

Gravity Tunnel through the Earth using an effective mass density function

Nicolás Gómez, Carlos Quimbay

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia

(Dated: December 15, 2020)

A novel effective function for the mass density profile inside the Earth is proposed in order to describe qualitatively and quantitatively physical aspects of the terrestrial density proposed by seismic models within the context of the gravity tunnel. This was done using a decreasing potential law function dependent only on the distance to the center of the Earth and on some parameters, in such a way that gravity on the surface and total mass are correctly predicted, and that the disagreement of the traversal times of a gravity train with those obtained by the seismic data are minimum. To do this we first determined the first parameter to obtain a family of density functions whose integrals give us the right g constant and mass of the Earth, then we analytically computed the velocities and used them to let a program minimize the relative traversal times function, and finally we used those results to calculate chord path times, braquistochrones shapes and braquistochrones paths and compared them with those of the model, finding a high correspondence.

PACS numbers:

I. INTRODUCTION

Un túnel gravitacional es un medio de transporte hipotético en el que, para llegar de un punto a otro en la superficie del planeta, se recurre a la aceleración de la gravedad en un túnel conectando ambos puntos. El problema es netamente pedagógico y ha sido discutido ampliamente en revistas de este carácter [1].

Esto ha sido realizado de múltiples maneras, considerando el caso más sencillo de densidad constante[2], propuesto como ejercicio en libros de texto de mecánica [3], adicionándole la fricción del riel [4], o considerando la rotación de la Tierra [5–7], y el efecto de ésta en su forma[8], o incluso en el marco de la relatividad general [9, 10]. De igual manera se han visto trabajos considerando relaciones de densidad-presión basados en politropas [11, 12], o en modelos geofísicos con densidades más realistas como el llamado modelo de referencia preliminar de la Tierra (PREM), siendo este hecho numéricamente por Klotz [13], haciendo una comparación con una aproximación de gravedad constante, y también haciendo un tratamiento analítico usando una aproximación lineal que arroja resultados más cercanos con el modelo de referencia preliminar de la Tierra y que se libra de la poco físicamente realista situación de una gravedad constante (dado que eso implica densidades infinitas en el centro del planeta).[6, 14].

Tanto para fines geofísicos, astrofísicos como puramente físicos, conocer la distribución de la densidad en nuestro planeta es de gran utilidad. En primera aproximación y para fines netamente ilustrativos se puede tomar constante, dividiendo la masa total entre su volumen, obteniendo $\bar{\rho} = 5515 \text{ kg/m}^3$ [15]. Con esto se pueden obtener valores aproximados para la aceleración gravita-

cional o momentos de inercia. Sin embargo, es claro que la densidad de la Tierra (y de cualquier cuerpo astronómico) dista mucho de ser constante. Otros modelos se han propuesto para describir la densidad [16] o la aceleración [17] de la Tierra, pero el modelo más aceptado es el modelo de referencia preliminar, según el cual la densidad en el interior de nuestro planeta tiene discontinuidades entre las diferentes capas que la componen: núcleo interno, núcleo externo, manto, corteza y superficie (océano). Dentro de cada región la densidad se aproxima con una función polinomial.[18] Esto se puede apreciarse en la figura 1. Como se puede notar, la densidad aumenta hacia el centro y alcanza un valor máximo de alrededor de 13000 kg/m^3 , mientras que en la superficie es casi 1000 kg/m^3 , que corresponde a la densidad del agua en el océano.

A pesar de los múltiples datos que fueron necesarios para establecer dicho modelo, no deja de ser una abstracción matemática. En el presente trabajo se pretende discutir una posible aproximación a este modelo usando una función de densidad efectiva matemáticamente más sencilla de expresar; suave, continua y ciertamente no constante. Esta función se plantea como un posible reemplazo a la descrita por el modelo de referencia y por lo tanto como una descripción sencilla pero acertada en sus efectos.

Específicamente se usan dos perfiles, dados por funciones decrecientes como ley de potencia, estableciendo dos y tres parámetros, entre ellos la potencia misma, para obtener de ella la mayor física posible. Es decir, se busca que el perfil de densidad efectiva dé cuenta de la masa total de la Tierra, de que la aceleración gravitacional en la superficie es $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y que los tiempos de caída en un túnel gravitacional coincidan lo mejor posible con los del modelo PREM. Esto, con el fin de que el perfil

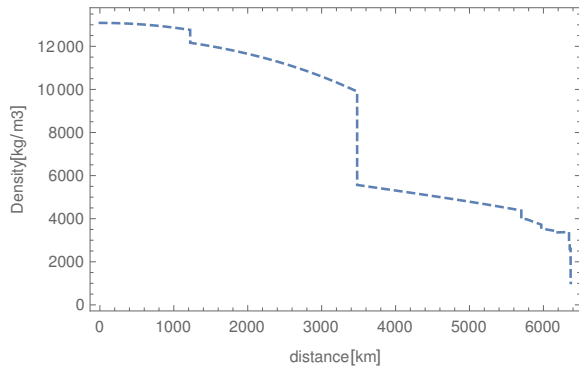


FIG. 1: Density on the inside of the Earth as a function of the radius according to the data obtained by PREM.

densidad efectiva se muestre como una confiable y simple descripción del interior de la Tierra.

