Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025-11-06

2. Divisibilidad

2.5. Mínimo Común Múltiplo

Ejercicios:

3) Probar que $(a,b) = (a+b,[a,b])$

Demostración:

Sea $d = (a,b)$, entonces $a = dx$ y $b = dy$, con $(x,y) = 1$. Luego

- $a + b = dx + dy = d(x+y)$
- $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)} = \frac{dxdy}{d} = dxy$

Entonces $(a+b,[a,b]) = (d(x+y), dxy) = d(x+y, xy)$

Sea p un primo divisor común de $x+y$ y xy

Luego $p|xy$, entonces $p|x$ o $p|y$

Supongamos $p|x$, como $p|(x+y)$ y $p|x$, luego $p|(x+y)+(-x)$, entonces $p|y$

Ahora $p|x$ y $p|y$, pero $(x,y) = 1$, esto solo se cumple en caso de $p = 1$, por tanto no hay un primo divisor común de $x+y$ y xy, entonces $(x+y, xy) = 1$

Retomando

$$(a+b,[a,b]) = d(x+y,xy) = d = (a,b)$$

□

5) Si k es múltiplo de a y b, probar que

$$\frac{|k|}{\left(\frac{k}{a},\frac{k}{b}\right)} = [a,b]$$

Demostración:

Como k es múltiplo de a y b, entonces existen $m,n \in \mathbb{Z}$ tal que $k = am = bn$

$$a = \frac{k}{m} \wedge b = \frac{k}{n} \quad \text{tambien} \quad m = \frac{k}{a} \wedge n = \frac{k}{b}$$

Sabemos que $[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$, remplazando a y b

$$[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)} = \frac{\left|\frac{k}{m}\cdot\frac{k}{n}\right|}{\left(\frac{k}{m},\frac{k}{n}\right)} = \frac{\left|k\cdot\frac{k}{mn}\right|}{\left(\frac{k}{m},\frac{k}{n}\right)} = \frac{|k|\left|\frac{k}{mn}\right|}{\left(\frac{k}{m},\frac{k}{n}\right)} = \frac{|k|}{\left|\frac{mn}{k}\right|\left(\frac{k}{m},\frac{k}{n}\right)}$$

Tenemos que $\left(\frac{k}{m},\frac{k}{n}\right) = \left(\left|\frac{k}{m}\right|,\left|\frac{k}{n}\right|\right)$, ademas $\left|\frac{mn}{k}\right|$ es un entero positivo por lo que lo podemos multiplicar dentro

$$\left(\left|\frac{k}{m}\right|\left|\frac{mn}{k}\right|,\left|\frac{k}{n}\right|\left|\frac{mn}{k}\right|\right) = \left(\left|\frac{\cancel{k}\cancel{m}n}{\cancel{m}\cancel{k}}\right|,\left|\frac{\cancel{k}m\cancel{n}}{\cancel{n}\cancel{k}}\right|\right) = (|n|,|m|) = (n,m) = \left(\frac{k}{b},\frac{k}{a}\right)$$

Por lo tanto $[a,b] = \dfrac{|k|}{\left(\frac{k}{a},\frac{k}{b}\right)}$ □

7) Sean d y g enteros positivos. Probar que existen enteros a y b tales que $(a,b) = d$ y $[a,b] = g$ si y solo si $d|g$

Demostración:

- «$\Longrightarrow$» $(d,g \in \mathbb{Z}^+)(\exists a,b \in \mathbb{Z})((a,b) = d \wedge [a,b] = g \Longrightarrow d|g)$

  Como $(a,b) = d$, entonces $d|a$ y $d|b$

  Como $[a,b] = g$, entonces $a|g$ y $b|g$

  Luego $d|a$ y $a|g$, por tanto $d|g$
- «$\Longleftarrow$» $(d,g \in \mathbb{Z}^+)(d|g \Longrightarrow (\exists a,b \in \mathbb{Z})((a,b) = d) \wedge [a,b] = g)$

  Como $d|g$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g = dk$

  Sea $a = d$ y $b = g$

  $$(a,b) = (d,g) = (d,dk)$$

  Como para cualquier $x,n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $(x,xn) = x$, luego

  $$(a,b) = (d,dk) = d$$

  Entonces

  $$[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)} = \frac{|dg|}{d} = |g| = g$$

