesgo:**

Acciones con un retorno esperado del 10% y una desviación estándar del 20% y bonos corporativos, con un retorno esperado del 8% y desviación estándar del 15%. El 70% está invertido en acciones y el 30% en los bonos corporativos.

La correlación entre ambos activos es del 50%

La tasa libre de riesgo es del 5%.

Se trata de un inversionista con un apetito medio por el riesgo. A = 3

¿Qué porcentaje de su portafolio total va a invertir en los activos de riesgo y qué porcentaje en el activo SIN riesgo?

Optimización del Portafolio Riesgoso

Universo de Activos Riesgosos

Acciones

Acciones de Emisores en Bolsa

Tasas de Cambio

Monedas en el spot o a través de derivados

Money Markets

Fondos de Liquidez

Swaps

De monedas, tasas de interés, etc

Bonos Soberanos

De países Emergen-tes

Commodities

Directa-mente o a través de fondos

¿Cómo determinar la proporción óptima a invertir en cada uno de ellos?

Esto no incluye acciones individuales, fondos mutuos, fondos de venture capital, futuros, opciones, y otros derivados.

Dos Activos de Riesgo

Suponga inicialmente que tenemos 2 activos de riesgo, por ejemplo acciones (Activo 1) y bonos corporativos (Activo 2):

1) Activo$_1$ **$E\,[r_A] = 15\%$; $\sigma_A = 20\%$**

2) Activo$_2$ **$E\,[r_B] = 10\%$; $\sigma_B = 15\%$**

Correlación de los retornos: $\rho = \mathrm{corr}(r_A, r_B) = 30\%$

Digamos que queremos invertir una porción w en el activo 1 (acciones) y una porción $(1 - w)$ en el activo 2 (bonos)

¿Cuál es el retorno esperado del portafolio de riesgo (compuestos por estos dos activos)?

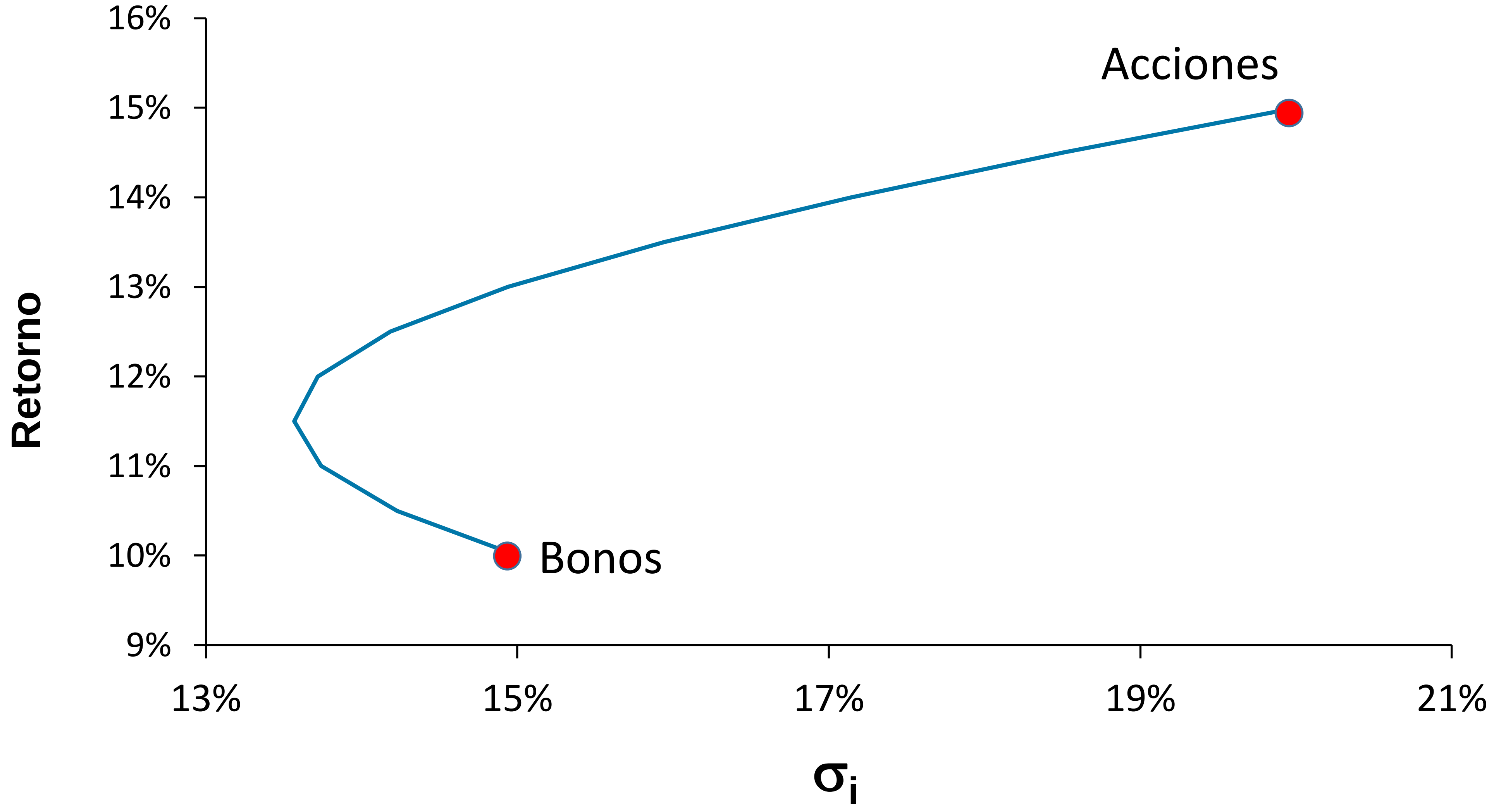
$$E[r_p] = w.\, E\,[r_A] + (1 - w).\, E\,[r_B]$$

¿Cuál es la varianza del portafolio de riesgo?

$$\sigma^2_p = w^2.\, \sigma^2_A + 2.w.(1 - w).\, \mathrm{cov}\,(r_A, r_B) + (1 - w)^2.\, \sigma^2_B$$

