

Математический Анализ - 2

Авторы [конспекта 24/25 года](#), на основе которого написан текущий:

Винер Даниил | [github](#) Нарек Хорянян | [github](#)

Авторы [текущего конспекта](#):

Жуков Андрей | [github](#) coffecat46 | [github](#)

Версия от 07.12.2025 13:06

Содержание

1 Лекция 1	3
1.1 Брус. Мера бруса	3
1.2 Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n	3
1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	3
1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	4
1.5 Пример константной функции	5
1.6 Пример неинтегрируемая функция	5
1.7 Вычисление многомерного интеграла	5
2 Лекция 2	7
2.1 Необходимое условие интегрирования.	7
2.2 Свойства интеграла Римана	7
2.3 Множество меры нуль по Лебегу	8
2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу	8
3 Лекция 3	11
3.1 Критерий замкнутости	12
4 Лекция 4	13
4.1 Замкнутый брус — компакт	13
4.2 Критерий компактности	14
5 Лекция 5	16
5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте	16
5.2 Расстояние между двумя множествами	16
5.3 Расстояние между непересекающимися компактами	16
5.4 Колебание функции на множестве	17
5.5 Колебание функции в точке	17
5.6 Колебание функции, непрерывной в точке	17
5.7 Пересечение разбиений бруса	17
5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману	18
5.9 Измельчение разбиения	20

6 Лекция 6	21
6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу	21
6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней	21
6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения	21
6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе	21
6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу	21
7 Лекция 7	22
7.1 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу	22
7.2 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману	23
7.3 Интегрирование по допустимым множествам	23
8 Лекция 8	25
8.1 Интегрирование по допустимым множествам(Продолжение)	25
8.2 Теорема Фубини	25
8.3 Теорема о замене переменных в кратном интеграле	27

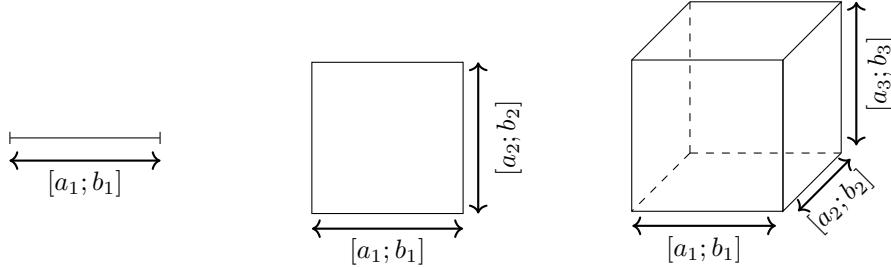
1 Лекция 1

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в \mathbb{R}^n — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, n\}\} \\ &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{a_i, b_i\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.



Пример брусов размерности с 1 по 3

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$, где $\lambda \geq 0$
2. **Аддитивность:** Пусть I, I_1, \dots, I_k — брусы

Тогда, если $\forall i, j \ I_i, I_j$ не имеют общих внутренних точек, и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$, тогда

$$|I| \leq \sum_{i=1}^k |I_i|$$

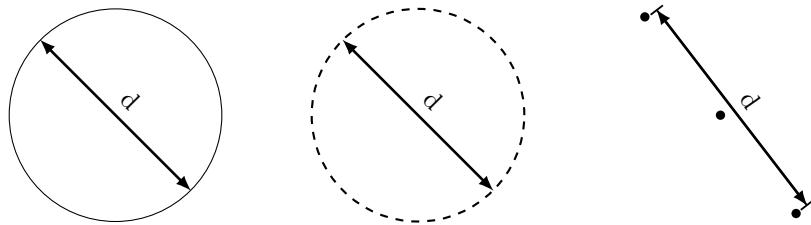
1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек.

Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}_i\}_{i=1}^k$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$\begin{aligned} d(M) &= \sup_{x, y \in M} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$



Пример диаметра для разных ограниченных множеств (Для всех трёх он равен d)

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

Определение. Пусть $\forall I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченое разбиение — пара (\mathbb{T}, ξ)

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на (\mathbb{T}, ξ) — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

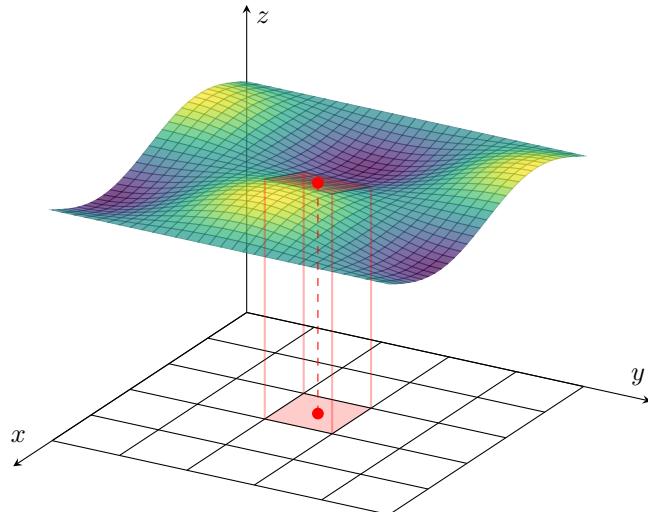
Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I ($f : I \rightarrow \mathbb{R}$), если

