Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 14.09.2025 13:03

Содержание

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.

1.1. Кусочно-гладкая кривая и её длина.

Определение. **Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в $\mathbb{R}^k$.

Определение. **Замкнутая область** — это замыкание некоторой области.

Определение. **Жорданова область** — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ (где $k \leqslant m$) — замкнутая жорданова область, и $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемая *инъективная* функция. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^m$ и $u \in G$ и определим x следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, ..., u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке $u \in G$.

Определение. Образ $\varphi(G)$ называется **гладкой кривой** при $k = 1$.

Определение. Если L_i это гладкая кривая, то их объединение $L = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} L_i$ называется **кусочно-гладкой кривой**.

1.2. Элемент длины для параметрически заданной кривой.

Пусть даны отрезок $G = [a; b]$, непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ и гладкая кривая L, которая задается через G и φ.

Определение. **Длина кривой** L определяется следующим образом

$$\mu(L) := \int\limits_G \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \mathrm{d}u = \int_a^b \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

1.3. Криволинейный интеграл I-го рода.

Ссылка на лекцию.

Пусть L — гладкая кривая к $\mathbb{R}^m$, то есть $L = \varphi([a; b])$, и рассмотрим некую функцию $f : L \to \mathbb{R}$, которая задана на точках кривой.

Определение. Криволинейный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_L f(x)\mathrm{d}l = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

$\mathrm{d}l := \left|\dfrac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u$ — элемент длины.

2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.

2.1. Кусочно-гладкая поверхность

Определение. **Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в $\mathbb{R}^k$.

Определение. Замкнутая область — это замыкание некоторой области.

Определение. Жорданова область — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ (где $k < m$) — замкнутая жорданова область, и $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемая *инъективная* функция. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^m$ и $u \in G$ и определим x следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, ..., u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & ... & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & ... & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке $u \in G$.

Определение. Образ $\varphi(G)$ называется **гладкой k-мерной поверхностью** (при $k > 1$).

Определение. Если S_i это гладкая поверхность, то их объединение $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i$ называется **кусочно-гладкой поверхностью**.

2.2. Элемент площади для параметрически заданной поверхности

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — это замкнутая жорданова область, $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — параметризующее отображение.

Определение. Площадь поверхности S определяется как

$$\mu(S) := \iint_G \sqrt{\det \begin{pmatrix} \left|\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|^2 & \left\langle \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\rangle & \left|\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|^2 \end{pmatrix}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_G \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2.3. Поверхностный интеграл I-го рода

Ссылка на лекцию.

Рассмотрим поверхность $S := \varphi(G)$, заданную через замкнутую жорданову область $G \subset \mathbb{R}^2$ и параметризующее отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$.

Задана некая функция $f : S \to \mathbb{R}$, которая с одной стороны может принимать $x \in \mathbb{R}^m$, а с другой стороны $u \in G$:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) = f(\varphi(u, v)).$$

Определение. Элемент площади определяется как

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Поверхностный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_S f(x)\mathrm{d}s = \iint_G f(\varphi(u, v)) \cdot \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.

3.1. Дифференциальная 1-форма в области пространства.

Определение. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ определены функции: $a_1, \ldots, a_n : D \to \mathbb{R}$. Тогда **линейной дифференциальной формой**, или **дифференциальной 1-формой** называется следующая линейная комбинация дифференциалов:

$$\omega(\overline{x}, d\overline{x}) = a_1(\overline{x})dx_1 + \ldots + a_n(\overline{x})dx_n.$$

($\omega(\overline{x}, d\overline{x})$ — функция от двух векторов, $d\overline{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ — вектор, составленный из дифференциалов)

Если ввести векторное поле $\overline{a} : D \to \mathbb{R}^n$, то соответствующую линейную дифференциальную форму можно записать короче:

$$\omega(\overline{x}, d\overline{x}) = \langle \overline{a}(\overline{x}), d\overline{x} \rangle$$

Подчеркнём, что линейная дифференциальная форма может быть дифференциалом некоторой функции, а может и не быть. Понятно, что далеко не всякая линейная комбинация дифференциалов окажется дифференциалом какой-то функции.

Физический смысл и примеры: бац.

3.2. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую.

Пусть $G \subset \mathbb{R}$ — произвольный ограниченный промежуток, $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое, инъективное и локально инъективное отображение, то есть задаёт гладкую кривую $L = \varphi(G)$.

Пусть в $D \subset \mathbb{R}^n$определена линейная дифференциальная форма $\omega(\overline{x}, d\overline{x})$ и пусть $L \subset D$.

Введём понятие перенесения функции и формы с помощью отображения φ. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ и линейная дифференциальная форма ω посредством отображения φ переносятся на кривую L следующим образом:

$$f(\overline{x}) = f(\varphi(u))$$

Тем самым, мы перешли от функции, заданной в некоторой области пространства, к функции, заданной на кривой.

Обозначение 1. $(\varphi^* f)(u) := f(\varphi(u))$.

Аналогично перенос посредством отображения φ действует на линейную дифференциальную форму ω:

$$\omega(\overline{x}, d\overline{x}) = \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du)$$

Обозначение 2. $(\varphi^* \omega)(u, du) := \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du)$.

3.3. Ориентация кривой.

