Teoria de Numeros

Christian Cardenas

Table of Contents

Información

Profesor: Carlos Andres Giraldo Hernandez

Notas:

Corte 1		
Taller	10%	?
Quiz	5%	11 Sep
Parcial	20%	25 Sep
Corte 2		
Taller	10%	?
Quiz	5%	16 Oct
Parcial	20%	30 Oct
Corte 3		
Parcial	30%	1 Dec

Tutorías: Jueves 10-12, Viernes 8-10 (Biblioteca)

Contenidos:
- Números Naturales
- Números Entero
- Numero Primos
- Divisibilidad
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Congruencias
- Teorema Chino del residuo
- Funciones de la Teoría de Números
- Ecuaciones Diofánticas

Bibliografía: ?
- Niven. I, Zuckerman. N, and Montgomery. H.L, An Introduction to the Theory of Numbers.
- T. Koshy, Elementary Number Theory with applications.

1. Clase 2025-08-25

1.1. Principio del buen orden | PBO

Definición 1.1 **Principio del buen orden**

Todo subconjunto no vació de los números naturales tiene mínimo

1.2. Algoritmo de la division

Algoritmo 1.2 **Algoritmo de la division**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

Ejemplo **Algoritmo 1.2**

- $-3, 7 : \quad -3 = 7(-1) + 4, \quad 0 \leq 4 < 7$
- $0, 6 : \quad 0 = 6(0) + 0, \quad 0 \leq 0 < 6$

Demostración de Algoritmo 1.2:

Sea $S = \{a - bx : x \in \mathbb{Z} \land a - bq \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}$

Comprobamos que $S \neq \emptyset$
- Si $a \geq 0$:
  Sea $x = -1$, entonces $a - b(-1) = a + b$, ahora $a + b \geq 0$, tal que $a - b(-1) \in S$
- Si $a < 0$:

$$a - ba = a(1 - b) \quad \begin{cases} b = 0 \Longrightarrow a(1 - b) = 0 \\ b > 1 \Longrightarrow 1 - b < 0 \end{cases}$$

$$1 - b < 0 \land a < 0 \Longrightarrow a(1 - b) \geq 0$$

Como $a - ba \geq 0 \Longrightarrow a - ba \in S$

Como S es un subconjunto no vació de $\mathbb{N}$ por el PBO, S tiene mínimo.
Sea $r = \min(S)$. Luego, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - bq = r \Longrightarrow a = bq + r$

Comprobamos unicidad de q, r
- Como el mínimo es único, r es único.
- Supongamos que existe $q' \in \mathbb{Z}$, tal que $a - bq' = r$

$$\left.\begin{matrix} a - bq = r \\ a - bq' = r \end{matrix}\right\} \quad a - bq = a - bq'$$

$$\begin{aligned} a - bq &= a - bq' \\ -bq &= -bq' \\ 0 &= bq - bq' \\ 0 &= b(q - q') \quad \begin{cases} b = 0 \text{ Falso} \\ q - q' = 0 \Longrightarrow \boxed{q = q'} \end{cases} \end{aligned}$$

□

1.3. Principio de inducción matemática (débil) | PIM(D)

Definición 1.3 **PIM(D)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ que satisface

1. $\overbrace{0 \in S}^{\text{Paso base}}$
2. $\overbrace{\underbrace{n \in S}_{\text{HI}} \Longrightarrow n + 1 \in S}^{\text{Paso Inductivo}}$

Entonces $S = \mathbb{N}$

Ejemplo **Definición 1.3**

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Demostración: Prueba por inducción matemática

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right\}$$

1. Paso Base

$$r^0 = 1 = \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r} = \frac{1 - r}{1 - r} \Longrightarrow 0 \in S$$

2. Paso Inductivo:

   Supongamos que $n \in S$, es decir

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{(HI)}$$

   Ahora verificamos comprobamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + r + r^2 + \ldots + r^n}_{\text{HI}} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - \cancel{r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \end{aligned}$$

   Entonces $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ □

Ejemplo **Definición 1.3**

$$3 | n^3 - n$$

Sea $S = \{ n \in \mathbb{Z} : 3 | n^3 - n \}$

1. Paso Base

   $0^3 - 0 = 0 \land 3 | 0 \Longrightarrow 0 \in S$

2. Paso Inductivo

   Supongamos que $n \in S \Longrightarrow 3 | n^3 - n$

   Verificamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 - (n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

$$\overbrace{3 | n^3 - n}^{\text{Por HI}} \land 3 | 3(n^2 - n) \Longrightarrow 3 | (n^3 - n) + 3(n^2 - n)$$

   Luego $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4

Demuestre que dadas $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ unicos tal que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

Demostración:
- Si $a \geq 0 \land$

□

Ejercicio 1.5

Porque no es posible dividir por 0 en $\mathbb{Z}$?

