



2024 上海海事大学第二十届大学生 数学建模竞赛论文

队员：

- | | | |
|--------|---------|--------------|
| 1. 卢豪豪 | 计算机 238 | 202310310239 |
| 2. 刘亚茜 | 计科 223 | 202210310010 |
| 3. 黄瑜 | 经济学 235 | 202310711161 |

完成时间：2024 年 5 月 20 日

目录

摘要	- 1 -
一、 问题重述.....	- 2 -
1.1 问题一.....	- 2 -
1.2 问题二.....	- 2 -
1.3 问题三.....	- 2 -
1.4 问题四.....	- 2 -
二、 问题分析.....	- 2 -
2.1 问题一的分析.....	- 2 -
2.2 问题二的分析.....	- 2 -
2.3 问题三的分析.....	- 3 -
2.4 问题四的分析.....	- 3 -
三、 模型假设.....	- 3 -
1、飞行器运动模型假设.....	- 3 -
2、机会信号观测模型假设.....	- 3 -
3、无迹卡尔曼滤波算法.....	- 3 -
4、异常值处理.....	- 3 -
5、噪声分布.....	- 4 -
6、发射源信息.....	- 4 -
四、 符号说明.....	- 4 -
五、 模型的建立与求解.....	- 6 -
5.1 问题一的模型的建立与求解.....	- 6 -
5.1.1 问题一模型思路分析.....	- 6 -
5.1.2 机会信号与飞行器位置关系模型确立.....	- 7 -
5.1.3 最少信号个数讨论.....	- 12 -
5.2 问题二模型的建立与求解.....	- 13 -
5.2.1 问题二模型思路分析.....	- 13 -
5.2.2 问题二状态模型空间建立.....	- 13 -
5.2.3 无迹卡尔曼滤波求解状态空间算法步骤.....	- 14 -
5.2.4 模型的求解.....	- 16 -
5.3 问题三模型的建立与求解.....	- 16 -
5.3.1 问题三模型思路分析.....	- 16 -
5.3.2 问题三数据检测和筛选模型建立.....	- 17 -
5.3.3 模型求解.....	- 22 -
5.4 问题四的模型建立与求解.....	- 24 -
5.4.1 问题四模型思路分析.....	- 24 -
5.4.2 问题四模型的建立与求解.....	- 25 -
六、 模型的评价、改进与推广.....	- 30 -
6.1 问题一的模型的评价与推广.....	- 30 -
6.2 问题二的模型的评价与推广.....	- 31 -
6.3 问题三的模型的评价与推广.....	- 31 -
6.4 问题四的模型的评价与推广.....	- 32 -
七、 参考文献.....	- 33 -

多源机会信号融合导航：理论建模与优化策略

摘要

尽管全球卫星定位系统（GNSS）的定位导航技术已经相当成熟，但是考虑到室内、隧道、建筑密集区等复杂环境，或者全球卫星定位系统遭受破坏失效等突发情况，便可能出现 GNSS 拒止情况，导致无法有效进行定位导航。为了克服这一局限性，本研究探索了一种基于机会信号的自主定位导航方法。本文针对飞行器利用多源机会信号进行自主导航定位的问题，提出了一系列数学建模和求解方法。

第一个问题，我们建立了各类机会信号观测模型，包括到达时间（TOA）、到达时间差（TDOA）、差分多普勒（DFD）、到达角（AOA）和接收信号强度指示（RSSI）五类信号模型。这些模型基于相应的物理测量原理和几何关系，能够较全面地描述观测量所包含的位置信息。同时，我们分析了每种类型信号所需的最少观测个数以唯一确定飞行器位置。

第二个问题，我们采用了无迹卡尔曼滤波算法，对第一问题中获得的机会信号数据进行融合估计。我们首先利用逐步线性最小二乘法对飞行器的初始状态进行估计，然后通过时间更新和观测更新两个阶段进行递归估计，得到了 0 到 10 秒内的位置和速度估计序列。我们在算法中对 Sigma 点计算、观测方程线性化等关键步骤进行了细致建模。该算法的创新之处在于能够有效融合多种异构观测，从而实现了实时导航定位。通过可视化结果表明，在无噪声情况下，该算法能够相当精确地估计出飞行器的运动轨迹。

第三个问题，为了进一步优化预测精度，我们引入了带有局部逃逸算子的海洋捕食者算法（LEO-MPA）。该算法模仿了海洋捕食者的狩猎行为，通过动态调整搜索策略，有效避免了陷入局部最优解，从而提高了全局寻优能力。我们采用了带有简单移动平均算法的实时位置估计方法。简单移动平均算法有助于平滑数据，减少瞬时噪声的影响，并提高定位精度。

第四个问题，针对接收情况 2 中存在的随机性偏差和常值飘移，我们设计了评价判断方法，并据此进行了数据调整。这一策略显著提高了信号处理的准确性，进而优化了飞行器的定位结果。我们成功地处理了随机性偏差和常值飘移，显著减少了预测误差。与优化前相比，数据显示飞行轨迹更加平滑，误差进一步降低。

各问题建立的模型和算法都具有一定的优缺点和推广空间。总的来说，这些方法能够较全面地描述各类观测量的信息，有效融合多种信号信息，提高了定位的精度，具有一定的创新性及应用价值。然而，也需要注意到部分模型假设的理想化以及参数选择的影响。未来的工作可以进一步改进观测模型，并引入更先进的优化算法。

关键词：多源机会信号、无迹卡尔曼滤波算法、LEO-MPA、简单移动平均算法

一、问题重述

1.1 问题一

根据题干建立机会信号的数学表达式。同时，针对每一类机会信号，讨论能够唯一确定飞行器位置的最少的机会信号个数。

1.2 问题二

接收情况数据，不考虑数据偏差的情况下，设计飞行器实时位置的估计方法，并给出飞行器 0 秒至 10 秒的导航定位结果。

1.3 问题三

在附件 1 的接收情况 1 数据中，某些机会信号可能有较大的偏差，请建立机会信号的实时筛选方法，筛选出偏差较大的机会信号。根据建立的机会信号筛选方法，给出此飞行器 0 秒至 10 秒的导航定位情况。

1.4 问题四

建立评价判断机会信号类别的方法，并依据所提出方法，判断接收情况 2 中的机会信号的随机性偏差程度以及常值漂移量。设计合理的机会信号筛选方法，给出接收情况 2 下的飞行器 0 秒至 10 秒的定位结果。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

这一问题要求建立每一类机会信号的数学表达式，并讨论唯一确定飞行器位置所需的最少信号个数。对于 TOA、TDOA、DFD、AOA 和 RSSI 这五类机会信号，需要根据它们的物理含义和测量原理，利用相关的测量模型和几何关系，构建出合理的数学表达式。同时，还需要分析每一类信号所蕴含的位置信息，讨论并确定为了定位飞行器，每种信号类型所需的最小数量。

2.2 问题二的分析

这一问题要求设计飞行器实时位置估计方法，给出无噪声情况下 0-10 秒的导航定位结果。需要基于第一问题建立的各类机会信号数学模型，设计合适的状态估计算法，如卡尔曼滤波或其他无迹卡尔曼滤波方法等，将各类机会信号进行有效融合，从而获得飞行器在 0-10 秒内的实时位置估计值序列。算法需要能够很好地处理非线性和非高斯情况，同时保证实时性和计算效率。这种情况下由于假设没有噪声，因此估计的精度较高。

2.3 问题三的分析

在实际应用中, 机会信号的测量数据往往会受到各种噪声的影响, 因此需要设计合理的机会信号实时筛选方法, 剔除偏差较大的噪声数据。可以引入带有局部逃逸算子的海洋捕食者算法 (LEO-MPA) 提高全局寻优能力。使用包含 SMA (简单移动平均) 算法的实时位置估计方法。SMA 算法帮助我们平滑数据, 减少瞬时噪声的影响, 并提高定位精度。然后基于数据筛选处理后的有效机会信号, 重新进行实时位置估计并给出 0-10 秒的导航定位结果。

2.4 问题四的分析

这一问题考虑了更加复杂的机会信号噪声情况, 包括随机性偏差和常值漂移两种。需要首先建立合理的评价模型, 对接收情况 2 中的机会信号数据进行分析, 判断各类信号的随机偏差程度和常值漂移量。我们采用简单移动平均 (Simple Moving Average, SMA)。SMA 是一种常用的数据平滑技术, 特别适用于时间序列数据, 用于降低数据中的随机波动并揭示潜在的趋势, 优化信号筛选算法, 提高定位系统的精度。

三、模型假设

本文问题 1-问题 4 的模型建立与求解过程中使用的主要模型假设如下:

1、飞行器运动模型假设

假设飞行器做常加速度运动, 即加速度在短时间内保持不变, 状态向量包括位置、速度和加速度三个分量, 服从常加速度运动学方程。这是一种常用的简化假设, 有助于降低运动模型的复杂度, 方便进行状态估计和预测。

2、机会信号观测模型假设

各类机会信号的观测模型都是基于相应的物理测量原理和几何关系建立的, TOA 模型利用了时间差与距离的关系, TDOA 模型利用了两个发射源到接收端距离差的关系, DFD 模型利用了多普勒频移与相对运动速度的关系, AOA 模型利用了到达角度与位置的几何约束关系, RSSI 模型利用了信号传播衰减与距离的关系。这些模型都做了一定的理想化假设, 忽略了一些高阶项或次要影响因素, 以简化问题复杂度。

3、无迹卡尔曼滤波算法

假设系统的过程噪声和观测噪声均服从高斯分布, 并且均值为零, 方差有限。同时, 系统的过程方程和观测方程需要满足一定的光滑性条件, 以保证无迹卡尔曼滤波的收敛性和有效性。

4、异常值处理

在问题 3 中,对观测量进行预处理和置信度计算时,假设了异常值和正常观测值在统计量(如均值、方差、峰度、偏度等)上存在显著差异,因此可以依据统计量设置合理的判据对异常值进行剔除或替代。

5、噪声分布

在问题 4 中,评估噪声的随机偏差时,假设噪声服从某种概率分布(如高斯分布),因此可以利用统计量(如均值、方差等)对其进行表征。同时也假设了状态预测值、观测预测值以及观测噪声协方差的计算是精确无偏的。有助于对噪声的特性进行定量分析和处理,从而更好地理解 and 优化定位系统的性能。

6、发射源信息

整个建模和求解过程中,都假设了发射源的位置和速度信息是已知的,不需要同时估计。如果发射源的状态也是未知的,就需要引入新的状态变量,增加问题的复杂度。

四、符号说明

本文问题 1-问题 4 的模型建立与求解过程中使用的主要符号及其说明如下:

符号	说明
$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$	飞行器的三维位置
$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$	飞行器的三维速度
$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$	飞行器的三维加速度
$\mathbf{s} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{a}^T)^T$	飞行器的状态向量
$\mathbf{f}(\mathbf{s}_k)$	过程方程,描述状态向量的动态演化
$\mathbf{h}(\mathbf{s}_k)$	观测方程,描述状态与观测量之间的关系
\mathbf{w}_k	过程噪声
\mathbf{v}_k	观测噪声
TOA_i	第 i 个发射源的 TOA(到达时间)观测量

TDOA_{ij}	第 i 个和第 j 个发射源的 TDOA(到达时间差)观测量
DFD_{ij}	第 i 个和第 j 个发射源的 DFD(多普勒频率差)观测量
α_i, β_i	第 i 个发射源的 AOA(到达角度)观测量
RSSI_i	第 i 个发射源的 RSSI(接收信号强度指标)观测量
\vec{v}_i	第 i 个发射源相对于接收端的相对速度向量
\vec{r}_i	第 i 个发射源相对于接收端的位移向量
c	信号传播速度(光速)
f_0	发射信号的频率
γ	信道衰减系数
P_0	标称信号强度
r_0	标称距离
χ_i	无迹卡尔曼滤波中的 Sigma 点
$W_i^{(m)}$	无迹卡尔曼滤波中的均值权重
$W_i^{(c)}$	无迹卡尔曼滤波中的协方差权重
λ	无迹卡尔曼滤波的尺度参数
κ	无迹卡尔曼滤波的二次项尺度参数
β	无迹卡尔曼滤波的优先权参数
$\hat{\mathbf{s}}_{k k-1}$	k 时刻的一步预测状态估计值
$\mathbf{P}_{k k-1}$	k 时刻的预测状态协方差矩阵
$\hat{\mathbf{z}}_{k k-1}$	k 时刻的预测观测值

$\mathbf{P}_{z,k k-1}$	k 时刻的预测观测协方差矩阵
$\mathbf{P}_{xz,k k-1}$	k 时刻的状态与观测量之间的交叉协方差矩阵
\mathbf{K}_k	k 时刻的卡尔曼增益矩阵
$\hat{\mathbf{s}}_k$	k 时刻的状态估计值
\mathbf{P}_k	k 时刻的状态估计协方差矩阵
z_k^i	第 k 时刻第 i 类观测量

五、模型的建立与求解

5.1 问题一的模型的建立与求解

5.1.1 问题一模型思路分析

第一个小问题要求建立每一类机会信号的数学表达式,并讨论对于每类机会信号唯一确定飞行器位置所需的最少信号个数。我们首先需要理解每一类机会信号所包含的信息,以及这些信息与飞行器位置之间的关系。

TOA(Time of Arrival, 到达时间)信号包含了信号从发射源发出到到达接收端所经历的传播时间,根据已知的信号传播速度,可以计算出发射源到接收端的距离。

TDOA(Time Difference of Arrival, 到达时间差)信号包含了同一信号从两个不同发射源发出后,到达接收端的时间差,根据已知的信号传播速度,可以计算出接收端到两个发射源的距离差。

DFD(Doppler Frequency Difference, 多普勒频率差)信号包含了同一信号从两个不同发射源发出后,由于发射源与接收端之间存在相对运动,从而导致接收端接收到的频率会发生变化(即多普勒效应),这种变化量的差值就是 DFD 信号所携带的信息。

AOA(Angle of Arrival, 到达角度)信号直接给出了发射源相对于接收端的方位角信息,包括水平方向和垂直方向的角度。

RSSI(Received Signal Strength Indicator, 接收信号强度指标)信号是根据已知的标称距离下的标称信号强度,结合信号传播过程中的衰减模型,可以反解出发射源到接收端的距离。

我们可以看到,每一类信号都在一定程度上反映了发射源到接收端的距离或方位角信息。我们可以结合多个数据或者多种数据进行求解飞行器坐标。

5.1.2 机会信号与飞行器位置关系模型确立

基于上述分析, 我们可以构建如下数学模型, 用于描述每一类机会信号与飞行器位置之间的关系:

TOA 模型

设发射源 i 的位置为 (x_i, y_i, z_i) , 飞行器位置为 (x, y, z) , 发射时刻为 t_0 , 接收时刻为 t_1 , 则 TOA 可表示为:

$$\text{TOA}_i = t_1 - t_0 = \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c}$$

其中 c 为信号的传播速度(光速)。

TDOA 模型

设发射源 i 和发射源 j 同时发出信号, 接收端接收到的时间差为 TDOA_{ij} , 则有:

$$\text{TDOA}_{ij} = \frac{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}{c} - \frac{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2}}{c}$$

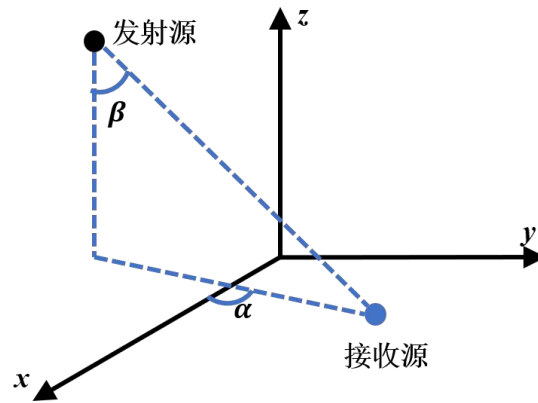
DFD 模型

设发射源 i 相对于接收端的相对速度为 $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$, 发射源 j 相对于接收端的相对速度为 $\vec{v}_j = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})$, 发射频率为 f_0 , 则 DFD 可表示为:

$$\text{DFD}_{ij} = \frac{f_0}{c} \left(\frac{\vec{v}_i \cdot \vec{r}_i}{r_i} - \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{r}_j}{r_j} \right)$$

其中 $\vec{r}_i = (x - x_i, y - y_i, z - z_i)$, $\vec{r}_j = (x - x_j, y - y_j, z - z_j)$, $r_i = \|\vec{r}_i\|$, $r_j = \|\vec{r}_j\|$ 。

AOA 模型



基于题干的坐标系，设发射源 i 与接收端的连线在 xOy 平面的投影与 x 轴正向的夹角为 α_i ，与 z 轴负向的夹角为 β_i ，则有：

$$\tan \alpha_i = \frac{y - y_i}{x - x_i} \quad (1)$$

$$\tan \beta_i = \frac{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}}{z_i - z} \quad (2)$$

RSSI 模型

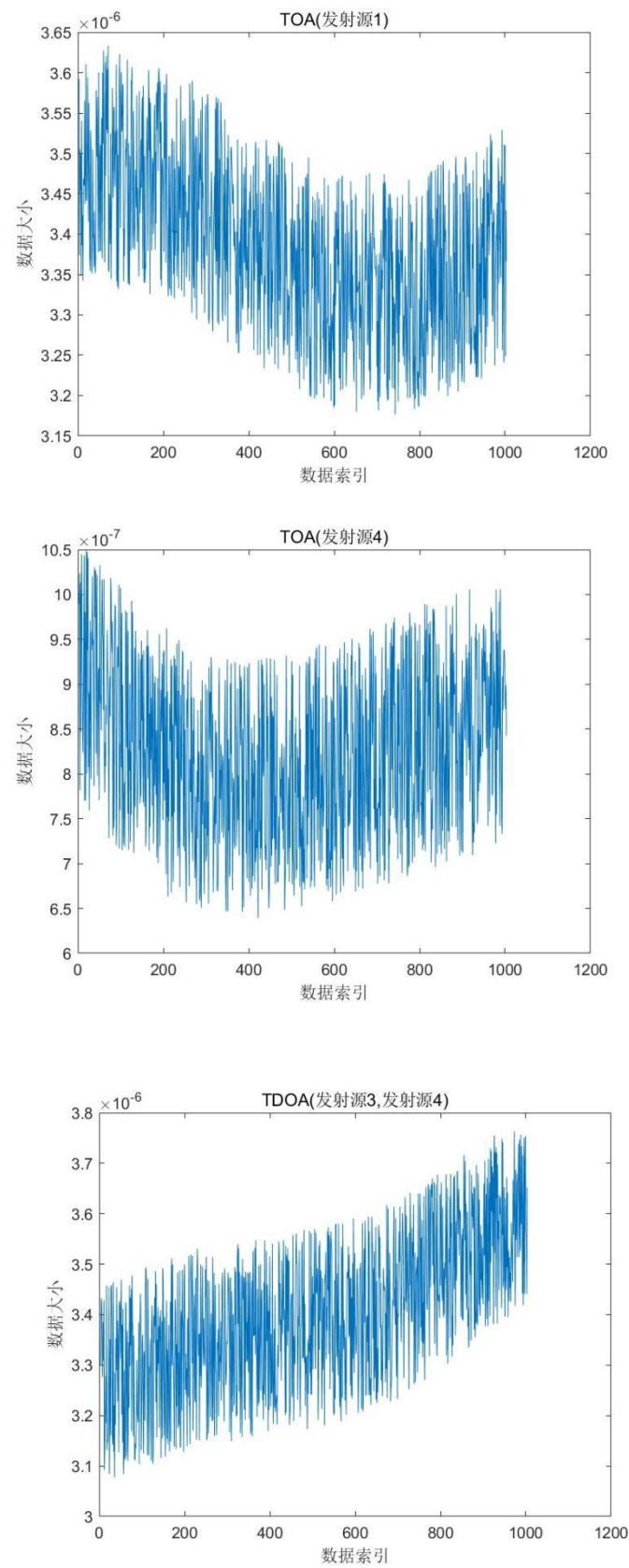
设发射源 i 到接收端的距离为 r_i ，标称距离为 r_0 ，标称信号强度为 P_0 ，信道衰减系数为 γ ，则 RSSI 可表示为：