Пусть $\psi : H \to \mathbb{R}^n$ — другая параметризация кривой L. Тогда

$$(\varphi^* \omega)(u, du) := \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du) =$$

Заметим, что $\overline{x} \in L$ может представляться как $\varphi(u)$ и как $\psi(v)$.

$$= \omega(\psi(v), \underbrace{\frac{d\overline{x}}{dv}}_{\frac{d\psi}{dv}} \cdot \underbrace{\frac{dv}{du} \cdot du}_{dv}) = \omega(\psi(v), \frac{d\psi}{dv} \cdot dv) = (\psi^*\omega)(v, dv)$$

При этом обратим внимание на то, что когда мы делаем замену переменной в дифференциале, якобиан берётся по модулю, поэтому здесь важно, будут ли параметризация функцией φ и параметризация функцией ψ задавать одинаковую ориентацию или разную ориентацию.
Если эти параметризации задают одинаковую ориентацию на кривой L, то $\frac{dv}{du} > 0$, значит, $\frac{dv}{du} = \left|\frac{dv}{du}\right|$ — одномерный якобиан. При этом, в случае одинаковой ориентации, как видно из выкладок (а выкладки сделаны для случая с одинаковой ориентацией), дифференциальная форма не зависит от параметризации.
В противном случае (в случае смены ориентации кривой) знак дифференциальной формы меняется.
Что вообще является ориентацией?

Определение. Ориентацией является направление движения по кривой.

(Маевский это явно на доске не записывал, но там идёт пример чё то про интегралы. Ссылка на всякий случай: буп.)

3.4. Криволинейный интеграл II-го рода. (КРИ-2)

Пусть $\overline{a}(\overline{x}) : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле, L — гладкая кривая в D с фиксированной ориентацией, тогда:

Определение. КРИ-2 от дифференциальной формы $\omega = \langle \overline{a}, d\overline{x} \rangle$ называется:

$$\int_L \omega = \int_L \langle \overline{a}, d\overline{x} \rangle = \int_L a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n = \int_G (\varphi^*\omega) = \int_G \langle \overline{a}, \frac{d\varphi}{du} \rangle du = \int_G (a_1 \frac{d\varphi_1}{du} + \ldots + a_n \frac{d\varphi_n}{du}) du$$

(G — всё ещё произвольный одномерный ограниченный промежуток)

В предыдущем пункте мы показали, что дифференциальная форма в случае фиксированной ориентации не зависит от параметризации, поэтому определение корректно.

3.5. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.

Напоминание про КРИ-1:

$$\int_L f(x) dl = \int_G f(\varphi(u)) \left|\frac{d\varphi}{du}\right| du$$

(в силу локальной инъективности $\left|\frac{d\varphi}{du}\right| \neq 0$) Теперь выражение:

$$\underbrace{\int_L \omega}_{\text{КРИ-2}} = \int_G \langle \overline{a}, \frac{d\varphi}{du} \rangle du = \int_G \langle \overline{a}, \frac{d\varphi/du}{|d\varphi/du|} \left|\frac{d\varphi}{du}\right| du = \underbrace{\int_L \langle \overline{a}, \overline{l} \rangle dl}_{\text{КРИ-1}},$$

где $\overline{l} = \frac{d\varphi/du}{|d\varphi/du|}$ — единичный вектор касательной к кривой в данной точке.
Заметим, что ориентация задаётся вектором $\overline{l}$ (ну то есть там либо $\overline{l}$, либо $-\overline{l}$).

4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади клоской фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.

Определение. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ называется y**-проектором** (то есть проектируемой вдоль оси y), если она задается неравенствами:

$$D : a \leqslant x \leqslant b, h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x),$$

h_1, h_2 - непрерывные функции, $h_1(x) \leqslant h_2(x)$
Аналогично вводится x-**проектор**.

Определение. Область называется **проектируемой**, если она является x- и y-проектируемой.

Определение. Область D называется **простой**, если она есть объединение конечного числа проектируемых областей.

4.1. Формула Грина

Теорема. Пусть D - простая область с кусочно гладкой границей $L = \partial D$, ориентация которой соответствует ориентации области D. Пусть P, Q непрерывно дифференцируемы в D. Тогда:

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Доказательство. 1. Рассмотрим y-проектируемую область $D: a \leqslant x \leqslant b, h_1(x) \leqslant y \leqslant h_x(x)$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b dx \left(P(x, h_2(x)) - P(x, h_1(x)) \right) =$$

$$= -\int_a^b P(x, h_2(x)) \, dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) \, dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx =$$

$$= \int_b^a P(x, h_2(x)) \, dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) \, dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx = \oint_{\partial D} Pdx$$

2. Аналогично для x-проектируемой области D получим

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} Qdy$$

3. D - x- и y-проектируемая область, то

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right)$$

4. (Нет четкой формулировки, записано со слов лектора)
   D - простая область. В соседних областях по границе будем интегрировать в правильном направлении. Двойные интегралы (правые части) частей простой области будут складываться по аддитивности. Криволинейные интегралы (при разбиении в суммы) дадут интегралы по внешним границам и интегралы по внутренним границам. Интегралы по всем внутренним кусочкам границы будут взаимно уничтожаться (так как при обходе в противоположных направлениях будут давать разные знаки).

∎

4.2. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы

Определение. $\omega\left(\overline{x}, d\overline{x}\right) = a_1\left(\overline{x}\right)dx_1 + ... + a_n\left(\overline{x}\right)dx_x$

$a_1, ..., a_n$ - непрерывно дифференцируемы

Внешним дифференциалом формы ω называется:

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + ... + da_n \wedge dx_n,$$

где $da_1 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n}dx_n$ - обычный дифференциал.