Demostración: *(Por contradicción)*

Supongamos que $0 | a$, para cualquier $a \in \mathbb{Z}$, entonces existe un único $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 0 \cdot b$

- Caso $a \neq 0$: entonces $a = 0 \cdot b$, pero $0 \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ "→←".
- Caso $a = 0$: entonces $0 = 0 \cdot b$ implica que b podría ser cualquier entero, entonces b no seria único "→←".

Por lo tanto $0 \nmid a$ □

Ejercicio 1.6

Demuestre que no hay enteros entre 0 y 1

Demostración: Sea $S = \{m \in \mathbb{Z} : m > 0\}$, por PBO S tiene mínimo, sea $r = \min(S)$

Si $r > 1$, entonces $r - 1 \geq 1$, por lo que $r - 1 \geq 1 > 0$, Luego $r - 1 \in S$. Pero esto contradice que r sea el minimo de S, por lo tanto $r > 1$ es falsa y debemos tener $r \leq 1$, pero como $r \in S$ implica $r > 0$, concluyendo $0 < r \leq 1$. Esto fuerza a $r = 1$

Asi 1 es el menor elemento de S; Por lo tanto no existe $n \in \mathbb{Z}$ con $0 < n < 1$. □

Ejercicio 1.7

Se definen los números F_n de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, n = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1} + 2 = F_n$$

Demostración:
- *CB:* $n = 1$

$$\begin{matrix} F_0 + 2 = \left(2^{2^0} + 1\right) + 2 = 5 \\ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 \end{matrix} \quad \Longrightarrow F_0 + 2 = F_1$$

- *PI:* Supongamos que $F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1} + 2 = F_n$

$$\begin{aligned} F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1} F_n + 2 &= (F_n - 2) F_n + 2 \\ &= (F_n)^2 - 2F_n + 2 \\ &= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} + 1 - \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} - \cancel{2} + \cancel{2} \\ &= 2^{2^n \cdot 2} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= F_{n+1} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.8

Demuestre que $54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

Demostración: Sea $S = \{ n \in \mathbb{Z} : 54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \}$
- *Caso Base:* $n = 0$

$$2^{2(0)+1} - 9(0)^2 + 3(0) - 2 = 2 - 2 = 0$$

  $54 | 0 \Longrightarrow 0 \in S$
- *Paso Inductivo:* Supongamos que $54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

$$\begin{aligned} & 2^{2(n+1)+1} - 9(n + 1)^2 + 3(n + 1) - 2 \\ &= 2^{2n+2+1} - 9(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 - 2 \\ &= 2^{2n+3} - 9n^2 - 18n - 9 + 3n + 1 \\ &= 4 \cdot 2^{2n+1} - 9n^2 - 15n - 8 \end{aligned}$$

  Por hipótesis de inducción: $2^{2n+1} = 54m + 9n^2 - 3n + 2, \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 2^{2n+1} - 9n^2 - 15n - 8 \\ &= 4(54m + 9n^2 - 3n + 2) - 9n^2 - 15n - 8 \\ &= 216m + 36n^2 - 12n + 8 - 9n^2 - 15n - 8 \\ &= 216m + 27n^2 - 27n \\ &= 216m + 27(n^2 - n) \end{aligned}$$

  Como $n^2 - n = n(n - 1)$ es par ya que es producto de dos enteros consecutivos podemos llamarlo $2k = n(n - 1)$

$$\begin{aligned} & 216m + 27(n^2 - n) \\ &= 216m + 27(2k) \\ &= 216m + 54k \\ &= 54(4m + k) \end{aligned}$$

  $54 | 2^{2(n+1)+1} - 9(n + 1)^2 + 3(n + 1) - 2 \Longrightarrow n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ □

2. Clase 2025-08-28

2.1. PBO $\iff$ PIM(D)

Teorema 2.1

El Principio del buen orden es equivalente al Principio de inducción matemática

Demostración de Teorema 2.1: PBO $\iff$ PIM(D)

1. PBO $\implies$ PIM(D): Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, tal que
   1. $0 \in S$
   2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

   Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Como S es no vació y $S \subsetneq \mathbb{N}$, S^c no es vacío, luego por PBO, S_c tiene mínimo, Sea $m = \min(S)$. Veamos que $m - 1 \in S$. Si $m - 1 \notin S \implies m - 1 \in S^c$. Como $m - 1 < m$, entonces m no seria el minimo de S_c. Luego $m - 1 \in S$.