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int_I \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$



Пример интегрирования в \mathbb{R}^2 по определению

1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\begin{aligned}\forall(\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ &= \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|\end{aligned}$$

1.6 Пример неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \quad x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i нижние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} i \cdot j = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4}$$

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)(n-1)}{4n^4} = \frac{1}{4}$

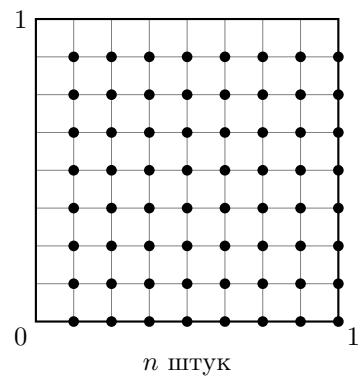


Рисунок того как мы выбираем в примере точки на разбиение

2 Лекция 2

2.1 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A \in \mathbb{R}$, такая что $\forall \varepsilon > 0$, а значит для $\varepsilon = 1$ тоже:

$$\exists \delta > 0: \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} \leq \delta \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < 1$$

Отсюда

$$A - 1 < \sigma < A + 1 \implies \sigma \text{ ограничена}$$

2. С другой стороны, так как предположили, что f — неограничена на I

$$\forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k \quad \exists i_0 : f \text{ неограничена на } I_{i_0}$$

Тогда рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \cdot |I_i| + f(\xi_{i_0}) \cdot |I_{i_0}|$$

Выбором подходящего ξ_{i_0} можно сделать $f(\xi_{i_0})$ сколь угодно большой $\implies \sigma$ будет не ограничена - противоречие

Из противоречия пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

2.2 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) : \exists A_f, \text{ что } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \quad &\text{верно } \left| \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \int_I f dx \right| =: |\sigma_f - A_f| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \\ g \in \mathcal{R}(I) : \exists A_g, \text{ что } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \quad &\text{верно } \left| \sigma(g, \mathbb{T}, \xi) - \int_I g dx \right| =: |\sigma_g - A_g| < \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} \end{aligned}$$

Тогда $\forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \min(\delta_f, \delta_g) = \delta :$

$$\begin{aligned} |\sigma(\alpha f + \beta g, \mathbb{T}, \xi) - \alpha A_f + \beta A_g| &= \left| \sum (\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)) \cdot |I_i| - \alpha A_f - \beta A_g \right| \leqslant \\ &\leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f \leq g \text{ на } I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta, \text{ выполняется } |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$\begin{cases} A_f - \varepsilon < \sigma_1 < A_f + \varepsilon \\ A_g - \varepsilon < \sigma_2 < A_g + \varepsilon \\ \sigma_f \leq \sigma_g \end{cases}$$

Отсюда

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f - \varepsilon < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| dx &\leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| &\leq \int_I f dx \leq \sup_I |f| |I| \end{aligned}$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

- $M \subset \bigcup_i I_i$
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Пример: $a \in \mathbb{R}$ — точка.

$$I = [a - \frac{\varepsilon}{3}, a + \frac{\varepsilon}{3}] \implies |I| = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a — \text{множество меры нуль по Лебегу}$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. Если в определении $\{I_i\}$ заменить на открытые брусы, то определение останется верным.

Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ не более чем счетный набор $\{I_i\}$: $M \subset \bigcup_i I_i$ и $\sum_i |I_i| < \varepsilon$

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — открытые брусы + границы = замкнутые брусы I_i , причём объём “добавленных” плоскостей будет нулевой, так как объём бруса $n - 1$ размерности, будет нулевым для объёма бруса размерности n

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, \text{ при этом } |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Мы хотим увеличить замкнутый брус в два раза и увеличенный брус взять открытым.

Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_i^1, b_i^1] \times \dots \times [a_i^n, b_i^n], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Так как $\left(\frac{a_i^k}{2}, \frac{b_i^k}{2}\right)$ — центр i -го бруса в k -ом измерении, увеличить изначальный брус в два раза по этому измерению можно сдвинувшись от центра не на половину, а на целую сторону, то есть на $b_i^k - a_i^k$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i &= \left(\frac{a_i^1 + b_i^1}{2} - (b_i^1 - a_i^1), \frac{a_i^1 + b_i^1}{2} + (b_i^1 - a_i^1) \right) \times \dots \times \left(\frac{a_i^n + b_i^n}{2} - (b_i^n - a_i^n), \frac{a_i^n + b_i^n}{2} + (b_i^n - a_i^n) \right) \\ \implies V_2 &= \sum_i |\tilde{I}_i| = 2^n \cdot V_1 < \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

2. Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль по Лебегу, то из $L \subset M \implies L$ — множество меры нуль по Лебегу

Доказательство. Докажем по транзитивности

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ не более чем счетный набор } \{I_i\} : L \subset M \subset \bigcup_i I_i \implies L \subset \bigcup_i I_i$$

