Линейная алгебра

Бобень Вячеслав, Сиренева Ника
@darkkeks, @nih3kwo, GitHub
Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890) и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

2024 — 2025

Дисклеймер: с 19 лекции конспект может содержать большее количество ошибок, так как обновился недавно. Просьба сообщить о них в issues или самим исправить их в pull requests.

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Матрицы

Определение 1. *Матрица размера* $n \times m$ — это прямоугольная таблица высоты m и ширины n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

Краткая запись – $A = (a_{ij})$

Множество всех матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ (множество всех действительных чисел) — $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ или $\mathrm{Mat}_{n\times m}$

Определение 2. Две матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$ и $B \in \mathrm{Mat}_{p\times q}$ называются *равными*, если $m = p$, $n = q$, и соответствующие элементы равны

Пример. $\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$

1.2 Операции над матрицами

Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

- *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

- *Умножение на скаляр* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

Свойства суммы и произведения на скаляр

$\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $A + B = B + A$ (коммутативность)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность)
3) $A + 0 = 0 + A = A$, где

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — нулевая матрица.}$$

4) $A + (-A) = 0$
   $-A = (-a_{ij})$ – противоположная матрица
5) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7) $\lambda(\mu A) = \lambda(\mu A)$
8) $1A = A$

Упражнение на дом. *Доказать эти свойства.*

Замечание. Из свойств 1) – 8) следует, что $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$

1.3 Пространство $\mathbb{R}^n$, его отождествление с матрицами-столбцами высоты n

$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots, n\}$

$\mathbb{R}$ – числовая прямая

$\mathbb{R}^2$ – плоскость

$\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство

Договоримся отождествлять $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n

$(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *вектор столбец*

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \ldots, n \right\} = \mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$\left[x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right] \implies [x = y \iff x_i = y_i \ \forall i]$

$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x_i := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

1.4 Транспонирование матриц, его простейшие свойства

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — \textit{транспонированная матрица.}}$$

Свойства:
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

1.5 Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \end{pmatrix}$ — i-я строка матрицы A

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — j-й столбец матрицы A

1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:

A – матрица размера $m \times \underline{n}$

B – матрица размера $\underline{n} \times p$

$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где

$$C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B — условие согласованности матриц.

Пример. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \dots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \dots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_m & \dots & x_ny_m \end{pmatrix}$

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

2 Лекция 2

2.1 Отступление о суммах

Пусть $S_p, S_{p+1}, \dots, S_q$ – набор чисел.

Тогда, $\sum_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \dots + S_q$ – сумма по i от p до q

Например, $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$

Свойства сумм:

1. $\lambda \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda S_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (S_i + T_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i + \sum_{i=1}^{n} T_i$
3. $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} S_{ij}$ — сумма всех элементов матрицы $S = (S_{ij})$

2.2 Основные свойства умножения матриц

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$

1. $\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB+AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

2. $(A+B)C = AC + BC$ — правая дистрибутивность, доказывается аналогично.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность.

   Доказательство. $\underbrace{(AB)}_{u}C = x,\ A\underbrace{(BC)}_{v} = y.$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik}\cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk}\right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} (a_{il}b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il}v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

5. $\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}.$

   Доказательство.

$$\begin{aligned} x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\cdot a_{jk} = B^T_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

Умножение матриц не коммутативно.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение 3. $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ называется *квадратной матрицей* порядка n

Обозначение $M_n := \mathrm{Mat}_{n\times n}$
$A \in M_n$

2.3 Диагональные матрицы

Определение 4. Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \implies A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Лемма 2.1. $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

Доказательство.

1. $[AB]_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$
2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

∎

2.4 Единичная матрица и её свойства

Определение 5. Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка n.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$.
2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$.
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$.

2.5 След квадратной матрицы и его свойства

Определение 6. *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Свойства:

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
2. $\operatorname{tr} \lambda A = \lambda \operatorname{tr} A$.
3. $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$.
4. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$.

   Доказательство. $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^m x_{ii} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \operatorname{tr} y.\end{aligned}$$ ■

Пример. $A = (1,2,3), B = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

$tr(AB) = tr(1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6) = 32$

$tr(BA) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

2.6 Системы линейных уравнений.

Линейное уравнение: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$.
$a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ – коэффициенты.
$x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m уравнений, n неизвестных

Определение 7.

1. *Решение одного уравнения* – это такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановке которого в уравнение получаем тождество.
2. *Решение СЛУ* – такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения СЛУ.

Основная задача: решить СЛУ, т.е. найти все решения.

Пример. $n = m = 1$
$ax = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, x – неизвестная

1. $a \neq 0 \implies x = \frac{b}{a}$ – единственное
2. $a = 0 \implies 0x = b$
   $b \neq 0 \implies$ решений нет.
   $b = 0 \implies x$ – любое $\implies$ бесконечно много решений.

2.6.1 Совместные и несовместные системы

Определение 8. СЛУ называется
– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,
– *несовместной*, если решений нет.

2.6.2 Матричная форма записи СЛУ

$AX = B$.

$$A \in Mat_{m\times n}(R) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов}$$

$$B \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — столбец правых частей}$$

$$X \in \mathrm{Mat}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — столбец неизвестных}$$

3 Лекция 3

3.1 Расширенная матрицы системы линейных уравнений

$Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
Полная информация о СЛУ содержится в её *расширенной матрице*.

$$\big(A \mid b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

3.2 Эквивалентные системы

Определение 9. Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример. Рассмотрим несколько СЛУ

A) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

B) $\begin{cases} 2x_1 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

C) $x_1 + x_2 = 1 \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

A и B эквиваленты, так как обе имеют единственное решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
A и C не эквивалентны, так как C имеет бесконечно много решений.

3.3 Как решить СЛУ?

Идея: выполнить преобразование СЛУ, сохраняющее множество её решений, и привести её к такому виду, в котором СЛУ легко решается.

Пример. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$

3.3.1 Элементарные преобразования СЛУ и соответствующие преобразования строк её расширенной матрицы

тип	СЛУ	расширенная матрица
1.	К i-му уравнению прибавить j-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2.	Переставить i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3.	Умножить i-ое уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

1. $Э_1(i, j, \lambda)$: к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на λ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}$ $\forall k = 1, \dots, n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i, j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i, \lambda)$: умножить i-ю строку на λ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

3.3.2 Сохранение множества решений системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях

Лемма 3.1. Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

Доказательство. Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

$(\star) \to (\star\star)$	$(\star\star) \to (\star)$
$Э_1(i,j,\lambda)$	$Э_1(i,j,-\lambda)$
$Э_2(i,j)$	$Э_2(i,j)$
$Э_3(i,\lambda)$	$Э_3(i,\frac{1}{\lambda})$

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ■

3.4 Ступенчатые матрицы

Определение 10. Строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе $(\exists i : a_i \neq 0)$.

Определение 11. *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

Определение 12. Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.

2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

3.4.1 Улучшенный ступенчатый вид матрицы

Определение 13. М имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. М имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.2. *1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

Следствие. Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

Доказательство.

1. Алгоритм. Если М - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть j — его номер.

Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$

Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \ldots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \ldots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы M' (без первой строки и столбцов $1, \dots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.

Шаг 2: Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \dots, Э_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над a_{rj_r} равны 0.

Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

3.5 Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения слева на подходящую матрицу

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую “элементарную матрицу”.

- $Э_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на i-м j-м месте стоит λ, остальные элементы нули)

- $Э_2(i, j)$: $A \mapsto U_2(i, j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & i & & & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го и j-го столбца (на i-м j-м и j-м i-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i, \lambda)$: $A \mapsto U_3(i, \lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & i & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там λ, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

Упражнение на дом. Доказательство.

4 Лекция 4

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.
Было: элементарные преобразования строк в $(A \mid b)$ сохраняют множество решений.

4.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Прямой ход метода Гаусса.
Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем A к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Случай 1 $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в A есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ i-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

Случай 2 либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где j_i – индексы столбцов с ведущими элементами.

Подслучай 2.1 $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \quad \text{— единственное решение.}$$

Подслучай 2.2 $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ*.

Пример. Улучшенный ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

Главные неизвестные: x_1, x_3.
Свободные неизвестные: x_2, x_4.
$x_2 = t_1, x_4 = t_2$ – параметры.

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3t_1 - t_2 \\ x_2 = t1 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3t_1 - t_2 \\ t_1 \\ 4 + 2t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 4 + 2x_4 \end{cases}$$

Следствие. Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо 0 решений, либо одно решение, либо бесконечно много решений.

4.2 Однородные системы линейных уравнений

Определение 14. СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$.

Очевидный факт. Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Следствие. Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

Следствие. Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

Доказательство. В ступенчатом виде будет хотя бы одна свободная неизвестная. Придавая ей ненулевое значение, получим ненулевое решение. ■

4.3 Связь между множеством решений системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей однородной системы.

Частное решение СЛУ — это какое-то одно её решение.

Утверждение 4.1. *Пусть* $Ax = b$ *– совместная СЛУ,*
x_0 *– частное решение* $Ax = b$,
$S \subset \mathbb{R}^n$ *– множество решений ОСЛУ* $Ax = 0$,
$L \subset \mathbb{R}^n$ *– множество решений* $Ax = b$.
Тогда, $L = x_0 + S$, *где* $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$.

Доказательство.

1. Пусть $u \in L$ (u – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
2. Пусть $v \in S$ (v – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.

Значит, $x_0 + S = L$. ■

4.4 Матричные уравнения вида $AX = B$ и $XA = B$, общий метод их решения

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
   A и B известны, X – неизвестная матрица.
2. $XA = C$
   A и C известны, X – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим A к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где A' имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

4.5 Обратные матрицы

Определение 15. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к A, если $AB = BA = E$.
Обозначение: $B = A^{-1}$.

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно

   Доказательство. Пусть B, B' – две матрицы, обратные к A. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■

2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$

   Замечание. Доказывается на Лекции 8.

Следствие. A^{-1} является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

4.6 Перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$

Определение 16. *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя.

$$\sigma \colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}.$$

S_n – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

Запись:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Замечание. Количество всех перестановок длины n: $|S_n| = n!$

5 Лекция 5

5.1 Инверсии в перестановке

Обозначение: S_n – множество всех перестановок из n элементов.

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$

Определение 17. Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в σ, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

5.2 Знак и чётность перестановки

Определение 18. *Знак* перестановки σ – это число $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

Определение 19. Перестановка σ называется *четной*, если $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

Примеры.

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1
$\operatorname{sgn}(\sigma)$	1	-1
четность	четная	нечетная

σ	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1	2	3	2	1
$\operatorname{sgn}(\sigma)$	1	-1	1	-1	1	-1
четность	четная	нечетная	четная	нечетная	четная	нечетная

Замечание. число инверсий в $\sigma \in S_n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, равенство достигается при $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ n & n-1 & \dots & 1\end{pmatrix}$

5.3 Произведение перестановок

Определение 20. *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \dots, n\}$.

Пример.
$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$
$\rho\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$
Видно, что $\sigma\rho \neq \rho\sigma \implies$ произведение перестановок не обладает свойством коммутативности.

5.4 Ассоциативность произведения перестановок

Утверждение 5.1. *Умножение перестановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi\ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

Доказательство. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем:
$[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$.
$[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$. ■

5.5 Тождественная перестановка

Определение 21. Перестановка $id = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

Свойства:
$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.
$\operatorname{sgn}(id) = 1$.

5.6 Обратная перестановка и её знак

Определение 22. $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к σ перестановкой.

Свойства: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

5.7 Теорема о знаке произведения перестановок

Теорема 5.2. $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

Доказательство. Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i),\rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

"число инверсий в ρ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i,j)$

"число инверсий в $\sigma\rho$" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i,j)$

"число инверсий в σ" $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i,j)$ – Почему?

Когда $\{i,j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$, пара $\{\rho(i),\rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1,2,\dots,n\}$.

Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

$\alpha(i,j)$	0	0	1	1
$\beta(i,j)$	0	1	0	1
$\gamma(i,j)$	0	1	1	0

Вывод: $\alpha(i,j) + \beta(i,j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum\gamma(i,j)} = (-1)^{\sum\beta(i,j)+\sum\alpha(i,j)} = (-1)^{\sum\alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum\beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ∎

Следствие. $\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ∎

Упражнение на дом: *Показать, что число инверсий в σ^{-1} такое же, как в σ.*

5.8 Транспозиции, знак транспозиции

Пусть $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$, $i \neq j$.
Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что
$\tau_{ij}(i) = j$.
$\tau_{ij}(j) = i$.
$\tau_{ij}(k) = k \ \forall k \neq i, j$.

Определение 23. Перестановки вида τ_{ij} называются *транспозициями.*

Замечание. τ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau$.

Определение 24. Перестановки вида $\tau_{i,i+1}$ называются *элементарными траспозициями.*

Лемма 5.3. $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Доказательство. Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:
$\{i, j\}$
$\{i, k\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
$\{k, j\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$
Значит, всего инверсий $2(j-i-1)+1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

Следствие. При $n \geqslant 2$ отображение $\sigma \to \sigma\tau_{12}$ является биекцией между множеством четных перестановок в S_n и множеством нечетных перестановок в S_n.

Следствие. При $n \geqslant 2$ количество нечетных перестановок в S_n равно количеству четных перестановок в S_n и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 5.4. *Всякая перестановка $\sigma \in S_n$ может быть разложена в произведение конечного числа элементарных транспозиций.*

Доказательство.

$$\sigma \in S_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\sigma\tau_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

При умножении справа на $\tau_{i,i+1}$ в нижней строке меняются местами i-ый и $(i+1)$-ый элементы.

Тогда, домножив σ на подходящее произведение $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k$ элементарных траспозиций, можем добиться, что нижняя строка есть $(1, 2, \dots, n) \implies \sigma\tau_1\tau_2 \dots \tau_k = id$.

Теперь, домножая справа на $\tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$, получим $\sigma = \tau_k\tau_{k-1} \dots \tau_1$. ■

5.9 Определитель квадратной матрицы

Определение 25. Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

Другие обозначения: $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

5.10 Определители порядков 2 и 3

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

6 Лекция 6

Напомним что такое определитель:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{$\star$}$$

Замечание. Каждое слагаемое содержит ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

6.1 Свойства определителей

Свойство T $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho \ // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned}$$

■

Свойство 0 Если в A есть нулевая строка или нулевой столбец, то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Так как в каждом слагаемом ($\star$) присутствует элемент из каждой строки, то все слагаемые в ($\star$) равны 0 $\implies$ $detA = 0$. ■

Свойство 1 Если в A все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число λ, то $\det A$ тоже умножается на λ.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij} \ \forall j \implies$ в ($\star$) каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на λ. ■

Свойство 2 Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1} a'_{i2} \cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1} a''_{i2} \dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A_1 + \det A_2. \end{aligned}$$

■

Свойство 3 Если в A поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из A перестановкой p-ой и q-ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),\sigma(1)} \cdot a_{\tau(2),\sigma(2)} \dots a_{\tau(n),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)} \cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)} \dots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ уберем } \tau(i), \text{ переупорядочив элементы в произведении } // \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)} \cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)} \dots a_{n,(\sigma\tau)(n)} \\
&\quad // \text{ замена } \rho = \sigma\tau \; // \\
&= -\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot a_{1,\rho(1)} \cdot a_{2,\rho(2)} \dots a_{n,\rho(n)} \\
&= -\det A.
\end{aligned}$$

∎

Свойство 4 Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

∎

Свойство 5 Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– A не изменится $\implies \det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ∎

Определение 26. Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

Замечание. Всякая ступенчатая квадратная матрица верхнетреугольна.

Свойство 6 Если A верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Доказательство. В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

$$\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n.$$

$$\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},$$

но n уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k\ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

■

Следствие. $\det \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1a_2\dots a_4$.

Следствие. $\det E = 1$.

6.2 Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов)

$Э_1(i,j,\lambda)$: $\det A$ не меняется.
$Э_2(i,j)$: $\det A$ меняет знак.
$Э_3(i,\lambda)$: $\det A$ умножается на λ.

Алгоритм. Элементарными преобразованиями строк A приводится к ступенчатому ($\to$ верхнетреугольному) виду, в котором $\det A$ легко считается.

7 Лекция 7

7.1 Определитель с углом нулей

Предложение.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right), \ P \in M_k, \ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором P' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.
2. Элементарными преобразованиями строк в A, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором R' имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R.$$

■

7.2 Определитель произведения матриц

Теорема 7.1. $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

Доказательство. Выполним с матрицей A одно элементарное преобразование строк, получим матрицу A'.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с AB.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу B, либо домножив на B и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для AB:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

Случай 1 Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} & C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ & \implies [CB]_{(n)} = C_{(n)} B = (0 \dots 0) \\ & \implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

Случай 2 Последняя строка ненулевая:
$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица C имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,
$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.
Сокращая α получаем,
$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B.$$ ■

Замечание. Пусть $A \in M_n$, $A_{\text{ул}}$ – её улучшенный ступенчатый вид.
$$\det A \neq 0 \iff A_{\text{ул}} = E.$$

7.3 Дополнительные миноры и алгебраические дополнения к элементам квадратной матрицы

Определение 27. *Дополнительным минором* к элементу a_{ij} называется определитель $(n-1)\times(n-1)$ матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.
Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

Определение 28. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

7.4 Лемма об определителе матрицы, содержащей ровно один ненулевой элемент в некоторой строке

Лемма 7.2. Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Доказательство.
$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i-1$ раз, вытолкнем i-ю строку наверх.
$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\dots0 & a_{ij} & 0\dots0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим j-й столбец на первое место.
$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}.$

$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}.$ ■

7.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Теорема 7.3. *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – } \textit{разложение по } i\textit{-й строке.}$$

Аналогично, для любого фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,
$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – } \textit{разложение по } j\textit{-у столбцу.}$$

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.
$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства 2 определителей и леммы. ■

7.6 Лемма о фальшивом разложении определителя

Лемма 7.4.

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$.

Доказательство. В силу свойства T достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из A заменой k-й строки на i-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В B есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по k-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj}. \qquad \blacksquare$$

7.7 Обратная матрица, её единственность

Пусть дана $A \in M_n$.

Определение 29. Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к A, если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}.

Лемма 7.5. Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

Доказательство. Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C. \qquad \blacksquare$$

7.8 Невырожденные матрицы

Определение 30. Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

7.9 Определитель обратной матрицы

Лемма 7.6. Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

Доказательство. $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1$. $\blacksquare$

7.10 Присоединённая матрица

Определение 31. *Присоединенной* к A матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

7.11 Критерий обратимости квадратной матрицы, явная формула для обратной матрицы

Теорема 7.7. *A обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ A невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \widehat{A}$.*

Доказательство. Утверждение в одну сторону следует из леммы 2.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$. Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

■

8 Лекция 8

8.1 Следствия из критерия обратимости квадратной матрицы

Следствие. Если $AB = E$, то $BA = E$ (и тогда $A = B^{-1}$, $B = A^{-1}$).

Доказательство.

$$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$
$$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$

■

Следствие. $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе A, B обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказательство. Эквивалентность ($\iff$) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$ ■

8.2 Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

Теорема 8.1. *Если* $\det A \neq 0$, *то СЛУ* $(\star)$ *имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Доказательство. $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}.$$

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1 A^{(1)} + \dots + x_n A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&= x_1 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots A^{(n)} \right) \\
&\quad + x_2 \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&\quad + \dots + \\
&\quad + x_n \det \left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)} \right) \\
&= x_i \det A \qquad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.}
\end{aligned}$$ ■

8.3 Понятие поля.

Определение 32. *Полем* называется множество F, на котором заданы две операции "сложение" ($(a, b) \to a + b$) и "умножение" ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

8.4 Простейшие примеры.

$\mathbb{Q}$ – Рациональные числа.

$\mathbb{R}$ – Действительные числа.

$F_2 = \{0, 1\}$, сложение и умножение по модулю 2.

8.5 Построение поля комплексных чисел.

Ближайшая цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.
Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен x^2+1 имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

8.5.1 Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$
- $(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре (a,b) соответствует комплексное число $a+bi$:

- $(a,b) \iff a+bi$
- $(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
- $(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2\underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

8.5.2 Проверка аксиом

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0,0)$.
4. $-(a,b) = (-a,-b)$.
5. Дистрибутивность
$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)) &= (a_1+b_1i)((a_2+a_3)+(b_2+b_3)i)\\ &= (a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3)) + (a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3))i\\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i\\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i)\\ &= (a_1+b_1i)(a_2+b_2i) + (a_1+b_1i)(a_3+b_3i)\end{aligned}$$
6. Коммутативность умножения – из явного вида формулы.
$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$
7. Ассоциативность умножения
$$\begin{aligned}(a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3,b_3)\\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)\\ &= (a_1,b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3)\\ &= (a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3).\end{aligned}$$
8. $1 = (1,0)$.
9. $(a,b) \neq 0 \implies a^2+b^2 \neq 0$. Тогда, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

Проверка свойств

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$.
$a+b \leftrightarrow (a,0)+(b,0) = (a+b,0)$.
$ab \leftrightarrow (a,0)(b,0) = (ab,0)$
Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i = (0,1) \implies i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

8.6 Алгебраическая форма комплексного числа, его действительная и мнимая части.

Определение 33. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой*. Число i называется *мнимой единицей*.

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа z.

$b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа z.

Числа вида bi, где $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, называются *чисто мнимыми*.

8.7 Комплексное сопряжение.

Определение 34. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением*.

8.7.1 Свойства комплексного сопряжения

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Доказательство.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a + bi = z$.
- $\overline{z+w} = \overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i} = (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i = (a_1-b_1i)+(a_2-b_2i) = \overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i = \overline{zw}$. ∎

8.8 Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели.

Числу $z = a+bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (a, b). Сумме $z+w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение z относительно действительной оси.

9 Лекция 9

9.1 Модуль комплексного числа, его свойства

Определение 35. Число $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

Свойства

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).

   Пусть $z = a + bi$, $w = c + di$.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z| + |w| \\
\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leqslant \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \\
(a+c)^2 + (b+d)^2 &\leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac + bd &\leqslant \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
(ac)^2 + (bd)^2 + 2acbd &\leqslant (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\
2acbd &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 \\
0 &\leqslant (ad)^2 + (bc)^2 - 2abcd \\
0 &\leqslant (ad - bc)^2
\end{aligned}$$

3. $z\overline{z} = |z|^2$.

   $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
4. $|zw| = |z||w|$.

   $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = |z|^2|w|^2$.

Замечание. Из 3) следует, что для $\forall z \neq 0$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, то есть $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

9.2 Аргумент комплексного числа

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
Тогда, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right)$, при этом $\left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = 1$
Значит, $\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ являются синусом и косинусом некоторого угла.

Определение 36. *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

В геометрических терминах, φ есть угол между осью Ox и соответствующим вектором.

Замечание. При $z \neq 0$, аргумент определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. При $z = 0$, удобно считать что любое φ является аргументом.

9.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$Arg(z) :=$ множество всех аргументов числа z.
$arg(z) :=$ единственное значение из $Arg(z)$, лежащее в $[0; 2\pi)$.
$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$Arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \sin\varphi = \frac{b}{|z|}\}$
Тогда, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi \in Arg(z)$.

