UNIVERSIDAD EAFIT®

Material de apoyo para iniciar el curso de Matemáticas para Finanzas con Aplicaciones

Material para reforzar contenidos de Matemática precedentes necesarios para el curso Matemáticas para Finanzas con aplicaciones

Introducción

El curso Matemáticas para Finanzas con aplicaciones, así como otros cursos posteriores, requieren del conocimiento previo de aspectos de la Matemática básica que se imparten en cursos de Matemática de la enseñanza media. Entre dichos aspectos se encuentran: operatoria con números reales (enteros, fraccionarios, etc.), solución de ecuaciones de primer y segundo grado, solución de sistemas de ecuaciones simples de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El objetivo de este material es proporcionar un conjunto de ejercicios resueltos y propuestos (con respuestas) de temáticas básicas de Matemáticas cuyo conocimiento les permita incursionar exitosamente por cursos de la maestría con fundamentos matemáticos.

Orientaciones para el estudio del material:

Se sugiere seguir la siguiente metodología, en el orden indicado:

1. Resolver un autoexamen inicial propuesto y confrontar después sus respuestas con las soluciones correctas que se proporcionan.
2. En base a los resultados obtenidos de su autoexamen inicial, enfatizar en estudiar ejercicios resueltos indicados de aquellos temas que entienda tiene dificultades y debe repasar.
3. Resolver luego ejercicios propuestos de aquellos temas que seleccionó repasar. Aparecen las respuestas que debe obtener, para que confronte sus resultados.
4. Resolver el autoexamen final indicado al final del material y confrontar sus respuestas con las soluciones correctas, que también aparecen.

A continuación, aparece un índice de páginas donde puede encontrar cada uno de los aspectos señalados anteriormente.

Índice de páginas en el material donde están los autoexámenes y comienza cada tema:

Autoexamen inicial

1. Sin usar ninguna calculadora, dé el número resultante de las siguientes expresiones. En caso de que no sea entero, expréselo como una fracción, por ejemplo, 1/3 no como 0.3333:

a. $5 - (-3)$
b. $8/(2/5)$
c. $(3/10) - (1/5)$
d. $(3^3)^2/3^5$

2. Simplifique lo más posible las siguientes expresiones:

a. $3y+4(x+2y)$
b. $2(-a)(3-a)$
c. $4x(x+y) - x^2$

3. Desarrolle los siguientes productos planteados:

a. $(3x-4)(6x^2-5x+2)$
b. $(x+2)(y+3)$

4. Factorice las siguientes expresiones:

a. x^2-5x+6
b. $x^2-14x+49$
c. x^2-81

5. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a. $2x-3=9-x$
b. $2x+3=0$
c. $3(x+2)=2(8-x)$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $x^2+9x+14 = 0$
b. $3x^2+5x-2 = 0$
c. $x^2-16=0$
d. $x^2+8=0$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $x^3-3x^2-10x= 0$
b. $x^4-9x^2= 0$

8. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, si tienen solución

a. $x+y=3$
$3x-y=1$

b. $2p-q=3$
$p=5-3q$

c. $5x-7y+2 = 0$
$15x-21y = 7$

9. Dibuje la gráfica de la función:
a. $y = 2x - 3$
b. $y = -x + 3$
c. $y = 5 - x^2$
d. $y - x^2 = 4$

10. Encuentre la ecuación de la línea recta que:

a. Pasa por el punto (5, –3) con pendiente –2.
b. Pasa por los puntos (1, –2) y (5, 6).

Respuestas de Autoexamen inicial

1.
a. 8
b. 20
c. 1/10
d. 3

2.
a. $4x+11y$
b. $2a^2 - 6a$
c. $3x^2+4xy$

3.
a. $18x^3-39x^2+26x-8$
b. $xy+3x+2y+6$

4.
a. $(x-3)(x-2)$
b. $(x-7)(x-7)=(x-7)^2$
c. $(x-9)(x+9)$

5.
a. $x=4$
b. $x= - 3/2$
c. $x =2$

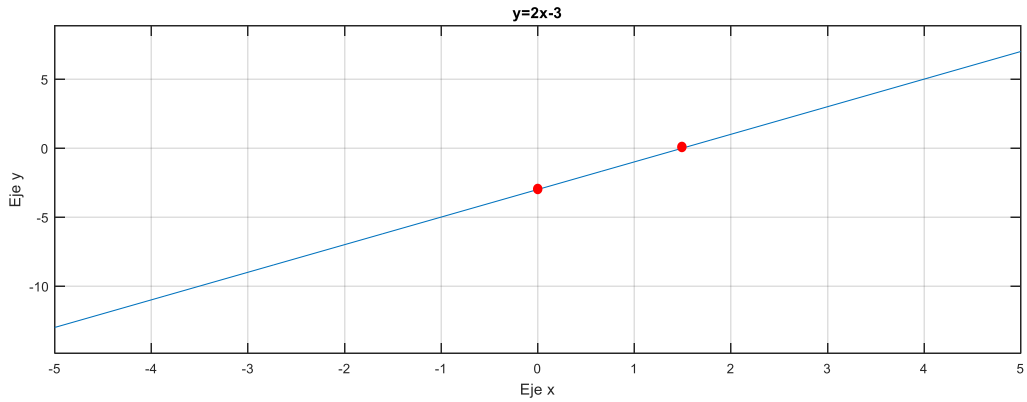
6.
a. $x_1 = -7$, $x_2 = -2$
b. $x_1 = -2$, $x_2 = 1/3$
c. $x_1 = -4$, $x_2 = 4$
d. No tiene soluciones reales