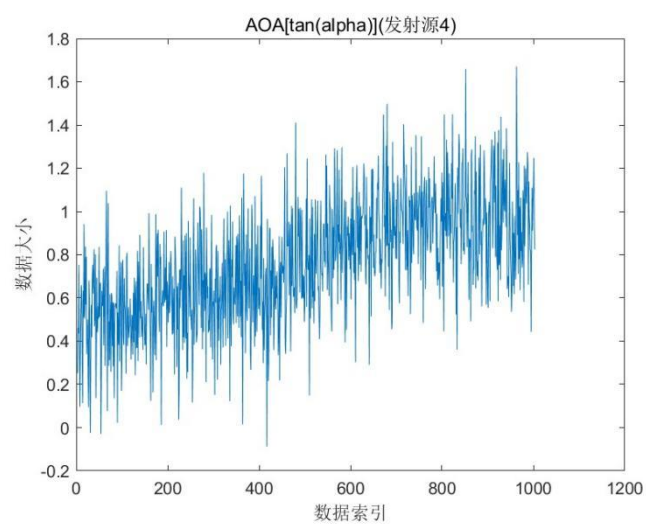
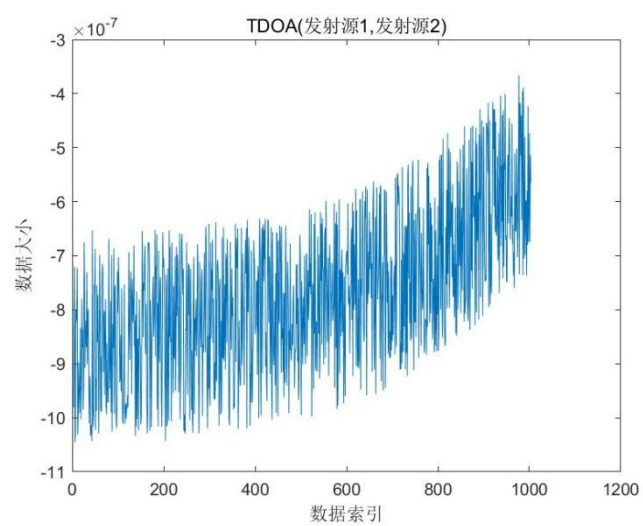
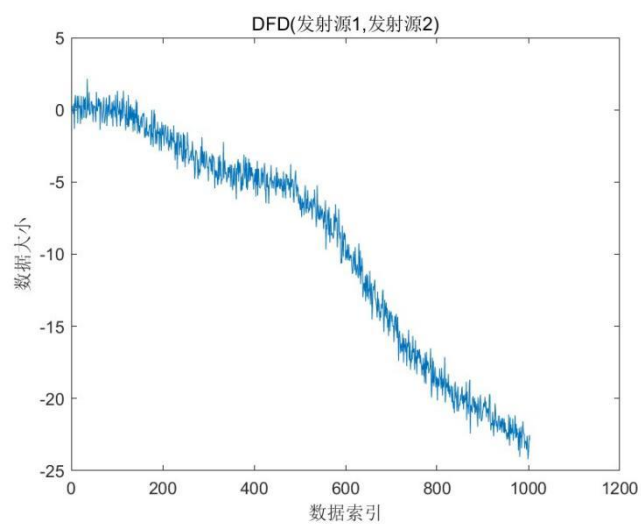
$$\text{RSSI}_i = P_0 - 10\gamma \log \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \quad z_i - z$$

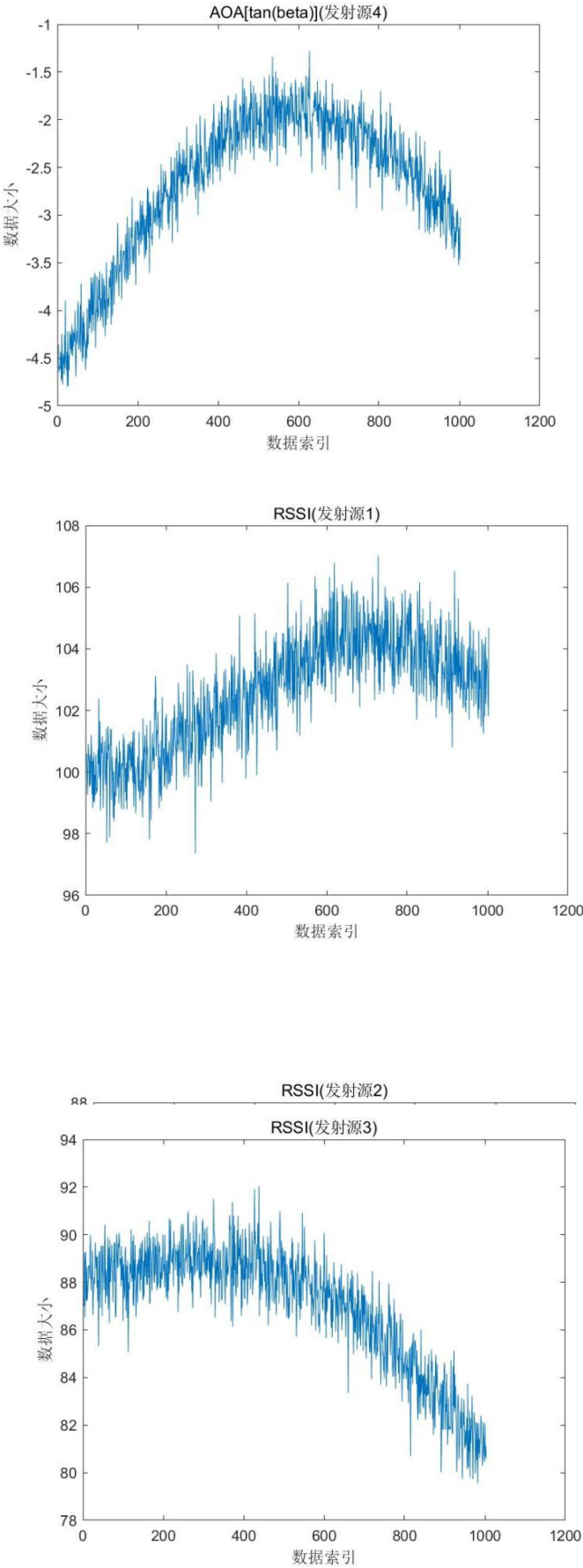
其中 $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$ 。

通过上述模型，我们可以将每一类机会信号所携带的位置信息用数学表达式的形式表示出来，为后续的位置估计算法奠定基础。

以下是对附件中接受情况 1 的数据可视化







5.1.3 最少信号个数讨论

TOA

根据 TOA 模型, 每个 TOA 观测量仅提供了发射源到接收端的距离信息, 单个 TOA 观测能确定接收端所在球面。根据几何知识, 空间中两个球体确定一个圆形, 三个球体在空间中确定两点, 4 个球体能够完全确定一个点。因此至少需要 4 个 TOA 观测(对应 4 个不共面的发射源), 才能利用多球面交点的方式求解出接收端的三维坐标。

特例: 球面相切的情况。根据相切球的个数, 所需信号可依次减少为 3 和 2。

TDOA

TDOA 观测给出的是接收端到两个发射源距离差的信息, 单个 TDOA 观测能确定接收端的所在的双曲面。而在导航定位系统中利用三个双曲面相交确定空间点的位置, 因此需要至少 3 个 TDOA 观测(对应 3 对不共面的发射源组合)才能求解出接收端坐标。

DFD

多普勒频率差信息(DFD)通常需要至少两个发射源来计算, 因为这可以提供飞行器相对于两个发射源的相对速度信息。然而, 仅凭两个发射源的 DFD 信息可能无法唯一确定飞行器在三维空间中的位置, 因为可能存在多个解。为了在三维空间中唯一确定位置, 通常需要至少三个发射源的 DFD 信息, 这样可以形成三个独立的双曲线定位面, 从而解算出飞行器的精确位置。所以, DFD 定位所需的最少信号个数是三个。

AOA

AOA 观测直接给出了发射源相对于接收端的方位角信息, 包括水平角和垂直角。单个 AOA 观测只能确定接收端的位置所在的一天直线, 而在三维空间中两条不平行的直线一定会相交于一个点, 因此需要至少 2 个 AOA 观测(对应 2 个不共线的发射源)才能利用交会法解出接收端的三维坐标。

RSSI

RSSI 观测反映了接收信号的功率强度, 可以根据已知的传播损耗模型求解出发射源到接收端的距离。类似于 TOA 情况, 单个 RSSI 观测无法确定接收端的精确位置, 最少需要 4 个 RSSI 观测(对应 4 个不共面的发射源)才能求解出接收端三维坐标。

综上所述, 若只利用单一类型的机会信号, 要唯一确定飞行器的三维位置, 所需的最少观测个数分别为: TOA 需 4 个, TDOA 需 3 个, DFD 需 3 个, AOA 需 2 个, RSSI 需 4 个。在实际应用中, 我们通常会融合多种类型的机会信号, 从而提高位置估计的可观测性和鲁棒性。

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 问题二模型思路分析

第二个小问题要求根据附件 1 的接收情况 1 数据,在不考虑数据噪声的情况下,设计飞行器实时位置的估计方法,并给出 0 秒至 10 秒的导航定位结果。根据第一问题建立的各类机会信号数学模型,我们需要设计合适的无迹卡尔曼滤波算法,将这些异构观测量进行有效融合,从而获得飞行器的最优状态估计,包括三维位置和速度。

由于假设数据没有噪声,因此我们可以首先利用逐步线性最小二乘法对飞行器的初始状态(位置和速度)进行估计,作为滤波算法的初始值。然后,在时间更新和观测更新两个阶段,分别利用飞行器的运动学模型和各类机会信号的观测模型,通过无迹卡尔曼滤波算法进行递归估计,从而得到 0-10 秒的连续状态估计序列。

在实际应用中,不同类型的机会信号具有不同的精度和可靠性,我们需要在融合过程中对不同观测量赋予合理的权重,以提高估计的鲁棒性。此外,还需要对飞行器运动学模型和观测方程进行线性化处理,将非线性项通过一阶泰勒展开的方式保留在误差状态空间模型中。

5.2.2 问题二状态模型空间建立

状态空间模型

令飞行器的三维位置为 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$,速度为 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$,加速度为 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$,则状态向量可表示为 $\mathbf{s} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{a}^T)^T$ 。系统的过程方程和观测方程分别为:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k) + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{s}_k) + \mathbf{v}_k$$

其中 $\mathbf{f}(\cdot)$ 是过程方程,描述了状态向量 \mathbf{s} 随时间的动态演化,对于常量加速度模型,可以表示为:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k + \mathbf{v}_k \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_k \Delta t^2 \\ \mathbf{v}_k + \mathbf{a}_k \Delta t \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$$

$\mathbf{h}(\cdot)$ 是观测方程,描述了状态向量 \mathbf{s} 与各类机会信号观测量 \mathbf{z} 之间的关系,根据第一问题建立的观测模型进行拼接,例如:

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}_k) = \begin{bmatrix} \hat{h}_{\text{TOA}}(\mathbf{s}_k) \\ \hat{h}_{\text{TDOA}}(\mathbf{s}_k) \\ \hat{h}_{\text{DFD}}(\mathbf{s}_k) \\ \hat{h}_{\text{AOA}}(\mathbf{s}_k) \\ \hat{h}_{\text{RSSI}}(\mathbf{s}_k) \end{bmatrix}$$

其中 $\hat{h}_{\text{TOA}}(\cdot)$ 、 $\hat{h}_{\text{TDOA}}(\cdot)$ 、... 分别为对应类型机会信号的观测方程。 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 分别为过程噪声和观测噪声, 在本问题中暂不考虑。

