

# Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron  
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez  
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
2025-11-06

## 2. Divisibilidad

### 2.5. Mínimo Común Múltiplo

**Ejercicios:**

- 3) Probar que  $(a, b) = (a + b, [a, b])$

**Demostración:**

Sea  $d = (a, b)$ , entonces  $a = dx$  y  $b = dy$ , con  $(x, y) = 1$ . Luego

- $a + b = dx + dy = d(x + y)$
- $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)} = \frac{dxdy}{d} = dx y$

Entonces  $(a + b, [a, b]) = (d(x + y), dx y) = d(x + y, xy)$

Sea  $p$  un primo divisor común de  $x + y$  y  $xy$

Luego  $p|x'y$ , entonces  $p|x$  o  $p|y$

Supongamos  $p|x$ , como  $p|(x + y)$  y  $p|x$ , luego  $p|(x + y) + (-x)$ , entonces  $p|y$

Ahora  $p|x$  y  $p|y$ , pero  $(x, y) = 1$ , esto solo se cumple en caso de  $p = 1$ , por tanto no hay un primo divisor común de  $x + y$  y  $xy$ , entonces  $(x + y, xy) = 1$

Retomando

$$(a + b, [a, b]) = d(x + y, xy) = d = (a, b)$$

□

- 5) Si  $k$  es múltiplo de  $a$  y  $b$ , probar que

$$\frac{|k|}{\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)} = [a, b]$$

**Demostración:**

Como  $k$  es múltiplo de  $a$  y  $b$ , entonces existen  $m, n \in \mathbb{Z}$  tal que  $k = am = bn$

$$a = \frac{k}{m} \wedge b = \frac{k}{n} \text{ tambien } m = \frac{k}{a} \wedge n = \frac{k}{b}$$

Sabemos que  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$ , reemplazando  $a$  y  $b$

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} = \frac{\left|\frac{k}{m} \cdot \frac{k}{n}\right|}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)} = \frac{\left|k \cdot \frac{k}{mn}\right|}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)} = \frac{\left|k\right|}{\left|\frac{mn}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)}\right|} = \frac{\left|k\right|}{\left|\frac{mn}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)}\right|}$$

Tenemos que  $\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right) = \left(\left|\frac{k}{m}\right|, \left|\frac{k}{n}\right|\right)$ , además  $\left|\frac{mn}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)}\right|$  es un entero positivo por lo que lo podemos multiplicar dentro

$$\left(\left|\frac{k}{m}\right| \left|\frac{mn}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)}\right|, \left|\frac{k}{n}\right| \left|\frac{mn}{\left(\frac{k}{m}, \frac{k}{n}\right)}\right|\right) = \left(\frac{kmn}{m^2}, \frac{kmn}{n^2}\right) = (|m|, |n|) = (m, n) = \left(\frac{k}{b}, \frac{k}{a}\right)$$

Por lo tanto  $[a, b] = \frac{|k|}{\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)}$

□

- 7) Sean  $d$  y  $g$  enteros positivos. Probar que existen enteros  $a$  y  $b$  tales que  $(a, b) = d$  y  $[a, b] = g$  si y solo si  $d|g$

**Demostración:**

- $\Leftarrow \Rightarrow (d, g \in \mathbb{Z}^+) (\exists a, b \in \mathbb{Z}) ((a, b) = d \wedge [a, b] = g \Rightarrow d|g)$

Como  $(a, b) = d$ , entonces  $d|a$  y  $d|b$

Como  $[a, b] = g$ , entonces  $a|g$  y  $b|g$

Luego  $d|a$  y  $a|g$ , por tanto  $d|g$

- $\Leftarrow \Rightarrow (d, g \in \mathbb{Z}^+) (d|g \Rightarrow (\exists a, b \in \mathbb{Z}) ((a, b) = d \wedge [a, b] = g))$

Como  $d|g$ , existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $g = dk$

Sea  $a = d$  y  $b = g$

$$(a, b) = (d, g) = (d, dk)$$

Como para cualquier  $x, n \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $(x, xn) = x$ , luego

$$(a, b) = (d, dk) = d$$

Entonces

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} = \frac{|d^2k|}{d} = |dk| = g$$

□

- 10) Hallar enteros  $a$  y  $b$  tales que  $a + b = 216$  y  $[a, b] = 480$

**Solución:**

Tomemos  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ , ya que  $(a, b) = (-a, -b)$

Sea  $d = (a, b)$ , entonces  $d|a$  y  $d|b$ , luego  $d|a + b$

Expresamos  $a = dx$  y  $b = dy$  con  $(x, y) = 1$

Luego

- $a + b = dx + dy = d(x + y) = 216$

$$\bullet [a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} = \frac{|dx \cdot dy|}{d} = dx y = 480$$

Como  $d|216$  y  $d|480$ , luego  $d|(216, 480)$ , entonces  $d \leq (216, 480)$ , siendo el máximo valor de  $d = (216, 480)$

Hallamos  $(216, 480)$

$$\begin{array}{r} 480 = 216 \cdot 2 + 48 \\ 216 = 48 \cdot 4 + 24 \\ 48 = 24 \cdot 2 \end{array}$$

Entonces  $d = (216, 480) = 24$ , se sigue que

$$x + y = \frac{216}{24} = 9 \quad y \quad xy = \frac{480}{24} = 20$$

Vemos que los  $x, y$  co-primos que cumplen  $x + y = 9$  y  $xy = 20$ , son

$$x = 4 \quad y = 5$$

Sustituyendo en  $a = dx$  y  $b = dy$ , tenemos

$$a = 24 \cdot 4 = 96 \quad y \quad b = 24 \cdot 5 = 120.$$

«Como la suma y multiplicación son conmutativas, así como el MCD y MCM, también se da el caso de  $a = 120$  y  $b = 96$ »

- 11) Hallar todos los números  $a$  y  $b$  que satisfacen  $(a, b) = 24$  y  $[a, b] = 1440$

**Solución:**

Sea la descomposición en factores primos de  $a$  y  $b$

$$a = \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i} \quad y \quad b = \prod_{i=1}^m p_i^{\beta_i}$$

Siendo  $p_i$  números primos, los exponentes  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}^*$  y  $n$  la cantidad de primos en la descomposición que debe ser igual para  $a$  y  $b$ .

Sabemos que

$$(a, b) = 24 = \prod_{i=1}^n p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \quad y \quad [a, b] = 1440 = \prod_{i=1}^n p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

Por tanto podemos construir diferentes  $a$  y  $b$  intercambiando los  $\alpha_i$  con los  $\beta_i$  en los factores primos, ya que se mantendría los mismos  $\min$  y  $\max$

Descomponemos 24 y 1440

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \end{array}$$