Операция $\wedge$ линейна и кососимметрична:

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1 \Rightarrow dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

Пример. $d\left(Pdx + Qdy\right) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy$

4.3. Краткая запись формулы Грина

$$\iint_D f\left(x, y\right)dx \wedge dy = \iint_D f\left(x, y\right)dxdy$$
$$\Rightarrow \oint_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$
$$\omega = Pdx + Qdy$$

5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.

Пункты переставлены местами для лучшей понимабельности.

5.1. Ориентация поверхности и вектор нормали

Пусть G - область в $\mathbb{R}^k$ с фиксированным базисом $u = \{u_1, \dots, u_k\}$. Пусть $\varphi : G \to R^m$ - непр. дифф. инъективное и локально инъективное отображение.

Определение. Ориентацией поверхности $S = \varphi(G)$ называется ориентация исходного базиса $u = \{u_1, \dots, u_k\}$.

В каждой точке поверхности S задан базис $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \dots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_k}$.

Рассмотрим случай $k = 2, m = 3$.

Определение. Вектором нормали к поверхности S называется векторное произведение $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}$.

5.2. Дифференциальная 2-форма в области пространства

Пусть D - область в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Дифференциальной 2-формой называется линейная комбинация базисных 2-форм вида $dx_i \wedge dx_j$:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{i<j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$$

где $a_{ij} : D \to \mathbb{R}$

Например, при $n = 3$:

$$\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3$$

5.3. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность

Пусть G - Жорданова область в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ есть непр. дифф. инъективное и локально инъективное отображение. $S = \varphi(G)$ – гладкая поверхность.
Пусть $S \subset D$, где D – область с заданной дифференциальной 2-формой :

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{i<j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$$

Определение. Переносом ω на поверхность S называется применение операции φ^* , действующей следующим образом :

$$(\varphi^*\omega)(u, du) = \omega(x, dx)\Bigg|_{x=\varphi(u), \quad dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}du_2}$$

Выражение выше *можно* раскрыть следующим образом. Так как φ - векторная функция и $x_i = \varphi_i(u_1,\ u_2)$

$$dx_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}du_2$$

$$dx_i \wedge dx_j = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial u_2} \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2$$

Подставим вышенаписанное в определение 2-формы

$$(\varphi^*\omega)(u, du) = \sum_{i<j} a_{ij}(\varphi(u)) \cdot det\left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right) du_1 \wedge du_2$$

5.4. Поверхностный интеграл II-го рода

В терминах обозначений из предыдущего пункта.

Определение. Поверхностным интегралом II-го рода называется выражение

$$\iint_S \omega(x, dx) = \iint_S \sum_{i<j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j = \begin{bmatrix} \text{подставляем } \varphi\text{, которая} \\ \text{параметризует поверхность } S \end{bmatrix} = \iint_G (\varphi^*\omega)(u, du)$$

В развернутой записи

$$\iint_G (\varphi^*\omega)(u, du) = \iint_G \sum_{i<j} a_{ij}(\varphi(u)) \cdot det\left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right) du_1 du_2$$

5.5. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода

В терминах обозначений из предыдущего пункта.

Сведем поверхностный интеграл II-го рода к интегралу I-го рода на следующем примере для $n = 3$ (как на лекции)

$$\iint_S \sum_{i<j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j = \iint_S v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy$$

Утверждение. Сведение интеграла выше к интегралу I-го рода.

$$\iint_S v_1 dy \wedge dz + \ldots = [\text{ параметризация } \bar{\varphi}(u_1, u_2)\ ] = \iint_G \left(v_1 \left(\frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_2} - \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial z}{\partial u_1} \right) + \ \ldots \right) \cdot du_1 du_2 =$$

$$= \iint_G \begin{vmatrix} v_1 & \dfrac{\partial x}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \\ v_2 & \dfrac{\partial y}{\partial u_1} & \dfrac{\partial y}{\partial u_2} \\ v_3 & \dfrac{\partial z}{\partial u_1} & \dfrac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} du_1 du_2 = \iint_G \left\langle \bar{v}, \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right\rangle du_1 du_2$$

Пусть теперь $\bar{n}$ - вектор нормали

$$\bar{n} = \frac{\left[\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right]}{\left| \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right|}$$

Тогда страшную штуку (5.5.) выше можно переписать так:

$$= \iint_G \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle \underbrace{\left| \left[\frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right| \cdot du_1 du_2}_{ds} = \underbrace{\iint_S \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle \cdot ds}_{\text{пов. инт. I рода}}$$

где $[x, y]$ - векторное произведение, ds – элемент площади поверхности

6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.

Теорема. (Формула Остроградского-Гаусса)

Пусть D – замкнутая жорданова область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью $S = \partial D$, также пусть $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ – непрерывно дифференцируемая 2-форма в D.

Тогда $\displaystyle\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D d\omega.$

Доказательство. См. сюда, страница 228. ∎

Определение. Внешним дифференциалом назвается выражение $d\omega = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$

Определение. Выражение $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ называется *дивергенцией* векторного поля. Обозначение: $\operatorname{div}(P, Q, R)$

Более подробная запись формулы Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Рассмотрим случай $P = x$, $Q = y$, $R = z$, затим, что $\operatorname{div}(x, y, z) = 3$, тогда мы можем вычислить обьем D:

$$\mu(D) = \frac{1}{3} \iiint_D 3 dx \wedge dy \wedge dz = \frac{1}{3} \oiint_{\partial D} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) = \frac{1}{3} \oiint_{\partial D} \langle \overline{x}, \overline{n} \rangle ds$$

Где $\overline{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$.

7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.