По условию нам дано, что для $M \subset \bigcup_i I_i$ верно $\sum_i |I_i| < \varepsilon$, и тоже самое выполнено и для $L \subset \bigcup_i I_i$, тогда L по определению является множеством меры нуль по Лебегу \square

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль по Лебегу, тоже является множеством меры нуль по Лебегу

Доказательство. пусть $M = \bigcup_i^\infty M_k$ — объединение не более чем счетного числа множеств $\forall k M_k$ — множество меры нуль по Лебегу $\implies \forall k, \forall \varepsilon > 0 \exists \{I_i\}_{i=1}^\infty$ по определению множества меры нуль для них верно

- $M_k \subset \bigcup_i^\infty I_i^k$ ¹
- $\sum_i |I_i| < \varepsilon_k \quad \forall \varepsilon_k > 0$

¹ I_i^k — это i -ый для M_k , а не степень

Отсюда получаем $M = \bigcup_i^{\infty} M_k \subset \bigcup_i^{\infty} I_i^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^k| < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$ - если теперь взять $\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k}$, то мы получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

□

3 Лекция 3

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

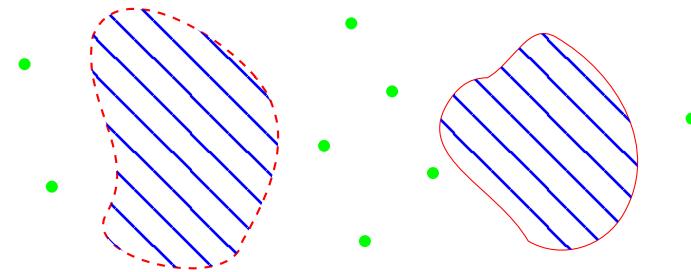
Пример. $M = [0; 1]$. тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

Обозначение. ∂M — множество всех граничных точек M



Синяя область - пример множества внутренних точек

Зеленые - пример внешних (изображена часть точек)

Красные границы - пример множества граничных точек (пример ∂M)

Пример. $M = [0; 1] \Rightarrow x = 0; 1$ — граничные

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *изолированной* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пример. $M = [0; 1] \cup \{3\} \Rightarrow x = 3$ — изолированная

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

Примечание. Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

Примечание. Точки прикосновения = изолированные точки \oplus предельные точки



Пример точек
Красные - изолированные. Зелёные - предельные

Синие точки - точки прикосновения

Определение. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием* M и обозначается как \bar{M}

Пример. $M = (0; 1) \cup (1; 2] \implies \bar{M} = [0; 2]$

Пример. $M = \{x \in [0; 1]: x \in \mathbb{Q}\} \implies \bar{M} = [0; 1]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

Пример. $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из \forall его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

Примечание. Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то K — не компакт

Пример. Пусть $M = (0, 1)$ покроем $\left\{ A_n = \left(0; 1 - \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \rightarrow \infty$ $M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, но \forall фиксированного N : $M \notin \bigcup_{n=1}^N A_n \implies$ не компакт

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

3.1 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\iff M$ содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. (*Необходимость*) Докажем \implies от противного

- Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто \implies все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \implies \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию $\implies M$ содержит все свои предельные точки □

2. (*Достаточность*) Докажем \Leftarrow

Пусть y_0 — не является предельной для M , то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \implies \exists r > 0$:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \implies \overset{\circ}{B}_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\implies \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\implies M$ — замкнуто по определению □

4 Лекция 4

4.1 Замкнутый брус — компакт

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Rightarrow I$ — компакт

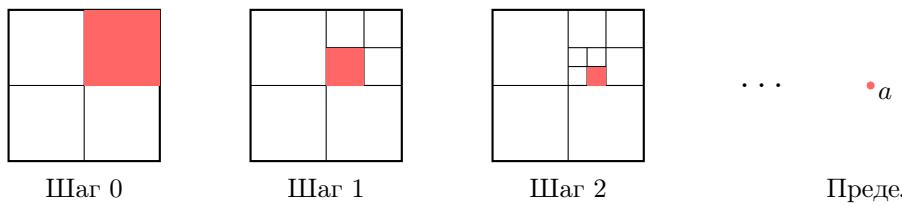
Доказательство. Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подпокрытия
 2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт
 3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

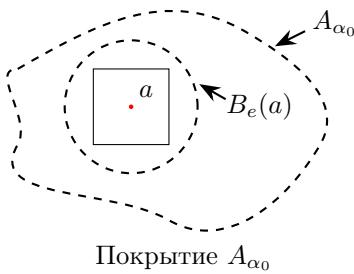
То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \dots, a_n)$



Последовательность вложенных брусов в \mathbb{R}^2 : на каждом шаге выбираем квадрат, что по предположению нельзя покрыть (выделен цветом) и делим его на 4 части. В итоге стягиваются в точку.

