CAPÍTULO 2

Medición del riesgo de mercado en papeles de renta fija: Duración, Convexidad y Análisis DV10

2.1 Duración de Macaulay

El precio de un bono depende de manera importante de la tasa de interés y en esta medida, cambios en los intereses afectarán el precio de los bonos. Ese cambio en la tasa de interés va a afectar los bonos en mayor o menor intensidad, dependiendo también de la vida promedio del bono. Para ilustrar esto suponga que se tienen dos bonos exactamente iguales, excepto porque el primero tiene un plazo de 5 años a la madurez, mientras que el segundo bono tiene 7 años al vencimiento. El cupón para ambos es del 10%, pagado semestralmente y la estructura de tasas de interés del mercado está plana en el 12% efectivo anual (E.A).

El precio del primer bono es de 92,64% mientras que el precio del segundo bono es de 90,71%. Qué pasa si para ambos bonos asumimos que la tasa de interés sube 1% a todos los plazos?. ¿Cuál reaccionará más a este incremento en la tasa de interés?. Para el bono de 5 años de plazo, el nuevo precio será de 89,22%, mientras que para el bono de 7 años el nuevo precio será de 86,48%. Mientras que el precio para el bono de 5 años cayó en 342*pb*, la caída en el precio del bono de 7 años fue de 423*pb*. Mientras mayor sea la vida promedio de un bono, mayor será la sensibilidad ante variaciones en la tasa de interés.

La pregunta que surge entonces es: Cómo calcular la vida promedio de un bono, lo cual determinará la sensibilidad a variaciones en la tasa de interés?. La respuesta a esto la hallamos en la Duración de Macaulay.

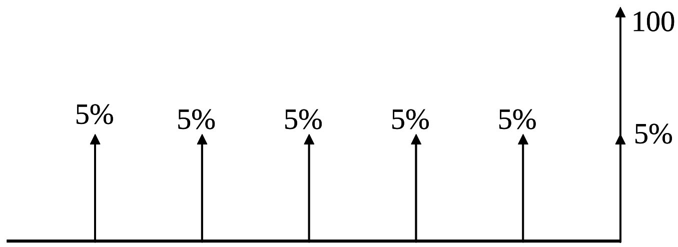
Existen varios tipos de duración. La más básica de todas es la que se conoce como Duración de Macaulay (DM), definida como la vida promedio de un papel, de acuerdo a los flujos que genera el mismo. La expresión general para la duración de Macaulay es:

$$\text{Duración de Macaulay} = \frac{\left(\sum_{K=1}^{N} \frac{t_k (C/m)}{(1+y/m)^k}\right) + \frac{t_N}{(1+y/m)^N}}{P} \qquad (2.1)$$

Donde:

- m = Número de pagos al año que tiene el Bono
- t_k = Número de años hasta el k-ésimo cupón
- y = *Yield* del papel Nominal Vencido
- N = Número de cupones al vencimiento
- C = Cupón anual que paga el bono

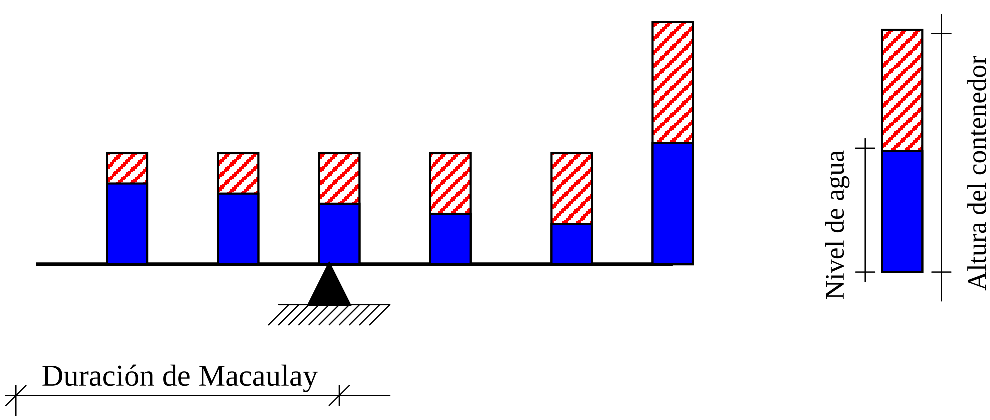
Así por ejemplo, si tenemos un bono con una madurez de tres años que paga un cupón fijo del 10% en forma semianual y al final paga el 100% del principal, la duración de **Macaulay** será:



$$DM = \frac{\left[0{,}5 \cdot 5\% \cdot Z_1 + 1{,}0 \cdot 5\% \cdot Z_2 + 1{,}5 \cdot 5\% \cdot Z_3 + 2{,}0 \cdot 5\% \cdot Z_4 + 2{,}5 \cdot 5\% \cdot Z_5 + 3{,}0 \cdot 5\% \cdot Z_6 + 3{,}0 \cdot 1 \cdot Z_6\right]}{\left(\sum_{i=1}^{6} 5\% \cdot Z_i\right) + 1 \cdot Z_6}$$

En este caso se ha llamado $Z_k = \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{y}{m}\right)^k}$

La Duración de **Macaulay** se da entonces en términos de años. Para explicar el concepto de Duración de **Macaulay** en términos físicos, ésta puede entenderse como el punto de equilibrio de una barra cargada con contenedores de agua, donde el valor del pago en cada período corresponde a la altura del contenedor y el valor presente de dicho pago corresponde al nivel al que está lleno de agua cada contenedor.



Ejemplo 1:

¿Cuál es la duración en años de una deuda a par por 4 años y un monto de COP$10.000 millones que paga un interés del 8% semestre vencido?

Como es par, el valor presente es igual al valor facial. Por lo tanto $y = C = 8\%$

$$\mathrm{DM} = \frac{\frac{0{,}5\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^1}}{1} + \frac{\frac{1\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^2}}{1} + \frac{\frac{1{,}5\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^3}}{1} + \frac{\frac{2\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^4}}{1}$$

$$+ \frac{\frac{2{,}5\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^5}}{1} + \frac{\frac{3\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^6}}{1} + \frac{\frac{3{,}5\times 0{,}08/2}{(1+0{,}08/2)^7}}{1} + \frac{\frac{4\times (1+0{,}08/2)}{(1+0{,}08/2)^8}}{1}$$

DM = 2,07 Años

Ejemplo 2:

¿Cuál es la duración de **Macaulay** de un bono cero cupón a dos años de plazo, cuyo precio es de $0,98. El valor facial es de $1?.

Basados en la ecuación (2.1) tenemos que los cupones son cero (*C*=0) por tratarse de un bono cero cupón. Igualmente puede obviarse *m* por la misma razón. Por lo tanto la ecuación queda reducida a:

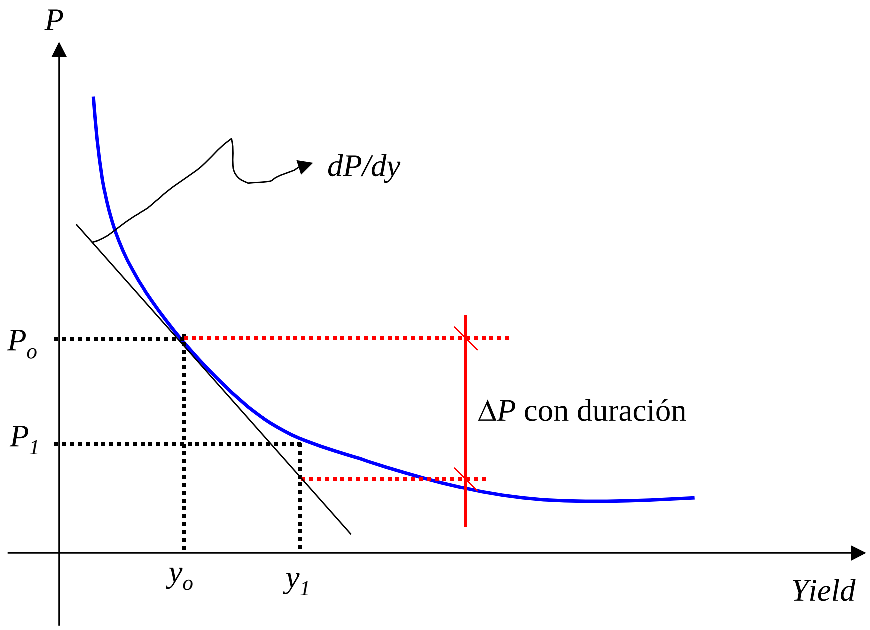
$$\text{Duración de Macaulay} = \frac{\frac{t_N}{(1+y)^N}}{P}$$

Ahora, el precio de un bono cero cupón que paga $1 en un período *N* será:

$P = \dfrac{1}{(1+y)^N}$ Reemplazando esta expresión para *P* en la Duración de Macaulay nos deja finalmente con que: Duración de Macaulay = t_N. Quiere decir que la duración de Macaulay de un bono cero cupón no es más que la vida del bono; así, la Duración de Macaulay de este bono cero cupón será de 2 años.

