

Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
2025-11-06

2. Divisibilidad

2.5. Mínimo Común Múltiplo

Ejercicios:

- 3) Probar que $(a, b) = (a + b, [a, b])$
 5) Si k es múltiplo de a y b , probar que

$$\frac{|k|}{\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)} = [a, b]$$

- 7) Sean d y g enteros positivos. Probar que existen enteros a y b tales que $(a, b) = d$ y $[a, b] = g$ si y solo si $d|g$
 10) Hallar enteros a y b tales que $a + b = 216$ y $[a, b] = 480$
 11) Hallar todos los números a y b que satisfacen $(a, b) = 24$ y $[a, b] = 1440$

4. Congruencias

4.1. Definición y Propiedades Básicas

Ejercicios:

- 2) Probar que si $ac \equiv_{cn} bc$ entonces $a \equiv_n b$

Demostración:

$$\begin{aligned} ac \equiv_{cn} bc &\implies cn \mid ac - bc \\ &\implies \cancel{c}n \mid \cancel{c}(a - b) \\ &\implies n \mid a - b \implies a \equiv_n b \end{aligned}$$

□

- 4) Probar que $3^{105} + 4^{105} \equiv_{13} 0$
 6) Si p es un primo impar probar que:
 a) $1 + 2 + 3 + \dots + (p - 1) \equiv_p 0$
 b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (p - 1)^2 \equiv_p 0$
 c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (p - 1)^3 \equiv_p 0$
 8) Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $f(a) \equiv_n k$ probar que para todo entero t , $f(a + tn) \equiv_n k$
 10) Hallar el dígito de las unidades de los números 13^{13} y $(5)(7)^{29} + (8)(9)^{72}$

4.2. Criterios de Divisibilidad

Ejercicios:

- 1) Sea $n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$ la representación decimal del entero positivo n . Probar que n es divisible por 11, si y solo si $\sum_{i=0}^k (-1)^i a_i$ es divisible por 11
 2) A partir de la relación $10^3 \equiv_7 -1$, deducir un criterio de Divisibilidad por 7.
 3) Probar que $6|n$ si y solo si $2|n$ y $3|n$.
 4) Con las notaciones del ejercicio 1, probar que $8|n$ si y solo si $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$
 5) Expresando los enteros positivos en el sistema de numeración con base 100, deducir un criterio de divisibilidad por 101.