El uso de esta función no solo representa un tratamiento completamente diferente a los que se han mencionado para el problema del túnel gravitacional, sino que sirve como ejemplo para ilustrar la construcción y el desarrollo de una teoría o modelo efectivo. Modelos efectivos en mecánica clásica y en general en física de nivel de pregrado son escasos, sin embargo su utilidad en el mundo científico es cada vez mayor, razón por la cual es importante que estudiantes de una carrera de física o ingeniería se familiaricen con alguno que contenga una física sencilla y que no requiera de métodos matemáticos o computacionales muy elaborados. El presente artículo cumple con todos estos requisitos, ya que las deducciones se presentan en el marco de la mecánica de Newton y las funciones usadas son todas integrables ya sea en términos de funciones igualmente sencillas, o numéricamente usando los métodos convencionales.

Para abordar el problema del tunelamiento gravitacional, se plantean primero los posibles perfiles de densidad en la sección II, se deducen las funciones de aceleración, y en la sección III, se discute sobre los perfiles de velocidad. En IV se hallan las expresiones para los tiempos de tunelamiento dependientes de la densidad y se minimizan las funciones pertinentes para que los tiempos se aproximen como se requiere. Posteriormente calculamos dichos tiempos y comparamos los resultados obtenidos con los parámetros que resultan de la minimización tanto en las velocidades y los tiempos de tunelamiento, como en la forma de las trayectorias braquistócrona (V) y sus respectivos tiempos.

Finalmente, en VI estudiamos la aceleración a lo largo del camino, esto para dar una explicación dinámica del por qué los tiempos son menores para caminos más largos como las braquistócronas, y no para los caminos de menor distancia.

II. DENSITY PROFILE

Para dar cuenta de una densidad que reemplace a la de la figura 1, busquemos, no exactamente describir la misma situación de la distribución de masa de manera local, sino reproducir sus efectos. Partamos para ello de la forma de densidad potencial más sencilla, dada por

$$\rho(r) = \bar{\rho} \left(\frac{R-r}{R} \right)^b, \quad (1)$$

con $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ la densidad promedio de la Tierra, y b una potencia real positiva. Con esta densidad, se obtiene la aceleración de la gravedad, a partir de la ley de Gauss y usando el teorema del binomio de Newton

$$\begin{aligned} a(r) &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \\ &= \frac{3GM}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} R^{-(k+1)} (-1)^k \frac{r^{k+1}}{k+3} \\ &= 3g \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} (-1)^k R^{-(k+1)} \frac{r^{k+1}}{k+3}. \end{aligned}$$

Tomemos el caso particular $b = 1$ (correspondiente a una función lineal), en la superficie se tendría

$$a(R) = \frac{1}{4}g.$$

Vemos que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra sería de $g/4$, no g . De manera que este perfil no puede ser usado si se pretende que las cantidades medibles en el exterior coincidan con los valores conocidos.

A. Density with two parameters

Consideremos entonces un cambio sencillo a (1) dado por

$$\rho_1(r) = \rho_0 \left(\frac{R-r}{R} \right)^b, \quad (2)$$

con $\rho_0 \propto \bar{\rho}$, pero que al hallar la aceleración se cumpla $a(R) = g$. Con esto,

$$a(r) = 4\pi G \rho_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} (-1)^k R^{-k} \frac{r^{k+1}}{k+3},$$

y así, en la superficie se tiene

$$g = 4\pi G \rho_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} (-1)^k \frac{R}{k+3}$$

$$= 4\pi G \rho_0 R k_1(b),$$

siendo $k_1(b)$ el coeficiente

$$k_1(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} \frac{(-1)^k}{k+3},$$

despejando ahora para ρ_0 ,

$$\rho_0 = \frac{g}{4\pi G k_1(b)} = \frac{1}{3k_1(b)} \bar{\rho},$$

de esta manera, (2) queda

$$\rho_1(r; b) = \frac{\bar{\rho}}{3k_1(b)} \left(\frac{R-r}{R} \right)^b, \quad (3)$$

y la aceleración en cualquier punto $r < R$ es

$$a_1(r; b) = \frac{g}{c_b} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} \frac{(-1)^k}{k+3} \left(\frac{r}{R} \right)^{(k+1)}. \quad (4)$$

B. Effective density with three parameters:

Otra posible forma para la densidad sería usando cuatro parámetros, pero se puede reducir a solo tres parámetros

$$\rho(r) = N\bar{\rho} \left(\frac{\alpha R - \beta r}{R} \right)^b = a\bar{\rho} \left(\frac{R - cr}{R} \right)^b,$$

Este perfil de densidad, no obstante, tiene el problema de que en la superficie, la densidad es distinta de cero, lo cual representa un problema si se quiere describir adecuadamente este aspecto. Una alternativa que cumple el mismo propósito sería

$$\rho_2(r) = a\bar{\rho} \left(1 - \frac{(1+c)r/R}{1+c r/R} \right)^b \quad (5)$$

con a, b, c a determinar de modo que $a(R) = g$ y que se aproxime a ρ_{PREM} lo mejor posible. Nótese que para esta función si se cumple $\rho_2(R; b, c) = 0$, y además, $\rho_2(r; b, 0) = \rho_1(r; b)$.