2.2 Duración en Unidades Monetarias

Otra medida de duración es la variación en el precio de un papel ante variaciones pequeñas en la tasa de interés, lo que en términos matemáticos se puede expresar como $\frac{dP}{dy}$, es decir, la derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés. En este caso *P* se refiere al precio del bono y *y* a la tasa de interés. Esta se conoce como Duración en términos de pesos.



La duración en términos de pesos corresponde entonces a la pendiente el precio de un bono respecto al *yield* o la tasa de interés. Usando esta duración podrá determinarse el cambio en el precio de un papel tasa fija ante cambios pequeños en la tasa de interés. En la gráfica de arriba se muestra que utilizando duración, el cambio en el precio es sólo una aproximación, pues mientras el cambio real en el precio es de $P_o - P_1$ cuando la tasa de interés se mueve de y_o a y_1, el cambio en el precio calculado con duración es de ΔP.

2.3 Duración Modificada

Finalmente, la Duración Modificada corresponde a la expresión:

$$DURACIÓN = \frac{-\frac{dP}{dy}}{P}$$

Llamemos a esta duración simplemente DURACIÓN. Tenemos entonces que:

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} \approx \frac{dP}{dy} \qquad \text{Por lo que} \qquad \Delta P \approx \left(\frac{dP}{dy}\right)\Delta y$$

Dividiendo por P a ambos lados:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \left[\frac{\left(\frac{dP}{dy}\right)}{P}\right]\Delta y \qquad (2.2)$$

El término entre corchetes al lado derecho de la expresión (2.2) puede ser escrito también como:

$\dfrac{\left(\dfrac{dP}{P}\right)}{dy}$ Esta expresión significa entonces cuántas veces es el cambio porcentual en el precio, el cambio en la tasa de interés. Por ejemplo, si dicho valor fuera de cuatro, quiere decir que el cambio porcentual en el precio es cuatro veces el cambio en la tasa de interés. Así, si la tasa de interés baja 100*pb*, el precio sube porcentualmente en 400*pb*.

Note que cuando se utiliza duración, se está simplificando diciendo que la relación entre precio y tasa de interés es una línea recta, cuando en realidad es una relación con cierta convexidad, tal como se muestra en la gráfica anterior.

Para un instrumento financiero que pague cupones *m* veces al año, el precio es:

$$P = \sum_{k=1}^{N} \frac{C/m}{(1+y/m)^k} + \frac{1}{(1+y/m)^N}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{(1/m)(k)(C/m)}{(1+y/m)^{k+1}} + \frac{(1/m)(N)}{(1+y/m)^{N+1}}\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{1+y/m}\right)\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{t_k(C/m)}{(1+y/m)^k} + \frac{t_N}{(1+y/m)^N}\right]$$

Por lo tanto: Duración $= \left(\dfrac{1}{1+y/m}\right)$ (Duración de Macaulay)

Duración en Pesos = (Duración) (Precio)

Ejemplo:

Suponga un Bono Par con 10 años a la madurez y un cupón del 13% pagadero anualmente

DURACIÓN = 5,43

Para un incremento en el *yield* de 0,5%:

$\Delta y = 0{,}005$

$\Delta P \approx -5{,}43\ (100)\ (0{,}005) \approx -2{,}7150$

$P + \Delta P = 100 - 2{,}7150 = 97{,}2850$

El precio de un bono a 10 años, con un cupón anual del 13% y en *yield* del 13,50% será de 97,34

La diferencia entre el valor real y el cambio pronosticado por la duración es de 97,34 – 97,2850 = 0,055*pb* = 0,056% del precio real

2.4 Precio real de Bonos vs. Estimación basada en Duración

Suponga un bono par a 10 años con cupón anual y un *yield* del 13%. La duración de este papel es de 5,43.

***Yield* (%)**	**Precio del Bono**	**Estimación Basada en Duración**	**Diferencia**
9,00	125,67	121,70	3,97
9,50	121,98	118,99	2,98
10,00	118,43	116,28	2,16
10,50	115,04	113,57	1,47
11,00	111,78	110,85	0,93
11,50	108,65	108,14	0,51
12,00	105,65	105,43	0,22
12,50	102,77	102,71	0,06
13,00	100,00	100,00	0,00
13,50	97,34	97,29	0,05
14,00	94,78	94,57	0,21
14,50	92,33	91,86	0,47
15,00	89,96	89,15	0,81

Observe cómo la diferencia entre el precio real y el precio calculado con duración se va haciendo mayor en la medida en que la variación de la tasa de interés es mayor. En efecto, cuando la tasa de interés se ubica en 13,50%, es decir, apenas 50*pb* por encima de su nivel inicial que era del 13%, la diferencia entre el precio real y el calculado con duración es apenas de 5*pb*. Por el contrario, cuando la tasa de interés se ubica en el 9%, es decir, 400*pb* por debajo de su nivel inicial, la diferencia entre ambos precios en tan grande como de 397*pb*. Esto obedece a la curvatura de la relación entre precio del bono y tasa de interés. Cuando la variación en la tasa de interés es muy grande ya la primera derivada, que nos muestra un cambio siempre lineal, se aleja de manera importante del cambio real en el precio.

Duración para varios Cupones y madurez de Bonos con Cupón Anual

Suponga un Bono con un *yield* del 13%.

	Años a la Madurez			
Cupón (%)	**3**	**5**	**7**	**10**
0,00	2,66	4,43	6,20	8,85
8,00	2,45	3,75	4,80	5,96
9,00	2,43	3,69	4,70	5,82
10,00	2,41	3,64	4,62	5,70
11,00	2,39	3,60	4,55	5,60
12,00	2,38	3,56	4,48	5,51
13,00	2,36	3,52	4,42	5,43
14,00	2,35	3,48	4,37	5,35
15,00	2,33	3,45	4,32	5,29

La duración más alta se presenta hacia la derecha y arriba, esto es, será más alta para bonos que pagan cupón bajo y con una vida muy larga. Por el contrario tendrán duración muy baja aquellos bonos con vida corta y alto cupón.

Duración para varios *yields* y madurez de Bonos con Cupón Anual

Suponga un Bono con un Cupón del 13%.

	Años a la Madurez			
Yield (%)	**3**	**5**	**7**	**10**
0,00	2,72	4,21	5,57	7,46
8,00	2,49	3,77	4,84	6,16
9,00	2,46	3,72	4,75	6,01
10,00	2,44	3,67	4,67	5,86
11,00	2,41	3,62	4,59	5,71
12,00	2,39	3,57	4,50	5,57
13,00	2,36	3,52	4,42	5,43
14,00	2,34	3,47	4,34	5,29
15,00	2,31	3,42	4,27	5,15

La duración aumenta hacia arriba y a la derecha, es decir, será más alta en bonos que tienen una vida larga y que se tranzan a una alta prima (bajo *yield*). Por el contrario la duración más baja la tendrán aquellos bonos con una baja madurez y que se trancen a descuento.

