

Teoria de Numeros

Christian Cardenas

Table of Contents

Información	3
1. Clase 2025-08-25	4
1.1. Principio del buen orden PBO	4
1.2. Algoritmo de la división	4
1.3. Principio de inducción matemática (débil) PIM(D)	5
1.4. Ejercicios	6
2. Clase 2025-08-28	8
2.1. $PBO \iff PIM(D)$	8
2.2. Principio de inducción matemática (general) PIM(G)	8
2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) PIM(F)	9
2.4. Ejercicios	10
3. Clase 2025-09-01	11
3.1. Sumatorias y Productorios	11
3.2. Suma Telescópica	11
3.3. Ejercicios	12
4. Clase 2025-09-04	13
4.1. Monotonía de una sucesión	13
4.2. Acotamiento de una sucesión	13
4.3. Ejercicios	13
5. Clase 2025-09-08	17
6. Clase 2025-09-11	18

Información

Profesor: Carlos Andres Giraldo Hernandez

Notas:

Corte 1		
Taller	10%	?
Quiz	5%	11 Sep
Parcial	20%	25 Sep
Corte 2		
Taller	10%	?
Quiz	5%	16 Oct
Parcial	20%	30 Oct
Corte 3		
Parcial	30%	1 Dec

Tutorías: Jueves 10-12, Viernes 8-10 (Biblioteca)

Contenidos:

- Números Naturales
- Números Entero
- Numero Primos
- Divisibilidad
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Congruencias
- Teorema Chino del residuo
- Funciones de la Teoría de Números
- Ecuaciones Diofánticas

Bibliografía: ?

- Niven. I, Zuckerman. N, and Montgomery. H.L, An Introduction to the Theory of Numbers.
- T. Koshy, Elementary Number Theory with applications.

1. Clase 2025-08-25

1.1. Principio del buen orden | PBO

Definición 1.1

Principio del buen orden

Todo subconjunto no vacío de los números naturales tiene mínimo

1.2. Algoritmo de la división

Algoritmo 1.2

Algoritmo de la división

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

Ejemplo

Algoritmo 1.2

- $-3, 7$: $-3 = 7(-1) + 4, \quad 0 \leq 4 < 7$
- $0, 6$: $0 = 6(0) + 0, \quad 0 \leq 0 < 6$

Demostración de Algoritmo 1.2:

Sea $S = \{a - bx : x \in \mathbb{Z} \wedge a - bx \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}$

Comprobamos que $S \neq \emptyset$

- Si $a \geq 0$:
Sea $x = -1$, entonces $a - b(-1) = a + b$, ahora $a + b \geq 0$, tal que $a - b(-1) \in S$
- Si $a < 0$:

$$a - ba = a(1 - b) \quad \begin{cases} b = 0 \implies a(1 - b) = 0 \\ b > 1 \implies 1 - b < 0 \end{cases}$$

$$1 - b < 0 \wedge a < 0 \implies a(1 - b) \geq 0$$

Como $a - ba \geq 0 \implies a - ba \in S$

Como S es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} por el PBO, S tiene mínimo.

Sea $r = \min(S)$. Luego, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - bq = r \implies a = bq + r$

Comprobamos unicidad de q, r

- Como el mínimo es único, r es único.
- Supongamos que existe $q' \in \mathbb{Z}$, tal que $a - bq' = r$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} a - bq &= r \\ a - bq' &= r \end{aligned} \right\} & a - bq = a - bq' \\
 & a - bq = a - bq' \\
 & -bq = -bq' \\
 & 0 = bq - bq' \\
 & 0 = b(q - q') \quad \left\{ \begin{aligned} b &= 0 \text{ Falso} \\ q - q' &= 0 \implies \boxed{q = q'} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

□

1.3. Principio de inducción matemática (débil) | PIM(D)

Definición 1.3

PIM(D)

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ que satisface

1. $\overbrace{0 \in S}^{\text{Paso base}}$
2. $\overbrace{n \in S \implies n+1 \in S}^{\substack{\text{Paso Inductivo} \\ \text{HI}}}$

