Curso Matemáticas para finanzas con aplicaciones

Prof. María Gulnara Baldoquin de la Peña
mbaldoqu@eafit.edu.co

π

Datos del Curso

Código: FI0893
Créditos: 2
Intensidad horaria semanal: 8 h
Intensidad horaria semestral: 32 h

Horarios de clases:
Viernes 05/12/19/26 Agosto
6:30pm a 9:30pm

Sábados 06/13/20/27 Agosto
8:00am a 1:00pm

Algunos datos del profesor

Títulos:
1. Matemática, especialidad Optimización(1978),
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de La Habana, Cuba.
2. Doctora en Matemáticas Aplicadas (1995)

Título de la tesis de doctorado: Optimización en las operaciones de compañías aéreas.

Años de trabajo en docencia universitaria: 44 años

Cursos impartidos:
1. Casi todas las asignaturas de Matemática impartidas en Ingeniería.
2. Diversos cursos de Investigación de Operaciones en Pregrado y Posgrado: Optimización, Optimización Multiobjetivo, Teoría de Grafos, etc.
3. Cursos de MATLAB.
4. Cursos de la Metodología DEA (Para análisis de eficiencia en empresas).
5. Cursos de Matemática Financiera.

Algunos trabajos de investigación en relación a solución de problemas prácticos en Colombia (Universidad Javeriana Cali: 2011-2015, EAFIT: Desde 2015)

1. Problemas de optimización de carteras de inversiones (Medellín)
2. Métodos cuantitativos en la toma de decisiones en la Gestión Universitaria (Cali-Medellín).
3. Modelos y algoritmos en la asignación, localización y relocalización dinámica de ambulancias en servicios de emergencia médica (COOMEVA, Cali).
4. Asignación de buses a rutas para el Sistema Integrado de Transporte de Cali SITM-MIO.
5. Diseño de rutas y frecuencias para el Sistema Integrado de Transporte de Cali SITM-MIO.

Universidades visitadas como profesora visitante

Universidad Técnica de Poznan, Polonia
Universidad Federal de Ceará, Fortaleza, Brasil
Universidad TUIUTI de Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil
Universidad Técnica de Oruro, Facultad Nacional de Ingeniería, Bolivia
Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina
Universidad de Buenos Aires (UBA), Argentina
Universidad Nacional Autónoma de Mexico (UNAM), México
Universidad Otto-von-Guericke, Magdeburgo, Alemania
Universidad Carl von Ossietzky, Oldenburgo, Alemania
Universidad de la República, Montevideo, Uruguay
Universidad de Bologna, Italia
Universidad Libre de Bruselas, Bélgica
Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia
Universidad de Modena y Reggio Emilia, Italia
Universidad de Monterrey, Monterrey, México

Evaluaciones del curso

- ✓ Un examen escrito en las Semanas 2 y 3, cada uno del 25% de peso. (relacionado con los temas vistos antes del examen).
- ✓ El desarrollo de un taller con un peso del 10% cada uno en las Semanas 2, 3 y 4, donde se abordan ejercicios propuestos del contenido dado en la semana anterior y de la propia Semana 4 (taller de la Semana 4).
- ✓ Una evaluación tipo proyecto a realizar (con un peso de un 20%) a entregar máximo 2 días después de concluir el curso en la Semana 4, (enviado por el estudiante al profesor usando el correo institucional). El proyecto debe contener problemas de temas vistos en el curso pero resolviéndolos usando fundamentalmente comandos del MATLAB, donde sea adecuado hacerlo.

El estudiante debe hacer por fuera de clase al menos dos horas de trabajo independiente por cada hora de clase, según reglamento acorde a créditos del curso.

Programación de evaluaciones

Semana	Fecha	Actividad	Peso
2	12 agosto	Taller 1	10%
2	13 agosto	Parcial 1	25%
3	19 agosto	Taller 2	10%
3	20 agosto	Parcial 2	25%
4	27 agosto	Taller 3	10%
5	30 agosto	Proyecto	20%

Contenidos generales del Curso

Unidad 1. Algebra Matricial. (8 horas).
Unidad 2. Funciones, cálculo diferencial en una y varias variables. (8 horas)
Unidad 3. Optimización de funciones de una y varias variables. Cálculo integral en una variable. (9 horas)
Unidad 4. Modelos en finanzas. (3 horas)
Unidad 5. Toma de decisiones bajo riesgo. Aplicaciones en finanzas (4 horas)

BIBLIOGRAFIA GENERAL

Textos básicos:

Unidades 1, 2 y 3:
Arya, Lardner, Ibarra, Matemáticas-aplicadas-a-la-administración-y economía libro, Editorial Pearson

Unidades 4 y 5:
Campbell, Donald E. (2006). Incentives: Motivation and the Economics of information. 2nd Edition CAMBRIEGE UNIVERSITY PRESS.

Textos complementarios:

Baldoquin, M.G. "Tutorial de comandos del software MATLAB usado en el curso Matemáticas para Finanzas con aplicaciones (Parte 1)"

Baldoquin, M.G. Folleto "Funciones del MATLAB para resolver problemas de Optimización. Ejemplos con aplicaciones en Finanzas."

Ummer, E. K. (2012). (2012). Basic Mathematics for Economics, Business, and Finance. Routledge. New York.

Gilat, A. MATLAB Una introducción con ejemplos prácticos, Editorial REVERTE S.A., 2005.

Soo Tang Tan, Matemáticas para Administración Y Economía, Cengage Learning Latin America, 2005

Para reforzar contenidos de Matemática precedentes necesarios para el curso Matemáticas para Finanzas con aplicaciones.

Baldoquin, M.G. Material de apoyo para iniciar el curso de Matemáticas para Finanzas con Aplicaciones.

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y DIDÁCTICAS

El profesor realiza presentaciones magistrales de cada tema donde se propicia que el estudiante tenga una participación activa; para tal efecto, es recomendable que el estudiante desarrolle lecturas previas correspondientes a cada uno de los tópicos del programa.

Solución por parte de los estudiantes de ejercicios propuestos con anterioridad, contextualizados en general a problemas en finanzas.
Los ejercicios se socializarán en clases talleres.
Se dispondrá de horarios y espacios para que evacúen dudas sobre ejercicios a resolver.

Independiente de las preguntas de estudiantes, en cada clase preparada aparecerán en transparencias unas preguntas en cuadros sombreados en azul claro que es para que el estudiante piense «en vivo» en la clase y den sus criterios al respecto antes de continuar. Un ejemplo de uno de esos recuadros en la clase de hoy:

¿Cuál es el orden de la matriz dada en el ejemplo?

Utilización del MATLAB en la solución de gran parte de los ejercicios y casos de estudio. Los comandos fundamentales del software MATLAB vinculados con los contenidos impartidos se irán introduciendo desde la Unidad 1 en la medida que se imparten dichos contenidos.