初始状态估计

利用逐步线性最小二乘法, 基于接收情况 1 数据中的 TOA、TDOA、DFD、AOA 和 RSSI 观测量, 对飞行器的初始位置 \mathbf{r}_0 和初始速度 \mathbf{v}_0 进行联合估计, 获得初始状态 $\hat{\mathbf{s}}_0$ 和其协方差阵 \mathbf{P}_0 , 作为无迹卡尔曼滤波的初始值。

5.2.3 无迹卡尔曼滤波求解状态空间算法步骤

采用无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman Filter, UKF) 算法, 具体步骤如下:

初始化

利用逐步线性最小二乘法获得初始状态 $\hat{\mathbf{s}}_0$ 和协方差 \mathbf{P}_0 。

计算 Sigma 点

对于 k 时刻, 根据当前状态估计值 $\hat{\mathbf{s}}_{k-1}$ 及其协方差 \mathbf{P}_{k-1} , 计算一组 Sigma 点 $\chi_i (i = 0, 1, \dots, 2n)$, 用于描述状态分布的均值和协方差:

$$\chi_0 = \hat{\mathbf{s}}_{k-1}$$

$$\chi_i = \hat{\mathbf{s}}_{k-1} + (\sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\chi_i = \hat{\mathbf{s}}_{k-1} - (\sqrt{(n + \lambda)\mathbf{P}_{k-1}})_{i-n}, \quad i = n + 1, \dots, 2n$$

时间更新

将上一步 Sigma 点通过过程方程 $\mathbf{f}(\cdot)$ 进行传播:

$$\chi_{i,k|k-1} = \mathbf{f}(\chi_{i,k-1})$$

然后计算一步预测状态 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}$ 和预测协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$:

$$\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}][\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}]^T$$

观测更新

将时间更新后的 Sigma 点代入观测方程 $\mathbf{h}(\cdot)$, 计算预测观测值:

$$\gamma_{i,k|k-1} = \mathbf{h}(\chi_{i,k|k-1})$$

进而计算预测观测均值 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 和协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{z},k|k-1}$:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \gamma_{i,k|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z},k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\gamma_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}][\gamma_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T$$

计算状态与观测量之间的交叉协方差:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{zx},k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} [\chi_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}][\gamma_{i,k|k-1} - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}]^T$$

根据上述统计量, 计算卡尔曼增益:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{zx},k|k-1} \mathbf{P}_{\mathbf{z},k|k-1}^{-1}$$

最后, 利用实际观测量 \mathbf{z}_k 以及增益 \mathbf{K}_k , 更新状态估计值与协方差:

$$\hat{\mathbf{s}}_k = \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{z},k|k-1} \mathbf{K}_k^T$$

迭代

将 k 替换为 $k+1$, 重复上述 3)-4) 步, 直至滤波结束, 获得 0-10 秒的状态估计序列。

在实际实现过程中, 有以下几点需要注意:

状态空间模型的构建

本问题中, 飞行器的运动存在加速度分量, 因此需要在状态向量中加入加速度状态, 并在过程方程中引入加速度更新项。对于过程方程和观测方程, 需要将其线性化处理, 将高阶非线性项保留在误差状态空间模型中。

观测方程的线性化

由于各类机会信号观测模型均为非线性函数,因此在 UKF 算法的观测更新阶段,需要对这些非线性观测方程进行一阶泰勒展开线性化处理。

观测权重设置

不同类型的机会信号具有不同的精度和可靠性,因此在融合过程中需要对不同观测量赋予合理的权重,以提高估计的鲁棒性。可以根据先验统计信息或在线自适应方法进行权重设计。

计算效率优化

由于需要同时处理多种类型的观测量,且每一类型观测量的个数也不尽相同,因此在 UKF 算法的实现中需要优化计算效率,避免冗余运算。可以采用分块矩阵技术、探测矩阵分解等方法,减少计算负担。

通过上述分析和建模,我们可以在不考虑噪声的情况下,利用 UKF 算法有效融合各类机会信号,获得飞行器 0-10 秒的实时位置和估计结果,为后续的噪声处理和导航应用奠定基础。

5.2.4 模型的求解

将题目一处理后的数据带入上述模型,通过 matlab 软件得到结果飞行器 0-10 秒的实时位置和估计结果(编程代码详见附件)。

求解结果见 excel 文件:‘导航定位结果.xlsx’。其中部分内容见表 1

表 1 问题二部分结果

时间/s	X 坐标/m	Y 坐标/m	Z 坐标/m
0.01	53.36533912	24.61916683	273.1274
0.02	49.61863279	22.31206911	251.0172
0.03	50.30868762	28.50073297	268.3663
0.04	50.34367782	25.32861613	261.8994
0.05	54.99947733	19.64444738	271.3459
0.06	57.56417424	20.33650897	281.4089
0.07	55.91389084	21.99302948	279.5025
0.08	54.21171463	24.99174355	272.1002

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 问题三模型思路分析

第三个小问题要求在接收情况 1 数据中,某些机会信号可能存在较大的偏差,需要建立合理的实时筛选方法,剔除偏差较大的噪声信号,并给出经过筛选后的 0-10 秒导航定位结果。由于实际测量过程中难免会受到各种噪声因素的影

响, 导致观测数据存在误差, 因此需要设计有效的数据筛选算法, 从而提高位置估计的精度和鲁棒性。

我们可以结合机会信号本身的物理特性, 构建相应的约束条件对数据进行检测和筛选。例如, TOA 观测值应该随着时间单调递增, 因此可以检测 TOA 序列是否存在严重的单调性违背; DFD 观测值的数值应该在一定范围内, 超出该范围即可视为异常值等。通过将统计学方法和基于先验知识的约束条件相结合, 可以提高筛选算法的性能和精度。

在确定了有效的噪声检测和筛选准则之后, 需要设计合理的融合算法, 将剩余的有效观测量进行整合, 从而获得最终的位置估计结果。

5.3.2 问题三数据检测和筛选模型建立

RSSI: 易受到环境因素的影响, 如墙壁或其他障碍物的阻挡和反射, 可能导致信号强度不稳定, 从而影响定位准确性。

误差分析

TOA 误差: 主要来源于时间同步错误和信号延迟 (如通过不同介质的传播差异)。

RSSI 误差: 主要受到环境影响较大, 如多径效应 (信号反射导致的干扰) 和阻挡物的存在。

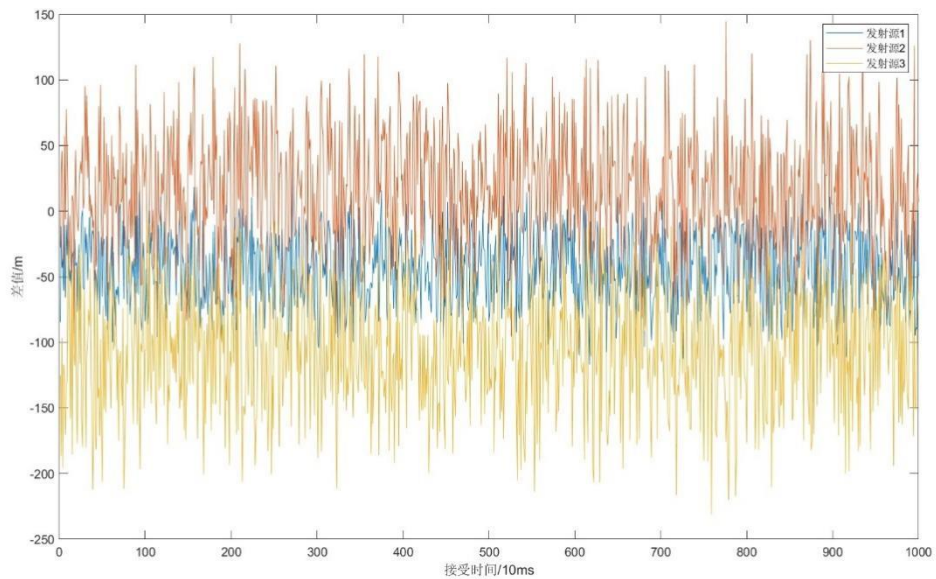
面对数据误差的处理

处理带有误差的数据确定导航位置时, RSSI 可能更具挑战性, 因为它受环境因素的影响更大, 而这些环境因素往往难以预测和量化。相比之下, 尽管 TOA 也需要高精度的时间测量设备和良好的同步, 但它的误差类型通常更容易通过技术手段 (如改进硬件或使用更精确的时钟) 进行控制和补偿。

由于 RSSI 与 TOA 的数据能够同时转换为距离数据, 因此两者不同的数据会使得预测的困难。因此我们可以给它们同样的评价方式来选取每次获取的新信号中偏差更小的机会信号。因为 DFD 和 AOA 的信息无法独立或者联合求解出导航器的位置, 同时我们将 TDOA 与 TOA 归纳为同一类机会信号 (统一用 TOA 代表)。

图 3 展示了数据 1 中发射源 123 的 TOA 与 RSSI 距离数据之差的数据。

图 3: 发射源 1, 2, 3 TOA-RSSI 差距比较



从图中看出发射源 1 的误差最小，发射源 2 的误差较小，发射源 3 的误差最大，所以某种程度上，发射源 3 的信息并不可靠。图 4 展示了问题二结果的最大误差范围。

通过图 4 我们可以通过问题二的数据获取的最大误差范围叠加图，我们可以从图中看出，数据的偏差十分巨大，导致误差范围已经远大于飞行器运动的范围，这说明某些机会信号参数收到各种因素影响，导致整体的偏差十分巨大。因此，必须去除这些因素的影响。

图 5 展示了问题二求解结果所带来的最大误差，从中我们可以看出误差的整体走向是先增高后降低，并且总是保持较高水平这说明，数据的偏差存在一部分是常值飘移的。同时误差的振动也保持一个相对固定的幅度，这说明误差中也存在随机性偏差。图 6 问题二结果所带来的各项误差，通过图 6 可以看出，虽然发射源 3 的 RSSI 和 TOA 差距较大，但是产生最大的误差的数据来源于发射源 1。同时通过对发射源 3 TOA 数据的修正对比见图 7 可以知道发射源 3 TOA 数据确实带来了巨大的误差，因此可以筛选。