El primero de estos parámetros se fija nuevamente con la aceleración. De manera análoga, usando

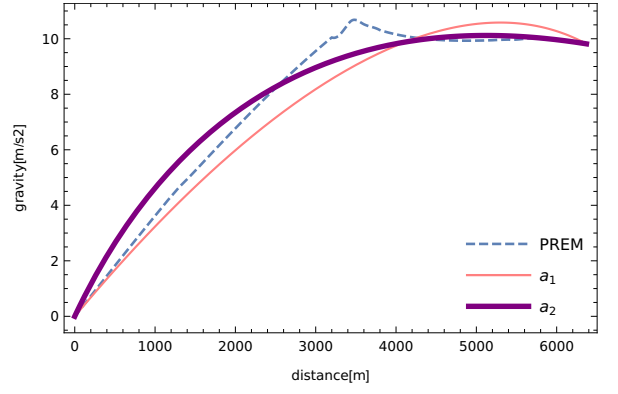


FIG. 2: Acceleration profiles according to PREM data and to (4) and (8) functions.

$$a_2(r) = \frac{4\pi G a \bar{\rho}}{r^2} \int_0^r \left(1 - \frac{(1+c)r'/R}{1+c r'/R} \right)^b r'^2 dr' \quad (6)$$

encontramos que

$$a = \frac{1}{3k(b, c)},$$

con el nuevo coeficiente

$$k_2(b, c) = \int_0^R \left(1 - \frac{(1+c)r'/R}{1+c r'/R} \right)^b r'^2 dr'$$

con esto la densidad es

$$\rho_2(r; b, c) = \frac{\bar{\rho}}{3k_2(b, c)} \left(1 - c \frac{r}{R} \right)^b. \quad (7)$$

La aceleración para este caso es

$$a_2(r; b, c) = \frac{g}{k(b, c)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} \frac{(-c)^k}{k+3} \left(\frac{r}{R} \right)^{(k+1)}. \quad (8)$$

En la figura 2 se puede apreciar la comparación de las aceleraciones según estas funciones analíticas y según los datos numéricos del modelo PREM. Como se puede notar, las funciones son suaves y, aunque no necesariamente se acercan tanto a la aceleración en cada punto $r < R$, toman el mismo valor para $r = R$, i.e., 9.81 m/s^2 .

La siguiente condición física que se debe cumplir es que la masa total de la Tierra debe coincidir con el valor de la literatura M. Afortunadamente esto se obtiene directamente de las consideraciones anteriores para la gravedad, dado que la integral es esencialmente la misma y que, de hecho, es la masa total la que da a la aceleración de la gravedad su valor en la superficie:

III. DETERMINATION OF THE VELOCITY PROFILE

Una vez conocida la distribución de masa dentro de la esfera física a considerar, se puede encontrar la rapidez seguida por una partícula de prueba mientras se encuentra en el interior de ésta a partir de consideraciones de energía. En primera instancia, en cualquier punto se cumple

$$E = \frac{1}{2}mv^2(r) + U(r),$$

y dado que E es una constante de movimiento, un cambio en la energía potencial

$$\Delta U = Gm \int_{r_1}^{r_2} \frac{M(r')}{r'^2} dr',$$

viene acompañado por un cambio en la velocidad. El caso más sencillo a considerar es $r_1 = R$, y suponiendo una velocidad nula, se obtiene, en términos de la densidad

$$\frac{v^2(r)}{2} = 4\pi G \int_r^R \frac{1}{r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr'' dr'. \quad (9)$$

Con el perfil de densidad (7), tras hacer la doble integral,

$$v_2(r; b, c) = \left[\frac{8\pi G \bar{\rho}}{3c_b} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} (-c)^k R^{-k} \frac{R^{k+2} - r^{k+2}}{(k+2)(k+3)} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

mientras que para (3) simplemente se toma $v_1(r; b) = v_2(r; b, 1)$. Para algunos valores de los parámetros b y c , se han graficado v_1 y v_2 , en conjunto con la velocidad de acuerdo a PREM, hallada integrando numéricamente la aceleración. Esto se puede ver en la figura 3. En este punto, es pertinente destacar que (10) ha sido hallada analíticamente, lo cual demuestra la maniobrabilidad matemática que sucede a usar un perfil de densidad efectivo sencillo como lo es una ley de potencia.

IV. TRAVERSAL TIME

Sea $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ el intervalo infinitesimal de una trayectoria expresado en coordenadas polares, y $v(r)$ la velocidad instantánea de un objeto sobre esta trayectoria como función de r . El tiempo del trayecto viene dado por

$$t = \int \frac{ds}{v(r)},$$

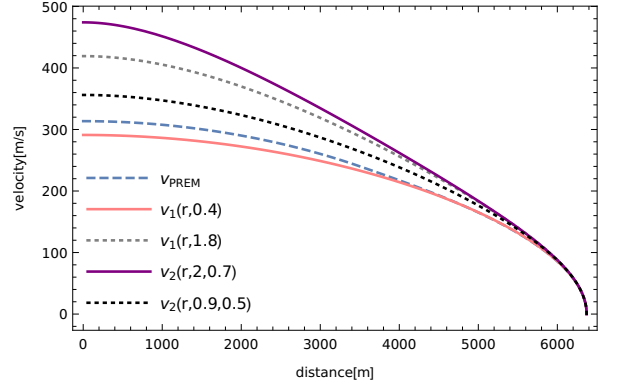


FIG. 3: Some velocity profiles of the along with the numeric profile v_{PREM} .

que de manera más conveniente se puede reescribir

$$t = \int \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{v(r)} d\theta = \int \frac{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}}{v(r)} dr, \quad (11)$$

con $r' = dr/d\theta$ y $\theta' = d\theta/dr$. Cualquiera de las dos posibilidades de (11) puede ser usada a conveniencia, según la descripción que se necesite para la trayectoria a considerar.