Todos los talleres tendrán dentro de sus ejercicios problemas a modelar con las herramientas matemáticas que se van impartiendo, un grupo de los cuales posteriormente se resolverán usando los comandos apropiados del MATLAB.

Se destaca que la efectividad de las clases <u>talleres</u> se logra partiendo que el estudiante previamente estudió contenidos asociados a los ejercicios planteados y al menos intentó hacerlos.

No es para ver los ejercicios en los talleres por primera vez .

La modelación es importante por dos razones fundamentales:

1. En general no le dan un problema 'modelado' sino de manera 'verbal'
2. Los software no 'modelan' un problema introducido como un texto, donde tiene que primero deducir si tiene que resolver un sistema de ecuaciones, una ecuación, una integral, etc.

Talleres:

- ✓ No hay que entregarlos resueltos.
- ✓ La nota es combinación de asistencia a la clase virtual y respuesta a algún ejercicio del taller asignado para exponer en la clase taller.
- ✓ Es una gran ayuda su adecuada preparación para salir exitoso en el examen de ese mismo tema.
- ✓ También es una ayuda para la realización exitosa del proyecto.

Proyecto:

- ✓ Debe comenzarse a resolver desde que se entrega al estudiante, hay mucho más tiempo para resolverlo que un examen o taller.
- ✓ Deben demostrar conocimiento de la materia en las preguntas del mismo, y los problemas ser resueltos con apoyo de los comandos adecuados del matlab. La entrega no es una mera sucesión de comandos aplicados del matlab.

Ejemplo:

En un problema relacionado con sistema de ecuaciones debe:

1. Modelar matemáticamente el problema.
2. Aplicar los conocimientos adquiridos y comando adecuado del matlab para clasificarlo.
3. Usar un comando adecuado del matlab para resolver el sistema.
4. Responder de manera verbal la pregunta del problema, a partir de la respuesta numérica dada por el matlab.

Aclaración importante sobre contenidos y objetivos del curso

Existe una alta heterogeneidad en la formación previa de los estudiantes que matriculan el curso, lo que implica alta heterogeneidad en el conocimiento de los contenidos de este curso, al igual que en otros cursos del programa en los cuales se busca nivelar la Matemática básica necesaria.

Para algunos estudiantes (por ejemplo, algunos de formación ingenieril) un conjunto de temas le van a parecer muy fáciles y para otros tendrán que hacer un esfuerzo adicional en contenidos que se suponen conocidos del bachillerato, como solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones sencillos.

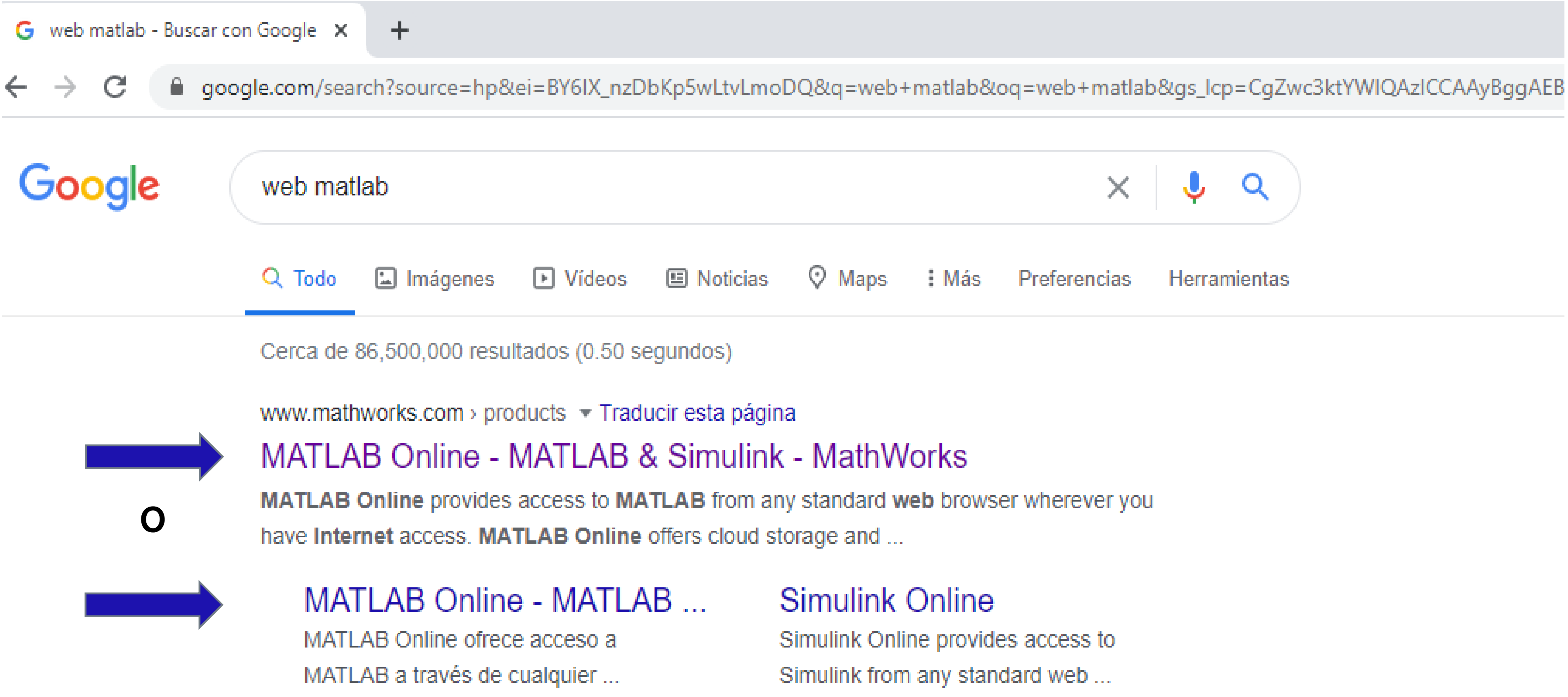
Ejercicios taller y exámenes

El curso tiene como un objetivo importante dejar una huella en su formación para que le pueda servir en su vida profesional.