При этом, $\exists a = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

- $$4. \ a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$



5. Из построения получили, что $I \supset I_1 \supset \dots \supset a \implies \exists N : \forall n > N I_n \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

Получается, что $\forall n > N$ I_n покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое I_n не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_n \in A_{\alpha_0} \forall n > N \implies I - \text{компакт}$ \square

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

4.2 Критерий компактности

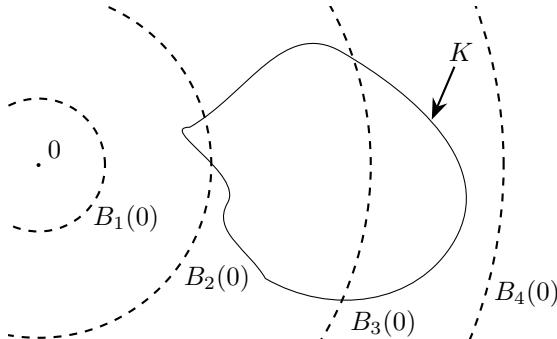
Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\iff K$ замкнуто и ограничено

Доказательство. Докажем необходимость (\Rightarrow)

- *Ограничность.* K — компакт $\Rightarrow \forall \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ можно выделить конечное подпокрытие \Rightarrow

\Rightarrow Пусть $\{A_\alpha\} = \{B_n(0)\}_{n=1}^\infty \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N K \subset \bigcup_{n=1}^N B_n(0)$ и так как $B_n(0)$ — вложены шары \Rightarrow

$\Rightarrow K \subset B_N(0) \Rightarrow$ по определению K — ограничено



Пример покрытия K вокруг точки 0 с помощью шаров

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}_{x \in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x, x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

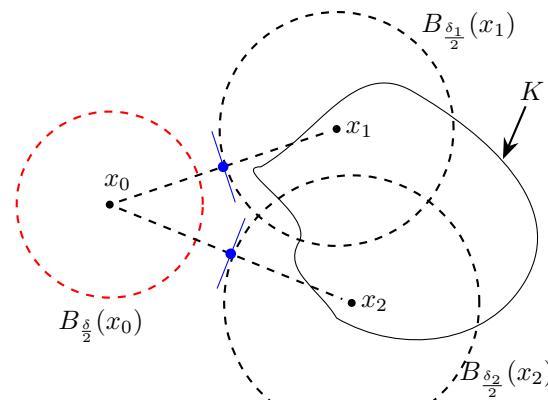
Так как K — компакт, $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$, тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset$$

Значит, x_0 не является предельной точкой K , что противоречит нашему предположению



Пример как мы строим $B_{\frac{\delta}{2}}$ вокруг точки x_0 .

Синие точки — середины отрезков на которых они лежат

Доказательство. Докажем достаточность

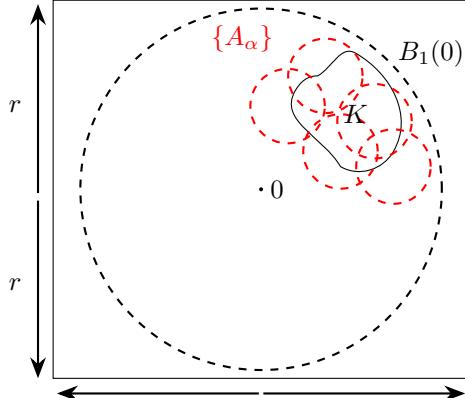
K — замкнуто и ограничено $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(0) \supset K \Rightarrow \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n$$

Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ — произвольное покрытие открытыми множествами для K . Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то \exists конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K — \text{покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению \square



Строим замкнутый брус вокруг точки 0, пользуясь существованием конечного покрытия покрываем наш компакт K

5 Лекция 5

5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство. • *Ограничность.* От противного: пусть существует последовательность $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$. Из ограниченности K следует ограниченность последовательности $\{x^k\}$, и как следствие ограничены последовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{|x_i^k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|^2} = \|x^k\| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у $\{x_1^k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_1^{k_{j_1}} \rightarrow a_1, j_1 \rightarrow \infty$. Для последовательности $\{x_2^{k_{j_1}}\}$ существует сходящаяся последовательность $x_2^{k_{j_2}} \rightarrow a_2, j_2 \rightarrow \infty$. И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_n^{k_j}) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка a — предельная для K . В силу замкнутости K т. $a \in K$. А из непрерывности функции f получаем $f(x^{k_j}) \rightarrow f(a)$. А с другой стороны, $f(x^{k_j}) \rightarrow \infty$ из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что f — ограничена на K . Выберем последовательность $\{x^k\}$:

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности f :

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем $f(a) = \sup_K f$, т.е. максимальное значение достигается в точке $x = a$. Для $\inf_K f$ доказательство аналогично \square

5.2 Расстояние между двумя множествами

Определение. Расстоянием между двумя множествами X и Y , где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\rho(X, Y)$:

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \|x - y\|$$

Примеры:

1. $X \cap Y \neq \emptyset \implies \rho(X, Y) = 0$
2. $\rho(X, Y) = 0 \implies X \cap Y \neq \emptyset?$ — нет, пример: $X = (0, 1); (Y = (1; 2)$ — не компакты

5.3 Расстояние между непересекающимися компактами

Теорема. Если $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компакты и $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то $\rho(K_1, K_2) > 0$