7.
a. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$
b. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$

8.
a. $x = 1$, $y =2$
b. $p =2$, $q = 1$
c. No tiene soluciones

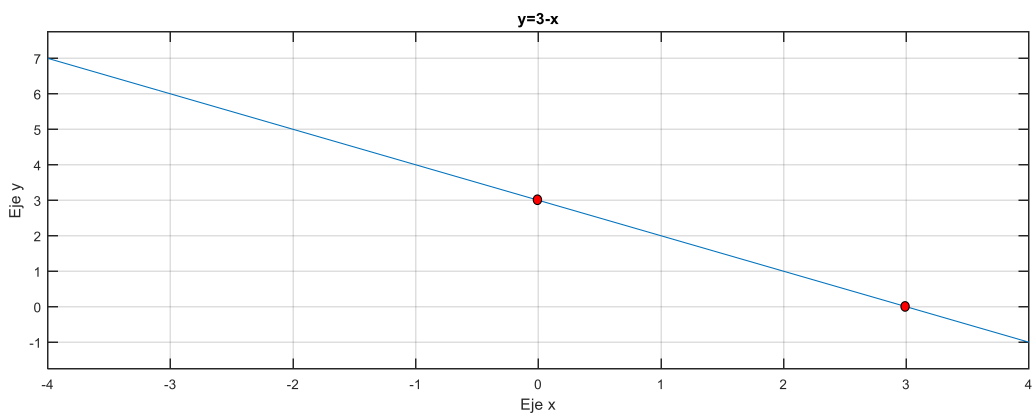
9.

a.



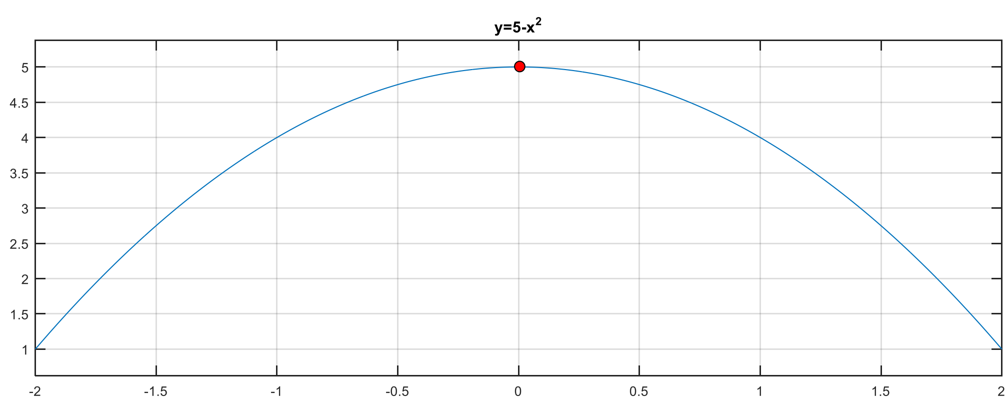
y=2x-3
5
0
-5
-10
Eje y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
Eje x

b.



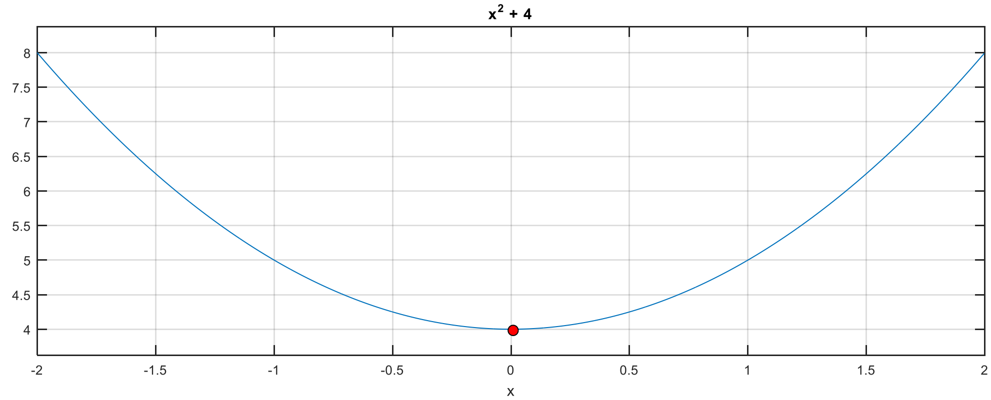
y=3-x
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
Eje y
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
Eje x

c.



y=5-x²
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

d.



10.

a. $y + 2x = 7$

b. $y - 2x + 4 = 0$

I. <u>Operaciones algebraicas con números reales</u>

1.1 Orden de las Operaciones

Primero se deben evaluar las expresiones dentro de paréntesis.
Entre las operaciones exponenciales, multiplicaciones y divisiones, adiciones y sustracciones (o sea, sumas y restas) el orden de prioridad es: exponenciales, multiplicaciones y divisiones, sumas y restas.