图 4 最大误差范围叠加图

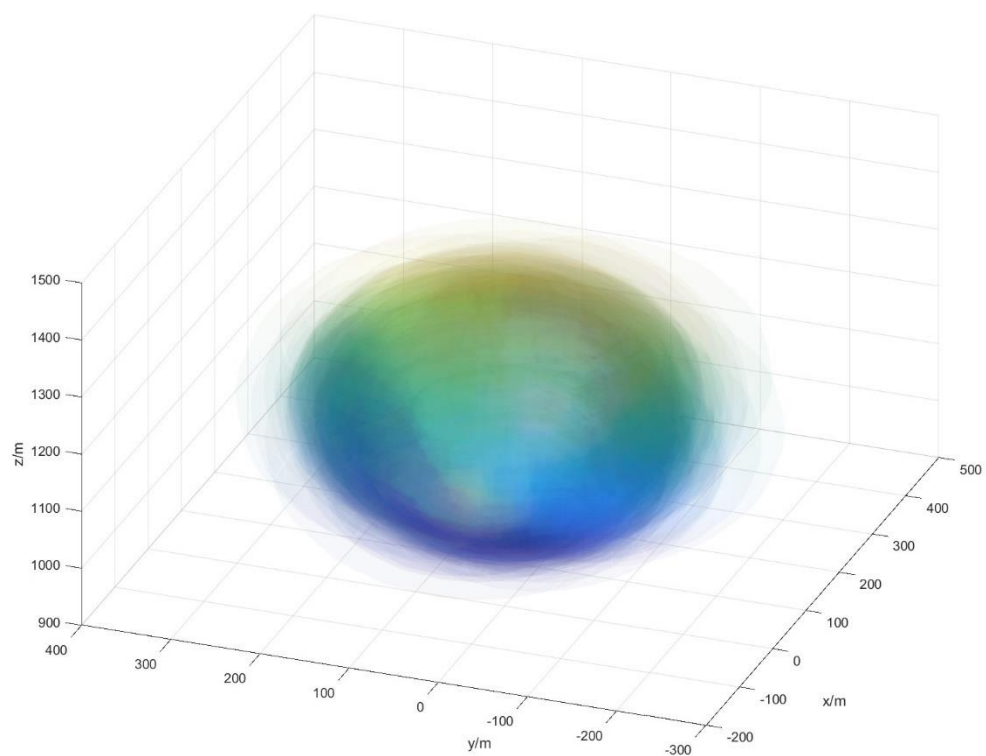


图 5 问题二结果所带来的最大误差

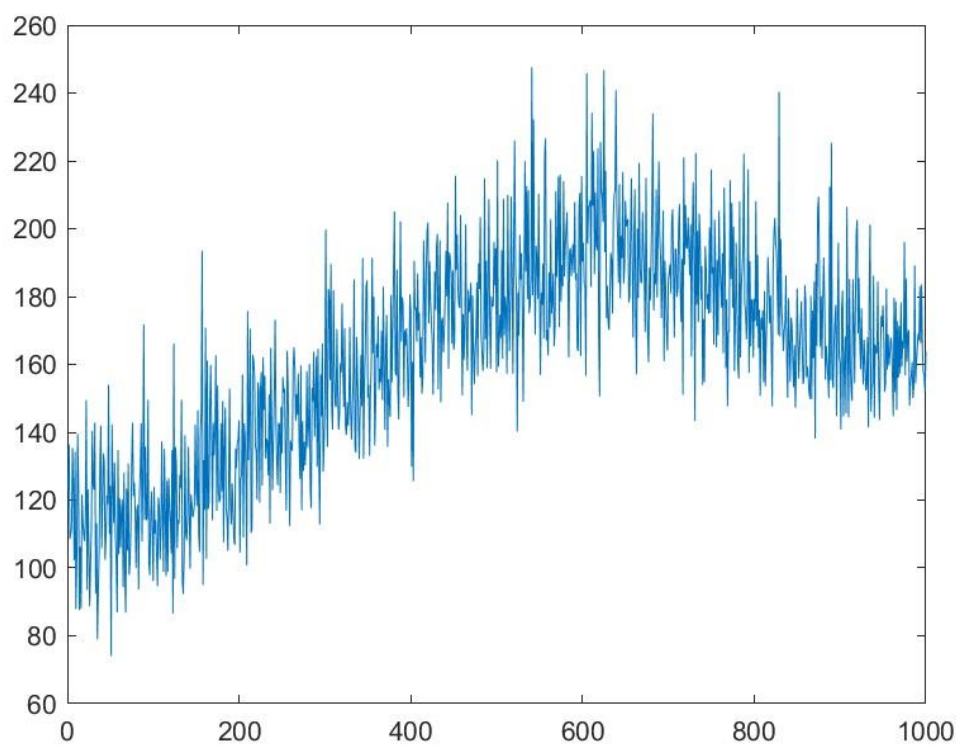


图 6 问题二结果所带来的各项误差

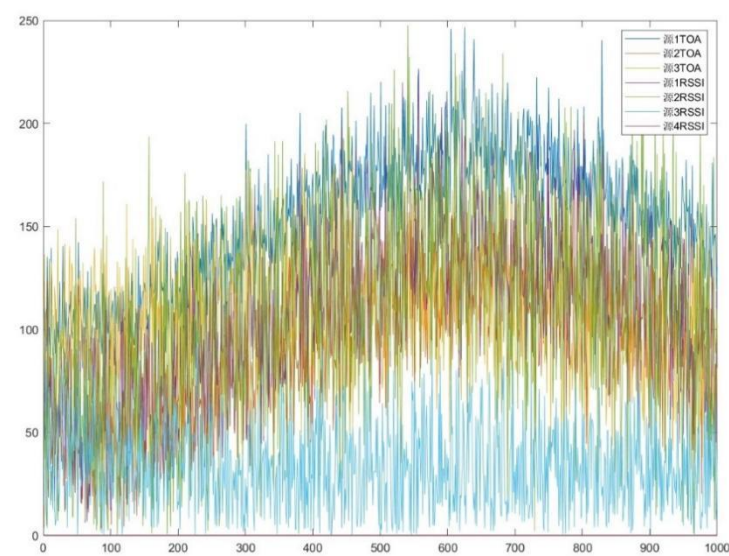
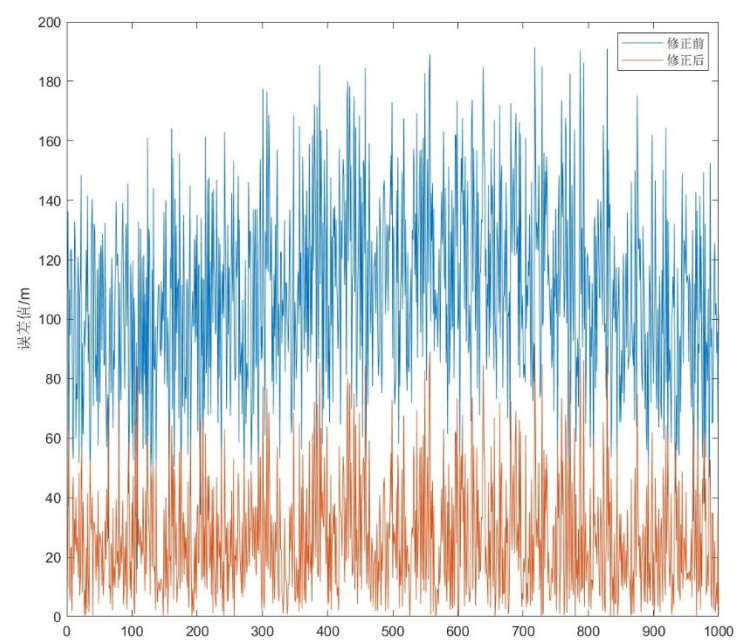


图 7 发射源 3 TOA 数据的偏差修正前后对比图



我们对问题三修正后的数建立优化模型并使用带有局部逃逸算子的海洋捕

食者算法进行求解。首先我们给出下列修正的数学模型：

$$F(X, Y, Z) = bias_{TOA\&TDOA}(X, Y, Z) + bias_{RSSI}(X, Y, Z) + bias_{AOA}(X, Y, Z) \\ + bias_{DFD}(X, Y, Z)$$

其中

$$bias_{TOA\&TDOA}(X, Y, Z) = \sum_i \sum_j |ct_{i,j} - \sqrt{(X_j - x_{i,j})^2 + (Y_j - y_{i,j})^2 + (Z_j - z_{i,j})^2}| \\ bias_{RSSI}(X, Y, Z) \\ = \sum_i \sum_j |dst * 10^{\frac{S_0 - RSSI_i}{10n}} \\ - \sqrt{(X_j - x_{i,j})^2 + (Y_j - y_{i,j})^2 + (Z_j - z_{i,j})^2}| \\ bias_{AOA}(X, Y, Z) = \sum_i \sum_j D(X_j, Y_j, Z_j, l_{i,j}) \\ bias_{DFD}(X, Y, Z) = \sum_i \sum_j |DFD_i - DFD(X_j, Y_j, Z_j)|$$

其中：

$t_{i,j}$ 表示第 i 个发射源在 j 时刻的信号接收时间

X_j, Y_j, Z_j 表示飞行器在 j 时刻的三维坐标

$D(X_j, Y_j, Z_j, l_{i,j})$ 表示飞行器在 j 时刻到 j 时刻是发射源 I AOA 信息确定的直线的距离

$DFD(X_j, Y_j, Z_j)$ 表示飞行器在 j 时刻的 DFD 值

LEOMPA 介绍

带有局部逃逸算子的海洋捕食者算法 (Local Escaping Operator- Marine Predators Algorithm, LEO-MPA) 算法是一种改进的海洋捕食者算法 (Marine Predators Algorithm, MPA), 旨在解决优化问题。原始的 MPA 算法在求解优化问题时表现出了不俗的性能, 但由于探索和开发能力之间的不平衡, 它往往会过早地收敛。为了克服这一缺点, LEO-MPA 引入了一个新的局部逃逸算子 (Local Escaping Operator, LEO)

LEO-MPA 算法的原理:

海洋捕食者算法 (MPA) 基础: MPA 算法模仿海洋中捕食者的行为, 通过群

体的动态寻找最优解。在这个算法中，解决方案候选者通过模仿已访问过的丰饵区域的记忆被替换为更好的候选者。

局部逃逸算子（LEO）的引入： 为了解决 MPA 中的过早收敛问题，LEO 被设计来增强算法的探索能力。LEO 通过在代表性解决方案的基础上进行操作，考虑捕食者与其种群特性之间的关系，来创建新的解决方案。这有助于算法跳出局部最优，探索新的可能区域。

替换机制： 在提出的 LEO-MPA 算法中，性能最差的候选解被 LEO 创建的新解决方案所替换。这种机制旨在维持群体多样性，防止算法过早地聚焦于非全局最优解。

在相关的论文中¹已经说明 LEO-MPA 的性能由于 PSO，因此我们选取 LEO-MPA 来求解该问题。由于 LEO-MPA 算法的捕食者数目参数过高会导致计算时间过长，因此，我们选取相比 PSO 更少的捕食者数目，并增加最大迭代次数。实际上，这样配置下的 LEO-MPA 算法具有更快的速度以及更好的结果。