Доказательство. Функция $f(x, y) = \|x - y\|$ определена на $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, причем f — непрерывная функция. По теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего максимального и минимального значений. Т.е. существуют $x_0 \in K_1, y_0 \in K_2 : f(x_0, y_0) = \rho(K_1, K_2)$. А $f(x_0, y_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_0 = y_0$. \square

5.4 Колебание функции на множестве

Определение. Колебанием функции f на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\omega(f, M)$:

$$\omega(f, M) = \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

5.5 Колебание функции в точке

Определение. Колебанием функции f в точке $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \rightarrow 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

Напоминание: По определению, функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \quad |x - x_0| < \delta \iff x \in B_\delta(x_0) \cap M$ верно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

5.6 Колебание функции, непрерывной в точке

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

Доказательство. • Необходимость

f — непрерывна в т. $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Рассмотрим $\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$:

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x, y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta \rightarrow 0$ и $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \rightarrow 0$, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$

• Достаточность

Пусть $0 = \omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \quad \sup_{x, y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

Определение. Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

Пример:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{— непрерывна почти всюду на } \mathbb{R}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{— разрывна в любой точке} \implies \text{НЕ является непрерывной почти всюду.}$$

5.7 Пересечение разбиений бруса

Определение. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ и $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ — два разбиения бруса $I \subset \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} 1) \exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\} \\ 2) \exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\} \\ 3) \{I_{ij}\} - \text{разбиение бруса } I \end{cases}$$

5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману

Теорема. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

Доказательство. • Необходимость

Если f интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множество разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

Обозначим множество всех точек разрыва f на I за T и заметим, что $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$, где

$T_k = \{x \in I | \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$. Если T не меры нуль, то существует T_{k_0} не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

Для произвольного разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$ бруска I разобъем эти бруски на две кучи: первая $A = \{I_i | I_i \cap T_{k_0} \neq \emptyset, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$ и вторая $B = \mathbb{T} \setminus A$. Покажем что A является покрытием множества T_{k_0} , т.е. $T_{k_0} \subset \bigcup_{i: I_i \in A} I_i$ любая точка $x \in T_{k_0}$ является либо

- a) внутренней для некоторого бруска I_i . В этом случае $\omega(f, I_i) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$, т.е. $I_i \in A$, либо
- b) точка x лежит на границе некоторого количества брусков (не более чем 2^n штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$ (т.е. $I_i \in A$): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности $B_\varepsilon(x)$ выполняется следующее:

$$\omega(f, x) \leq \sup_{x', x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x)| + \sup_{x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

т.е. $x \notin T_{k_0}$ — **противоречие**.

Таким образом, каждая точка $x \in T_{k_0}$ покрывается некоторым бруском $I_i \in A$, т.е. A — покрытие T_{k_0} . Тогда существует $c : \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq c > 0$ для всех разбиений \mathbb{T} (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусков сколь угодно маленькой, то получилось бы, что T_{k_0} меры нуль)

Возьмем два набора отмеченных точек ξ^1 и ξ^2 . На брусках из кучки B будем их брать одинаковыми, т.е. для $I_i \in B$ $\xi_i^1 = \xi_i^2$. А на брусках из кучки A будем брать такие, чтобы

$$f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)^2 \geq \frac{1}{3k_0} \quad (\text{у нас там колебания} \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся})$$

Получаем:

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2)| &= \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| + \sum_{i: I_i \in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0 \end{aligned}$$

т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит f не интегрируема — **противоречие**.

- Достаточность

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $T_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$. Покажем, что это множество - компакт. Ограничность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть a - предельная точка $T_\varepsilon : a \notin T_\varepsilon$. Т.к. она предельная, то существует $\{x^k\} : x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$. Т.к. $B_{\frac{1}{k}}$ - открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. существуют $\delta_k : B_{\delta_k}(x_K) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$. Тогда

$$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_K)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty : \omega(f, a) \geq \varepsilon$, т.е. $a \in T_\varepsilon$ - противоречие. Значит T_ε - замкнуто, и, следовательно, компактно.

Множество T_ε - множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков $I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$. Т.к. это открытое покрытие, а T_ε - компакт,

то существует конечное подпокрытие: $T_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$, при этом $\sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon$.

Обозначим три множества: $C_1 = \bigcup_{i=1}^m I_i$, $C_2 = \bigcup_{i=1}^m I'_i$, $C_3 = \bigcup_{i=1}^m I''_i$, где I'_i, I''_i - бруски, полученные гомотетией с центром в центре I_i с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

Заметим, что

$$a) |C_3| \leq \sum_{i=1}^m |I''_i| = 3^n \sum_{i=1}^m |I_i| < 3^n \varepsilon$$

b) расстояние $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$ (теорема про расстояние между компактами)

c) Множество $K = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$ - компакт. Кстати, любое множество с диаметром меньше δ_1 либо полностью лежит в C_3 , либо полностью в K .

d) $T_\varepsilon \cap K = \emptyset$, т.к. $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$. Следовательно, $\forall x \in K \omega(f, x) < \varepsilon$. Тогда по теореме Кантора-Гейне $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in K \omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых разбиений $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}, \mathbb{T}_2 = \{I_i^2\} : \lambda(\mathbb{T}_1) < \delta, \lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

Рассмотрим пересечение этих разбиений $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, т.е. такое разбиение $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$, что $I_k^1 = I_{i_1 k} \bigsqcup \dots \bigsqcup I_{i_m k}$ и $I_i^2 = I_{i k_1} \bigsqcup \dots \bigsqcup I_{i k_l}$. Очевидно $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$.