Определение 37. Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой.*

9.4 Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Предложение. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

■

Следствие. В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

В частности, $\frac{1}{|z_2|}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) = \frac{1}{|z_2|}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{\overline{z}_2}{|z_2|^2}$.

9.5 Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

Следствие. Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

Замечание. В комплексном анализе функция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^x$, доопределяется до функции $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to e^z$ с сохранением всех привычных свойств.

Доказывается $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\forall\varphi \in \mathbb{C}$ – формула Эйлера.

Тогда $\forall z \in \mathbb{C}$ представляется в виде $z = |z|e^{i\varphi}$, где $\varphi \in Arg(z)$ – *показательная форма.*

9.6 Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Определение 38. *Корнем степени n* (или *корнем n-й степени)* из числа z называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно n различных значений для ψ, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Замечание. Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Примеры.
$\sqrt{1} = \{\pm 1\}$
$\sqrt{-1} = \{\pm i\}$
$\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
$\sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\}$

9.7 Основная теорема алгебры комплексных чисел (без доказательства)

$\sqrt[n]{z} = \{$ корни многочлена $x^n - z\}$.

Теорема 9.1. *Всякий многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Пусть $f = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z_1 + a_0$, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, тогда $\exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0$.

Замечание. Свойство поля $\mathbb{C}$, сформулированное в теореме, называется *алгебраической замкнутостью.*

9.8 Деление многочленов с остатком

Пусть $\mathbb{F}$ – поле.
$\mathbb{F}[x]$:= все многочлены от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{F}$.
$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0 \implies \deg f = n$.
$\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

Определение 39. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *делится* на $g(x) \in F[x]$, если $\exists h(x) \in F[x]$, такой что $f(x) = g(x)h(x)$.

Если $f(x)$ не делится на $g(x)$, то можно поделить с остатком.

Предложение (деление с остатком)**.** Если $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$, то $\exists! q(x), r(x) \in F[x]$, такие что

$$\begin{cases} f(x) = q(x)g(x) + r(x) \\ \text{либо } r(x) = 0, \text{ либо } \deg r(x) < \deg g(x) \end{cases}$$

Пример. $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x + 1$.
$f(x) = (x^2 - x - 1)(x + 1) + 1$, $q(x) = (x^2 - x - 1)$, $r(x) = 1$.

9.9 Теорема Безу

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:
$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$
Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

Теорема 9.2. $r = f(c)$.

Доказательство. Подставить $x = c$ в $f(x) = (x - c)g(x) + r(x)$. ■

Следствие. Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

9.10 Кратность корня многочлена

Определение 40. *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое k такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

9.11 Утверждение о том, что всякий многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней с учётом кратностей

Следствие. Пусть $f(z) \in F[z]$, $\deg f = n \geqslant 1$.
$f(x) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.
$c_1, \dots c_s$ – корни f, $k_1, \dots, k_s$ – их кратности.

Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей:

$$f(x) = a_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s}.$$

Иными словами, $f(z)$ имеет ровно n корней с учетом кратностей.

10 Лекция 10

10.1 Векторные пространства, простейшие следствия из аксиом

10.1.1 Определение векторного пространства

Фиксируем поле F (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

Определение 41. Множество V называется *векторным (линейным) пространством* над полем F, если на V заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V \to V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists - x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

Определение 42. Элементы векторного пространства называются (абстрактными) *векторами.*

Пример.

1. $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$ (или F над F).
2. Пространство $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ (или F^n над F) реализованное как пространство столбцов или строк длины n.
3. $\mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.
4. $F[x]$ – многочлены то переменной x с коэффициентами в $\mathbb{R}$.
5. Пространство функций на множестве M с значениями в F:

   $f \colon M \to \mathbb{R}$

   - сложение $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$.
   - умножение на скаляр $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

   – это векторное пространство над F.

   Например, множество всех функций $[0, 1] \to R$.

10.1.2 Простейшие следствия из аксиом

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.

   Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

2. Элемент $-x$ единственный.

   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то

$$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$

3. $\alpha \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

   Рассмотрим равенство $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Домножив на α получаем $\alpha(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \alpha \overrightarrow{0}$.

   Раскроем скобки, $\alpha \overrightarrow{0} + \alpha \overrightarrow{0} = \alpha \overrightarrow{0}$.

   Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha \overrightarrow{0}$, получим $\alpha \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

   Рассмотрим равенство $x + (-x) = \overrightarrow{0}$.

$$x + (-x) = \overrightarrow{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(ax).$$

5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.

   Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\overrightarrow{0}$.

6. $(-1) \cdot x = -x$.

   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на x получаем $(1 + (-1))x = 0x$.

   Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.

   Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

10.2 Подпространства векторных пространств

Пусть V – векторное пространство над F.

Определение 43. Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в V), если

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

Замечание. Всякое подпространство само является векторным пространством относительно тех же операций.

Пример.

1. $\{\overrightarrow{0}\}$ и V – всегда подпространства в V.

   они называются *несобственными* подпространствами, остальные называются *собственными.*

2. Множество всех верхнетреугольных, нижнетреугольных, диагональных матриц в $M_n(F)$.

3. $F[x]_{\leqslant n}$ все многочлены в $F[x]$ степени $\leqslant n$ – подпространство в $F[x]$.

10.3 Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством в F^n

Предложение. Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в F^n.

Доказательство. Пусть S – множество решений ОСЛУ Ax = 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.

2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.

3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ∎

10.4 Линейная комбинация конечного набора векторов

Пусть V – векторное пространство над F и $v_1, \ldots, v_k \in V$ – набор векторов.

Определение 44. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

10.5 Линейная оболочка подмножества векторного пространства, примеры

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

Определение 45. *Линейной оболочкой* множества S называются множество всех векторов из V, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из S.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

Если $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ конечно и состоит из векторов $v_1, \ldots, v_k$, то еще пишут $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и говорят "линейная оболочка векторов $v_1, \ldots, v_k$".

Соглашение: $\langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

Пример.

1. $\langle \overrightarrow{0} \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ – прямая.

3. $V = \mathbb{R}^3$, v_1, v_2 – пара неколлинеарных векторов.

   Тогда, $\langle v_1, v_2 \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ – плоскость натянутая на v_1, v_2.

11 Лекция 11

Напомним, если V – векторное пространство над полем F, то при $S \subseteq V$, линейная оболочка
$\langle S \rangle = \{$все линейные комбинации конечных наборов векторов из $S\}$

Пример.

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots\ ,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle S \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = F^n$.

Так как для любого $x \in F^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.

11.1 Утверждение о том, что линейная оболочка системы векторов является подпространством объемлющего векторного пространства

Пусть V – векторное пространство, $S \subseteq V$.

Предложение. $\langle S \rangle$ является подпространством в V.

Доказательство.

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle \varnothing \rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in \langle S \rangle} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S \rangle$.

2. Пусть $v, w \in \langle S \rangle$:
   $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$,
   $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n \in \langle S \rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j) w_j$)

3. $v \in \langle S \rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1)v_1 + \dots + (\alpha\alpha_m)v_m \in \langle S \rangle$. ■

11.2 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Определение 46. Линейная комбинация $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ называется *тривиальной*, если $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ и *нетривиальной* иначе (то есть $\exists i : a_i \neq 0$ или $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$).

Пример. $v + (-v)$ – нетривиальная линейная комбинация векторов v и $-v$.

Определение 47.

1. Векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$).

2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

Соглашение. *Система векторов* – множество векторов, в котором возможны повторения.

Пример.

1. $S = \{\overrightarrow{0}\}$ $\quad 1 \cdot \overrightarrow{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $\implies$ $\overrightarrow{0}$ линейно зависимо.

2. $S = \{v\}$, $v \neq \overrightarrow{0}$ – линейно независимо.

   Пусть $\lambda v = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ – противоречие.

3. $S = \{v_1, v_2\} \implies S$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 пропорциональны (то есть либо $v_2 = \lambda_1 v_1$, $\lambda_1 \in F$, либо $v_1 = \lambda_2 v_2$, $\lambda_2 \in F$).

   Доказательство.

   ($\implies$) $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = \overrightarrow{0}$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.
   Если $\mu_1 \neq 0$, то $v_1 = -\frac{\mu_2}{\mu_1} v_2$.
   Аналогично для $\mu_2 \neq 0$.

   ($\impliedby$) $v_2 = \lambda_1 v_1 \implies \lambda_1 v_1 + (-1)v_2 = \overrightarrow{0} \implies v_1, v_2$ линейно зависимы.
   Аналогично для $v_1 = \lambda_2 v_2$. ■

4. $V = F^n$, $S = \{e_1, \dots, e_n\} \implies S$ линейно независимо.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

11.3 Критерий линейной зависимости конечного набора векторов

Предложение. Пусть $v_1, \dots, v_n \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}\,(\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

Доказательство.

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star) \implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n \implies$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \dots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с i-м скаляром $\neq 0$). ■

Следствие. Векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n \rangle$.

11.4 Основная лемма о линейной зависимости

Лемма 11.1. Пусть есть две системы векторов $v_1, \dots, v_m$ и $w_1, \dots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n$. Тогда векторы $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы.

Доказательство.

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{m1} v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$w_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{mn} v_m = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) = (v_1, \dots, v_m) A, \tag{$\star$}$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим ($\star$) справа на z:

$$(w_1, \dots, w_n) \cdot z = (v_1, \dots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{=\overrightarrow{0}} = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \dots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \dots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.

Следовательно, $w_1, \dots, w_n$ линейно зависимы. ∎

Пример. Любые $n+1$ векторов в F^n линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

11.5 Базис векторного пространства

Определение 48. Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства V, если

1. S линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

Пример. $e_1, \dots, e_n$ – это базис в F^n. Он называется *стандартным базисом* в F^n.

Замечание. Всякая линейно независимая система векторов является базисом своей линейной оболочки.

11.6 Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства

Определение 49. Векторное пространство V называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

11.7 Независимость числа элементов в базисе векторного пространства от выбора базиса

Предложение. V – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в V содержат одно и то же количество элементов.

Доказательство. V конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в S линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но S линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.

Пусть $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.

То есть $m = n$. ∎

11.8 Размерность конечномерного векторного пространства

Определение 50. *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

Пример.

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом V будет $\varnothing$.

12 Лекция 12

Пусть V – векторное пространство над полем F.
Обозначение $\dim V < \infty$ – V конечномерно.

12.1 Характеризация базисов в терминах единственности линейного выражения векторов

Утверждение 12.1. *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \dots, e_n$ *— базис* V *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

Доказательство.

$\implies$ Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$.
Тогда, $(x_1 - x'_1) e_1 + \dots + (x_n - x'_n) e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.
Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\impliedby$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0 e_1 + \dots + 0 e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис V. ∎

12.2 Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \tag{$\star$}$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n$.
$S \subseteq F^n$ – множество решений.
Знаем, что S – подпространство в F^n.

Определение 51. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

Замечание. У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

12.3 Метод построения фундаментальной системы решений

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A|\overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B|\overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть r – число ненулевых строк в B.
Тогда будет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.
Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_r &\text{ – главные неизвестные,} \\ x_{r+1}, \dots, x_n &\text{ – свободные.} \end{aligned}$$

Тогда, общее решение для ($\star$) имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11} x_{r+1} + c_{12} x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r} x_n \\ &x_2 = c_{21} x_{r+1} + c_{22} x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r} x_n \\ &\dots \\ &x_r = c_{r1} x_{r+1} + c_{r2} x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r} x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

Предложение. $u_1, \dots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

Доказательство.

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \dots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна α_k, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$.

2. $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$.

   “$\subseteq$” Верно, так как $u_1, \dots, u_{n-r} \in S$.

   “$\supseteq$” Пусть $u \in S$, тогда

$$u = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in F.$$

   Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
   Тогда, $v \in S$, но

$$v = \begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
   Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

   Значит $\langle u_1, \dots, u_{n-r} \rangle = S$. ■

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.4 Утверждение о возможности выбора из конечной системы векторов базиса её линейной оболочки

Пусть V – векторное пространство над F.
Наблюдение: если $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

Предложение. Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.
Индукция по m.

База $m = 1$: $S = \{v_1\}$.

Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.

Если $v_1 \neq 0$, то S линейно независимо.

Следовательно S – базис в $\langle S \rangle$.

Шаг Пусть доказано для $< m$, докажем для m.

Если $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \ldots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в S' можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ■

12.5 Дополнение конечной линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства

Предложение. Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в V можно дополнить до базиса всего пространства V.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ – данная линейно независимая система.
Так как $\dim V < \infty$, в V есть конечный базис $e_1, \ldots, e_n$.
Рассмотрим систему векторов $v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n$.
Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).
При этом:
1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \ldots, v_m, e_1, \ldots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \ldots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \ldots, v_m, e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$.
Докажем, что S' – базис в V.
По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.
Осталось доказать, что S' линейно независимо.
Пусть $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \cdots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.
Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.
Так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$.
Выберем k максимальным с этим свойством.
Тогда, e_{i_k} линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

Следствие. Если $\dim V = n$ и $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимая система, тогда $v_1, \ldots, v_n$ – базис V.

12.6 Лемма о добавлении вектора к конечной линейной независимой системе

Лемма 12.2. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Доказательство. Пусть $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq (0, \ldots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ по предложению. ■

13 Лекция 13

13.1 Размерность подпространства конечномерного векторного пространства

Пусть V – конечномерное векторное пространство.

Предложение. Если $U \subseteq V$ – подпространство V, тогда U тоже конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$.
Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

Доказательство. Пусть $n = \dim V$.
Построим в U конечный базис.
Если $U = \{\overrightarrow{0}\}$, то в качестве базиса берем $\varnothing$.
Далее считаем, что $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$.
Выберем $v_1 \in U \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Если $\langle v_1 \rangle = U$, то конец. Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$.
Если $\langle v_1, v_2 \rangle = U$, то конец.
Иначе, выберем $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$, и так далее.
Получаем систему векторов $v_1, v_2, \ldots$. Она линейно независима по лемме.

По основной лемме о линейной зависимости процесс закончится не позднее шага n, значит U конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$.
Если $\dim U = n$, то $v_1, \ldots, v_n$ – базис U. По следствию, если $v_1, \ldots, v_n$ – базис U, то $U = V$. ■

13.2 Ранг системы векторов

Пусть $\dim V < \infty$ и $S \subseteq V$ – система векторов.

Определение 52. *Рангом* системы векторов S называется число $\operatorname{rk} S$, равное наибольшему числу векторов в линейно независимой подсистеме из S.

$$\operatorname{rk} S = \max\{|S'| \mid S' \subseteq S \text{ – линейно независимая подсистема}\}.$$

13.3 Связь ранга системы векторов с размерностью её линейной оболочки

Предложение. $\operatorname{rk} S = \dim\langle S \rangle$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$.
Тогда существует линейно независимая подсистема $S' = \{v_1, \ldots, v_r\}$.
По определению ранга и лемме получаем $S \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.
Значит, $\langle S \rangle = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ (так как $v_1, \ldots, v_r \in S$).
Следовательно $\dim S = r$. ■

13.4 Ранг матрицы: столбцовый и строковый

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 53. *Столбцовым рангом* (или просто *рангом*) матрицы A называется ранг системы её столбцов

$$A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \subseteq F^n.$$

Обозначение: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\}$.

Определение 54. *Строковым рангом* матрицы A называется число $\operatorname{rk} A^T$, то есть ранг системы строк

$$A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \in F^n.$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Любые два столбца линейно независимы (не пропорциональны), то есть $\operatorname{rk} A \geqslant 2$.
Но, $A^{(2)} = \frac{1}{2}\left(A^{(1)} + A^{(3)}\right)$, значит $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ линейно зависимы $\implies \operatorname{rk} A = 2$.

13.5 Сохранение линейных зависимостей между столбцами матрицы при элементарных преобразованиях строк

Предложение. Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами матрицы. Если $A \rightsquigarrow B$ элементарным преобразованиями строк, то

$$\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.$$

В частности, при $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n$

$$A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_k)} \text{ линейно независимы } \iff B^{(i_1)}, \dots, B^{(i_k)} \text{ линейно независимы.}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 A^{(1)} + \dots + \alpha_n A^{(n)} = \overrightarrow{0} &\iff A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Ax = \overrightarrow{0} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ — решение ОСЛУ } Bx = \overrightarrow{0} \\
&\iff B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \iff \alpha_1 B^{(1)} + \dots + \alpha_n B^{(n)} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

■

13.6 Инвариантность столбцового и строкового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк и столбцов

Следствие. При элементарных преобразованиях строк (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

Предложение. При элементарных преобразованиях столбцов линейная оболочка $\langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ сохраняется.

Доказательство. Пусть $A \rightsquigarrow B$ элементарными преобразованиями столбцов.

Тогда,

$$B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \in \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Значит,

$$\langle B^{(1)}, \dots, B^{(n)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle.$$

Так как элементарные преобразования обратимы, то включение верно и в другую сторону. ■

Следствие. При элементарных преобразованиях столбцов (столбцовый) ранг матрицы сохраняется.

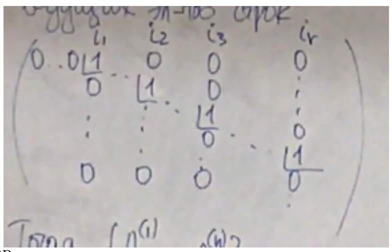
Следствие. Строковый ранг матрицы сохраняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов.

13.7 Столбцовый и строковый ранги матрицы, имеющей улучшенный ступенчатый вид

Предложение. Если A имеет улучшенный ступенчатый вид, то оба числа $\operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk} A^T$ равны числу ненулевых строк в A.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в A и пусть $i_1 < \dots < i_r$ – номера ведущих элементов строк.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & & i_1 & & i_2 & & i_3 & & i_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & \dots & 1 & & 0 & & \vdots \\
 & & & \vdots & & 0 & \dots & 1 & & 0 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & 0 & \dots & 1 \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$



жалкая попытка повторить шедевр

Тогда, $\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} \ni e_1, \ldots, e_r$, где

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

Значит, $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \supseteq \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$.
Заметим, что $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \in \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$, то есть $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle \subseteq \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$.

Теперь покажем, что строки $A_{(1)}, \ldots, A_{(r)}$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_1 A_{(1)} + \cdots + \alpha_r A_{(r)} = \overrightarrow{0}\,(\star)$.
$\forall k = 1, \ldots, r$ на месте i_k в левой части $(\star)$ стоит α_k, значит $\alpha_k = 0$.
То есть $\alpha_i = 0\ \forall i$, следовательно $A_{(1)}, \ldots, A_{(r)}$ линейно независимы.
$\implies \operatorname{rk} A^T = r$. ∎

13.8 Равенство столбцового и строкового рангов матрицы

Теорема 13.1. *Пусть $A \in Mat_{m \times n}(F)$, тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$, причем оба числа равны количеству строк в ступенчатом виде матрицы A.*

Доказательство. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$ следует из следствий, предыдущего предложения и теоремы о приведении матрицы к улучшенному ступенчатому виду.

Остальное вытекает из предложения и того, что при переходе от ступенчатого виду к улучшенному ступенчатому виду число ненулевых строк сохраняется. ∎

13.9 Связь ранга квадратной матрицы с её определителем

Следствие. Пусть $A \in M_n(F)$ – квадратная матрица. Тогда,

$$\operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0,$$
$$\operatorname{rk} A < n \iff \det A = 0.$$

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк $\operatorname{rk} A$ сохраняется, условия $\det A \neq 0$ и $\det A = 0$ тоже.

Следовательно, достаточно доказать для ступенчатых матриц. В этом случае

$$\operatorname{rk} A = n \iff n \text{ ненулевых строк} \iff \det A \neq 0,$$
$$\operatorname{rk} A < n \iff \text{ есть нулевые строки} \iff \det A = 0.$$ ∎

13.10 Подматрицы

Определение 55. *Подматрицей* матрицы A называется всякая матрица, получающаяся из A вычёркиванием каких-то строк и каких-то столбцов.

13.11 Связь рангов матрицы и её подматрицы

Предложение. S подматрица $\implies \operatorname{rk} S \leqslant \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rk} S = r$, значит в S есть линейно независимая система из r столбцов. Но тогда соответствующие r столбцов в матрице A будут и подавно линейно независимы. ∎

14 Лекция 14

14.1 Миноры

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$.

Определение 56. *Минором* матрицы A называется определитель всякой квадратной подматрицы в A.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- 6 миноров порядка 1,
- 3 минора порядка 2
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$

14.2 Теорема о ранге матрицы

Теорема 14.1. *Для любой $A \in Mat_{m\times n}(F)$ следующие 3 числа равны:*
(1) $\mathrm{rk}\, A$ (столбцовый ранг),
(2) $\mathrm{rk}\, A$ (строковый ранг),
(3) наибольший порядок ненулевого минора в A.

Доказательство. (1) = (2) – уже знаем.
Пусть S – квадратная подматрица в A порядка r и $\det S \neq 0$. Тогда $r = \mathrm{rk}\, S \leqslant \mathrm{rk}\, A$. Отсюда, (3) $\leqslant$ (1).

Пусть теперь $\mathrm{rk}\, A = r$. Найдем в A ненулевой минор порядка r.
Так как $\mathrm{rk}\, A = r$, в A есть r линейно независимых столбцов $A^{(i_1)}, \dots, A^{(i_r)}$.
Составим из них матрицу B. Тогда $\mathrm{rk}\, B = r$.
Так как (1) = (2) для B, то в B можно найти r линейно независимых строк.
Пусть S – подматрица в B, составленная из этих строк.
S – квадратная подматрица порядка r и $\mathrm{rk}\, S = r \implies \det S \neq 0 \implies$ нашли. Значит, (3) $\geqslant$ (1).

Итог: (3) = (1). ∎

14.3 Приложения ранга матрицы к исследованию СЛУ

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $b \in F^m$, $x \in F^n$ – столбец неизвестных.

$$Ax = b. \tag{$\star$}$$

$(A \mid b)$ – расширенная матрица.

14.3.1 Теорема Кронекера-Капелли

Теорема 14.2 (Кронекера-Капелли)**.** *СЛУ ($\star$) совместна* $\iff \mathrm{rk}(A \mid b) = \mathrm{rk}\, A$.

Доказательство. При элементарных преобразованиях строк
– сохраняется множество решений,
– сохраняются числа $\mathrm{rk}(A \mid b)$ и $\mathrm{rk}\, A$.

Следовательно, вопрос сводится к ситуации когда A имеет ступенчатый вид.
В ступенчатом виде СЛУ совместна тогда и только тогда, когда нет строк вида $(0, \dots, 0 \mid \underbrace{\star}_{\neq 0})$.