Ejemplos:

2 + 4 – 8*3 + 1 = 2 +4 – 24 +1 = –14
2 + 4 – (8*3 + 1) = 2 +4 – 25 = –19
3*5–8/2 =15 – 4 = 11
2*(–3)2+2*(–3) – 4 = 2*9 –6 –4 = 18–10 = 8

Observar en los dos primeros ejemplos cómo los números y operaciones son las mismas, pero el paréntesis en el segundo ejemplo juega un papel importante que hace la diferencia en la respuesta.

1.2 Suma de fracciones

Con igual denominador: Se suman los numeradores manteniendo el denominador.

Ejemplo: 2/3 + 4/3 = 6/3 =2

Con diferente denominador:

Primero se busca un denominador común entre los denominadores de las fracciones a sumar, siendo el mínimo común múltiplo entre dichos denominadores.
Ejemplo: Se quieren sumar 5/4 + 2/3

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) entre 4 y 3 es 12

Después en cada número a sumar se multiplica su numerador por el **número que multiplicado por él dio el m.c.m resultante**.

En el ejemplo, en la primera fracción se multiplica su numerador (5) por 3, pues 3 es el número que multiplicado por 4 (primer denominador) da 12. En la segunda fracción se multiplica su numerador (2) por 4, pues 4 es el número que multiplicado por 3 (segundo denominador) da 12.
Se suman los nuevos numeradores y se divide por el m.c.m

En el ejemplo quedaría:
5/4 + 2/3 = 15/12 + 8/12 = (15+8)/12 = 23/12

1.3 División de fracciones

Se cumple que dados los números a, b, c, d:
a/(b/c) = (a.c)/b   Suponiendo b, c $\neq$ 0

(a/b)/(c/d) = (a.d)/(b.c) Suponiendo b, c, d $\neq$ 0

Ejemplos:

3/(1/5) = 15

$9/(3/4) = 9.\ (4/3) = 36/3 = 12$

$(7/4)/(3/5) = (7/4).(5/3) = 35/12$

1.4 Operaciones con números elevados a potencias pero con igual base.

Se cumple que: Si a, b, c, p son números reales

$a^0 = 1$

$a^b.a^c = a^{b+c}$

$a^b/a^c = a^{b-c}$

$(a^b)^c = a^{bc}$

$a^{-p} = 1/a^p$ Si $a \neq 0$

Ejemplos:

$5.5^2 = 5^{1+2} = 5^3 = 125$

$6^4/6^2 = 6^{4-2} = 6^2 = 36$

$(3^4)^2 = 3^8 = 6561$

$4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$

$2^3.2^2/2^6 = 2^{(3+2-6)} = 2^{-1} = 1/2$

Ejercicios propuestos:

1. Efectúe las siguientes operaciones numéricas:

a. $(2^3)^2$

b. 3^{-3}

c. $5^4.5^2/5^6$

II. <u>Operaciones algebraicas con expresiones matemáticas</u>

Cuando se trata con expresiones con variables, es importante tener en cuenta que los términos con las mismas variables y mismos exponentes (llamados también "términos semejantes") pueden sumarse o restarse como números normales. Los términos *deben* tener tanto las mismas variables como los mismos exponentes.

Por ejemplo:

Es posible sumar 8x y 12x, pero no 8x y $8x^2$.

Es posible sumar $6xy^2$ con $-4xy^2$, pero no con: $-4x^2y$, $-4xy$. $-4xy^2$

Al reducir expresiones matemáticas con variables, se deben reducir expresiones que son términos semejantes.

Ejemplos:

a. $8x^2+4x–5x^2+9x = 3x^2 + 13x$

b. $(x+y)^2–x–5x^2+5y + xy = x^2+2xy+ y^2–x–5x^2+5y + xy$

$= (x^2–5x^2) + (2xy+xy) + y^2–x+5y = –4x^2 + 3xy + y^2–x+5y$

c. $[4(x+y)+10(x+y)^2]/(2(x+y))$ $x \neq y$

$= 2(x+y)[2+5(x+y)]/(2(x+y) = 2+5(x+y) = 2+5x+5y$

Ejercicios propuestos:

2. Simplifique lo más posible las siguientes expresiones:
a. $[2(x–y) + 5(x–y)^2]/(x–y)$ suponiendo que $x \neq y$
b. $3x^2(x^4+2x^3)/x$ suponiendo que $x \neq 0$

III. <u>Factorización de expresiones matemáticas simples (en polinomios de grado uno o dos)</u>

Si el producto de dos números enteros a y b es c, es decir, c=a.b, entonces a y b se llaman factores de c. En otras palabras, un entero a es un factor de otro entero c si a divide exactamente c. Por ejemplo, como 6=2.3, los números 2 y 3 son factores de 6, y 6 divide exactamente a 2 y 3. Análogamente si dos (o más) expresiones algebraicas se multiplican a la vez, estas expresiones se dice que son factores de la expresión que se obtuvo como producto. Por ejemplo, $x^2y+3x=x(xy+3)$ luego x y xy+3 son factores de x^2y+3x.

El proceso de escribir una expresión dada como el producto de sus factores se llama factorización de la expresión. En esta sección, examinaremos ciertos métodos mediante los cuales podemos factorizar expresiones algebraicas. En particular, factorizar un polinomio ecuación consiste en expresarlo como un producto de polinomios más simples, esto es, como un producto de polinomios de grado menor.

Factorizar una expresión juega un papel importante en la solución de ecuaciones, como veremos en el Epígrafe 4.