Entonces $S = \mathbb{N}$

Ejemplo

Definición 1.3

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Demostración: Prueba por inducción matemática

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right\}$$

1. Paso Base

$$r^0 = 1 = \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r} = \frac{1 - r}{1 - r} \implies 0 \in S$$

2. Paso Inductivo:

Supongamos que $n \in S$, es decir

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad (\text{HI})$$

Ahora verificamos comprobamos para $n + 1$

$$\begin{aligned}
& \overbrace{1 + r + r^2 + \dots + r^n}^{\text{HI}} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} \\
& \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\
& \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\
& \frac{1 - \cancel{r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\
& \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}
\end{aligned}$$

Entonces $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

□

Ejemplo

Definición 1.3

$$3|n^3 - n$$

Sea $S = \{n \in \mathbb{Z} : 3|n^3 - n\}$

1. Paso Base

$$0^3 - 0 = 0 \wedge 3|0 \implies 0 \in S$$

2. Paso Inductivo

Supongamos que $n \in S \implies 3|n^3 - n$

Verificamos para $n + 1$

$$\begin{aligned}
(n + 1)^3 - (n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\
&= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\
&= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)
\end{aligned}$$

$$\overbrace{3|n^3 - n}^{\text{Por HI}} \wedge 3|3(n^2 + n) \implies 3|(n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Luego $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4

Demuestre que dadas $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ unicos tal que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

Demostración:

- Si $a \geq 0 \wedge$

□

Ejercicio 1.5

Porque no es posible dividir por 0 en \mathbb{Z} ?

Ejercicio 1.6

Demuestre que no hay enteros entre 0 y 1

Ejercicio 1.7

Se definen los números F_n de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, n = \{0, 1, 2, \dots\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} + 2 = F_n$$

Ejercicio 1.8

Demuestre que $54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

2. Clase 2025-08-28

2.1. PBO \iff PIM(D)

Teorema 2.1

El Principio del buen orden es equivalente al Principio de inducción matemática

Demostración de Teorema 2.1: PBO \iff PIM(D)

1. PBO \implies PIM(D): Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, tal que

1. $0 \in S$
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Como S es no vacío y $S \subsetneq \mathbb{N}$, S^c no es vacío, luego por PBO, S^c tiene mínimo, Sea $m = \min(S^c)$. Veamos que $m - 1 \in S$. Si $m - 1 \notin S \implies m - 1 \in S^c$. Como $m - 1 < m$, entonces m no sería el mínimo de S^c . Luego $m - 1 \in S$.

Por 2. Se tiene que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo cual es una contradicción $\rightarrow \leftarrow$

2. PIM(D) \implies PBO: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacío.

Caso 1 ($0 \in S$): Entonces $\min(S) = 0$

Caso 2 ($0 \notin S$): Sea $T = \{x \in \mathbb{N} : \forall s \in S, x < s\} \subseteq S^c$. Como 0 es cota inferior de S y $0 \notin S$, entonces $0 \in T$, además $T \neq \mathbb{N}$, para T se satisface 1. ($0 \in T$), si 2. es satisfecho por T , entonces por el PIM(D) se concluye que $T = \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción $\rightarrow \leftarrow$

Por lo tanto PBO \iff PIM(D) □

2.2. Principio de inducción matemática (general) | PIM(G)

Definición 2.2

PIM(G)

Sea $S \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\} = \mathbb{N}_{\geq k}$ que satisface