То есть матрицы $(A \mid b)$ и A имеют одно и то же число ненулевых строк.
Значит, $\mathrm{rk}(A \mid b) = \mathrm{rk}\, A$. ∎

14.3.2 Критерий существования единственного решения у совместной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Теорема 14.3. *Пусть СЛУ ($\star$) совместна. Тогда, она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\, A = n$, где n – число неизвестных.*

Доказательство. Снова все сводится к ситуации, когда $(A \mid b)$ имеет ступенчатый вид.
Тогда, единственное решение $\iff$ нет свободных неизвестных $\iff$ ступенек ровно n $\iff \mathrm{rk}\, A = n$. ∎

14.3.3 Критерий существования единственного решения у системы линейных уравнений с квадратной матрицей коэффициентов в терминах её определителя

Следствие. Пусть A квадратна (то есть $m = n$). Тогда СЛУ ($\star$) имеет единственное решение $\iff$ $\det A \neq 0$.

Доказательство. Единственное решение $\iff$ $\operatorname{rk} A = n$ $\iff$ $\det A \neq 0$. ■

Замечание. Это единственное решение равно $x = A^{-1}b$.

14.3.4 Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений в терминах ранга её матрицы коэффициентов

Пусть теперь СЛУ однородна, то есть $b = 0$.

$$Ax = 0. \tag{$\star$}$$

Пусть $S \subseteq F^n$ – множество её решений. Знаем, что S – подпространство в F^n.

Предложение. $\dim S = n - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Пусть r – число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A. Тогда $r = \operatorname{rk} A$.
Мы уже строили ФСР для ($\star$) из $n - r$ векторов.
Значит, $\dim S = n - r = n - \operatorname{rk} A$. ■

14.3.5 Реализация подпространства в F^n в качестве множества решений однородной системы линейных уравнений

Пусть $b_1, \dots, b_p \in F^n$,

$$B := (b_1, \dots, b_p) \in \operatorname{Mat}_{n \times p}(F).$$

Пусть $a_1, \dots, a_q \in F^n$ — ФСР для ОСЛУ $B^T x = 0$.

$$A := (a_1, \dots, a_q) \in \operatorname{Mat}_{n \times q}(F).$$

Предложение. $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$ есть множество решений ОСЛУ $A^T x = 0$.

Доказательство. Пусть $S = \{x \in F^n \mid A^T x = 0\}$.

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, q \quad B^T a_i = 0 &\implies B^T A = 0 \\ &\implies A^T B = 0 \implies A^T b_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Значит, $b_j \in S \quad \forall j = 1, \dots, p$.
Но тогда, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle \subseteq S$.
Пусть $r = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_p\} = \dim\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \operatorname{rk} B$.
При этом, $\operatorname{rk} A = q = n - r$.
Тогда, $\dim S = n - \operatorname{rk} A = n - (n - r) = r$.
Следовательно, $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = S$. ■

Следствие. Всякое подпространство в F^n является решением некоторой ОСЛУ.

14.4 Координаты вектора по отношению к фиксированному базису векторного пространства

Пусть V — векторное пространство, $\dim V = n$, $e_1, \dots, e_n$ — базис.
Знаем, что $\forall v \in V \ \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, такие что, $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Определение 57. Скаляры $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора v в базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пример. $V = F^n$.
$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Тогда, $x_1, \dots, x_n$ – координаты вектора v в стандартном базисе пространства F^n.

14.5 Описание всех базисов конечномерного векторного пространства в терминах одного базиса и матриц координат

Пусть теперь $e'_1, \ldots, e'_n$ – какой то другой набор векторов в V. Тогда,

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \cdots + c_{n1}e_n \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \cdots + c_{n2}e_n \\ &\ldots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \cdots + c_{nn}e_n. \end{aligned}$$

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C, \text{ где } C = (c_{ij}).$$

в j-м столбце матрицы C стоят координаты вектора e'_j в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Предложение. $(e'_1, \ldots, e'_n)$ – базис в $V \iff \det C \neq 0$.

Доказательство.

$\implies$ $e'_1, \ldots, e'_n$ – базис, значит $(e_1, \ldots, e_n) = (e'_1, \ldots, e'_n) \cdot C' = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \cdot C'$.
Так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то $C \cdot C' = E \implies \det C \neq 0$.

$\impliedby$ $\det C \neq 0 \implies \exists C^{-1}$.
Достаточно доказать, что $e'_1, \ldots, e'_n$ линейно независимы.
Пусть

$$\alpha_1 e'_1 + \cdots + \alpha_n e'_n = 0.$$

Тогда,

$$(e'_1, \ldots, e'_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 \implies (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то

$$C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0.$$

Домножаем слева на C^{-1}, получаем

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

∎

14.6 Матрица перехода от одного базиса конечномерного векторного пространства к другому

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — два базиса в V,

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C,$$

при этом $\det C \neq 0$.

Определение 58. Матрица C называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

Замечание. Матрица перехода от $(e'_1, \ldots, e'_n)$ к $(e_1, \ldots, e_n)$ — это C^{-1}.

14.7 Формула преобразования координат вектора при замене базиса

Пусть $v \in V$, тогда

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \\ v &= x'_1 e'_1 + \cdots + x'_n e'_n. \end{aligned}$$

Предложение.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Имеем

$$v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны,

$$v = (e_1', \ldots, e_n') \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix} = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

Так как $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

■

15 Лекция 15

15.1 Сумма двух подпространств векторного пространства

Пусть V – векторное пространство над F.
$U, W \subseteq V$ – подпространства.
Тогда, $U \cap W$ – тоже подпространство. (можно проверить по определению)

Определение 59. *Суммой* подпространств U, W называется множество

$$U + W := \{u + w \mid v \in U, w \in W\}.$$

Упражнение. $U + W$ – подпространство.

Замечание. Имеем $U \cap W \subseteq U = U + 0 \subseteq U + W$.
Значит, $\dim(U \cap W) \leqslant \dim U \leqslant \dim(U + W)$.

15.2 Связь размерностей двух подпространств с размерностями их суммы и пересечения

Теорема 15.1. $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

Пример. Всякие две плоскости в $\mathbb{R}^3$ (содержащие 0) имеют общую прямую.
Здесь $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 2$, $\dim W = 2$.
При этом $\dim(U + W) \leqslant 3$.
Тогда, $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geqslant 2 + 2 - 3 = 1$.

Доказательство. Пусть $\dim(U \cap W) = p$, $\dim U = q$, $\dim W = r$.
Пусть $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ – базис в $U \cap W$.
Тогда, a можно дополнить до базиса в U и в W:
$b = \{b_1, \dots, b_{q-p}\}$ – такая система, что $a \cup b$ – базис в U.
$c = \{c_1, \dots, c_{r-p}\}$ – такая система, что $a \cup c$ – базис в W.

Докажем, что $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

1. $\langle a \cup b \cup c\rangle = U + W$:

   $v \in U + W \implies \exists u \in U, w \in W$, такие что $v = u + w$.

   $u \in U = \langle a \cup b\rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c\rangle$.

   $w \in W = \langle a \cup c\rangle \subseteq \langle a \cup b \cup c\rangle$.

   Значит, $v \in \langle a \cup b \cup c\rangle$.

2. $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

   Пусть $\underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p}_{x} + \underbrace{\beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p}}_{y} + \underbrace{\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_{r-p} c_{r-p}}_{z} = 0$, где $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in F$.

   Тогда, $z = -\underset{\in U}{x} - \underset{\in U}{y} \in U$.

   Но, $z \in W$, значит $z \in U \cap W$.

   То есть $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$, $\lambda_i \in F$.

   Тогда, $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p - \gamma_1 c_1 - \dots - \gamma_{r-p} c_{r-p} = 0$

   Так как $a \cup c$ линейно независимо, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \gamma_1 = \dots = \gamma_{r-p} = 0$ и $z = 0$.

   Следовательно, $x + y = 0$, то есть $\alpha_1 a_1 + \dots \alpha_p a_p + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{q-p} b_{q-p} = 0$.

   Так как $a \cup b$ линейно независимо, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_{q-p} = 0$.

   Получаем, что $a \cup b \cup c$ линейно независимо.

Итог: $a \cup b \cup c$ – базис в $U + W$.

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= |a| + |b| + |c| \\ &= p + q - p + r - p \\ &= q + r - p \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).\end{aligned}$$ ■

.

15.3 Сумма нескольких подпространств векторного пространства

Пусть $U_1, \dots U_k \subseteq V$ – подпространства.

Определение 60. *Суммой* подпространств $U_1, \dots U_k$ называется множество

$$U_1 + \dots + U_k = \{u_1 + \dots + u_k \mid u_i \in U_i\}.$$

Упражнение. Доказать, что $U_1 + \dots + U_k$ – подпространство.

Замечание. $\dim(U_1 + \dots + U_k) \leqslant \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

15.4 Линейно независимые подпространства, пять эквивалентных условий

Определение 61. Подпространства $U_1, \dots, U_k$ называются *линейно независимыми*, если $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$ из условия $u_1 + \dots + u_k = 0$ следует $u_1 = \dots = u_k = 0$.

Пример. Если $\dim U_i = 1$ и $U_i = \langle u_i \rangle$ $\forall i$, то $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы $\iff$ $u_1, \dots, u_k$ линейно независимы.

Теорема 15.2. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $U_1, \dots, U_k$ *линейно независимы.*

(2) всякий $u \in U_1 + \dots + U_k$ *единственным образом представим в виде* $u = u_1 + \dots + u_k$*, где* $u_i \in U_i$.

(3) Если $\mathbb{e}_i$ *— базис в* U_i $\forall i$*, то* $\underbrace{\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k}_{\text{объединение мультимножеств}}$ *— базис в* $U_1 + \dots + U_k$.

(4) $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

(5) $\forall i = 1, \dots, k \quad U_i \cap (U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k) = 0$.

Пример. Если $\mathbb{e}_1 = \{e_1, e_2\}, \mathbb{e}_2 = \{e_2, e_3\}$, то
- $\mathbb{e}_1 \cup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ – 3 элемента,
- $\mathbb{e}_1 \sqcup \mathbb{e}_2 = \{e_1, e_2, e_2, e_3\}$ – 4 элемента.

Доказательство. Пусть $\widehat{U}_i = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_k$.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Пусть $u_1 + \dots + u_k = u'_1 + \dots + u'_k$, где $u_i, u'_i \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_1}{(u_1 - u'_1)} + \underset{\in U_2}{(u_2 - u'_2)} + \dots + \underset{\in U_k}{(u_k - u'_k)} = 0 \implies u_i - u'_i = \dots = u_k - u'_k = 0$.

То есть, $u_1 = u'_1, \dots, u_k = u'_k$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Пусть $u \in U_1 + \dots + U_k$ – произвольный.

u единственным образом представим в виде $u = u_1 + \dots + u_k$, где $u_i \in U_i$,

u_i единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_i$.

Следовательно, u единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов из $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$.

То есть, $\mathbb{e}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{e}_k$ — базис в $U_1 + \dots + U_k$.

(3) $\Longrightarrow$ **(4)** Очевидно.

(4) $\Longrightarrow$ **(5)**

$$\begin{aligned} \dim(U_i \cap \widehat{U}_i) &= \dim U_i + \dim \widehat{U}_i - \dim(U_1 + \dots + U_k) \\ &\leqslant \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim U_{i-1} + \dim U_{i+1} + \dots + \dim U_k) - (\dim U_1 + \dots + \dim U_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(5) $\Longrightarrow$ **(1)** $u_1 + \dots + u_k = 0$, где $u_i \in U_i$.

Тогда, $\underset{\in U_i}{u_i} = \underbrace{-u_1 - \dots - u_{i-1} - u_{i+1} - \dots - u_k}_{\in \widehat{U}_i}$

Следовательно, $u_i \in U_i \cap \widehat{U}_i = 0 \implies u_i = 0$. ■

Следствие. Пусть $k = 2$, тогда
U_1, U_2 линейно независимы $\iff$ $U_1 \cap U_2 = 0$.

15.5 Разложение векторного пространства в прямую сумму нескольких подпространств

Определение 62. Говорят, что векторное пространство V разлагается в *прямую сумму* $U_1, \dots, U_k$, если

1. $V = U_1 + \dots + U_k$,
2. $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы.

Обозначение: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$.

Пример. Если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle$

15.6 Проекция вектора на подпространство вдоль дополнительного подпространства

Замечание. При $k = 2$:

1. $V = U_1 \oplus U_2 \iff \begin{cases} V = U_1 + U_2, \\ U_1 \cap U_2 = 0, \end{cases}$
2. $V = U_1 \oplus U_2 \implies \forall v \in V \ \exists! u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, такие что $v = u_1 + u_2$.
   Тогда, u_1 называется проекцией вектора v на U_1 вдоль U_2.
   Так же, u_2 называется проекцией вектора v на U_2 вдоль U_1.

16 Лекция 16

16.1 Линейные отображения векторных пространств

Пусть V, W — векторные пространства над F.

Определение 63. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,

2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

$\forall v_1, v_2, v \in V$, $\forall \lambda \in F$.

Упражнение. 1 и 2 эквивалентны тому, что
$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1\varphi(v_1) + \lambda_2\varphi(v_2)$.
$\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F$.

16.2 Примеры линейных отображений

Презентация (продублирована ниже)

16.2.1 Пример 0

$\varphi\colon V \to W$ — нулевое отображение,
$\varphi(v) := \vec{0} \quad \forall v \in V$

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.2 Пример 1

$\varphi\colon V \to V$ — тождественное отображение,
$\varphi(v) := v \quad \forall v \in V$.
Обозначение: $\varphi =: \mathrm{Id}$.

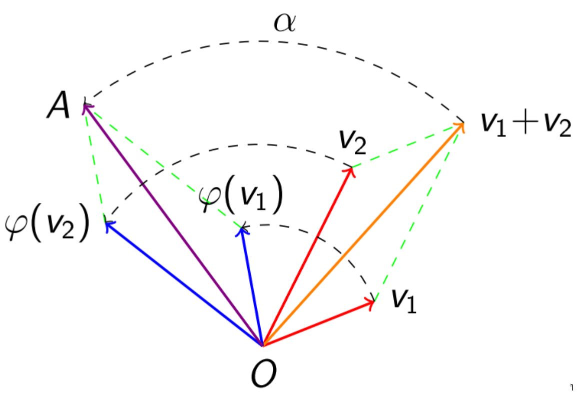
1) $\varphi(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot v = \lambda \cdot \varphi(v)$.

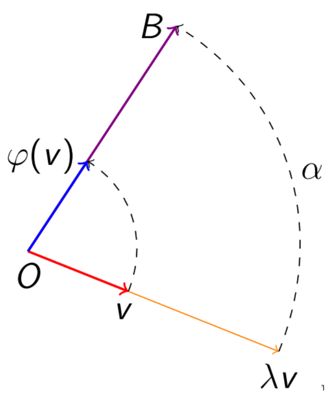
16.2.3 Пример 2

$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α вокруг начала координат.

Два красных вектора v_1, v_2 и их сумму $v_1 + v_2$ повернули на угол α, получив $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)$ а так же точку A. Свойство 1 говорит нам, что точка A это не просто сумма образов, она так же является образом суммы $v_1 + v_2$. То есть точку A можно получить двумя разными способами: сложить $\varphi(v_1)$ и $\varphi(v_2)$ или повернуть $v_1 + v_2$.

Вторая картинка показывает свойство 2: точка B это с одной стороны $\varphi(v) \cdot \lambda$, а с другой — образ $\lambda \cdot v$.



,


,

1) $\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = A = \varphi(v_1 + v_2)$,
2) $\varphi(\lambda \cdot v) = B = \lambda \cdot \varphi(v)$.

16.2.4 Пример 3

$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — ортогональная проекция на плоскость Oxy.

⟨ Конкурс на лучшую картинку ⟩

16.2.5 Пример 4

$\mathbb{R}[x]_{\leqslant n}$ — пространство многочленов от x степени $\leqslant n$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$.
$\Delta\colon f(x) \mapsto f'(x)$ — отображение дифференциирования.

1) $(f+g)' = f' + g'$,
2) $(\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot f' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1) и 2) $\implies$ Δ — линейное отображение $\mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

16.2.6 Пример 5

V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.
$(e_1, \dots, e_n)$ — базис V.
$\varphi\colon V \to F^n$

$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Покажем, что оно линейно:
Пусть

$$v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$w = y_1e_1 + \dots + y_ne_n \implies \varphi(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

1) $v + w = (x_1+y_1)e_1 + \dots + (x_n+y_n)e_n \implies \varphi(v+w) = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi(v) + \varphi(w)$,

2) $\lambda \cdot v = (\lambda x_1)e_1 + \dots + (\lambda x_n)e_n \implies \varphi(\lambda \cdot v) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\varphi(v)$.

16.3 Простейшие свойства линейных отображений

Здесь $\overrightarrow{0_V}$ — нулевой вектор в векторном пространстве V.

1. $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.

   Доказательство: $\varphi(\overrightarrow{0_V}) = \varphi(0 \cdot \overrightarrow{0_V}) = 0 \cdot \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$.

2. $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

   Доказательство: $\varphi(-v) + \varphi(v) = \varphi(-v+v) = \varphi(0) = \varphi(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W} \implies \varphi(-v) = -\varphi(v)$.

16.4 Изоморфизм векторных пространств

Определение 64. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом* если оно линейно и биективно.
Обозначение: $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

В примерах выше:

0. φ — изоморфизм $\iff \begin{cases} V = \{\vec{0}\}, \\ W = \{\vec{0}\} \end{cases}$
1. да
2. да
3. нет
4. φ — изоморфизм $\iff n = 0$
5. да!

16.5 Отображение, обратное к изоморфизму

Предложение. Если $\varphi\colon V \to W$ — изоморфизм, то φ^{-1} — тоже изоморфизм.

Доказательство. Биективность есть, так как φ^{-1} — обратное отображение.

Проверим линейность

1) $w_1, w_2 \in W \implies w_1 = \varphi(\varphi^{-1}(w_1)),\ w_2 = \varphi(\varphi^{-1}(w_2))$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(w_1+w_2) &= \varphi^{-1}\Big(\underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_1)\right)}_{w_1} + \underbrace{\varphi\left(\varphi^{-1}(w_2)\right)}_{w_2}\Big)\\ &= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)\right))\\ &= \varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2).\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\lambda\cdot w_1) &= \varphi^{-1}\left(\lambda\cdot\varphi\left(\varphi^{-1}\left(w_1\right)\right)\right)\\ &= \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi}_{Id}\left(\lambda\cdot\varphi^{-1}(w_1)\right))\\ &= \lambda\varphi^{-1}(w_1).\end{aligned}$$

■

16.6 Композиция двух линейных отображений, композиция двух изоморфизмов

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$, тогда $\varphi\circ\psi : U \to W$ — композиция.

Предложение.
1. Если φ, ψ линейны, то $\varphi\circ\psi$ тоже линейна.
2. Если φ, ψ — изоморфизмы, то $\varphi\circ\psi$ — тоже изоморфизм.

Доказательство.

1. (1) $(\varphi\circ\psi)(u_1+u_2) = \varphi(\psi(u_1+u_2)) = \varphi(\psi(u_1)+\psi(u_2)) = \varphi(\psi(u_1))+\varphi(\psi(u_2)) = (\varphi\circ\psi)(u_1)+(\varphi\circ\psi)(u_2)$.
   (2) $(\varphi\circ\psi)(\lambda u) = \varphi(\psi(\lambda u)) = \varphi(\lambda\psi(u)) = \lambda\varphi(\psi(u)) = \lambda(\varphi\circ\psi)(u)$.
2. из 1 следует, что $(\varphi\circ\psi)$ линейно, но при этом биективно как композиция двух биекций. ■

16.7 Изоморфные векторные пространства

Определение 65. Два векторных пространства V, W называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.

Обозначается: $V \simeq W$ (либо $V \cong W$).

16.8 Отношение изоморфности на множестве всех векторных пространств

Теорема 16.1. *Отношение изоморфности является отношением эквивалентности на множестве всех векторных пространств над фиксированным полем F.*

Доказательство.

1. Рефлексивность: $Id : V \xrightarrow{\sim} V$.
2. Симметричность: $V \simeq W \implies W \simeq V$ следует из Предложения 1.
3. Транзитивность: $U \simeq V$, $V \simeq W \implies U \simeq W$ следует из Предложения 2. ■

16.9 Классы изоморфизма векторных пространств

Определение 66. Классы эквивалентности называются *классами изоморфизма*.

Пример. $F[x]_{\leqslant n} \simeq F^{n+1}$:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

16.10 Критерий изоморфности двух конечномерных векторных пространств

Теорема 16.2. *Пусть V, W — два конечномерных векторных пространства над F.*
Тогда, $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Лемма 16.3. $\dim V = n \implies V \simeq F^n$.

Доказательство. Фиксируем базис $(e_1, \dots, e_n)$ в V.
Тогда, отображение $\varphi\colon V \to F^n$ из Примера 5 — изоморфизм. ∎

Лемма 16.4. Пусть $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$ и $e_1, \dots, e_n$ — базис V, тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W.

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда $\exists x_1, \dots, x_n \in F$, такие что $\varphi^{-1}(w) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.
Тогда, $w = \varphi\left(\varphi^{-1}(w)\right) = \varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) \implies W = \langle\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\rangle$.
Теперь докажем линейную независимость:
Пусть $\alpha_1\varphi(e_1) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = \overrightarrow{0}$.
Тогда, $\varphi(\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n) = \overrightarrow{0}$.
Применяя φ^{-1} получаем, $\alpha_1e_1 + \dots + \alpha_ne_n = \varphi^{-1}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
Итог: $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис в V. ∎

Доказательство теоремы.

$\Longleftarrow$ Пусть $\dim V = \dim W = n$. Тогда по лемме 1 $V \simeq F^n, W \simeq F^n$, значит $V \simeq W$.

$\Longrightarrow$ Пусть $V \simeq W$. Фиксируем изоморфизм $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$.
Тогда по лемме 2 получаем, что $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ — базис W, а значит $\dim V = n = \dim W$. ∎

Упражнение. Если $\dim V = n$, то все изоморфизмы $V \xrightarrow{\sim} F^n$ находятся в биекции с базисами пространства V.

16.11 Задание линейного отображения путём задания образов векторов фиксированного базиса

Пусть V, W — векторные пространства над F и $(e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в V.

Предложение.

1. Если $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение, то φ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$,
2. $\forall w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ линейное отображение φ, такое что, $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$.

Доказательство.

1. $v \in V \implies v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \implies \varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)$.
2. Зададим $\varphi\colon V \to W$ формулой $\varphi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$.
   Тогда φ — линейное отображение из V в W (упражнение).
   Единственность следует из 1 ∎

17 Лекция 17

17.1 Матрица линейного отображения

Пусть V, W — векторные пространства над F.
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — базис W.

Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
$\forall j = 1, \dots, n$

$$\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \dots + a_{mj} f_m = (f_1, \dots, f_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m) \cdot A$, где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Определение 67. A называется матрицей линейного отображения φ в базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.
Обозначение: $A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

В j-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$.

Обозначение 1. $\mathrm{Hom}(V, W) :=$ множество всех линейных отображений из V в W.