2.5 Cómo utilizar el concepto de Duración para cobertura de portafolios

Comencemos por estudiar dos definiciones básicas de Duración y *yield*, ya no para un papel en particular, sino para un portafolio de Bonos:

Duración del Portafolio = Duración de los Bonos ponderadas por el valor de cada Bono

Yield del Portafolio = Yield-to-Maturity de los flujos de caja de todos los Bonos en el Portafolio

Los dos puntos siguientes serán exactamente lo mismo únicamente cuando la curva de rendimientos (*yield*) es plana:

- Duración calculada como promedio ponderado
- Duración calculada directamente con los flujos de caja combinados

Ejemplo 4:

Supongamos que tenemos un portafolio compuesto por dos Bonos con las siguientes características:

B_1 = 97,6954 Yield = 8,50%

B_2 = 79,6169 Yield = 10,50%

$B_1 + B_2$ = 177,3123

La madurez del Bono 1 es de 1 año mientras que la del Bono 2 es de 4 años. Ambos pagan cupones anuales, el Bono 1 del 10% y el Bono 2 del 4%.

Duración del Bono 1 = 0,922 Años

Duración del Bono 2 = 3,388 Años

Participación del Bono 1 en el portafolio = $\frac{B_1}{B_1 + B_2}$ = 55,10%

Participación del Bono 2 en el portafolio = 44,90%.

Duración calculada como promedio ponderado =

(0,5510) (0,922) + (0,4490) (3,388)

= 2,0292 Años

<u>Flujos de Caja del Portafolio:</u>

1.0 Años	**2.0 Años**	**3.0 Años**	**4.0 Años**
114	4	4	104

Yield con flujos de caja combinados:

$$177{,}3123=\frac{114}{(1+y)}+\frac{4}{(1+y)^2}+\frac{4}{(1+y)^3}+\frac{104}{(1+y)^4}$$

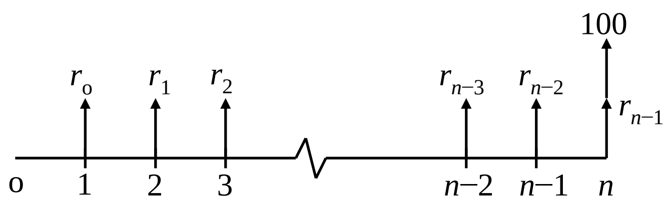
Yield = 11,02%

Duración con los flujos de Caja combinados:

$$\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{(1.0)\,114}{(1+y)}+\frac{(2.0)\,4}{(1+y)^2}+\frac{(3.0)\,4}{(1+y)^3}+\frac{(4.0)\,104}{(1+y)^4}\right]\Big/177{,}3123$$

2.6 Duración de Notas Flotantes

En primer lugar definamos una nota flotante como aquella que paga cupones variables, ligados a la tasa de interés de referencia. Suponga por ejemplo el siguiente bono que paga un cupón variable, igual a la tasa de interés de referencia r.



Empecemos a valorar este bono de atrás hacia adelante. En el momento n el pago es igual al nocional de \$100 más el cupón, el cual será igual a la tasa de interés de referencia[1] vigente en el momento $n-1$. A qué tasa descontar este flujo para obtener el valor presente en el momento $n-1$? Pues al costo de oportunidad que se tendría en ese momento ($n-1$) para una inversión a un plazo igual al tiempo transcurrido entre pago de cupones. ¿Cuál es ese costo de oportunidad? No es más que la tasa a la que podría invertirse a ese plazo en el momento $n-1$. Y esa tasa deberá ser r_{n-1}. Así las cosas, el valor presente en el momento $n-1$ será:

$$VP_{n-1}=\frac{100+100\times r_{n-1}}{1+r_{n-1}}=100$$

El mismo procedimiento puede seguirse hasta llegar a que en el momento inicial, el valor de esta nota es par, es decir, es igual a 100.

[1] Para el caso colombiano, por ejemplo, la tasa de interés de referencia puede ser la DTF. Recuerde que esta tasa es un promedio de las captaciones del sistema financiero. El plazo más líquido es el de 90 días.

Supongamos un bono que paga cupón m veces al año. Llamemos r la tasa de interés de referencia. Después de que la tasa para el primer cupón se ha fijado a $\bar{r}$:

$$P = \frac{r/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=2}^{N} \frac{(r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{(r-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{(r-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + 1$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{m}\left[\frac{1+\frac{\bar{r}}{m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^2}\right]$$

Si inicialmente $\bar{r} = r$, y teniendo en cuenta que $P = 1$, entonces:

$$\frac{-\left(\frac{dP}{dr}\right)}{P} = \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{r}{m}}\right)$$

La duración inicial de una nota flotante con $1/m$ años al próximo reprecio de la tasa de interés = Duración de un cero cupón a $1/m$ años de plazo. Por ejemplo, si es un bono que reprecia cada 6 meses:

Duración Inicial = Duración de un Cero Cupón a 6 meses

Cupón = Dos veces la tasa de interés de referencia ($2r$)

Supongamos que la Nota paga cupón m veces por año

Llamemos r la tasa de interés de referencia. Después de que la tasa para el primer cupón se ha fijado a $\bar{r}$:

$$P = \frac{2\bar{r}/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=2}^{N} \frac{(2r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{2(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(2r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{2(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + 2\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{(r/m)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}\right] - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$= \frac{2(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + 2 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$P = \frac{2(\bar{r}-r)/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)} + 2 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{2}{m}\frac{\left(1+\frac{\bar{r}}{m}\right)}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^2} + \frac{N/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{N+1}}$$

Si inicialmente $\bar{r} = r$, entonces:

$$-\frac{\frac{dP}{dr}}{P} = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)}\left[\frac{2}{m} - \frac{N/m}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}\right]\frac{1}{2-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^N}}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)}\left[\frac{1-(\text{Tiempo a la Madurez})(\text{Precio Cero Cupón})}{2-(\text{Precio del Cero Cupón})}\right]$$

Notas de doble flotación generalmente van a tener una duración negativa.

2.7 Duración y Valor Relativo

Cuando se está haciendo trading "apostándole" a cambios en la forma de la curva[2], también la duración se hace importante. Por ejemplo, suponga que se cree que habrá un empinamiento en la curva de tasas de interés. Según esto se deberá tomar una posición larga en los plazos cortos y una posición corta en los plazos largos de la curva. Las utilidades se harán si efectivamente la curva se empina, pero si hay un movimiento paralelo en la curva, no deberá hacerse utilidad ni pérdida. La forma de igualar las sensibilidades en las posiciones en la parte corta y la parte larga de la curva, es usando duración. Podemos escribir:

$\text{Sensibilidad}_{\text{parte corta}} = \text{Sensibilidad}_{\text{parte larga}}$

La Sensibilidad recordemos que la podemos escribir como: $-P{\cdot}D{\cdot}\Delta y$

Por lo tanto $P_{\text{corta}}{\cdot}D_{\text{corta}}{\cdot}\Delta y = P_{\text{larga}}{\cdot}D_{\text{larga}}{\cdot}\Delta y$

Como el Δy que queremos simular es el mismo, podemos escribir:

$$\frac{P_{corta}}{P_{larga}} = \frac{D_{larga}}{D_{corta}}$$

Por ejemplo, si usted cree en un empinamiento de la curva, comprará papeles de corta duración y se acortará en papeles de larga duración. Si Usted se alarga en \$20.000 millones de valor facial en un bono a tres años cuya duración sea de 1,9, ¿En cuánto tendrá que acortarse en uno de 10 años cuya duración es de 5,65?.

Rta: $P_{\text{larga}} = P_{\text{corta}} \times D_{\text{corta}}/D_{larga}$
$P_{\text{larga}} = \$20.000\text{mm} \times 1{,}9/5{,}65$
$P_{\text{larga}} = \$6.726 \text{ millones}$

Deberá entonces acortarse en el papel de 10 años por un valor presente de \$6.726 millones.

---

[2] Valor relativo se conoce a la estrategia de trading en donde se hacen utilidades por cambios relativos en el precio de un activo respecto a cambios en el precio de otro activo. En este caso por ejemplo, se hacen utilidades si la tasa de interés de corto plazo se mueva hacia abajo y la de largo plazo lo hace hacia arriba (empinamiento). Si el movimiento es en la misma dirección en ambos plazos, no se hace ni utilidad ni pérdida.