□

10) Hallar enteros a y b tales que $a + b = 216$ y $[a,b] = 480$

Solucion:

Tomemos $a,b \in \mathbb{Z}^+$, ya que $(a,b) = (-a,-b)$

Sea $d = (a,b)$, entonces $d|a$ y $d|b$, luego $d|a+b$

Expresamos $a = dx$ y $b = dy$ con $(x,y) = 1$

Luego
- $a + b = dx + dy = d(x+y) = 216$
- $[a,b] = \frac{|ab|}{(a,b)} = \frac{ab}{(a,b)} = \frac{dxdy}{d} = dxy = 480$

Como $d|216$ y $d|480$, luego $d|(216,480)$, entonces $d \leq (216,480)$, siendo el máximo valor de $d = (216,480)$

Hallamos $(216,480)$

$$480 = 216\cdot 2 + 48$$
$$216 = 48\cdot 4 + 24$$
$$48 = 24\cdot 2$$

Entonces $d = (216,480) = 24$, se sigue que

$$x + y = \frac{216}{d} = \frac{216}{24} = 9 \quad \text{y} \quad xy = \frac{480}{d} = \frac{480}{24} = 20$$

Vemos que los x,y co-primos que cumplen $x + y = 9$ y $xy = 20$, son

$$x = 4 \quad \text{y} \quad y = 5$$

Sustituyendo en $a = dx$ y $b = dy$, tenemos

$$a = 24\cdot 4 = 96 \quad \text{y} \quad b = 24\cdot 5 = 120,$$

«Como la suma y multiplicación son conmutativas, así como el MCD y MCM, también se da el caso de $a = 120$ y $b = 96$»

11) Hallar todos los números a y b que satisfacen $(a,b) = 24$ y $[a,b] = 1440$

Solucion:

Sea la descomposición en factores primeros de a y b

$$a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \quad \text{y} \quad b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$$

Siendo p_i números primos, los exponentes $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}^*$ y n la cantidad de primos en la descomposición que debe ser igual para a y b.

Sabemos que

$$(a,b) = 24 = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \quad \text{y} \quad [a,b] = 1440 = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$$

Por tanto podemos construir diferentes a y b intercambiando los α_i con los β_i en los factores primos, ya que se mantendría los mismos $\min$ y $\max$

Descomponemos 24 y 1440

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1440 & 2 \\ 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 = 2^3\cdot 3^1\cdot 5^0 \\ 1440 = 2^5\cdot 3^2\cdot 5^1 \end{array}$$

Ahora construimos los distintos a y b variando los α,β en cada primo

- Para el factor primo $p = 2$ el par de exponentes (α_2,β_2) es $(3,5)$ o $(5,3)$
- Para el factor primo $p = 3$ el par de exponentes (α_3,β_3) es $(1,2)$ o $(2,1)$
- Para el factor primo $p = 5$ el par de exponentes (α_5,β_5) es $(0,1)$ o $(1,0)$

Exponentes (α,β)			a	b
$p=2$	$p=3$	$p=5$		
$(3,5)$	$(1,2)$	$(0,1)$	$a = 2^3 3^1 5^0 = 24$	$b = 2^5 3^2 5^1 = 1440$
$(3,5)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$a = 2^3 3^1 5^1 = 120$	$b = 2^5 3^2 5^0 = 288$
$(3,5)$	$(2,1)$	$(0,1)$	$a = 2^3 3^2 5^0 = 72$	$b = 2^5 3^1 5^1 = 480$
$(3,5)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$a = 2^3 3^2 5^1 = 360$	$b = 2^5 3^1 5^0 = 96$
$(5,3)$	$(1,2)$	$(0,1)$	$a = 2^5 3^1 5^0 = 96$	$b = 2^3 3^2 5^1 = 360$
$(5,3)$	$(1,2)$	$(1,0)$	$a = 2^5 3^1 5^1 = 480$	$b = 2^3 3^2 5^0 = 72$
$(5,3)$	$(2,1)$	$(0,1)$	$a = 2^5 3^2 5^0 = 288$	$b = 2^3 3^1 5^1 = 120$
$(5,3)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$a = 2^5 3^2 5^1 = 1440$	$b = 2^3 3^1 5^0 = 24$