Для произвольных наборов отмеченных точек:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Рассмотрим отдельное слагаемое:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})) |I_{ij}| \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| + \sum_{I_{ij} \in K} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| \leq 2M \cdot e^n \varepsilon + 2\varepsilon |I|$$

т.к. f ограничена некоторой константой M и см пункты a), d), то

Т.к. для (\mathbb{T}_2, ξ^2) все выкладки аналогичные, то получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \varepsilon (2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

Следовательно, существует предел $\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ (Критерий Коши для функций)

□

5.9 Измельчение разбиения

Определение. Разбиение $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ будем называть измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$, если $\forall k \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является измельчением \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2

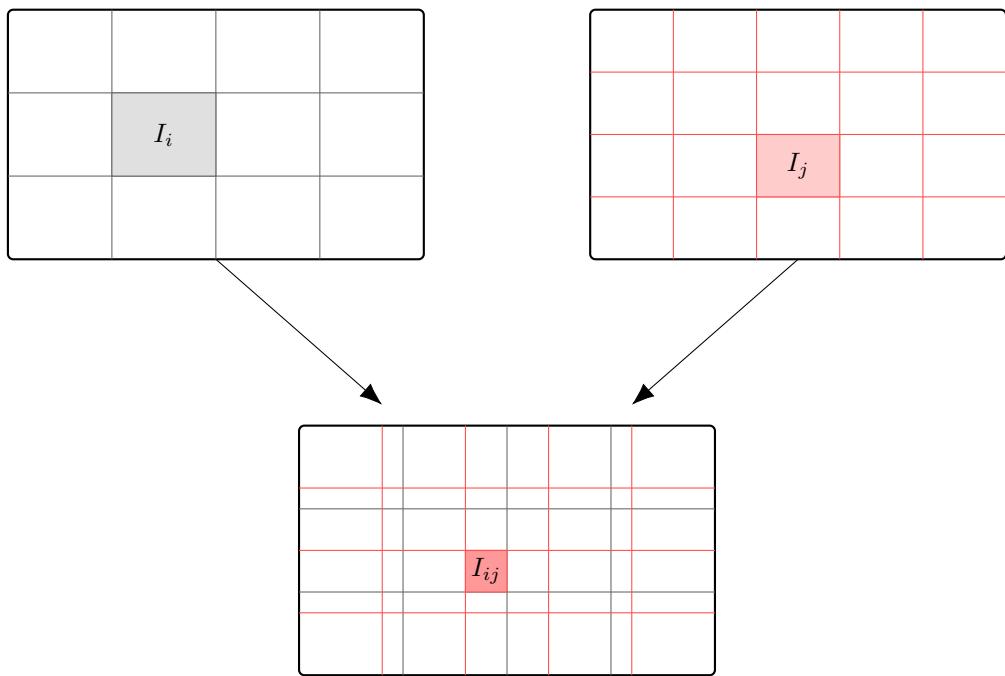


Рис. 1: Пересечение разбиений \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2

6 Лекция 6

6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу

Определение. Пусть I - замкнутый бруск, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$ -разбиение бруска I , $m_i = \inf_{I_i}(f)$, и $M_i = \sup_{I_i}(f)$. Тогда числа $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K m_i |I_i|$ и $\bar{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K M_i |I_i|$ будем называть **нижней и верхней суммой Дарбу** соответственно

6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

Теорема.

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^K m_i |I_i| = \sum_i \inf_{\xi_i} (f(\xi_i)) |I_i| = \inf_{\xi} \sum_i f(\xi_i) |I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \\ \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_i (f(\xi_i)) |I_i| = \sum_i M_i |I_i| = \bar{S}(f, \mathbb{T}) \end{aligned}$$

6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

Теорема. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения \mathbb{T} , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

Доказательство. Если $L \subset M$, то $\inf L \geq \inf M$ и $\sup L \leq \sup M$, тогда:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \stackrel{\text{по 6.2}}{\leq} \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе

Теорема. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ рассмотрим $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, тогда по 6.3:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу

Определение. **Верхним и нижним интегралом** Дарбу будем называть числа соответственно

$$\bar{\mathcal{I}} := \inf_{\mathbb{T}} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \underline{\mathcal{I}} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

7 Лекция 7

7.1 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \bar{S}(f, T) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}(f, T)$$

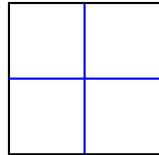
Доказательство. Докажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{S}(f, T) (= \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, T))$

1. f -ограничена на $I \implies \exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| \leq C$
2. т.к. по определению $\underline{\mathcal{I}} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, T)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists T_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$ — объединение границ брусов $I_i^1 \in T_1$ (без повторов). Тогда G множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)
4. Пусть T_2 — произвольное разбиение $I : T_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$

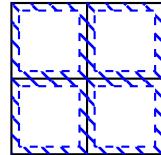
Рассмотрим два множества брусов:

$$A = \{I_i^2 \in T_2 : I_i^2 \cap G \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad B = T_2 \setminus A \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T_2 : \Delta_{T_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

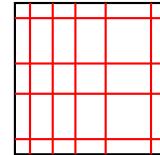
т.к. наши бруски I_i^2 по построению лежат в G , а по 3 пункту оно множество меры нуль.