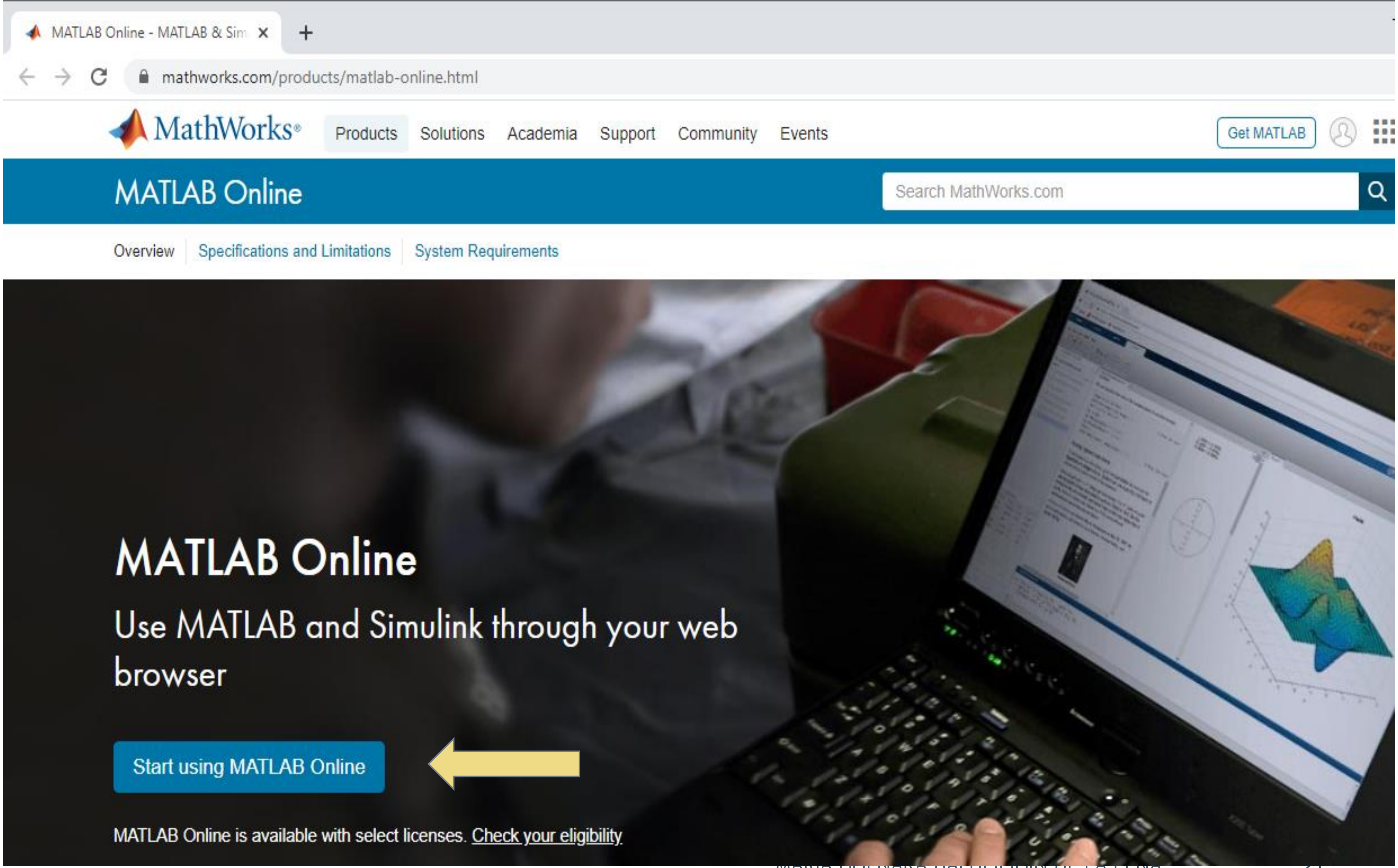
Competencias como la modelación de problemas no se adquieren en pocos días.

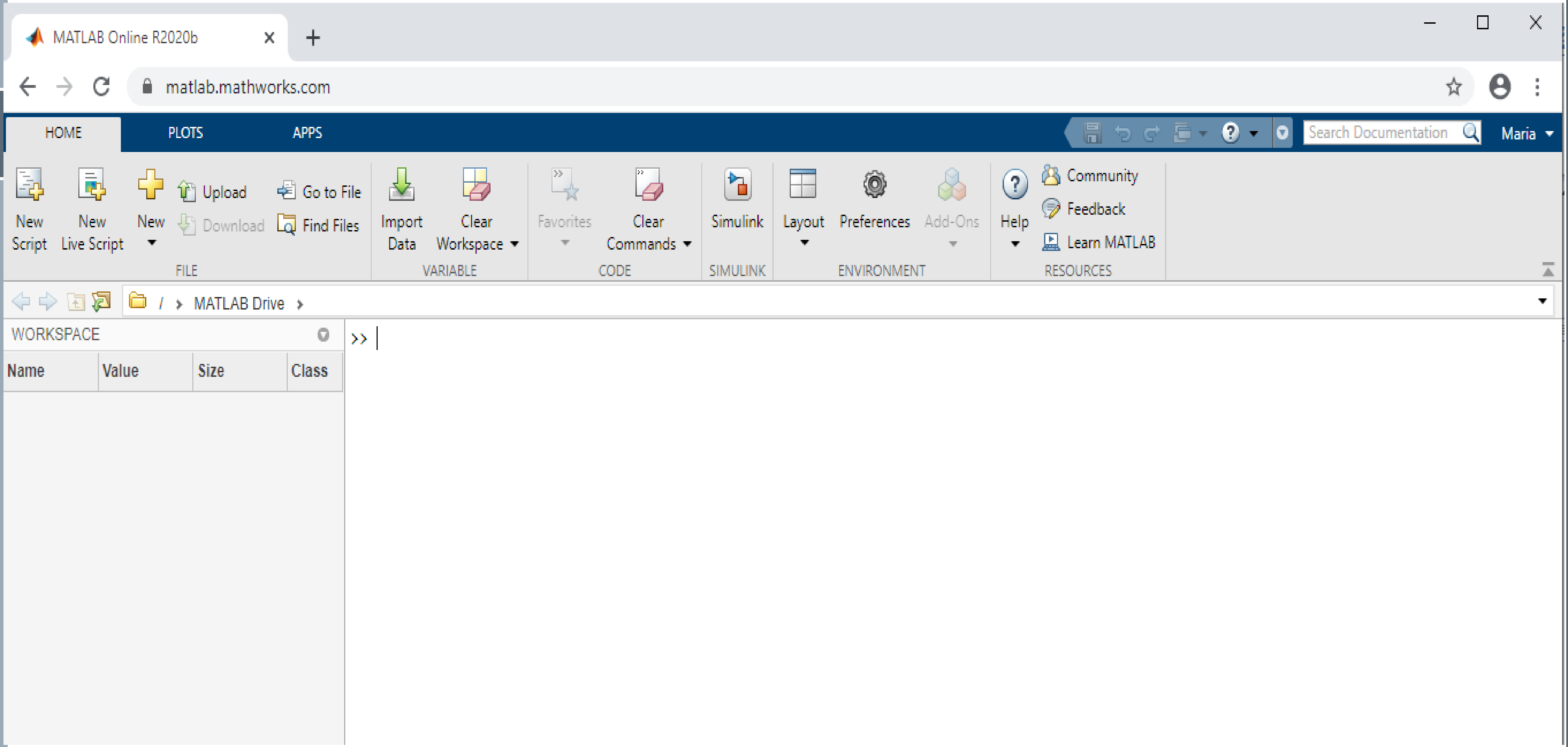
Se combinan ejercicios más simples para su desarrollo 'manual' o para adquirir habilidades con el software, con otros un poco más complejos, en talleres y proyecto, en particular en su modelación, más cercanos a algunos de los que se presentan en la vida real.

