# Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025-11-06

# 1. Taller

Desarrollar ejercicios 2,4,7,9,11 del Libro *Introducción a la Teoría de Conjuntos - Muñoz J.* sección 3.6 pagina 115.

2) Pruebe que en $\mathbb{R}$ la relación

$$xRy \iff \sin(x-y)=0$$

es de equivalencia. Halle para esta relación las clases de equivalencias de los reales $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, a$

***Demostración:***

- Simetría: Sea $x \in \mathbb{R}$. Como

$$\sin(x-x)=\sin(0)=0$$

Por lo tanto $xRx$

- Reflexividad: Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Tal que $xRy$. Como $xRy$

$$\sin(x-y)=\sin(-(y-x))=-\sin(y-x)=-0=0$$

Tenemos que $\sin(y-x)=0$, Por lo tanto $yRx$

- Transitividad: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tal que $xRy$ y $yRz$.

Como $\sin(\theta)=0$ cuando $\theta = k\pi$ para algun entero $k$. Entonces

$xRy \implies \sin(x-y)=0 \implies x-y=n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$yRz \implies \sin(y-z)=0 \implies y-z=m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$

Sumando

$$\begin{aligned} x-y+y-z &= n\pi+m\pi \\ x-z &= \pi(n+m) \end{aligned}$$

Entonces $\sin(x-z)=0$, Por lo tanto $xRz$

Por lo tanto $R$ es una relación de equivalencia. □

- Hallar $[a]_R$

$$[a]_R = \{x \in \mathbb{R} : xRa)\}$$

Como $\sin(x-a)=0$ cuando $x-a=k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $x=a+(-k)\pi$, como $k$ es cualquier entero $x=a+k\pi$

Por lo tanto $[a]_R = \{k \in \mathbb{Z} : a+k\pi\}$

- Hallar $[0]_R$

$$[0]_R = \{k \in \mathbb{Z} : 0+k\pi\} = \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

- Hallar $\left[\frac{\pi}{2}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]_R = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \left\{\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$$

- Hallar $\left[\frac{\pi}{4}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{4}\right] = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} = \left\{\dots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots\right\}$$

4) a) Halle el numero de particiones que existen para un conjunto con 4 elementos

Sea $A = \{a, b, c, d\}$

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\} \\ P_3 &= \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\} \\ P_4 &= \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\} \\ P_5 &= \{\{b\}, \{c\}, \{a, c\}\} \\ P_6 &= \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\} \\ P_7 &= \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_8 &= \{\{a\}, \{b, c, d\}\} \\ P_9 &= \{\{b\}, \{a, c, d\}\} \\ P_{10} &= \{\{c\}, \{a, b, d\}\} \\ P_{11} &= \{\{d\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{12} &= \{\{a, b\}, \{c, d\}\} \\ P_{13} &= \{\{a, c\}, \{b, d\}\} \\ P_{14} &= \{\{a, d\}, \{b, c\}\} \end{aligned}$$

$$P_{15} = \{\{a, b, c, d\}\}$$

Por tanto existen 15 particiones para un conjunto con 4 elementos

b) Idéntico para un conjunto con 5 elementos

Para esto podemos utilizar los números de Bell los cuales se calculan por

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1$$

En el caso de las particiones para un conjunto de 5 elementos encontramos el quinto numero de Bell

$$
\begin{aligned}
B_0 &= 1 && = 1 \\
B_1 &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_k = \binom{0}{0} B_0 \\
&= 1 \cdot 1 && = 1 \\
B_2 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 \\
&= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 && = 2 \\
B_3 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 \\
&= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 && = 5 \\
B_4 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 \\
&= 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 && = 15 \\
B_5 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} B_k = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{4} B_4 \\
&= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 15 && = 52
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el numero de particiones para el conjunto de 5 elementos es 52

7) Pendiente Si $R_1, R_2$ son relaciones de equivalencia en $A$

   a) Pruebe que $R_1 \cap R_2$ también es de equivalencia.

   b) Dé un contraejemplo para hacer ver que en general $R_1 \cup R_2$ no es una relación de equivalencia.

9) Definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación

$$(x, y)R(u, v) \iff (\exists m, n \in \mathbb{Z})(x = u + m \land y = v + n)$$

   a) Demuestre que es de equivalencia.

   ***Demostración:***

   - Simetría: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x + 0$ y $y = y + 0$. Por lo tanto $(x, y)R(x, y)$
   - Reflexividad: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Tal que $(x, y)R(u, v)$

     Existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = u + m$ y $y = v + n$.

     Como $u = x + (-m)$ y $v = y + (-n)$, entonces $(u, v)R(x, y)$
   - Transitividad: Sean $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Tal que $(x, y)R(u, v)$ y $(u, v)R(a, b)$

     Como $(x, y)R(u, v)$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = u + k_1$ y $y = v + k_2$

     Como $(u, v)R(a, b)$, existen $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tal que $u = a + k_3$ y $v = b + k_4$

$$x + u = u + k_1 + a + k_3 \qquad y + v = v + k_2 + b + k_4$$
$$x = a + (k_1 + k_3) \qquad y = b + (k_2 + k_4)$$

Por lo tanto $(x, y)R(a, b)$

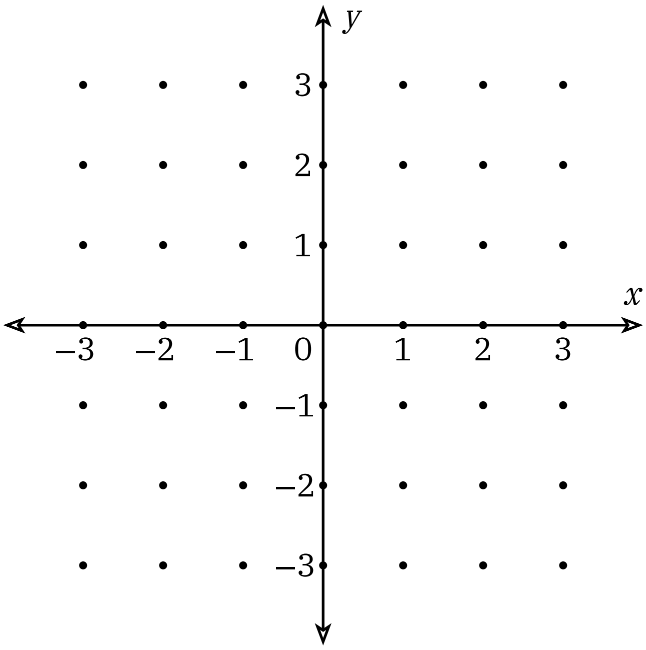
□

b) Localice en un gráfico $[(0,0)]_R$ y $\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R$

- Para $[(0,0)]_R$ tenemos que:

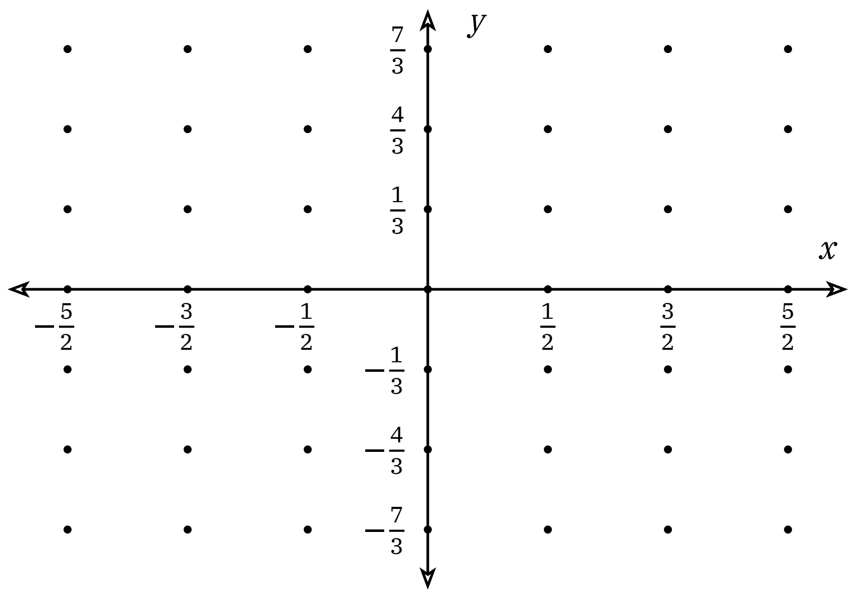
$$\begin{aligned}[(0,0)]_R &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R(0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = m \wedge y = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{(m,n) : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(0,0), (-1,0), (0,1), (-1,-1), (1,1), \ldots\}\end{aligned}$$