3.1 Productos notables

Se les llama productos notables a ciertas expresiones algebraicas que se encuentran frecuentemente en diversos contextos y que es preciso saber factorizarlas a simple vista.
Entre los productos notables se encuentran:

$a^2+2ab+b^2 = (a + b)^2$

$a^2–2ab+b^2 = (a –b)^2$

$a^2 – b^2 = (a+b).(a –b)$

Ejemplos:

$x^2+8x+16= (x+4)^2$

$x^2 –10x+25= (x–5)^2$

$x^2 – 64 = (x+8)(x-8)$

3.2 Polinomios de grado dos de la forma $ax^2 + bx +c$, a,b,c $\neq 0$

Además de los productos notables, existe en algunos casos una forma simple de factorar un polinomio $ax^2 + bx +c$ en la forma (x+p).(x+q) si logramos encontrar dos números p y q tal que:

p+q = b y p.q=c

El signo de p debe ser el de b y el signo de q es el signo del producto de los números b y c

Ejemplo: $x^2–7x–18$

Planteemos los factores (x–)(x+)=0, donde el signo – del primer factor es el de –7 y el signo + del segundo factor es el signo del producto (–7).(–8) que es positivo.

Busquemos dos números con esos signos que la suma dé – 7 y el producto sea –18.

Los números son: –9 y +2 pues –9+2 = –7 y (–9).(2)= –18

Luego la factorización es: $x^2–7x–18=(x–9)(x+2)$

3.3 Factorización de polinomios de grado mayor que dos en polinomios de grado uno o dos

Una expresión algebraica que contiene un solo término se denomina monomio. Una expresión que contiene exactamente dos términos se llama binomio y la que contiene tres términos se denomina trinomio.

Ejemplos:

x^2y 3x son monomios

$x+5$, x^2+3x son binomios

x^2+3x+5, $xy^2+5xy+9$ son trinomios

El primer paso en la factorización de una expresión algebraica, en particular un polinomio, es extraer todos los monomios que sean comunes a todos los términos.

Ejemplos:

Al factorar la expresión x^3+2x^2+x primero vemos un monomio común a todos los términos (x) y se extrae como un factor común: $x(x^2+2x+1)$. El segundo factor resultante es un producto notable, luego el resultado de la factorización será: $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2= x(x+1).(x+1)$.

La expresión $x^4–9x^2$ tiene un monomio común a todos los términos (x^2) y se extrae como un factor común: $x^2(x^2–9)$. El segundo factor resultante es un producto notable, luego el resultado de la factorización será: $x^4–9x^2 = x^2(x^2–9)= x^2 (x+3).(x–3)$.

En la expresión $(x+1)^2 +3(x+1)$ el factor común es el binomio $(x+1)$. Luego,

$(x+1)^2 +3(x+1) = (x+1)[(x+1)+3] = (x+1)(x+4)$

Ejercicios propuestos:

3. Factorar las siguientes expresiones:

a. $x^2 – 2x – 35$ R/ $(x–7)(x+5)$

b. $x^2 +6x – 27$ R/ $(x+9)(x–3)$

c. $x^2 +18x +81$ R/ $(x+9)(x+9)$

d. $x^2 – 144$ R/ $(x+12)(x–12)$

e. $x^4 – 4x^3 – 12x^2$ R/ $x^2(x+2)(x–6)$

f. $(x+4x+4)^2 +6(x+2)$ R/ $(x+2)(x+8)$

IV. <u>Solución de ecuaciones</u>

Una ecuación es una proposición que expresa la igualdad de dos expresiones algebraicas, involucrando en general una o más variables.

Ejemplos de ecuaciones son:

$2x+8 = 0$

$x^2+3x+1 =0$

Resolver una ecuación es encontrar aquellos valores de las variables que satisfacen la ecuación. En el primer ejemplo visto, la solución es $x = –4$, pues $2(–4) + 8 = 0$.

El valor $x = 1$ no es solución de la ecuación, pues $2(1) + 8 = 10 \neq 0$

Una clase importante de ecuaciones son las denominadas ecuaciones polinomiales. Una ecuación polinomial en una variable es del tipo P (x)=0, donde P(x) es un polinomio. En un polinomio aparecen varios términos sumados algebraicamente; cada término incluye una potencia natural de la variable (o sea, la variable elevada a un número natural) multiplicada por un coeficiente constante. El grado de la ecuación polinomial es la máxima potencia de la variable que aparece en la ecuación. En los dos ejemplos anteriores tenemos dos ecuaciones polinomiales, la primera es de grado 1 y la segunda es de grado 2.

Una ecuación polinomial tiene exactamente n raíces o soluciones, donde n es el grado del polinomio. En los dos ejemplos anteriores, la primera tiene una sola solución o raíz, la segunda dos. Es posible que las soluciones o algunas de ellas en ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual a dos no sean números reales, sino números complejos en cuyo caso no las consideramos en nuestro estudio.

Presentaremos el estudio de ecuaciones polinomiales donde sea posible factorar el polinomio que aparece en la ecuación en expresiones polinomiales de grado uno y dos, y se enfatizará en la solución de ecuaciones de grado 1 y dos, teniendo en cuenta que, si $P(x) = P_1(x).\ P_2(x)\ldots P_n(x) = 0$, entonces las soluciones de $P(x) = 0$ son aquellas donde $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, …, $P_n(x) = 0$

Ejemplos:

Las soluciones de $(x–3).(x+2) = 0$ son aquellos valores que satisfacen: $x–3 = 0$ y $x+2 = 0$

Las soluciones de $x^2.(x^2–4x+5) = 0$ son aquellos valores que satisfacen: $x^2 = 0$ y $x^2–4x+5 = 0$

4.1 Solución de ecuaciones lineales

Una ecuación polinomial de grado 1 se denomina ecuación lineal y se puede expresar en la forma $ax + b = 0$, donde a, b son números reales, con $a \neq 0$

Se asume que se llega a esa ecuación luego de reducir términos semejantes.