Dos Activos de Riesgo

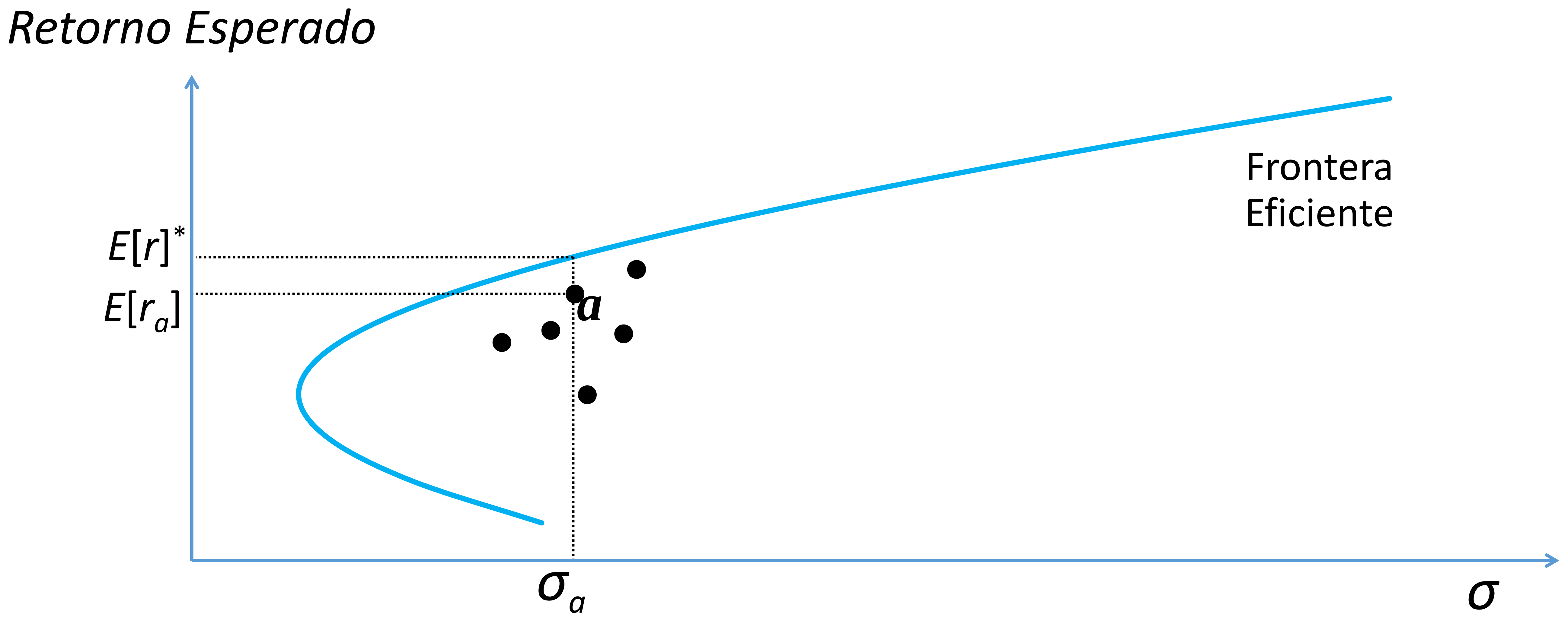
- ¿Cómo sería la gráfica de media contra desviación estándar?



¿Cuál es entonces la combinación óptima entre acciones y bonos?

¿Depende del grado de aversión al riesgo del inversionista?

Dos Activos de Riesgo



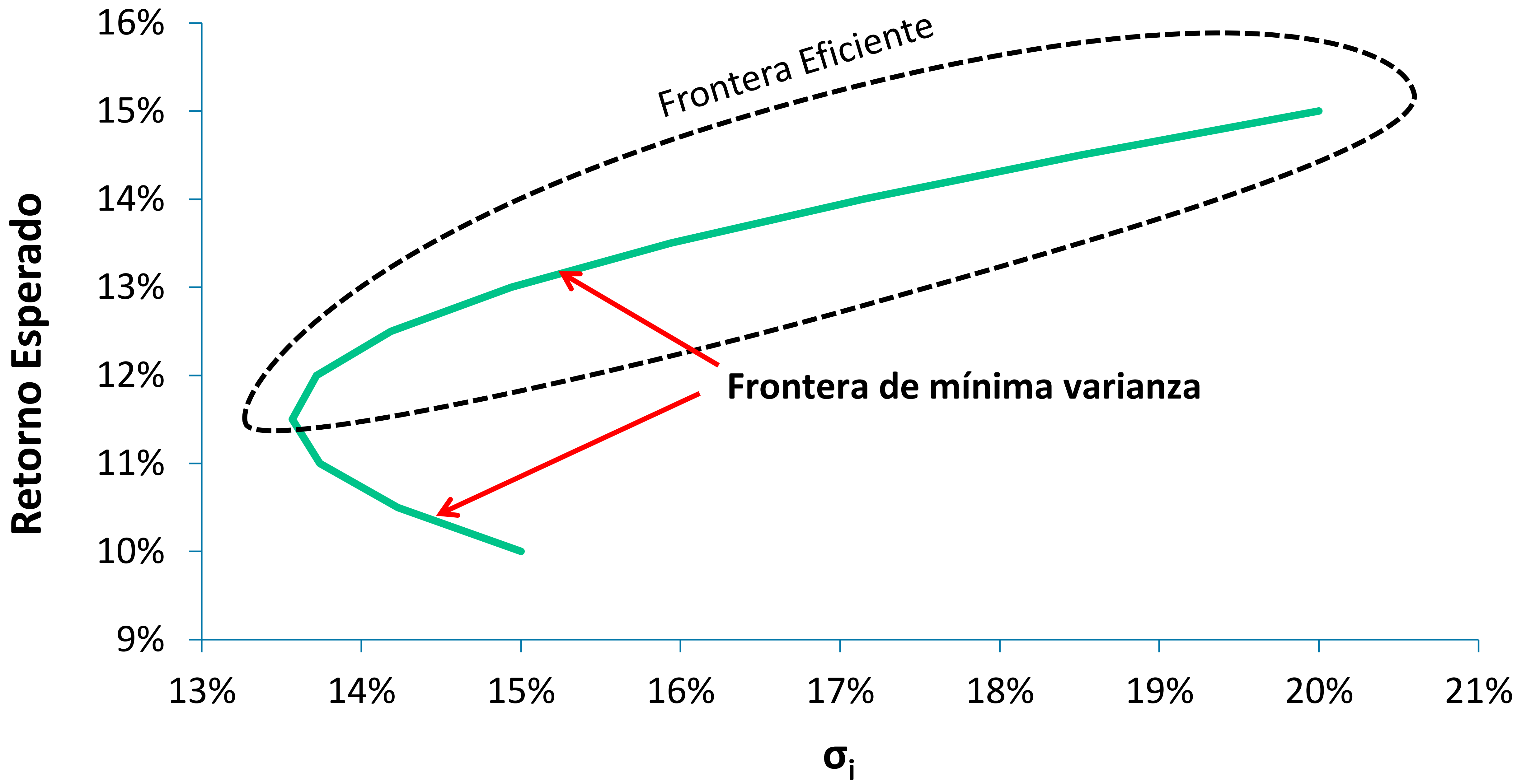
- Cualquier punto por fuera de la frontera eficiente es justamente eso, NO eficiente. Para ese nivel dado de riesgo, siempre se podrá encontrar una mejor rentabilidad.
- El portafolio a tiene un riesgo σ_a y una rentabilidad $E[r_a]$. Para dicho riesgo, $E[\mathrm{r}]^*$ es más alto que $E[\mathrm{r}_a]$.