A. Traversal time between antipodes

Las antípodas son los dos puntos diametralmente opuestos en una esfera (los puntos más alejados entre sí), es decir, si el túnel gravitacional dentro de la Tierra se hace recto y pasando por el centro de la misma, se conectan las antípodas. Este camino es el más antiguamente considerado, y en el caso de la densidad constante da un tiempo de recorrido $T_0 = 42 \text{ min}$ [1]. También es el primero a considerar en toda la literatura sobre el tema por ser, claramente, el caso más sencillo. En la suposición de gravedad constante se obtienen $T_{\text{const}} = 37 \text{ min } 58 \text{ s}$, el desarrollo numérico de PREM da $T_{\text{prem}} = 38 \text{ min } 11 \text{ s}$ [13].

Siendo este último valor el que se desea obtener, seguimos a Iserman[14] para definir las funciones a minimizar, de tal modo que los tiempos se acerquen a este valor

$$f_1(b) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\hat{v}_{\text{prem}}(x)} - \frac{1}{\hat{v}_1(x; b)} \right)^2 dx, \quad (12)$$

$$f_2(b, c) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\hat{v}_{\text{prem}}(x)} - \frac{1}{\hat{v}_2(x; b, c)} \right)^2 dx, \quad (13)$$

siendo \hat{v} las versiones adimensionales de las funciones consideradas en (10). Usando un método apropiado y

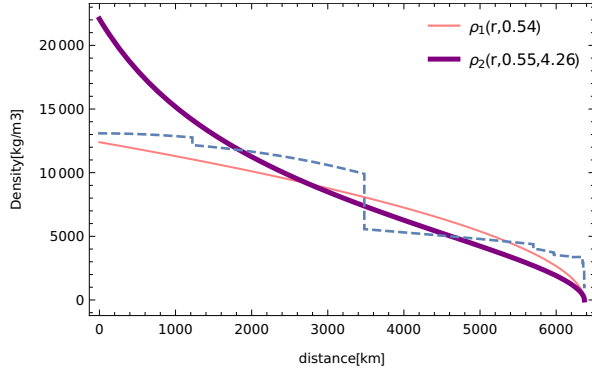


FIG. 4: Effective density functions plotted along with numeric profile of PREM (dashed lines).

un lenguaje de programación avanzado (en nuestro caso usamos *mathematica*), es fácil obtener

$$f_1 : \{b \rightarrow 0.54\},$$

$$f_2 : \{b \rightarrow 9.14, c \rightarrow 0.18\}.$$

Con estos valores en las funciones de densidad (3) y (7), se puede obtener la gráfica de la figura 4. Como se mencionó anteriormente, estas funciones, para los propósitos aquí considerados, no deben acertar en los valores de densidad correspondientes a cada capa interna, por lo que no supone ningún inconveniente que ρ_2 en el centro sea mayor a ρ_{PREM} , ni que las densidades en la superficie no sean exactamente las del agua. Si bien la motivación de este trabajo es meramente pedagógica, podría esperarse un uso astrofísico, mas no, claramente, geofísico.

De manera análoga, usando ahora estos valores en los perfiles de velocidades, se puede observar una increíble coincidencia (ver figura 5). La velocidad máxima en las trayectorias antípoda predichas por cada función, son decentemente cercanas

$$v_{PREM}(0) = 9915 m/s,$$

$$v_1(0, 0.54) = 9687 m/s,$$

$$v_2(0, 9.14, 0.18) = 10001 m/s,$$

mientras que los tiempos del trayecto completo, usando la parte derecha de (11) con $\theta' = 0$ y los perfiles de velocidad (10) dan

$$T_{PREM} = 38 \text{min } 11.26 \text{s},$$

$$T_1 = 38 \text{min } 05.7 \text{s},$$

$$T_2 = 38 \text{min } 13.01 \text{s},$$

lo que supone una discrepancia respecto al modelo de

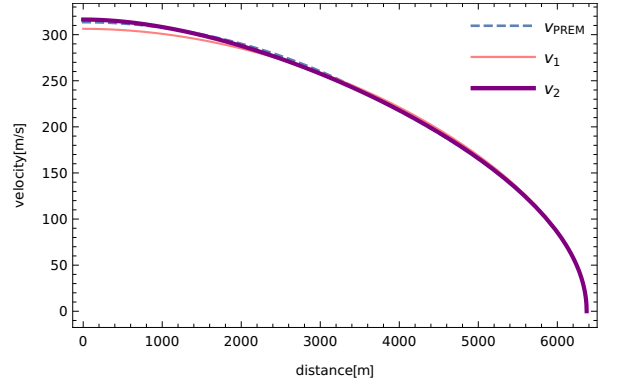


FIG. 5: Velocity profile of the model along with the ones obtained from the effective densities, for the path between antipodes.