   Por *2.* Se tiene que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$
2. PIM(D) $\implies$ PBO: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacio.

   Caso 1 ($0 \in S$): Entonces $\min(S) = 0$

   Caso 2 ($0 \notin S$): Sea $T = \{x \in \mathbb{N} : \forall s \in S, \quad x < s\} \subseteq S^c$. Como 0 es cota inferior de S y $0 \notin S$, entonces $0 \in T$, ademas $T \neq \mathbb{N}$, para T se satifase *1.* ($0 \in T$), si *2.* es satisfecho por T, entoncecs por el PIM(D) se concluye que $T = \mathbb{N}$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$

Por lo tanto PBO $\iff$ PIM(D) □

2.2. Principio de inducción matemática (general) | PIM(G)

Definición 2.2 **PIM(G)**

Sea $S \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\} = \mathbb{N} \geq k$ que satisface

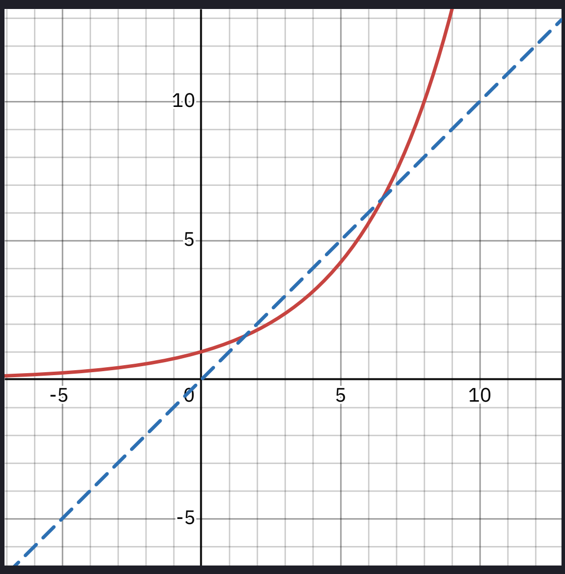
1. $k \in S$
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \ldots\}$

Ejemplo **PIM(G)**

Demuestre que $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$

n	$\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$
0	$1 > 0$
1	$1.33 > 1$
2	$1.71 \not> 2$
3	$2.37 \not> 3$
4	$3.16 \not> 4$
5	$4.21 \not> 5$
6	$5.62 \not> 6$
7	$7.49 > 7$
8	$9.99 > 8$



Demostración:

Caso Base: $n = 7$, $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \approx 7.49 > 7$

Paso Inductivo: Supongamos que $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ para $k \geq 7$ (HI)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^k > \frac{4}{3}k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{3}\right)k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + \frac{k}{3}$$

Como $k \geq 7$, entonces $\frac{k}{3} \geq \frac{7}{3} > 1$, ahora $k + \frac{k}{3} > k + 1$ por lo tanto

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + 1$$

□

2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) | PIM(F)

Definición 2.3 **PIM(F)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k + 1, k + 2, \ldots\}$ tal que

1. $k \in S$
2. Cada vez que $m \in S$, entonces $m + 1 \in S$ para $m \geq k$

Entonces $S = \mathbb{N}$

2.4. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Rubiano sección 1.3

3. Clase 2025-09-01

3.1. Sumatorias y Productorios

Tanto en las sumatorias como productorios podemos utilizar elementos de un conjuntos y tambien definir condiciones Algunos tipos de sumatorias y productorios

> **Ejemplo**
>
> Sea $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
>
> $$\sum_{\substack{x \in I \\ x \mid 12}} x = 2 + 3 = 5$$

> **Ejemplo**
>
> Sea $K = \{7, 9, 11\}$
>
> $$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i < j}} i^j = 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^{11}$$
>
> $$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i \leq j}} i^j = 7^7 \cdot 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^9 \cdot 9^{11} \cdot 11^{11}$$

3.2. Suma Telescópica

> **Definición 3.1** **Suma Telescópica**
>
> Una suma de la forma $\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$ con $n > m + 1$. Se llama suma telescópica

Demostración de la Suma Telescópica por inducción:

- *CB:* $n = m + 1$

$$\sum_{i=m+1}^{m+2} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_{m+1}} - a_m + a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}} = a_{m+2} - a_m$$

- *PI:* Supongamos que $\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=m+1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) \\ = & \sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ = & (\cancel{a_n} - a_m) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ = & a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

