

# Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron  
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez  
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
2025-11-06

## 1. Taller

Desarrollar ejercicios 2,4,7,9,11 del Libro *Introducción a la Teoría de Conjuntos* - Muñoz J. sección 3.6 pagina 115.

2) Pruebe que en  $\mathbb{R}$  la relación

$$xRy \iff \sin(x - y) = 0$$

es de equivalencia. Halle para esta relación las clases de equivalencias de los reales  $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, a$

### **Demostración:**

- Simetría: Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Como

$$\sin(x - x) = \sin(0) = 0$$

Por lo tanto  $xRx$

- Reflexividad: Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Tal que  $xRy$ . Como  $xRy$

$$\sin(x - y) = \sin(-(y - x)) = -\sin(y - x) = -0 = 0$$

Tenemos que  $\sin(y - x) = 0$ , Por lo tanto  $yRx$

- Transitividad: Sean  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Tal que  $xRy$  y  $yRz$ .

Como  $\sin(\theta) = 0$  cuando  $\theta = k\pi$  para algun entero  $k$ . Entonces

$$xRy \implies \sin(x - y) = 0 \implies x - y = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$yRz \implies \sin(y - z) = 0 \implies y - z = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Sumando

$$x - y + y - z = n\pi + m\pi$$

$$x - z = \pi(n + m)$$

Entonces  $\sin(x - z) = 0$ , Por lo tanto  $xRz$

Por lo tanto  $R$  es una relación de equivalencia. □

- Hallar  $[a]_R$

$$[a]_R = \{x \in \mathbb{R} : xRa\}$$

Como  $\sin(x - a) = 0$  cuando  $x - a = k\pi$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$x = a + (-k)\pi, \text{ como } k \text{ es cualquier entero } x = a + k\pi$$

$$\text{Por lo tanto } [a]_R = \{k \in \mathbb{Z} : a + k\pi\}$$

- Hallar  $[0]_R$

$$[0]_R = \{k \in \mathbb{Z} : 0 + k\pi\} = \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$$

- Hallar  $\left[\frac{\pi}{2}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]_R = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \left\{\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\right\}$$

- Hallar  $\left[\frac{\pi}{4}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{4}\right] = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} = \left\{\dots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots\right\}$$

- 4) a) Halle el numero de particiones que existen para un conjunto con 4 elementos

Sea  $A = \{a, b, c, d\}$

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

$$P_2 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$$

$$P_3 = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$$

$$P_4 = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$$

$$P_5 = \{\{b\}, \{c\}, \{a, d\}\}$$

$$P_6 = \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}$$

$$P_7 = \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$$

$$P_8 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$$

$$P_9 = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}$$

$$P_{10} = \{\{c\}, \{a, b, d\}\}$$

$$P_{11} = \{\{d\}, \{a, b, c\}\}$$

$$P_{12} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$$

$$P_{13} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$$

$$P_{14} = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$$

$$P_{15} = \{\{a, b, c, d\}\}$$

Por tanto existen 15 particiones para un conjunto con 4 elementos

- b) Idéntico para un conjunto con 5 elementos

**DUDA:** puedo utilizar los números de Bell o debo hacerlo por una relación de orden

Para esto podemos utilizar los números de Bell los cuales se calculan por

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad B_0 = 1$$

En el caso de las particiones para un conjunto de 5 elementos encontramos el quinto numero de Bell

$$B_0 = 1 \quad = 1$$

$$B_1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} B_k = \binom{0}{0} B_0 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$B_2 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} B_k = \binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$B_3 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} B_k = \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$B_4 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} B_k = \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15$$

$$B_5 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} B_k = \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{4} B_4 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 52$$

Por lo tanto el numero de particiones para el conjunto de 5 elementos es 52

7) **Pendiente** Si  $R_1, R_2$  son relaciones de equivalencia en  $A$

- Pruebe que  $R_1 \cap R_2$  también es de equivalencia.
- Dé un contraejemplo para hacer ver que en general  $R_1 \cup R_2$  no es una relación de equivalencia.

9) Definimos en  $\mathbb{R}^2$  la relación

$$(x, y)R(u, v) \iff (\exists m, n \in \mathbb{Z})(x = u + m \wedge y = v + n)$$

a) Demuestre que es de equivalencia.