Pasos para usar MATLAB online



o


MATLAB Online - MATLAB & Sim
mathworks.com/products/matlab-online.html
MathWorks
Products
Solutions
Academia
Support
Community
Events
Get MATLAB
MATLAB Online
Search MathWorks.com
Overview
Specifications and Limitations
System Requirements
MATLAB Online
Use MATLAB and Simulink through your web browser
Start using MATLAB Online
MATLAB Online is available with select licenses. Check your eligibility


MATLAB Online R2020b
matlab.mathworks.com
HOME
PLOTS
APPS
Search Documentation
Maria
New Script
New Live Script
New
Upload
Download
Go to File
Find Files
Import Data
Clear Workspace
Favorites
Clear Commands
Simulink
Layout
Preferences
Add-Ons
Help
Community
Feedback
Learn MATLAB
FILE
VARIABLE
CODE
SIMULINK
ENVIRONMENT
RESOURCES
/ MATLAB Drive
WORKSPACE
Name
Value
Size
Class
>>

Importancia de la modelación

Problema ⟶ Modelo ⟶ Solució
n

¿Qué se resuelve?

El modelo, no el problema

Problema ⟶ Modelo ⟶ Solució
n

Hombre

Software

Ejemplo de problema simple

Un vendedor gana un salario base de $2.100.000 por mes más una comisión del 10% de las ventas que haga. Descubre que en promedio, le toma una hora y media realizar ventas por un valor de $350.000 ¿Cuántas horas deberá trabajar en promedio cada mes para que sus ingresos sean de $7.000.000?

Algunos ejemplos de problemas de motivación al curso

1. Problema de selección de portafolios (Optimización de funciones de varias variables)

Un inversor dispone de una cantidad de dinero dada para invertir en un conjunto de n posibles acciones. Cada posible acción tiene un costo dado (en un tipo de unidad monetaria asumida) y un beneficio posterior (también en el mismo tipo de unidad monetaria asumida). El inversor debe decidir dónde invertir con el objetivo de maximizar el beneficio total, sujeta a la restricción de presupuesto.

2. Problema de ecuaciones y Optimización

Usted es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 departamentos, pudiendo rentar todos los departamentos si cobra una renta de $180 mensuales. A una renta mayor, algunos de los departamentos permanecerán vacíos; en promedio, por cada incremento de $5 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo.

a. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un ingreso total de $11,475.
b. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un máximo ingreso total.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

a. Una persona quiere invertir un total de 20,000 USD en tres inversiones al 6, 8 y 10 % de interés. Quiere que el interés total obtenido sea de 1624 USD y por otras razones que valora el ingreso de la inversión del 10% sea de dos veces el ingreso de la inversión al 6 %. ¿De cuánto debe ser cada inversión?

b. Una compañía paga a trabajadores calificados \$15 por hora en su departamento de ensamblado. Trabajadores semicalificados en ese mismo departamento ganan \$9 por hora. A los empleados de envíos se les paga \$10 por hora. A causa de un incremento en los pedidos, la compañía necesita contratar un total de 70 trabajadores en los departamentos de ensamblado y envíos. Pagará un total de \$760 por hora a estos empleados. A causa de un contrato con el sindicato, debe emplearse el doble de trabajadores semicalificados que de trabajadores calificados. Determine el número de trabajadores calificados que debe contratar la compañía.

c. Un club de inversión privada tiene $ 200,000 destinados para invertir en acciones. Para llegar a un nivel de riesgo global aceptable, las acciones que la gerencia está considerando se han clasificado en tres categorías: riesgo alto, riesgo medio y riesgo bajo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de rendimiento del 15% /año; acciones de riesgo medio, 10% /año; y acciones de bajo riesgo, 6% /año. Los miembros han decidido que la inversión en acciones de bajo riesgo debe ser igual a la suma de las inversiones en las acciones de las otras dos categorías. Determine cuánto debe invertir el club en cada tipo de acciones si el objetivo de inversión es obtener un retorno de $20, 000 /año sobre la inversión total. (Suponga que se invierte todo el dinero disponible para la inversión).

4. Impuesto de renta (Funciones lineales por tramos)

Resolución 000084 de la DIAN correspondiente a 2020 (se fija en $35.607 la UVT).

Rangos en UVT		Tarifa marginal	Impuesto
Desde	Hasta		
> 0	87	0%	0
> 87	145	19%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 87 UVT) X 19%
> 145	335	28%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 145 UVT) X 28% más 11 UVT
> 335	640	33%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 335 UVT) X 33% más 64 UVT
> 640	945	35%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 640 UVT) X 35% más 165 UVT
> 945	2.300	37%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 945 UVT) X 37% más 272 UVT
> 2.300	En adelante	39%	(Ingreso laboral gravado expresado en UVT menos 2.300 UVT) X 39% más 773 UVT

5. Funciones lineales y gráficos de funciones

Se proyectó que el porcentaje de transacciones de los EE.UU mediante cheques entre el comienzo de 2009 (t= 0) y el comienzo de 2018 (t = 9) estaría dada por la función: f(t) = −(11/9)t + 43 (0 ≤ t ≤ 9), mientras que el porcentaje de transacciones realizadas electrónicamente durante el mismo período la daría:g(t)=113t + 23 (0 ≤ t ≤ 9).

Dibujando las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes, encontrar el momento (tiempo) en el cual las transacciones que se realizan electrónicamente deben exceder las hechas mediante cheques, así como el momento donde son las mismas.

6. Optimización de funciones de una variable

La función que da los ingresos de una empresa en función de un producto que produce está dada por $I(x) = x^2-6x+17$, estando x dado en cientos de unidades del artículo y el ingreso en millones de pesos.

Determine en qué rango se asegura que están las utilidades si la capacidad de producción está entre 100 y 600 artículos.

7. Derivadas parciales de funciones de varias variables

Se tienen las siguientes funciones de demanda de dos artículos x y y, siendo p el precio de x y q es el precio de y

$$x=9p^2/(2q^3), \quad y=5q/(2p^4)$$

Encuentre la naturaleza de la relación entre los artículos x y y, o sea, si entre ellos son competitivos, complementarios o no tienen relación entre ellos.

La curva de demanda de un cierto producto está dada por la ley $d(x) = 50 - 0{,}06x^2$. Encuentre el superávit o ganancia de los consumidores si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

9. Preferencias cuasi lineales

La siguiente tabla da la utilidad de cada uno de los individuos 1, 2 y 3 para cada una de las alternativas viables A, B, C, D y E.

