Teoria de Numeros

Christian Cardenas

Table of Contents

Información

Profesor: Carlos Andres Giraldo Hernandez

Notas:

Corte 1		
Taller	10%	?
Quiz	5%	11 Sep
Parcial	20%	25 Sep
Corte 2		
Taller	10%	?
Quiz	5%	16 Oct
Parcial	20%	30 Oct
Corte 3		
Parcial	30%	1 Dec

Tutorías: Jueves 10-12, Viernes 8-10 (Biblioteca)

Contenidos:
- Números Naturales
- Números Entero
- Numero Primos
- Divisibilidad
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Congruencias
- Teorema Chino del residuo
- Funciones de la Teoría de Números
- Ecuaciones Diofánticas

Bibliografía: ?

- Niven. I, Zuckerman. N, and Montgomery. H.L, An Introduction to the Theory of Numbers.
- T. Koshy, Elementary Number Theory with applications.

1. Clase 2025-08-25

1.1. Principio del buen orden | PBO

Definición 1.1 **Principio del buen orden**

Todo subconjunto no vació de los números naturales tiene mínimo

1.2. Algoritmo de la division

Algoritmo 1.2 **Algoritmo de la division**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b$$

Ejemplo **Algoritmo 1.2**

- $-3, 7: \quad -3 = 7(-1) + 4, \quad 0 \le 4 < 7$
- $0, 6: \quad 0 = 6(0) + 0, \quad 0 \le 0 < 6$

Demostración de Algoritmo 1.2:

Sea $S = \{a - bx : x \in \mathbb{Z} \land a - bq \ge 0\} \subseteq \mathbb{N}$

Comprobamos que $S \ne \emptyset$

- Si $a \ge 0$:
  Sea $x = -1$, entonces $a - b(-1) = a + b$, ahora $a + b \ge 0$, tal que $a - b(-1) \in S$
- Si $a < 0$:

$$a - ba = a(1 - b) \quad \begin{cases} b = 0 \Longrightarrow a(1 - b) = 0 \\ b > 1 \Longrightarrow 1 - b < 0 \end{cases}$$

$$1 - b < 0 \land a < 0 \Longrightarrow a(1 - b) \ge 0$$

Como $a - ba \ge 0 \Longrightarrow a - ba \in S$

Como S es un subconjunto no vació de $\mathbb{N}$ por el PBO, S tiene mínimo.
Sea $r = \min(S)$. Luego, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - bq = r \Longrightarrow a = bq + r$

Comprobamos unicidad de q, r

- Como el mínimo es único, r es único.
- Supongamos que existe $q' \in \mathbb{Z}$, tal que $a - bq' = r$

$$\left.\begin{matrix} a - bq = r \\ a - bq' = r \end{matrix}\right\} \quad a - bq = a - bq'$$

$$\begin{aligned} a - bq &= a - bq' \\ -bq &= -bq' \\ 0 &= bq - bq' \\ 0 &= b(q - q') \quad \begin{cases} b = 0 \text{ Falso} \\ q - q' = 0 \Longrightarrow \boxed{q = q'} \end{cases} \end{aligned}$$

□

1.3. Principio de inducción matemática (débil) | PIM(D)

Definición 1.3 **PIM(D)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ que satisface

1. $\overbrace{0 \in S}^{\text{Paso base}}$
2. $\overbrace{\underbrace{n \in S}_{\text{HI}} \Longrightarrow n + 1 \in S}^{\text{Paso Inductivo}}$

Entonces $S = \mathbb{N}$

Ejemplo **Definición 1.3**

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Demostración: Prueba por inducción matemática

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right\}$$

1. Paso Base

$$r^0 = 1 = \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r} = \frac{1 - r}{1 - r} \Longrightarrow 0 \in S$$

2. Paso Inductivo:

   Supongamos que $n \in S$, es decir

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{(HI)}$$

   Ahora verificamos comprobamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + r + r^2 + \dots + r^n}_{\text{HI}} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - \cancel{r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \end{aligned}$$