1. $k \in S$
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$

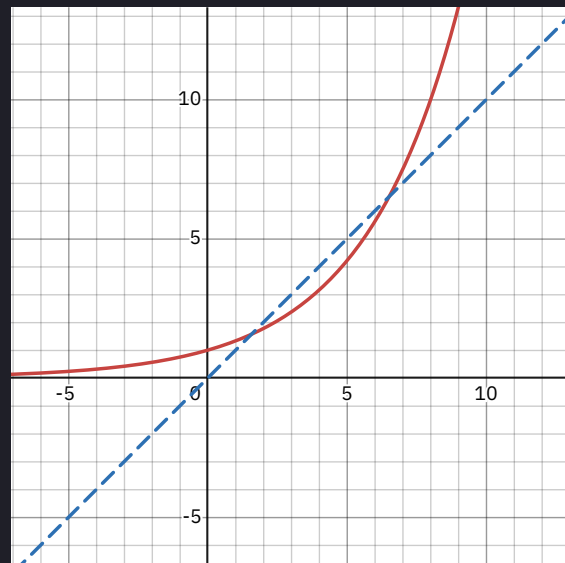
Entonces $S = \mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$

Ejemplo

PIM(G)

Demuestre que $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$

n	$\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$
0	$1 > 0$
1	$1.33 > 1$
2	$1.71 \not> 2$
3	$2.37 \not> 3$
4	$3.16 \not> 4$
5	$4.21 \not> 5$
6	$5.62 \not> 6$
7	$7.49 > 7$
8	$9.99 > 8$

**Demostración:**

Caso Base: $n = 7, \left(\frac{4}{3}\right)^7 \approx 7.49 > 7$

Paso Inductivo: Supongamos que $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ para $k \geq 7$ (HI)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^k > \frac{4}{3}k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{3}\right)k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + \frac{k}{3}$$

Como $k \geq 7$, entonces $\frac{k}{3} \geq \frac{7}{3} > 1$, ahora $k + \frac{k}{3} > k + 1$ por lo tanto

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + 1$$

□

2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) | PIM(F)**Definición 2.3****PIM(F)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k+1, k+2, \dots\}$ tal que

1. $k \in S$
2. Cada vez que $m \in S$, entonces $m+1 \in S$ para $m \geq k$

Entonces $S = \mathbb{N}$

2.4. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Rubiano sección 1.3

3. Clase 2025-09-01

3.1. Sumatorias y Productorios

Tanto en las sumatorias como productorios podemos utilizar elementos de un conjunto y también definir condiciones. Algunos tipos de sumatorias y productorios

Ejemplo

Sea $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x|12}} x = 2 + 3 = 5$$

Ejemplo

Sea $K = \{7, 9, 11\}$

$$\prod_{\substack{i, j \in K \\ i < j}} i^j = 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^{11}$$

$$\prod_{\substack{i, j \in K \\ i \leq j}} i^j = 7^7 \cdot 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^9 \cdot 9^{11} \cdot 11^{11}$$

3.2. Suma Telescópica

Definición 3.1

Suma Telescópica

Una suma de la forma $\sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$ con $n > m + 1$. Se llama suma telescópica

Demostración de la Suma Telescópica por inducción:

- CB: $n = m + 1$

$$\sum_{i=m+1}^{m+2} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_{m+1}} - a_m + a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}} = a_{m+2} - a_m$$

- PI: Supongamos que $\sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=m+1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (\cancel{a_n} - a_m) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$



3.3. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Kochi 1.2

4. Clase 2025-09-04

4.1. Monotonía de una sucesión

Definición 4.1

Una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ es:

1. Monótona creciente si: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$
2. Monótona decreciente si: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

4.2. Acotamiento de una sucesión

Definición 4.2

Una sucesión es acotada si $|a_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+$

Nota

Una sucesión es acotada inferiormente si $a_n \geq k, k \in \mathbb{R}$

Nota

Una sucesión es acotada superiormente si $a_n \leq k, k \in \mathbb{R}$

4.3. Ejercicios

Ejercicio 4.3

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:

- Caso base: $x_1 = 3, x_2 = 2 - \frac{1}{3} = 1.\bar{6} \implies x_1 \geq x_2$
- Paso inductivo: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_{n+1} \\ \frac{1}{x_{n+1}} &\geq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_{n+1}} &\leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{x_{n+1}} &\leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ x_{n+2} &\leq x_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es monótona decreciente. □