Alternative	U_1	U_2	U_3
A	25	50	25
B	20	25	60
C	25	50	50
D	10	15	70
E	5	10	60

Determine cuáles alternativas son eficientes y cuáles no.

10. Toma de decisiones bajo incertidumbre. Seguros.

La función de utilidad de riqueza de una persona está dada por la función $U(w)=\sqrt{w}$. Su patrimonio actual es de 100 USD, pero con una probabilidad de 0.3 un accidente reducirá su patrimonio a 30 USD (Tabla).

Estado	Probabilidad	Riqueza
No accidente	0.7	100
Accidente	0.3	30

Suponga que el dólar de la cobertura de seguro cuesta 0.40 ¿Cuánto seguro debe comprar si quiere maximizar la utilidad esperada?

A partir de los problemas planteados, ¿cuáles son las competencias fundamentales que se aspira desarrollar en los estudiantes?

1. Reconocer el tipo de problema que tiene que resolver: una ecuación matemática, un sistema de ecuaciones, un problema de optimización, una integral, etc.

2. Modelar matemáticamente el problema que tiene que resolver: obtener la ecuación matemática, el sistema de ecuaciones, el problema de optimización, la integral, etc.

3. Usar un software como el MATLAB para resolver el modelo obtenido en el paso anterior.

4. Interpretar la solución obtenida con el software.

Matrices

Una matriz A es un arreglo rectangular de mxn elementos de números reales (en R). Usualmente se denota $A=(a_{ij})_{mn}$. El valor i representa la fila donde está el elemento a_{ij} y la j la columna.

Ejemplo de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Cuál valor es a_{14} ? 4

¿Cuál valor es a_{31} ? 8

El <u>orden</u> de la matriz es mxn. (Número de filas por columnas)
Se denota usualmente M_{mn} al conjunto de todas las matrices de orden m por n

¿Cuál es el orden de la matriz dada en el ejemplo? 3x4

Matrices Representación general matrices de orden mxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo de una matriz: Matriz de covarianzas utilizada al calcular el riesgo y rendimiento esperado de una cartera de inversiones

$$\boldsymbol{C} \cong \begin{bmatrix} 0.0784 & -0.0067 & 0.0175 \\ -0.0067 & 0.0576 & 0.0120 \\ 0.0175 & 0.0120 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

Algunos tipos de matrices

1. Matriz **fila**: Una fila, n columnas $A=(a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n})$

Ejemplo: A=(3 6 9 3 7)

¿Cuál es el orden de A?

1x5

2. Matriz **columna**: Una columna, n filas

Ejemplo:

$$K=\begin{pmatrix}5\\22\\-3\\12\end{pmatrix}$$

¿Cuál es el orden de K?

4x1

3. Matriz **cuadrada**: Igual número de filas que de columnas

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\3 & -1 & 3\\5 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

¿Cuál es su orden?

3x3 o 3

La diagonal en una matriz cuadrada son los elementos a_{ii}. En la matriz anterior son: 1 (a_{11}), -1 (a_{22}) y 1 (a_{33}).

4. Matriz **diagonal**: Toda matriz cuadrada donde $a_{ij}=0$ para todo $i \neq j$ (O sea, los elementos que no están en la diagonal tienen que ser cero)

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

¿Diferencia entre A y B además del orden ?

En B hay un cero en la diagonal

5. Matriz **escalar**: Es un caso de matriz diagonal donde $a_{ii}=k$ para todo i, siendo k un número (se le llama también escalar).

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Toda matriz escalar es diagonal, pero no toda matriz diagonal es escalar.

6. Matriz **idéntica**: Es un caso particular de escalar donde k =1

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Matriz **nula**: $a_{ij}=0$ para todo i,j. Se denota con el símbolo 0.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matriz nula de orden 2x4). No tiene que ser cuadrada

8. Matriz **triangular superior**: $a_{ij}=0$ para todo i>j

¿Cómo se reconocen?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Todos los elementos <u>por debajo de la diagonal</u> son <u>ceros</u> (en la diagonal o arriba de diagonal pueden haber ceros o no)

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

9. Matriz **triangular inferior**: $a_{ij}=0$ para todo $i<j$

¿Cómo se reconocen?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Todos los elementos <u>por arriba de la diagonal</u> son <u>ceros</u> (en la diagonal o debajo de diagonal pueden haber ceros o no)

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Transpuesta de una matriz

Sea A una matriz de orden **nxm**. La transpuesta de A, denotada A^t o A' es una matriz B de orden **mxn** tal que $b_{ij}=a_{ji}$ para todo i,j.

Lo anterior significa que una matriz y su transpuesta intercambian sus filas por columnas (en igual orden). NO tienen que ser cuadradas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

Matrices simétricas

Sea una matriz A. A es **simétrica** si: $A^t = A$

¿Una matriz simétrica tiene que ser cuadrada?

Sí. Si el orden de A es nxm, el de A^T es mxn. Debe ser entonces nxm=mxn

Se reconocen porque cada fila i tiene los mismos elementos que la columna i.

Ejemplo: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

Algunas aplicaciones del uso de matrices

Matriz de covarianza condicional para un conjunto de

	COPEC	CTC-A	CAP	COLBUN	ENDESA	ENTEL
COPEC	0,02327	0,00943	0,01348	0,01043	0,01221	0,01260
CTC-A	0,00943	0,01595	0,00925	0,00768	0,01059	0,00862
CAP	0,01348	0,00925	0,03428	0,00985	0,01189	0,01343
COLBUN	0,01043	0,00768	0,00985	0,03889	0,01131	0,00985
ENDESA	0,01221	0,01059	0,01189	0,01131	0,02820	0,01118
ENTEL	0,01260	0,00862	0,01343	0,00985	0,01118	0,04336

¿Características?

1. Cuadrada
2. Simétrica

Matriz de exceso de rentabilidad sobre el promedio

Mes	Acción 1(%)	Acción 2(%)	Acción 3(%)	Acción 4(%)
1	16.33	17.89	17.93	6.02
2	0.11	0.90	12.48	-9.40
3	-13.07	-6.51	1.38	-26.68
4	-16.42	-7.51	-11.75	-11.65
5	19.45	2.77	-22.52	9.97
6	12.36	2.76	11.63	-15.29
7	9.58	8.16	14.48	-20.30
8	-8.03	-5.28	-7.26	9.93
9	-4.73	-2.31	4.77	17.15
10	-16.15	-9.80	3.06	7.68
11	-12.63	-10.07	1.18	18.45
12	13.23	8.98	-25.38	14.15

¿Algún análisis interesante de la matriz?

Fuente de donde se tomó matriz anterior:

Borge, J., Cervantes, M.N. Portafolios de inversión: una alternativa para el aprovechamiento de los recursos remanentes de tesorería, Univ. Del Rosario.