Frontera Eficiente

¿Cómo debemos escoger los pesos ideales?

1. **Todos los portafolios factibles caen dentro de una región en forma de bala llamada la <u>frontera de mínima varianza</u>**
2. **La <u>frontera eficiente</u> es la mitad superior de la frontera de mínima varianza. ¿Por qué?**
3. **Un inversionista racional deberá seleccionar portafolios que estén en la frontera eficiente.**

Frontera Eficiente



Dos Activos de Riesgo

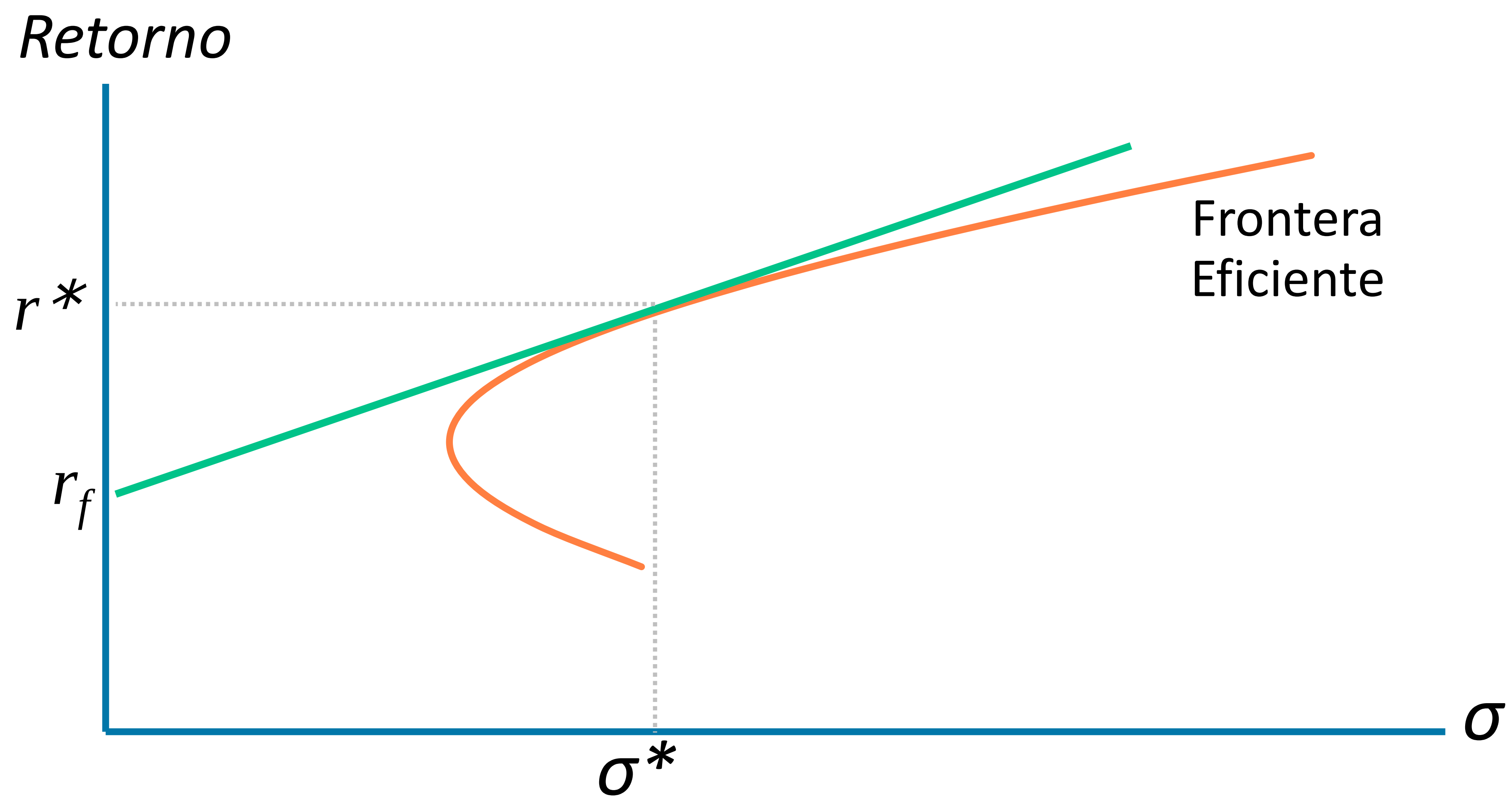
¿Recuerdan la CAL?