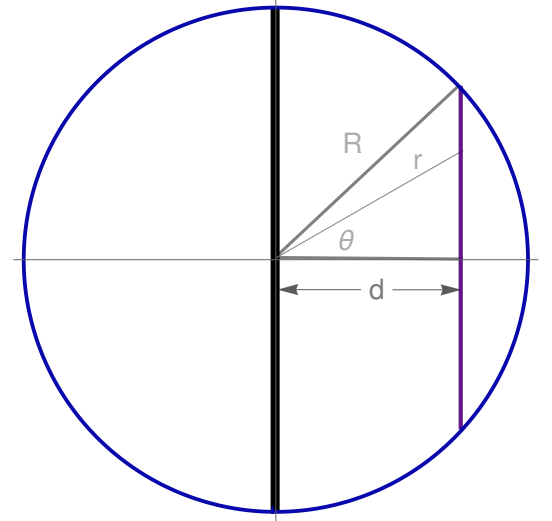


FIG. 6: Representation of the Earth and the chord path at a distance d , with other useful parameters.

$$\Delta T_1 = 0.2\% \quad , \quad \Delta T_2 = 0.04\%$$

Procedemos ahora a calcular los tiempos en otras trayectorias.

B. Chord Path

En términos de la distancia d , la más cercana de esta recta al centro de la esfera (ver figura 6), la trayectoria se puede escribir a partir de las relaciones

$$r = \frac{d}{\cos \theta} \quad (14)$$

con esto, la integral de la derecha en (11) queda

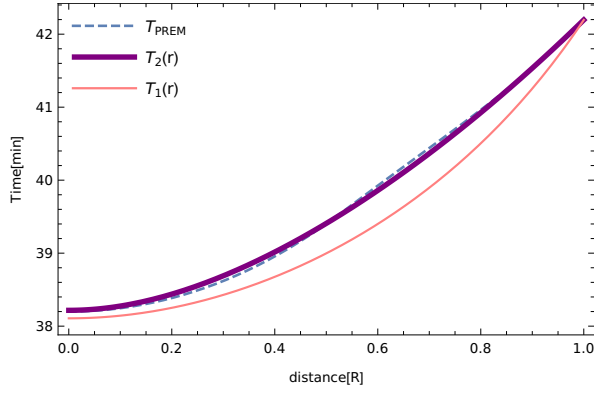


FIG. 7: Traversal time for the chord path between two arbitrary points on the surface as a function of the distance d of the path to the center of the Earth.

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{r^2 - d^2} v(r)} dr,$$

considerando ahora los límites, r toma un máximo valor igual al radio de la esfera R , hasta un mínimo valor d , para volver a llegar a R en el otro extremo, por lo que los tiempos a resolver se hallan mediante

$$\frac{T}{2} = \int_d^R \frac{r}{\sqrt{r^2 - d^2} v(r)} dr. \quad (15)$$

En la figura 7, además de verse una increíble coincidencia entre ambas funciones resultado de la densidad efectiva y la proveniente del modelo, vemos la misma particularidad que se presenta en este tipo de trayectorias, independientemente del perfil de densidad, a saber, que los tiempos, de manera contraria a la intuición, son por pocos minutos mayores cuanto menor es la distancia.

V. BRAQUISTOCHRONE PATH

La curva braquistócrona es por definición aquella en la cual el descenso o recorrido toma el menor tiempo, o del mismo modo, en el que las velocidades alcanzadas son mayores. Para hallar estas curvas, como es usual, se usan métodos variacionales sobre (11) y se hallan las respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange. Para ello tómesese la integral a la izquierda, de modo que

$$t = \int f(r, r', \theta) d\theta,$$

con

$$f = \frac{\sqrt{r^2 + (dr/d\theta)^2}}{v(r)}, \quad (16)$$

que es mínima si se cumple

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r'} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (17)$$

y a partir de (17) se pueden encontrar, integrando, las trayectorias $r = r(\theta)$.

Sin conocer la velocidad de manera explícita es posible desarrollar esta ecuación, usando regla de la cadena, y gracias a la no dependencia en θ ,

$$r' \frac{\partial f}{\partial r'} - f = c,$$

explícitamente

$$\frac{1}{v(r)} \frac{r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} - \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{v(r)} = c.$$

La constante se mantiene en cualquier momento de la trayectoria, en particular si $r \rightarrow r_{min} = d$, donde $r' = 0$, de modo que

$$c = -\frac{d}{v(d)},$$

por lo cual

$$\frac{1}{v(r)} \frac{r'^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} - \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{v(r)} = -\frac{d}{v(d)},$$

y en general la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{r^2}{\sqrt{r'^2 + r^2}} = d \frac{v(r)}{v(d)},$$

resolviendo para r'

$$r' = \left[\frac{r^4}{d^2} \left(\frac{v(d)}{v(r)} \right)^2 - r^2 \right]^{1/2} = g^{-1}(r), \quad (18)$$

así, la trayectoria se puede hallar usando

$$\theta(r) = \int_d^r g(x) dx. \quad (19)$$

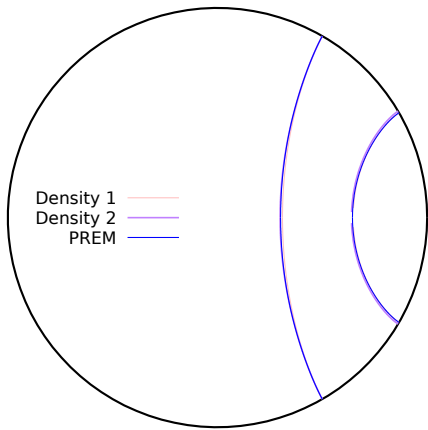


FIG. 8: Shape of the brachistochrone curves for the PREM density and for the effective densities (3) and (7)