   Entonces $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

□

Ejemplo **Definición 1.3**

$$3 | n^3 - n$$

Sea $S = \{n \in \mathbb{Z} : 3 | n^3 - n\}$

1. Paso Base

   $0^3 - 0 = 0 \land 3 | 0 \Longrightarrow 0 \in S$

2. Paso Inductivo

   Supongamos que $n \in S \Longrightarrow 3 | n^3 - n$

   Verificamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

$$\overbrace{3 | n^3 - n}^{\text{Por HI}} \land 3 | 3(n^2 - n) \Longrightarrow 3 | (n^3 - n) + 3(n^2 - n)$$

   Luego $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4

Demuestre que dadas $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \ne 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ unicos tal que

$$a = bq + r, \quad 0 \le r < b$$

Demostración:

- Si $a \ge 0 \land$

□

Ejercicio 1.5

Porque no es posible dividir por 0 en $\mathbb{Z}$?

Ejercicio 1.6

Demuestre que no hay enteros entre 0 y 1

Ejercicio 1.7

Se definen los números F_n de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = \{0, 1, 2, \dots\}$

Demuestre que para todo $n \ge 1$

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} + 2 = F_n$$

Ejercicio 1.8

Demuestre que $54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

2. Clase 2025-08-28

2.1. PBO $\iff$ PIM(D)

Teorema 2.1

El Principio del buen orden es equivalente al Principio de inducción matemática

Demostración de Teorema 2.1: $\mathrm{PBO} \iff \mathrm{PIM(D)}$

1. $\mathrm{PBO} \implies \mathrm{PIM(D)}$: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, tal que
   1. $0 \in S$
   2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

   Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Como S es no vació y $S \subsetneq \mathbb{N}$, S^c no es vacío, luego por PBO, S_c tiene mínimo, Sea $m = \min(S)$. Veamos que $m - 1 \in S$. Si $m - 1 \notin S \implies m - 1 \in S^c$. Como $m - 1 < m$, entonces m no seria el minimo de S_c. Luego $m - 1 \in S$.

   Por *2.* Se tiene que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$
2. $\mathrm{PIM(D)} \implies \mathrm{PBO}$: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacio.

   Caso 1 ($0 \in S$): Entonces $\min(S) = 0$

   Caso 2 ($0 \notin S$): Sea $T = \{x \in \mathbb{N} : \forall s \in S, \quad x < s\} \subseteq S^c$. Como 0 es cota inferior de S y $0 \notin S$, entonces $0 \in T$, ademas $T \neq \mathbb{N}$, para T se satifase *1.* ($0 \in T$), si *2.* es satisfecho por T, entoncecs por el PIM(D) se concluye que $T = \mathbb{N}$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$

Por lo tanto $\mathrm{PBO} \iff \mathrm{PIM(D)}$ □

2.2. Principio de inducción matemática (general) | PIM(G)

Definición 2.2 **PIM(G)**

Sea $S \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\} = \mathbb{N} \geq k$ que satisface

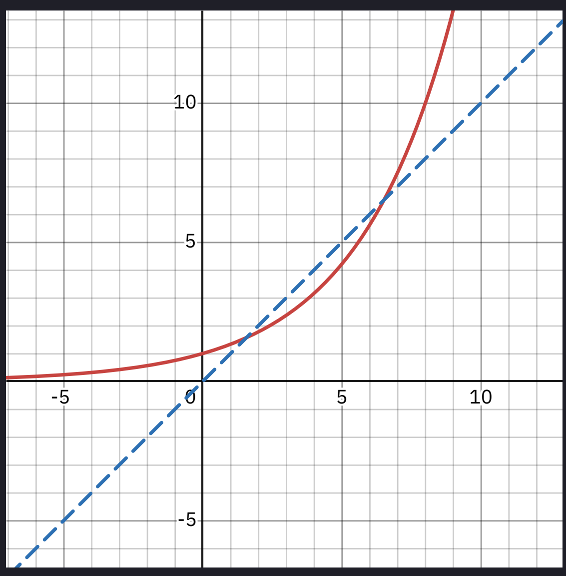
1. $k \in S$
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \ldots\}$