7.1. Формула Стокса

Теорема. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая поверхность с краем $L = \partial S$, лежащая в области D.
$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ – непрерывно дифференцируема в D.
Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega \text{ – краткая запись}$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$$

Доказательство. 1. Пусть $S = \varphi(G)$, где G – прямоугольник на плоскости параметров (u_1, u_2). Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \{ \text{ крив. инт. на пл-ти } \} = \iint_G d(\varphi^* \omega) = \{\text{Формула Грина}\} \iint_G \varphi^*(d\omega) = \iint_S d\omega$$

2. В общем случае поверхность разбивается на прямоугольники и интегралы по ним суммируются.

■

Определение. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ – это $d\omega = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$ – ротор

8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

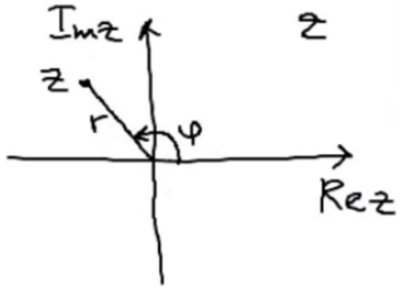
8.1. Комплексная плоскость.

Формально вводим символ i, такой что $i^2 = -1$.

Определение. Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексном числом* $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Действительная часть числа z : $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть числа z : $\operatorname{Im} z = y$.

Определение. Каждому комплексному числу z ставится в соответствии *сопряженное* $\overline{z} = x - iy$.

Можно еще задать комплексное число геометрически:



Определение. Тогда *модуль* числа z – $r = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* числа z – угол φ, такой что $x = |z| \cos\varphi$, $y = |z| \sin\varphi$.

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

Определение. Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ – *главное значение* аргумента. При этом, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – *полный (или многозначный)* аргумент.

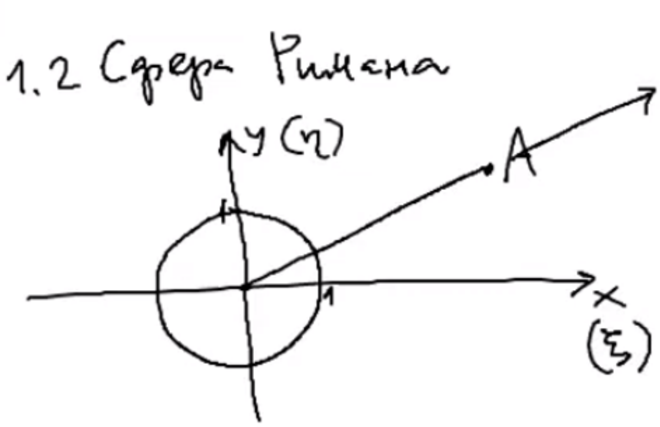
Определение. *Тригонометрическая запись* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Определение. *Показательная форма записи*: комплексного числа: $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}$.

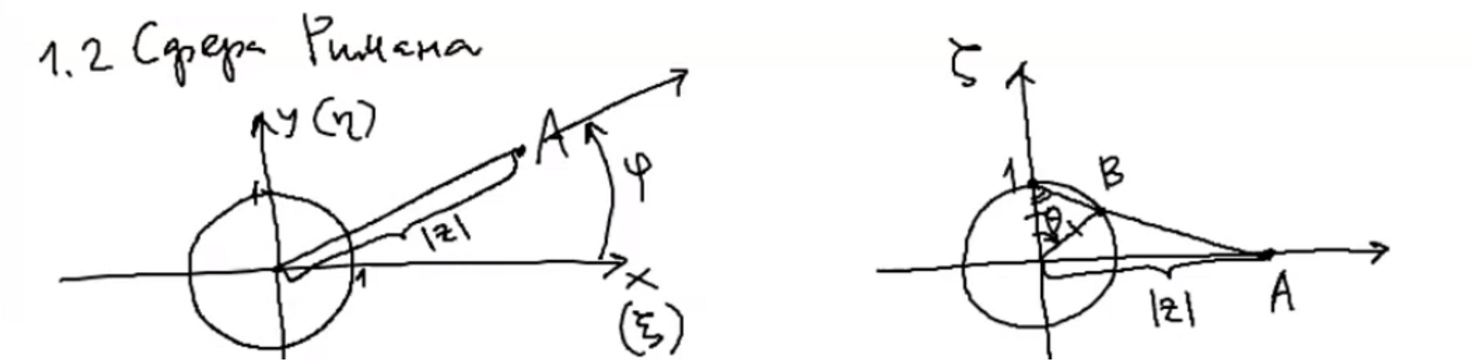
Комлпексную плоскость обычно обозначают $\mathbb{C}$.

8.2. Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось ζ и прямую, проходящую через начало координат и точку A. Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):



Определение. Отображение $B \longmapsto A$ – *стереографическая проекция.* Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что $|z| = \operatorname{tg} \dfrac{\pi - \theta}{2}$ и $\varphi = \arg z$.

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что $\xi = \dfrac{2x}{1 + |z|^2}, \eta = \dfrac{2y}{1 + |z|^2}, \zeta = \dfrac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$.

Обратные формулы: $x = \dfrac{\xi}{1 - \zeta}$ и $y = \dfrac{\eta}{1 - \zeta}$.

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление): $+\infty$ и $-\infty$. В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается $z \to \infty$. Это означает, что $|x|, |y| \to \infty$.

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли техать про сходимость последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: тык.

8.3. Функция комплексной переменной.