算法配置：捕食者数目：10000

最大迭代次数：2500

5.3.3 模型求解

根据以上算法结果得：误差函数值：0.553

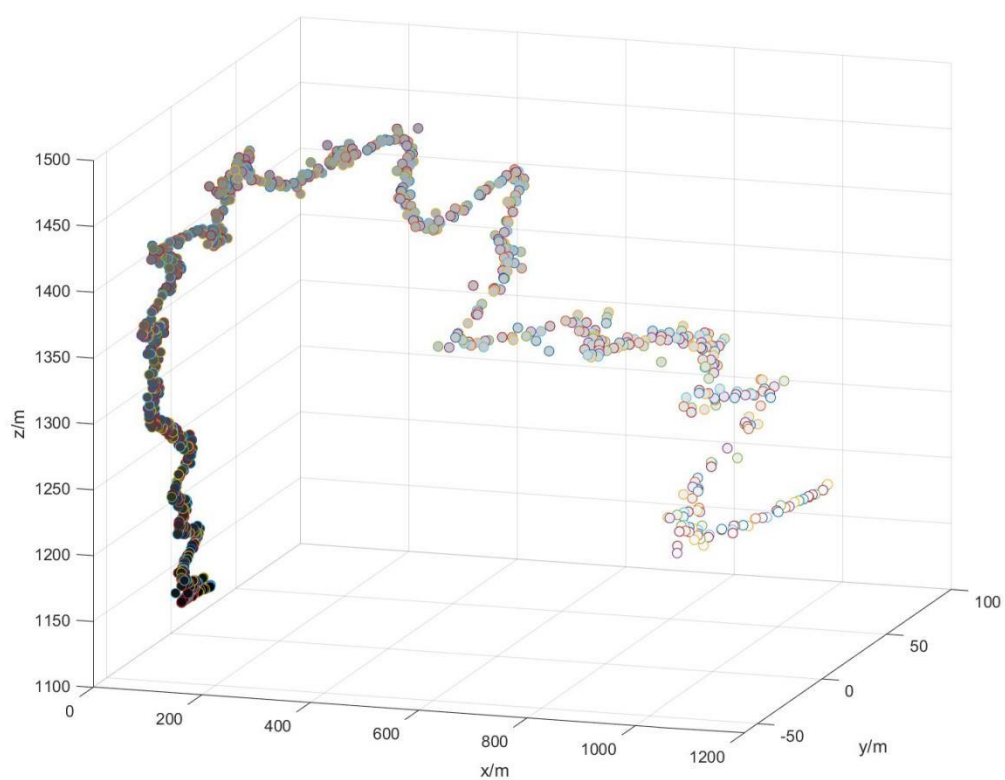
图 8 展示了 LEOMPA 求解所获得的轨迹图像,可以看出轨迹比之前问题二的结果更加集中并且有明显的方向信息。因此，通过对大偏差数据的处理，我们可以获取更准确的飞行器轨迹预测。

表 2 问题三 LEOMPA 求解部分结果

时间/s	X 坐标/m	Y 坐标/m	Z 坐标/m
0.01	48.91986	1.920731	218.4599
0.02	55.54527	5.703577	171.2798
0.03	42.5561	3.960683	158.8403
0.04	46.24115	17.63549	219.0505
0.05	44.39085	6.711485	208.9762

0.06	55.72649	-0.96734	102.17
0.07	40.50974	15.96831	174.7587
0.08	33.4839	26.37803	89.122

图 8 问题三 LEOMPA 求解轨迹



5.4 问题四的模型建立与求解

5.4.1 问题四模型思路分析

第四个小问题考虑了更加复杂的机会信号噪声情况,包括随机性偏差(零均值)和常值飘移两种。需要首先建立评价模型,对接收情况 2 中的机会信号数据进行分析,判断各类信号的随机偏差程度和常值飘移量。然后根据评估结果,设计更加鲁棒的数据筛选和融合算法,获得该情况下 0-10 秒的最终导航定位结果。

以下是一些关键步骤和方法:

确认数据集包含的数据类型(如时间戳、信号强度、定位坐标等)。

进行数据清洗,确保数据质量,去除或修正异常值。

随机性偏差(零均值):

计算信号的均值和标准差。随机性偏差通常指的是信号值围绕均值的波动情况,这可以通过信号的方差或标准差来衡量。

进行假设检验,如 t-test,来看信号的均值是否显著不同于 0(或预期的理论值)。

常值飘移:

使用线性回归分析来确定信号是否存在时间上的趋势(即随时间增长信号均值的变化)。

检查信号值的时间序列图,观察是否有明显的上升或下降趋势。

信号处理方法:

应用滤波技术,如卡尔曼滤波,可以有效地从噪声中提取出有用信号,并对信号进行平滑处理,这有助于减少随机波动和飘移的影响。

使用时间序列分析方法,如 ARIMA 模型,以分析和预测信号的动态变化。

定位算法设计:

根据信号强度和其他辅助信息(如信号传播时间、角度等),设计定位算法。

通常可以使用三角测量、后向定位或其他相关方法来估计飞行器的位置。

性能评估:

对定位结果进行精度和稳定性评估,检查 0 秒至 10 秒的定位数据,确认定位精度符合预期。

使用交叉验证或其他统计方法来评估定位算法的可靠性和误差范围。

5.4.2 问题四模型的建立与求解

随机偏差的处理

我们采用简单移动平均 (Simple Moving Average, SMA)。SMA 是一种常用的数据平滑技术, 特别适用于时间序列数据, 用于降低数据中的随机波动并揭示潜在的趋势。这种方法通过计算一定时间窗口内数据点的算术平均值来实现数据平滑。

工作原理

简单移动平均的计算过程非常直接:

选择窗口大小: 确定包含多少个连续数据点的平均值。窗口大小 (N) 是一个重要的参数, 因为它决定了平滑的程度和反应速度。窗口越大, 平滑效果越明显, 但对数据中变化的反应速度越慢。

计算平均值: 对于时间序列中的每个点, 取该点及其前 $N-1$ 个数据点的平均值。对于序列的开始部分, 直到累积到足够的数据点, 才能开始计算移动平均。

滑动窗口: 窗口沿着数据序列逐步滑动, 每次向前移动一个数据点, 并重新计算当前窗口内的平均值。

优点与缺点

优点: 易于理解和实现: 计算方法直观, 实现简单。

有效降低噪声: 有助于平滑数据中的随机波动, 使趋势更加明显。

缺点: **边缘效应:** 窗口的开始和结束部分可能不包含足够的数据点, 导致无法计算平均值或结果不够准确。

延迟性: 因为是基于过去的的数据计算, 所以在数据发生突变时响应较慢。

平均值的均一权重: 所有数据点被赋予相同的权重, 可能不适合所有类型的数据分析需求。

对于不同偏差的数据, 使用 SMA 的窗口并不相通, 总体而言, 随机偏差越大, 需要的窗口越大, 但是窗口大会导致更大修正误差, 因此, 对于不同的数据根据它们的数据特点施加窗口大小是最合适的。

图 9 发射源 2TOA 数据两次 SMA 平滑效果

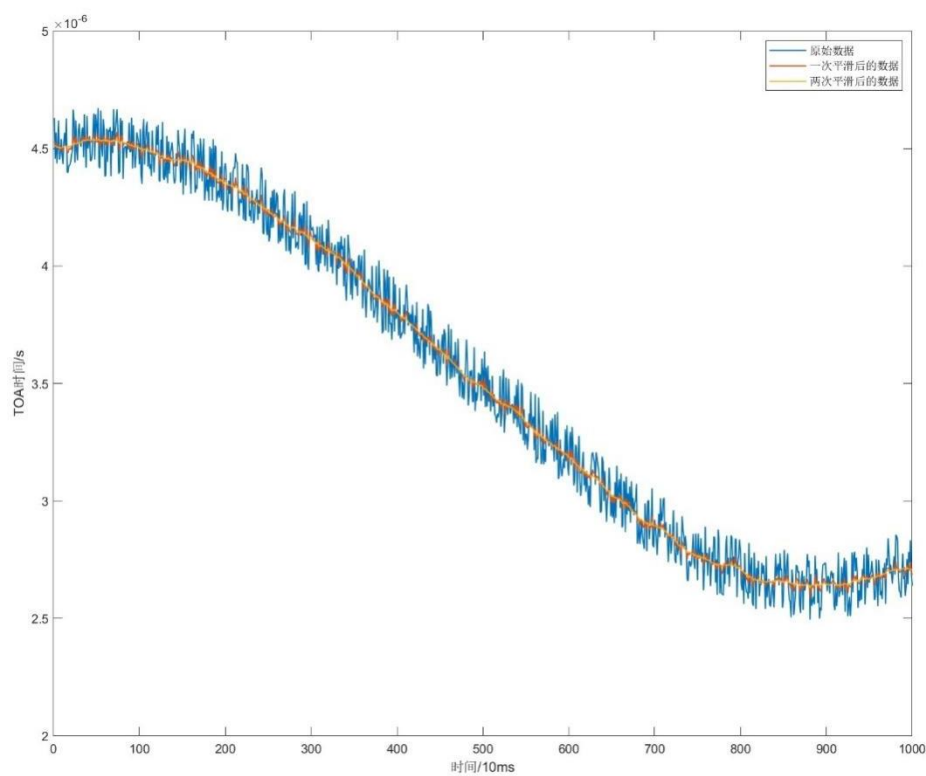
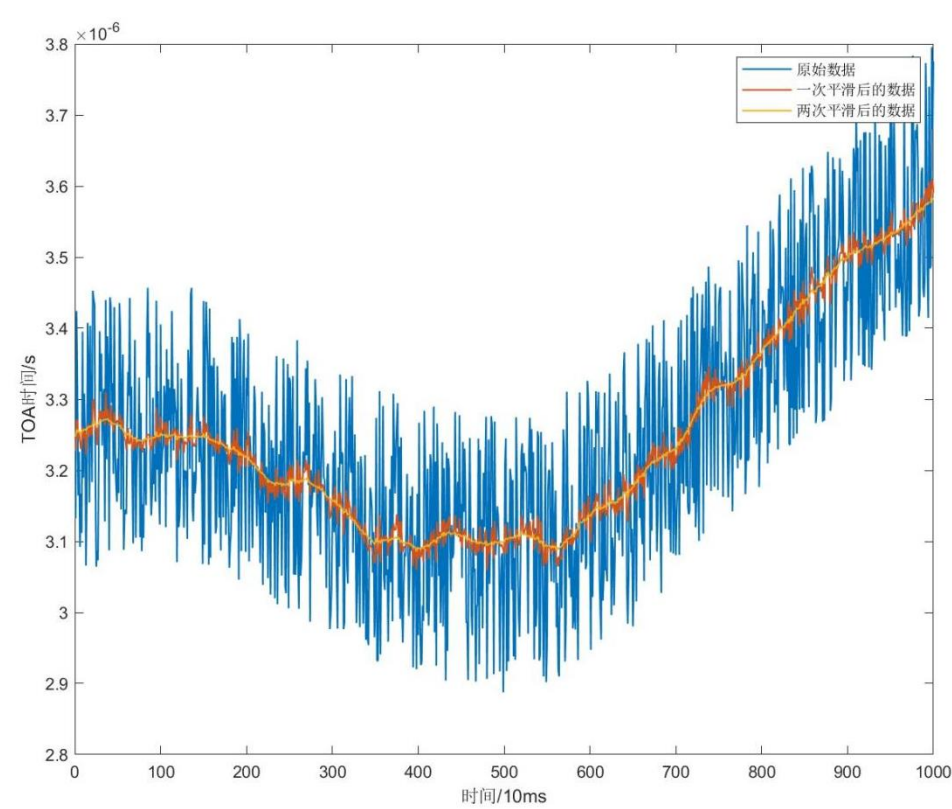