Ejemplo **PIM(G)**

Demuestre que $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$

n	$\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$
0	$1 > 0$
1	$1.33 > 1$
2	$1.71 \not> 2$
3	$2.37 \not> 3$
4	$3.16 \not> 4$
5	$4.21 \not> 5$
6	$5.62 \not> 6$
7	$7.49 > 7$
8	$9.99 > 8$



Demostración:

Caso Base: $n = 7$, $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \approx 7.49 > 7$

Paso Inductivo: Supongamos que $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ para $k \geq 7$ (HI)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^k > \frac{4}{3}k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{3}\right)k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + \frac{k}{3}$$

Como $k \geq 7$, entonces $\frac{k}{3} \geq \frac{7}{3} > 1$, ahora $k + \frac{k}{3} > k + 1$ por lo tanto

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + 1$$

□

2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) | PIM(F)

Definición 2.3 **PIM(F)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k + 1, k + 2, \ldots\}$ tal que

1. $k \in S$
2. Cada vez que $m \in S$, entonces $m + 1 \in S$ para $m \geq k$

Entonces $S = \mathbb{N}$

2.4. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Rubiano sección 1.3

3. Clase 2025-09-01

3.1. Sumatorias y Productorios

Tanto en las sumatorias como productorios podemos utilizar elementos de un conjuntos y tambien definir condiciones Algunos tipos de sumatorias y productorios

Ejemplo

Sea $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \mid 12}} x = 2 + 3 = 5$$

Ejemplo

Sea $K = \{7, 9, 11\}$

$$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i < j}} i^j = 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^{11}$$

$$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i \leq j}} i^j = 7^7 \cdot 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^9 \cdot 9^{11} \cdot 11^{11}$$

3.2. Suma Telescópica

Definición 3.1 **Suma Telescópica**

Una suma de la forma $\sum\limits_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$ con $n > m + 1$. Se llama suma telescópica

Demostración de la Suma Telescópica por inducción:

- *CB:* $n = m + 1$

$$\sum_{i=m+1}^{m+2} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_{m+1}} - a_m + a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}} = a_{m+2} - a_m$$

- *PI:* Supongamos que $\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (\cancel{a_n} - a_m) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

$\square$

3.3. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Kochi 1.2

4. Clase 2025-09-04

4.1. Monotonía de una sucesión

Definición 4.1

Una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ es:

1. Monótona creciente si: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$
2. Monótona decreciente si: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

4.2. Acotamiento de una sucesión

Definición 4.2

Una sucesión es acotada si $|a_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+$

Nota

Una sucesión es acotada inferiormente si $a_n \geq k, k \in \mathbb{R}$

Nota

Una sucesión es acotada superiormente si $a_n \leq k, k \in \mathbb{R}$

4.3. Ejercicios

Ejercicio 4.3

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:
- Caso base: $x_1 = 3, x_2 = 2 - \frac{1}{3} = 1.\bar{6} \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- Paso inductivo: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, Por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{n+1} \\ \frac{1}{x_{n+1}} \geq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_{n+1}} \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ x_{n+2} \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es monótona decreciente. □

Demostración de acotamiento:

Acotamiento inferior:
- *CB*: $x_1 = 3, \quad x_1 \geq 1$
- *PI*: Supongamos que $x_n \geq 1$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq 1 \\ 1 \geq \frac{1}{x_n} \\ -1 \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - 1 \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 1 \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Acotamiento superior:
- *CB*: $x_1 = 3, \quad x_1 \leq 3$
- *PI*: Supongamos que $x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{3} \geq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 3 \geq 1.\bar{6} \geq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es acotada. □

Ejercicio 4.4

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:
- *CB:* $x_1 = 4, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por HI

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{x+1} \\ x_n - 1 \geq x_{x+1} - 1 \\ \sqrt{x_n - 1} \geq \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ 1 + \sqrt{x_n - 1} \geq 1 + \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ x_{n+1} \geq x_{n+2} \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

Demostración de acotamiento:
- *CB:* $x_1 = 4, \quad 1 \leq x_1 \leq 5$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 5$, por HI.