A. Times for the brachistochrone path

Los tiempos para este camino pueden usarse nuevamente con (11), en este caso θ' se halla derivando (19) y las mismas funciones de velocidad a considerar. Para los tres casos que trabajamos en este artículo, puede ver en la figura 9. En cuanto a la cercanía que las funciones tienen unas con otras, es un buen indicio de que la física es la misma una vez se han fijado la aceleración de la gravedad en la superficie (o la masa), y los tiempos del camino más sencillo, y de que para el presente tratamiento es poco lo que se pierde al reemplazar el perfil numérico del modelo PREM por las densidades efectivas. En cuanto al comportamiento de estas tres funciones, que es el mismo para cualquier otra función densidad, los tiempos son menores si los caminos conectan puntos más cercanos sobre la superficie, lo cual es de esperar, además, los tiempos son para cualquier trayectoria con un acercamiento d dado, siempre menores a los de los caminos rectos, salvo para el caso $d = 0$ en el que la trayectorias, por supuesto, son las mismas y por tanto así sus tiempos de tunelamiento.

El por qué los tiempos de los caminos rectos es mayor si menor es el trayecto, y el porqué una braquistócrona, respecto a un camino recto, conectando los mismos dos puntos sobre la superficie toma un menor tiempo en recorrer siendo la longitud del túnel mayor, yace en la misma justificación a todo movimiento cinemático: la dinámica. Los resultados obtenidos para estos tiempos, que, como se mencionó, no son causa de la densidad sino de la forma misma de las trayectorias, cuando la densidad depende únicamente de la distancia al centro de la Tierra. Esto será discutido en la próxima sección.

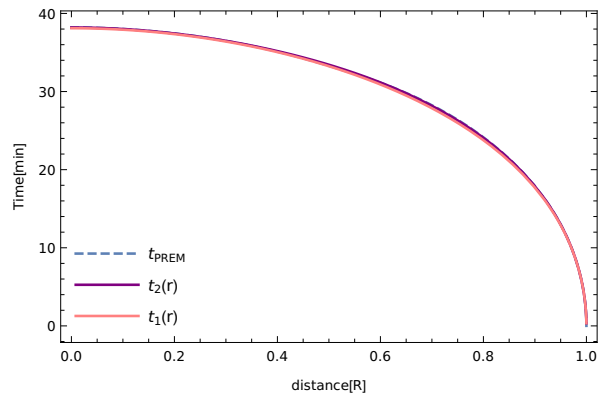


FIG. 9: Traversal time for the brachistochrone paths as a function of the minimum distance of the trajectory to the center of the Earth for each of the densities considered.

VI. ACCELERATION

Poco es lo que se ha discutido en la literatura sobre la aceleración en la dirección de movimiento para cada trayectoria. Es verdad que todo el análisis, así como puede partir de una distribución de densidad dada, puede también hacerse desde un perfil de gravedad, y es de hecho así como se ha tomado en este y otros trabajos para la situación de la Tierra de acuerdo a PREM (dado que estos datos también fueron dados en el estudio original[18]). No obstante, el carácter vectorial de esta aceleración también juega un papel crucial a la hora de entender qué camino tomará menos tiempo.

En general, el valor de los tiempos se entiende como el resultado de una contraposición de la longitud de los caminos (cada vez menor) y la magnitud de las velocidades en cada punto (también cada vez menor), sin entender del todo por qué uno se sobrepone al otro en cada caso. Estudiar las aceleraciones y sus componente en la dirección del camino ayuda no solo a visualizar cuál de estas dos magnitudes favorece el valor del tiempo encontrado sino también da una explicación al por qué.

En últimas, lo que se hace es un análisis de la atracción gravitacional sobre un cuerpo de prueba de masa unidad, de manera que

$$\vec{F}_g(r) = \vec{a}_r(r),$$

estas aceleraciones ya se han calculado y aparecen en la figura 2. Ahora, estas magnitudes corresponden al valor de la aceleración en dirección radial (\hat{r}). Para hallar la magnitud de estas aceleraciones en dirección de las trayectorias debe considerarse

$$a(r) = a_r \sin \theta,$$

para el caso de los caminos rectos corresponde a

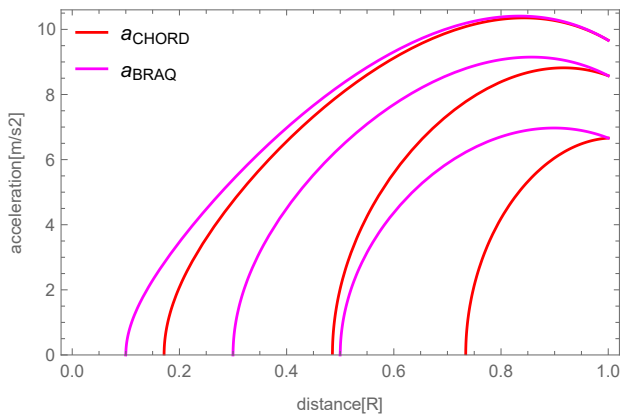


FIG. 10: Acceleration in the direction of the movement for three chord paths (red online) and for three brachistochrone paths (magenta online).