Tiene una única solución y su solución sería: $x = –b/a$

Observar que el término que no tiene variable pasa al miembro derecho de la ecuación con signo opuesto, y se divide por el coeficiente de la variable x.

Ejemplos:

- ✓ $5x + 15 = 0$ Su solución es $x = –15/5 = –3$
- ✓ $4x –24 = 0$ Su solución es $x = 24/4 = 6$
- ✓ Para resolver la ecuación $5 – x = 3x – 3$ primero se reducen términos semejantes dejando en un miembro de la ecuación términos en x y en el otro los términos numéricos:

  $8 = 4x$ de donde $x =2$

Era análogo $– 4x = -8$ de donde $x =2$

- ✓ Para resolver la ecuación $2(x+3) = 4(x +1)$ primero se realizan las operaciones indicadas antes de hacer reducción de términos semejantes:

  $2x + 6 = 4x + 4$, de donde $2 = 2x$ o sea, $x =1$

4.2 Solución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación polinomial de grado 2 se denomina ecuación cuadrática y se puede expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b, c números reales, con $a \neq 0$

Existen dos formas fundamentales de resolver una ecuación de segundo grado:

Usando la expresión:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión dentro de la raíz se le llama discriminante, y denotémoslo Δ, o sea, $\Delta=b^2-4ac$.

En función del valor de Δ existen 3 posibilidades de soluciones de la ecuación:

- Si $\Delta>0$, hay dos soluciones reales distintas.
- Si $\Delta=0$, hay dos soluciones reales iguales.
- Si $\Delta<0$, no hay soluciones reales (hay dos soluciones complejas distintas).

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

✓ $x^2-7x-18=0$

Los coeficientes son a=1, b=−7 y c= −18, siendo $\Delta= 49-4(1)(-18)= 121 >0$, luego la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Como $\sqrt{121}=11$ las soluciones son:

$x_1= (-(-7) +11)/2 = 18/2 = 9$

$x_2= (-(-7) -11)/2 = -4/2 = -2$

El polinomio $x^2-7x-18$ en un ejemplo anterior se expresó como $x^2-7x-18=(x-9)(x+2)$,

de donde $x^2-7x-18= 0$ si $(x-9)(x+2) = 0$, o sea, si $x-9=0$ ó $x+2 =0$

entonces usando factorización del polinomio en la ecuación llegamos a las mismas soluciones de la ecuación, 9 y –2.

✓ $x^2+x+1=0$

Los coeficientes son a=1, b=1 y c=1, siendo $\Delta= 1-4(1)(1)= -3 < 0$, luego la ecuación no tiene soluciones reales.

✓ $x^2-4x+4=0$

Los coeficientes son a=1, b=−4 y c= 4, siendo $\Delta= 16-4(1)(4)= 0$, luego la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Como $\sqrt{0}=0$ las soluciones son:

$x_1= x_2= (-(-4))/2 = 2$

Ecuaciones particulares de la forma x^2–a=0 a>0

Como el polinomio x^2–a se factora como $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$, una ecuación de la forma $x^2-a=0$ con a>0 tiene dos soluciones dadas por: $x_1= \sqrt{a}$ y $x_2= -\sqrt{a}$

Ejemplos:

Las soluciones de $x^2-16 = 0$ son: $x_1= \sqrt{16} = 4$ y $x_2= -\sqrt{16} = -4$

Las soluciones de $x^2-2 = 0$ son: $x_1= \sqrt{2} = 1.4142$ y $x_2= -\sqrt{2} = -1.4142$

4.3 Solución de ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2

En ocasiones es simple resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor que 2 cunado es posible hacer factorizaciones con monomios, polinomios de grado 1 y 2.

Por ejemplo, las ecuaciones $x^3+2x^2+x=0$, $x^4-9x^2=0$, donde los polinomios que aparecen en dichas ecuaciones se factoraron en el Ejemplo son fáciles de resolver, teniendo en cuenta que

$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2= x(x+1).(x+1)$, las soluciones de $x^3+2x^2+x=0$ son $x_1=0$, $x_2= -1$, $x_3= -1$

$x^4-9x^2 = x^2 (x+3).(x-3)$, las soluciones de $x^4-9x^2 = 0$ son $x_1=0$, $x_2= 0$, $x_3= -3$, $x_4= 3$

Observar en estos dos ejemplos que existen soluciones (raíces) repetidas, pues una ecuación de grado n tiene exactamente n soluciones o raíces.