Следствие (из предложения 16.11)**.** При фиксированных базисах $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является биекцией между $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $\mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

17.2 Примеры

0. $\varphi(v) = 0 \ \forall v \implies \forall \mathbb{e}, \mathbb{f} \ A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$

3. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ — проекция на Oxy.
   $$\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{f} \text{ — стандартный базис в } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$, $f \to f'$.
   $\mathbb{e} = (1, x, \dots, x^n)$, $\mathbb{f} = (1, x, \dots, x^{n-1})$.
   $$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

5. $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$
   $$\left.\begin{array}{l} \mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathbb{f} = \text{стандартный базис} \end{array}\right\} \implies A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = E.$$

6. $\varphi\colon F^n \to F^m$.
   $\varphi(x) = A \cdot x$, $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.
   $\mathbb{e} =$ стандартный базис,
   $\mathbb{f} =$ стандартный базис.
   $A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = A$.

17.3 Связь координат вектора и его образа при линейном отображении

Предложение. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение,
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.
$v \in V \implies v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$,
$\varphi(v) = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $v = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Значит,

$$\varphi(v) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\varphi(v) = (f_1, \ldots, f_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $f_1, \ldots, f_m$ линейно независимы, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

■

17.4 Формула изменения матрицы линейного отображения между векторными пространствами V и W при замене их базисов

Пусть теперь $\mathbb{e}'$ — другой базис в V, $\mathbb{f}'$ — другой базис в W.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C_{\in M_n}$,
$\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot D_{\in M_m}$.
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A' = A(\varphi, \mathbb{e}', \mathbb{f}')$.

Предложение. $A' = D^{-1}AC$.

Доказательство.

$$(e'_1, \ldots e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C.$$

Применим φ,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \cdot C = (f_1, \ldots, f_m) \cdot A \cdot C$$

При этом,

$$(\varphi(e'_1), \ldots, \varphi(e'_n)) = (f'_1, \ldots, f'_m) \cdot A' = (f_1, \ldots, f_m) \cdot D \cdot A'.$$

Отсюда,

$$A \cdot C = D \cdot A' \implies A' = D^{-1} \cdot A \cdot C.$$

■

17.5 Операции сложения и умножения на скаляр на множестве всех линейных отображений между двумя векторными пространствами

Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\lambda \in F$.

Определение 68.

1. *Суммой* линейных отображений φ и ψ называется линейное отображение $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$.

2. Произведение φ на λ — это линейное отображение $\lambda\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, такое что $(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$.

Упражнение. $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ — действительно линейные отображения.

Упражнение. $\operatorname{Hom}(V, W)$ с этими операциями является векторным пространством над F.

17.6 Матрица суммы двух линейных отображений и произведения линейного отображения на скаляр

Зафиксируем базисы $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в V и $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ в W.

Предложение.

1. $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_\psi = A(\psi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$$
$$A_{\varphi+\psi} = A(\varphi + \psi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$$

2. $\lambda \in F, \varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$
$$A_{\lambda\varphi} = A(\lambda\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \quad \Longrightarrow \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$$

Доказательство.

1.
$$\begin{aligned}
(f_1, \ldots, f_m) \cdot A_{\varphi+\psi} &= ((\varphi + \psi)(e_1), \ldots, (\varphi + \psi)(e_n)) \\
&= (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) + (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n)) \\
&= (f_1, \ldots, f_m)A_\varphi + (f_1, \ldots, f_m)A_\psi \\
&= (f_1, \ldots, f_m)(A_\varphi + A_\psi).
\end{aligned}$$

   Следовательно, $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$.

2. Аналогично. ■

17.7 Изоморфизм между пространством $\operatorname{Hom}(V,W)$ и пространством $(m \times n)$-матриц, где $n = \dim V$, $m = \dim W$

Следствие. При фиксированном $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ отображение $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$ является изоморфизмом между $\operatorname{Hom}(V, W)$ и $\operatorname{Mat}_{m\times n}(F)$.

Доказательство. Биективность была выше. Линейность — из предыдущего предложения. ■

Следствие. $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = m \cdot n$.

17.8 Матрица композиции двух линейных отображений

Пусть $U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W$ — цепочка линейных отображений, а $\varphi \circ \psi : U \to W$ — их композиция,
$\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$\mathbb{g} = (g_1, \ldots, g_k)$ — базис U.
$A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$,
$A_\psi = A(\psi, \mathbb{g}, \mathbb{e})$,
$A_{\varphi\circ\psi} = A(\varphi \circ \psi, \mathbb{g}, \mathbb{f})$.
Тогда, $A_{\varphi\circ\psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$.

Доказательство. $(\psi(g_1), \ldots, \psi(g_k)) = (e_1, \ldots, e_n)A_\psi$. Тогда применяя φ,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \ldots, \varphi(\psi(g_k))) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))\, A_\psi = (f_1, \ldots, f_m)A_\varphi A_\psi.$$
С другой стороны,
$$(\varphi(\psi(g_1)), \ldots, \varphi(\psi(g_k))) = (f_1, \ldots, f_m)A_{\varphi\circ\psi}.$$
Значит, $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi\circ\psi}$. ■

17.9 Ядро и образ линейного отображения; утверждение о том, что они являются подпространствами в соответствующих векторных пространствах

Пусть $\varphi\colon V \to W$.

Определение 69. *Ядро* линейного отображения φ — это $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ линейного отображения φ — это $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Пример. $\Delta\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant n} \to \mathbb{R}[x]_{\leqslant n},\ f \mapsto f'$,
$\ker\Delta = \{f \mid f = \text{const}\}$,
$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}[x]_{\leqslant n-1}$.

Предложение.

1. Ядро — подпространство в V.
2. Образ — подпространство в W.

Доказательство.

1. (a) $\varphi(0_V) = 0_W$,
   (b) $v_1, v_2 \in \ker\varphi \implies \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0 \implies v_1 + v_2 \in \ker\varphi$,
   (c) $\lambda \in F, v \in V \implies \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \ker\varphi$.
2. (a) $0_W = \varphi(0_V) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \implies w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}\varphi$,
   (c) $\varphi \in F, w \in \operatorname{Im}\varphi \implies \exists v \in V : w = \varphi(v) \implies \lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \operatorname{Im}\varphi$. ■

18 Лекция 18

18.1 Критерий инъективности линейного отображения в терминах его ядра

Пусть V, W — векторные пространства над F,
$\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение.
Ядро: $\ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V$.
Образ: $\operatorname{Im}\varphi := \varphi(V) \subseteq W$.

Предложение.

(a) φ инъективно $\iff \ker\varphi = \{0\}$,

(b) φ сюръективно $\iff \operatorname{Im}\varphi = W$.

Доказательство.

(a) $\implies$ очевидно

$\impliedby$ Пусть $v_1, v_2 \in V$ таковы, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = 0$, а значит $v_1 - v_2 \in \ker\varphi$. Но тогда, $v_1 - v_2 = 0$, то есть $v_1 = v_2$.

(b) очевидно. ∎

Следствие. φ изоморфизм $\iff \begin{cases} \ker\varphi = \{0\}, \\ \operatorname{Im}\varphi = W. \end{cases}$

18.2 Характеризация изоморфизмов в терминах их ядер и образов

Пусть $U \subseteq V$ — подпространство, $u_1, \ldots, u_k$ — базис в U.

Лемма 18.1. Тогда, $\varphi(U) = \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle$. В частности, $\dim\varphi(U) \leqslant \dim U$ и $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim V$.

Доказательство. $u \in U \implies u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$, $\alpha_i \in F$, тогда

$$\varphi(u) = \alpha_1\varphi(u_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(u_k) \in \langle\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_k)\rangle\,.$$ ∎

18.3 Связь размерности образа линейного отображения с рангом его матрицы

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V,
$\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ — базис W,
$A = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f})$.

Теорема 18.2. $\operatorname{rk} A = \dim\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. По лемме, $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\rangle$. Поэтому, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.
Так как j-й столбец матрицы A составлен из координат вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$, то

$$\alpha_1\varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0 \iff \alpha_1 A^{(1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)} = 0.$$

Значит, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\} = \operatorname{rk}\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\} = \operatorname{rk} A$. ∎

Замечание. Число $\dim\operatorname{Im}\varphi$ называется *рангом* линейного отображения φ, обозначается $\operatorname{rk}\varphi$.

Следствие. $\operatorname{rk} A$ не зависит от выбора пары базисов $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$.

18.4 Инвариантность ранга матрицы относительно умножения на квадратную невырожденную матрицу слева или справа

Обозначение 2. $M_n^0(F) := \{C \in M_n(F) \mid \det C \neq 0\}$.

Следствие. Ранг матрицы не меняется при умножении слева и/или справа на невырожденную матрицу.

Доказательство. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}$, $C \in M_n^0$, $D \in M_m^0$, то A и $D^{-1}AC$ — это матрицы одного и того же линейного отображения в разных парах базисов. По теореме, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\left(D^{-1}AC\right)$. ∎

18.5 Свойство образов векторов, дополняющих базис ядра до базиса всего пространства

Предложение. Пусть $e_1, \dots, e_k$ — базис $\ker\varphi$ и векторы $e_{k+1}, \dots, e_n$ дополняют его до базиса всего V.
Тогда, $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ образуют базис в $\operatorname{Im}\varphi$.

Доказательство. $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_k), \varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle = \langle\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle$. (так как $\varphi(e_1) = \dots = \varphi(e_k) = 0$).
Осталось показать, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы.
Пусть $\alpha_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(e_n) = 0$, где $\alpha_i \in F$.
Тогда $\varphi(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n) = 0 \implies \alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker\varphi$.
Но тогда $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$, где $\beta_j \in F$.
Так как $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V, то $\alpha_i = \beta_j = 0\ \forall i, j$. ■

18.6 Теорема о связи размерностей ядра и образа линейного отображения

Теорема 18.3. $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = \dim V$.

Доказательство. Вытекает из предыдущего предложения так как в его доказательстве:
$\dim V = n$,
$\dim\ker\varphi = k$,
$\dim\operatorname{Im}\varphi = n - k$. ■

18.7 Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду с единицами и нулями на диагонали

Предложение. Пусть $\operatorname{rk}\varphi = r$. Тогда существует базис $\mathbb{e}$ в V и базис $\mathbb{f}$ в W, такие что

$$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & r & & & & n-r & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Доказательство. Пусть $e_{r+1}, \dots, e_n$ — базис $\ker\varphi$. Дополним его векторами $e_1, \dots, e_r$ до базиса всего V.
Положим $f_1 = \varphi(e_1)$, $\dots$, $f_r = \varphi(e_r)$, тогда $(f_1, \dots, f_r)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.
Дополним $f_1, \dots, f_r$ до базиса $f_1, \dots, f_m$ всего W.
Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{f} = (f_1, \dots, f_m)$ — искомые базисы. ■

Следствие. Если $A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(F)$, $\operatorname{rk} A = r$, то $\exists C \in M_n^0(F)$ и $D \in M_m^0(F)$, такие что

$$D^{-1}AC = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = B.$$

($\iff A = DBC^{-1}$).

Доказательство. Реализуем A как матрицу линейного отображения $\varphi\colon F^n \to F^m$ в некоторой паре базисов, тогда утверждение вытекает из предложения и формулы изменения матрицы линейного отображения при замене базисов. ■

18.8 Линейные функции на векторном пространстве

Определение 70. *Линейной функцией* (или *линейной формой*, или *линейным функционалом*) на V называется всякое линейное отображение $\alpha\colon V \to F$.

Обозначение 3. $V^* := \operatorname{Hom}(V, F)$ — множество всех линейных функций на V.

18.9 Примеры

1. $\alpha\colon F^n \to F$.
$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_i \in F$ — фиксированные скаляры.

2. $F(X, \mathbb{R})$ — все функции из линейного пространства X в $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$,
   $\alpha\colon F(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
   $\alpha(f) := f(x_0)$.
3. $\alpha\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$
   $\alpha(f) := \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$
4. $\alpha\colon M_n(F) \to F$
   $\alpha(X) := \operatorname{tr} X$

18.10 Двойственное (сопряжённое) векторное пространство, его размерность в конечномерном случае

Из общей теории линейных отображений:

1. V^* — векторное пространство (оно называется *сопряженным* или *двойственным*).
2. Если $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в V, то есть изоморфизм $V^* \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(F)$ (а это ни что иное, как строки длины n).
   $\alpha \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
   $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$
   $\alpha(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$
   $\alpha_i = \alpha(e_i)$ — коэффициенты линейной функции α в базисе $\mathbb{e}$.

Следствие. $\dim V^* = \dim V$ ($\implies V^* \simeq V$).

18.11 Двойственный базис

При $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим линейную функцию $\varepsilon_i \in V^*$, соответствующую строке $(0 \ldots 1 \ldots 0)$. Тогда $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис V^*, он однозначно определяется условием $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$. ($\delta_{ij}$ — символ Кронекера)

Определение 71. Базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ пространства V^*, определенный условием выше, называется базисом, *двойственным* (сопряженным) к базису $\mathbb{e}$.

Удобная запись условия:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}(e_1, \ldots, e_n) = E.$$

19 Лекция 19

19.1 Утверждение о том, что всякий базис сопряжённого пространства двойствен некоторому базису исходного пространства

$\varepsilon_i(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i$, поэтому ε_i называется i-й координатной функцией в базисе $\mathbb{e}$.

Предложение. Всякий базис пространства V^* двойствен некоторому базису пространства V.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ — базис пространства V^*. Фиксируем какой-то базис $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ пространства V, и пусть $\varepsilon' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ — соответствующий ему двойственный базис V^*.

Тогда, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ для некоторой матрицы $C \in M_n^0(F)$.

Положим $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n) \cdot C^{-1}$.
Тогда,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (e_1, \dots, e_n) = C \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \\ \dots \\ \varepsilon'_n \end{pmatrix} (e'_1, \dots, e'_n) C^{-1} = CEC^{-1} = E.$$

Значит, ε двойствен к $\mathbb{e}$. ∎

Упражнение. $\mathbb{e}$ определён однозначно.

19.2 Билинейные формы на векторном пространстве

Пусть V — векторное пространство над F.

Определение 72. *Билинейная форма* на V — это отображение $\beta\colon V \times V \to F$, линейное по каждому аргументу.

Линейность по 1-му аргументу
- $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in V$,
- $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

Линейность по 2-му аргументу
- $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \quad \forall x, y_1, y_2 \in V$,
- $\beta(x, \lambda y) = \lambda\beta(x, y) \quad \forall x, y \in V,\ \lambda \in F$.

19.3 Примеры

19.3.1

$V = F^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y.$

19.3.2

$V = F^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$;

$\beta(x, y) := \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$

19.3.3

$V = C[a, b]$;

$\beta(f, g) := \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$

19.4 Матрица билинейной формы по отношению к фиксированному базису

Далее считаем, что $\dim V = n < \infty$.
Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.

Определение 73. Матрицей билинейной формы β в базисе $\mathbb{e}$ называется такая матрица $B \in M_n$, что $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$.
Обозначение: $B(\beta, \mathbb{e})$.

Примеры Матрицы билинейных форм из примеров выше:

1. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = E$.
2. Пусть $\mathbb{e}$ — стандартный базис, тогда $B(\beta, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Формула вычисления значений билинейной формы в координатах

Пусть $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,
$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.
Тогда,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \beta\left(e_i, \ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \ \underbrace{\beta(e_i, e_j)}_{\beta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \beta_{ij} y_j \\ &= (x_1, \dots, x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

19.5 Существование и единственность билинейной формы с заданной матрицей

Предложение. Пусть $\mathbb{e}$ — фиксированный базис V.

1. Всякая билинейная форма β на V однозначно определяется матрицей $B(\beta, \mathbb{e})$.
2. $\forall B \in M_n(F)$ $\exists!$ билинейная форма β на V, такая что $B(\beta, \mathbb{e}) = B$.

Доказательство.

1. Следует из формулы выше.
2. Единственность следует из формулы выше. Докажем существование:
   Определим β по формуле выше.
   Тогда β — билинейная форма на V (упражнение).

$$\beta(e_i, e_j) = \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \\ \big(0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\big) \end{array} \cdot B \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \beta_{ij}.$$

   Действительно, $B(\beta, \mathbb{e}) = B$. ∎

19.6 Формула изменения матрицы билинейной формы при переходе к другому базису

$B = B(\beta, \mathbb{e})$.
Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots e'_n)$ — другой базис V.
$\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$, где $C \in M_n^0(F)$.
$\beta \colon V \times V \to F$ — билинейная форма.
$B' := B(\beta, \mathbb{e}')$.

Предложение. $B' = C^T B C$.

Доказательство.
$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \dots + x'_ne'_n,$$

$$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n = y'_1e'_1 + \dots + y'_ne'_n.,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$\beta(x, y) = (x_1 \dots x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n)C^TBC \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$$
$$\beta(x, y) = (x'_1 \dots x'_n)B' \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $B' = C^TBC$. ■

Следствие. Величина $\operatorname{rk} B$ не зависит от выбора базисов.

19.7 Ранг билинейной формы

Определение 74. Число $\operatorname{rk} B := \operatorname{rk} B(\beta, \mathbb{e})$ называется *рангом* билинейной формы β.

19.8 Симметричные билинейные формы

Определение 75. Билинейная форма β называется *симметричной*, если $\beta(x, y) = \beta(y, x)\ \forall x, y \in V$.

19.9 Критерий симметричности билинейной формы в терминах её матрицы в каком-либо базисе

Пусть $\mathbb{e}$ — произвольный базис V.

Предложение. β симметрична $\iff B = B^T$.

Доказательство.

$\implies$ $b_{ji} = \beta(e_j, e_i) = \beta(e_i, e_j) = b_{ij}$,

$\impliedby$ $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$,
$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$,
Тогда,

$$\beta(y, x) = (y_1 \dots y_n)B \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)B^T \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)B \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta(x, y).$$

■

19.10 Теорема о диагонализации симметричной билинейной формы

Пусть в поле F выполнено условие $1 + 1 \neq 0$ (то есть в F сложение двух единиц поля не даёт нам нулевой элемент поля).

Теорема 19.1. *$\forall$ симметричной билинейной формы $\beta \colon V \times V \to F$ $\exists$ базис $\mathbb{e}'$ в V, такой что матрица $B(\beta, \mathbb{e}')$ диагональна.*

Доказательство. Фиксируем какой-нибудь базис $\mathbb{e}$ в V, пусть $B = B(\beta, \mathbb{e})$. Тогда, согласно предложению, достаточно показать, что $\exists C \in M_n^0(F)$, такая что матрица $B' = C^TBC$ — диагональная.
Это возможно для любой B благодаря симметричному алгоритму Гаусса, который описан ниже. ■

19.11 Симметричные элементарные преобразования

$$B \overset{\text{одно эл. преобр. строк}}{\rightsquigarrow} B' = \underbrace{U}_{\text{элементарная матрица}} \cdot B \implies (B')^T = B^T \cdot U^T = B \cdot U^T$$

То есть такое же элементарное преобразование, но уже столбцов, реализуется умножением матрицы билинейной формы на U^T справа.

Определение 76. $B \rightsquigarrow B' = UBU^T$ — симметричное элементарное преобразование.

Сначала выполняется элементарное преобразование строк, а затем ровно такое же элементарное преобразование столбцов, или наоборот, в силу ассоциативности.

Заметим, что согласно предложению, если мы применим симметричное элементарное преобразование к матрице симметричной билинейной формы, мы получим матрицу той же симметричной билинейной формы, но в другом базисе.

Обозначение 4. $\widehat{Э}_i := Э_i \;\&\; Э_i'$ — симметричное элементарное преобразование, где

$Э_i$ — элементарное преобразование строк.

$Э_i'$ — соответствующее элементарное преобразование столбцов.

19.12 Симметричный алгоритм Гаусса

Шаг 1: Если $B^{(1)} = 0 (\implies B_{(1)} = 0)$, то матрица имеет вид $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{B} \end{array}\right) \implies$ идём на шаг 2.

Иначе: Случай 1 $b_{11} \neq 0$.

Тогда выполняем $\widehat{Э}_1(2, 1, -\frac{b_{21}}{b_{11}}), \dots, \widehat{Э}_1(n, 1, -\frac{b_{n1}}{b_{11}})$, $B_{\text{новая}} = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{B} \end{array}\right)$

Случай 2 $b_{11} = 0$.

Подслучай 2.1 $\exists b_{ii} \neq 0 \implies \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & \dots & \star & \dots \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \dots & b_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array}\right)$

Выполняем $\widehat{Э}_2(1, i)$, получаем $b_{11} \neq 0 \implies$ случай 1.

Подслучай 2.2 $b_{ii} = 0\ \forall i$, но $\exists j \colon b_{j1} \neq 0 \implies \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & \star & \dots & b_{j1} & \dots & \star \\ \hline \star & 0 & \dots & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j1} & \star & \dots & 0 & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \star & \dots & \star & \dots & 0 \end{array}\right)$

Выполняем $\widehat{Э}_1(1, j, 1) \implies$ на позиции (1,1) возникает $2 \cdot b_{j1} \neq 0$(ведь мы работаем с полем, где $2 \neq 0$) $\implies$ случай 1.

Шаг 2: Новая матрица имеет вид $B = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{B} \end{array}\right)$,

повторяем всё для $\widetilde{B}$.

В результате получаем цепочку элементарных матриц $U_1, \dots, U_k$, такую что матрица $B' = U_k \dots U_1 B U_1^T \dots U_k^T$ — диагональная.

Положим $C = U_1^T \dots U_k^T \implies C^T = U_k, \dots, U_1 \implies B' = C^T \cdot B \cdot C$.

Замечание. Матрицу C можно вычислить модифицировав алгоритм. Припишем единичную матрицу E справа от B и будем выполнять с ней только элементарные преобразования строк.

$$(B \mid E) \rightsquigarrow (B' \mid P), P = U_k \dots U_2 U_1 = C^T \implies C = P^T$$

Пример.

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Итог: $B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$B' = C^T \cdot B \cdot C$.

Замечание. Базис $\mathbb{e}'$ в котором матрица билинейного отображения β имеет диагональный вид, а также сам этот вид определены неоднозначно.

Пример.

$$B' = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_n \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix} \in M_n^0 \implies B'' = C'^T \cdot B' \cdot C' = \begin{pmatrix} b_1 c_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_n c_n^2 \end{pmatrix}$$

20 Лекция 20

20.1 Угловые миноры матрицы квадратичной формы

$G \in M_n, k \in \{1, \dots, n\} \rightsquigarrow G_k :=$ левый верхний $k \times k$ блок матрицы G

Определение 77. Величина $\delta_k(G) := \det G_k$ называется k-м угловым минором матрицы G

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \dots \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

20.2 Метод Якоби для симметричных билинейных форм

Пусть $\beta\colon V \times V \to F$ — симметричная билинейная форма, $\mathbb{e}$ — базис V, $B = B(\beta, \mathbb{e}), \delta_k = \delta_k(B)$

Теорема 20.1. *Предположим, что* $\delta_k \neq 0\ \forall k = 1, \dots, n-1$, *тогда* $\exists C \in M_n^0$ *вида*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & 1 & \ddots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Такая что матрица $B' = C^T B C$ *имеет вид* $B' = \operatorname{diag}\left(\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$.

Доказательство. Анализ симметричного алгоритма Гаусса.