2.8 Duración de Tasas Clave (*Key Rate Durations*)

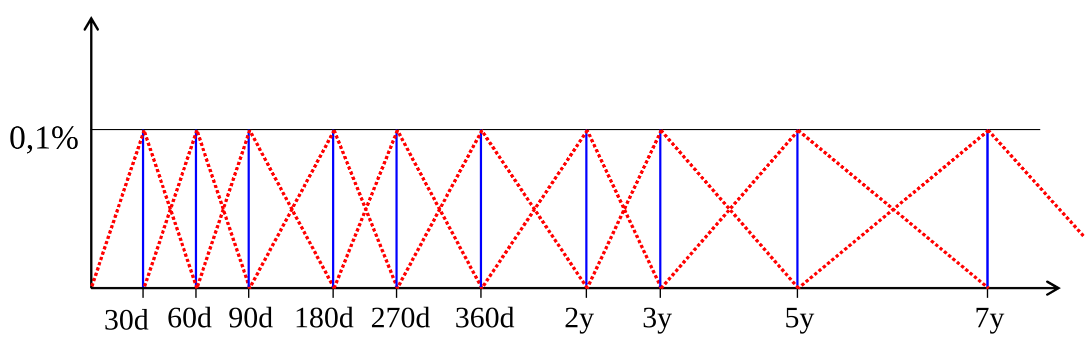
El lector podrá reconocer una desventaja con el análisis de duración, tal como se ha presentado hasta ahora y es que se asume que el movimiento de la tasa de interés es igual en todos los plazos, es decir, la curva de tasas de interés se mueve de forma paralela. El análisis de tasas clave PV10 permite conocer la variación del valor del portafolio cuando se mueven de manera independiente 10 puntos básicos las tasas de referencia del mercado. En realidad este análisis se conocer en la literatura anglosajona como DV01, queriendo decir los cambios en el valor del portafolio cuando las tasas de interés se mueven 1 punto básico. Sin embargo, en mercados en desarrollo las tasas generalmente no cambian 1 punto básico, sino que lo hacen más frecuentemente en múltiplos de 10*pb*. Por esta razón se rebautiza este análisis como PV10, significando las variaciones en el valor del portafolio cuando las tasas de referencia cambian 10*pb*.

La duración de tasas clave no es un modelo de estructura de tasas de interés ya que ésta no especifica cómo las tasas de interés deberán moverse con el tiempo; más bien es un intento por obtener las duraciones con respecto al movimiento de algunas tasas clave en la curva de rendimientos del mercado.

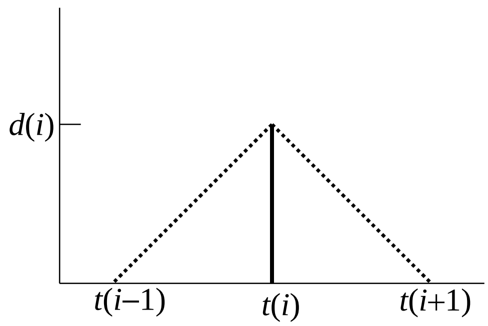
Obtener la duración de tasa clave tiene 2 pasos:

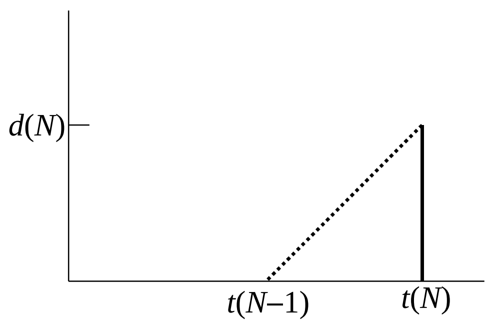
- Seleccionar las tasas clave. Por ejemplo, para plazos menores a un año las tasas clave pueden ser las de 30, 60, 90, 180, 270 y 360 días. Para plazos mayores a un año puede tomarse la estructura de tasas de TES, según lo cual las tasas clave serían 1 año, 3 años, 5 años, 7 años y 10 años
- Describir cómo las otras tasas cambian cuando cambian las tasas clave. La regla es que el efecto de una tasa clave sobre otras tasas declina linealmente, llegando a cero en las tasas clave adyacentes.

Si un flujo está en un plazo intermedio entre dos tasas clave, la variación en la tasa que se sensibiliza será igual al cambio linealmente proporcional entre una variación de 10*pb* para esa tasa clave y cero en la tasa clave adyacente.

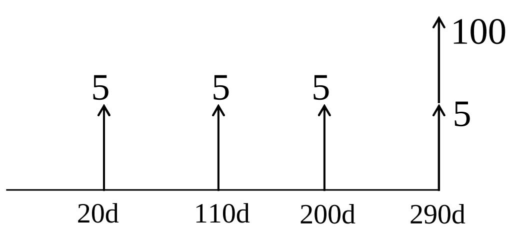


Por ejemplo, si la tasa de 5 años sube en 10*pb*, ya que hay 2 años entre la tasa clave de 3 años y la de 5 años, en cada año la tasa subirá en 5*pb*. Así, la tasa de 4 años subirá en 5*pb*. Igualmente, entre la tasa clave de 5 años y la de 7 años hay 2 años de diferencia, por lo que la tasa de 6 años será 5*pb* menor a la de 5 años.



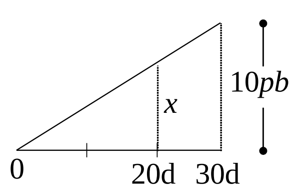


Por ejemplo, si queremos saber la sensibilidad de un flujo que se presentará en 15 días cuando la tasa clave de 30 días cambia 10*pb*, debemos considerar un incremento en la tasa de 15 días de 5*pb*, pues este plazo está justo en medio entre los plazos de 0 y 30 días. Miremos el siguiente flujo y las tasas cero cupón a cada plazo:



Plazo (Días)	**Tasa (%)**
20	8,0%
110	8,5%
200	9,0%
290	9,5%

El primer cupón se recibe en 20 días, el segundo en 110 días, el tercero en 200 días y el último más el principal en 290 días, para un precio de 112,2194. El primer flujo sólo tiene una tasa clave a sus lados, en este caso la de 30 días que está a su derecha y por lo tanto sólo se ve afectado cuando cambia esta tasa clave, siendo insensible a variaciones en las demás tasas clave.



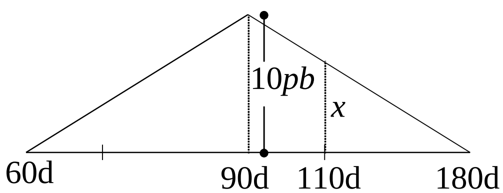
$$\frac{10pb}{30d} = \frac{x}{20d}$$

Por lo tanto x = 6,67*pb*. Esto quiere decir que la tasa de 20 días sube 6,67 puntos básicos cuando la tasa clave de 30 días sube 10*pb*. La nueva tasa de 20 días es de 8,0667%. El siguiente paso es recalcular el precio del bono cuando las tasas de los diferentes flujos son:

Plazo (Días)	**Tasa (%)**
20	8,0667%
110	8,5%
200	9,0%
290	9,5%

El nuevo precio en este caso es de 112,2192. La diferencia entre el precio original y este nuevo precio es la sensibilidad del bono a la tasa de 30 días, esto es, DV10 30d = 112,2194−112,2192=$0,0002 por cada $100 de valor nocional.

En segundo lugar, suponga que la siguiente tasa clave, la de 60 días, sube 10*pb*. Ninguno de los flujos depende de movimientos en esta tasa clave. La siguiente tasa clave es la de 90 días, la cual afecta el segundo cupón.



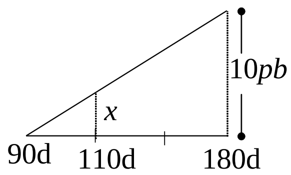
$$\frac{10pb}{180d-90d}=\frac{x}{180d-110d}$$

Por lo tanto x = 7,78*pb*. Esto quiere decir que la tasa de 110 días sube 7,78 puntos básicos cuando la tasa clave de 90 días sube 10*pb*. La nueva tasa de 110 días es de 8,5778%. El siguiente paso es recalcular el precio del bono cuando las tasas de los diferentes flujos son:

Plazo (Días)	**Tasa (%)**
20	8,0%
110	8,5778%
200	9,0%
290	9,5%

El nuevo precio en este caso es de 112,2191. La diferencia entre el precio original y este nuevo precio es la sensibilidad del bono a la tasa de 90 días, esto es, DV10 90d = 112,2194−112,2191=$0,0003 por cada $100 de valor nocional.