En la ecuación $(x+1)^2 +3(x+1)= 0$ vimos que $(x+1)^2 +3(x+1) = (x+1)(x+4)$ luego sus soluciones son $x_1= -4$, $x_2= -1$

Ejercicios propuestos:

4. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a. $3x +7 = 12- 2x$; R/ x =1

b. $5x-3 = 18+3(1-x)$ R/ x =3

c. $5(1-2(2x-1))=3(1-3x) + 1$ R/ x =1

5. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas. Intente primero resolverlas mediante factorización:

a. $x^2 +x - 6=0$ R/ $x_1= 2$, $x_2= -3$

b. $x^2 +3x +1=0$ R/ $x_1= -0.3820$, $x_2= -2.6180$

c. $x^2 +10x +16=0$ R/ $x_1= -2$, $x_2= -8$

d. $2x^2 +3x -4=0$ R/ $x_1= -2.3508$, $x_2= 0.8508$

e. $x^2 +12x +36=0$ R/ $x_1= -6$, $x_2= -6$

f. $x^2 -100 =0$ R/ $x_1= -10$, $x_2= 10$

g. $x^2 - 2x - 35 = 0$ R/ $x_1= 7$, $x_2= -5$

h. $x^2 +6x - 27 = 0$ R/ $x_1= 3$, $x_2= -9$

i. $x^2 +18x +81 = 0$ R/ $x_1= -9$, $x_2= -9$

j. $x^2 - 144 = 0$ R/ $x_1 = -12$, $x_2 = 12$
k. $(x+4x+4)^2 + 6(x+2) = 0$ R/ $x_1 = -8$, $x_2 = -2$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante factorización:
a. $x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$ R/ R/ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = -2$
b. $x^3 - 25x = 0$ R/ R/ $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 5$,

V. Solución de sistemas de ecuaciones lineales simples (2 ecuaciones y dos variables)

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL) de 2 ecuaciones y dos variables x,y tiene la expresión:
$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$
donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 son números reales

Ejemplo:
$2x+3y = 20$ (1)
$x+4y = 5$ (2)

Una solución de un SEL de 2 ecuaciones y dos variables x,y es un par de valores (x,y) que satisface simultáneamente ambas ecuaciones.
En el ejemplo dado una solución es $x = 13$, $y = -2$, pues:
$2(13)+3(-2) = 20$ y $13+4(-2) = 5$

Un SEL pudiera no tener soluciones.

Dos métodos para resolver un SEL de 2 ecuaciones y dos variables son:
1. Despejar una de las variables en una de las ecuaciones, sustituirla en la otra, resolviendo una ecuación lineal.

En el ejemplo anterior:
Despejando x en la segunda ecuación (2), $x = 5 - 4y$ (3)
Sustituyendo (3) en (1): $2(5 - 4y) + 3y = 20$ y reduciendo términos semejantes: $-5y = 10$
De donde $y = -2$.
Sustituyendo $y = -2$ en (3), se tiene que $x = 13$

2. Multiplicar una ecuación por un número tal que al sumarla con la otra ecuación se elimine una variable.
En el ejemplo anterior:
Multiplicando la ecuación (2) por -2 y el resultado sumándola a la ecuación (1) se tiene que:
$2x+3y = 20$ (1)

$-2x-8y = -10$ (4)

Sumando (1) y (4) $-5y = 10$, de donde $y = -2$. Sustituyendo $y = -2$ en (1) o (2) y despejando la variable x, se tiene que $x = 13$

El SEL**:** $2x + 3y = 5$ (1)

$4x + 6y = 12$ (2)

No tiene solución

Observe que si se multiplica por 2 la ecuación (1) se obtiene

$4x + 6y = 10$ (3)

$4x + 6y = 12$ (2)

Las partes izquierdas de las ecuaciones (3) y (2) son idénticas, y no pueden ser al mismo tiempo igual a 10 y a 12, partes derechas de las ecuaciones diferentes.

La representación gráfica de una ecuación lineal en el plano coordenado es una recta, luego la solución de un SEL si existe es el punto de intersección de 2 rectas.

Ejercicios propuestos:

7. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, si tienen solución:

a. $x-y=1$
$2x+3y+8=0$

b. $4x+7y=17$
$2x+3y=3$

c. $x+2y=4$
$3x+6y-8=0$

VI. <u>Ecuación de una recta. Rectas Gráficas de funciones que representan rectas y parábolas</u>

6.1 Rectas

Una recta puede expresarse de varias formas. La forma más general es $ax+by=c$, siendo a,b,c números reales, al menos a o b diferentes de cero.

Otra forma común es:

$(y-y_o)=m(x-x_o)$, siendo m la pendiente de la recta y (x_o,y_o) las coordenadas de uno de los puntos de la recta.

donde m es la pendiente de la recta y. La pendiente está relacionada con la inclinación de la recta con respecto al eje x.

¿Cómo calcular la pendiente m? En la Figura 1 se dan 2 puntos que pertenecen a la recta, P1 (x_1,y_1) y P2 (x_2,y_2). La pendiente es el cociente de la diferencia entre las coordenadas de y de los puntos entre las coordenadas de x (En ambos casos considerar P1-P2 o P2-P1). Por ejemplo,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

De la Figura 1 puede observarse que la pendiente también es la tangente del ángulo α en el triángulo rectángulo determinado por los puntos P1 y P2.

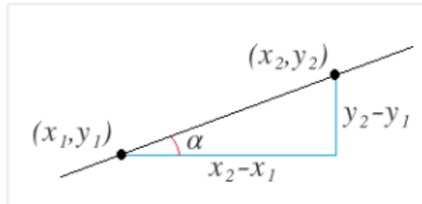


Figura 1: Recta determinada por dos puntos

Otra forma de expresar una recta es un caso particular de la anterior, cuando el punto dado es aquel que intersecta el eje y, pudiendo expresarse como

y=mx+n, siendo n el punto donde la recta corta al eje y.

