Desarrollo Taller

Demostraciones Directas

A. Demuestre por método directo

1. Si x es un entero par, entonces x^2 es par.

   Demostración Directa:

   Supongamos x es entero par
   Entonces x es de la forma $x = 2n$ donde $n \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

   $$x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$$

   LLamemos $m = 2n^2$, como $n \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $x^2 = 2m$
   $\therefore x^2$ es par

2. Si x es un entero impar, entonces x^3 es impar.

   Demostración Directa:

   Supongamos x es entero impar
   Entonces x es de la forma $x = 2n + 1$ donde $n \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

   $$\begin{aligned} x^3 &= (2n+1)^3 \\ &\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} \\ &= (2n)^3 + 3 \cdot (2n)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2n \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \\ &= 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1 \end{aligned}$$

   LLamemos $m = 4n^3 + 6n^2 + 3n$, como $n \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $x^3 = 2m + 1$
   $\therefore x^3$ es impar

3. Si a es un entero impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es impar.

   Demostración Directa:

   Supongamos a es entero impar
   Entonces a es de la forma $a = 2n + 1$ donde $n \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

   $$\begin{aligned} a^2 + 3a + 5 &= (2n+1)^2 + 3(2n+1) + 5 \\ &\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2} \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 6n + 3 + 5 \\ &= 4n^2 + 10n + 8 + 1 \\ &= 2(2n^2 + 5n + 4) + 1 \end{aligned}$$

   Llamemos $m = 2n^2 + 5n + 4$, como $n \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $a^2 + 3a + 5 = 2m + 1$
   $\therefore a^2 + 3a + 5$ es impar

4. Suponga $x, y \in \mathbb{Z}$. Si x y y son impares, entonces xy es impar.

   Demostración Directa:

   Supongamos x y y son enteros impares
   Por lo tanto son de la forma $x = 2n + 1$ y $y = 2m + 1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

   $$\begin{aligned} xy &= (2n + 1)(2m + 1) \\ &= 4nm + 2n + 2m + 1 \\ &= 2(2nm + n + m) + 1 \end{aligned}$$

   Llamemos $p = 2nm + n + m$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $xy = 2p + 1$
   $\therefore xy$ es impar

16. Si dos enteros tienen la misma paridad, entonces su suma es par.

    Demostración Directa:

    - Tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$ son pares
      Por lo tanto son de la forma $x = 2n$ y $y = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
      Remplazando

      $$x + y = 2n + 2m = 2(n + m)$$

      Llamemos $p = n + m$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p \in \mathbb{Z}$
      Por lo tanto $x + y = 2p$
      $\therefore x + y$ es par
    - Tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$ son impares
      Por lo tanto son de la forma $x = 2n + 1$ y $y = 2m + 1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
      Remplazando

      $$\begin{aligned} x + y &= (2n + 1) + (2m + 1) \\ &= 2n + 2m + 2 \\ &= 2(n + m + 1) \end{aligned}$$

      Llamemos $p = n + m + 1$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p \in \mathbb{Z}$
      Por lo tanto $x + y = 2p$
      $\therefore x + y$ es par

17. Si dos enteros tienen paridad opuesta, entonces su producto es par.

    Demostración Directa:

    Tomemos $x \in \mathbb{Z}$ par y $y \in \mathbb{Z}$ impar
    Por lo tanto son la de forma $x = 2n$ y $y = 2m + 1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
    Remplazando

    $$xy = (2n)(2m + 1) = 4nm + 2n = 2(2nm + n)$$

    Llamemos $p = 2nm + n$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p \in \mathbb{Z}$
    Por lo tanto $xy = 2p$
    $\therefore xy$ es par

18. Suponga $x, y \in \mathbb{R}^+$. Si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$

Demostración Directa:

Supongamos que $0 < x < y$
Tomemos $x < y$ multiplicamos por x tenemos $x^2 < xy$
Tomemos $x < y$ multiplicamos por y tenemos $xy < y^2$
$\therefore x^2 < y^2$ Por transitividad