Определение. *Функция комплексной переменной* $w = f(z)$ – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что $w = u + iv$, тогда становится понятно, что $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z)$ – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от z как функцию от двух переменных: $f(z) = \widetilde{f}(x, y)$. Тогда $\widetilde{f}(x, y) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$.
Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Тогда $f(z) = \widetilde{f}\left(\dfrac{z + \overline{z}}{2}, \dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right)$.

8.4. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$.

Определение. *Экспонента* e^z в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:

1) $e^z := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \ \forall z$
2) $e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \implies u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$.

Определение. Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

1) $\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

Определение. Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

1) $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

8.5. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

Определение. *Комплексным корнем n–ой степени* $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : w^n = z$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$

Определение. *Полным натуральным логарифмом* $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : e^w = z$. Составим $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это пример бесконечнозначной функции.

9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши–Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

9.1. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции.

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{R}^2, D \subseteq \mathbb{R}^2$ называется *дифференцируемой* (в общем случае) в точке (x_0, y_0), если

$$\Delta f := \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \overline{o}\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Тогда P – матрица Якоби, т.е. $P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$.

В комплексном случае: $\Delta f := \Delta u + i\Delta v = p\Delta z + q\Delta\overline{z} + \overline{o}(|\Delta z|) \implies$

$$\implies p = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i} \left(= \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) \left(= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)$$

Определение. Тогда $p\Delta z + q\Delta\overline{z}$ – это *дифференциал* функции f.

Определение. $\mathbb{R}$–дифференцируемая функция называется $\mathbb{C}$–*дифференцируемой*, если ее дифференциал $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}$ является $\mathbb{C}$ – линейным, т.е. $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz$.
Следовательно, получим следующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ – условия Коши–Римана}$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)},$$

то он называется *производной* f по z и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Определение. (эквивалентное определение $\mathbb{C}$–дифференцируемости)
Пусть существует предел из определения выше (длинный такой).
Пусть $y = y_0$, тогда $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \lim\limits_{x \to (x_0} \dfrac{(u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.
Аналогично при $x = x_0$ получим, что $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$.

Тогда получим, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \implies \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \implies \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$

поэтому в этом случае $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ логично обозначать как $\dfrac{df}{dz}$. Тогда $\mathbb{C}$ – *дифференцируемость* равносильна существованию и конечности производной $\dfrac{df}{dz}$ (доказательство было в курсе МА–1).

9.2. Условия Коши–Римана и голоморфность.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения и $f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
f называется *голоморфной* в D, если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

9.3. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой.

Определение. Пусть L – кусочно–гладкая ориентированная (по умолчанию положительная ориентированность) кривая в области D, тогда *интеграл по кривой на комплексной плоскости* равен сумме двух криволинейных интегралов второго рода:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u(x,y) + iv(x,y)) \cdot (dx + i\,dy) := \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy)$$

9.4. Теорема Коши.

Теорема. Если функция f голоморфна в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, то $\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$

Доказательство. Распишем интеграл по определению:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{\partial D} (u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\partial D} (v\,dx + u\,dy) = \text{ по формуле Грина } =$$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \wedge dy = 0$$

Заметим, что так как функция голоморфна, то есть непрерывно дифференцируема на D и выполнены условия Коши–Римана. Тогда в силу условий Коши–Римана оба подынтегральных выражения равны нулю, и весь интеграл тоже равен нулю. ■

9.5. Интегральная формула Коши.

Теорема. (Формула Коши–Грина) Если функция f непрерывно дифференцируема в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, граница области $L = \partial D$ – кусочно–гладкая. Пусть $z_0 \in D$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$, она непрерывна в $\overline{D}\backslash\{z_0\}$. Рассмотрим область D без окрестности точки z_0: если $U_\varepsilon(z_0)$ – круг $|z - z_0| \leqslant \varepsilon$, то рассматриваемая область $D_\varepsilon = D\backslash U_\varepsilon(z_0)$. Ее граница $L_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$ получается объединением двух границ ∂D и $\partial U_\varepsilon(z_0)$.
Рассмотрим криволинейный интеграл по границе области ∂D_ε:

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \begin{bmatrix} (x,y) \to (z,\overline{z}) \\ df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}, dz \wedge dz = 0 \end{bmatrix}, \text{ и по формуле Грина } = \iint_{D_\varepsilon} d\left(\frac{f(z)}{z - z_0}\right) \wedge dz =$$
$$= \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f/\partial \overline{z}}{z - z_0}\,d\overline{z} \wedge dz$$

Переходим к обычным переменным, вычисляя матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \implies \det\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(x,y)} = 2i \implies d\overline{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$$

Тогда получим следующее:

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f/\partial \overline{z}}{z - z_0}\,d\overline{z} \wedge dz = 2i\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{1}{z - z_0}\,dx \wedge dy$$

С другой стороны:

$$\oint_{L_\varepsilon} = \oint_L + \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Интеграл по малой окружности (тот, что справа) можем посчитать. Представим $z = z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi]$, тогда $f(z) = f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) = f(z_0) + \overline{o}(1)$ при $\varepsilon \to 0$. При этом, $dz = \varepsilon i e^{i\varphi}\, d\varphi$. Подставляя, получим:

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0) + \overline{o}(1)}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot \varepsilon i e^{i\varphi}\, d\varphi = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - i\int_0^{2\pi} f(z_0) + \overline{o}(1)\, d\varphi =$$
$$= \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) + \overline{o}(1)$$

При устремлении $\varepsilon \to 0$ и приравнивая оба значения интеграла, получаем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

■

Замечание. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$ называется *главным значением* несобственного интеграла.

Следствие. (Интегральная формула Коши)

Если функция f голоморфна в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$.