На каждой итерации в случае 1 все симметричные элементарные преобразования имеют вид $\text{Э}_1(i, j, \lambda)$, причём всегда при $i > j$. При этом все угловые миноры сохраняются. Благодаря условию $i > j$ это элементарные преобразования 1 типа, не меняющие определителя для каждой G_k

Если на какой-то итерации возник не случай 1, то получаем

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k-1,k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \star \end{array}\right) k \leqslant n-1$$

Но тогда $\delta_k = 0 \implies$ противоречие.

Итог: на всех итерациях возникает случай 1 $\implies$ алгоритм приводит к диагональному виду $B' = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$.

$$\delta_k(B') = d_1 \cdot \dots \cdot d_k = \delta_k(B) \implies d_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \implies B' = \operatorname{diag}(\delta_1, \frac{\delta_2}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}})$$

Причём при $i > j$, $\widehat{\text{Э}}_1(i, j, \lambda)\colon B \mapsto U B U^T$, где U — единичная матрица с λ на i-ой строке в j-ом столбце.

$$C = U_1^T U_2^T \dots U_S^T$$

Очевидно, что перемножение матриц такого типа будет давать верхнюю унитреугольную матрицу C. ■

Замечание. Матрица вида $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется верхней унитреугольной

Замечание. В доказательстве не использовалось свойство $1 + 1 \neq 0$, то есть свойство работает для любого поля.

20.3 Квадратичные формы на векторном пространстве

Пусть $\beta\colon V\times V\to F$ — билинейная форма на V.

Определение 78. Отображение $Q_\beta\colon V\to F$, $Q_\beta(x)=\beta(x,x)$, называется *квадратичной формой*, ассоциированной с билинейной формой β.

Пусть $\mathbb{e}$ — базис V, $x=x_1e_1+\dots x_ne_n$, $B=B(\beta,\mathbb{e})$.
Тогда,

$$Q_\beta(x)=(x_1\dots x_n)B\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^n b_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_{ij}+b_{ji})x_ix_j.$$

20.4 Примеры

20.4.1

$V=F^n$, $\beta(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n\implies Q_\beta(x)=x_1^2+\dots+x_n^2$.

20.4.2

$V=F^2$, $\beta(x,y)=2x_1y_2\implies Q_\beta(x)=2x_1x_2$.
Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$.

20.4.3

$V=F^2$, $\beta(x,y)=x_1y_2+x_2y_1\implies Q_\beta(x)=2x_1x_2$.
Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(\beta,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

20.5 Соответствие между симметричными билинейными формами и квадратичными формами

Предложение. Пусть в поле F выполнено условие $1+1\neq 0$. Тогда отображение $\beta\mapsto Q_\beta$ является биекцией между симметричными билинейными формами на V и квадратичным формами на V.

Доказательство.

Сюръективность Q — квадратичная форма $\implies Q=Q_\beta$ для некоторой билинейной формы на V.

То есть $Q(x)=\beta(x,x)\ \forall x\in V$.

Положим $\sigma(x,y)=\frac{1}{2}\left[\beta(x,y)+\beta(y,x)\right]$, тогда σ — симметричная билинейная форма.

$$Q_\sigma(x)=\sigma(x,x)=\frac{1}{2}\left[\beta(x,x)+\beta(x,x)\right]=\beta(x,x)=Q_\beta(x)\implies Q_\sigma=Q_\beta.$$

Инъективность Пусть Q_β — квадратичная форма, соответствующая симметричной билинейной форме β.

$$Q_\beta(x+y)=\beta(x+y,x+y)=\underbrace{\beta(x,x)}_{Q_\beta(x)}+\underbrace{\beta(x,y)+\beta(y,x)}_{\text{равны между собой}}+\underbrace{\beta(y,y)}_{Q_\beta(y)}\implies\beta(x,y)=\tfrac{1}{2}\left[Q_\beta(x+y)-Q_\beta(x)-Q_\beta(y)\right].$$

■

20.6 Симметризация билинейной формы и поляризация квадратичной формы

Замечание.

1. Билинейная форма $\sigma(x,y)=\frac{1}{2}\left(\beta(x,y)+\beta(y,x)\right)$ называется *симметризацией* билинейной формы β.
   Если B и S — матрицы билинейных форм β и σ в некотором базисе, то $S=\frac{1}{2}(B+B^T)$.
2. Симметричная билинейная форма $\beta(x,y)=\frac{1}{2}\left[Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right]$ называется *поляризацией* квадратичной формы Q.

Далее считаем, что $1+1\neq 0$ в F если не оговорено обратное.

Определение 79. Матрицей квадратичной формы Q в базисе $\mathbb{e}$ называется матрица соответствующей симметричной билинейной формы (поляризации) в базисе $\mathbb{e}$.
Обозначение: $B(Q,\mathbb{e})$.

Пример. Пусть $Q(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.
Если $\mathbb{e}$ — стандартный базис, то $B(Q,\mathbb{e})=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

20.7 Канонический вид квадратичной формы

Определение 80. Квадратичная форма Q имеет в базисе $\mathbb{e}$ *канонический вид*, если $B(Q, \mathbb{e})$ диагональна.

Если $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $Q(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$.

20.8 Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду.

Теорема 20.2. $\forall$ *квадратичной формы* $Q(x)$ $\exists$ *базис, в котором она принимает канонический вид.*

Доказательство. $\forall$ квадратичной формы $\exists$ ассоциированная с ней симметричная билинейная форма. Для симметричной билинейной формы по теореме $\exists$ базис, где она имеет диагональный вид. Соответственно, ассоциированная с ней квадратичная форма в этом базисе будет иметь канонический вид. ■

20.9 Нормальный вид квадратичной формы над полем $\mathbb{R}$

Определение 81. Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ имеет *нормальный вид* в базисе $\mathbb{e}$, если в этом базисе

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2,$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$.

20.10 Приведение квадратичной формы над $\mathbb{R}$ к нормальному виду

Следствие. Для всякой квадратичной формы Q над $\mathbb{R}$ существует базис, в котором Q имеет нормальный вид.

Доказательство. Знаем, что $\exists$ базис $\mathbb{e}$, такой что $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$, то есть в координатах это $Q(x) = b_1 x_1^2 + \dots + b_n x_n^2$.

Положим $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$, где

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|b_i|}}, & b_i \neq 0 \\ 1, & b_i = 0 \end{cases}.$$

Тогда, взяв $B(Q, \mathbb{e}') = C^T B C = \operatorname{diag}(c_1^2 b_1, \dots, c_n^2 b_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где

$$\varepsilon_i = \operatorname{sgn} b_i = \begin{cases} 1, & b_i > 0 \\ 0, & b_i = 0 \\ -1, & b_i < 0 \end{cases}.$$

Это соответствует замене координат $x_i = c_i \cdot x_i'$ ■

Замечание. Для $F = \mathbb{C}$ аналогичные рассуждения показывают, что $\exists$ базис, в котором Q имеет вид (2), где $k = \operatorname{rk} Q$.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2, \dots, x_k^2. \tag{2}$$

21 Лекция 21

21.1 Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $F = \mathbb{R}$.
Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма.
Можно привести к нормальному виду

$$Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Здесь $i_+ := s$ — положительный индекс инерции квадратичной формы Q,
$i_- := t$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы Q.

21.2 Закон инерции

Теорема 21.1. *Числа i_+ и i_- не зависят от базиса в котором Q принимает нормальный вид.*

Доказательство. $s + t = \operatorname{rk} Q$, то есть не зависит от выбора базиса. Следовательно, достаточно показать, что число s определено однозначно.

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_{s+t}^2.$$

Пусть $\mathbb{e}' = (e_1', \dots, e_n')$ — другой базис, в котором Q принимает нормальный вид

$$Q = x_1'^2 + \dots + x_{s'}'^2 - x_{s'+1}'^2 - \dots - x_{s'+t'}'^2.$$

Предположим, что $s \neq s'$, можно считать что $s > s'$.
Положим $L := \langle e_1, \dots, e_s \rangle$, $\dim L = s$,
$L' := \left\langle e_{s'+1}', \dots, e_n' \right\rangle$, $\dim L' = n - s'$.

Так как $L + L' \subseteq V$, то $\dim (L + L') \leqslant n$.
Тогда, $\dim (L \cap L') \geqslant s + (n - s') - n = s - s' > 0$.

Значит, $\exists$ вектор $v \in L \cap L'$, такой что $v \neq 0$.
Теперь:

1. Так как $v \in L$, то $Q(v) > 0$,
2. Так как $v \in L'$, то $Q(v) \leqslant 0$.

Противоречие. ■

21.3 Следствие метода Якоби о вычислении индексов инерции квадратичной формы над $\mathbb{R}$

Пусть $Q\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма,
$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис,
$B = B(Q, \mathbb{e})$,
δ_k — k-й угловой минор матрицы B.

Следствие (из метода Якоби)**.** Пусть $\delta_k \neq 0\ \forall k$. Тогда:
Число i_+ равно количеству сохранений знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.
Число i_- равно количеству перемен знака в последовательности $1, \delta_1, \dots, \delta_n$.

Доказательство. Метод Якоби $\implies$ $\exists$ базис, в котором Q принимает канонический вид

$$Q = \delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Здесь, знак отношения $\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}$ соответствует смене либо сохранению знака в рассматриваемой последовательности.
По закону инерции, количества знаков $+$ и $-$ не изменяются от выбора базиса. ■

21.4 Положительно определённые, отрицательно определённые, неотрицательно определённые, неположительно определённые, неопределённые квадратичные формы над $\mathbb{R}$

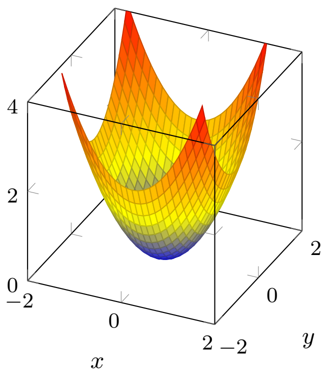
Определение 82. Квадратичная форма Q над $\mathbb{R}$ называется

Термин	Обозначение	Условие	Нормальный вид	Индексы инерции
Положительно определённой	$Q > 0$	$Q(x) > 0\ \forall x \neq 0$	$x_1^2 + \cdots + x_n^2$	$i_+ = n, i_- = 0$
Отрицательно определённой	$Q < 0$	$Q(x) < 0\ \forall x \neq 0$	$-x_1^2 - \cdots - x_n^2$	$i_+ = 0, i_- = n$
Неотрицательно определённой	$Q \geqslant 0$	$Q(x) \geqslant 0\ \forall x$	$x_1^2 + \cdots + x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = k, i_- = 0$
Неположительно определённой	$Q \leqslant 0$	$Q(x) \leqslant 0\ \forall x$	$-x_1^2 - \cdots - x_k^2,\ k \leqslant n$	$i_+ = 0, i_- = k$
Неопределённой	—	$\exists x : Q(x) > 0$ $\exists y : Q(y) < 0$	$x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - x_{s+t}^2$ $s, t \geqslant 1$	$i_+ = s, i_- = t$

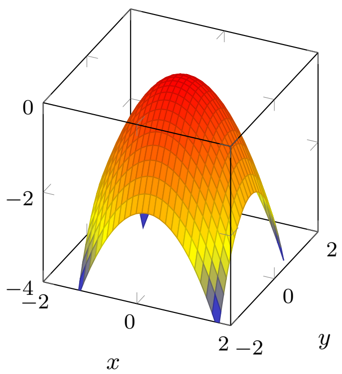
21.5 Примеры

$V = \mathbb{R}^2$.

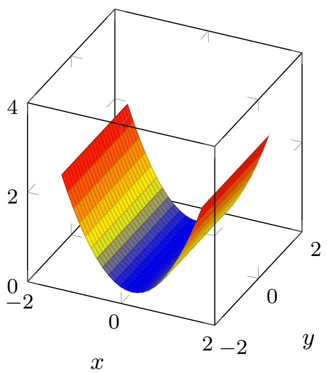
1. $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $Q > 0$.



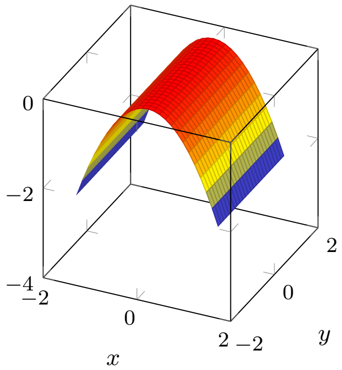
2. $Q(x, y) = -x^2 - y^2$, $Q < 0$.



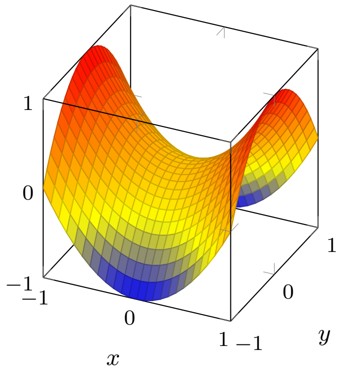
3. $Q(x, y) = x^2$, $Q \geqslant 0$.



4. $Q(x,y) = -x^2$, $Q \leqslant 0$.



5. $Q(x,y) = x^2 - y^2$.



21.6 Одно применение квадратичных форм над $\mathbb{R}$

Презентация (продублирована ниже)

21.6.1 Знаем из курса математического анализа

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $x_0 \in \mathbb{R}$ — некоторая точка.
Если f дважды дифференцируема в точке x_0, то для малого приращения y имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + ay + by^2 + o(y^2),$$

где $a = f'(x_0)$, $b = f''(x_0)/2$.

Предложение (необходимое условие локального экстремума)**.** Если f в точке x_0 имеет локальные экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Предложение (достаточные условия локального экстремума)**.** Пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда

- если $f''(x_0) > 0$, то f в точке x_0 имеет локальный минимум;
- если $f''(x_0) < 0$, то f в точке x_0 имеет локальный максимум.

21.6.2 Применение квадратичных форм

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — некоторая точка.

Если f «дважды дифференциируема» в точке x_0, то для малого приращения $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \underbrace{a_1 y_1 + \dots + a_n y_n}_{l(y)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2b_{ij} y_i y_j}_{Q(y)} + o(|y|^2).$$

$l(y)$ — линейная форма, (называется «дифференциал»)
$Q(y)$ — квадратичная форма.

Предложение (необходимое условие локального экстремума)**.** Если f в точке x_0 имеет локальный экстремум, то $l(y) \equiv 0$ (то есть $a_1 = \dots = a_n = 0$).

Предложение (достаточные условие локального экстремума или его отсутствия)**.** Пусть $l(y) \equiv 0$. Тогда:

- если $Q > 0$, то f в точке x_0 имеет локальный минимум;
- если $Q < 0$, то f в точке x_0 имеет локальный максимум;
- если Q неопределённа, то f в точке x_0 не имеет локального экстремума.

21.7 Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы

Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $\dim V = n$,

$\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V,

$B = B(Q, \mathbb{e})$,

B_k — левый верхний $k \times k$ блок,

$\delta_k = \det B_k$.

Теорема 21.2 (Критерий Сильвестра положительной определенности)**.**

$$Q > 0 \iff \delta_k > 0 \ \forall k = 1 \dots n.$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ По следствию из метода Якоби, $i_+ = n$, то есть $Q > 0$.

$\Longrightarrow$ $Q > 0 \implies \exists C \in M_n^0(\mathbb{R})$, такая что $C^T BC = E$.

Тогда, $\det C^T \cdot \underbrace{\det B}_{=\delta_n} \cdot \det C = 1$. Отсюда, $\delta_n = \frac{1}{(\det C)^2} > 0$.

Теперь, для любого k ограничение Q на $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ тоже положительно определённо, а его матрица в базисе $e_1, \dots, e_k$ равна B_k. Следовательно, $\det B_k > 0$. ∎

21.8 Критерий отрицательной определённости квадратичной формы

Следствие.

$$Q < 0 \iff \delta_k \begin{cases} > 0 & \text{при } k \,\vdots\, 2, \\ < 0 & \text{при } k \not\vdots\, 2. \end{cases}$$

Доказательство. $Q < 0 \iff -Q > 0$ ∎

$$\begin{aligned} &\iff \det(-B_k) > 0 \ \forall k \\ &\iff (-1)^k \delta_k > 0 \ \forall k \end{aligned}$$

21.9 Евклидово пространство и скалярное произведение

Определение 83. *Евклидово пространство* — это векторное пространство $\mathbb{E}$ над $\mathbb{R}$, на котором задано *скалярное произведение*, то есть такое отображение $(\bullet, \bullet) \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, что

1. $(\bullet, \bullet)$ — симметричная билинейная форма,
2. Квадратичная форма (x, x) положительно определённая.

21.10 Примеры

1. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   $(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leftarrow$ стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

   $(x, x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$.

2. $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$,

   $(A, B) := \mathrm{tr}(A^T B)$,

   $(A, A) = \mathrm{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$.

3. $\mathbb{E} = C[a, b]$,

   $(f, g) := \int_a^b f(x) g(x) \, dx$,

   $(f, f) = \int_a^b f^2(x) \, dx > 0$.

22 Лекция 22

Замечание. Всякое подпространство $U \subseteq E$ тоже является евклидовым пространством со скалярным произведением $(\bullet, \bullet)\big|_U \leftarrow$ ограничение на U.

22.1 Длина вектора евклидова пространства

Определение 84. *Длина* вектора $x \in \mathbb{E}$ — это $|x| := \sqrt{(x, x)}$.

Свойства:

1. $|x| \geqslant 0$, причем $|x| = 0 \iff x = 0$.
2. $\lambda \in \mathbb{R} \implies |\lambda \cdot x| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{модуль}} \cdot \underbrace{|x|}_{\text{длина}}$

Пример. Если $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, то $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Замечание. Если $\mathbb{E} = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$

Тогда, $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \leftarrow$ это обозначается как $\|A\|_F$ и называется *нормой Фробениуса*, *фробениусовой нормой.*

22.2 Неравенство Коши–Буняковского

Предложение (неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство $\iff$ x, y пропорциональны.

Доказательство. Случаи:

1. x, y пропорциональны. Тогда, можно считать, что $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $|(x, y)| = |(x, \lambda x)| = |\lambda||(x, x)| = |\lambda||x|^2 = |x| \cdot |\lambda x| = |x| \cdot |y|$.
2. x, y не пропорциональны. Тогда x, y линейно независимы.
   Значит они образуют базис в $\langle x, y\rangle$.
   Получаем
   $$\begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{vmatrix} > 0 \quad \text{(критерий Сильвестра).}$$
   Отсюда, $(x, x) \cdot (y, y) - (x, y)^2 > 0 \implies (x, y)^2 < |x|^2 \cdot |y|^2$.

∎

Пример. Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, тогда

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

22.3 Угол между ненулевыми векторами евклидова пространства

Пусть $x, y \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$, тогда $-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|} \leqslant 1$.

Определение 85. Угол между ненулевыми векторами $x, y \in \mathbb{E}$, это такой $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$.
Тогда $(x, y) = |x||y| \cos\alpha$.

22.4 Матрица Грама системы векторов евклидова пространства

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — произвольная система векторов.

Определение 86. *Матрица Грама* этой системы — это

$$G(v_1, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \ldots & (v_1, v_k) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \ldots & (v_2, v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_k, v_1) & (v_k, v_2) & \ldots & (v_k, v_k) \end{pmatrix}.$$

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow A := (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$.
Тогда, $G(a_1, \ldots, a_k) = A^T \cdot A$.

22.5 Определитель матрицы Грама: неотрицательность, критерий положительности

Предложение. $\forall v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{E} \implies \det G(v_1, \ldots, v_k) \geqslant 0$.

Более того, $\det G(v_1, \ldots, v_k) > 0 \iff v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $G := G(v_1, \ldots, v_k)$. Случаи:

1. $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы. Тогда, G — матрица билинейной формы $(\bullet, \bullet)\Big|_{\langle v_1, \ldots, v_k\rangle}$ в базисе $v_1, \ldots, v_k$ подпространства $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$, а значит $\det G > 0$ по критерию Сильвестра.
2. $v_1, \ldots, v_k$ линейно зависимы. Тогда, $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, такие что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$.

   А значит, $\forall i = 1, \ldots, k \implies \alpha_1(v_1, v_i) + \cdots + \alpha_k(v_k, v_i) = 0$.

   Отсюда, $a_1 G_{(1)} + \cdots + \alpha_k G_{(k)} = 0 \implies$ строки в G линейно зависимы $\implies \det G = 0$. ■

22.6 Ортогональные векторы

Определение 87. Векторы $x, y \in \mathbb{E}$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

22.7 Ортогональные и ортонормированные системы векторов

Определение 88. Система ненулевых векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется
1. *ортогональной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ (то есть $G(v_1, \ldots, v_k)$ диагональна),
2. *ортонормированной*, если $(v_i, v_j) = 0\ \forall i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$ ($\iff |v_i| = 1$). То есть $G(v_1, \ldots, v_k) = E$.

Замечание. Всякая ортогональная (и в частности ортонормированная) система векторов автоматически линейно независима.

$$\det G(v_1, \ldots, v_k) = |v_1|^2 \cdot |v_2|^2 \cdots |v_k|^2 \neq 0.$$

22.8 Ортогональный и ортонормированный базис

Определение 89. Базис пространства называется *ортогональным* (соответственно *ортонормированным*), если он является ортогональной (ортонормированной) системой векторов.

Пример. $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

Тогда, стандартный базис является ортонормированным.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

22.9 Координаты вектора в ортогональном (ортонормированном) базисе

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортогональный базис.

$v \in \mathbb{E}$.

Предложение. $v = \dfrac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dfrac{(v, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 + \cdots + \dfrac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n$.

В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован, то $v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_n)e_n$.

Доказательство. $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots \lambda_n e_n$.

$\forall i = 1, \ldots, n \quad (v, e_i) = \lambda_1(e_1, e_i) + \cdots + \lambda_n(e_n, e_i)$.

Так как базис ортогонален, то $(v, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) \implies \lambda_i = \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$. ■

22.10 Теорема о существовании ортонормированного базиса

Теорема 22.1. *Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Следует из теоремы о приведении квадратичной формы (x, x) к нормальному виду (который будет E в силу положительной определённости). ■

Следствие. Всякую ортогональную (ортонормированную) систему векторов можно дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — данная система.

Пусть $e_{k+1}, \ldots, e_n$ — это ортогональный (ортонормированный) базис в $\langle e_1, .., e_k\rangle^\perp$.

Тогда $e_1, \ldots, e_n$ — искомый базис. ■

22.11 Метод ортогонализации Грама–Шмидта

Как построить ортогональный (ортонормированный) базис в $\mathbb{E}$?
Если $f_1, \ldots, f_n$ — ортогональный базис, то $\left(\frac{f_1}{|f_1|}, \ldots, \frac{f_n}{|f_n|}\right)$ — ортонормированный базис.
Тогда, достаточно построить ортогональный базис.
Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — линейно независимая система векторов.
i-й угловой минор в $G(e_1, \ldots, e_k)$ — это $\det G(e_1, \ldots, e_k) > 0$.