Demostraciones por Contra-Reciproca

A. Demuestre por método Contra-Reciproca

1. Suponga $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 es par, entonces n es par.

   Demostración Contra-Reciproca:

$$\boxed{\begin{array}{c} p : n^2 \text{ es par} \Longrightarrow q : n \text{ es par} \\ \neg q : n \text{ es impar} \Longrightarrow \neg p : n^2 \text{ es impar} \end{array}}$$

   Supongamos que n es impar
   Por lo tanto n es de la forma $n = 2a + 1$ con $a \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

$$\begin{aligned} n^2 &= (2a+1)^2 \\ &= (2a)^2 + 2(2a) + 1^2 \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \end{aligned}$$

   Llamemos $b = 2a^2 + 2a$, como $a \in \mathbb{Z}$ entonces $b \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $x^2 = 2b + 1$
   $\therefore x^2$ es impar

2. Suponga $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 es impar, entonces n es impar.

   Demostración Contra-Reciproca:

$$\boxed{\begin{array}{c} p : n^2 \text{ es impar} \Longrightarrow q : n \text{ es impar} \\ \neg q : n \text{ es par} \Longrightarrow \neg p : n^2 \text{ es par} \end{array}}$$

   Supongamos que n es par
   Por lo tanto n es de la forma $n = 2a$ con $a \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

   Llamemos $b = 2k^2$, como $a \in \mathbb{Z}$ entonces $b \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $n^2 = 2b$
   $\therefore n^2$ es par

3. Suponga $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a^2(b^2 - 2b)$ es impar, entonces a y b son impares.

   Demostración Contra-Reciproca:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} p : a^2(b^2 - 2b) \text{ es impar} & p \Longrightarrow (q \wedge r) & \neg p : a^2(b^2 - 2b) \text{ es par} \\ q : a \text{ es impar} & \neg(q \wedge r) \Longrightarrow \neg p & \neg q : a \text{ es par} \\ r : b \text{ es impar} & (\neg q \vee \neg r) \Longrightarrow \neg p & \neg r : b \text{ es par} \end{array}}$$

   Supongamos que a es par o b es par, tenemos los siguientes casos:

   - Caso a y b son pares
     Por lo tanto son de la forma $a = 2n$ y $b = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
     Remplazando

$$
\begin{aligned}
a^2(b^2-2b) &= (2n)^2((2m)^2-2(2m)) \\
&= 4n^2(4m^2-4m) \\
&= 16n^2m^2-16n^2m \\
&= 2(8n^2m^2-8n^2m)
\end{aligned}
$$

Llamemos $k = 8n^2m^2 - 8n^2m$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $k \in \mathbb{Z}$
Por lo tanto $a^2(b^2-2b) = 2k$
$\therefore a^2(b^2-2b)$ es par

- Caso a impar y b par
  Por lo tanto son de la forma $a = 2n+1$ y $b = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
  Remplazando

$$
\begin{aligned}
a^2(b^2-2b) &= (2n+1)^2((2m)^2-2(2m)) \\
&= (4n^2+4n+1)(4m^2-4m) \\
&= 4m^2(4n^2+4n+1)-4m(4n^2+4n+1) \\
&= 16n^2m^2+16nm^2+4m^2-16n^2m-4nm-4m \\
&= 2(8n^2m^2+8nm^2+2m^2-8n^2m-2nm-2m)
\end{aligned}
$$

  Llamemos $k = 8n^2m^2+8nm^2+2m^2-8n^2m-2nm-2m$
  Como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $k \in \mathbb{Z}$ Por lo tanto $a^2(b^2-2b) = 2k$
  $\therefore a^2(b^2-2b)$ es par

- Caso a par y b impar
  Por lo tanto son de la forma $a = 2n$ y $b = 2m+1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
  Remplazando

$$
\begin{aligned}
a^2(b^2-2b) &= (2n)^2((2m+1)^2-2(2m+1)) \\
&= 4n^2(4m^2+4m+1-4m-2) \\
&= 4n^2(4m^2-1) \\
&= 16n^2m^2-4n^2 \\
&= 2(8n^2m^2-2n^2)
\end{aligned}
$$