Luego, para obtener la ecuación de una recta, bastan como datos:

- ✓ Un punto de la recta y su pendiente ó
- ✓ Dos puntos de la recta.

Ejemplos:

a. La recta y =2x+1 tiene pendiente m=2 y pasa por el punto (0,1), o sea, intercepta al eje y en 1.

b. Calcular la recta que pasa por los puntos (2,1) y (1,2).

Buscando primero la pendiente de la recta, m = (2–1)/(1–2) = –1

Y tomando el primer punto podemos expresarla como y–1 = –(x-2)

Que también puede expresarse como x + y = 3 o x + y – 3 = 0 o y = 3 – x

c. Calcular la recta con pendiente 3 y pasa por el punto (1,5).

Usando la ecuación (y-yo) = m(x-xo), siendo m = 3, xo=1, yo=5 obtenemos:

y–5 = 3 (x–1) equivalente a 3x – y = –2 o 3x – y +2 = 0 o y = 3x +2

Observar en las Figuras 2 y 3 las rectas dadas en los Ejemplos b y c. En la Figura 2 la pendiente es negativa, en la Figura 3 es positiva. Con la pendiente negativa, en la medida que x crece el valor de y decrece, con la pendiente positiva en la medida que x crece, el valor de y también crece.

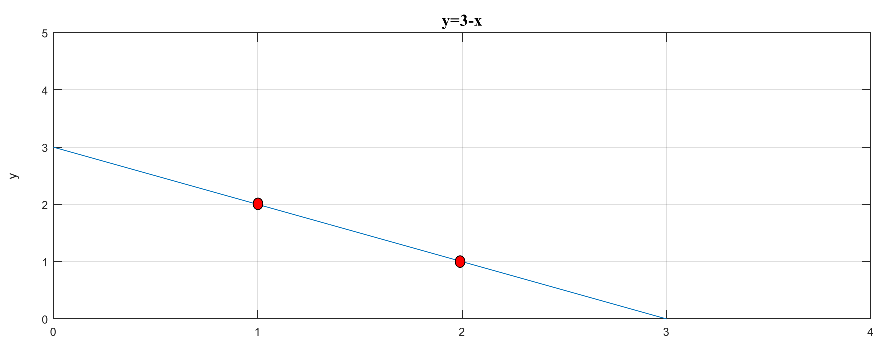


Figura 2

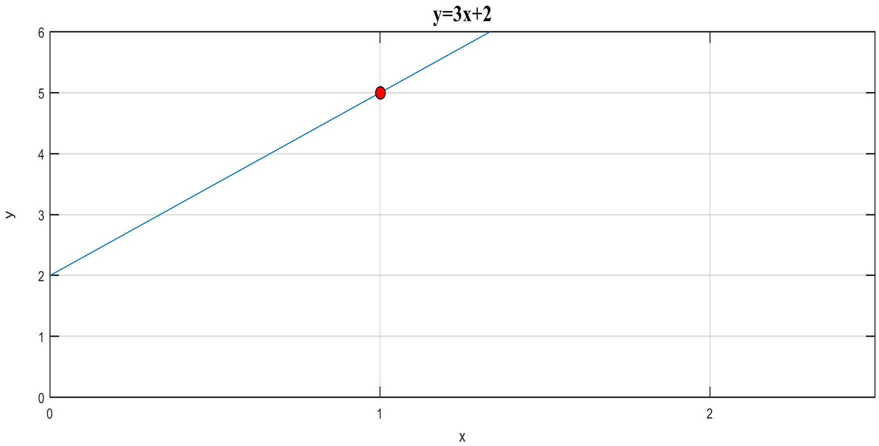


Figura 3

6.2 Parábolas

Una parábola es la representación gráfica de una función cuadrática. El objetivo en esta sección es reconocer la representación gráfica de funciones cuadráticas simples.

Si se tiene $(y–b) = k(x–a)^2$, su representación gráfica es una parábola con vértice en (a,b). Si $k > 0$ la parábola abre hacia arriba siendo (a,b) el punto donde y alcanza el mínimo valor. Si $k < 0$ la parábola abre hacia abajo siendo (a,b) el punto donde y alcanza el máximo valor.

Un caso particular es $y = kx^2$, parábolas con vértice en (0,0). Figura 3 (izquierda) con $k =1$, Figura 3 (derecha) con $k = –1$.

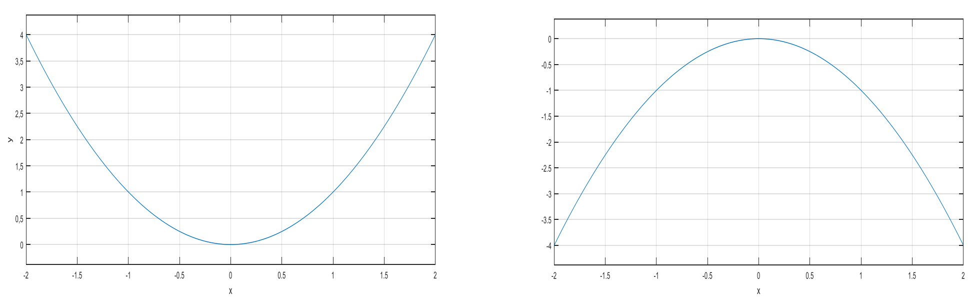


Figura 3: Izquierda $y =x^2$, derecha $y=–x^2$

Ejemplos:

Dibujar la gráfica de:

a. $y + 5 = (x + 4)^2$
b. $y – 3 = – x^2 + 4x – 4$

El primer caso tiene su vértice en (– 4, – 5) y abre hacia arriba.