Следовательно, применим метод Якоби:
$\exists!$ система векторов $f_1, \ldots, f_k$, такая что

$$\begin{aligned} &f_1 = e_1, \\ &f_2 \in e_2 + \langle e_1 \rangle, \\ &f_3 \in e_3 + \langle e_1, e_2 \rangle, \\ &\ldots, \\ &f_k \in e_k + \langle e_1, \ldots, e_{k-1} \rangle \end{aligned}$$

И выполнены следующие свойства $\forall i = 1, \ldots, k$:
0. $f_1, \ldots, f_k$ ортогональны.
1. $\langle e_1, \ldots, e_i \rangle = \langle f_1, \ldots, f_i \rangle$.
2. $f_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{(e_i, f_j)}{(f_j, f_j)} f_j \; (\star)$.
3. $\det G(e_1, \ldots, e_i) = \det G(f_1, \ldots, f_i) \; (\heartsuit)$.

Построение базиса $f_1, \ldots, f_k$ по формулам $(\star)$ называется методом (процессом) ортогонализации Грамма-Шмидта.

23 Лекция 23

23.1 Описание всех ортонормированных базисов в терминах одного ортонормированного базиса и матриц перехода

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис в E.
Пусть $\mathbb{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — какой-то другой базис.
$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Предложение. $\mathbb{e}'$ — ортонормированный базис $\iff C^T \cdot C = E$.

Доказательство. $G(e'_1, \ldots, e'_n) = C^T \underbrace{G(e_1, \ldots, e_n)}_{E} C = C^T C$.

$\mathbb{e}'$ ортонормированный $\iff G(e'_1, \ldots, e'_n) = E \iff C^T C = E$. ■

23.2 Ортогональные матрицы и их свойства

Определение 90. Матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ называется *ортогональной* если $C^T C = E$.

Замечание. $C^T C = E \iff CC^T = E \iff C^{-1} = C^T$.

Свойства.

1. $C^T C = E \implies$ система столбцов $C^{(1)}, \ldots, C^{(n)}$ — это ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,
2. $CC^T = E \implies$ система строк $C_{(1)}, \ldots, C_{(n)}$ — это тоже ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$,

В частности, $|c_{ij}| \leqslant 1$.

3. $\det C = \pm 1$.

Пример. $n = 2$. Ортогональный матрицы:

$$\underset{\det = 1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}} \qquad \underset{\det = -1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}.$$

23.3 Ортогональное дополнение подмножества евклидова пространства

Определение 91. *Ортогональное дополнение* множества $S \subseteq \mathbb{E}$ — это множество $S^\perp := \{x \in \mathbb{E} \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$.

Упражнение.

1. $S^\perp$ — подпространство в $\mathbb{E}$.
2. $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

23.4 Размерность ортогонального дополнения подпространства, ортогональное дополнение к ортогональному дополнению подпространства

23.5 Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения

Далее считаем, что $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.

Предложение. Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда:

1. $\dim S^\perp = n - \dim S$.
2. $\mathbb{E} = S \oplus S^\perp$.
3. $(S^\perp)^\perp = S$.

Доказательство.

1. Пусть $\dim S = k$ и $e_1, \dots, e_k$ — базис S.

   Дополним $e_1, \dots, e_k$ до базиса $e_1, \dots, e_n$ всего $\mathbb{E}$.

   Тогда, $\forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{E}$.

$$x \in S^\perp \iff (x, e_i) = 0 \ \forall i = 1, \dots, k$$
$$\iff \begin{cases} (e_1, e_1)x_1 + \dots + (e_n, e_1)x_n = 0 \\ (e_1, e_2)x_1 + \dots + (e_n, e_2)x_n = 0 \\ \dots \\ (e_1, e_k)x_1 + \dots + (e_n, e_k)x_n = 0 \end{cases}.$$

   Это ОСЛУ с матрицей $G \in \mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{R})$, причём левый $k \times k$ блок в G — это $\underbrace{G(e_1, \dots, e_k)}_{\det \neq 0}$.

   Это означает, что $\operatorname{rk} G = k$.

   Следовательно, пространство решений этой ОСЛУ имеет размерность $n - k$.

   Отсюда, $\dim S^\perp = n - k = n - \dim S$.

2. (a) $\dim S + \dim S^\perp = k + (n - k) = n = \dim E$.

   (b) $v \in S \cap S^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0 \implies S \cap S^\perp = \{0\}$.

   А значит, $E = S \oplus S^\perp$.

3. Заметим, что $S \subseteq (S^\perp)^\perp$ (по определению).

   $\dim (S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - \dim S) = \dim S$.

   Следовательно, $S = (S^\perp)^\perp$. ■

23.6 Ортогональная проекция вектора на подпространство, ортогональная составляющая вектора относительно подпространства

S — подпространство $\implies \mathbb{E} = S \oplus S^\perp$
$\forall v \in \mathbb{E} \ \exists! \ x \in S, y \in S^\perp$, такие что $x + y = v$.

Определение 92.

1. x называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство S.

   Обозначение: $x = \operatorname{pr}_S v$.

2. y называется *ортогональной составляющей* вектора v относительно подпространства S.

   Обозначение: $y = \operatorname{ort}_S v$.

23.7 Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в терминах его ортогонального (ортонормированного) базиса

Пусть $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство.
$e_1, \dots, e_k$ — ортогональный базис в S.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{E} \quad \operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

В частности, если $e_1, \dots, e_k$ ортонормирован, то $\operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k (v, e_i) e_i$.

Доказательство. Пусть $e_{k+1}, \dots, e_n$ — ортогональный базис в $S^\perp$. Тогда $e_1, \dots, e_n$ — ортогональный базис в $\mathbb{E}$.

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i}_{\in S} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i}_{\in S^\perp}.$$

Отсюда,

$$\operatorname{pr}_S v = \sum_{i=1}^k \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$ ■

Замечание. Свойство 2 из метода Грама-Шмидта говорит, что

$$f_i = e_i - \operatorname{pr}_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i = \operatorname{ort}_{\langle f_1, \dots, f_{i-1} \rangle} e_i.$$

23.8 Явная формула для ортогональной проекции вектора на подпространство в $\mathbb{R}^n$, заданное своим базисом

Пусть $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $a_1, \ldots, a_k$ — базис S.
Пусть $A := (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R})$, $A^{(i)} = a_i$.

Предложение. $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \mathrm{pr}_S\, v = A(A^TA)^{-1}A^Tv$.

Доказательство. Корректность: $A^TA = G(a_1, \ldots, a_k) \in M_k^0(\mathbb{R})$.
Положим $x := \mathrm{pr}_S\, v$, $y := \mathrm{ort}_S\, v$.
Так как $x \in S$, $x = A \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
$y \in S^\perp \implies A^Ty = 0$.

$$\begin{aligned}
A(A^TA)^{-1}A^Tv &= A(A^TA)^{-1}A^T(x+y) \\
&= A\underbrace{(A^TA)^{-1}A^T A}_{E}\overbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots\\ \alpha_k\end{pmatrix}}^{x} + A(A^TA)^{-1}\underbrace{A^Ty}_{0} \\
&= A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = x = \mathrm{pr}_S\, v.
\end{aligned}$$

■

23.9 Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Теорема 23.1. *Пусть $x, y \in \mathbb{E}$, $(x,y) = 0$. Тогда $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Доказательство.
$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = \underbrace{(x,x)}_{|x|^2} + \underbrace{(x,y)}_{0} + \underbrace{(y,x)}_{0} + \underbrace{(y,y)}_{|y|^2} = |x|^2 + |y|^2.$$
■

23.10 Расстояние между векторами евклидова пространства

Определение 93. *Расстояние* между векторами $x, y \in \mathbb{E}$ — это $\rho(x,y) = |x-y|$.

23.11 Неравенство треугольника

Предложение. $\forall a, b, c \in \mathbb{E} \implies \rho(a,b) + \rho(b,c) \geqslant \rho(a,c)$.

Доказательство. Пусть $x = a - b$, $y = b - c$. Тогда, $a - c = x + y$. Достаточно доказать, что $|x| + |y| \geqslant |x+y|$.

$$|x+y|^2 = |x|^2 + \underbrace{2(x,y)}_{\leqslant|x||y|} + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$
■

23.12 Расстояние между двумя подмножествами евклидова пространства

Пусть $P, Q \subseteq \mathbb{E}$ — два подмножества.

Определение 94. *Расстояние* между P и Q — это

$$\rho(P,Q) := \inf_{x\in P, y\in Q} \rho(x,y).$$

23.13 Теорема о расстоянии от вектора до подпространства

Теорема 23.2. *Пусть $x \in \mathbb{E}$, $S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство. Тогда, $\rho(x,S) = |\mathrm{ort}_S\, x|$, причем $\mathrm{pr}_S\, x$ — это ближайший к x вектор из S.*

Доказательство. Положим $y = \mathrm{pr}_S\, x$, $z = \mathrm{ort}_S\, x$. Тогда, $x = y + z$. Для любого $y' \in S$, $y' \neq 0$ имеем

$$\rho(x, y+y')^2 = |x - y - y'|^2 = |z - y'|^2 = |z|^2 + |y'|^2 > |z|^2 = |x-y|^2 = \rho(x,y)^2.$$
■

23.14 Псевдорешение несовместной системы линейных уравнений (метод наименьших квадратов)

СЛУ $Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

$$x_0 \text{ — решение системы } \iff Ax_0 = b \iff Ax_0 - b = 0 \iff |Ax_0 - b| = 0 \iff \rho(Ax_0, b) = 0.$$

Если СЛУ несовместна, то x_0 называется *псевдорешением*, если $\rho(Ax_0, b)$ минимально.

$$\rho(Ax_0, b) = \min_{x\in R^n} \rho(Ax, b).$$

x_0 — решение задачи оптимизации $\rho(Ax, b) \xrightarrow[x\in\mathbb{R}^n]{} \min$.

24 Лекция 24

24.1 Метод наименьших квадратов для несовместных систем линейных уравнений: постановка задачи и её решение

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ — подпространство натянутое на столбцы матрицы A.
$S = \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \rangle$.
Положим $c := \operatorname{pr}_S b$.

Предложение.

1. x_0 — псевдорешение $Ax = b \iff x_0$ — решение для $Ax = c$.
2. Если столбцы $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ линейно независимы, то псевдорешение единственно и может быть найдено по формуле $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$.

24.2 Единственность псевдорешения и явная формула для него в случае линейной независимости столбцов матрицы коэффициентов

Доказательство.

1. $$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad Ax = x_1 A^{(1)} + \cdots + x_n A^{(n)} \implies \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = S \implies \min_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(Ax, b) = \rho(S, b).$$
   По теореме о расстоянии от вектора до подпространства минимум достигается при $Ax = c = \operatorname{pr}_S b$.
2. Так как $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ линейно независимы, то c единственным образом представим в виде линейной комбинации этих столбцов.

   Следовательно, x_0 единственно.

   Знаем, что $A \underbrace{(A^T A)^{-1} A^T b} = c$. Значит, $x_0 = (A^T A)^{-1} A^T b$. ∎

Пример. $\begin{cases} x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$

Здесь $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда, $x_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$.

Здесь должна была быть картинка, но мне лень. Пинать можно @darkkeks.

24.3 Формула для расстояния от вектора до подпространства в терминах матриц Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство, $\dim \mathbb{E} = n < \infty$.
$S \subseteq \mathbb{E}$ — подпространство, $e_1, \ldots, e_k$ — базис в S.

Теорема 24.1. $\forall x \in \mathbb{E} \quad \rho(x, S)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$.

Доказательство. Пусть $z := \operatorname{ort}_S x$, тогда $\rho(x, S)^2 = |z|^2$.

1. $x \in S \implies \rho(x, S) = 0$:

   так как $e_1, \ldots, e_k, x$ — линейно зависимы, то $\det G(e_1, \ldots, e_k, x) = 0$.
2. $x \notin S$.

   Ортогонализация Грама-Шмидта: $e_1, \ldots, e_k, x \rightsquigarrow f_1, \ldots, f_k, z$.

   По свойству (♡) получаем
   $$\frac{\det G(e_1, \ldots, e_k, x)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)} = \frac{\det G(f_1, \ldots, f_k, z)}{\det G(f_1, \ldots, f_k)} = \frac{|f_1|^2 \ldots |f_k|^2 |z|^2}{|f_1|^2 \ldots |f_k|^2} = |z|^2 = \rho(x, S)^2.$$

∎

24.4 k-мерный параллелепипед

Определение 95. *k-мерный параллелепипед*, натянутый на векторы $a_1, \dots, a_k$, это множество

$$P(a_1, \dots, a_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i a_i \mid 0 \leqslant x_i < 1 \right\}.$$

Основание: $P(a_1, \dots, a_{k-1})$.
Высота: $h := \operatorname{ort}_{\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle} a_k$.

Пример. если у кого-то есть фото с доски в хорошем качестве или, что лучше, рисунок этого, напишите @nih3kwo

$k = 1$: $P(a_1)$ — отрезок.

$k = 2$: $P(a_1, a_2)$ — параллелограмм. Основание — $P(a_1)$, высота — $|h|$.

$k = 3$: $P(a_1, a_2, a_3)$ — классический параллелепипед. Основние — $P(a_1, a_2)$, высотка — $|h|$.

24.5 Объём k-мерного параллелепипеда в евклидовом пространстве

Определение 96. *k-мерный объем* k-мерного параллелепипеда $P(a_1, \dots, a_k)$ — это величина $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)$, определяемая индуктивно:

$k = 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1) := |a_1|$.

$k > 1 \implies \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k) := \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot |h|$.

24.6 Вычисление объёма k-мерного параллелепипеда при помощи определителя матрицы Грама задающих его векторов

Теорема 24.2. $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)^2 = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

Доказательство. Индукция по k:

$k = 1: \ |a_1|^2 = (a_1, a_1)$ — верно.

$k > 1: \ \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)^2 = \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_{k-1})^2 \cdot |h|^2 = \det G(a_1, \dots, a_{k-1}) \cdot |h|^2 = (\star)$.

Если $a_1, \dots, a_{k-1}$ линейно независимы, то $|h|^2 = \dfrac{\det G(a_1, \dots, a_k)}{\det G(a_1, \dots, a_{k-1})}$. Тогда, $(\star) = \det G(a_1, \dots, a_k)$.

Если же $a_1, \dots, a_{k-1}$ линейно зависимы, то $\det G(a_1, \dots, a_{k-1}) = 0 \implies (\star) = 0$. Но $a_1, \dots, a_k$ тоже линейно зависимы, а значит $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$. ■

Следствие. $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k)$ не зависит от выбора основания.

Пример. Пусть $a_1, \dots, a_k$ ортогональны, тогда $P(a_1, \dots, a_k)$ — «прямоугольный параллелепипед».

$$\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_k) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{|a_1|^2 \dots |a_k|^2} = |a_1| \dots |a_k|.$$

24.7 Формула для объёма n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве в терминах координат задающих его векторов в ортонормированном базисе

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$,
$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$, $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Предложение. $\operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_n) = |\det A|$.

Доказательство.

$$G(a_1, \dots, a_n) = A^T \cdot A \implies \operatorname{vol} P(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{(\det A)^2} = |\det A| \quad ■.$$

24.8 Отношение одинаковой ориентированности на множестве базисов евклидова пространства

Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ и $\mathbb{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ — два базиса в $\mathbb{E}$.
$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$, $C \in M_n^0(\mathbb{R})$.

Определение 97. Говорят, что $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированы, если $\det C > 0$.

Упражнение.

1. Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{E}$.

2. Имеется ровно 2 класса эквивалентности.

24.9 Ориентация в евклидовом пространстве

Определение 98. Говорят, что в $\mathbb{E}$ задана ориентация, если все базисы одного класса объявлены положительно ориентированными, а все базисы другого класса объявлены отрицательно ориентированными.

Пример. Стандартный выбор ориентации в $\mathbb{R}^3$:
Положительно ориентированные: «правые» тройки.
Отрицательно ориентированные: «левые» тройки.

Тут показывать надо, но попробую описать словами: берем правую руку, и нумеруем пальцы начиная с большого (большой — первый вектор, указательный — второй, средний — третий). Такую тройку векторов назовём «правой». Аналогично можно сделать для левой руки. Суть в том, что никакую правую тройку векторов невозможно перевести в левую непрерывным преобразованием (так чтобы в процессе тройка оставалось базисом).

24.10 Ориентированный объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве

Фиксируем ориентацию в $\mathbb{E}$.
Фиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{E}$.
Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}$, $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$.

Определение 99. *Ориентированным объемом* параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ называется величина

$$\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = \det A.$$

Предложение. $\operatorname{Vol} P(a_1, \ldots, a_n)$ определён корректно, то есть не зависит от выбора положительно ориентированного ортонормированного базиса в $\mathbb{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{e}'$ — другой положительно ориентированный ортонормированный базис, тогда $\mathbb{e}' = \mathbb{e}C$, где C — ортогональная матрица. В частности, $\det C = \pm 1$. Так как $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ одинаково ориентированны, то $\det C = 1$. Тогда,

$$(a_1, \ldots, a_n) = (e'_1, \ldots, e'_n) \cdot C^{-1} \cdot A \implies \operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)_{\text{новый}} = \det \left(C^{-1} A\right) = \det A = \operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)_{\text{старый}}.$$ ■

Свойства ориентированного объема:
1. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ линеен по каждому аргументу.
2. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n)$ кососимметрична (то есть меняет знак при перестановке любых двух аргументов).
3. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) > 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — положительно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
4. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) < 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ — отрицательно ориентированный базис в $\mathbb{E}$.
5. $\operatorname{Vol}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff (a_1, \ldots, a_n)$ линейно зависимы.

25 Лекция 25

Записки с лекции

Лемма 25.1. Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$. Тогда, $(v_1, x) = (v_2, x)\ \forall x \in \mathbb{E} \implies v_1 = v_2$.

Доказательство. Имеем $(v_1 - v_2, x) = 0\ \forall x \in \mathbb{E}$. Тогда, $v_1 - v_2 \in \mathbb{E}^{\perp} = \{0\} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$. ■

25.1 Трёхмерное евклидово пространство

Теорема 25.2. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^3$. Тогда*

1. $\exists! v \in \mathbb{E}$, *такой что* $(v, x) = \mathrm{Vol}(a, b, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.
2. *Если* $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ *— положительно ориентированный ортонормированный базис и* $\begin{matrix} a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \end{matrix}$ *то*

$$v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3. \qquad (\star)$$

Доказательство.

Единственность если v' — другой такой вектор, то $(v, x) = (v', x)\ \forall x \in \mathbb{R}^3$, а значит $v' = v$ по лемме.

Существование Покажем, что v, заданный формулой $(\star)$ подойдёт.

$$\begin{aligned} x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \implies (v, x) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \mathrm{Vol}(a, b, x). \end{aligned}$$

■

25.2 Векторное произведение, его выражение в координатах

Определение 100. Вектор v из теоремы выше называется *векторным произведением* векторов a и b.
Обозначение: $[a, b]$ или $a \times b$.

25.3 Смешанное произведение трёх векторов, его свойства

Определение 101. $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ число $(a, b, c) := ([a, b], c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b, c.

Замечание. Из теоремы видно, что $(a, b, c) = \mathrm{Vol}(a, b, c)$.

Свойства смешанного произведения.

1. $(a, b, c) > 0 \iff a, b, c$ — положительно ориентированный базис,
   $(a, b, c) < 0 \iff a, b, c$ — отрицательно ориентированный базис.

   Критерий компланарности (= линейной зависимости)

   $$a, b, c \text{ компланарны} \iff (a, b, c) = 0.$$

2. Линейность по каждому аргументу.
3. Кососимметричность (меняет знак при перестановке любых двух векторов).
4. Если e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис, то

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b &= b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ c &= c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \end{aligned}\right| \implies (a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

■

25.4 Критерий коллинеарности двух векторов в терминах векторного произведения

Предложение. $a, b \in \mathbb{E}$ коллинеарны $\iff [a,b] = 0$.

Доказательство.

$\implies$

$$(a,b,x) = 0 \ \forall x \implies ([a,b],x) = 0 \ \forall x \implies [a,b] = 0.$$

$\impliedby$

$$[a,b] = 0 \implies ([a,b],x) = 0 \ \forall x \implies (a,b,x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Если a, b линейно независимы, то можно взять x, который дополняет их до базиса в $\mathbb{R}^3$.

Тогда, $(a,b,x) \neq 0$ — противоречие. Значит a, b линейно зависимы $\implies$ коллинеарны. ■

25.5 Геометрические свойства векторного произведения

Предложение.
1. $[a,b] \perp \langle a,b \rangle$.
2. $|[a,b]| = \operatorname{vol} P(a,b)$.
3. $\operatorname{Vol}(a,b,[a,b]) \geqslant 0$.

Доказательство.

1. $([a,b],a) = (a,b,a) = 0 = (a,b,b) = ([a,b],b)$.
2. Если a, b коллинеарны, то обе части равны 0.

   Пусть $[a,b] \neq 0$.
   $$|[a,b]|^2 = ([a,b],[a,b]) = (a,b,[a,b]) = (\#) > 0.$$
   $$[a,b] \perp \langle a,b \rangle \implies (\#) = \operatorname{vol} P(a,b,[a,b]) = \operatorname{Vol}(a,b,[a,b]) = \operatorname{vol} P(a,b,) \cdot |[a,b]|\,.$$

   Сокращая на $|[a,b]| \neq 0$, получаем требуемое.
3. $\operatorname{Vol}(a,b,[a,b]) = ([a,b],[a,b]) \geqslant 0$. ■

Упражнение. $[a,b]$ однозначно определяется свойствами 1) — 3).

25.6 Антикоммутативность и билинейность векторного произведения

Пример. Пусть e_1, e_2, e_3 — положительно ориентированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$.

$[e_i, e_j]$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

Предложение.

1. $[a,b] = -[b,a] \quad \forall a, b$ (антикоммутативность).
2. $[\bullet,\bullet]$ билинейно (то есть линейно по каждому аргументу).

Доказательство.

1. $([a,b],x) = (a,b,x) = -(b,a,x) = -([b,a],x) = (-[b,a],x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \implies [a,b] = -[b,a]$
2. Пусть $u = [\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b]$, $v = \lambda_1 [a_1,b] + \lambda_2 [a_2,b]$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^3$:
   $$\begin{aligned}(u,x) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, x)\\ &= \lambda_1 (a_1,b,x) + \lambda_2 (a_2,b,x)\\ &= \lambda_1([a_1,b],x) + \lambda_2([a_2,b],x)\\ &= (\lambda_1[a_1,b] + \lambda_2[a_2,b],x) = (v,x).\end{aligned}$$

   Значит $u = v$. Аналогично линейность по второму аргументу. ■

25.7 Линейные многообразия в $\mathbb{R}^n$

Определение 102. *Линейное многообразие* в $\mathbb{R}^n$ — это множество решений некоторой совместной СЛУ.

25.8 Характеризация линейных многообразий как сдвигов подпространств

Пусть $Ax = b$ — СЛУ, $\varnothing \neq L \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество решений, $x_z \in L$ — частное решение.
Было: Лемма: $L = x_z + S$, где S — множество решений ОСЛУ $Ax = 0$.