**Demostración:**

- Simetría: Sea  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Existe  $0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = x + 0$  y  $y = y + 0$ . Por lo tanto  $(x, y)R(x, y)$
- Reflexividad: Sean  $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Tal que  $(x, y)R(u, v)$   
Existen  $m, n \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = u + m$  y  $y = v + n$ .  
Como  $u = x + (-m)$  y  $v = y + (-n)$ , entonces  $(u, v)R(x, y)$
- Transitividad: Sean  $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Tal que  $(x, y)R(u, v)$  y  $(u, v)R(a, b)$   
Como  $(x, y)R(u, v)$ , existen  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = u + k_1$  y  $y = v + k_2$   
Como  $(u, v)R(a, b)$ , existen  $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$  tal que  $u = a + k_3$  y  $v = b + k_4$

$$x + u = u + k_1 + a + k_3$$

$$y + v = v + k_2 + b + k_4$$

$$x = a + (k_1 + k_3)$$

$$y = b + (k_2 + k_4)$$

Por lo tanto  $(x, y)R(a, b)$

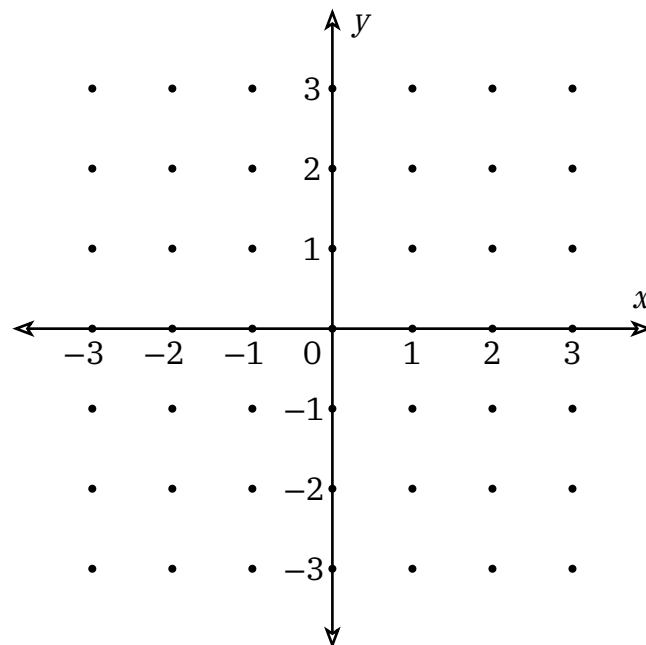
□

b) Localice en un gráfico  $[(0, 0)]_R$  y  $\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R$

• Para  $[(0, 0)]_R$  tenemos que:

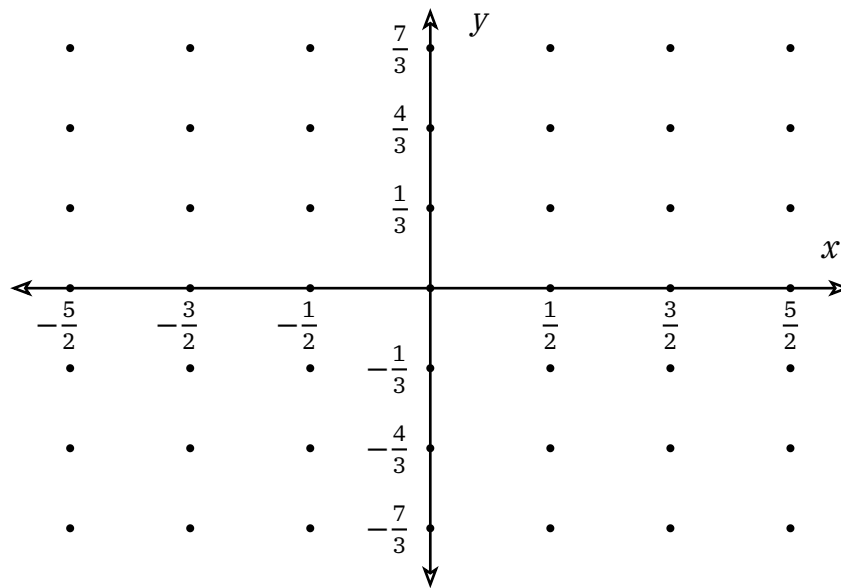
$$\begin{aligned} [(0, 0)]_R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R(0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = m \wedge y = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(0, 0), (-1, 0), (0, 1), (-1, -1), (1, 1), \dots\} \end{aligned}$$

Por lo tanto la gráfica son todos los puntos enteros en el plano.



• Para  $\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R$ , primero expresamos  $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2} + m \wedge y = 3 + \frac{1}{3} + n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{3} + n\right) : m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \dots\right\} \end{aligned}$$



c) **Pendiente** Pruebe que toda pareja ordenada  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  es equivalente según  $R$  con un único punto de  $[0, 1) \times [0, 1)$

11) **Pendiente** Considere en  $\mathbb{Z}$  la relación de congruencia módulo  $m$

- Demuestre que nunca dos elementos del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  pueden ser congruentes entre si módulo  $m$ .
- Pruebe que todo entero es congruente módulo  $m$  con un único elemento del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$
- Deduzca de (b) y (c) que

$$\mathbb{Z}/(m) = \{[0], [1], [2], \dots, [m-1]\}$$