10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения

$f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.

f называется голоморфной в D, если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

10.1. Голоморфная функция нескольких переменных.

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

10.2. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \to G_1$, $\varphi_2 : D \to G_2$ – голоморфны.

Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$, $k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \left(-V'_{x_1}\right) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \left(-V'_{x_2}\right) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

10.3. Голоморфность обратной функции.

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0.
Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0) \\ v_0 = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0:

$$\left.\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|_{w_0} = \left.\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1}\right|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)^2|}\begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.
Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

11.1. Аналитическая функция.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0, если $\exists\{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, \ |z - z_0| < \delta$$

11.2. Аналитичность голоморфной функции.

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0, то она аналитична в z_0.

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$
Тогда по формуле Коши: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} + \dots + \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n + \frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta\right)\cdot(z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\zeta)\cdot\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta}_{r_n(z,z_0)}$$

Пусть $M = \sup\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon}|f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1-\alpha)$, тогда:

$$|r_n(z,z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_L |f(\zeta)|\cdot\frac{\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^{n+1}}{|\zeta - z|}dl \leqslant \frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{2\pi\cdot\varepsilon(1-\alpha)}\cdot\underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leqslant \frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{\varepsilon(1-\alpha)} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Значит, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$ при $\forall z:|z-z_0|<\delta$.

Так как $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1\leqslant|z-z_0|\leqslant\varepsilon_2$, то $\oint_{|z-z_0|=\varepsilon_2}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta-\oint_{|z-z_0|=\varepsilon_1}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=0\implies c_k$ не зависит от ε. ■

11.3. Неравенство Коши для коэффициентов ряда.

Следствие. (Неравенство Коши)
$|c_k|\leqslant\oint_L\dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{k+1}}dl\leqslant\dfrac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}}\cdot2\pi\varepsilon=\dfrac{M}{\varepsilon^k}$, подставим M:
$|c_k|\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon^k}\cdot\sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|\ \forall\varepsilon<\delta$

11.4. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна.

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z-z_0|<r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $|z-z_0|<R=\dfrac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R=r$.

Доказательство. Пусть $M=\sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|$, $|c_k|\leqslant\dfrac{M}{\varepsilon^k}\ \forall\varepsilon<r$
$\overline{\lim}\sqrt[k]{|c_k|}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}\implies R\geqslant\varepsilon\ \forall\varepsilon<r\implies R\geqslant.$
Но если $R>r$, то ряд сходится в z: $|z-z_0|>r$, что противоречит условию.
Значит, $R=r$. ■

11.5. Теорема Лиувилля.

Теорема. (Лиувилля)
Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на $\mathbb{C}$, то она – константа.

Доказательство. Пусть $M=\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$
Так как $|c_k|\leqslant\dfrac{M}{\varepsilon^k}\ \forall\varepsilon$, то при $\varepsilon\to\infty$ получаем, что $c_1=c_2=\dots=0\implies f(z)=c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

12.1. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции.

Предложение. Пусть $f(z)$ - аналитическая в точке z_0. Значит, функция $f(z)$ представима в окрестности z_0 в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $|z-z_0|<\delta$. Тогда ряд будет абсолютно сходиться $\forall z:|z-z_0|=\varepsilon<\delta\implies\sum\limits_{k=0}^{\infty}|c_k|\varepsilon^k$. Отсюда следует $\exists A>0:|c_k|\varepsilon^k\leqslant A\implies|c_k|\leqslant\dfrac{A}{\varepsilon^k}$.
Покажем что аналитическая функция дифференцируема. Рассмотрим $|z-z_0|\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon<\delta$. Берём приращение $0<|h|<\varepsilon-\varepsilon_1$.

$$\frac{(z+h)-f(z)}{h}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{(z-z_0+h)^k-(z-z_0)^k}{h}$$

$$\frac{(z-z_0+h)^k-(z-z_0)^k}{h}=k(z-z_0)^{k-1}+c_k^2h(z-z_0)^{k-2}+\dots+c_k^kh^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k(z-z_0)^{k-1}+hc_2+h\sum_{k=3}^{\infty}c_k(c_k^2(z-z_0+\dots+c_k^kh^{k-2}))$$

При $k\geqslant3$: $c_k^2\varepsilon_{k-2}+c_k^3\varepsilon_1^{k-3}|h|+\dots+c_k^k|h|^{k-2}\leqslant c_k^2(\varepsilon_1+|h|)^{k-2}$.

Теперь возьмём по модулю третью сумму: $|h\sum_{k=3}^{\infty}c_k(c_k^2(z-z_0+\dots+c_k^k h^{k-2}))| \leqslant \sum_{k=3}^{\infty}\frac{A}{\varepsilon^k}\frac{k(k-1)}{2}(\varepsilon_1+|h|)^{k-2}$; так как $\frac{\varepsilon_1+|h|}{\varepsilon}<1$, то полученный ряд сходится. Взяв $h\to 0$, получим $f'(z)=\sum_{k=1}^{\infty}kc_k(z-z_0)^{k-1}$. Мы обосновали что комплексную аналитическую функцию можно почленно дифференцировать. В таком случае, можно заметить, что f' - тоже аналитическая функция, а значит $f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k(z-z_0)^{k-2}$, ч.т.д.

Мы получили, что f бесконечно дифференцируема, а из дифференцируемости вытекает её голоморфность. $f(z)$ имеет производную, это равносильно условиям Коши-Римана, кроме того $f'(z)$ непрерывна, а это даёт голоморфность.

12.2. Нуль аналитической функции, его порядок и изолированность.

Пусть в z_0 значение аналитической функции $f(z_0)$ равно 0. В этом случае z_0 называется нулём функции $f(z)$. Тогда в разложении в ряд Тейлора будет отсутствовать свободный член $c_0=0$. В случае когда отсутствуют все слагаемые, содержащие $(z-z_0)^i, i<n$, где n - некоторое число, то разложение будет иметь вид $f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, а сама точка z_0 будет называться нулём порядка n.

Под изолированностью нуля какой-либо функции подразумевается существование такой окрестности нуля, что в ней отсутствуют другие нули.

12.3. Теорема единственности аналитической функции.

Теорема. Теорема (прим. техера: подготовительная) единственности аналитической функции.

Если f аналитична в точке z_0 и z_0 является предельной точкой последовательности нулей функции f, т.е. $\exists z_n: z_n\to z_0, f(z_n)=0\forall n$, то $f(z)\equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0.

Доказательство. Так как f непрерывна, то $f(z_0)=0 \implies$ в разложении $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$ некоторое количество начальных коэффициентов будет равно нулю: $c_0=c_1=\dots=c_n=0$, т.е. $f(z)=(z-z_0)^n(c_{n+1}+c_{n+2}(z-z_0)+\dots)$. Получили, что z_0 - это ноль функции f кратности n.

Рассмотрим сумму в скобках. Она задаёт голоморфную функцию $g(z)$. Значит, $g(z)$ - непрерывна, и так как $c_{n+1}\neq 0$, то существует такая окрестность $|z-z_0|<\varepsilon: |g(z)|>0. \implies$ в круге радиуса $|z-z_0|<\varepsilon$ нет дургих нулей функции, т.е. z_0 - ноль аналитической функции должен быть изолированным. А это противоречит тому, что у нас n нулей, т.е. такого n не существует, а значит $f(z)=0$ в некоторой окрестности z. ■

Отсюда перейдём непосредственно к самой теореме о единственности.

Теорема. Теорема (прим. техера: основная) единственности аналитической функции.

Если две функции $f_1(z), f_2(z)\in\Sigma D$ совпадают на множестве ε, которое имеет хотя бы одну предельную точку $z_0\in D$, то $f_1(z)=f_2(z)$ всюду в D.

Доказательство. Рассмотрим $f=f_1-f_2$. Покажем, что $f\equiv 0$ в D. Т.е. требуется доказать, что множество $F=z\in D: f(z)=0$, в которое включено ε совпадёт с D. Предельная точка z_0 является нулём функции f в силу непрерывности. Из теоремы доказанной ранее получим, что $f\equiv 0$ в некоторой окрестности z_0, ибо в противном случае эта точка не могла бы быть предельной для множества нулей f. Таким образом, получим, что ядро множества F непусто - оно содержит в себе точку z_0. По построению F открыто, но при этом замкнуто относительно области D. По ранее доказанной теореме можем сказать, что взяв точку $b\in D$, мы получим предельную точку для F, а потому $f(b)\equiv 0$, т.е. $b\in F$. Так как по определению области D связно, то имеем $F=D$. А значит $f\equiv 0$ на всей D, и $f_1(z)=f_2(z)$. ■

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f, если $\exists \delta : f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z - z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 – устранимая особенность функции f и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$ голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underbrace{=}_{(*_1)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underbrace{=}_{(*_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \begin{bmatrix} \text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ z \neq z_0 \end{bmatrix}$$

Объяснения:

$(*_1)$: Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε, которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

$(*_2)$: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left. \begin{array}{c} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |\zeta - z| \geqslant |\underbrace{t - z_0}_{\text{число}}| - \varepsilon_1 \\ \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow[\varepsilon_1 \to 0]{} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z, включая z_0, можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \begin{bmatrix} \text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |z - z_0| < \delta \end{bmatrix}$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0, а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0. Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0, в силу произвольности ε, устремив ε к нулю, мы получим, что $\widetilde{f}(z_0) = a$. ■

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty$, то есть $z_0 -$ полюс

Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, тогда $g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0, получим новую функцию $\widetilde{g}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \; z \neq z_0, \\ 0, \; z = z_0. \end{cases}$ которая будет голоморфной в точке z_0, а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ так как } \widetilde{g}(z_0) = 0 \;\text{ то } c_0 = .. = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \widetilde{g}(z) = (z-z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z-z_0) + ..)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\widetilde{g}(z)$ имеет нуль $n-$ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс $n-$ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 – существенно особая точка функции f, то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \; \exists \{z_n\} \colon z_n \to z_0, \; f(z_n) \to a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то $z_0 -$ устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists \{z_n\} : \; z_n \to z_0, \; f(z_n) \to \infty$
- Если $\forall \delta \; \exists z : \; 0 < |z - z_0| < \delta \; f(z) = a$, тогда $\exists \{z_n\} : \; 0 < |z_n - z_0| < \dfrac{1}{n} \; f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)
- $\exists \delta : \; 0 < |z - z_0| < \delta \; f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a, то функция $g(z)$ – голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$

  Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \dfrac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists \{z_n\} : \;\; g(z_n) \to \infty$, тогда $f(z_n) \to a$.

■

14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

14.1. Ряд Лорана и его сходимость.

Пускай f голоморфна в кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Зафиксируем $\forall z$ и $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : \ r_1 < \varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2 < r_2$
Рассмотрим в плоскости ζ кольцо $\varepsilon_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \varepsilon_2$ Тогда по формуле Коши мы получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{(1)} \underbrace{- \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{(2)}$$

Рассмотрим эти два интеграла отдельно:

$$(1): \ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}d\zeta = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2} f(\zeta)\frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta$$

Заметим, что модуль остаточного члена $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2} f(\zeta)\frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta\right|$ стремится к нулю, а значит ряд будет сходиться

Аналогично:

$$(2): \ -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + .. + \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^m + \frac{\left(\frac{\zeta - z}{z - z_0}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1} f(\zeta) \cdot \frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^m}{z - \zeta}$$

В данном случае, дробь в числителе остаточного члена по модулю меньше 1, поэтому при возведении в степень мы будем получать число стремящееся к 0, то есть остаточный член будет стремиться к 0, а значит ряд сходится.
Объединяя (1) и (2) получаем обобщенный степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta, \ k \in \mathbb{Z}, \ r_1 < \varepsilon < r_2$$

Определение.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ – ряд Лорана.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$ – правильная часть ряда Лорана

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ – главная часть ряда Лорана

14.2. Единственность разложения Лорана.

Теорема. Пусть $f(z)$ представлена в некотором кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Покажем, что это и есть разложение в ряд Лорана.

Доказательство.

- Для начала докажем голоморфность функции $f(z)$ в кольце:

  Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ сходятся на соответствующих множествах, а мы знаем, что степенной рад внутри интервала сходимости будет сходиться абсолютно, а если мы возьмем замкнутое подмножество множества сходимости, то на нем ряд будет сходиться равномерно. Тогда в кольце $r_1+\delta \leqslant |z-z_0| \leqslant r_2-\delta$ наш ряд сходится абсолютно и равномерно.

  Итого получили абсолютно и равномерно сходящихся ряд, состоящий из аналитических функций, тогда (по теореме, которую мы не доказывали) сумма ряда, а именно функция $f(z)$ – аналитическая функция, а значит она голоморфная, тогда мы можем $f(z)$ разложить в ряд Лорана.

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1}(\zeta-z_0)^k$$

- Так как наш ряд сходится абсолютно и равномерно, то мы можем его проинтегрировать почленно, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta-z_0|<\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \oint\limits_{\varepsilon} (\zeta-z_0)^k d\zeta = (*)$$

  Вычислим отдельно интеграл $\oint\limits_{\varepsilon}(\zeta-z_0)^k d\zeta$, для этого перейдем к другой переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} \zeta &= z_0 + \varepsilon e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi] \\ d\zeta &= \varepsilon \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\oint\limits_{\varepsilon}(\zeta-z_0)^k d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} i\cdot\varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i\cdot\varepsilon^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \underbrace{=}_{\text{Формула Эйлера}} i\cdot\varepsilon^{k+1}\cdot \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0 \\ 2\pi, & k+1 = 0 \end{cases}$$

  Возвращаясь к исходному неравенству получим, что

$$(*) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \cdot i \cdot \varepsilon^k \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot a_n \cdot \varepsilon^{-1} \cdot 2\pi = a_n$$

■

14.3. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

Определение.

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ – ряд Лорана.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(z-z_0)^k$ – правильная часть ряда Лорана

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ – главная часть ряда Лорана

Пускай z_0 – однозначно особая точка функции f. Рассмотрим ряд Лорана функции f в кольце $0 < |z-z_0| < \delta$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

Рассмотрим множество $I = \{k \mid c_{-k} \neq 0\}$, тогда

1. z_0 – устранимая особенность $\iff$ $I = \varnothing$, т.е. все $c_{-k} = 0$
2. z_0 – полюс $\iff$ I – конечное
3. z_0 – существенная особенность $\iff$ I – бесконечное

15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.

Определение. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, тогда вычет функции f в точке $z_0(res_{z_0} f)$ это величина, равная $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$, где $0 < \varepsilon < \delta$.

Теорема. Теорема Коши о вычетах.

Пусть f голоморфна в области D всюду, за исключением конечного числа однозначных особых точек $z_1, \dots, z_n$, тогда

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

Доказательство. Окружим каждую точку маленьким кругом, которые не пересекаются и не вылезают за предел множества. Каждая точка - z_i, а её круг - U_i.

Рассмотрим множество $D' = D \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$, тогда по теореме Коши:

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0 \implies \oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

$$(\oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i res_{z_k} f)$$

■

Теорема. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана: $res_{z_0} f = c_{-1}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{k=-\inf}^{\inf} c_k (z - z_0)^k$ в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$. Так как этот ряд сходится, то мы можем его почленно проинтегрировать: $res_{z_0} f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\varepsilon} f(z)dz$. Возьмём замкнутое множество $\delta < |z - z_0| < r - \delta$, тогда на этом множестве ряд будет сходиться равномерно, а значит мы можем почленно применить этот интеграл к каждому слагаемому ряда: $res_{z_0} f = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\varepsilon} f(z)dz = \dfrac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\inf}^{\inf} c_k \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} (z - z_0)^k dz = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$. Здесь мы заметили, что интеграл внутри суммы обращается в $2\pi i$ при $k + 1 = 0$, и в 0 в обратном случае. ■

Предложение. Пусть z_0 - полюс порядка n. $f(z) = \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \dfrac{c_{-n}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$. Домножим на $(z - z_0)^n$. Получим $f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots$. Сделав разложение по Тейлору получим $c_{-1} = \dfrac{1}{(n-1)!}(f(z)(z - z_0)^n)^{(n-1)}|_{z=z_0}$. Если $n = 1$, то $c_{-1} = (f(z)(z - z_0))|_{z=z_0}$, на самом деле так как у f есть неприятность в точке z_0, то как правило необходимо считать предел.