□

3.3. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Kochi 1.2

4. Clase 2025-09-04

4.1. Monotonía de una sucesión

Definición 4.1

Una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ es:

1. Monótona creciente si: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ...$
2. Monótona decreciente si: $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ...$

4.2. Acotamiento de una sucesión

Definición 4.2

Una sucesión es acotada si $|a_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+$

> **Nota**
>
> Una sucesión es acotada inferiormente si $a_n \geq k, k \in \mathbb{R}$

> **Nota**
>
> Una sucesión es acotada superiormente si $a_n \leq k, k \in \mathbb{R}$

4.3. Ejercicios

Ejercicio 4.3

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:

- Caso base: $x_1 = 3, x_2 = 2 - \frac{1}{3} = 1.\bar{6} \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- Paso inductivo: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, Por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{n+1} \\ \frac{1}{x_{n+1}} \geq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_{n+1}} \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ x_{n+2} \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es monótona decreciente. □

Demostración de acotamiento:

Acotamiento inferior:

- *CB:* $x_1 = 3, \quad x_1 \geq 1$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq 1$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq 1 \\ 1 \geq \frac{1}{x_n} \\ -1 \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - 1 \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 1 \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Acotamiento superior:

- *CB:* $x_1 = 3, \quad x_1 \leq 3$
- *PI:* Supongamos que $x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{3} \geq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 3 \geq 1.\bar{6} \geq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es acotada. □

Ejercicio 4.4

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}, \quad n \geq 1$$

Demostración de monotonía:

- *CB:* $x_1 = 4, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por HI

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{x+1} \\ x_n - 1 \geq x_{x+1} - 1 \\ \sqrt{x_n - 1} \geq \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ 1 + \sqrt{x_n - 1} \geq 1 + \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ x_{n+1} \geq x_{n+2} \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

Demostración de acotamiento:

- *CB:* $x_1 = 4, \quad 1 \leq x_1 \leq 5$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 5$, por HI.

$$\begin{gathered} 1 \leq x_n \leq 5 \\ 0 \leq x_n - 1 \leq 4 \\ 0 \leq \sqrt{x_n - 1} \leq 2 \\ 1 \leq 1 + \sqrt{x_n - 1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 5 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada. □

Ejercicio 4.5

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	1
2	$\sqrt{3} \approx 1.73$
3	$\sqrt{3.73} \approx 1.93$
4	$\sqrt{3.93} \approx 1.98$
5	$\sqrt{3.98} \approx 1.99$

Demostración de monotonía:

- *CB:* $x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1.73 \Longrightarrow x_1 \leq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \leq x_{n+1} \Longrightarrow 2 + x_n \leq 2 + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente □

Demostración de acotamiento:

- *CB:* $x_1 = 1, \quad 1 \leq x_1 \leq 2$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 2$, Por hipótesis de inducción

$$1 \leq x_n \leq 2 \Longrightarrow 3 \leq 2 + x_n \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4} \Longrightarrow 1.73 \leq x_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq x_{n+1} \leq 2$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

Ejercicio 4.6

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5} + x_n}, \quad n \geq 1$$

n	x_n
1	2.236
2	2.114
3	2.085
4	2.078
5	2.077

Demostración de monotonía:

- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \approx 2.23, \quad x_2 = \sqrt{\sqrt{5} + x_1} \approx 2.11 \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \geq x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{5} + x_n \geq \sqrt{5} + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \geq \sqrt{\sqrt{5} + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

Demostración de acotamiento:

- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \Longrightarrow 2 \leq x_1 \leq 3$
- *PI:* Supongamos que $2 \leq x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} 2 \leq x_n \leq 3 \\ \sqrt{5} + 2 \leq \sqrt{5} + x_n \leq \sqrt{5} + 3 \\ \sqrt{\sqrt{5} + 2} \leq \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \leq \sqrt{\sqrt{5} + 3} \\ 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \\ 2 \leq 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \leq 3 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

5. Clase 2025-09-08

Se desarrollaron Ejercicio 4.3 y Ejercicio 4.4

6. Clase 2025-09-11

6.1. Quiz

Ejercicio 6.1

Calcule el valor exacto de $\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{1023} (\log_2(n+1) - \log_2(n))\\ &= \log_2(1024) - \log_2(1)\\ &= 10 - 0\end{aligned}$$

Ejercicio 6.2

Ejercicio 1.7

Se definen los números F_n de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = \{0, 1, 2, ...\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$$

Demostración:

- *CB:* $n = 1$

$$\begin{aligned}F_0 + 2 &= \left(2^{2^0} + 1\right) + 2 = 5\\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5\end{aligned} \quad \Longrightarrow F_0 + 2 = F_1$$