$$a_{CHORD}(r) = a_r(r) \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r},$$

mientras que para las trayectorias braquistócronas se usa el resultado hallado en (19)

$$a_{BRAQ}(r) = a_r(r) \sin(\theta(r)).$$

Estos resultados se encuentran graficados en la figura 10 partiendo únicamente de la aceleración a_{r1} en (4), en este punto se espera que el lector esté de acuerdo en que las gráficas para a_{rPREM} y a_{r2} serán muy parecidas. Las seis curvas corresponden a $a_{CHORD}(r)$ en tres túneles rectos conectando diferentes puntos sobre la superficie (color rojo), y a a_{BRAQ} para tres túneles que en principio conectan los mismos puntos sobre la superficie (color magenta), por esta razón ambos se encuentran en la superficie ($r/R = 1$). Nótese además que la distancia de menor acercamiento d es menor en las braquistócronas respecto a los caminos rectos, como se observa también en la forma de las trayectorias. Además, el valor de la aceleración en ese punto de menor acercamiento siempre es cero, dado que la tangente de la trayectoria siempre es perpendicular al radio.

Respecto a los valores de las aceleraciones, que es lo que aquí nos concierne, hay que destacar dos puntos.

- Comparando las aceleraciones en la trayectoria recta, aquellas que corresponden a un menor d , es decir, que conectan dos puntos más alejados sobre la superficie y cuyo camino es más corto, se encuentran siempre por encima de las de menor d , es decir, para estos caminos la aceleración es en todo punto de la trayectoria mayor que para caminos más cortos, y por lo tanto, sus velocidades son mayores, con lo cual, los tiempos son menores.

- El mismo comportamiento puede observarse entre las aceleraciones de las braquistócronas (en magenta) y las de los caminos rectos (en rojo). Las primeras se encuentran siempre por encima, lo que implica que sus velocidades en efecto son siempre mayores y los tiempos, por consiguiente, menores.

VII. CONCLUSION

Como se ha mencionado, los modelos efectivos en física pueden llegar a tener un gran poder predictivo, a pesar de no estar describiendo la naturaleza real de los objetos. En el presente trabajo hemos encontrado, de manera exitosa, que los resultados de una función como ley de potencia decreciente se pueden ajustar muy acorde a los obtenidos usando un modelo más descriptivo del interior de la Tierra, al abordar el problema del túnel gravitacional. Si bien la forma del perfil densidad o del perfil de aceleración no es el mejor ajuste a los del modelo numérico (ver fig. 4 y 2), hay un gran acuerdo entre los perfiles de velocidades. Los tiempos de tunelamiento en un túnel conectando antípodas, que para la situación de densidad constante es de 42min[2], mientras que para una gravedad constante es de 37min[13], han dado como resultado 38min5s para el caso de densidad con un parámetro (siendo el exponente 0.54), y 38min11.20s para el caso de densidad con dos parámetros (siendo estos 9.14 y 0.18); respecto a los 38min11.26s que se encuentran con el conjunto de datos de PREM, por lo que nuestra función representa una descripción mucho más fiel a la Tierra que la primera aproximación de densidad constante, o que la aproximación de aceleración constante, que no dista mucho, a pesar de contener implicaciones físicas imposibles.

Adicional a ello se ha encontrado que los tiempos de tunelamiento de caminos rectos desplazados respecto al centro de la Tierra se superponen más para la densidad con dos parámetros que para la de un parámetro (ver fig. 7), con respecto a los tiempos que realmente se obtendrían en el interior según PREM. Esto era de esperar, dado que las distribuciones de masa realmente son diferentes, pero aún así el acuerdo entre ambos es sorprendente. Lo mismo se mantiene para la forma de las braquistócronas (fig. 8) y los tiempos en los caminos de las braquistócronas (fig. 9), en los que hay gran concordancia. Esto pareciera implicar que las funciones de densidad de masa encontradas no solo pueden dar cuenta de efectos exteriores, globales, sino también de ciertas características locales. Otra prueba de ello es que los perfiles de velocidad (fig. 5) también se encuentran en completo acuerdo a lo largo de todas las distancias desde el centro hasta la superficie, y en particular en el centro, donde

se espera una menor coincidencia se encuentran discrepancias porcentuales del y 2.3% para el perfil de densidad efectiva con un parámetro y del 0.9% para la función con dos parámetros.