Permitía saber cuánto invertir en activos riesgosos y cuánto en activos libres de riesgo

La Frontera Eficiente:

Permite saber cómo distribuir la inversión en los activos riesgosos

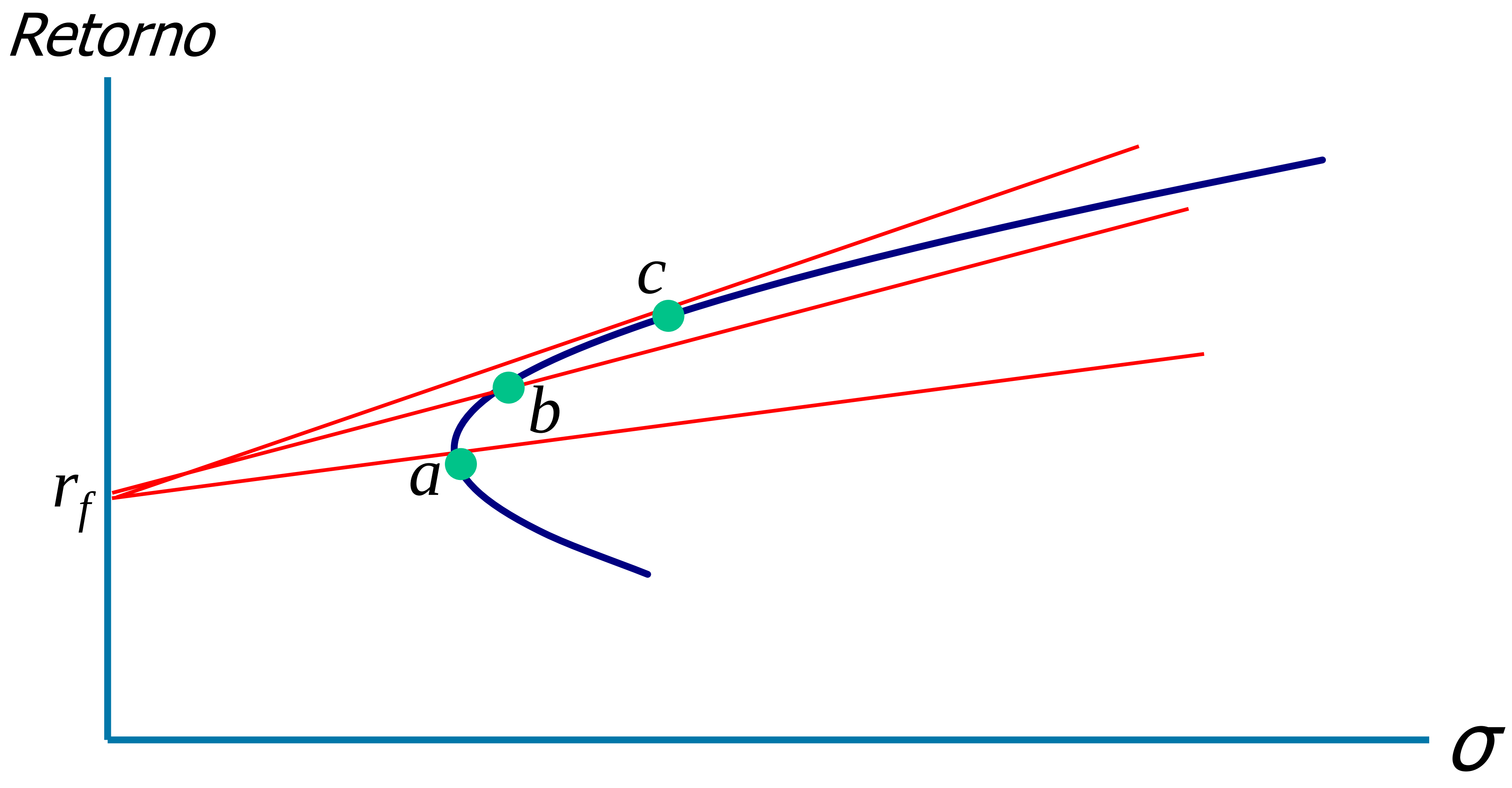
Dos Activos de Riesgo



- El análisis de CAL nos dice: invierta y en activos riesgosos y $(1-y)$ en libres de riesgo
- El análisis de Frontera Eficiente nos dice: de ese porcentaje y en riesgosos, invierta w en 1 y $(1-w)$ en 2.

Es decir, el retorno esperado del portafolio total será: $r_{y,w} = (1-y)r_f + y[w.r_1 + (1-w)r_2]$

Dos Activos de Riesgo



¿Cuál será la línea óptima?

¿Qué características tiene la línea que cruza por c ?

El problema se reduce entonces a maximizar la pendiente de CAL de acuerdo con los diferentes retornos de activos riesgosos que me permite la frontera eficiente

Dos Activos de Riesgo

$$\underset{w_i}{Max}\ S_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p}$$

Sujeto a que $\sum w_i = 1$

Para el caso de 2 activos riesgosos la solución es:

$$E(r_p) = w.\ E(r_1) + (1 - w).\ E(r_2)$$

$$\sigma^2_p = w^2.\ \sigma^2_1 + 2.w.(1 - w).\ Cov\,(r_1, r_2) + (1 - w)^2.\ \sigma^2_2$$

$$\underset{w_i}{Max}\ S_p = \frac{\mathrm{w} \cdot E(r_1) + (1 - \mathrm{w}) \cdot E(r_2) - r_f}{(\mathrm{w}^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 \cdot \mathrm{w} \cdot (1 - \mathrm{w}) \cdot \mathrm{cov}(r_1, r_2) + (1 - \mathrm{w})^2 \cdot \sigma_2^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial S_p}{\partial \mathrm{w}} = \frac{\frac{\partial E(r_p)}{\partial \mathrm{w}} \cdot \sigma_p - \left[E(r_p) - r_f\right] \frac{\partial \sigma_p}{\partial \mathrm{w}}}{\sigma_p^2} = 0$$

Dos Activos de Riesgo

$$\frac{\partial E(r_p)}{\partial \mathrm{w}} = E(r_1) - E(r_2)$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w} = \frac{1}{\sigma_p}\left[w.\sigma_1^2 + (1-2w)\operatorname{cov}(r_1, r_2) - (1-w)\sigma_2^2\right]$$