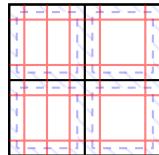
разбиение T_1



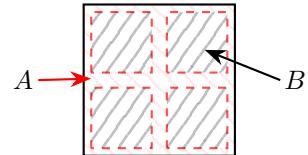
Граница G бруса T_1



Какое-то разбиение T_2



Как прошлые разбиения и граница G выглядят на одном рисунке



Как выглядят множества A и B

5. С другой стороны $\forall I_i^2 \in B$ верно, что $I_i^2 \in T_1 \cap T_2$

Хотим рассмотреть

$$\begin{aligned} |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, T_2)| &= |I - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) + \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{S}(f, T_2)| \leq \underbrace{|I - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2)|}_{*} + \underbrace{|\underline{S}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{S}(f, T_2)|}_{**} \\ &< \varepsilon + 2C\varepsilon = \varepsilon(1 + 2C) \end{aligned}$$

□

* из пункта 2: $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{S}(f, T_1) \leq \underline{S}(f, T_1 \cap T_2) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}(f, T_1 \cap T_2)| < \varepsilon$

** Пояснение ниже

$$\begin{aligned}
 |\underline{S}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{S}(f, \mathbb{T}_2)| &= \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \text{Переход с равном по пункту 5} \\
 &\leq \left| \sum_{I_i \in \mathbb{T}_1 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\
 &\leq 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \quad \text{Следующий переход по пункту 1} \\
 &\leq 2C \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \quad \text{Следующий переход по пункту 4} \\
 &< 2C \varepsilon
 \end{aligned}$$

7.2 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману

$I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$

Доказательство. Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \implies$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом брусе, f — ограничена на I
- Покажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}, \bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \implies \underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$
 1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathcal{I}| < \varepsilon$
 2. $\underline{\mathcal{I}} = \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T}) \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}| < \varepsilon$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}| < \varepsilon$
 3. $\underline{S}(\mathbb{T}, \xi) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$
 $\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \exists \xi : |\underline{S} - \sigma| < \varepsilon$

$$|\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}}| \leq |\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}} - \sigma + \sigma + \underline{S} - \underline{S}| \leq |\mathcal{I} - \sigma| + |\underline{\mathcal{I}} - \underline{S}| + |\sigma - \underline{S}| < 3\varepsilon$$

□

Доказательство. Достаточность

f — ограничена и $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$. Имеем

$$\underline{S}(f, \mathcal{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S} = \underline{\mathcal{I}}$, $\lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S} = \bar{\mathcal{I}}$ получаем $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$ (Условие ограниченности f даёт нам возможность применять неравенство выше)

□

7.3 Интегрирование по допустимым множествам

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если

- D — ограниченно
- ∂D — множество меры нуль по Лебегу

Пример. Допустимого и не допустимого множества

1. $D_1 = (0, 1)$

- ограничено — да
- $\partial D_1 = \{0\} \cup \{1\}$ — мн-во меры нуль — да

D_1 - допустимое множество

2. $D_2 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

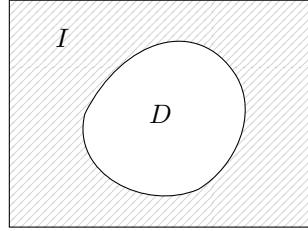
- ограничено - да
- $\partial D_2 = [0, 1]$ - мн-во меры нуль - нет

D_2 - не допустимое множество

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — допустимое множество, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда, интегралом Римана f по D называется число \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\bar{x}) d\bar{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in D \\ 0, & \bar{x} \notin D \end{cases}$$

Если $\mathcal{I} < \infty$, то $f \in \mathcal{R}(D)$



Закрашенная область не вносит вклад в объем

так как $f(x) \cdot \chi_D = 0$

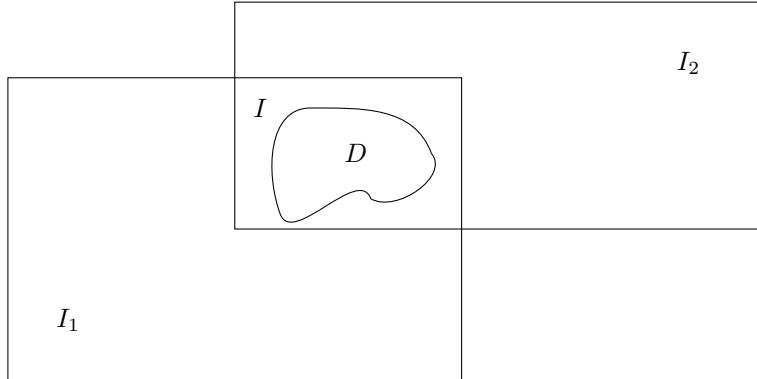
8 Лекция 8

8.1 Интегрирование по допустимым множествам(Продолжение)