El segundo flujo también se ve afectado cuando la tasa clave de 180 días cambia. En este caso tendríamos:



$$\frac{10pb}{180d-90d}=\frac{x}{110d-90d}$$

Por lo tanto $x = 2{,}22pb$. Esto quiere decir que la tasa de 110 días sube 2,22 puntos básicos cuando la tasa clave de 180 días sube 10*pb*. La nueva tasa de 110 días es de 8,5222%. El siguiente paso es recalcular el precio del bono cuando las tasas de los diferentes flujos son:

Plazo (Días)	**Tasa (%)**
20	8,0%
110	8,5222%
200	9,0%
290	9,5%

El nuevo precio en este caso es de 112,2189. La diferencia entre el precio original y este nuevo precio es la sensibilidad del bono a la tasa de 180 días, esto es, DV10 180d = 112,2194−112,2189=$0,0005 por cada $100 de valor nocional.

El siguiente cuadro resumen las duraciones para las distintas tasas clave del bono considerado:

	PV10					
	30d	60d	90d	180d	270d	360d
Flujo 1	$0,0002	0	0	0	0	0
Flujo 2	0	0	$0,0003	$0,00050	0	0
Flujo 3	0	0	0	$0,0019	$0,00050	0
Flujo 4	0	0	0	0	$0,056	$0,0165
TOTAL	$0,0002	0	$0,0003	$0,0024	$0,0565	$0,0165

Como se nota, el bono no es sensible a los movimientos en la tasa de 60 días, mientras que el bono presenta la más alta sensibilidad a la tasa de 270 días.

Miremos ahora el siguiente ejemplo donde vamos a magnificar los movimientos en las tasas clave, asumiendo que suben 100*pb* (1%). Se trata de un bono a 10 años que paga cupones anualmente. Las características son las siguientes:

Cupón Anual = 18.00%
Madurez = 10 Años
Precio = 100,1780

Si la tasa clave de 3 años sube 1%, tenemos:

Madurez	Tasa Spot	Valor Presente	Cambio en la tasa clave de 3 años	Valor Presente
1,00	12,66%	15,977980	12,66%	15,977980
2,00	15,36%	13,524760	15,36%	13,524760
3,00	16,66%	11,336740	17,66%	11,050140
4,00	17,38%	9,483218	17,38%	9,483218
5,00	17,82%	7,929507	17,82%	7,929507
6,00	18,11%	6,629929	18,11%	6,629929
7,00	18,32%	5,543353	18,32%	5,543353
8,00	18,48%	4,634908	18,48%	4,634908
9,00	18,61%	3,875377	18,61%	3,875377
10,00	18,70%	21,242210	18,70%	21,242210

El nuevo valor presente será: 99,8914. Por lo tanto la Duración de Tasa Clave a 3 años será de 0,2861

Miremos las duraciones de tasa clave para 7 años y 10 años:

Si la tasa de 7 años sube 1%, se verán afectadas las tasas subyacentes de 6 años a la izquierda, y de 8 y 9 años a la derecha. Con el movimiento hacia arriba de la tasa de 7 años el nuevo precio del bono es de 99,3948, mientras que con el cambio en la tasa de 10 años el nuevo precio del bono es de 98,1750.

Las Duraciones de Tasa Clave para 7 y 10 años, respectivamente, son de 0,7818 y 1,9994. Las nuevas tasas y precios se muestran en el siguiente cuadro:

Madurez	Cambio en la tasa clave de 7 años	Valor Presente	Cambio en la tasa clave de 10 años	Valor Presente
1,00	12,66%	15,9780	12,66%	15,9780
2,00	15,36%	13,5248	15,36%	13,5248
3,00	16,66%	11,3367	16,66%	11,3367
4,00	17,38%	9,4832	17,38%	9,4832
5,00	17,82%	7,9295	17,82%	7,9295
6,00	18,61%	6,4640	18,11%	6,6299
7,00	19,32%	5,2262	18,32%	5,5434
8,00	19,15%	4,4315	18,82%	4,5319
9,00	18,94%	3,7787	19,27%	3,6847
10,00	18,70%	21,2422	19,70%	19,5329

La estimación de la Duración para la tasa clave de 3 años será:

$$-\frac{\dfrac{99{,}8914-100{,}1780}{100{,}1780}}{0{,}01}=0{,}2861$$

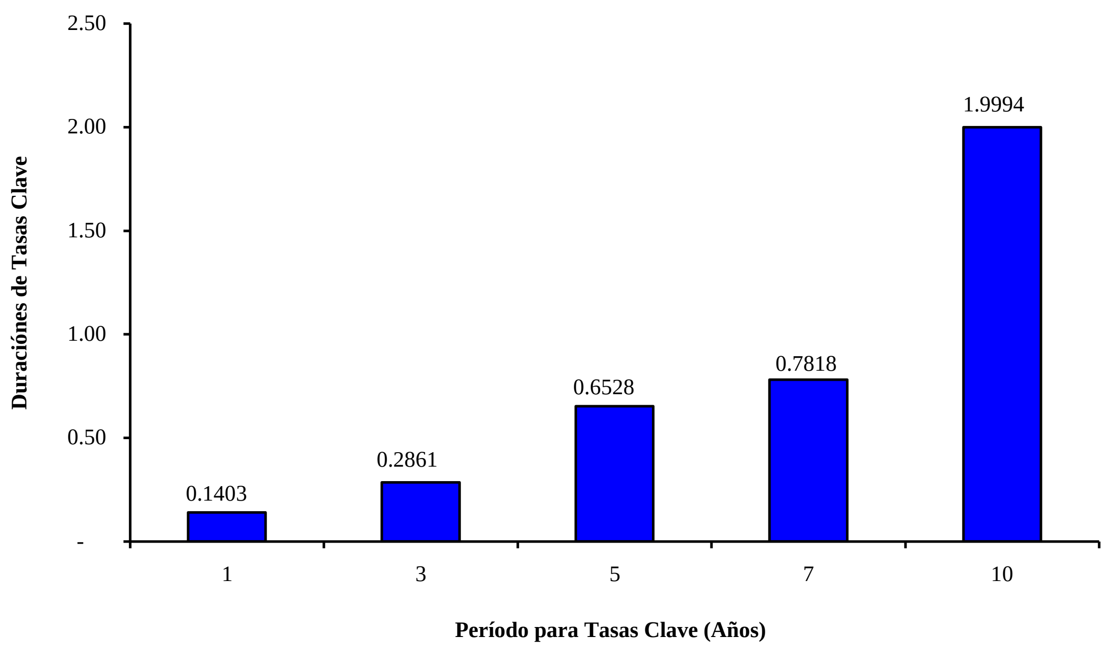
La estimación de la Duración para la tasa clave de 7 años será:

$$-\frac{\dfrac{99{,}3948-100{,}1780}{100{,}1780}}{0{,}01}=0{,}7818$$

Generalizando:

$$\text{Key Rate Duration}_i=\frac{P_+-P_o}{P_o\cdot d(i)}$$

Donde: P_o = Precio del Bono con la actual curva spot
P_+ = Precio del Bono con las tasas spot luego del cambio
$d(i)$ = Cambio en la *i-ésima* tasa clave



2.9 Duración Efectiva

Tal como hemos visto hasta ahora la duración, esta representa en términos generales la variación del precio de un bono cuando cambia la tasa de interés y este cambio es igual sin importar si la tasa de interés se mueve hacia arriba o hacia abajo. Lo cierto es que dicha relación entre el precio de un bono y la tasa de interés en la mayoría de los casos no es simétrica y por lo tanto es válido tener en cuenta la variación en el precio cuando la tasa sube ó cuando la tasa baja.