Encuentre el w que haga: $\frac{\partial E(r_p)}{\partial \mathrm{w}} \cdot \sigma_p = \left[E(r_p) - r_f\right]\frac{\partial \sigma_p}{\partial \mathrm{w}}$

Analíticamente:

$$\mathrm{w} = \frac{\sigma_2^2\left[E(r_1) - r_f\right] - \operatorname{cov}(r_1, r_2)\left[E(r_2) - r_f\right]}{\sigma_2^2\left[E(r_1) - r_f\right] + \sigma_1^2\left[E(r_2) - r_f\right] - \operatorname{cov}(r_1, r_2)\left[E(r_1) + E(r_2) - 2 \cdot r_f\right]}$$

Dos Activos de Riesgo

Recuerden que en nuestro ejemplo:

1) Activo$_1$ (Acciones) $E[r_1] = 15\%$; $\sigma_1 = 20\%$

2) Activo$_2$ (Bonos Corporativos) $E[r_2] = 10\%$; $\sigma_2 = 15\%$

$r_f = 8\%$

Correlación de los retornos: $\rho = \text{corr}(r_1, r_2) = 30\%$

Resolviendo para w, tenemos que: ***w* =** **89,1%**

Dos Activos de Riesgo

El retorno esperado del portafolio riesgoso es de:

$E(r_p)$ = (0,891) (0,15) + (0,109) (0,10) = 14,5%

La desviación estándar del portafolio eficiente es:

$\sigma^2_p = 0{,}891^2 .\ 0{,}2^2 + 2 \times 0{,}891\ (1 - 0{,}891)\ (0{,}3)\ (0{,}2)\ (0{,}15) + (1 - 0{,}891)^2\ (0{,}15)^2$

$\sigma_p = 18{,}4\%$

La CAL del portafolio eficiente tiene una pendiente de:

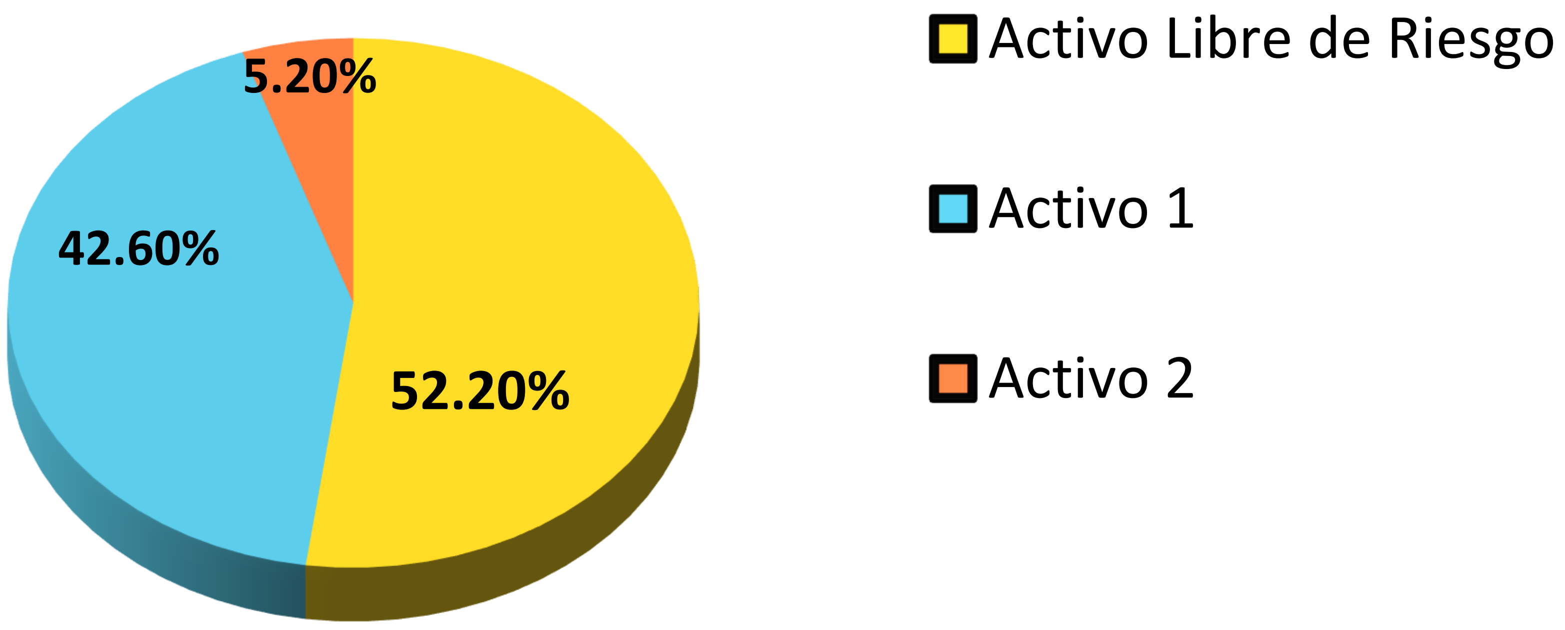
$$S_p = \frac{14{,}5\% - 8\%}{18{,}4\%} = 0{,}35$$

Un inversionista con un coeficiente de aversión al riesgo A=4, depositará un porcentaje y^* en el portafolio riesgoso :

Dos Activos de Riesgo

$$y^* = \frac{0.145 - 0.08}{(4)(0.184)^2} = 47{,}8\%$$

- En resumen, este inversionista dedicará el 47,8% de su patrimonio al portafolio riesgoso y el 52,2% al portafolio libre de riesgo.
- En el portafolio riesgoso, compuesto por 2 activos, invertirá el (0,478) (0,891) = 42,6% en el activo 1 (**acciones**) y (0,478) (0,109) = 5,2% en el activo 2 (**bonos corporativos**).



Construyamos la CAL y la frontera eficiente

Dos Activos de Riesgo

Es importante notar que la decisión de cuánto asignar al portafolio riesgoso versus el portafolio libre de riesgo, depende del grado de aversión al riesgo del inversionista.

Por su parte la decisión de cuánto asignar a cada uno de los activos riesgosos es la misma para todos los inversionistas, sin importar su grado de aversión al riesgo.