Por lo tanto las parejas a,b tal que $(a,b) = 24$ y $[a,b] = 1440$ son

$$\{(24,1440),(120,288),(72,480),(360,96),(96,360),(480,72),(288,120),(1440,24)\}$$

4. Congruencias

4.1. Definición y Propiedades Básicas

Ejercicios:

2) Probar que si $ac \equiv_{cn} bc$ entonces $a \equiv_n b$

Demostración:

$$\begin{aligned} ac \equiv_{cn} bc &\Longrightarrow cn \mid ac - bc \\ &\Longrightarrow \cancel{c}n \mid \cancel{c}(a-b) \\ &\Longrightarrow \quad n \mid a - b \quad \Longrightarrow a \equiv_n b \end{aligned}$$

□

4) Probar que $3^{105} + 4^{105} \equiv_{13} 0$

Demostración:

Supongamos que $3^{105} + 4^{105} \equiv_{13} 0$, entonces

$$\begin{aligned} 3^{105} &\equiv_{13} -4^{105} \\ 3^{105} &\equiv_{13} 4^{2+52+1}(-1) \\ 3^{105} &\equiv_{13} 16^{52}\cdot(4)(-1) \\ 3^{105} &\equiv_{13} 16^{52}(-4) \\ 3^{105} &\equiv_{13} 3^{52}(-4) \\ 3^{3\cdot 35} &\equiv_{13} 3^{3\cdot 17+1}(-4) \\ 27^{35} &\equiv_{13} 27^{17}(3)(-4) \\ 1^{35} &\equiv_{13} 1^{17}(3)(-4) \\ 1 &\equiv_{13} -12 \\ 1 &\equiv_{13} 1 \end{aligned}$$

Como $1 \equiv_{13} 1$, entonces la suposición es correcta □

6) Si p es un primo impar probar que:

   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1) \equiv_p 0$
   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (p-1)^2 \equiv_p 0$
   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (p-1)^3 \equiv_p 0$

8) Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $f(a) \equiv_n k$ probar que para todo entero t, $f(a+tn) \equiv_n k$

10) Hallar el dígito de las unidades de los números 13^{13} y $(5)(7)^{29} + (8)(9)^{72}$

Solucion:

a) Calculamos el modulo 10 de 13^{13}

$$13^{13} \equiv_{10} 3^{13} \equiv_{10} 3^{4\cdot 3+1} \equiv_{10} 81^3(3) \equiv_{10} 1^3(3) \equiv_{10} 3$$

Por tanto el dígito de las unidades de 13^{13} es 3

b) Calculamos el modulo 10 de $(5)(7)^{29} + (8)(9)^{72}$

Hallamos el ultimo dígito de cada termino por separado

$$\begin{aligned} (5)(7)^{29} &\equiv_{10} 7^{4\cdot 7+1}(5) \\ &\equiv_{10} 2401^7(7)(5) \\ &\equiv_{10} 1^7(35) \\ &\equiv_{10} 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (8)(9)^{72} &\equiv_{10} 9^{2\cdot 36}(8) \\ &\equiv_{10} 81^{36}(8) \\ &\equiv_{10} 1^{36}(8) \\ &\equiv_{10} 8 \end{aligned}$$

Luego sumamos las congruencias

$$\begin{aligned} (5)(7)^{29} + (8)(9)^{72} &\equiv_{10} 5 + 8 \\ &\equiv_{10} 13 \\ &\equiv_{10} 3 \end{aligned}$$

Por tanto el ultimo dígito de $(5)(7)^{29} + (8)(9)^{72}$ es 3

4.2. Criterios de Divisibilidad

Ejercicios:

1) Sea $n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_k 10^k$ la representación decimal del entero positivo n. Probar que n es divisible por 11, si y solo si $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i$ es divisible por 11
2) A partir de la relación $10^3 \equiv_7 -1$, deducir un criterio de Divisibilidad por 7.
3) Probar que $6|n$ si y solo si $2|n$ y $3|n$.
4) Con las notaciones del ejercicio 1, probar que $8|n$ si y solo si $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$
5) Expresando los enteros positivos en el sistema de numeración con base 100, deducir un criterio de divisibilidad por 101.