Предложение. Множество $L \subseteq \mathbb{R}^n$ является линейным многообразием $\iff$ $L = v_0 + S$ для некоторых $v_0 \in \mathbb{R}^n$ и подпространства $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Из леммы.

$\Longleftarrow$ $L = v_0 + S$. Значит существует ОСЛУ $Ax = 0$, для которой S является множеством решений. Тогда, L — множество решений СЛУ $Ax = Av_0$ (по лемме). ∎

25.9 Критерий равенства двух линейных многообразий

Предложение. Пусть $L_1 = v_1 + S_1$ и $L_2 = v_2 + S_2$ — два линейных многообразия в $\mathbb{R}^n$. Тогда,

$$L_1 = L_2 \iff \begin{cases} S_1 = S_2 \ (= S) \\ v_1 - v_2 \in S \end{cases} .$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ $L_1 = v_1 + S_1 = v_1 + S_2 = v_2 + (v_1 - v_2) + S = v_2 + S = L_2$.

$\Longrightarrow$ $v_1 = v_1 + 0 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v_1 - v_2 \in S_2$,
$v \in S_1 \implies v + v_1 \in L_1 = L_2 = v_2 + S_2 \implies v \in (v_2 - v_1) + S_2 = S_2 \implies S_1 \subseteq S_2$.
Аналогично, $v_1 - v_2 \in S_1$ и $S_2 \subseteq S_1$. ∎

25.10 Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия

Если L — линейное многообразие, то $L = v_0 + S$, где S определено однозначно.

Определение 103. S называется *направляющим подпространством* линейного многообразия L.

Определение 104. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства.

26 Лекция 26

Если у вас ощущение, что в конспекте баг, можете проверить снимок доски и/или запись.

26.1 Теорема о плоскости, проходящей через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$, следствия для двух и трёх точек

Теорема 26.1.

a) *Через любые $k+1$ точек в $\mathbb{R}^n$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$.*

b) *Если это точки не лежат в плоскости размерности $< k$, то через них проходит ровно одна плоскость размерности k.*

Доказательство.

a) Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_k$ — данные точки. Тогда через них проходит плоскость $P = v_0 + \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle$.
Ясно, что $\dim P \leqslant k$.

b) Из условия следует, что $\dim P = k \implies v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0$ линейно независимы.
Если $P' = v_0 + S$ — другая плоскость размерности k, содержащая $v_0, \ldots, v_k$, то $v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \in S \implies S = \langle v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0 \rangle \implies P' = P$. ■

Следствие.

1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.
2. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит ровно одна плоскость.

26.2 Понятия репера и аффинной системы координат на линейном многообразии

Пусть $L \subseteq \mathbb{R}^n$ — линейное многообразие, S — его направляющее подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис S, $v_0 \in L$.

Определение 105. Набор $(v_0, e_1, \ldots, e_k)$ называется репером линейного многообразия L. Всякий репер $(v_0, e_1, \ldots, e_k)$ задает на L *аффинную систему* координат. $\forall v \in L\ \exists!$ набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, такой что $v = v_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k$. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ называется *координатами* точки v в репере $(v_0, e_1, \ldots, e_k)$.

26.3 Случаи взаимного расположения двух линейных многообразий в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$: совпадают, одно содержится в другом, параллельны, скрещиваются

Пусть L_1, L_2 — два линейных многообразия.
$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \implies L_1 \cap L_2$ — тоже линейное многообразие.
Пусть S_i — направляющее подпространство для L_i, $i = 1, 2$.

$L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$

1. $L_1 = L_2 \iff S_1 = S_2$,
2. $L_1 \subseteq L_2 \iff S_1 \subseteq S_2$,
3. Остальные.

$L_1 \cap L_2 = \varnothing$

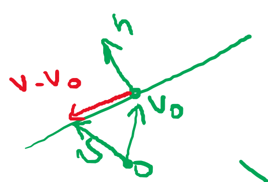
1. L_1 *параллельно* $L_2 \iff S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$,
2. L_1 и $L = 2$ *скрещиваются* $\underset{def}{\iff} S_1 \cap S_2 = \{0\}$,
3. Остальные.

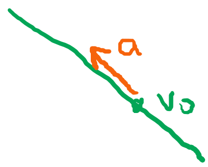
26.4 Прямые в $\mathbb{R}^2$: различные способы задания, уравнение прямой, проходящей через две различные точки

Способы задания:

1. $Ax + By = C \qquad (A, B) \neq (0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$, где n — нормаль.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$, где a — направляющий вектор.

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, & a = (a_1, a_2) \\ y = y_0 + a_2 t. & v_0 = (x_0, y_0) \end{cases}$$



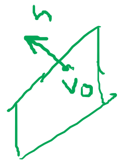


Уравнение прямой проходящей через две различные точки (x_0, y_0) **и** (x_1, y_1)

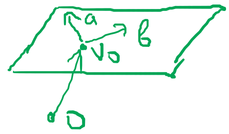
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \qquad \begin{matrix} x_1 = x_0 \implies x = x_0, \\ y_1 = y_0 \implies y = y_0. \end{matrix}$$

26.5 Плоскости в $\mathbb{R}^3$: различные способы задания, уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой

Способы задания:



1. $Ax + By + Cz = D \qquad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ — нормаль.
2. векторное уравнение $(v - v_0, n) = 0$.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at + bs$, где a, b — направляющие векторы (базис в направляющем подпространстве).



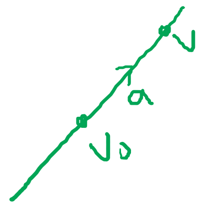
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 s, & a = (a_1, a_2, a_3) \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 s & b = (b_1, b_2, b_3) \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 s. & v_0 = (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки, не лежащие на одной прямой $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

26.6 Прямые в $\mathbb{R}^3$: различные способы задания, уравнение прямой, проходящей через две различные точки

Способы задания:



1. $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2 \end{cases} \qquad \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$
2. векторное уравнение $[v - v_0, a] = 0$, где $v - v_0$ — точка, a — направляющий вектор.
3. параметрическое уравнение $v = v_0 + at$.

$$\begin{matrix} v_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ a = (a_1, a_2, a_3) \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases} \iff \boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}}$$ — каноническое уравнение прямой

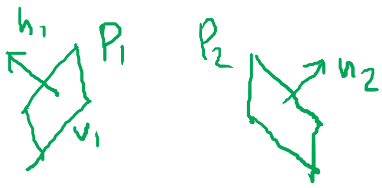
Если, например $a_1 = 0$, то пишут $\begin{cases} \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3} \\ x = x_0 \end{cases}$

Уравнение прямой, проходящей через (x_0, y_0, z_0) **и** (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

26.7 Взаимное расположение двух плоскостей, двух прямых, прямой и плоскости

26.7.1 Двух плоскостей



1. Совпадают.
2. Параллельны.
3. Пересекаются по прямой.

1), 2) $\iff [n_1, n_2] = \overrightarrow{0}$.

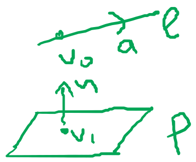
26.7.2 Двух прямых

1. Совпадают.
2. Параллельны.
3. Пересекаются в точке.
4. Скрещиваются.

1), 2) $\iff [a_1, a_2] = \overrightarrow{0}$.
1), 2), 3) $\iff (a_1, a_2, v_1 - v_2) = 0$.

26.7.3 Прямой и плоскости

Пусть l — прямая, P — плоскость.



1. $l \subseteq P$.
2. $l \parallel P$.
3. Пересекаются в точке.

1), 2) $\iff (a, n) = 0$.

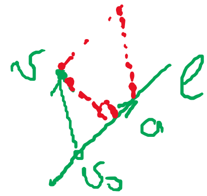
27 Лекция 11.04.2020

Если у вас ощущение, что в конспекте баг, можете проверить снимок доски, запись и слайды.

27.1 Метрические задачи в $\mathbb{R}^3$

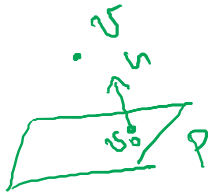
27.1.1 Расстояния от точки v до прямой $l = v_0 + at$

$$\rho(v, l) = \frac{|[v - v_0, a]|}{|a|}$$



27.1.2 Расстояние от точки v до плоскости P с направляющей нормалью n и направляющим подпространством S ($S = n^\perp$)

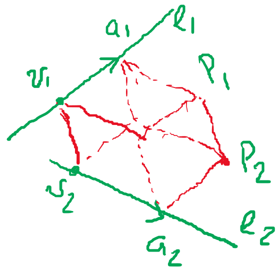
$$\rho(v, P) = |\mathrm{ort}_S(v - v_0)| = \left|\mathrm{pr}_{\langle n\rangle}(v - v_0)\right| = \left|\frac{(v - v_0, n)}{(n, n)} n\right| = \frac{|(v - v_0, n)|}{|n|}.$$



27.1.3 Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $l_1 = v_1 + a_1 t$ и $l_2 = v_2 + a_2 t$

$$p_1 = v_1 + \langle a_1, a_2\rangle$$
$$p_2 = v_2 + \langle a_1, a_2\rangle$$
$$\rho(l_1, l_2) = \rho(p_1, p_2)$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(a_1, a_2, v_1 - v_2)|}{|[a_1, a_2]|}$$

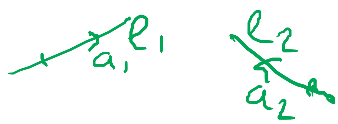


27.1.4 Угол между прямой l с направляющим вектором a и плоскостью P с нормалью n

$$\angle(l, P) = \frac{\pi}{2} - \min\left(\angle(a, n), \angle(a, -n)\right)$$

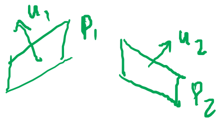
27.1.5 Угол между двумя прямыми l_1 с направляющим вектором a_1 и l_2 с направляющим вектором a_2

$$\angle(l_1, l_2) = \min(\angle(a_1, a_2), \angle(a_1, -a_2)).$$



27.1.6 Угол между двумя плоскостями P_1 с нормалью n_1 и P_2 с нормалью n_2

$$\angle(P_1, P_2) = \min(\angle(n_1, n_2), \angle(n_1, -n_2)).$$



27.2 Линейные операторы

Пусть V — векторное пространство над F, $\dim V = n$.

Определение 106. *Линейным оператором* (или *линейным преобразованием*) на/в V называется всякое линейное отображение $\varphi\colon V \to V$ (то есть из V в себя).

$\mathrm{L}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ — все линейные операторы на/в V.

27.3 Матрица линейного оператора в фиксированном базисе

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V.
Тогда, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A, \quad A \in M_n(F)$.
A называется матрицей линейного оператора в базисе $\mathbb{e}$.
Обозначение: $A(\varphi, \mathbb{e})$.
В столбце $A^{(j)}$ записаны координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{e}$.

27.4 Примеры линейных операторов

1. (скалярный оператор) $\lambda \in F \rightsquigarrow \varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$.

   $\varphi(v) = \lambda \cdot v$ для всех $v \in V$.

   Для любого базиса $\mathbb{e}$ имеем $A(\varphi, \mathbb{e}) = \lambda \cdot E$.

2. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол α (вокруг 0)

   $\mathbb{e} = (e_1, e_2)$ положительно ориентированный ортонормированный базис $\implies A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3. $V = F[x]_{\leqslant n}$, $\varphi\colon f \mapsto f'$ (отображение дифференцирования)

   (при $F \neq \mathbb{R}$ полагают по определению $x^k \mapsto kx^{k-1}$, $k = 0, \dots, n$)

   Если $\mathbb{e} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, то $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

27.5 Следствия общих фактов о линейных отображениях

1. $\mathbb{e}$ — базис $V \implies$ отображение $\mathrm{L}(V) \to M_n(F)$, $\varphi \mapsto A(\varphi, \mathbb{e})$, является изоморфизмом векторных пространств. В частности:

   a) φ однозначно определяется своей матрицей в любом базисе.

   b) Если $\mathbb{e}$ — фиксированный базис V, то $\forall A \in M_n(F)\ \exists! \varphi \in \mathrm{L}(V) : A(\varphi, \mathbb{e}) = A$.

2. $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\mathbb{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $A = A(\varphi, \mathbb{e})$,

   $$\begin{cases} v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ \varphi(v) = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases} \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. $\mathbb{e}'$ — другой базис V, $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$, $C \in M_n^0(F)$

   $A = A(\varphi, \mathbb{e})$, $A' = A(\varphi, \mathbb{e}') \implies A' = C^{-1}AC$.

Следствия из 3:

a) $\det A$ не зависит от выбора базиса $\big(\det(C^{-1}AC) = \det A\big)$.

b) $\mathrm{tr}\, A$ не зависит от выбора базиса $\big(\mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}(ACC^{-1}) = \mathrm{tr}\, A\big)$.

27.6 Инвариантность определителя и следа матрицы линейного оператора относительно замены базиса

Замечание. $\det A$ и $\mathrm{tr}\, A$ являются инвариантами самого линейного оператора φ.
Обозначаются: $\det\varphi$, $\mathrm{tr}\,\varphi$.

27.7 Подобные матрицы, отношение подобия на множестве квадратных матриц фиксированного порядка

Определение 107. Матрицы $A, A' \in M_n$ называются *подобными*, если $\exists C \in M_n^0(F)$, такая что $A' = C^{-1}AC$.

Замечание. Отношение подобия является отношением эквивалентности на $M_n(F)$.
$M_n(F)$ разбивается на классы подобных матриц.

27.8 Критерий обратимости линейного оператора в терминах его ядра, образа и определителя

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$.

Предложение. Следующие условия эквивалентны:

1. $\ker\varphi = \{0\}$.
2. $\operatorname{Im}\varphi = V$.
3. φ обратима (то есть φ — изоморфизм V на себя).
4. $\det\varphi \neq 0$.

Доказательство.

1) $\iff$ 2) так как $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi$.

1)&2) $\iff$ 3)

2) $\iff$ 4) $\operatorname{Im}\varphi = V \iff \operatorname{rk}\varphi = \dim V \iff \det\varphi \neq 0$.

■

Определение 108. Линейный оператор $\varphi \in \mathrm{L}(V)$ называется *вырожденным*, если $\det\varphi = 0$,
невырожденным, если $\det\varphi \neq 0$.

27.9 Подпространства, инвариантные относительно линейного оператора

Определение 109. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантным относительно* φ (или φ-*инвариантным*), если $\varphi(U) \subseteq U$ (то есть $\varphi(u) \in U\ \forall u \in U$).

В этой ситуации корректно определён линейный оператор $\varphi\big|_U : U \to U$, $u \mapsto \varphi(u)$ называется *ограничением* φ на инвариантное подпространство U.

27.10 Примеры

1. Подпространства $\{0\}$ и V всегда φ-инвариантны.
2. $\ker\varphi$ — φ-инвариантно, так как $\varphi(\ker\varphi) = \{0\} \subseteq \ker\varphi$.
3. $\operatorname{Im}\varphi$ — φ-инвариантно, так как $\varphi(\operatorname{Im}\varphi) \subseteq \varphi(V) = \operatorname{Im}\varphi$.

27.11 Наблюдения

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$.

1. Пусть $U \subseteq V$ — φ-инвариантное подпространство, $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U, дополним его до базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ всего V.

   Тогда $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид
$$\begin{array}{c} \\ k \\ n-k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3}$$

   При этом $A\left(\varphi\big|_U, (e_1, \ldots, e_k)\right) = A$.

   Если $U = \ker\varphi \implies A = 0$,
   $U = \operatorname{Im}\varphi \implies C = 0$.

   Обратно, если для некоторого базиса $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_k)$ $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид (3), то векторы $e_1, \ldots, e_k$ порождают φ-инвариантное подпространство.

2. Аналогично: $e_{k+1}, \ldots, e_n$ порождают φ-инвариантное подпространство $\iff A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид
$$\begin{array}{c} \\ k \\ n-k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Пусть $U_1, U_2 \subseteq V$ — два φ-инвариантных подпространства, такие что $V = U_1 \oplus U_2$.
   Пусть $(e_1, \ldots, e_k)$ — базис U_1, $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ — базис U_2. Тогда, $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V и $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} k & n-k \end{matrix} \\ \begin{matrix} k \\ n-k \end{matrix} & \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \diamond \end{pmatrix} \end{array}.$$

4. $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет блочно-диагональный вид

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_s \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ & & & * \end{pmatrix} & \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{matrix} \end{array}$$

   Тогда и только тогда, когда подпространства $U_1, \ldots, U_s$ φ-инвариантны, где

$$\begin{aligned} U_1 &= \langle e_1, \ldots e_{k_1} \rangle \\ U_2 &= \langle e_{k_1+1}, \ldots, e_{k_2} \rangle \\ &\vdots \\ U_s &= \langle e_{n-k_s+1}, \ldots, e_n \rangle \end{aligned}$$

   Предел мечтаний: найти такой базис $\mathbb{e}$, что $A(\varphi, \mathbb{e})$ диагональна.

   К сожалению, это не всегда возможно. 

28 Лекция 16.04.2020

Если у вас ощущение, что в конспекте баг, можете проверить снимок доски, запись и слайды.

28.1 Собственные векторы, собственные значения и спектр линейного оператора

Определение 110.

1. Вектор $v \in V$ называется *собственным* для φ, если $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$.
2. Элемент $\lambda \in F$ называется *собственным значением* для φ, если $\exists v \in V$, такой что $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$.

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Spec}\varphi$.

В ситуации $\varphi(v) = \lambda v$, $v \neq 0$ говорят, что
- v является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ.
- λ является собственным значением, отвечающим собственному вектору v.

Примеры

1. $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ — скалярный оператор $\implies$ всякий вектор $v \neq 0$ является собственным с собственным значением λ.
   $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda\}$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую $l \ni 0$.
   Собственные векторы:
   $0 \neq v \in l \implies \varphi(v) = 1 \cdot v \implies \lambda = 1$
   $0 \neq v \in l^\perp \implies \varphi(v) = 0 = 0 \cdot v \implies \lambda = 0$
   $\operatorname{Spec}\varphi = \{0, 1\}$.
3. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол $\alpha \neq \pi k$.
   $(\alpha = 2\pi k \implies \varphi = \mathrm{Id}; \quad \alpha = \pi + 2\pi k \implies \varphi = -\mathrm{Id})$
   Собственных векторов нет.
   $\operatorname{Spec}\varphi = \varnothing$.
4. $V = F[x]_{\leqslant n}$, $\varphi\colon f \mapsto f'$.
   $0 \neq f \in V$ — собственный вектор $\iff \deg f = 0$, при этом $\varphi(f) = 0 = 0 \cdot f \implies \lambda = 0$.
   $\operatorname{Spec}\varphi = \{0\}$.

Предложение. $v \in V \setminus \{0\}$ — собственный вектора для $\varphi \iff \langle v \rangle$ — φ-инвариантное подпространство.

Доказательство.

$\implies$ $\varphi(v) = \lambda v \implies \varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu\lambda v \in \langle v \rangle \implies \langle v \rangle$ φ-инвариантно.

$\impliedby$ $\varphi(v) \in \langle v \rangle \implies \exists \lambda \in F : \varphi(v) = \lambda v$. ∎

28.2 Диагонализуемые линейные операторы

Определение 111. Линейный оператор φ называется *диагонализуемым*, если существует базис в V, в котором матрица линейного оператора φ диагональна.

28.3 Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах собственных векторов

Предложение. Линейный оператор φ диагонализуем $\iff$ в V есть базис из собственных векторов.

Доказательство. Пусть $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис V.

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \varphi(e_i) = \lambda_i e_i \ \forall i = 1, \ldots, n \iff \text{все } e_i \text{ — собственные векторы для } \varphi$$

∎

Примеры

1. $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ — скалярный оператор
   $v \in V \setminus \{0\} \implies v$ — собственный вектор.
   φ диагонализуем: любой базис состоит из собственных векторов.
2. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую $l \ni 0$.
   Собственные векторы: $v \in l \setminus \{0\}$ или $v \in l^\perp \setminus \{0\}$.
   φ диагонализуем: $e_1 \in l \setminus \{0\}$, $e_2 \in l^\perp \setminus \{0\} \implies (e_1, e_2)$ — базис из собственных векторов.
3. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол $\alpha \neq \pi k$.
   Собственных векторов нет $\implies$ φ не диагонализуем.
4. $V = F[x]_{\leqslant n}$, $\varphi\colon f \mapsto f'$.
   $0 \neq f \in V$ — собственный вектор $\iff \deg f = 0$.
   Собственных векторов «мало»: φ диагонализуем $\iff n = 0$.

28.4 Собственное подпространство, отвечающее фиксированному собственному значению линейного оператора

Пусть $\varphi \in \mathrm{L}(V)$, $\lambda \in F$.
$V_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

Упражнение. $V_\lambda(\varphi)$ — подпространство в V.

Лемма 28.1. $V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \iff \lambda \in \operatorname{Spec} \varphi$.

Доказательство. Следует из определения. ∎

Определение 112. $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \implies V_\lambda(\varphi)$ называется *собственным подпространством* линейного оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Замечание. $V_\lambda(\varphi)$ φ-нивариантно, $\quad \varphi\big|_{V_\lambda(\varphi)} = \lambda \cdot \mathrm{Id}\big|_{V_\lambda(\varphi)}$.

Предложение. $\forall \lambda \in F \quad V_\lambda(\varphi) = \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$.

Доказательство. $v \in V_\lambda(\varphi) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \varphi(v) - \lambda v = 0 \iff (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})v = 0 \iff v \in \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id})$. ∎

Следствие. $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \iff \det(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0$.

Доказательство. $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \iff V_\lambda(\varphi) \neq \{0\} \iff \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\} \iff \det(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0$. ∎

28.5 Характеристический многочлен линейного оператора

Определение 113. Многочлен $\chi_\varphi(t) := (-1)^n \det(\varphi - t \cdot \mathrm{Id}) \in F[t]$ называется *характеристическим многочленом* линейного оператора φ.

28.6 Связь спектра линейного оператора с его характеристическим многочленом

Если $\mathbb{e}$ — какой-либо базис V и $A = (a_{ij}) = A(\varphi, \mathbb{e})$, то

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \det(A - tE) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}$$

$\chi_\varphi(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$, где $c_{n-1} = -\operatorname{tr} \varphi$, $c_0 = (-1)^n \det \varphi$.

Следствие. $\lambda \in \operatorname{Spec} \varphi \iff \chi_\varphi(\lambda) = 0$, то есть λ — корень характеристического многочлена.

Следствие. $|\operatorname{Spec} \varphi| \leqslant n$.

28.7 Существование собственного вектора для линейного оператора в комплексном векторном пространстве

Следствие. $F = C \implies$ всякий линейный оператор φ обладает собственным вектором.