Se conoce como el Principio de Separación (James Tobin – 1958)

Ejercicio 6

UNIVERSIDAD EAFIT

- Suponga que tenemos dos activos de riesgo:

$$E[r_1] = 12\% \qquad \sigma_1 = 15\%$$
$$E[r_2] = 18\% \qquad \sigma_2 = 20\%$$

- La correlación entre ambos activos es del 25%.
- La tasa libre de riesgo es del 8%.
- Suponga que se trata de un inversionista averso al riesgo (A=6).

¿Cuánto invertirá en el activo libre de riesgo y cuánto en cada activo de riesgo?

Ir a Excel

Muchos Activos de Riesgo

Muchos Activos de Riesgo

- ¿Qué pasa si en lugar de sólo 2 activos de riesgo, extendemos el análisis a muchos de ellos?

¿Cómo serían las expresiones para el retorno esperado y la varianza?

Para el retorno tendríamos:

$E[r_p] = w_1.E[r_1] + w_2.\ E[r_2] + ... + w_n.E[r_n]$

$E[r_p] = \Sigma_i[w_i.E(r_i)]$

Con la restricción de que $\Sigma_i(w_i) = 1$

Para la varianza tendríamos:

$\sigma_p^2 = w_1^2.\sigma_1^2 + w_2^2.\sigma_2^2 + ... + w_n^2.\sigma_n^2 + 2.w_1.w_2.\text{cov}(r_1,r_2) + 2.w_1.w_3.\text{cov}(r_1,r_3) + ... + 2.w_1.w_n.\text{cov}(r_1,r_n) + ... + 2.w_{n-1}.w_n.\text{cov}(r_{n-1},r_n)$

Muchos Activos de Riesgo

Otra manera, más elegante, de escribir la varianza es:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{w}_i \cdot \mathrm{w}_j \cdot \mathrm{cov}(r_i, r_j)$$

¿Cómo podríamos escribir en forma matricial el retorno de un portafolio compuesto por *n* activos de riesgo?

$$E(r_p) = \boldsymbol{W}^T \cdot \boldsymbol{R}$$

Donde $\boldsymbol{W}^T$ es el vector de pesos $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ y R es el vector de retornos $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$

¿Por qué el vector $\boldsymbol{W}$ aparece transpuesto?

$$[W]^{\mathrm{T}} = [w_1 \quad w_2 \ldots\ldots\ldots w_{\mathrm{n}}]$$

En Excel podemos escribir: *Rp = mmultiply(transpose(W), R)*

En Python podemos escribir: *Rp = np.dot(W.T, R)*

Muchos Activos de Riesgo

¿Cómo podríamos escribir la varianza del portafolio en forma matricial?

$$\sigma_p{}^2 = \underbrace{[\boldsymbol{W}]^{\mathrm{T}}}_{1 \text{ x } n}\underbrace{[cov]}_{n \text{ x } n}\underbrace{[\boldsymbol{W}]}_{n \text{ x } 1}$$

En Excel podemos escribir: *VARp = mmultiply(mmultiply(transpose(W), COV), W)*

En Python podemos escribir: *VARp = np.dot(np.dot(W.T, COV), W)*

Muchos Activos de Riesgo

$$[cov] = \begin{bmatrix} cov(r_1,r_1) & cov(r_1,r_2) & cov(r_1,r_3) & \cdots & cov(r_1,r_n) \\ cov(r_2,r_1) & cov(r_2,r_2) & cov(r_2,r_3) & \cdots & cov(r_2,r_n) \\ cov(r_3,r_1) & cov(r_3,r_2) & cov(r_3,r_3) & \cdots & cov(r_3,r_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(r_n,r_1) & cov(r_n,r_2) & cov(r_n,r_3) & \cdots & cov(r_n,r_n) \end{bmatrix}$$

$$[w_j] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Implementación en Excel

1. Para cada uno de los activos calcule la D.S. y retorno promedio histórico
2. Con esta serie histórica de retornos calcule la correlación entre cada pareja
3. Obtenga la matriz de varianza-covarianza
4. Parta de unos w_i iniciales para calcular la varianza y retorno del portafolio
5. Utilice la función Solver de Excel para minimizar la varianza, sujeto a las siguientes restricciones:

   $\sum \boldsymbol{w}_i = 1$

   $\boldsymbol{w}_i \geq 0$

   $\boldsymbol{E(r_p)}$ = (dato que se entra)

6. Construya una tabla con distintos $E(r_p)$. Para cada uno de esos $E(r_p)$ obtenga la mínima varianza. Esto implica correr el Solver cuantos puntos sobre la frontera eficiente quiera calcular.