Operaciones con matrices

1. **Suma**: Sean dos matrices del mismo orden A_{mn} y B_{mn}. La matriz suma denotada A+B es del mismo orden **mn** tal que, si C=A+B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad \text{para todo } i,j$$

O sea, se suman los elementos correspondientes a cada una de la misma fila y columna. (No tienen que ser cuadradas las matrices, solo tener igual orden)

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

2. Producto de un escalar (número) α por una matriz A.

Es otra matriz B del mismo orden que A tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para todo i,j.
Se denota $B = \alpha A$

Cualquier matriz se puede multiplicar por un número, y el resultado es una matriz donde cada elemento es el elemento de la matriz original multiplicado por ese número.

Ejemplo:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la operación suma de matrices

Sean A,B,C tres matrices del mismo orden mn

1. $A+B = B+A$ (conmutatividad)

Quiere decir que es irrelevante el orden en que las sume, da igual resultado

2. $A+(B+C)= (A+B)+C$ (asociatividad)

Quiere decir que es irrelevante cómo las agrupe para sumarlas, da igual resultado

3. $A+0 = A$, donde 0 denota la matriz nula del mismo orden que A

Quiere decir que la matriz nula ‘juega el papel’ del número cero al sumarlo con otro número

4. $A+(-A)=0$ donde $-A= (-1)A$, la matriz opuesta de A

¿Por qué los libros no definen formalmente la operación diferencia de matrices?

Porque realmente es una combinación de las operaciones suma y producto por un escalar, siendo el escalar el número -1.

$$A - B = A + (-1)B$$

Propiedades de la operación producto por un escalar

Sean A,B dos matrices del mismo orden mn y α, β dos escalares (números reales)

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (asociatividad)

2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ (distributiva respecto a suma de matrices)

3. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributiva respecto a suma de escalares)

4. $1.A = A$ (1: Elemento neutro del producto por un escalar)

3. Multiplicación de matrices

Para multiplicar dos matrices A y B, cuyo resultado es la matriz C=A.B, hay una sola condición impuesta: el número de **columnas de la primera matriz** tiene que ser igual al número de filas de la segunda matriz. El orden resultante es el número de filas de la primera x el número de columnas de la segunda.

O sea, si $A \in M_{m\mathbf{n}}$ y $B \in M_{\mathbf{n}p}$, $C=AB$, C_{mp}

Ejemplo.

Diga si se puede efectuar el producto de las matrices A.B y el orden de la matriz C=AB cuando se puedan multiplicar

1. A_{35} , $\mathbf{B_{54}}$

Si, C_{34}

Observar que ninguna de las 3 matrices es cuadrada ni tienen igual orden

2. A_{36} , $\mathbf{B_{54}}$

No, número de columnas de A es 6, número de filas de B es 5

3. A_{35} , $\mathbf{B_{53}}$

Si, C_{33}
Observar que ninguna de las 2 matrices a multiplicar es cuadrada y el resultado es cuadrada.

4. $\mathbf{B_{53}}$, A_{35} , **Matrices anteriores pero B.A**

Sí, C_{55}

Observar de los Ejemplos 3 y 4 que el producto de matrices NO es conmutativo, o sea, puede ser que exista A.B que exista B.A, y que no sean iguales, incluso tener órdenes diferentes como los dos productos anteriores.

Puede suceder también que AB exista, BA no, o que exista con igual orden que AB y ser diferentes.

Sabemos cuándo se pueden multiplicar dos matrices pero ¿cómo se multiplican?

$C = (c_{ij}) \quad C = A.B$

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ para toda fila i=, para toda columna j

Para obtener un elemento c_{ij}= se multiplican los elementos de la fila i de A por los elementos respectivos de la columna j de B y se suman sus resultados.
Se puede hacer porque # columnas de A = # filas de B

Ejemplo. Calcular el siguiente producto de matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Ambas son de orden 3, y la resultante es de orden 3

Resultado: $\boxed{\begin{pmatrix} 30 & -26 & 10 \\ 36 & -31 & 14 \\ 42 & -36 & 18 \end{pmatrix}}$

¿Cómo se llegó por ejemplo al elemento c_{23}=14?

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

De A se toma fila 2: (2 5 8). De B columna 3, cuyos elementos son (2 2 0)
Se resuelve 2*2+5*2+8*0 = 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado: $\begin{pmatrix} 30 & -26 & 10 \\ 36 & -31 & 14 \\ 42 & -36 & 18 \end{pmatrix}$

¿Cómo se llegó por ejemplo al elemento $c_{12} = -26$?

De A se toma fila 1: (1 4 7). De B columna 2, cuyos elementos son (-1 -1 -3)
Se resuelve 1*(-1)+4*(-1)+7*(-3)= -1-4-21= -26

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8+21 & -1-4-21 & 2+8+0 \\ 2+10+24 & -2-5-24 & 4+10+0 \\ 3+12+27 & -3-6-27 & 6+12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -26 & 10 \\ 36 & -31 & 14 \\ 42 & -36 & 18 \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo: Calcular el producto de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Verificar se pueden multiplicar:

Número de columnas de primera (2)= número de filas de segunda (2)

¿El orden de la matriz resultante?

3x3, o sea, cuadrada de orden 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-10 & 0+4 & 1+6 \\ -2+0 & 0+0 & -1+0 \\ -6+5 & 0-2 & -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se llegó por ejemplo al elemento c_{32}= -2?

De A se toma fila 3: (-3 -1). De B columna 2, cuyos elementos son (0 2)

Se resuelve (-3)*0+(-1)*2 = -2

Propiedades de la operación producto de matrices

Sean A,B,C tres matrices tal que se puedan efectuar las operaciones incluidas en las operaciones que se establecen a continuación y α, β dos escalares (números reales)

1. $A(B+C)= AB+AC$ (distributiva)
2. $(B+C)A = BA+CA$ (distributiva)
3. $A(\alpha B)= (\alpha A)B= \alpha(AB)$
4. $A(BC)=(AB)C$

Observar que al multiplicar las matrices su orden no se puede alterar, pues el producto de matrices NO es conmutativo.

Matrices con MATLAB

Creación de matrices

Las matrices se definen o introducen por filas; los elementos de una misma fila están separados por espacios o comas, mientras que las filas están separadas por caracteres de punto y coma.

Ejemplo:

Se crea una matriz de orden 3:

```
>> A=[1 -2 3;0 7 -4;8 -1 9]
A =1 -2 3
     0  7 -4
     8 -1 9
```

Si la quiere crear pero no 'visualizar' le coloca al final un punto y coma

```
>> A=[1 -2 3;0 7 -4;8 -1 9];
```

Orden de una matriz

Size: Comando para el orden de una matriz.