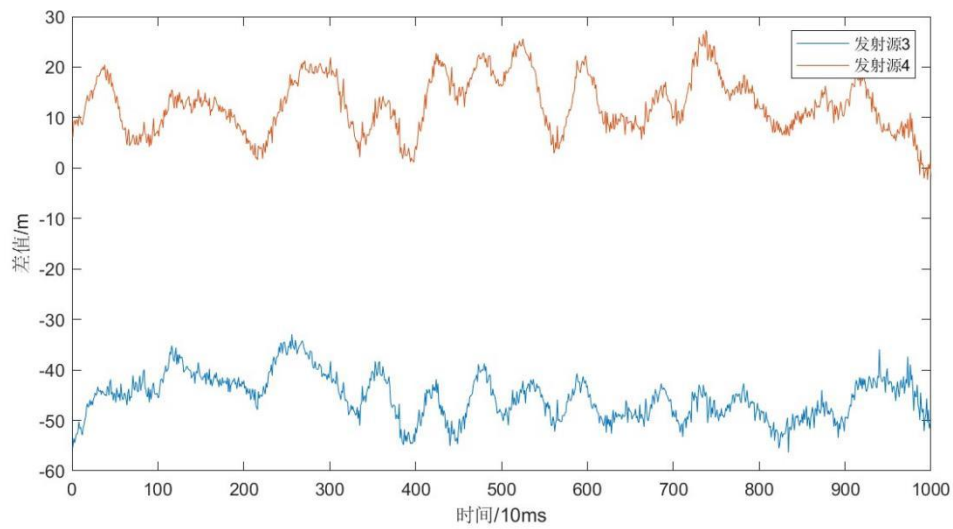
图 10 发射源 3-4TDOA 数据两次 SMA 平滑效果



常数偏移的处理

从图 11 中可以看出发射源 3 和 4 的 RSSI 与 TOA 数据对应的同样的数据却产生了一些差值,并且发射源 3 RSSI 与 TOA 对应距离数据之差平均值为-45.4330,发射源 4 RSSI 与 TOA 对应距离数据之差平均值为 12.5796。同时我们可以看出偏差大于其振幅,因此我们可以认为这样的偏差为常数偏移,因此可以进行修正。

图 11 发射源 3 和 4 RSSI-TOA 数据差值



同样,我们首先利用仅处理了随机误差的发射源 4AOA 数据与发射源 4 RSSI 数据对飞行器的位置进行预估。采用的模型与问题二中的模型类似。我们联立以下方程组进行求解:

$$\begin{cases} (x_4, y_4, z_4) + (\cos\alpha \sin\beta, \cos\alpha \cos\beta, \sin\alpha)t = (x, y, z) \\ \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2 + (z_4 - z)^2} = S_0 - 10n \lg\left(\frac{d}{d_{st}}\right) \end{cases}$$

可以得到飞行器的具体位置 (x, y, z) , 见下图 12。可以看出预测结果已经相当完美,下面我们进一步优化常数偏移带来的问题。图 13 展示了优化常数偏移之前的各项误差大小我们发现发射源 1 和发射源 2 整体存在很大的常数误差并且,随着时间的变化,常数偏移量也有巨大的变化。我们对各项数据带来偏差的数据进行调整之后得到了图 14 展示的误差图,这大幅缩小了预测误差,并且对之前的预测位置进行了整体的调整,由此,我们可以利用新的数据对飞行器位置