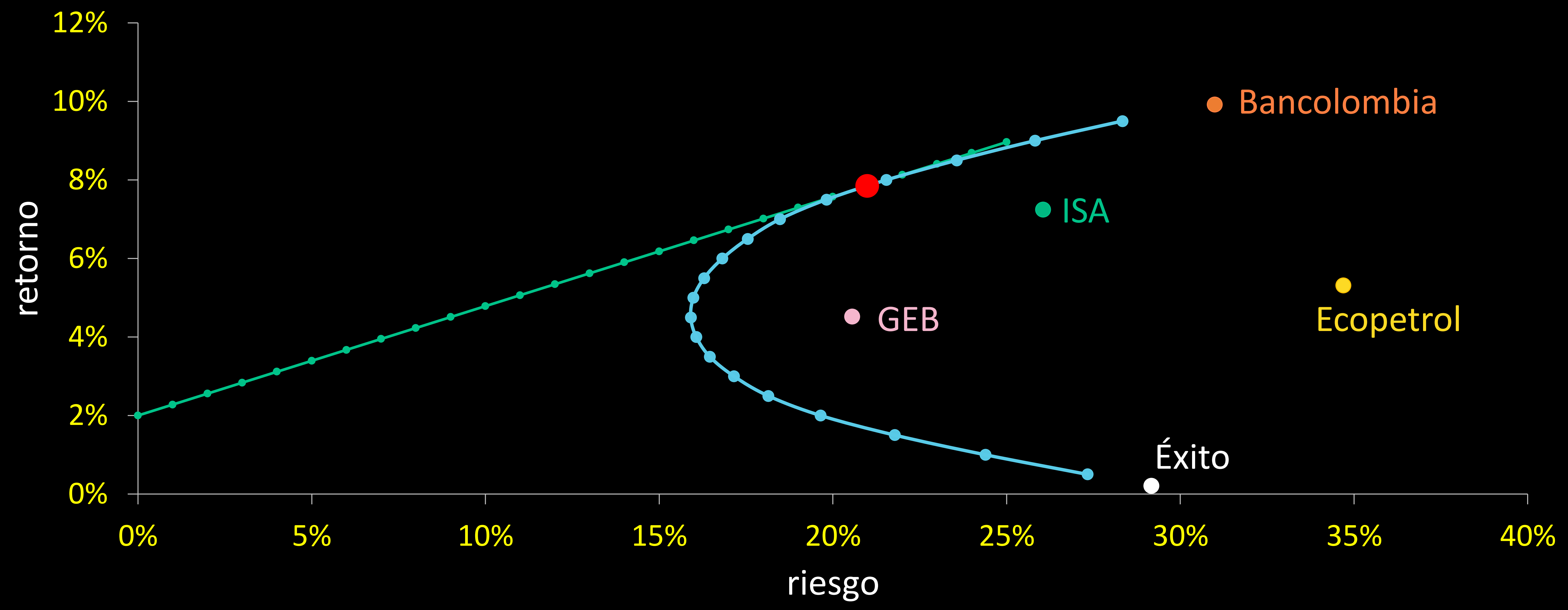
Implementación en Excel

UNIVERSIDAD EAFIT

7. Calcule el radio de Sharpe (RS) para cada pareja E(r_p) y σ estimada.
8. Seleccione la pareja con el mayor RS
9. La CAL que es tangente a la frontera eficiente tendrá una pendiente igual al mayor RS.
10. Ya cuenta con dos puntos de la CAL: el inicial (0, r_f) y el del mayor RS
11. Con estos dos puntos calcule la ecuación de la CAL.

Ir a hoja de Cálculo

Bondades de la Diversificación



De www.investing.com baje la serie semanal de 12 años de cinco acciones: Éxito, Bancolombia, Ecopetrol, Grupo Energía de Bogotá (GEB) e ISA. Calcule el portafolio riesgoso óptimo y la CAL. Asuma que r_f = 2%

←click

Bondades de la Diversificación

Suponga que Usted tiene un activo, el cual presenta un retorno esperado del 15% y una desviación estándar del 18%. ¿Qué pasa si Usted invierte, digamos, la mitad en otro activo que tiene un retorno esperado del 20% y una desviación estándar del 23%?. ¿Cuál sería la rentabilidad esperada de su portafolio y cuál la desviación estándar?

Antes de contestar esta pregunta, ¿Creen que nos falta algún dato?

Supongamos primero que los dos activos tienen una correlación alta, digamos del 80%.

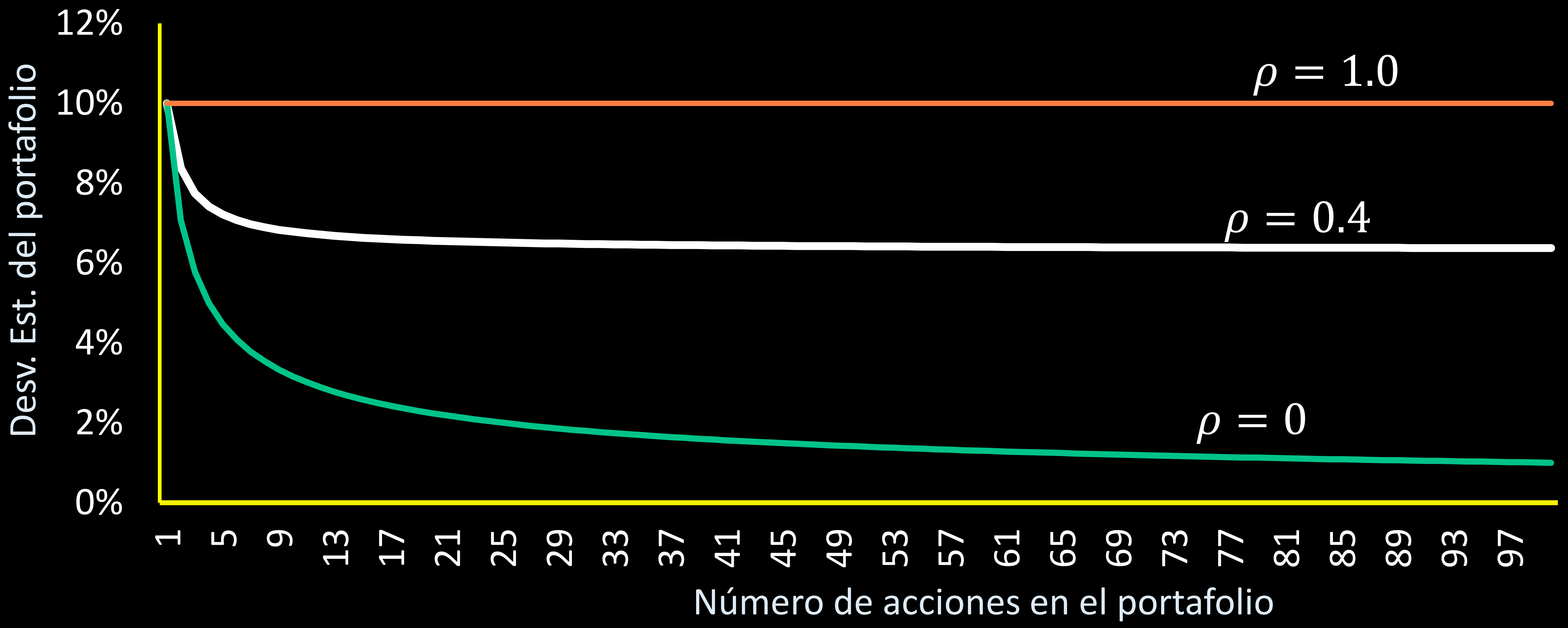
Ahora miremos qué pasa si la correlación es baja, digamos del 20%.