Por lo tanto la gráfica son todos los puntos enteros en el plano.




- Para $\left[\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right]_R$, primero expresamos $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y)R\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2} + m \wedge y = 3 + \frac{1}{3} + n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{3} + n\right) : m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \ldots\right\}\end{aligned}$$




c) Pendiente Pruebe que toda pareja ordenada $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ es equivalente según $R$ con un único punto de $[0, 1) \times [0, 1)$

11) Considere en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo $m$

a) Demuestre que nunca dos elementos del conjunto $\{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ pueden ser congruentes entre si módulo $m$.

***Demostración:***

Sea $m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$
Sea $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ tal que $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$

Por definición de congruencia $m|(a - b)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a - b = mk$$

Como $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$, entonces $|a - b| \leq m - 1$. Si $k \neq 0$, entonces $|km| \geq m$, lo que es una contradicción. Por tanto $k = 0$, entonces $a - b = 0$ , se sigue $a = b$

Concluyendo si $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ solo pueden ser congruentes entre si modulo $m$, si $a = b$ $\square$

b) Pruebe que todo entero es congruente módulo $m$ con un único elemento del conjunto $\{0, 1, 2, ..., m - 1\}$

***Demostración:***

Sea $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$

- **Existencia:**

  Por algoritmo de la division existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

  Como $a - r = mq$, entonces $m|(a - r)$, se sigue que $a \equiv r (\mathrm{mod}\, m)$.

Entonces todo entero $a$ es congruente modulo $m$ con algún elemento $r$ del conjunto $\{0, 1, ..., m-1\}$

- **Unicidad:** Supongamos $r, s \in \{0, 1, ..., m-1\}$, y también $a \equiv r (\bmod m)$ y $a \equiv s (\bmod m)$

$$a \equiv r (\bmod m) \implies m | (a - r) \implies a - r = mk_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$a \equiv s (\bmod m) \implies m | (a - s) \implies a - s = mk_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Restando $(a - s) - (a - r) = mk_2 - mk_1$, tenemos $r - s = m(k_2 - k_1)$

Como $r, s \in \{0, 1, ..., m-1\}$, entonces $|r - s| \leq m - 1$. Si $k_2 - k_1 \neq 0$, entonces $|m(k_2 - k_1)| \geq m$, lo cual es una contradicción. Por tanto $k_2 - k_1 = 0$, entonces $r - s = 0$, concluyendo $r = s$

Por lo tanto todo entero $a$ es congruente modulo $m$ con un único elemento del conjunto $\{0, 1, ..., m-1\}$ □

c) Deduzca de $(a)$ y $(b)$ que

$$\mathbb{Z}/(m) = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$$

De (a) Se tiene que dos elementos distintos de $\{0, 1, ..., m-1\}$ no son congruentes modulo $m$ entre si. Por lo tanto las clases de equivalencia $[0], [1], ..., [m-1]$ son distintas.

De (b) Se tiene que todo $a \in \mathbb{Z}$ es congruente modulo $m$ con un único elemento de $\{0, 1, ..., m-1\}$. Por lo tanto cada entero perteneces a una única de estas clases

Cada clase $[r]$ contiene todos los enteros congruentes con $r$

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv r (\bmod m)\} = \{k \in \mathbb{Z} : r + mk\}$$

Por lo tanto el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/(m) = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$$