En ejemplo anterior:

```
>> A=[1 -2 3;0 7 -4;8 -1 9];
>> t=size(A)
t = 3   3 (filas x columnas)
```

Operaciones con matrices

1. Suma

El símbolo suma conocido para sumar números.

Para ejemplo visto de sumar dos matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

```
>> a=[2 2 1;3 2 1;2 3 2;2 0 4];
>> b=[0 1 4;1 4 0;2 1 1;0 2 2];
>> c=a+b
c=
        2   3   5
        4   6   1
        4   4   3
        2   2   6
```

Operaciones con matrices

2. Producto de matrices

El símbolo * también para multiplicar números.

Para ejemplo visto de multiplicar dos matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -26 & 10 \\ 36 & -31 & 14 \\ 42 & -36 & 18 \end{pmatrix}$$

```
>> a=[1 4 7; 2 5 8; 3 6 9];
>> b=[1 -1 2; 2 -1 2; 3 -3 0];
>> c=a*b
c=
     30   -26   10
     36   -31   14
     42   -36   18
```

Operaciones con matrices

3. Suma y producto por un escalar combinados

```
>> a=[1 -1 3;2 1 0;-2 4 5],   b=[-3 1 2;4 5 -1;6 0 -2]
a = 1 -1 3                b = -3 1  2
     2 1 0                     4  5 -1
    -2 4 5                     6 0 -2
>> c=2*a+b

c =
    -1 -1 8
      8 7 -1
      2 8  8
```

Transpuesta de matrices

```
>> a=[3 5 2;4 1 6]
a =
        3 5 2
        4 1 6
>> t=size(a)
t   2   3

>> at=a'
at =
        3 4
        5 1
        2 6
>> t1=size(at)
t1   3   2
```

Ejemplos contextualizados

(Interés compuesto). Se quiere calcular la cantidad de dinero que se tiene al cabo de n años si se invierten 100 USD a un interés de 4%, 6%, 7%.

Sea P la cantidad de pesos inicial invertida, y r el interés. Entonces el valor que se tiene al final del año es Pf =P+rP=(1+r)P.

Manualmente sería:
A un interés de 4%:
Al cabo de 1 año: 1.04*100= 104, Al cabo de 2 años: 1.04*104= 108.16, ...

A un interés de 6%:
Al cabo de 1 año: 1.06*100= 106, Al cabo de 2 años: 1.06*106= 112.36, ...

A un interés de 7%:
Al cabo de 1 año: 1.07*100= 107, Al cabo de 2 años: 1.07*107= 114.49, ...

Se forma una matriz diagonal donde en la diagonal está el índice de recuperación total para cada uno de los intereses (4%, 6%, 7%). O sea, 1.04, 1.06, 1.07

Se multiplica esa matriz por una matriz columna de orden 3 con el valor que se invierte (100) en cada elemento de la matriz columna.
El resultado es una matriz columna con lo recuperado al cabo del primer año para cada tipo de interés.

$$\begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 106 \\ 107 \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ Valores al final del año 1

Para obtener los valores al final del año 2:

$$\begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 104 \\ 106 \\ 107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 108.16 \\ 112.36 \\ 114.49 \end{bmatrix}$$

Entonces, el monto al final de n años estará dado por:

$$\begin{bmatrix} 1.04 & 0 & 0 \\ 0 & 1.06 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Resolviéndolo con el MATLAB para n =2

```
>> A=[1.04 0 0;0 1.06 0;0 0 1.07]

A =

    1.0400         0         0
         0    1.0600         0
         0         0    1.0700
```

```
>> B=[100; 100; 100]

B =

   100
   100
   100
```

c=A^2*B

c =

108.1600

112.3600

114.4900

.

Definición de Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL)

Definición . Se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** a un conjunto de m ecuaciones lineales en las mismas n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_2 & = & b_2 \\ \dots\dots & & \dots\dots & & \dots & & \dots\dots & & \dots\dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} .$$

a_{ij}: coeficiente de la variable x_j en la ecuación i
b_j: Término independiente de la ecuación j

Ejemplo:

$$2x + 3y - 4z = 5$$
$$-x + 9y + 7z = 9$$

Es un SEL con 3 incógnitas (variables) y 2 ecuaciones

Solución de un SEL:

Cada asignación de valores de las incógnitas (variables) $\{x_1 = k_1, ..., x_n = k_n\}$ que sea solución **común** a **todas las ecuaciones del sistema**, es decir: que verifique todas las igualdades simultáneamente.

Se llama solución general del sistema al conjunto de todas las soluciones del sistema.

Ejemplo: Dado el SEL

$$\begin{aligned} 5x + 2y \quad &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 3 \end{aligned}$$

Una solución del SEL (NO 3 soluciones):
x=-1/5, y= 3/2, z=11/10

¿Cómo verificamos que es cierto?

Sustituyendo los 3 valores de las variables en las 3 ecuaciones y ver que satisfacen las 3 ecuaciones

1ra. Ec: 5(-1/5) +2 (3/2) = -1+3=2

2da. Ec: $$2.\frac{-1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{11}{10} = \frac{-4+15-11}{10} = \frac{0}{10} = 0$$

3ra. Ec: $$2.\frac{-1}{5} + 3.\frac{3}{2} - \frac{11}{10} = \frac{-4+45-11}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Preguntas aún por contestar:

¿Cómo se llegó a esa solución en el ejemplo anterior? Pues no era obvio.

¿ Podría tener el SEL dado más soluciones?

Veremos el método de Gauss para contestar ambas preguntas.

Clasificación de un SEL (de acuerdo al número de soluciones)

1. Compatible o consistente (que tiene soluciones)

1.a Solución única (Determinado)

1.b Infinitas soluciones (Indeterminado)

2. Incompatible o inconsistente (que NO tiene soluciones).

Veremos que un SEL NUNCA tiene un número <u>finito</u> de soluciones (excepto 1). O sea, si tiene soluciones, o tiene una o tiene infinitas, no exactamente 10, 12, 38, etc.

Importancia de clasificar un SEL (de acuerdo al número de soluciones)

Los comandos de un software a utilizar dependiendo del número de soluciones que tiene.

Poder interpretar y obtener soluciones de un sistema indeterminado en el contexto real de un problema.

Ejemplo de SEL incompatible.

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

¿Por qué?

De ec. (1) y está obligada a ser 0

Sustituyendo en ec. (2) 2x + 0 = 0 Luego x tiene que ser 0

Sustituyendo y = 0 y x= 0 en ec. (3)
2.0 + 0 = 0 ≠ 2, no se satisface la última ecuación

En este caso es simple, en otros no es obvio detectar a simple vista que el SEL no tiene soluciones.

¿En la vida real por qué un SEL puede ser incompatible, o sea, no tener solución?