Bondades de la Diversificación

Suponga que la acción promedio en el mercado tiene una desviación estándar del 10% y la correlación promedio entre las acciones es de 0.4. Si Usted invierte la misma suma de dinero en cada acción, ¿Cuál es la varianza del portafolio? ¿Cuál sería si la correlación fuera de cero?. ¿Cuál si la correlación fuera de 1.0?

$$\boldsymbol{Cov}[\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{r_j}] = \rho_{ij} \times \sigma_i \sigma_j = \rho_{ij} \times 0.10 \times 0.10$$

$$\boldsymbol{Var}[\boldsymbol{r_p}] = \frac{1}{n} 0.10^2 + \frac{n-1}{n} Cov[r_i, r_j]$$



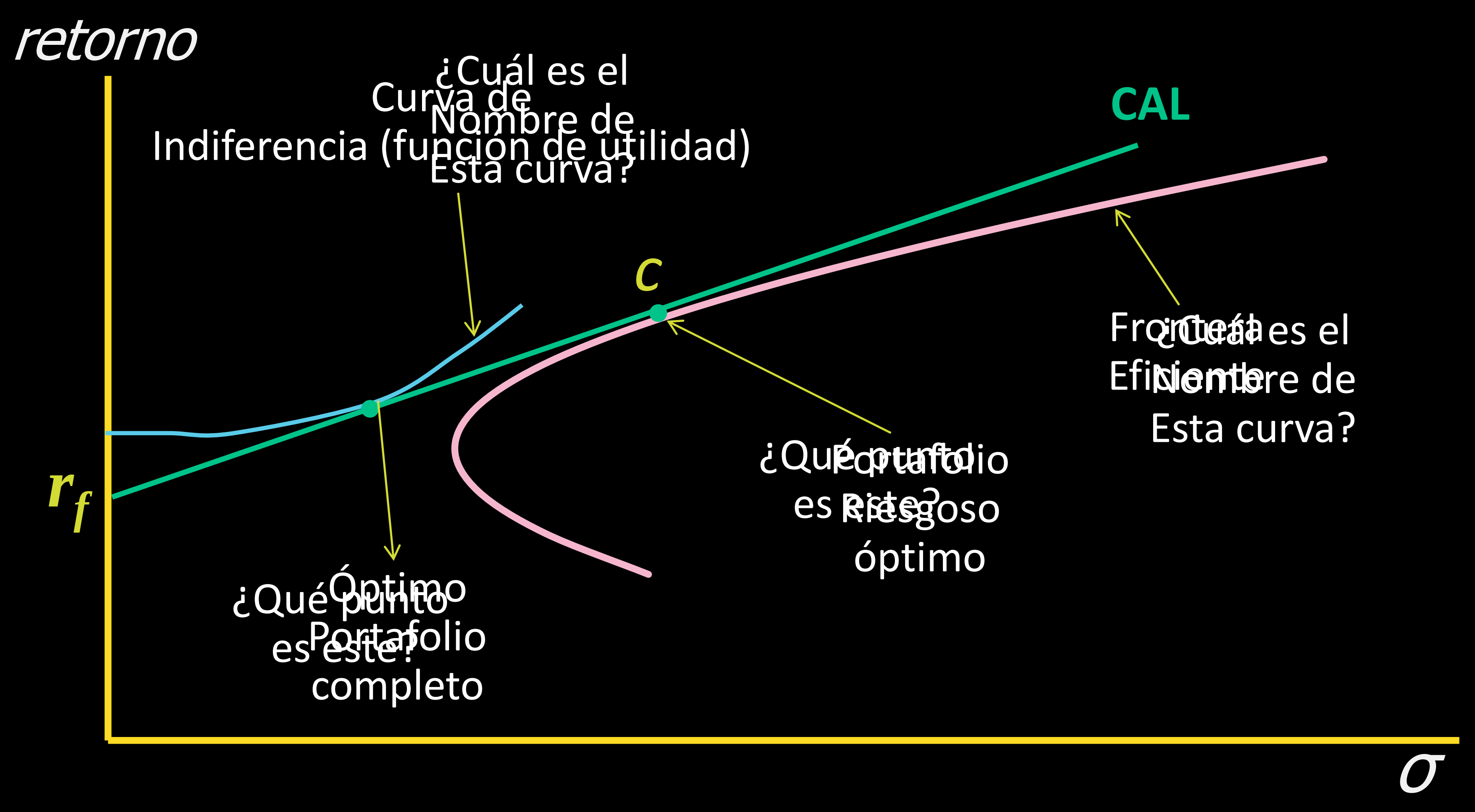
Bondades de la Diversificación

Eventualmente los beneficios de la diversificación llegan a un límite

Queda un riesgo remanente llamado riesgo sistemático, que es común a todas las acciones.

Algunas fuentes de riesgo sistemático pueden ser:

Crédito	Liquidez	Ciclo del Negocio	Value/ Growth



retorno
¿Cuál es el Nombre de Esta curva?
Curva de Indiferencia (función de utilidad)
CAL
C
¿Cuál es el Nombre de Esta curva?
Frontera Eficiente
¿Qué punto es este?
Portafolio Riesgoso óptimo
¿Qué punto es este?
Óptimo Portafolio completo
r_f
σ

Ejercicio 7

Suponga que tenemos un inversionista con su patrimonio invertido en activos tradicionales (acciones y bonos). El retorno esperado de las acciones es del 8% con una desviación estándar del 10%, mientras que los bonos corporativos tienen un retorno esperado del 6% con una desviación estándar del 8%. La tasa libre de riesgo es del 5%, y la correlación entre acciones y bonos corporativos es del -0,5.

Encuentre la frontera eficiente y el portafolio de riesgo óptimo.

Ahora suponga que usted, como asesor de este inversionista, le va a recomendar que invierta una parte de su portafolio en uno de los llamados activos alternativos. Este activo tiene un retorno esperado del 15% con una desviación estándar del 16%.

La correlación entre este activo alternativo y las acciones es de 0,3 mientras que la correlación entre el activo alternativo y los bonos corporativos es de -0,2.

Encuentre la nueva frontera eficiente y compare con la inicialmente obtenida. Adicionalmente encuentre el nuevo portafolio eficiente óptimo.