La Duración Efectiva tiene en cuenta esa asimetría de la relación entre el precio y la tasa de interés y se calcula como un promedio de la sensibilidad del precio del bono cuando la tasa de interés sube y cuando la tasa de interés baja. La expresión es entonces:

$$DE = \frac{P_+ + P_- - 2P_o}{P_o\left[\frac{1}{2}(y_+ - y_-)\right]}$$

Donde: P_- = Precio si el *yield* cae en Δy
P_+ = Precio si el *yield* se incrementa en Δy
P_o = Precio Inicial
y = *Yield* Inicial
y_+ = $y + \Delta y$
y_- = $y - \Delta y$

En la expresión de Duración Modificada el numerador es ΔP, que en la expresión de Duración Efectiva equivaldría a $\Delta P_+ + \Delta P_-$. Por su parte el denominador en la expresión de Duración Modificada es $P_o \cdot \Delta y$, la misma que en la expresión de Duración Efectiva cuando tenemos en cuenta que reemplazando el denominador sería $½\cdot[(y + \Delta y) - (y - \Delta y)] = \Delta y$.

2.10 CONVEXIDAD

La convexidad se refiere al grado de curvatura del precio con respecto a la tasa de interés. Puede también interpretarse como la velocidad a la que cambia la duración en términos de pesos. Recuerde que la duración en términos de pesos está dada por la expresión:

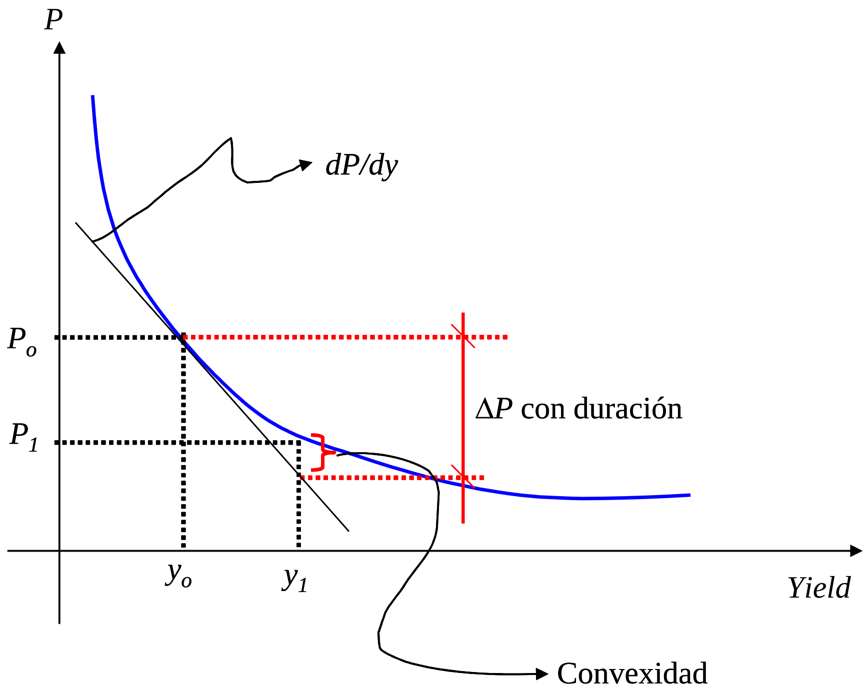
$$\frac{dP}{dy}$$

Por lo tanto la convexidad en términos de pesos está dada por:

$$Convexidad\ en\ pesos = \frac{d^2P}{dy^2}$$

Cuando se utiliza $\frac{dP}{dy}$ como aproximación al precio, sólo funciona para variaciones menores en la tasa de interés, pues al trabajar con duración se asume que la relación entre precio y tasa de interés es lineal, cuando en realidad no lo es, tal como se observa en la gráfica de arriba. Cuando estas variaciones son del 2% o superiores existe una gran diferencia entre el precio así calculado y el precio real. Al incluir la convexidad se tiene en cuenta la curvatura de la curva y por lo tanto se obtiene una mejor aproximación al precio real del papel.

La siguiente gráfica muestra a qué se refiere la convexidad:



Recordemos que

$$\frac{dP}{dy} = -\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{(1/m)(k)(C/m)}{(1+y/m)^{k+1}} + \frac{(1/m)(N)}{(1+y/m)^{N+1}}\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{1+y/m}\right)\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{t_k(C/m)}{(1+y/m)^{k}} + \frac{t_N}{(1+y/m)^{N}}\right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{1}{m^2}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{k(k+1)\,(C/m)}{(1+y/m)^{k+2}} + \frac{N(N+1)}{(1+y/m)^{N+2}}\right]$$

Donde: m = Número de pagos al año
N = Número de cupones al vencimiento

Cuando nos referimos a **convexidad** estamos tratando con la siguiente expresión:

$$Convexidad = \frac{\left(\dfrac{d^2P}{dy^2}\right)}{P} \qquad (2.3)$$

Ya habíamos mencionado que el término Duración se refería a la Duración Modificada. Por lo tanto la **Convexidad** no es lo mismo que la derivada de la Duración con respecto al precio. Más bien:

$$\frac{d(\text{Duración})}{dy} = \frac{d\left(-\dfrac{dP}{dy} \Big/ P \right)}{dy}$$

Y por lo tanto: $\dfrac{d(\text{Duración})}{dy} = (\text{Duración})^2 - \text{Convexidad}$

Adicionalmente, $\dfrac{d(\text{Duración en pesos})}{dy} = -\text{Convexidad en pesos}$

La expresión para la **Convexidad** se deriva de las series de expansión de Taylor. Recordemos que con base en estas series:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n$$

Para nuestro caso:

$x = y_1$
$a = P_o$
$f(x) = P_1$
$f(a) = P_o$

De tal suerte que:

(Cambio en el precio del Bono en pesos) ≈ (Duración) (Precio) (Cambio en *Yield*) + (Convexidad) (Precio) (Cambio en *Yield*)^2 / 2

Lo anterior puede escribirse también de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \cdot \Delta y + \frac{1}{2} C \cdot \Delta y^2 \qquad (2.4)$$

La ecuación (2.4) tiene implicaciones muy importantes para un *trader* que maneja un portafolio de renta fija. El término $(\Delta y)^2$ se refiere a la volatilidad esperada en las tasas de interés. El precio al que se transa un papel en el mercado tiene implícita una expectativa sobre volatilidad de la tasa de interés. Si se compra este papel y al final la volatilidad resulta ser superior a la que dicho papel tenía implícita, se habrán realizado utilidades. En caso contrario se habrá incurrido en una pérdida.

El manejador de un portafolio de renta fija podrá entonces hacer dos apuestas: una a tendencia y otra a volatilidad. Si se espera una gran estabilidad en la tasa de interés, el cambio en el precio del bono debido a Duración no es importante y por lo tanto no hará diferencia entre tener una duración corta o una larga. Si se esperan cambios importantes hacia arriba en la tasa de interés, Δy será positivo y por lo tanto, si la Duración es muy larga, el signo menos de esta hará que la caída en el precio del bono sea importante. Por el contrario, si se esperan caídas en la tasa de interés quiere decir que Δy es negativo y con el signo negativo de la duración provoca un cambio positivo en el precio del bono, el cual será más grande mientras más larga sea la Duración. Para mirar el efecto de la Convexidad no va a importar hacia donde se mueve la tasa de interés. En este punto lo realmente importante es si va a haber movimiento o no. Como en la Convexidad el cambio en la tasa de interés está elevado al cuadrado, siempre tendrá el mismo efecto sobre el cambio en el precio sin importar si la tasa se mueve hacia arriba o hacia abajo. Por lo tanto, si el *trader* espera que haya una alta volatilidad en la tasa de interés, mayor a la que el papel tiene implícita, pero no tiene claridad sobre en qué dirección se dará el movimiento, deberá buscar incrementar la Convexidad de su portafolio pues mientras más convexo sea, los incrementos en tasas son menos perversos, mientras que las caídas en tasas tienen un mayor efecto positivo sobre los precios. Por supuesto que la contraprestación a esto es que los papeles más convexos son más caros.

Es importante aclarar que si dos portafolios tienen la misma duración modificada, no siempre va a ser mejor comprar el que tiene la convexidad más alta. La razón de esto es que la mayor convexidad se ve reflejada en un mayor precio del papel. Tomar una mayor convexidad se justifica sólo si se considera que la volatilidad implícita en el precio del papel es menor a la volatilidad futura.