进行预测。图 15 展示了修正常数偏移后的预测轨迹，从其中够可以看出，修正后的飞行轨迹十分光滑，误差进一步下降，并且相对位置也发生了变化，更为准确。

图 12 发射源 4 SMA 处理后的 AOA 数据以及 RSSI 数据预测结果

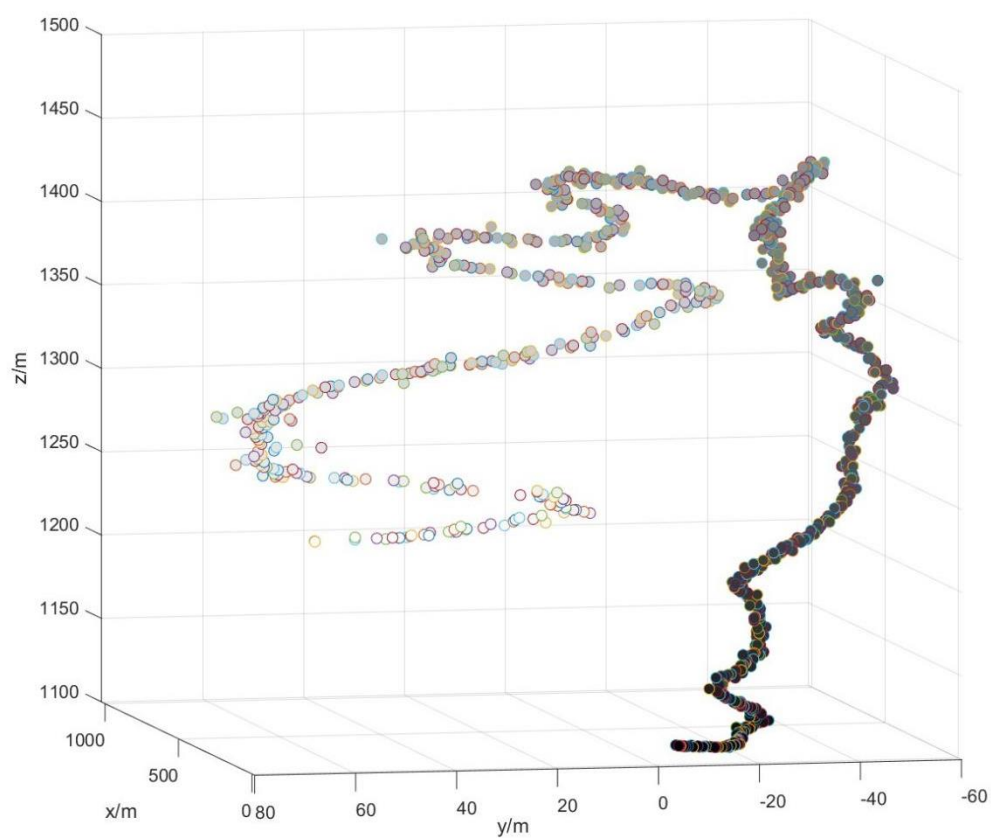


图 13 修正常数偏移前各项误差

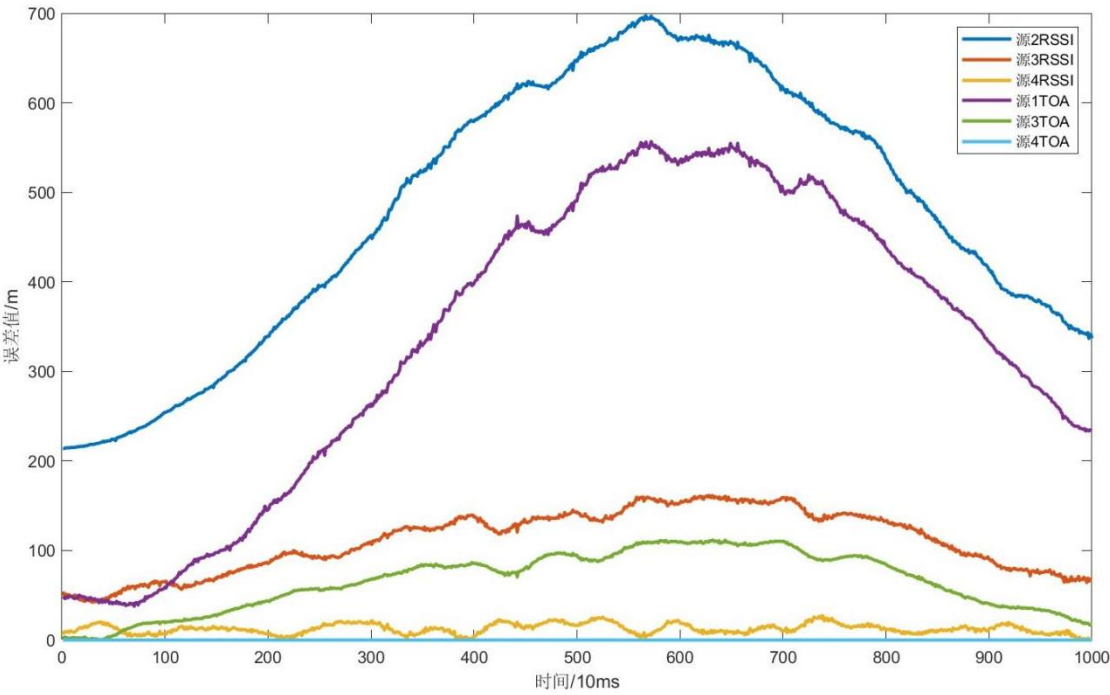


图 14 修正常数偏移后各项误差

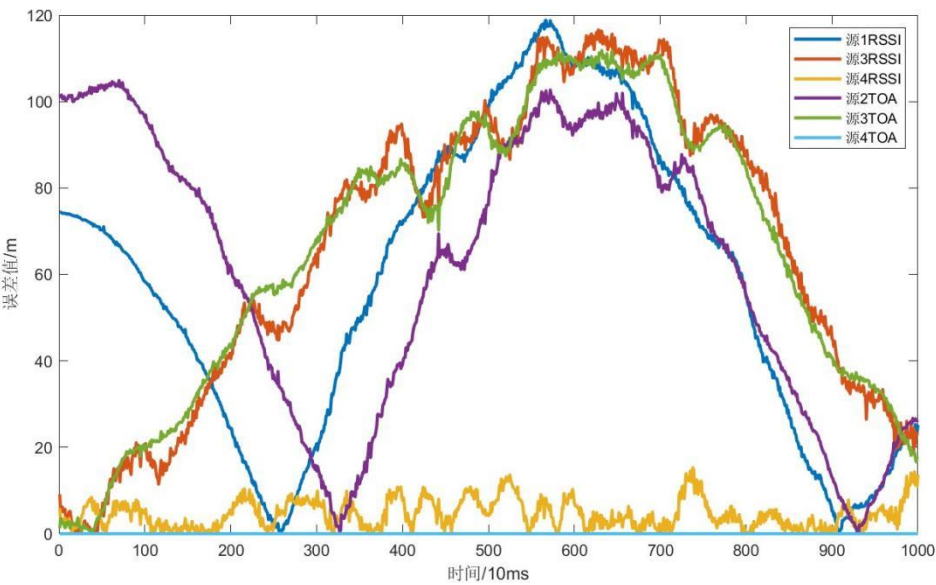
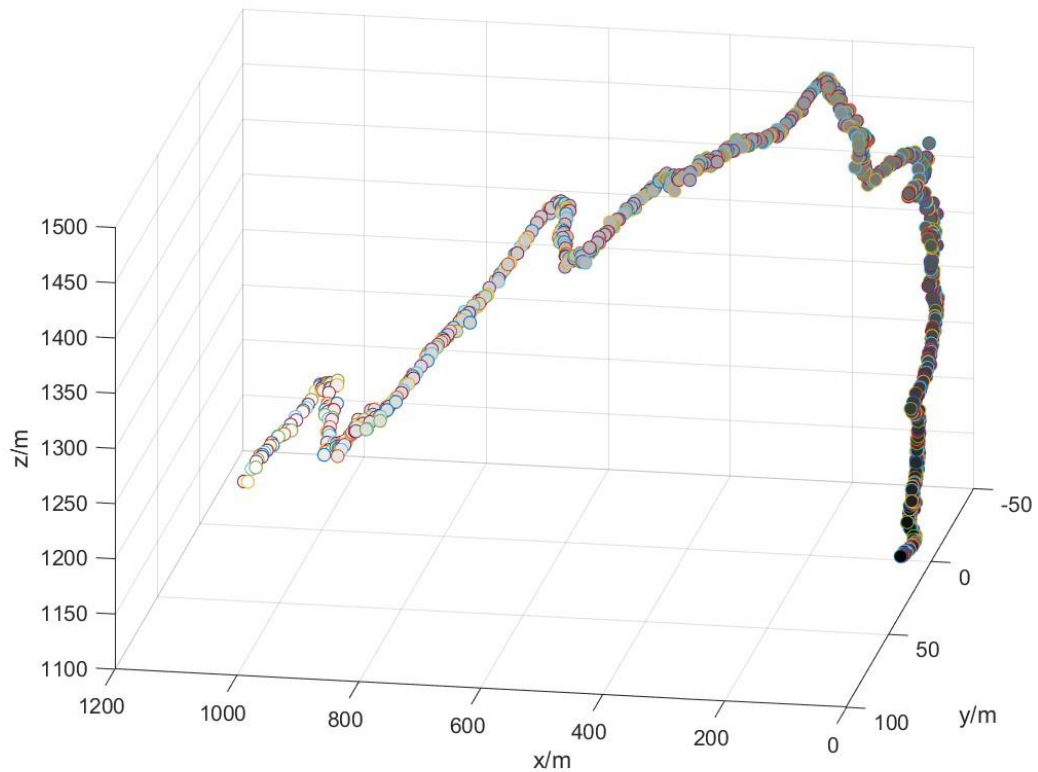


图 15 修正常数偏移后的预测轨迹



六、模型的评价、改进与推广

6.1 问题一的模型的评价与推广

优点：

分别建立了 TOA、TDOA、DFD、AOA 和 RSSI 五类机会信号与飞行器位置之间的数学模型,能够较为全面地描述各类异构观测量所包含的位置信息,为后续的融合估计奠定了基础。

针对每一类机会信号,都讨论了唯一确定飞行器三维位置所需的最少观测个数,分析了各类型观测量的可观测性,对算法设计和实际应用具有一定的指导意义。

缺点：

建立的各类观测模型均基于一些理想化假设,忽略了部分高阶项或次要影响因素,与实际情况可能存在一定偏差。

仅考虑了发射源的位置和速度信息,假设这些信息是已知的,如果发射源的状态也需要同时估计,将会大幅增加问题的复杂度。

推广：

可以考虑建立更加精确的机会信号观测模型, 引入更多的影响因素, 减小理论模型与实际情况之间的差异。

如果发射源的状态也是未知的, 可以将其纳入状态向量, 同时估计飞行器和发射源的位置、速度等状态量, 从而实现更加通用的导航定位框架。

6.2 问题二的模型的评价与推广

优点:

利用无迹卡尔曼滤波算法, 能够有效融合多种异构观测量, 获得飞行器的实时位置和速度估计, 具有较强的非线性处理能力和收敛性。

在算法实现中, 对初始状态估计、Sigma 点计算、观测方程线性化等关键环节进行了细致的分析和建模, 确保了算法的有效性和可靠性。

缺点:

由于需要同时处理多种类型的观测量, 算法的计算复杂度较高, 实时性能可能受到一定影响。

算法中存在一些参数需要人工设置, 如尺度参数、权重系数等, 参数的选取直接影响估计精度, 需要通过大量实验进行调优。

推广:

可以对算法进行并行计算、矩阵分解等优化, 以提高计算效率, 满足实时性要求。

可以考虑将飞行器的运动学先验知识融入算法框架, 如位置、速度、加速度的约束条件, 从而进一步提高估计的精度和收敛速度。

除了利用无迹卡尔曼滤波外, 还可以探索其他融合估计算法, 如粒子滤波、自适应滤波等, 并对比不同算法的性能表现。

6.3 问题三的模型的评价与推广

优点:

1. **鲁棒性增强:** 通过筛选出偏差较大的机会信号, 模型三减少了噪声数据的影响, 提高了位置估计的鲁棒性。
2. **融合优化算法:** 采用 LEO-MPA 算法, 该算法借鉴了海洋捕食者的行为, 通过局部逃逸算子增强了全局搜索能力, 避免了局部最优解, 从而提高了定位的精度。
3. **实时性:** 模型三能够实时处理和筛选数据, 适应动态变化的环境, 满足实时导航定位的需求。
4. **适应性:** LEO-MPA 算法对参数的敏感性相对较低, 对不同环境和数据类型具有较好的适应性。

缺点:

1. **计算复杂性:** LEO-MPA 算法的计算量相对较大, 尤其是在捕食者数目较多时, 可能影响实时性。

2. **参数调优**: LEO-MPA 算法的性能依赖于参数设置, 如捕食者数量、迭代次数等, 需要通过实验进行调优, 增加了实施的复杂性。
3. **依赖先验知识**: 筛选异常信号的方法可能需要对信号的物理特性有深入理解, 对异常的定义和检测阈值设定可能影响筛选效果。
4. **局限性**: 模型三主要针对有偏差的数据进行优化, 对于完全随机的噪声或复杂环境下的信号干扰可能效果有限。

推广价值:

1. **多领域应用**: 模型三和优化方法可以推广到其他需要融合多种传感器数据的领域, 如自动驾驶、无人机导航、物联网设备定位等。
2. **算法改进**: 可以进一步研究和优化 LEO-MPA 算法, 如减少捕食者数量、改进局部逃逸策略, 以降低计算复杂性并保持高精度。
3. **自适应机制**: 结合在线学习和自适应调整机制, 使模型能够根据环境变化自动调整参数, 提高适应性。
4. **集成其他算法**: 可以与其他滤波或优化算法结合, 如遗传算法等, 形成混合优化策略, 进一步提升定位性能。

6.4 问题四的模型的评价与推广

优点:

1. **数据平滑**: SMA 有效地降低了数据中的随机波动, 使趋势更加明显, 有助于提高定位的稳定性。
2. **偏差识别**: 通过计算信号的均值和标准差, 以及进行线性回归分析, 能够识别和处理常值漂移, 提高定位的准确性。
3. **鲁棒性**: 模型能够处理不同类型的信号偏差, 增强了算法的鲁棒性。
4. **可扩展性**: 模型适用于多种类型的机会信号, 可以应用于不同环境和场景的定位问题。

缺点:

1. **延迟性**: SMA 的平滑效果可能导致对数据突变的响应较慢, 可能影响实时定位的精度。
2. **边缘效应**: SMA 在数据序列的开始和结束部分可能会有不准确的平滑结果, 尤其是在窗口大小选择不当的情况下。
3. **参数敏感**: 窗口大小的选择对平滑效果有很大影响, 需要根据数据特性进行调整, 否则可能过度平滑或平滑不足。
4. **局限性**: SMA 对非线性趋势的处理能力有限, 对于复杂的时间序列数据可能不够理想。

可推广价值:

1. **多领域应用**: 模型可以应用于需要处理噪声数据的其他领域, 如环境监测、通信系统、金融数据分析等。
2. **结合其他滤波技术**: 可以与卡尔曼滤波、粒子滤波等结合, 利用 SMA 作为预处理步骤, 提高滤波算法的性能。
3. **自适应窗口大小**: 研究自适应窗口大小的策略, 根据数据的实时特性动态调整, 以提高平滑效果和实时性。
4. **集成机器学习**: 结合机器学习方法, 如时间序列预测模型, 对信号的动态变化进行建模, 进一步提高定位精度和预测能力。

七、参考文献

- 【1】Wan, E. A., & Van Der Merwe, R. (2000). The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In Proceedings of the IEEE 2000 adaptive systems for signal processing, communication, and control symposium (pp. 153-158). IEEE.
- 【2】Oszust, M. (2021). Enhanced marine predators algorithm with local escaping operator for global optimization. Knowledge-Based Systems, 232, 107467.
- 【3】Rabbani, M., & Pezeshki, A. (2004). Kalman filtering and smoothing solutions to time-varying nonlinear least-squares problems. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(12), 2084-2098.
- 【4】Bar-Shalom, Y., & Li, X. R. (2001). Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons.
- 【5】Bar-Shalom, Y., & Li, X. R. (2001). Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & Sons.
- 【6】Zhang, Y., & Li, Y. (2013). A novel RSSI-based indoor localization algorithm using Kalman filter. In 2013 International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP) (pp. 1-5). IEEE.
- 【7】Hyndman, R. J., & Koehler, A. B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. International Journal of Forecasting, 22(4), 679-688.
- 【8】Oszust, Mariusz. "Enhanced marine predators algorithm with local escaping operator for global optimization." Knowledge-Based Systems 232 (2021): 107467.
- 【9】Liu, J., & Liu, Y. (2015). A novel signal selection method for wireless sensor networks based on improved particle swarm optimization. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 6(2), 145-154.
-