Доказательство. По основной теореме алгебры комплексных чисел $\chi_\varphi(t)$ имеет корень. ■

28.8 Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения линейного оператора, связь между ними

Пусть $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

Пусть $a_\lambda = a_\lambda(\varphi) :=$ кратность λ как корня многочлена $\chi_\varphi(t)$. То есть $\chi_\varphi(t) \,\vdots\, (t-\lambda)^{a_\lambda}$ и $\chi_\varphi(t) \not\vdots\, (t-\lambda)^{a_\lambda+1}$.

Определение 114. a_λ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ.

Определение 115. Число $g_\lambda = g_\lambda(\varphi) := \dim V_\lambda(\varphi)$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ.

Замечание. $a_\lambda \geqslant 1$, $g_\lambda \geqslant 1$ $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

Предложение. $g_\lambda \leqslant a_\lambda$ $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

Доказательство. Выберем в $V_\lambda(f)$ базис $e_1, \dots, e_{g_\lambda}$ и дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{e}$ всего V. Тогда $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \\
0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & B \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ \hline
 & & 0 & & & C
\end{array}\right) & \begin{array}{c} g_\lambda \\ \\ n-g_\lambda \end{array} \\
\begin{array}{cc} \qquad g_\lambda \qquad & \qquad n-g_\lambda \end{array} &
\end{array}$$

Следовательно,

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|c}
\lambda - t & \dots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & B \\
0 & \dots & \lambda - t & \\ \hline
 & 0 & & C - tE
\end{array}\right)$$

$$= (-1)^n (\lambda - t)^{g_\lambda} \cdot \underbrace{\det(C - tE)}_{\text{некий многочлен}} \;\vdots\; (t - \lambda)^{g_\lambda} \implies a_\lambda \geqslant g_\lambda.$$

■

28.9 Линейная независимость собственных подпространств линейного оператора, отвечающих попарно различным собственным значениям

Предложение. Пусть $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \operatorname{Spec}\varphi$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогда собственные подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \dots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы.

Доказательство. Индукция по s.

База $s = 1$ — ясно.

Шаг Пусть для $< s$ доказано, докажем для s.

Возьмем $v_i \in V_{\lambda_i}(\varphi)$ $\forall i = 1, \dots, s$ и предположим, что $v_1 + \dots + v_s = 0$ $(\star)$.

Тогда $\varphi(v_1 + \dots + v_s) = \varphi(0) = 0 \implies$

$\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_s) = 0 \implies$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = 0.$

Вычтем отсюда $(\star) \cdot \lambda_s$:

$$\underset{\neq 0}{(\lambda_1 - \lambda_s)} v_1 + \dots + \underset{\neq 0}{(\lambda_{s-1} - \lambda_s)} v_{s-1} = 0.$$

По предположению индукции получаем $v_1 = \dots = v_{s-1} = 0$, а значит и $v_s = 0$. ■

28.10 Диагонализуемость линейного оператора, у которого число корней характеристического многочлена равно размерности пространства

Следствие. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет ровно n различных корней, то φ диагонализуем.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — все корни многочлена $\chi_\varphi(t)$.
Тогда $\forall i = 1, \ldots, n\ \dim V_{\lambda_i}(\varphi) = 1$. Для каждого i выберем $e_i \in V_{\lambda_i}(\varphi) \setminus \{0\}$.
Тогда $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы по предложению, а значит $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис из собственных векторов.
Следовательно, φ диагонализуем. ∎

Теорема 28.2. *(критерий диагонализуемости) φ диагонализуемо $\iff$ выполнены одновременно следующие условия:*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители.*
2. *если $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{k_s}$, то $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}\ \forall i$. (то есть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$)*

Замечание. Если выполнено только 1), то φ можно привести к жордановой нормальной форме:
$\exists$ базис $\mathbb{e}$, такой что $A(\varphi, \mathbb{e})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{\mu_1}^{m_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\mu_2}^{m_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\mu_s}^{m_s} \end{pmatrix},$$

где $J_\mu^m \in M_n(F)$ — жорданова клетка порядка m с собственным значением μ.

$$J_\mu^m = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

29 Лекция 23.04.2020

Конспект полностью написан по снимку доски, записи лекции и слайдам, возможны баги при переписывании. Если хочется понять точно ли что-то правда, лучше смотреть туда.

29.1 Критерий диагонализуемости линейного оператора в терминах его характеристического многочлена, а также алгебраической и геометрической кратностей его собственных значений

Пусть V — векторное пространство над F, $\dim V = n$, $\varphi \in \mathrm{L}(V)$ — линейный оператор.

Теорема 29.1. *(критерий диагонализуемости) φ диагонализуемо $\iff$ выполняются одновременно следующие 2 условия:*

1. *$\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители.*
2. *$\forall \lambda \in \operatorname{Spec}\varphi \quad g_\lambda = a_\lambda$.*

Доказательство.

$\implies$ φ диагонализуемо $\implies$ $\exists$ базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, такой что $\chi_\varphi(t)$ разлагается на линейные множители:

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi(t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_1 - t & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 - t & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n - t \end{vmatrix} = (t - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (t - \mu_n).$$

Перепишем $\chi_\varphi(t)$ в виде $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$, где $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, $\quad \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

$\forall i = 1, \ldots, s$ имеем $V_{\lambda_i}(\varphi) \supseteq \langle e_j \mid \mu_j = \lambda_i \rangle \implies \dim V_{\lambda_i}(\varphi) \geqslant k_i$, то есть $g_{\lambda_i} \geqslant a_{\lambda_i}$.

Но мы знаем, что $g_{\lambda_i} \leqslant a_{\lambda_i}$. Следовательно, $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i}$.

$\impliedby$ Пусть $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Так как подпространства $V_{\lambda_1}(\varphi), \ldots, V_{\lambda_s}(\varphi)$ линейно независимы, то

$$\dim(V_{\lambda_1}(\varphi) + \cdots + V_{\lambda_s}(\varphi)) = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \cdots + \dim V_{\lambda_s}(\varphi) = k_1 + \cdots + k_s = n = \dim V.$$

Следовательно, $V = V_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}(\varphi)$.

Если $\mathbb{e}_i$ — базис в $V_{\lambda_i}(\varphi)$, то $\mathbb{e} = \mathbb{e}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{e}_s$ — базис всего V, состоящий из собственных векторов, а значит φ диагонализуем. ∎

Примеры

1. $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ — скалярный оператор.

   Для всякого базиса $\mathbb{e}$ в V имеем $A(\varphi, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$.

   $\chi_\varphi(t) = (t - \lambda)^n$.

   $\operatorname{Spec}\varphi = \{\lambda\}$, $a_\lambda = n = g_\lambda \implies$ условия 1) и 2) выполнены.

2. $V = \mathbb{R}^2$, φ — ортогональная проекция на прямую $l \ni 0$.

   $e_1 \in l \setminus \{0\}$, $e_2 \in l^\perp \setminus \{0\}$, $\mathbb{e} = (e_1, e_2) \implies A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $\chi_\varphi(t) = t(t-1) \implies \operatorname{Spec}\varphi = \{0, 1\}$.

   $\lambda = 0, 1 \implies a_\lambda = 1 = g_\lambda \implies$ условия 1) и 2) выполнены.

3. $V = \mathbb{R}^2$, φ — поворот на угол $\alpha \neq \pi k$.

   $\mathbb{e} = (e_1, e_2)$ — положительно ориентированный базис $\implies A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

   $\chi_\varphi(t) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin a & \cos\alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\alpha \cdot t + 1.$

   $\frac{D}{4} = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2 a < 0 \implies$ нет корней в $\mathbb{R} \implies \chi_\varphi(t)$ не разлагается на линейные множители над $\mathbb{R} \implies$ 1) не выполнено $\implies \varphi$ не диагонализуем над $\mathbb{R}$.

   Однако φ диагонализуем над $\mathbb{C}$!

4. $V = F[x]_{\leqslant n}$, $n \geqslant 1$; $\quad \varphi\colon f \mapsto f'$.

   Техническое условие: $\operatorname{char} F = 0$ ($\iff$ $\operatorname{ord} 1 = \infty$ в группе $(F,+)$), например, $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ подходят.

   $$\mathbb{e} = (1, x, \ldots, x^n) \implies A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

   $\chi_\varphi(t) = t^{n+1} \implies \operatorname{Spec}\varphi = \{0\} \implies$ 1) выполнено.

   $\lambda = 0 \implies a_\lambda = n+1$; $\quad V_\lambda(\varphi) = \langle 1 \rangle \implies g_\lambda = 1 < a_\lambda \implies$ 2) не выполнено $\implies \varphi$ не диагонализуем.

   $$\mathbb{e}' = \left(1, x, \tfrac{x^2}{2}, \ldots, \tfrac{x^n}{n!}\right) \implies A(\varphi, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = J_0^{n+1} \text{ — это жорданова клетка}$$

29.2 Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства у линейного оператора в действительном векторном пространстве

Теорема 29.2. $F = \mathbb{R} \implies \forall \varphi \in L(V)\ \exists$ *либо* 1*-мерное, либо* 2*-мерное* φ*-инвариантное подпространство.*

Доказательство. Если $\chi_\varphi(t)$ имеет действительные корни, то в V есть собственный вектор $\implies$ 1-мерное φ-инвариантное подпространство.

Пусть $\chi_\varphi(t)$ не имеет корней в $\mathbb{R}$. Возьмем какой-нибудь комплексный корень $\lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$.

Фиксируем базис $\mathbb{e}$ в V и положим $A = A(\varphi, \mathbb{e})$. Для $\lambda + i\mu$ у матрицы A существует комплексный собственный вектор, то есть такое $u, v \in \mathbb{R}^n$, что

$$A(u + iv) = (\lambda + i\mu)(u + iv) \implies Au + iAv = \lambda u - \mu v + i(\lambda v + \mu u) \implies \begin{cases} Au &= \lambda u - \mu v \\ Av &= \lambda v + \mu u \end{cases}.$$

Значит, векторы в V с координатами u, v порождают φ-инвариантное подпространство $U \subseteq V$ размерности $\leqslant 2$. ■

Упражнение. $\dim U = 2$.

29.3 Отображение, сопряжённое к линейному отображению между двумя евклидовыми пространствами: определение, существование и единственность. Матрица сопряжённого отображения в паре произвольных и паре ортонормированных базисов

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet,\bullet)$, $\quad \dim \mathbb{E} = n$,

$\mathbb{E}$ — другое евклидово пространство со скалярным произведением $(\bullet,\bullet)'$, $\quad \dim \mathbb{E}' = m$,

$\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$.

Определение 116. Линейное отображение $\psi\colon \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ называется *сопряженным* к φ, если

$$(\varphi(x), y)' = (x, \psi(y)) \quad \forall x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{E}'. \tag{$\star$}$$

Обозначение: φ^*.

Предложение.

1. ψ существует и единственно.

2. Если $\mathbb{e}$ — базис $\mathbb{E}$, $\mathbb{f}$ — базис $\mathbb{E}'$, $\begin{matrix} G = G(e_1, \ldots, e_n) \\ G' = G(f_1, \ldots, f_m) \end{matrix}$ и $\begin{matrix} A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) \\ A_\psi = (A, \psi, \mathbb{f}, \mathbb{e}), \end{matrix}$ то $A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G'$.

   В частности, если $\mathbb{e}$ и $\mathbb{f}$ ортонормированы, то $A_\psi = A_\varphi^T$.

Доказательство. $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{E}$, $y = y_1 f_1 + \cdots + y_m f_m \in \mathbb{E}'$.

$$(\varphi(x), y)' = \left(A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}\right)^T \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n) \cdot A_\varphi^T \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

$$(x, \psi(y)) = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot A_\psi \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Так как $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \quad b_{ij} = (0 \dots 0 \underset{i}{1}\, 0 \dots 0) \cdot B \cdot (0 \dots 0 \underset{j}{1}\, 0 \dots 0)^T$, то $(\star) \iff A_\varphi^T G' = G A_\psi \iff A_\psi = G^{-1} A_\varphi^T G'$.

Отсюда следуют сразу оба утверждения. ■

29.4 Сопряжённый оператор в евклидовом пространстве

29.5 Самосопряжённые (симметрические) операторы

Пусть теперь $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

$\varphi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ — линейный оператор $\implies \exists!$ линейный оператор $\varphi^* \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, такой что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$.

Определение 117. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *самосопряженным* (или *симметричным*), если $\varphi = \varphi^*$, то есть $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$‘.

29.6 Существование собственного вектора у самосопряжённого оператора

Если $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{E}$, $A_\varphi = A(\varphi, \mathbb{e})$, $A_{\varphi^*} = A(\varphi^*, \mathbb{e})$, то $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$.

Следовательно, $\varphi = \varphi^* \iff A_\varphi = A_\varphi^T$.

Предложение. Если $\varphi = \varphi^*$, то $\exists$ собственный вектор для φ.

Доказательство. Было: $\exists$ либо 1) 1-мерное φ-инвариантное подпространство, либо 2) 2-мерное φ-инвариантное подпространство.

1. ок.
2. $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ-инвариантное подпространство, $\dim U = 2$.

   Фиксируем ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2)$. Пусть $\psi = \varphi\big|_U$.

   Значит, $\psi = \psi^* \implies A(\psi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

   Отсюда, $\chi_\psi(t) = \begin{vmatrix} a - t & b \\ b & c - t \end{vmatrix} = t^2 - (a + c)t + ac - b^2$.

   $D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geqslant 0$.

   Следовательно, $\chi_\psi(t)$ имеет корни в $\mathbb{R}$, то есть в U есть собственный вектор для ψ, он же собственный вектор для φ. ■

29.7 Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно самосопряжённого оператора

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ-инвариантное подпространство, тогда $U^\perp$ — тоже φ-инвариантное подпространство.

Доказательство. $\varphi(U) \subseteq U$, хотим $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$. $\quad \forall x \in U^\perp \quad \forall y \in U \quad (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = 0 \implies \varphi(x) \in U^\perp$. ■

30 Лекция 23.04.2020

Конспект полностью написан по снимку доски и записи лекции, возможны баги при переписывании. Если хочется понять точно ли что-то правда, лучше смотреть туда.

30.1 Теорема о существовании у самосопряжённого оператора ортонормированного базиса из собственных векторов

Теорема 30.1. $\varphi = \varphi^* \implies$ *в* $\mathbb{E}$ *существует ортонормированный базис из собственных векторов.*
В частности, φ *диагонализуем над* $\mathbb{R}$ *и* $\chi_\varphi(t)$ *разлагается на линейные множители над* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Индукция по n:

База $n = 1$ — ясно.

Шаг $n > 1$. Тогда существует собственный вектор v для φ. Положим $e_1 = \dfrac{v}{|v|} \implies |e_1| = 1$.

$U = \langle e_1 \rangle^\perp$ — φ-инвариантное подпространство, $\dim U < n \implies$ по предположению индукции в U существует ортонормированный базис $(e_2, \ldots, e_n)$ из собственных векторов. Тогда $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — искомый базис. ∎

30.2 Попарная ортогональность собственных подпространств самосопряжённого оператора

Предложение. $\varphi = \varphi^*$, $\lambda, \mu \in \operatorname{Spec} \varphi$, $\lambda \neq \mu \implies \mathbb{E}_\lambda(\varphi) \perp \mathbb{E}_\mu(\varphi)$.

Доказательство.

$$x \in \mathbb{E}_\lambda(\varphi), y \in \mathbb{E}_\mu(\varphi) \implies \lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Так как $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. ∎

30.3 Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям

Теорема 30.2. *(приведение квадратичной формы к главным осям) Для любой квадратичной формы* $Q\colon \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *существует ортонормированный базис* $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, *в котором* Q *принимает канонический вид* $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. *Более того, набор* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *определен однозначно, с точностью до перестановки.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — какой-то ортонормированный базис. Рассмотрим линейный оператор $\varphi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, такой что $A(\varphi, \mathbb{f}) = B(Q, \mathbb{f})$ ($\varphi = \varphi^*$, так как $B(Q, \mathbb{f})$ симметрична).
Если $\mathbb{f}' = (f_1', \ldots, f_n')$ — другой ортонормированный базис, то $\mathbb{f}' = \mathbb{f} \cdot C$, где C — ортонормированная матрица ($C^T C = \mathbb{E} \iff C^T = C^{-1}$). Тогда $A(\varphi, \mathbb{f}') = C^{-1} A(\varphi, \mathbb{f}) C = C^T B(Q, \mathbb{f}) C = B(Q, \mathbb{f}')$.
Значит, в любом ортонормированном базисе φ и Q имеют одинаковые матрицы.

По теореме, существует ортонормированный базис $\mathbb{e}$, такой что $A(\varphi, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Тогда $B(Q, \mathbb{e}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Единственность для $\{\lambda_i\}$ следует из того, что набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — это спектр φ (с учетом кратностей). ∎

Следствие. $A = M_n(\mathbb{R}), A = A^T \implies \exists$ ортогональная матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$, такая что $C^{-1} A C = C^T A C = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки.

30.4 Ортогональные линейные операторы, пять эквивалентных условий

Определение 118. Линейный оператор $\varphi \in L(\mathbb{E})$ называется *ортогональным*, если $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ (то есть φ сохраняет скалярное произведение).

Теорема 30.3. $\varphi \in L(\mathbb{E}) \implies$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) φ *ортогонален.*

(2) $|\varphi(x)| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{E}$ *(то есть* φ *сохраняет длины векторов).*

(3) $\exists \varphi^{-1}$ *и* $\varphi^{-1} = \varphi^*$ *(то есть* $\varphi^* \varphi = \varphi \varphi^* = \operatorname{Id}$*).*

(4) $\forall$ *ортонормированного базиса* $\mathbb{e}$ *матрица* $A(\varphi, \mathbb{e})$ *ортогональна.*

(5) $\forall$ *ортонормированного базиса* $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *векторы* $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ *образуют ортонормированный базис.*

Доказательство.

(1) $\implies$ **(2)** $|\varphi(x)| = \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x))} = \sqrt{(x, x)} = |x|$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) $$(\varphi(x),\varphi(y)) = \frac{1}{2}\left[(\varphi(x+y),\varphi(x+y)) - (\varphi(x),\varphi(x)) - (\varphi(y),\varphi(y))\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[|\varphi(x+y)|^2 - |\varphi(x)|^2 - |\varphi(y)|^2\right] = \frac{1}{2}\left[|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right] = (x,y)$$

(1) & (2) $\Longrightarrow$ (3) $|\varphi(x)| = 0 \implies |x| = 0 \implies x = 0 \implies \ker\varphi = \{0\} \implies \exists\varphi^{-1}$.

$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) \implies \varphi^{-1} = \varphi^*$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $\mathbb{e}$ — ортонормированный базис, $A = A(\varphi, \mathbb{e}) \implies \begin{matrix} A(\varphi^{-1}, \mathbb{e}) = A^{-1} \\ A(\varphi^*, \mathbb{e}) = A^T \end{matrix}$

Так как $\varphi^{-1} = \varphi^*$, то $A^{-1} = A^T \implies A$ ортогональная.

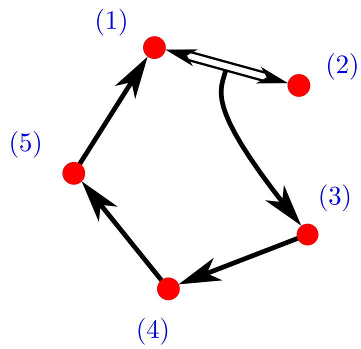
(4) $\Longrightarrow$ (5) $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис, $A = A(\varphi, \mathbb{e}) \implies (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) \cdot A$.

Так как A ортогональная, то $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ — ортонормированный базис.

(5) $\Longrightarrow$ (1) $(e_1, \ldots, e_n)$ — ортонормированный базис $\implies (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ — тоже ортонормированный базис.

$$\begin{matrix} x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \\ y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \end{matrix} \implies \begin{matrix} \varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) \\ \varphi(y) = y_1\varphi(e_1) + \cdots + y_n\varphi(e_n) \end{matrix} \implies$$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \underbrace{G(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \underbrace{G(\mathbb{e})}_{=E} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = (x, y).$$ ■



30.5 Описание ортогональных операторов в одномерном и двумерном евклидовых пространствах

1. $\dim\mathbb{E} = 1$.

   φ ортогонально $\iff \varphi = \pm\mathrm{Id}$.

2. $\dim\mathbb{E} = 2$, $\quad \mathbb{e} = (e_1, e_2)$ — ортонормированный базис $\implies \varphi(e_1), \varphi(e_2)$ — тоже ортонормированный базис.

   Два случая:

   (a) φ — поворот на угол α.

   $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

   (b) φ — поворот на угол α и отражение относительно $\langle\varphi(e_1)\rangle$.

   $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

   Если l — биссектриса угла $\angle(e_1, \varphi(e_1))$, то $\quad \varphi(x) = x \quad \forall x \in l,$
   $\varphi(x) = -x \quad \forall x \in l^{\perp}.$

   $e_1' \in l, e_2' \in l^{\perp}, |e_1'| = |e_2'| = 1, \mathbb{e}' = (e_1', e_2') \implies A(\varphi, \mathbb{e}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Значит φ — отражение относительно l.

30.6 Инвариантность ортогонального дополнения к подпространству, инвариантному относительно ортогонального оператора

Предложение. Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, $U \subseteq \mathbb{E}$ — φ-инвариантное подпространство, то $U^\perp$ тоже φ-инвариантно.

Доказательство. Пусть $\psi := \varphi\big|_U$. Тогда ψ — ортогональный оператор в U, в частности ψ обратим.

Хотим: $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp \quad \forall x \in U^\perp \ \forall y \in U$.

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y) = (x, \varphi^{-1}(y)) = (\underbrace{x}_{\in U^\perp}, \underbrace{\psi^{-1}(y)}_{\in U}) = 0. \qquad \blacksquare$$

30.7 Теорема о каноническом виде ортогонального оператора

Теорема 30.4. *Если $\varphi \in L(\mathbb{E})$ — ортогональный оператор, то существует ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, такой что*

$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Pi(\alpha_2) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Pi(\alpha_k) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (\star)$$

Доказательство. Индукция по n:

$n = 1, 2$ — было.

$n > 2$ Существует 1-мерное или 2-мерное φ-инвариантное подпространство. В нём требуемый базис найдется.

Так как $U^\perp$ φ-инвариантно и $\dim U^\perp < n$, то по предположению индукции в $U^\perp$ тоже найдется такой базис.

Объединяя эти базисы U и $U^\perp$, получаем ортонормированный базис, в котором матрица φ имеет требуемый вид с точностью до перестановки блоков. $\blacksquare$

30.8 Классификация ортогональных операторов в трёхмерном евклидовом пространстве

Следствие. $\dim \mathbb{E} = 3 \implies \exists$ ортонормированный базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, такой что $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ для некоторого α.

Доказательство. Применяя теорему, получаем ($\star$). Если в ($\star$) есть блок $\Pi(\alpha)$, то ОК.

Иначе, $A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$. Но $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi(0)$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Pi(\pi)$. $\blacksquare$

Тип 1 $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — поворот на угол α вокруг прямой, натянутой на $\langle e_3 \rangle$.

Тип 2 $\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — тоже самое + отражение относительно плоскости относительно плоскости $\langle e_1, e_2 \rangle$.
("зеркальный поворот")