Lenguaje Posicional

Una proposición es una afirmación a la cual se puede decir que es **Verdadera** o **Falsa**

Syntax

Proposiciones Atómicas

Son las mas sencillas que se puede construir y carecen de Conectivos Lógicos

Notación: $p, q, r, \ldots$

Ejemplos:

- p : El cielo es azul ✓ Atómica
- q : Hoy es lunes ✓ Atómica
- Hoy no hay clase
  - r : Hoy hay clase ✓ Atómica
  - $\neg r$: Hoy no hay clase ✗ Atómica

Proposiciones Moleculares

Son obtenidas a partir de Proposiciones Atómicas usando Conectivos lógicos

- Ejemplo:

$$\text{Si hoy es lunes va a lover}$$
$$p : \text{Hoy es lunes}$$
$$q : \text{Hoy va a llover}$$
$$p \Longrightarrow q$$

- Ejemplo:

$$\text{Como empanada y me voy a pie}$$
$$p : \text{Como empanada}$$
$$q : \text{Me voy a pie}$$
$$p \land q$$

- Ejemplo:

  En el siguiente ejemplo dependiendo de donde se encuentre la coma puede cambiar el como se usan los símbolos de agrupación o si no tuviera una coma seria ambiguo.

$$\text{Si tengo clase de fundamentos entonces hay quiz y no estudie}$$
$$p : \text{Tengo clase de fundamentos}$$
$$q : \text{Hay quiz}$$
$$r : \text{Estudié}$$
$$p \Longrightarrow q \land \neg r$$

$$\text{Si tengo clase de fundamentos entonces hay quiz, y no estudie}$$
$$(p \Longrightarrow q) \land \neg r$$

$$\text{Si tengo clase de fundamentos entonces, hay quiz y no estudie}$$
$$p \Longrightarrow (q \land \neg r)$$

Formulas bien formadas (FBF o WFF)

1. Las Proposiciones atómicas son FBF

2. La negación de una FBF es una FBF ($\neg p$)
3. Si p y q sin FBF entonces $p \wedge q, p \vee q, p \implies q, p \iff q$ son FBF
4. Si x es una variable y $p(x)$ es una FBF entonces $(\forall x)(p(x))$ y $(\exists x)(p(x))$ son FBF

Cualquier FBF debe obtenerse a partir de 1-4

Semántica

Sentido de valor de una proposición True o False

Evaluar valor de verdad de una proposición

En lenguaje proposicional una proposición solamente puede tener dos valores T (verdad/true) o F (falso,false)

- Ejemplo:

  Evaluar los valores de verdad de la proposición "*Hoy es miércoles*"
  Entonces si es verdad que "*Hoy es miércoles*" $p =$ T mientras que si no es verdad que "*Hoy es miércoles*" $p =$ F

  Los valores de verdad de p podrían ser:

p
T
F

- Ejemplo:

  Evaluar los valores de verdad de la proposición "*Hoy no tengo clase entonces no estudié*"

  Como es una proposición molecular lo mas sencillo es siempre sacar las proposiciones atómicas (tener en cuenta que siempre deben ser verdaderas) y luego organizar los conectivos

$$p : \text{Hoy tengo clase}$$
$$q : \text{Estudié}$$
$$\neg p \implies \neg q$$

  Ahora obtenemos todos los valores de verdad posibles de la proposición $\neg p \implies \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \implies \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Tablas de verdad

- Siendo p una proposición atómica p puede tomar un valor de T o F
- Siendo p y q proposiciones atómicas tenemos que

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$	$p \iff q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F

F	F	T	F	F	T	T

Tautología

Definición: Una FBF es una tautología si su valor de verdad siempre es verdadero para cualquier valor de verdad de sus letras proposicionales.

- Ejemplo:

  La proposición $p \lor \neg p$ es una tautología porque siempre es verdadera

p	$\neg p$	$p \lor \neg p$
T	F	T
F	T	T

Contradicción

Definición: Una FBF es una contradicción si su valor de verdad siempre es falso para cualquier valor de verdad de sus letras proposicionales

- Ejemplo:

  La proposición $p \land \neg p$ es una contradicción porque siempre es falsa

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
T	F	F
F	T	F

Equivalencia lógica

Si dos FBF tiene la misma valuación o los mismos renglones en su tabla de verdad se dice que las FBF son equivalentes.

Definición: Sean a, b FBF. Se dice que a es equivalente a b notado por $a \iff b$ si $a \iff b$ es una tautología

- Ejemplo:

  El condicional $p \implies q$ es equivalente a su variable contra-reciproca $\neg q \implies \neg p$

p	q	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$	$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Variables del condicional

		Condicional	Reciproca	Contraria	Contra-Reciproca
p	q	$p \implies q$	$q \implies p$	$\neg p \implies \neg q$	$\neg q \implies \neg p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Metalenguaje

Debido a la complejidad y dificultad de legibilidad al expresar algunas expresiones se utiliza un **metalenguaje** para facilitar su escritura, este comprende lenguaje proposicional junto con lenguaje natural y matemático

- Ejemplo:

  Si quisiéramos expresar "*n es primo*" lo podríamos hacer de alguna de las siguientes formas:

  $$(\forall n)(n \in \mathbb{Z} \land n > 1 \land \neg(\exists c)(c \in \mathbb{Z} \land c > 1 \land c \neq n \land c|n))$$
  $$(\forall n)(n > 1 \Longrightarrow \neg(\exists a)(\exists b)(1 < a < n \land 1 < b < n \land ab = n))$$

  Ahora pensemos que tenemos una proposición que use numero primos ejemplo "Colo 2 y 3 son primos y 2 multiplicado por 3 es 6 entonces 6 no es primo" esto nos daría una proposición demasiado larga por lo que es mejor usar el metalenguaje

  $$2 \text{ primo} \land 3 \text{ primo} \land 2 \cdot 3 = 6 \Longrightarrow 6 \text{ no primo}$$