  Llamemos $k = 8n^2m^2-2n^2$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $k \in \mathbb{Z}$
  Por lo tanto $a^2(b^2-2b) = 2k$
  $\therefore a^2(b^2-2b)$ es par

4. Suponga $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si a no divide a bc, entonces a no divide a b.

   Demostración Contra-Reciproca:

$$
\boxed{\begin{array}{c} p : a \nmid bc \Longrightarrow q : a \nmid b \\ \neg q : a | b \Longrightarrow a | bc \end{array}}
$$

   Supongamos que $a|b$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = an$
   Multiplicando termino a termino

$$
\begin{aligned}
b &= an \\
bc &= anc
\end{aligned}
$$

Llamemos $m = nc$, como $n, c \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
Por lo tanto $bc = am$
$\therefore a|bc$ por definicion

5. Suponga $x \in \mathbb{R}$. Si $x^2 + 5x < 0$ entonces $x < 0$

   Demostración Contra-Reciproca:

   $$\boxed{\begin{aligned} p : x^2 + 5x < 0 &\Longrightarrow q : x < 0 \\ \neg q : x \geq 0 &\Longrightarrow \neg p : x^2 + 5x \geq 0 \end{aligned}}$$

   Supongamos $x \geq 0$ por lo tanto $x \in \mathbb{P} \vee x = 0$, analizamos los casos:
   - Caso $x > 0$
     Como $x \in \mathbb{P}$ entonces $x^2 \in \mathbb{P}$ y $5x \in \mathbb{P}$ también $x^2 + 5x \in \mathbb{P}$
     Por definición $x^2 + 5x > 0$
     $\therefore x > 0 \Longrightarrow x^2 + 5x \geq 0$
   - Caso $x = 0$

     $$\begin{aligned} x^2 + 5x &\geq 0 \\ 0^0 + 5(0) &\geq 0 \\ 0 &\geq 0 \end{aligned}$$

     $\therefore x = 0 \Longrightarrow x^2 + 5x \geq 0$

6. Suponga $x \in \mathbb{R}$. Si $x^3 - x > 0$ entonces $x > -1$

   Demostración Contra-Reciproca: INCOMPLETO

   $$\boxed{\begin{aligned} p : x^3 - x > 0 &\Longrightarrow q : x \geq 0 \\ \neg q : x < 0 &\Longrightarrow \neg p : x^3 - x \leq 0 \end{aligned}}$$

   Supongamos $x < 0$ entonces $-x \in \mathbb{P}$

   Demostración Directa

   Factorizamos $x^3 - x \leq 0$ como $x(x-1)(x+1) \leq 0$
   Utilizamos

   $$abc \leq 0$$
   $$(ab \geq 0 \wedge c \leq 0) \vee (ab \leq 0 \wedge c \geq 0)$$
   $$(((a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)) \wedge c \leq 0) \vee (((a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)) \wedge c \geq 0)$$

   Remplazando

   $$x(x-1)(x+1) \leq 0$$
   $$(x(x-1) \geq 0 \wedge x+1 \leq 0) \vee (x(x-1) \leq 0 \wedge x+1 \geq 0)$$
   $$(((x \geq 0 \wedge x-1 \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge x-1 \leq 0)) \wedge x+1 \leq 0) \vee (((x \geq 0 \wedge x-1 \leq 0) \vee (x \leq 0 \wedge x-1 \geq 0)) \wedge x+1 \geq 0)$$
   $$(((x \geq 0 \wedge x \geq 1) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq 1)) \wedge x \leq -1) \vee (((x \geq 0 \wedge x \leq 1) \vee (x \leq 0 \wedge x \geq 1)) \wedge x \geq -1)$$
   $$x \in \{\{[1, \infty) \cup (-\infty, 0]\} \cap (-\infty, -1]\} \cup \{\{[0, 1] \cup \emptyset\} \cap [-1, \infty)\}$$
   $$x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$
   $$x \leq -1 \vee 0 \leq x \leq 1$$

B. Demuestre por Directa o Contra-Reciproca

1. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y a y b tienen la misma paridad, entonces $3a + 7$ y $7b - 4$ no.