$$\begin{gathered} 1 \leq x_n \leq 5 \\ 0 \leq x_n - 1 \leq 4 \\ 0 \leq \sqrt{x_n - 1} \leq 2 \\ 1 \leq 1 + \sqrt{x_n - 1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 5 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada. □

Ejercicio 4.5

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	1
2	$\sqrt{3} \approx 1.73$
3	$\sqrt{3.73} \approx 1.93$
4	$\sqrt{3.93} \approx 1.98$
5	$\sqrt{3.98} \approx 1.99$

Demostración de monotonía:
- *CB:* $x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1.73 \Longrightarrow x_1 \leq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \leq x_{n+1} \Longrightarrow 2 + x_n \leq 2 + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente □

Demostración de acotamiento:
- *CB:* $x_1 = 1, \quad 1 \leq x_1 \leq 2$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 2$, Por hipótesis de inducción

$$1 \leq x_n \leq 2 \Longrightarrow 3 \leq 2 + x_n \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4} \Longrightarrow 1.73 \leq x_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq x_{n+1} \leq 2$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

Ejercicio 4.6

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5} + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	2.236
2	2.114
3	2.085
4	2.078
5	2.077

Demostración de monotonía:
- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \approx 2.23, \quad x_2 = \sqrt{\sqrt{5} + x_1} \approx 2.11 \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \geq x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{5} + x_n \geq \sqrt{5} + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \geq \sqrt{\sqrt{5} + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

Demostración de acotamiento:
- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \Longrightarrow 2 \leq x_1 \leq 3$
- *PI:* Supongamos que $2 \leq x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} 2 \leq x_n \leq 3 \\ \sqrt{5} + 2 \leq \sqrt{5} + x_n \leq \sqrt{5} + 3 \\ \sqrt{\sqrt{5} + 2} \leq \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \leq \sqrt{\sqrt{5} + 3} \\ 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \\ 2 \leq 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \leq 3 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

5. Clase 2025-09-08

Se desarrollaron Ejercicio 4.3 y Ejercicio 4.4

6. Clase 2025-09-11

6.1. Quiz

Ejercicio 6.1

Calcule el valor exacto de $\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{1023} (\log_2(n+1) - \log_2(n)) \\ &= \log_2(1024) - \log_2(1) \\ &= 10 - 0\end{aligned}$$

Ejercicio 6.2

Ejercicio 1.7

Se definen los números F_n de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = \{0, 1, 2, ...\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$$

Demostración:

- *CB:* $n = 1$

$$\begin{aligned} F_0 + 2 &= \left(2^{2^0} + 1\right) + 2 = 5 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5 \end{aligned} \quad \Longrightarrow F_0 + 2 = F_1$$

- *PI:* Supongamos que $F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$

$$\begin{aligned} F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} F_n + 2 &= (F_n - 2)F_n + 2 \\ &= (F_n)^2 - 2F_n + 2 \\ &= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} + 1 - \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} - \cancel{2} + \cancel{2} \\ &= 2^{2^n \cdot 2} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= F_{n+1} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.3

Demuestre por que por PBO 1.1 si $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq y$ o $y \geq x$

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $\{x, y\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $\{x, y\}$ es no vació, entonces existe $m = \min(\{x, y\})$

- Caso 1: $m = x \wedge m = x \leq y$
- Caso 2: $m = y \wedge m = y \leq x$

□

7. Clase 2025-09-16

7.1. Divisibilidad

Definición 7.1 **Divisibilidad**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, decimos que a divide a b lo cual se denota por $a|b$, si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $ax = b$, también decimos que b es múltiplo de a. Si lo anterior no se tiene, decimos que a no divide a b lo cual se denota por $a \nmid b$.