2.11 Convexidad y rentabilidad de un bono

El primer paso consiste en tener un modelo para el retorno esperado. Llamemos al retorno esperado *k*. Podemos escribir *k* como:

k = [Tasa libre de riesgo] + [Prima de riesgo]

Si Δy^* es la innovación, es decir, el cambio inesperado en las tasas de interés (*yield*), la tasa de retorno realizada proveniente de un cambio en el *yield* será:

$$\frac{\Delta P}{P} = m - D \cdot \Delta y^* + \tfrac{1}{2} \cdot C \cdot (\Delta y^*)^2 \qquad (2.5)$$

Donde:

m = Tasa de retorno del bono si el cambio inesperado en el yield es de cero ($\Delta y^* = 0$).
D = Duración Modificada

Necesitamos encontrar *m* de tal manera que la tasa de retorno esperada del Bono sea el nivel correcto, al que llamamos *k*.

Obteniendo el valor esperado tenemos:

$$
\begin{aligned}
E[R] = k &= m - D \cdot E[\Delta y^*] + ½ \cdot C \cdot E[(\Delta y^*)^2] \\
&= m + ½ \cdot C \cdot Var(y) \\
m &= k - ½ \cdot C \cdot Var(y) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

La expresión (2.6) puede interpretarse diciendo que el retorno que un bono gana si las tasas de interés no se mueven es MENOR mientras MAYOR sea la Convexidad.

Reemplazando (2.6) en (2.5) llegamos a la expresión para el retorno real de un bono, la cual podemos escribir como:

$$\frac{\Delta P}{P} = k - ½ \cdot C \cdot Var(y) - D \cdot \Delta y^* + ½ \cdot C \cdot (\Delta y^*)^2 \qquad (2.7)$$

La expresión (2.7) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta P}{P} = k - D \cdot \Delta y^* + ½ \cdot C \cdot \left[(\Delta y^*)^2 - Var(y)\right]$$

El impacto de la **Convexidad** en la tasa de retorno está dado por el término $½.C.[(\Delta y^*)^2 - Var(y)]$

En conclusión, la **Convexidad** mide la sensibilidad de la tasa de retorno con respecto a las “sorpresas en volatilidad”.

2.12 Precio de un bono vs. estimación basada en Convexidad

Suponga un bono par a 10 años con un *yield* del 13%. La duración calculada es de 5,43 años y la convexidad de 43,37. El siguiente cuadro muestra una comparación entre el precio real y la estimación del mismo usando convexidad.

***Yield* (%)**	**Precio del Bono**	**Estimación Basada en Convexidad**	**Diferencia**	**Diferencia Calculada con Durac.**
9,00	125,67	125,17	0,50	3,97
9,50	121,98	121,65	0,33	2,98
10,00	118,43	118,23	0,20	2,16
10,50	115,04	114,92	0,12	1,47
11,00	111,78	111,72	0,06	0,93
11,50	108,65	108,63	0,02	0,51
12,00	105,65	105,64	0,01	0,22
12,50	102,77	102,77	0,00	0,06

***Yield* (%)**	**Precio del Bono**	**Estimación Basada en Convexidad**	**Diferencia**	**Diferencia Calculada con Durac.**
13,00	100,00	100,00	0,00	0,00
13,50	97,34	97,34	0,00	0,05
14,00	94,78	94,79	-0,01	0,21
14,50	92,33	92,35	-0,02	0,47
15,00	89,96	90,01	-0,05	0,81

Igual que como ocurría con la duración, en el caso de convexidad también es cierto que en la medida en que el cambio en la tasa de interés sea mayor, mayor será también la diferencia entre el precio real y el precio calculado con convexidad. Sin embargo, observe cómo la estimación basada en convexidad arroja una estimación del precio muy cercana al valor real, aun ante cambios grandes en la tasa de interés, algo que como se comentó, no ocurre cuando sólo se tiene en cuenta la duración. Esto se debe a que la convexidad tiene en cuenta la curvatura de la función que relaciona precio con tasa de interés.

Convexidad para varios *yields* y madurez de bonos con cupón anual

Suponga un bono que paga un cupón anual del 13%. El siguiente cuadro muestra la Convexidad para distintos períodos a la madurez y *yields*.

		Años a la Madurez		
Yield	**3**	**5**	**7**	**10**
0,00	10,50	23,70	40,75	72,70
8,00	8,87	19,39	32,02	53,21
9,00	8,69	18,92	31,07	51,10
10,00	8,51	18,46	30,15	49,07
11,00	8,34	18,02	29,25	47,10
12,00	8,18	17,58	28,38	45,21
13,00	8,02	17,16	27,53	43,37
14,00	7,86	16,75	26,71	41,61
15,00	7,71	16,36	25,91	39,90

La convexidad aumenta hacia arriba y a la derecha, es decir, será mayor en aquellos bonos con una larga vida y que se trancen a una alta prima (bajo *yield*). Por el contrario la convexidad será muy baja para aquellos bonos que tienen una vida muy corta y que se trancen a descuento.

Convexidad para varios cupones y madurez de bonos con cupón anual

Suponga un bono con un *yield* del 13%. Las Convexidades para varios cupones anuales y años a la madurez es:

	Años a la Madurez			
Cupón	**3**	**5**	**7**	**10**
0,00	9,40	23,49	43,86	86,15
8,00	8,44	18,77	30,96	50,02
9,00	8,34	18,39	30,12	48,33
10,00	8,26	18,05	29,38	46,85
11,00	8,17	17,73	28,70	45,55
12,00	8,09	17,44	28,09	44,40
13,00	8,02	17,16	27,53	43,37
14,00	7,95	16,91	27,02	42,45
15,00	7,88	16,67	26,55	41,62

La convexidad aumenta hacia arriba y a la derecha, es decir, será mayor para aquellos bonos con una vida larga y un cupón muy bajo. Por el contrario la convexidad será muy baja en aquellos bonos con una vida corta y que además se trancen a prima (alto cupón).

2.13 Convexidad Efectiva

Convexidad Efectiva (*CE*) es otra forma de medir la Convexidad. Se define como:

$$CE = \frac{P_+ + P_- - 2P_o}{P_o\left(\frac{1}{2}(y_+ - y_-)\right)^2}$$

Donde: P_- = Precio si el *yield* cae en Δy
P_+ = Precio si el *yield* se incrementa en Δy
P_o = Precio Inicial
y = *Yield* Inicial
y_+ = $y + \Delta y$
y_- = $y - \Delta y$

Al igual que en la Duración Efectiva, la Convexidad Efectiva tiene en cuenta el hecho de que el precio del bono puede reaccionar de manera distinta cuando la tasa de interés sube que cuando la tasa baja. En resumen, esta expresión de Convexidad Efectiva es un promedio de las sensibilidades al alza y a la baja.

2.14 Cómo lograr una duración y convexidad objetivo con un portafolio de bonos

Suponga una curva de rendimientos plana, es decir, igual para todos los plazos. El objetivo es tener un portafolio que replique un bono par a cinco años que pague cupones anualmente. Un bono como estos tiene una Duración de 3,52 y una Convexidad de 17,16.

