Parcial 1.2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron
20251167009

Diego Andrés Capera Saenz
20251167019

Carlos Andres Giraldo Hernandez

Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025-10-16

1. Taller

1) Defina MCM de dos números y explique la importancia de la necesidad de las hipótesis.

***Definición** (Mínimo Común Múltiplo):*

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, ambos diferentes de cero, se tiene un múltiplo común c, si $a|c$ y $b|c$. El menor de los múltiplos comunes positivos recibe el nombre de *mínimo común múltiplo*, y se denota por $[a, b]$

Podemos identificar dos hipótesis principales:

i) Se toman a y b distintos de cero.

Si se toma $a = 0$. El único múltiplo de a es 0, por lo tanto limitaría los múltiplos comunes de a, b solamente a $\{0\}$, pero 0 no es positivo por lo tanto no cumpliría la segunda hipótesis, entonces no se tendría un mínimo común múltiplo.

«El razonamiento es análogo para $b = 0$»

ii) Se toma el menor de los múltiplos comunes **positivos**:

Esto se debe a que el conjunto de múltiplos comunes de a, b tiene una cantidad infinita de enteros positivos y negativos, Si no se limita a los positivos no abría un menor ya que el conjunto se extiende hasta $-\infty$

2) Ejemplifique y demuestre el método usado.

Ejemplo:

$$[15, 20] = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$$
$$15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$
$$20 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$$

***Demostración** (MCM por descomposición en factores primos):*

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ ambos distintos de cero, por Teorema Fundamental de la Aritmética:

$|a| = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$ $\quad |b| = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\beta_i}$ $\quad$ Donde P_i son primos y $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Sea $m = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Para que $[a, b] = m$, se debe cumplir:

1) $a|m$ y $b|m$

Fijamos un primo P_i.

- para a el exponente de P_i es α_i
- para b el exponente de P_i es β_i
- para m el exponente de P_i es $\max(\alpha_i, \beta_i)$

Como $\alpha_i \leq \max(\alpha_i, \beta_i)$, entonces $P_i^{\alpha_i} \mid P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$

Como $\beta_i \leq \max(\alpha_i, \beta_i)$, entonces $P_i^{\beta_i} \mid P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

Ademas esto se tiene para cada P_i, entonces:

$$\begin{matrix} \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i} \mid \prod_{i=0}^{n} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} & \wedge & \prod_{i=1}^{n} P_i^{\beta_i} \mid \prod_{i=0}^{n} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} \\ a|m & \wedge & b|m \end{matrix}$$

2) Para cualquier entero k si $a|k$ y $b|k$, entonces $m|k$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a|k$ y $b|k$, se toma la descomposición de k en los mismos factores primos que a, b

$$k = \prod_{i=1}^{n} \left(P_i^{\kappa_i}\right) \cdot Q$$

Con Q siendo otros posibles primos fuera de los factores de a, b

Como $a|k$, para cada i se tiene que $\alpha_i \leq \kappa_i$

Como $b|k$, para cada i se tiene que $\beta_i \leq \kappa_i$

Por lo tanto para cada i se tiene que $\max(\alpha_i, \beta_i) \leq \kappa_i$

Entonces tenemos que $P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}|P_i^{\kappa_i}$

Por lo tanto

$$\begin{matrix} \prod_{i=1}^{n} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)} \mid \prod_{i=1}^{n} P_i^{\kappa_i} \\ m \mid k \end{matrix}$$

□

3) Extienda la definición de MCM a un conjunto de n números finito.

Definición:

Sean $a_1, a_2, ..., a_n$, todos diferentes de cero. Existe $b \in \mathbb{Z}$, que es múltiplo común de todos ellos si $b|a_1, b|a_2, ..., b|a_n$. El menor de los múltiplos comunes positivos recibe el nombre de *mínimo común múltiplo* y se denota por $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

4) Realice una lista de 10 propiedades del MCM.

1) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces

$$m = [a, b] \iff \begin{cases} m > 0 \\ a|m \wedge b|m \\ \forall n : a|n \wedge b|n \implies m|n \end{cases}$$

2) Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ todos distintos de cero. Sea $b \in \mathbb{Z}$ múltiplo común de $a_1, a_2, ..., a_n$. Entonces $[a_1, a_2, ..., a_n]|b$

3) Si $m > 0$, $[ma, mb] = m[a, b]$
4) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces $[a, b] \cdot (a, b) = |ab|$
5) Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ todos distintos de cero, con $n > 2$. Entonces $[a_1, a_2, ..., a_n] = [[a_1, a_2, ..., a_{n-1}], a_n]$
6) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$
7) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces a y b son primos relativos si y solo si $[a, b] = |ab|$
8)

5) Demuestre cada una de las propiedades anteriores.