   Demostración Directa:

   Supongamos que a, b comparten paridad, entonces tenemos los casos:

   - a, b son pares
     Por lo tanto son de la forma $a = 2n$ y $b = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
     Remplazando

     $$3a + 7 = 3(2n) + 7 = 6n + 6 + 1 = \boxed{2(3n + 3) + 1}$$
     $$7b - 4 = 7(2m) - 4 = 14m - 4 = \boxed{2(7m - 2)}$$

     Como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p = 3n + 3 \in \mathbb{Z}$ y $q = 7m - 2 \in \mathbb{Z}$
     Remplazando $3a + 7 = 2p + 1$ y $7b - 4 = 2q$
     Por lo tanto $3a + 7$ es impar y $7b - 4$ es par
     $\therefore$ Si a y b comparten paridad $3a + 7$ y $7b - 4$ no.

   - a, b son impares
     Por lo tanto son de la forma $a = 2n + 1$ y $b = 2m + 1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
     Remplazando

     $$3a + 7 = 3(2n + 1) + 7 = 6n + 3 + 7 = 6n + 10 = \boxed{2(3n + 5)}$$
     $$7b - 4 = 7(2m + 1) - 4 = 14m + 7 - 4 = 14m + 2 + 1 = \boxed{2(7m + 1) + 1}$$

     Como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $p = 3n + 5 \in \mathbb{Z}$ y $q = 7m + 1 \in \mathbb{Z}$
     Remplazando $3a + 7 = 2p$ y $7b - 4 = 2q + 1$
     Por lo tanto $3a + 7$ es par y $7b - 4$ es impar
     $\therefore$ Si a y b comparten paridad $3a + 7$ y $7b - 4$ no.

2. Suponga $x \in \mathbb{Z}$. Si $x^3 - 1$ es par, entonces x es par.

   Demostración Contra-Reciproca:

   $$\boxed{\begin{array}{l} p : x^3 - 1 \text{ es par} \implies q : x \text{ es par} \\ \neg q : x \text{ es impar} \implies \neg p : x^3 - 1 \text{ es impar} \end{array}}$$

   Supongamos que x es impar
   Por lo tanto es de la forma $x = 2n + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

   $$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (2n + 1)^3 - 1 \\ &= (2n)^3 + 3(2n)^2 + 3(2n) + 1 - 1 \\ &= 8n^3 + 12n^2 + 6n \\ &= 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) \end{aligned}$$

   Sea $m = 4n^3 + 6n^2 + 3n$, como $n \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Por lo tanto $x^3 - 1 = 2m$ es par
   $\therefore$ No se cumple la contra-reciproca por lo tanto la premisa es falsa

3. Suponga $x \in \mathbb{Z}$. Si $x + y$ es par, entonces x y y tienen la misma paridad.

   Demostración Contra-Reciproca:

$$\boxed{\begin{aligned} p : x + y \text{ es par} &\Longrightarrow q : x, y \text{ comparten paridad} \\ \neg q : x, y \text{ no comparten paridad} &\Longrightarrow \neg p : x + y \text{ es impar} \end{aligned}}$$

Supongamos que x, y no comparten paridad entonces tenemos los casos:

- x es par y y es impar
  Por lo tanto son de la forma $x = 2n$ y $y = 2m + 1$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
  Remplazando
  $$x + y = 2n + 2m + 1 = 2(n + m) + 1$$
  Sea $k = n + m$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $k \in \mathbb{Z}$
  Por lo tanto $x + y = 2k + 1$
  $\therefore x + y$ es impar
- x es impar y y es par Por lo tanto son de la forma $x = 2n + 1$ y $y = 2m$ con $n, m \in \mathbb{Z}$
  Remplazando
  $$x + y = 2n + 1 + 2m = 2(n + m) + 1$$
  Sea $k = n + m$, como $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces $k \in \mathbb{Z}$
  Por lo tanto $x + y = 2k + 1$
  $\therefore x + y$ es impar

4. Si n es par, entonces $8|(n^2 - 1)$

   Demostración Directa:

   Supongamos que n es par
   Por lo tanto n es de la forma $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$
   Por definición $8|(n^2 - 1)$ implica $n^2 - 1 = 8m$ con $m \in \mathbb{Z}$ Remplazando

   $$\begin{aligned} n^2 - 1 &= 8m \\ (2k)^2 - 1 &= 8m \\ 4k^2 - 1 &= 8m \\ 4k^2 - 1 &= 8m \\ 2(2k^2) - 1 &= 8m \end{aligned}$$

   Vemos que $2(2k^2) - 1$ siempre sera impar, por lo que es imposible que sea múltiplo de 8 $\therefore$ La proposición es falsa

Demostraciones por Contradicción

A. Demuestre por método Contradicción

1. Suponga $n \in \mathbb{Z}$, Si n es impar, entonces n^2 es impar.

   Demostración Contradicción:

$$\boxed{\begin{array}{c} p : n \text{ es impar} \Longrightarrow q : n^2 \text{ es impar} \\ p : n \text{ es impar} \wedge \neg q : n^2 \text{ es par} \end{array}}$$

   Supongamos que n es impar y n^2 es par
   Por lo tanto n es de la forma $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \boxed{2(2k^2 + 2k) + 1}$$

   Sea $m = 2k^2 + 2k$, como $k \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Entonces $n^2 = 2m + 1$
   Por lo tanto n^2 es impar lo cual contradice nuestra suposición
   $\therefore n$ es impar $\Rightarrow n^2$ es impar

2. Suponga $n \in \mathbb{Z}$, Si n^2 es impar, entonces n es impar.

$$\boxed{\begin{array}{c} p : n^2 \text{ es impar} \Longrightarrow q : n \text{ es impar} \\ p : n^2 \text{ es impar} \wedge \neg q : n \text{ es par} \end{array}}$$

   Supongamos que n^2 es impar y n es par
   Por lo tanto n es de la forma $n = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$
   Remplazando

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = \boxed{2(2k^2)}$$

   Sea $m = 2k^2$, como $k \in \mathbb{Z}$ entonces $m \in \mathbb{Z}$
   Entonces $n^2 = 2m$
   Por lo tanto n^2 es par lo cual contradice nuestra suposición
   $\therefore n^2$ es impar $\Rightarrow n$ es impar

3. Pruebe que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

$$\boxed{p : \sqrt[3]{2} \in \mathbb{I} \quad \neg p : \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}}$$

$$\left(\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{I} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$$

   Supongamos que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$
   Por lo tanto existen $p, q \in \mathbb{Z}$ co-primos $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, Tal que $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$
   Ahora

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$$

$$2 = \frac{p^3}{q^3}$$

$$2q^3 = p^3$$

Podemos ver que p^3 es par, por lo tanto es de la forma $p^3 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$
Remplazando

$$\begin{aligned} 2q^3 &= (2k)^3 \\ 2q^3 &= 8k^3 \\ q^3 &= 4k^3 \\ q^3 &= 2(2k^3) \end{aligned}$$

Podemos ver que q^3 también es par
Pero esto contradice nuestra suposición donde $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$
$\therefore \sqrt[3]{2} \in \mathbb{I}$

4. Pruebe que $\sqrt{6}$ es irracional.
5. Pruebe que $\sqrt{3}$ es irracional.
6. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a^2 - 4b - 2 \neq 0$
7. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $a^2 - 4b - 3 \neq 0$
8. Suponga $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces a o b son pares.

Demostraciones Extra

A. Suponga $x, k \in \mathbb{Z}$. x es impar $\iff x^k$ es impar

Demostración:

- $p : x$ impar $\implies q : x^k$ impar

  Por inducción:

  - Base de inducción ($k = 0$):

    Sabemos que $x^0 = 1$ y 1 es impar
    Por lo tanto la proposición es cierta para $k = 0$

  - Hipótesis de inducción (para $k = n$):

    Supongamos que x^n es impar, para $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$

  - Paso inductivo (demostrar para $k = n + 1$):