Корректность определения допустимых множеств. Пусть $D \subset I_1 \subset \mathbb{R}^n, D \subset I_2 \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутые брусы, тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще



Как выглядят наши множества I_1, I_2, I, D

Доказательство. Введем $I = I_1 \cap I_2 \supset D$, I не пустое по построению. Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ ограничена на $I_1 \implies f \cdot \chi_D$ ограничена на $D \implies f \cdot \chi_D$ ограничена на I_2
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1 \implies f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $D \implies$ в худшем случае для $f \cdot \chi_D$ на I_2 добавятся разрывы на $\partial D \implies f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на I_2
- Тогда, $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \iff f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть \mathbb{T}_i – разбиение на $I_i : \mathbb{T}_1$ и \mathbb{T}_2 совпадают на I
 - Пусть ξ^i – отмеченные точки для \mathbb{T}_i
- $$\sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_j f\chi_D(\xi_j^1) |I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^1) |I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^2) |I_j^2| = \sum_j f\chi_D(\xi_j^2) |I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$$

□

Примечание. Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

8.2 Теорема Фубини

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^m, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и \forall фиксированного $x \in I_x \implies f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

Примечание. аналагично, если взять для \forall фиксированного $y \in I_y$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y), f \in \mathcal{R}(I_y)$, а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$ — разбиение на I_x , $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$ — разбиение на I_y , $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$ — разбиение на $I_x \times I_y$, и при этом верно $|I_i^x| \cdot |I_j^y| = |I_{ij}|$

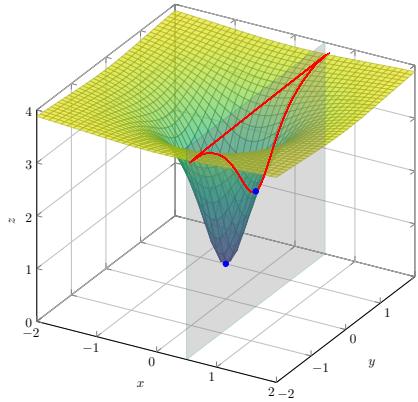
•

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) |I_{ij}| \underset{\text{рис. ниже}}{\leq} \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left(\inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \cdot |I_j^y| \right) |I_i^x| = \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y) |I_j^y| \right)}_{\underline{\mathbb{S}}(f(y), \mathbb{T}_y)} |I_i^x| \\
 &\leq \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\int_{I_y} f(x,y) dy \right)}_{g(x)} |I_i^x| \leq \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \\
 &\leq \bar{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x)
 \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leq \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{\mathbb{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \implies \exists \bar{\mathcal{I}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\mathbb{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) = \int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}$$

Примечание. Последний знак неравенства, получен аналогичными действиями для длинного неравенства выше, просто развернув в обратную сторону знаки неравенства для sup

□



Если зафиксировать какой-то x и искать inf по y
то он всегда будет больше, чем inf на всей области

Пример. Случай, где нельзя интегрировать по т. Фубини

Возьмем следующую функцию

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ на } [-1; 1] \times [-1; 1]$$

Она не интегрируема по Риману на данной области, т.к. функция неограничена

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^4} = -\infty$$

Что будет, если мы не поверили и решили применить т. Фубине? Вычислим интеграл $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$. Заметим следующее внесение под дифференциал

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Получаем, тогда

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 d \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Теперь сошлемся на то что $f(x, y) = -f(y, x)$ и получим что $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$

8.3 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Теорема. (Без доказательства) Пусть имеется $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ — открытые множества. $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ — биективно, φ, φ^{-1} — непрерывно дифференцируемые отображения

$D : \overline{D} \subset M_1$ — допустимое множество

$f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}(\varphi(D)) \iff f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| \in \mathcal{R}(D)$ и

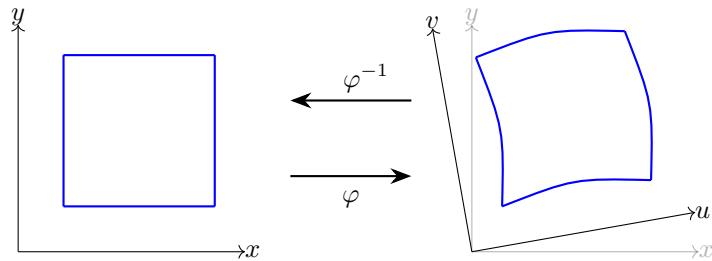
$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx = \int_D f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| dt, \text{ где } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Примечание. $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, \dots, t_n)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_n)$

Пример. Ранее мы переходили к полярным координатам так: $(x, y) \rightarrow (r, \varphi)$, при этом $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \cdot r \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cdot r \end{pmatrix}$$

$$|J_{\varphi^{-1}}| = |J_\varphi|^{-1}$$



Отображение допустимого множества в новые координаты