Demostración de acotamiento:

Acotamiento inferior:

- *CB*: $x_1 = 3, \quad x_1 \geq 1$
- *PI*: Supongamos que $x_n \geq 1$, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} x_n &\geq 1 \\ 1 &\geq \frac{1}{x_n} \\ -1 &\leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - 1 &\leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 1 &\leq x_{n+1} \end{aligned}$$

Acotamiento superior:

- *CB*: $x_1 = 3, \quad x_1 \leq 3$
- *PI*: Supongamos que $x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} x_n &\leq 3 \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{3} &\geq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{3} &\geq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 3 \geq 1.\bar{6} &\geq x_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es acotada. □

Ejercicio 4.4

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:

- *CB*: $x_1 = 4, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
- *PI*: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por HI

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_{n+1} \\ x_n - 1 &\geq x_{n+1} - 1 \\ \sqrt{x_n - 1} &\geq \sqrt{x_{n+1} - 1} \\ 1 + \sqrt{x_n - 1} &\geq 1 + \sqrt{x_{n+1} - 1} \\ x_{n+1} &\geq x_{n+2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

Demostración de acotamiento:

- *CB*: $x_1 = 4, \quad 1 \leq x_1 \leq 5$
- *PI*: Supongamos que $1 \leq x_n \leq 5$, por HI.

$$\begin{aligned}
 1 &\leq x_n \leq 5 \\
 0 &\leq x_n - 1 \leq 4 \\
 0 &\leq \sqrt{x_n - 1} \leq 2 \\
 1 &\leq 1 + \sqrt{x_n - 1} \leq 3 \\
 1 &\leq x_{n+1} \leq 3 \\
 1 &\leq x_{n+1} \leq 5
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada. \square

Ejercicio 4.5

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	1
2	$\sqrt{3} \approx 1.73$
3	$\sqrt{3.73} \approx 1.93$
4	$\sqrt{3.93} \approx 1.98$
5	$\sqrt{3.98} \approx 1.99$

Demostración de monotonía:

- *CB*: $x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1.73 \implies x_1 \leq x_2$
- *PI*: Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \leq x_{n+1} \implies 2 + x_n \leq 2 + x_{n+1} \implies \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + x_{n+1}} \implies x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente \square

Demostración de acotamiento:

- *CB*: $x_1 = 1, \quad 1 \leq x_1 \leq 2$
- *PI*: Supongamos que $1 \leq x_n \leq 2$, Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
 1 \leq x_n \leq 2 &\implies 3 \leq 2 + x_n \leq 4 \implies \sqrt{3} \leq \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4} \implies 1.73 \leq x_{n+1} \leq 2 \\
 &\implies 1 \leq x_{n+1} \leq 2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada \square

Ejercicio 4.6

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5} + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	2.236
2	2.114
3	2.085
4	2.078
5	2.077

Demostración de monotonía:

- CB: $x_1 = \sqrt{5} \approx 2.23$, $x_2 = \sqrt{\sqrt{5} + x_1} \approx 2.11 \implies x_1 \geq x_2$

- PI: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \geq x_{n+1} \implies \sqrt{5} + x_n \geq \sqrt{5} + x_{n+1} \implies \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \geq \sqrt{\sqrt{5} + x_{n+1}} \implies x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente

□

Demostración de acotamiento:

- CB: $x_1 = \sqrt{5} \implies 2 \leq x_1 \leq 3$

- PI: Supongamos que $2 \leq x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$2 \leq x_n \leq 3$$

$$\sqrt{5} + 2 \leq \sqrt{5} + x_n \leq \sqrt{5} + 3$$

$$\sqrt{\sqrt{5} + 2} \leq \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \leq \sqrt{\sqrt{5} + 3}$$

$$2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28$$

$$2 \leq 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \leq 3$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada

□

5. Clase 2025-09-08

Se desarrollaron Ejercicios 4.3 y 4.4

6. Clase 2025-09-11