Varias causas, las más comunes:

1. Porque se están imponiendo requisitos que no son posibles (algunos de ellos al menos).

2. Porque los datos (tomados probablemente de una tabla de Excel) tienen errores.

3. Porque el problema está mal modelado.

Expresión matricial de un SEL

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_2 & = & b_2 \\
.... & & .... & & ... & & .... & & .... \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Matriz de coeficientes del SEL

Variables del SEL

Términos independientes

Matriz ampliada del SEL

El método de Gauss trabaja con la matriz ampliada del SEL (A|b)

(A|b) es una notación, para indicar que luego de la última columna de A se coloca el vector columna b, **NO significa dividir A por b**

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ 4x-3y+z&=-1\\ x+5y-6z&=5 \end{aligned}$$

Matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 4 & -3 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

¿Cuál es la idea central del método de Gauss?

Transformar el SEL en uno equivalente a él (significa que tenga las mismas soluciones que él, si es compatible) que sea más fácil de resolver. La matriz del SEL equivalente se ‘escalona’

Por ejemplo, los dos siguientes sistemas son equivalentes:

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ 4x-3y+z&=-1\\ x+5y-6z&=5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ y+9z&=11\\ 174z&=174 \end{aligned}$$

Matriz ampliada del 2do. SEL

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{bmatrix}$$

Matriz escalón

¿Cuál es más fácil de resolver y por qué?

El segundo, resolviéndolo ‘de abajo hacia arriba’

Problema principal: Obtener un SEL equivalente con matriz escalonada

Definición (matriz escalonada).

Una matriz se llama escalonada si cumple con las siguientes propiedades:

1. Todas las filas nulas están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento de cada fila diferente de cero está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila anterior.

Ejemplos de matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplos de matrices NO escalonadas

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En una matriz escalonada cada fila NO nula debe tener al menos un cero más delante del primer elemento no nulo que los ceros delante del primer elemento no nulo en fila anterior.

Transformaciones posibles en un SEL para obtener uno equivalente a él

- ✓ Multiplicar toda una ecuación (fila) por un escalar no nulo.
- ✓ Intercambiar el orden de las ecuaciones (filas).
- ✓ Sumar a una ecuación (fila) otra ecuación (fila) multiplicada por un escalar.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron las filas 2 y 3 (F2 y F3)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F2 se sustituyó por F2-4F1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó la fila 3 por 1/174 (equivalente a dividirla por 174)

Rango de una matriz A (útil para clasificar un SEL)

Existen variadas definiciones equivalentes de rango de una matriz así como diversos métodos para calcular el rango de una matriz. Se denota r(A)

El rango es el número de filas no nulas en la matriz escalonada equivalente obtenida.

Ejemplos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{bmatrix}$$

¿Rango de A?

r(A)=3

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Rango?

r=3

Clasificación de SEL en función del rango

Sea el SEL $AX=b$ A de orden mxn, o sea, n variables. Sea $A|b$ la matriz ampliada del SEL y ya la escalonó.

1. Si **$r(A|b)= r(A)$** el SEL es compatible. Denotemos k ese rango.
Si **$k = n$** (# variables) el SEL es determinado (solución única)
Si **$k<n$** el SEL es indeterminado (infinitas soluciones)

2. Si **$r(A|b) \neq r(A)$** (en ese caso, $r(A) < r(A|b)$, el SEL es incompatible, o sea, no tiene soluciones.

Ejemplo de resolver un SEL utilizando el método de Gauss:

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ 4x-3y+z&=-1\\ x+5y-6z&=5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 4 & -3 & 1 & -1\\ 1 & 5 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

Hacer cero los elementos de la primera columna por debajo de 3 con las transformaciones elementales:

4F1-3F2 $\rightarrow$ F2

F1-3F3 $\rightarrow$ F3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & -17 & 21 & -13 \end{array}\right)$$

Hacer cero los elementos de la segunda columna por debajo de 1 con la transformación elemental:

17F2+F3 $\rightarrow$ F3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{array}\right)$$

Matriz escalón, se clasifica primero el SEL

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ 4x-3y+z&=-1\\ x+5y-6z&=5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{array}\right)$$

r(A|b)= 3   r(A) = 3 (Para hallar r(A) en matriz anterior solo se ‘tapa’ última columna)

r(A|b)= r(A) $\Rightarrow$ SEL compatible.   Para saber # de soluciones

Sea k el rango determinado (r(A|b)= r(A)) k =3
Comparemos k con número de variables n, n=3
Como k = n, el SEL es compatible determinado (Solución única)

Ahora se resuelve, a partir de la matriz ampliada escalonada

¿Cómo se resuelve el SEL?

$$\begin{aligned} 3x-2y+3z&=2\\ 4x-3y+z&=-1\\ x+5y-6z&=5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 174 & 174 \end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ x & y & z & \mathrm{TI} \end{array} \end{array}$$

SEL equivalente:

$3x-2y+3z=2$ (1)

$y+9z=11$ (2)

$174z=174$ (3)

Resolviendo de abajo hacia arriba:

De (3) $z=1$

Sustituyendo $z=1$ en (2)

$y+9(1)=11 \Rightarrow y=2$

Sustituyendo $z=1$, $y=2$ en (1)

$3x-2(2)+3(1)=2 \Rightarrow x=1$

<u>Única</u> solución del SEL:

$x=1,\ y=2,\ z=1$

Ejemplo de un SEL indeterminado

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 2z &= 10 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se da la matriz final escalonada

Clasificando: r(A|b)= 2, r(A) = 2 $\Rightarrow$ SEL compatible, k =2 (rango)

k =2 (rango), n =3 (# variables) k< n $\Rightarrow$ SEL indeterminado (Inf. Sol.)

El valor n – k = 1 dice el número de variables ‘libres’ en la solución del SEL

¿Cómo se resuelve en este caso?

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 4 \\ 2x - y - z &= 6 \\ 3x - 2y + 2z &= 10 \end{aligned} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SEL equivalente:

x-y+3z=4 (1)

y-7z=-2 (2)

Al resolverlo 'de abajo hacia arriba' la última ecuación tiene 2 variables, y vimos que el SEL tiene una variable libre. ¿Cuál será y o z?

La que queramos, pero la que sea libre, al sustituir en (1) debe ser la que también quede libre. Asumamos z es libre. ¿Cómo se resuelve en este caso? De (2):

$y = -2 + 7z$ (3)

Sustituyendo (3) en (1):

$x-(-2+7z)+3z=4$

$x+2-4z=4 \Rightarrow x=2+4z$

Solución general del SEL:

$x=2+4z,\ y = -2 + 7z$, $\boldsymbol{z \in R}$

Como z puede tomar cualquier valor real hay infinitas soluciones

Algunas soluciones particulares:

Para z=1: x=6, y=5, Para z=0: x=2, y=-2, Para z=-1: x= -2, y=-9