Cabe mencionar, no obstante, que la densidad efectiva que aquí proponemos pretende ser una simplificación matemática con el mismo contenido físico de la igualmente aproximación propuesta por PREM, y no una descripción de la Tierra misma. Factores como la rotación de la Tierra, irregularidades en las direcciones angulares o el hecho de que la Tierra no es una esfera no están tenidos en cuenta, sin embargo, la libertad en la escogencia de estos parámetros permitiría, en principio, extender la función de densidad de masa a otros planetas o cuerpos esféricos no muy densos ni masivos (dado que el perfil, como ha sido planteado, tampoco es capas de dar cuenta de efectos relativistas) y simular sus interiores mediante una relación matemática simple. Para ello habría que partir por el valor local de $\bar{\rho}$, fijar una constante de "normalización" de manera que la integración sobre todo el radio de la masa total correcta (o la gravedad en la superficie), y variar los parámetros a conveniencia. El primero de ellos; el exponente, altera como tal la forma y concavidad de la función, y es fácil ver que a mayor exponente se adquieren valores de densidad más altos en distancias más cercanas al centro. Esto quiere decir que densidades efectivas con mayores exponentes pueden describir objetos con mayor concentración de masa en el interior, para los que se obtienen tiempos menores; y contrariamente, funciones con exponentes más pequeños describirían cuerpos con distribuciones de masa más uniformes, contentiendo como límite $b = 0$ el caso de densidad constante y un tiempo de tunelamiento máximo (42min con el $\bar{\rho}$ de la Tierra). En cuanto al parámetro c , su trabajo en la familia de funciones $Y_c = (1 - cx)^b$ para un b dado es moderar el valor de Y en 1 (que en nuestro caso es tomada como la superficie del planeta)

sin cambiar el valor en 0. Con esto, diferentes valores de c (en el rango $[0, 1]$) cambian la distribución de masa en regiones cercanas a la superficie. Nuevamente se obtiene como caso límite $c = 0$ el caso de densidad constante y tiempo máximo, mientras que el límite $c = 1$ nos resulta en la densidad efectiva de un parámetro donde la densidad en la superficie se anula y donde los tiempos de un determinado b son mínimos. De esta manera puede verse que el jugar con estos dos parámetros puede describir distribuciones de densidad que den lugar a tiempos de tunelamientos desde tan solo unos minutos hasta un valor máximo en cada planeta.

Ahora, lo anteriormente discutido es, al menos por ahora, solo una curiosidad. Faltará mucho para conocer lo suficientemente bien la densidad de otro cuerpo astronómico diferente a la Tierra para poder hacer un adecuado ajuste de parámetros, y quizá mucho más para encontrarle alguna utilidad al perfil de densidad efectivo en tales casos. No obstante, volviendo a la Tierra, de acuerdo a lo que se ha mencionado sobre el parámetro c y su efecto en la función de densidad, podría proporcionarse un papel más importante en aplicaciones que se desempeñen más en regiones cercanas a la superficie, de manera que sean ciertos valores de densidad o de cantidades físicas derivadas en las capas externas, lo que se usen para fijar los valores en las funciones, y no los tiempos de caída del túnel gravitacional.

Para resumir, el trabajo aquí desarrollado es un primer acercamiento a una propuesta con posiblemente múltiples aplicaciones en el ámbito pedagógico e investigativo, no solo para la física sino para ciencias relacionadas con la Tierra u otros cuerpos celestes.

Acknowledgments

We gratefully acknowledge...

-
- [1] , M. Selmke, "A note on the history of gravity tunnels," Am. J. Phys. 86, (2018)
 - [2] , G. Venezian, "Terrestrial Brachistochron," Am. J. Phys., 34, (1966)
 - [3] H. Goldstein, C.P. Poole, and J.L. Safko, "Classical Mechanics," Chap 2. Variational Principles, Addison-Wesley (2000)
 - [4] T. G. Concannon y G. Giordano, "Gravity tunnel drag," Online, <https://arxiv.org/pdf/1606.01852.pdf>, 2016
 - [5] , A. J. Solomon, "Sliding along a Chord through a Rotating Earth," Math. Mag. , 113 (2006)
 - [6] S. Iserman, "Free fall through the rotating and inhomogeneous Earth," Am. J. Phys. 87, 646 (2019)
 - [7] A. Simonic, "A note on a straight gravity tunnel through a rotating body," Am. J. Phys. 88, 499 (2020)
 - [8] R. Taillet, "Free falling inside flattened spheroids," Am. J. Phys. 86, 924 (2018)
 - [9] E. Parker, "A relativistic gravity train," Gen. Relativ. Gravit. 49:106 (2017)
 - [10] M. Sell, "The relativistic gravity train," Eur. J. Phys. 39, 3 (2018)
 - [11] W. D. Pesnell, "Flying through polytropes," Am. J. Phys., 84, (2016)
 - [12] A. Gjerløv, W. D. Pesnell "Orbits through polytropes," Am. J. Phys. 87, 452 (2019)
 - [13] Alexander R. Klotz, "The gravity tunnel in a non-uniform Earth," Am. J. Phys. 83, (2015)
 - [14] S. Iserman, "Analytical solution of gravity tunnels

- through an inhomogeneous Earth," Am. J. Phys. 87,(2019)
- [15] International Astronomical Union, "Selected Astronomical Constants," in The Astronomical Almanac Online (2016)
- [16] R. Snyder, "Twodensity model of the Earth," Am. J. Phys. 54, 511 (1986)
- [17] M. Dragoni, "Gravity in Earth's Interior," Phys. Teach. 58, 97 (2020)
- [18] Dziewonski, Adam M.; Anderson, Don L., "Preliminary reference Earth model," Physics of the Earth and Planetary Interiors,25, (1981)