Para lograr el objetivo contamos con dos bonos: un cero cupón a un año y uno par a 3 años. A continuación se muestran el Precio, Duración y Convexidad para cada uno de los bonos:

Bono	Precio	Duración	Convexidad
Bono Cero Cupón a 1 Año	88,4956	0,8850	1,5663
Bono Par a 3 Años	100,0000	2,3612	8,0184
Bono Par a 10 Años	100,0000	5,4262	43,3733

Convexidad del Portafolio = Convexidad promedio ponderada de los Bonos que componen el Portafolio

Convexidad del Portafolio en Pesos = (Convexidad del Portafolio) (Valor en Pesos del Portafolio)

Para ajustarse a una Duración y Convexidad objetivo:

x = Número de ceros cupón a 1 año
y = Número de Bonos a 3 años
z = Número de Bonos a 10 años

Escoja x, y y z de tal manera que

- El Valor del Portafolio = Valor del Objetivo:

  $88{,}4956\ x + 100\ y + 100\ z = 100$

- Duración en Pesos del Portafolio = Duración en Pesos del Objetivo:

  $0{,}8850\ (88{,}4956)\ x + 2{,}3612\ (100)\ y + 5{,}4262\ (100)\ z$
  $= 3{,}52\ (100)$

- Convexidad en Pesos del Portafolio = Convexidad en Pesos del Objetivo:

  $1{,}5663\ (88{,}4956)\ x + 8{,}0184\ (100)\ y + 43{,}3733\ (100)\ z$
  $= 17{,}16\ (100)$

<u>Solución</u>:

$x = –0{,}4514$ $y = 1{,}2138$ $z = 0{,}1857$

Esté largo en el Bono de 3 años y en el de 10 años. Esté corto en el Bono Cero Cupón a 1 año

Ejercicios:

1. Suponga un Bono Flotante Inverso que funciona de la siguiente manera:

Cada 6 meses durante la vida del Bono, la tasa del cupón que se va a pagar dentro de 6 meses es igual a 12% menos la tasa de interés de referencia. Por ejemplo, si la tasa de interés de referencia dentro de un año es 8%, entonces el cupón por cada peso de valor facial que se pagará dentro de un año y medio será:

$(0{,}12 – 0{,}08) / 2 = 0{,}02$

Normalmente el cupón se quedará en cero si la tasa de interés se pone por encima del 12%, pero para este caso supongamos que el pago del cupón puede ser negativo. La tasa de interés es del 6%. El Bono tiene una madurez de 10 años y un valor facial de $100.

Los precios y duraciones de 3 Bonos con madurez de 10 años y que pagan cupón fijo, cada uno con un valor facial de $100, son las siguientes:

Cupón	**Precio**	**Duración**
12,00%	144,63	6,5697
6,00%	100,00	7,4387
0,00%	55,37	9,7087

Los Bonos tienen un precio equivalente al valor presente de los flujos de caja, descontados a la tasa de interés de referencia. Cuál es el valor actual del Bono flotante inverso? Es la duración del flotante Inverso mayor o menor que la duración del Bono cero cupón a 10 años?

2. Uno de los clientes de su firma le ha pedido que construya un portafolio ajustado por duración. El objetivo es un Bono par a 20 años. El portafolio debe contener sólo dos tipos de papeles: el primero es un Bono par a 30 años; el otro es un contrato forward a un año sobre un Bono par de 10 años. El precio forward para este contrato es de $100. Todos los Bonos pagan cupón cada 6 meses y tienen un valor facial de $100. La curva cero cupón vigente está plana en el 8%, en términos semi-anual compuesto. Las duraciones de los Bonos son 6,7951 años para el de 10 años, 9,8964 años para el de 20 años y 11,3117 años para el de 30 años. Qué recomendación le daría a su cliente?

3. Cuál es la duración de un Swap de tasa de interés a 3 años de plazo en el cual Usted paga tasa fija anual del 10% cada 6 meses y recibe a cambio DTF. Suponga que la DTF semestre vencido actualmente es del 8% y que los flujos en tasa variable se descuentan a la DTF mientras que los flujos que están a tasa fija se descuentan al 9% a todos los plazos.

4. **En la revista inglesa "*The Economist*" apareció el siguiente comentario en un artículo titulado "*the temptations of yield*" (las tentaciones del *yield*):**

"Los precios de los bonos, de todas las clases y casi en cualquier parte, han aumentado en la medida en que también han aumentado los miedos de deflación. La inflación deteriora el valor de un instrumento que paga un cupón tasa fija con pago de principal al final, mientras que la deflación lo incrementa. Esta es la razón por la que los rendimientos de los bonos emitidos por el gobierno japonés, país este que ha sufrido de deflación en los últimos años, han caído hasta mínimos nunca antes vistos. Quienes compran los bonos emitidos por el gobierno japonés (inversionistas) a un plazo de 30 años actualmente disfrutan de un rendimiento de apenas el 1%; para quienes se invierten en estos bonos a un plazo de 10 años el rendimiento que alcanzan es apenas del 0,5%. Temores deflacionarios en Europa y Estados Unidos han tirado los rendimientos de los bonos de estos gobiernos al suelo. El rendimiento en un bono del gobierno de los Estados Unidos a 10 años es del 3,2%".

Nota: deflación es lo contrario de inflación. Así, mientras que cuando hay inflación los precios de los bienes suben, en presencia de deflación los precios bajan.

Preguntas:

Si definimos la tasa de interés real como rendimiento de los bonos menos inflación y asumiendo que los inversionistas tienden a mantener constante la tasa de interés real.

a) Cuál es la relación entre rendimiento de los bonos e inflación y entre rendimiento de los bonos y deflación?. Cuál es la razón para que se de esta relación?
b) Por qué afirma "*The Economist*" que los precios de los bonos han aumentado en la medida en que aumentan los miedos de deflación?
c) Pensando en el caso colombiano, y de acuerdo con la lectura, que esperaría que le ocurriera a los TES si el Banco de la República logra bajar aun más la inflación?
d) Suponga que los dos bonos del gobierno japonés que se mencionan en la lectura, el de 10 años y el de 30 años, se transan a par, pagando cupones una sola vez al año. La duración de Macaulay para el bono de 30 años es de 26,1 años, mientras que la misma duración para el bono de 10 años es de 9,6 años. Cuál es el precio esperado de cada uno de estos dos bonos si la tasa de interés a todos los plazos cae 0,1%?

5. **Más adelante, el mismo artículo comenta: "…Inversionistas institucionales también han estado en una espiral de compras. Los pasivos de los fondos de pensiones y compañías aseguradoras generalmente son muy altos y a tasas de interés fijas. En la medida en que las tasas de interés caen, el valor presente de estos pasivos ________________.**

Pregunta:

a) Complete la frase del artículo.
b) En la medida en que estos inversionistas institucionales quieran cubrir el riesgo de tasas de interés, deberán buscar activos (inversiones) a largo plazo ó a corto plazo? Por qué?. Esas inversiones deberán pagar cupón fijo o variable? Por qué?
c) Cree Usted que si estos inversionistas institucionales entraran en un swap de tasa de interés por medio del cual recibieran tasa de interés fija y entregaran tasa de interés variable, lograrían disminuir la sensibilidad de sus pasivos a la tasa de interés? Por qué?

6. Usted es un *trader* al que le atrae la compra de un bono a 5 años por un valor nominal de $10.000 millones, pagando cupones anuales del 10%. La TIR de compra es del 11%. Usted quiere tener un *stop-loss* para esta inversión por $300 millones. A qué nivel deberá subir la tasa de interés para llegar a su *stop-loss* y liquidar la inversión?.

7. Usted piensa tomar una posición basada en valor relativo. Esta consiste en estar largo en una parte de la curva y corto en otra, apostándole a un empinamiento o aplanamiento de la misma. Si usted cree que la curva va a empinarse, tomará una posición larga en la parte corta de la curva y una posición corta en la parte larga de la curva. Si Usted compra TES de 3 años por un valor facial de $20.000 millones, que pagan un cupón del 12%, en qué monto de valor facial tendría que acortarse en un TES de 10 años que paga cupón del 15% para quedar inmune por duración?. Asuma que la tasa de interés está plana en el 14%.

8. a) Cuál es la duración de una Nota Flotante a 2 años que paga tasa variable (DTF por ejemplo para el caso colombiano) cada 3 meses? Actualmente la DTF trimestre vencido es del 8%. **Nota:** los flujos variables se descuentan a la DTF.

   b) Cuál es el precio y la duración de una Nota Flotante que fue emitida a 2 años hace un mes y que paga DTF cada 3 meses? Actualmente la DTF Bimestre vencido es del 7%. El día de la emisión la DTF T.V. era del 8%. **Nota:** los flujos variables se descuentan a la DTF.

Lecturas Adicionales

Lyuu, Yuh-Dauh. 2002. *Financial Engineering and Computation*. Ed. Cambridge University Press.

Tuckman, Bruce. 2002. *Fixed Income Securities: Tools for Today's Markets*. Editorial John Wiley & Sons, Inc.

Van Horne, James C. 1994. *Financial Market Rates & Flows*. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall.