Математический Анализ - 2

Серёжа Рахманов | telegram, website
Максим Николаев | telegram

Версия от 14.09.2025 12:58

Содержание

1 Лекция 1 - 01.09.2020 - Ряды

1.1 Определение ряда

Определение 1. Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма: $a_1+a_2+a_3+\dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом. $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма, сумма ряда: $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$

Возможны 3 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$
3. $\nexists S$

В первом случае говорят, что ряд сходится, иначе – что ряд расходится.

Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - \dots$ не существует

Определение 2. Если ряд сходится, т.е. $S_N \to S$ при $N \to \infty$, то $S - S_N = r_N$ – остаток ряда $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$, $r_N \to 0$ при $N \to \infty$

1.2 Необходимое условие сходимости

Замечание. Если ряд сходится, то $a_n \to 0$

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ ∎

1.3 Критерий Коши

Определение 3. a_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *S_n – сходится $\Leftrightarrow$ S_n – фундаментальная*

Доказательство. $S_n - S_m = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > m > N\ |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon$ ∎

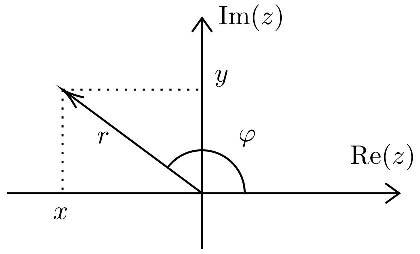
Пример.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   Заметим, что $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$

   Этот ряд сходится при $N \to \infty$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. $z \in \mathbb{C}$, $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$



Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$

$S_N = 1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$

Ряд сходится $\Leftrightarrow |z| < 1$

$|z| < 1 \Rightarrow z^n \to 0$, $S_N = \dfrac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \to \dfrac{1}{1 - z}$

1.4 Положительные ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$, $S_n \uparrow$, т.к. $S_{n+1} \geqslant S_n$

Возможны 2 случая:

1. $\exists S \in \mathbb{R}$
2. $\exists S = \infty$

Обозначение 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ – ряд сходится, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ – ряд расходится.

1.5 Признаки сравнения

1. Сравнение с помощью неравенства.

   $a_n \leqslant b_n$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

2. Сравнение отношений.

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ при всех $n \geqslant n_0$

   Ряд $\sum b_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится

   Ряд $\sum a_n$ расходится $\implies$ ряд $\sum b_n$ расходится

   Доказательство.

   $a_{n_0+1} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$

   $a_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$

   $\vdots$

   $a_{n_0+k} \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k} \implies \sum\limits_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum\limits_{n=n_0}^{N} b_n$ ■

3. Сравнение с помощью предела.

   $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty) \implies$ сходимость $\sum a_n \iff$ сходимость $\sum b_n$

Доказательство.

$c = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$

$\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ c - \varepsilon \leqslant \dfrac{a_n}{b_n} \leqslant c + \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0$

Возьмём $\varepsilon : c - \varepsilon > 0 \implies (c-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (c+\varepsilon)\cdot b_n$

Сходимость следует из правой части неравенства, а расходимость из левой. ■

1.6 Отсутствие универсального ряда сравнения

Предложение. Не существует ряда $\sum c_n,\ c_n > 0$:
1) $\dfrac{a_n}{c_n} \to 0 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
2) $\dfrac{b_n}{c_n} \to \infty \implies$ ряд $\sum b_n$ расходится.

Доказательство.

1. Если ряд $\sum c_n$ расходится, то пусть $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} c_n \to \infty, S_0 = 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})}_{a_n}$ расходится так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N} (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) = \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_N} - \sqrt{S_{N-1}} = \sqrt{S_N} - \sqrt{S_0} = \sqrt{S_N} \to \sqrt{S}$

   (b) $\dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}}{S_n - S_{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \implies \dfrac{a_n}{c_n} \to 0$

   Ряд расходится, но по предположению сходится, получили противоречие.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то рассмотрим r_n - его n-ный остаток, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})}_{b_n}$, $r_0 = S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{N} (\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_{N-1}} - \sqrt{r_N} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_N} = \sqrt{S} - \sqrt{r_N} \to \sqrt{S}$, т.к. $r_N \to 0$

   (b) $\dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{c_n} = \dfrac{\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}}{r_{n-1} - r_n} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} \to \infty$, т.к. $\sqrt{r_{n-1}} \to 0$ и $\sqrt{r_n} \to 0$

   Ряд сходится, но по предположению расходится, получили противоречие.

■

2 Лекция 2 - 08.09.2020 - Положительные ряды

2.1 Признак Лобачевского-Коши

Предложение. Пусть $a_n > 0$ и $a_n \downarrow$
Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ ведут себя одинаково

Доказательство. $a_1 + (a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots$

$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_2$

$2a_2 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2a_4$

$4a_4 \geqslant a_5 + \dots + a_8 \geqslant 4a_8$

$\vdots$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n a_{2^n} \geqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \geqslant a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$$

∎

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – обобщённый гармонический ряд, $p > 0$

$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow \qquad a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^p}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{p-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

Это сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2^{p-1}}$

$q < 1 \iff p > 1$ – ряды сходятся, например: $\sum \frac{1}{n^{1,001}}, \sum \frac{1}{n^2}$

$q \geqslant 1 \iff p \leqslant 1$ – ряды расходятся, например: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \sum \frac{1}{n}$

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^p n}, p > 0$

$\frac{1}{n \cdot \ln^p n} \downarrow, a_{2^n} = \frac{1}{2^n \cdot \ln^p 2^n} = \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot n^p \cdot \ln^p 2} = \frac{1}{\ln^p 2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

2.2 Теорема Штольца и оценка частичных сумм гармонического ряда

Гармонический ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln n$

$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

$A_n \uparrow, B_n \downarrow$

$B_n > A_n$

$B_1 > \dots > B_{n-1} > B_n > A_n > A_{n-1} > \dots > A_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$B_n - A_n = \frac{1}{n} \to 0$

Значит, $\exists \lim A_n = \lim B_n = \gamma \approx 0.5772\dots$ – число Эйлера-Маскерони

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + o(1)$$

Теорема 2.1. *(Штольца.) Если $p_n, q_n \to 0, q_n \downarrow$ и $\exists lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim \frac{p_n}{q_n} = \lim \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$*

Теперь с помощью теоремы Штольца уточним остаточный член у гармонического ряда:

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)} \overset{\heartsuit}{=}$$

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Получаем, что $\overset{\heartsuit}{=} \lim \dfrac{-\dfrac{1}{2n^2}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \underbrace{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

Так как

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \to 0$$

2.3 Признак Даламбера и радикальный признак Коши

Теорема 2.2. *Признак Дарамбера. Пусть* $a_n > 0$.
$\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Теорема 2.3. *Радикальный признак Коши. Пусть* $a_n \geqslant 0$.
$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *сходится.*
$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies$ *ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}, \quad p > 0$

$a_n = \dfrac{p^n}{n!}, \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{p^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{p^n} = \dfrac{p}{n+1} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по признаку Даламбера.

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{p^n}{n!}} = \dfrac{p}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1 \implies$ ряд сходится по радикальному признаку Коши. ($\sqrt[n]{n!} \to \infty$)

2.4 Радикальный признак сильнее признака Даламбера

Пусть $a_n > 0$. Тогда:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1$
Если $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$
Если $\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, то $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

2.5 Признак Гаусса

(Сравнение с $\sum \dfrac{1}{n^p}$)
Если $\exists \delta > 0, p$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ то:
$p > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.
$p \leqslant 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

2.6 Сравнение с интегралом

Рассмотрим $f(x) \downarrow$ при $x \geqslant n_0 - 1$ и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1]$$

$$\int_0^1 dt: \quad \int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}: \quad \int_{n_0}^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(x)dx$$

$\implies \sum a_n$ ведёт себя так же как несобственный интеграл $\int^{\infty} f(x)dx$

2.7 Улучшение сходимости ряда

Пример. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Для улучшения сходимости будем пользоваться рядами такого типа:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}, \quad \dots$

Такие ряды достаточно легко считаются, в нашем примере воспользуемся первым т.к. $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+2} - \dfrac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+2} - \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$

$\dfrac{1}{n^2+2} - \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(\dfrac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \dfrac{2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \dfrac{1}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Слагаемые убывают быстрее, чтобы получить число с определённой точностью потребуется значительно меньше сложений.

Получили, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2} \approx 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$

3 Лекция 3 - 15.09.2020 - Знакопеременные ряды

3.1 Абсолютная и условная сходимость

Определение 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$
Если $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, то ряд называется знакочередующимся.

Пусть $\sum a_n$ сходится

Определение 5. Рассмотрим дополнительный ряд $\sum |a_n|$ (*)
Если (*) сходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся абсолютно
Если (*) расходится, то $\sum a_n$ называется сходящимся условно

Определение 6. Введём $a_n^+ = \begin{cases} a_n, a_n > 0 \\ 0 \end{cases} \quad a_n^+ = \begin{cases} |a_n|, a_n < 0 \\ 0 \end{cases}$

Ряды $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ называются положительной и отрицательной частью исходного ряда $\sum a_n$

$S_N^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^+$, $S_N^- = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^-$
$a_n = a_n^+ - a_n^-$, $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ - S_N^-$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_N^+ + S_N^-$

Замечание. Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\iff$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ сходятся Ряд $\sum a_n$ сходится условно $\implies$ оба ряда $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ расходятся

3.2 Мажорантный признак Вейерштрасса

Теорема 3.1. *Если $|a_n| \leqslant b_n$ при $n > n_0$ и положительный ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится, причём абсолютно.*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$
$|sin(nx)| \leqslant 1 \implies \left|\dfrac{sin(nx)}{n^P}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^p}$
$\sum \dfrac{1}{n^p}$ сходится $(p > 1) \implies \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$ сходится абсолютно.

3.3 Группировка членов ряда

Говорят, что ряд $\sum b_k$ получен из $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1 < n_2 < \ldots$:
$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}$
$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$
$\ldots$

Замечание. Если $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum b_k$ сходится к той же сумме.

Доказательство. $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k = \sum\limits_{n=1}^{n_m} a_n$ ■

Обратное утверждение неверно: $(1-1) + (1-1) + \ldots$
Знакопеременный ряд при помощи группировки сводится к знакочередующемуся:
$a_1 \leqslant 0, \ldots, a_{n_1} \leqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i \leqslant 0$
$a_{n_1+1} \geqslant 0, \ldots, a_{n_2} \geqslant 0$; $b_1 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i \leqslant 0$
При такой группировке сходимость исходного ряда $\iff$ сходимость $\sum b_n$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k = (-1)^k$

$|b_k| = \sum\limits_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{[e^k]+1} \cdot ([e^{k+1}] - [e^k]) \approx \frac{e^{k+1} - e^k}{e^k} \to e - 1 > 0$

3.4 Знакочередующиеся ряды, пр-к Лейбница

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = (-1)^n \cdot u_n$, $u_n > 0$

Теорема 3.2. *Признак Лейбница. Если $u_n \downarrow 0$, то ряд сходится, причём $|r_n| \leqslant u_{n+1}$*

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $p > 0$

$\frac{1}{n^p} \downarrow 0 \implies$ ряд сходится (при $\forall p > 0$)

При этом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$: $p \in (0; 1]$ – сходится условно, $p \in (1; +\infty)$ – абсолютно

3.5 О неприменимости эквивалентности

Рассмотрим 2 ряда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

При этом правый ряд сходится по признаку Лейбница, а левый – расходится:

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$

$\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \to \infty$

3.6 Признаки Дирихле и Абеля

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$

Теорема 3.3. *Признак Дирихле. Если $a_n \downarrow 0$, а частичные суммы $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant C$ ограничены, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

Теорема 3.4. *Признак Абеля. Если a_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.*

$a_n \to a$, $a_n = a + -\alpha_n$, $\alpha_n \downarrow 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = a \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n + - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot b_n$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$, $p > 0$

$a_n = \frac{1}{n^p} \downarrow 0$, $b_n = \sin nx$

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_N = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin Nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos((N+1/2)x)}{2 \sin \frac{x}{2}}$; $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| \leqslant \frac{2}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$

Ряд сходится по признаку Дирихле

3.7 Влияние перестановки членов ряда на его сумму

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из $\sum a_n$ перестановкой членов, если $b_n = a_{f(n)}$

Если ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, то $\forall$ ряд, полученный из него перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме.

Теорема 3.5. *(Римана) Если ряд* $\sum a_n$ *сходится условно, то для* $\forall S \in [-\infty; +\infty]$ *то* $\exists$ *перестановка* f *такая, что* $\sum a_{f(n)} = S$

4 Лекция 4 - 22.09.2020

4.1 Умножение рядов

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k,\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{K} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{M} b_m\right) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant K, 1 \leqslant m \leqslant M} a_k \cdot b_m$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \to \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение рядов.

Теорема 4.1. (Коши) Если $\sum a_k$, $\sum b_m$ сходятся абсолютно, то определено их произведение.

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$

Произведение рядов по Коши:

$c_2 = a_1 \cdot b_1$

$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$

$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3$

...

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$$

4.2 Бесконечное произведение

4.2.1 Основные понятия

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{N \to \infty} \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$

4.2.2 Сходимость бесконечного произведения

Необходимое условие сходимости:

Если $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ сходится, то $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to 1$

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = e^{\ln \prod_{n=1}^{N} a_n} = e^{\sum_{n=1}^{N} \ln a_n}$

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = P \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = \ln P\ (P \neq 0, a_n \to 1)$

Пусть $a_n \geqslant 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ – положительный ряд

$\ln a_n = (a_n - 1) + o(1)$, т. к. $a_n \to 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ сходится $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ сходится.

4.2.3 Абсолютная сходимость бесконечного произведения

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится соответствующий ему ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$

Замечание. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - 1)$ сходится абсолютно.

Пример. (Произведение Валлиса) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$ – получается из анализа интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

Прим. ред.: есть отличное видео с интуитивно понятным доказательством.

Пример. (Дзета-функция Римана) $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1$

Тождество Эйлера:
$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{p_n^s})}$, где $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$

4.3 Функциональные последовательности

4.3.1 Поточечная и равномерная сходимость

Пусть при всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

Говорят, что $a \in D$ – точка сходимости $\{f_n(x)\}$, если последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится.

Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

Говорят, что последовательность сходится на D поточечно, если D – множество сходимости.

Говорят, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на D, если $\sup |f_n(x) - f(x)| \to 0$

Свойства

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \implies f_n \overset{D}{\to} f$
2. Если $D = D_1 \cup D_2$, то:
   $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff (f_n \overset{D_1}{\rightrightarrows} f$ и $f_n \overset{D_2}{\rightrightarrows} f)$

4.3.2 Равномерная норма. Критерий Коши

Рассмотрим множество всех функций $D \to \mathbb{R}$

$||f|| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$

Таким образом, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff ||f_n - f|| \to 0$

4.3.3 Теорема Дини

Пусть $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, f_n(x)$ монотонна по n при каждом $x \in [a, b]$, $f_n \to f$ на $[a, b]$

Тогда $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

5 Лекция 5 - 29.09.2020 - Исследование сходимости функциональных рядов

5.1 Свойства равномерно сходящейся последовательности

1. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть $f_n \to f$, $x \in D$, $y_n = \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$, $\{y_n\}$ – сход., $y_n \to y$

   Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n \to \infty} (\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x))$

   Доказательство. $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$

   Пусть n такое, что $|y - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}, ||f_n - f|| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $|x - x_0| < \delta, |f(x) - y| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

   Тогда $|y - f(x)| \leqslant |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

2. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, рассмотрим $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть f_n дифференцируемы на D, $f'_n \overset{D}{\rightrightarrows} g, \exists c \in D : \{f_n(c)\}$ сход

   Тогда $\exists f : f_n \to f$ (причем, если D огр., то сходимость равномерная)

   f – дифференцируема, $f' = g$.

   $(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n \to \infty} f'_n(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty$, $D = [a; b]$

   Пусть f_n непрерывны на D, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ ($\implies$ fнепрерывна наD)

   Тогда $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \to^D \int_a^x f(t)dt$

5.2 Равномерная сходимость функционального ряда

$D \subseteq \mathbb{R}$, $a_n : D \to R$

Функциональный ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

Частичные суммы: $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$

Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x, при которых ряд сходится абсолютно.

5.3 Необходимое условие равномерной сходимости

Если $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится к сумме $S(x)$, то $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \implies a_n \overset{D}{\rightrightarrows} (S - S) = 0$ ■

Пример. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, D = \mathbb{R}$ – не является сходящейся равномерно, т.к. $\dfrac{x^n}{n!}! \to^{\mathbb{R}} 0$

5.4 Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 5.1. Функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $D \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n \geqslant N, \forall m$*:*

$$||a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}|| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$.

Отрицание: если $\exists\{x_n\} \subset D$, $\exists\{m_n\} \in \mathbb{N}$, $\exists\varepsilon_0$:

$$|a_n(x_n) + a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{m_n}(x_n)| > \varepsilon_0$$

То ряд не является сходящимся равномерно.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$, $D = \mathbb{R}$ – сходится, т.к. $\approx \sum \frac{1}{n^2}$ Докажем, что сходится неравномерно. Возьмём $x_n = n$, $m_n = 2n$:

$$\frac{n}{n^2+n^2} + \frac{n}{n^2+(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{n^2+(2n)^2} > \frac{n}{5n^2} \cdot n = \frac{1}{5}$$

5.5 Признаки Вейерштрасса и Даламбера

Теорема 5.2. *(Признак Вейерштрасса) Если* $|a_n(x)| \leqslant b_n$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *а ряд* $\sum b_n$ *сходится, то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

Доказательство. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| \leqslant b_n + b_{n+1} + \dots + b_{n+m} < \varepsilon$ ■

Теорема 5.3. *(Признак Даламбера) Если* $\exists q < 1$: $|a_{n+1}(x)| \leqslant q \cdot |a_n(x)|$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *причём* $a_{n_0}(x)$ *– ограничена на* D, *то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $D = [-r; r]$, $r > 0$

$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leqslant q \cdot \left|\frac{x^n}{n!}\right|$

$\left|\frac{x}{n+1}\right| \leqslant q$. Пусть $n_0 : \frac{r}{n_0+1} < 1$, берём $q = \frac{r}{n_0+1}$. Значит, ряд абсолютно и равномерно сходится.

5.6 Признак Лейбница

Знакочередующийся функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n(x)$, $u_n(x) \geqslant 0$ на D.

Теорема 5.4. *(Признак Лейбница) Если* $u_n(x) \downarrow_{(n)}$ *и* $u_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *то ряд сходится равномерно.*

Пример. $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^p} \downarrow_{(n)}$, $|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^p} \to 0 \implies u_n \to^0 0$

5.7 Признаки Дирихле и Абеля

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n x$

Теорема 5.5. *(Признак Дирихле) Если* $a_n(x) \downarrow_{(n)}$ *и* $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *а* $||b_1 + \dots + b_n|| \leqslant C$ $\forall n$, *то ряд равномерно сходится на* D.

Теорема 5.6. *(Признак Абеля) Если* $a_n(x)$ *монотонна по* n *(при* $\forall x \in D$*), и* $||a_n|| \leqslant C$ *при всех* n, *а ряд* $\sum b_n(x)$ *сходится равномерно, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ *сходится равномерно.*

5.8 Свойства равномерно сходящегося ряда

1. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$

   Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится равномерно на D, $x_0 \in D$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} c_n(x) = y_n$ и $\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

   Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$

2. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\ D = (a; b),\ D = [a; b]$

   Пусть $c_n(x)$ дифференцируемы на D и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n'(x)$ сходится равномерно на D.

   Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ сходится на D (а если D огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой функцией на D и $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n'(x)$

3. $-\infty < a < b < +\infty,\ D = (a; b),\ D = [a; b]$

   $\int_a^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt$ – сходится равномерно на D.

6 Лекция 6 - 6.10.2020 - Степенные ряды

6.1 Основные понятия

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$

$\{c_n\}$ – числовая последовательность (коэффициенты), $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n \cdot (x - x_0)^n$ – многочлен.

6.2 Теорема Абеля, радиус и интервал последовательности

Теорема 6.1. *(Абеля)*

1. *Если степенной ряд сходится в точке $x_1 \neq x_0$, то он сходится при всех $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$*

2. *Если степенной ряд расходится в точке $x_2 \neq x_0$, то он расходится при всех $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$*

Доказательство. 1. $\left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n(x - x_0)^n\right| = \left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left(\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^n\right| \leqslant \sum\limits_{n=m}^{N} |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left|\left(\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^n\right| \leqslant$
$\varepsilon(q^m + \dots + q^N) \leqslant \varepsilon \cdot q^m \cdot \dfrac{1}{1 - q} \to 0$

∎

Пусть:

$R_{cv} = \sup\{|x - x_0| : \text{ряд сходится}\}$

$R_{dv} = \inf\{|x - x_0| : \text{ряд расходится}\}$ или $+\infty$, если ряд сходится всюду

$\exists R = R_{cv} = Rdv$ – радиус сходимости.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$

Применим радикальный признак Коши:

$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0|$

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}$

Если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сходится

Если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд расходится

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$ – формула Коши-Адамара

Pro tip: если $\exists \lim \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, то $\lim \sqrt[n]{|c_n|} = \lim \left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

6.3 Равномерная сходимость степенного ряда

Если $R > 0$, то степенной ряд сходится равномерно при $|x - x_0| \leqslant r$, где $r < R$ (доказательство через признак Вейерштрасса).

6.4 Сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости

Пусть $\sum c_n R^n$ сходится. Тогда степенной ряд $\sum c_n(x - x_0)^n$ сходится равномерно на $[x_0; x_0 + R]$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n \cdot R^n) \cdot \left(\dfrac{x - x_0}{R}\right)^n$

$b_n = c_n \cdot R^n$, $a_n = \left(\dfrac{x - x_0}{R}\right)^n$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится $\implies$ сходится равномерно.

$a_n(x) \downarrow_{(n)}$

Значит, ряд сходится равномерно по признаку Абеля. ∎

6.5 Дифференцирование и интегрирование степенного ряда

$\sum c_n(x-x_0)^n$, $R>0$ – его радиус сходимости.

1. Дифференцирование

   При почленном дифференцировании получаем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}$ Его радиус сходимости равен радиусу исходного ряда $\implies$ он сходится равномерно при $|x-x_0|\leqslant r<R$ Значит по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(x-x_0)^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)(x-x_0)^n$

2. Интегрирование

   $\int_{x_0}^{x}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(t-x_0)^n\right)dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$

6.6 Бесконечное дифференцирование

Функция называется бесконечно дифференцируемой в точке a, если $\forall n$ она n раз дифференцируема в точке a. Сумма степенного ряда с $R>0$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

6.7 Ряд Тейлора

Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0, то функции $f(x)$ можно сопоставить её ряд Тейлора: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

При этом $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_N(x)$

$r_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(x_0+\theta)(x-x_0)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$, $\theta\in(0;1)$ – формула Лагранжа

$r_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(x_0+\theta)(x-x_0)}{N!}(1-\theta)^N(x-x_0)^{N+1}$, $\theta\in(0;1)$ – формула Коши

Определение 7. Функция называется аналитической в т.x_0, если она представима в окрестности этой точки в виде степенного ряда.

Не всякая бесконечно дифференцируемая функция будет аналитической:

Пример. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

$f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=0$, ряд Тейлора при $x_0=0$ равен 0

6.7.1 Ряды Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, R=\infty$

2. $(1+x)^p - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(p)_n}{n!}x^n$, где $(p)_n=p(p-1)\dots(p-n+1), R=1$

3. $\ln(1+x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(n+1)}x^n}{n!}$

7 Лекция 7 - 27.10.2020 - Мера Жордана

7.1 Мера на кольце множеств

Определение 8. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое семейство подмножеств множества X, т.е. $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Функция μ: $\mathcal{F} \to [0; +\infty)$ называется мерой на $\mathcal{F}$, если она обладает свойством аддитивности:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Множество $\mathcal{F}$ называется кольцом, если:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$
2. Если A, $B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$ содержатся в $\mathcal{F}$