En el segundo caso teniendo en cuenta que $– x^2 + 4x – 4 = –(x^2 – 4x + 4) = – (x – 2)^2$, la parábola abre hacia abajo y tiene su vértice en (2, 3). Su representación gráfica están en la Figura 4, izquierda primer ejemplo, derecha el segundo

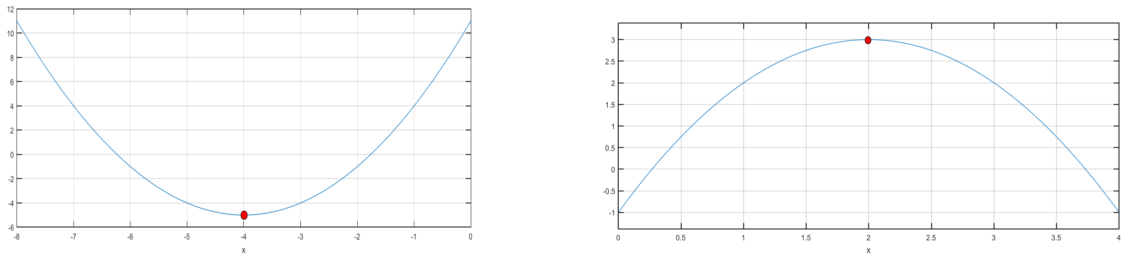


Figura 4

Ejercicios propuestos:

8. Encuentre la ecuación de la línea recta que:

a. Pasa por el origen de coordenadas con pendiente -2.
b. Pasa por los puntos (1, 4) y (4, 1).

<u>Respuestas de Ejercicios propuestos</u>

1.

a. 2^6

b. 1/27

c. 1

2.

a. 2+5x–5y

b. $3x^5+6x^4$

3.

a. (x–7)(x+5)

b. (x+9)(x–3)

c. (x+9)(x+9) = $(x+9)^2$

d. (x+12)(x–12)

e. $x^2(x+2)(x-6)$

f. (x+2)(x+8)

4.

a. x =1

b. x =3

c. x =1

5.

a. $x_1= 2$, $x_2= -3$

b. $x_1= -0.3820$, $x_2= -2.6180$

c. $x_1= -2$, $x_2= -8$

d. $x_1= -2.3508$, $x_2= 0.8508$

e. $x_1= -6$, $x_2= -6$

f. $x_1= -10$, $x_2= 10$

g. $x_1= 7$, $x_2= -5$

h. $x_1= 3$, $x_2= -9$

i. $x_1= -9$, $x_2= -9$

j. $x_1= -12$, $x_2= 12$

k. $x_1= -8$, $x_2= -2$

6.

a. $x_1= 0$, $x_2= 0$, $x_3= 6$, $x_4= -2$

b. $x_1= 0$, $x_2= -5$, $x_3= 5$

7.

a. $x = -1$, $y = -2$

b. $x = -15$, $y = 11$

c. No tiene soluciones

8.

a. $y = -2x$

b. $x + y = 5$

Autoexamen final

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, si tiene solución:

$x - 7y = 8$
$9x + 8y - 1 = 0$

2. Sin usar ninguna calculadora, dé el número resultante de las siguientes expresiones. En caso de que no sea entero, expréselo como una fracción, por ejemplo, 1/3 no como 0.3333:

a. $8 - (-9)$
b. $4/(2/10)$
c. $(18/11)/(8/33)$
d. $(2^5)^3/2^6$

3. Simplifique lo más posible las siguientes expresiones:

a. $-x(x-2)+2(x-1)$
b. $3x-3(x+5y)$

4. Factorice las siguientes expresiones:

a. $x^2+7x+12$
b. x^2+6x+9
c. x^2-16

5. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales:

a. $2x-4=10-x$
b. $3x-4(6-x)=15-6x$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $6x^2+7x+1 = 0$
b. $x^2+4x+4 = 0$
c. $x^2-81=0$
d. $x^2+12=0$

7. Dibuje la gráfica de la función:

a. $y = 4x-6$
b. $y = -2x+4$
c. $y=3-x^2$
d. $y=x^2+10$

8. Encuentre la ecuación de la línea recta que:

a. Pasa por el punto (1, 0) con pendiente 5.
b. Pasa por los puntos (2, –2) y (4, 10).

Respuestas de Autoexamen final

1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, si tiene solución:

$x = 1$, $y = -1$

2.

a. 17

b. 20

c. 27/4

d. 2^9

3.

a. $-x^2+4x-2$

b. $-15y$

4.

a. $(x+4)(x+3)$

b. $(x+3)^2$

c. $(x+4)(x-4)$

5.

a. $x=14/3$

b. $x=3$

6.

a. $6x^2+7x+1 = 0$

b. $x_1=-2$, $x_2=-2$

c. $x_1=-9$, $x_2=9$

d. No tiene soluciones reales

8.

a. $5x-y = 5$

b. $6x-y = 14$