En algunos contextos $a^n \| b$ significa que $a^n | b$ pero $a^{n+1} \nmid b$

Ejemplo

1. $4, 2 : 2(2) = 4 \implies 2|4$
2. $2, 8 : 2|8 \wedge 2^2|8 \implies 2 \nparallel 8$
3. $3, 6 : 3|6 \wedge 3^2 \nmid 6 \implies 3\|6$

Propiedades

1. $a|b \implies a|bc, \quad \forall c \in \mathbb{Z}$
2. $a|b \wedge b|c \implies a|c$
3. $a|b \wedge a|c \implies a|(bx + cy), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$
4. $a|b \wedge b|a \implies a = \pm b$

Definición 7.2

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos $a \leq b$ si existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $a + k = b$

5. $a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0 \implies a \leq b$
6. $a|b \iff am|bm, \quad m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0 :$

Demostración de propiedades:

1. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$

$$bc = axc \implies a|bc$$

□

2. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge c = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$c = by = axy \implies a|c$$

□

3. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = an \wedge c = am, \quad n, m \in \mathbb{Z}$

$$bx + cy = anx + amy = a(nx + my) \implies a \mid (bx = cy)$$

□

4. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a = by = axy &\implies axy - a = 0 \\ &\implies a(xy - 1) = 0 \\ &\implies \begin{cases} a &= 0 \\ xy &= 1 \implies \left\{\begin{smallmatrix} x=1=y \\ x=-1=y \end{smallmatrix}\right. \end{cases} \end{aligned}$$

   1. $b = a(1) \implies b = a$
   2. $b = a(-1) \implies b = -a$

□

5. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a > 0 \wedge b > 0, \quad x \in \mathbb{Z}$

   $a > 0 \wedge b > 0 \implies x > 0$
   1. $x = 1 \implies b = a$
   2. $x \geq 2 \implies b = ax = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\text{x veces}} = a + (k-1)a$, donde $(k-1) > 0$, entonces

      $a < b$

   Por lo tanto $a \leq b$ □
6. ***Demostración:***
   - $a|b \implies am|bm :$ Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$

   $$bm = axm = (am)x \implies am \mid bm$$

   - $am|bm \implies a|b :$ Por hipótesis $bm = amx, \quad x \in \mathbb{Z}$

   Como $m \neq 0$

   $$bm = amx \implies b = ax \implies a|b$$

□

7.2. Estructuras algebraicas

Definición 7.3

Dado un conjunto no vació A, una **operación binaria** $\star$ sobre A, es una función

$$\begin{aligned} \star : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow \star(a, b) \end{aligned}$$

Notación: $\star(a, b) = a \star b$

Ejemplo

1. Suma en naturales es una operación binaria
   $$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$
2. Multiplicación en enteros es una operación binaria
   $$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$
3. La suma en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ es una operación binaria
   $$\begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{aligned} +_3 : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ (2, 1) &\longrightarrow 2 +_3 1 = 0 \end{aligned}$$
4. La resta en $\mathbb{N}$ no es una operación binaria

   $(\mathbb{N}, -) \quad 5 - 7 = -2$
5. La division en $\mathbb{R}$ no es una operación binaria

   $(\mathbb{R}, \div) \quad \frac{5}{0}$ no esta definido
6. La division en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una operación binaria

   $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$
   $$\begin{aligned} \div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Definición 7.4

Sea A un conjunto no vació y $\star$ una operación binaria sobre A. Decimos que:
1. $\star$ es asociativa si:
   $$(\forall x, y, z \in A)((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$$
2. $\star$ es modulativa si:
   $$(\exists e \in A)(\forall x \in A)(e \star x = x \star e = x)$$
3. $\star$ es invertiva si:
   $$(\forall x \in A)(\exists x' \in A)(x \star x' = e = x' \star x)$$
4. $\star$ es conmutativa si:
   $$(\forall x, y \in A)(x \star y = y \star x)$$

Una pareja $(A, \star)$ se dice:
1. **Semi-grupo** si $\star$ es asociativa.
2. **Monoide** si $\star$ es asociativa y modulativa.
3. **Grupo** si $\star$ es asociativa, modulativa e invertiva.
4. **Grupo Abeliano** si $\star$ es asociativa, modulativa, invertiva y conmutativa.

7.3. Tarea

1. Buscar 2 de cada Semi-grupo, Monoide, Grupo, Grupo Abeliano (exclusivos)
2. Leer sobre máximo común divisor, propiedades, ejemplos