Свойства меры на кольце:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $A \subseteq B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$
3. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

7.2 Ограниченные полуинтервалы в $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}$: $[a; b)$
$\mathbb{R}^2$: $[a; b) \times [c; d)$
$\mathbb{R}^m$: $[a^1; b^1) \times [a^2; b^2) \times \dots \times [a^m; b^m)$, $a = (a^1, \dots, a^m), b = (b^1, \dots, b^m) \in \mathbb{R}^m$
$[a; a) = \varnothing$
$\mathbb{R}$:
Пересечение двух полуинтервалов – полуинтервал.
Разность двух полуинтервалов – полуинтервал или объединение двух непересекающихся полуинтервалов.
$\mathbb{R}^n$:
Разность двух полуинтервалов есть объединение не более, чем $2m$ дизъюнктных полуинтервалов.

7.3 Кольцо простых множеств

Определение 9. Простым множество называется объединением конечного числа полуинтервалов:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} [a_i; b_i)$$

Простые множества образуют кольцо:
$\varnothing = [a; a)$ – простое.
E_1, E_2 – простые, то: $E_1 \cup E_2$ – простое, $E_1 \cap E_2$ – простое, $E_1 \setminus E_2$ – простое.
$E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = E_i \sqcup (E_2 \setminus E_1) \sqcup (E_3 \setminus E_1 \setminus E_2 \sqcup \dots)$
E представимо в виде объединения дизъюнктных полуинтервалов: $E = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} [a_j; b_j)$
$\mu([a; b)) = (b^1 - a^1) \cdot (b^2 - a^2) \cdot \dots \cdot (b^m - a^m)$, где все $b^i \geqslant a^i$
$\mu(E) = \mu(\bigsqcup [a_j; b_j)) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu([a_j; b_j))$

7.4 Внешняя m-мерная мера Жордана

$A \subset \mathbb{R}^m$, A – ограниченное множество.

Внешней мерой Жордана множества A называется $\overline{\mu}(A) = \inf\limits_{E, A \subseteq E} \mu(E)$

Свойства внешней меры:

1. $\overline{\mu}(\varnothing) = 0$

2. $A \subseteq B \implies \overline{\mu}(A) \leqslant \overline{\mu}(B)$

   Доказательство. Т.к. $\forall E, B \subseteq E \implies A \subseteq E$, т.е. при вычислении $\overline{\mu}(A)$ inf берётся по более широкому классу множеств E. ■

3. $\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$

   Доказательство. $A \subseteq E_1, B \subseteq E_2 \implies A \cup B \subseteq E_1 \cup E_2$

   $\overline{\mu}(A \cup B) \leqslant \mu(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2) \leqslant \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$ ■

4. Внешняя мера не обладает свойством аддитивности

7.5 Измеримость по Жордану

Определение 10. Ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется измеримым по Жордану, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists E, A \subseteq E$: $\overline{\mu}(E \setminus A) < \varepsilon$

1. $\varnothing$ – измеримо

2. A, B – измеримы $\implies A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ – измеримы

Значит, измеримые множества образуют кольцо.

На кольце измеримых множеств внешняя мера аддитивна.

Определение 11. Рассмотрим теперь $E \subseteq A$, тогда $\underline{\mu}(A) = \sup\limits_{E \subseteq A} \mu(E)$ – внутренняя мера A.

Множество A измеримо $\iff \overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$

∂A – граница множества A.

Если $E_1 \subseteq A \subseteq E_2$, то $\partial A \subseteq E_2 \setminus E_1$.

Если A – измеримо, то $\overline{\mu}(\partial A) = 0$

7.6 Интегрируемость функции по Риману и измеримость по Жордану её подграфика

$f(x) \geqslant 0$ на $[0; 1]$

$A = \{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant f(x), x \in [0; 1]\}$ – подграфик функции f.

Функция f интегрируема на $[0; 1] \iff A$ измеримо по Жордану, причём $\mu(A) = \int_0^1 f(x)dx$