    Queremos probar que x^{n+1} es impar
    Sabemos que $x^{n+1} = x^n x$
    Por hipótesis de inducción x^n es impar, y por hipótesis x es impar
    Por lo tanto son de la forma $x^n = 2a + 1$ y $x = 2b + 1$ con $a, b \in \mathbb{Z}$
    Ahora

    $$\begin{aligned} x^n x &= (2a + 1)(2b + 1) \\ &= 4ab + 2a + 2b + 1 \\ &= 2(2ab + a + b) + 1 \end{aligned}$$

    Sea $c = 2ab + a + b$, como $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $c \in \mathbb{Z}$
    Por lo tanto $x^{n+1} = 2c + 1$ es impar
    $\therefore$ Por inducción matemática x^k es impar para todo $k \geq 0$

  $\therefore x$ impar $\implies x^k$ impar

- $q : x^k$ impar $\implies p : x$ impar

  Por contra-reciproca:

  $$\neg p : x \text{ par} \implies \neg q : x^k \text{ par}$$

  Supongamos que x es par,
  Por lo tanto es de la forma $x = 2n$ con $n \in \mathbb{Z}$
  Remplazando $x^k = (2n)^k = 2^k n^k$
  Vemos que uno de los factores de x^k siempre es una potencia de 2
  Por lo tanto x^k siempre es par

  $\therefore x^k$ impar $\implies x$ impar

Dudas

- Casi Siempre se obvia o ignora la pertenencia y simplemente se trabaja con las otras premisas

  Ejemplo:
  "Supongamos $x, y \in \mathbb{Z}$. Si $xy = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$"

  Casi siempre se toma solamente

  $$\underbrace{xy = 0}_{\text{P}} \Longrightarrow (\underbrace{x = 0}_{\text{Q}} \vee \underbrace{y = 0}_{\text{R}}) \tag{1}$$

  Pero se debería tomar

  $$(\underbrace{x \in \mathbb{Z}}_{\text{P}} \wedge \underbrace{y \in \mathbb{Z}}_{\text{Q}} \wedge \underbrace{xy = 0}_{\text{R}}) \Longrightarrow (\underbrace{x = 0}_{\text{S}} \vee \underbrace{y = 0}_{\text{T}}) \tag{2}$$

  - Negación
    Si negamos Equation 1

    $$\begin{gathered} \neg(xy = 0 \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \\ xy = 0 \wedge \neg(x = 0 \vee y = 0) \\ xy = 0 \wedge \neg x = 0 \wedge \neg y = 0 \\ xy = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{gathered} \tag{3}$$

    Si negamos Equation 2

    $$\begin{gathered} \neg((x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge xy = 0) \Longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)) \\ (x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge xy = 0) \wedge \neg(x = 0 \vee y = 0) \\ x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge xy = 0 \wedge \neg x = 0 \wedge \neg y = 0 \\ x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge xy = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{gathered} \tag{4}$$

    Vemos que Equation 3 y Equation 4 Son parecidas, simplemente se ignoran las pertenencias.

  - Contra-Reciproca
    Si sacamos la contra-reciproca de Equation 1

    $$\begin{gathered} \neg(x = 0 \vee y = 0) \Longrightarrow \neg xy = 0 \\ (\neg x = 0 \wedge \neg y = 0) \Longrightarrow \neg xy = 0 \\ (x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Longrightarrow xy \neq 0 \end{gathered} \tag{5}$$

    Si sacamos la contra-reciproca de Equation 2

    $$\begin{gathered} \neg(x = 0 \vee y = 0) \Longrightarrow \neg(x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge xy = 0) \\ (\neg x = 0 \wedge \neg y = 0) \Longrightarrow (\neg x \in \mathbb{Z} \vee \neg y \in \mathbb{Z} \vee \neg xy = 0) \\ (x \neq 0 \wedge y \neq 0) \Longrightarrow (x \notin \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Z} \vee xy \neq 0) \end{gathered} \tag{6}$$

    Vemos que Equation 5 y Equation 6 vuelven a ser muy parecidas
    Como $x \notin \mathbb{Z} \vee y \notin \mathbb{Z} \vee xy \neq 0$ esta relacionado por $\vee$ podemos simplificar los $\notin$

  Preguntas:

  - Es realmente necesario ser estricto?
  - Una demostración puede quedar mal si no se es estricto?