- *PI:* Supongamos que $F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$

$$\begin{aligned}F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} F_n + 2 &= (F_n - 2)F_n + 2\\ &= (F_n)^2 - 2F_n + 2\\ &= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2\\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} + 1 - \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} - \cancel{2} + \cancel{2}\\ &= 2^{2^n \cdot 2} + 1\\ &= 2^{2^{n+1}} + 1\\ &= F_{n+1}\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.3

Demuestre por que por PBO 1.1 si $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq y$ o $y \geq x$

Demostración: Sean $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $\{x, y\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $\{x, y\}$ es no vació, entonces existe $m = \min(\{x, y\})$

- Caso 1: $m = x \land m = x \leq y$
- Caso 2: $m = y \land m = y \leq x$

□

7. Clase 2025-09-16

7.1. Divisibilidad

Definición 7.1 **Divisibilidad**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, decimos que a divide a b lo cual se denota por $a|b$, si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $ax = b$, también decimos que b es múltiplo de a. Si lo anterior no se tiene, decimos que a no divide a b lo cual se denota por $a \nmid b$.

En algunos contextos $a^n \| b$ significa que $a^n | b$ pero $a^{n+1} \nmid b$

Ejemplo

1. $4, 2 : 2(2) = 4 \implies 2|4$
2. $2, 8 : 2|8 \wedge 2^2|8 \implies 2 \not\| 8$
3. $3, 6 : 3|6 \wedge 3^2 \nmid 6 \implies 3\|6$

Propiedades

1. $a|b \implies a|bc, \quad \forall c \in \mathbb{Z}$
2. $a|b \wedge b|c \implies a|c$
3. $a|b \wedge a|c \implies a|(bx + cy), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$
4. $a|b \wedge b|a \implies a = \pm b$

Definición 7.2

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos $a \leq b$ si existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $a + k = b$

5. $a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0 \implies a \leq b$
6. $a|b \iff am|bm, \quad m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0:$

Demostración de propiedades:

1. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$
$$bc = axc \implies a|bc$$
□
2. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge c = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$
$$c = by = axy \implies a|c$$
□
3. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = an \wedge c = am, \quad n, m \in \mathbb{Z}$
$$bx + cy = anx + amy = a(nx + my) \implies a \mid (bx = cy)$$
□
4. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned} a = by = axy &\implies axy - a = 0 \\ &\implies a(xy - 1) = 0 \\ &\implies \begin{cases} a &= 0 \\ xy &= 1 \implies \begin{cases} x=1=y \\ x=-1=y \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$
   1. $b = a(1) \implies b = a$
   2. $b = a(-1) \implies b = -a$

   □
5. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a > 0 \wedge b > 0, \quad x \in \mathbb{Z}$

   $a > 0 \wedge b > 0 \implies x > 0$
   1. $x = 1 \implies b = a$
   2. $x \geq 2 \implies b = ax = \underbrace{a + a + ... + a}_{\text{x veces}} = a + (k - 1)a$, donde $(k - 1) > 0$, entonces

      $a < b$

   Por lo tanto $a \leq b$ □
6. ***Demostración:***
   - $a|b \implies am|bm :$ Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$
$$bm = axm = (am)x \implies am \mid bm$$
   - $am|bm \implies a|b :$ Por hipótesis $bm = amx, \quad x \in \mathbb{Z}$

     Como $m \neq 0$
$$bm = amx \implies b = ax \implies a|b$$

□

7.2. Estructuras algebraicas

Definición 7.3

Dado un conjunto no vació A, una **operación binaria** $\star$ sobre A, es una función
$$\begin{aligned} \star : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow \star(a, b) \end{aligned}$$

Notación: $\star(a, b) = a \star b$

Ejemplo

1. Suma en naturales es una operación binaria
$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$
2. Multiplicación en enteros es una operación binaria
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$
3. La suma en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ es una operación binaria
$$\begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{aligned} +_3 : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ (2, 1) &\longrightarrow 2 +_3 1 = 0 \end{aligned}$$
4. La resta en $\mathbb{N}$ no es una operación binaria
$$(\mathbb{N}, -) \quad 5 - 7 = -2$$
5. La division en $\mathbb{R}$ no es una operación binaria
$$(\mathbb{R}, \div) \quad \frac{5}{0} \text{ no esta definido}$$
6. La division en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una operación binaria
$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$$
$$\begin{aligned} \div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Definición 7.4

Sea A un conjunto no vació y $\star$ una operación binaria sobre A. Decimos que:
1. $\star$ es asociativa si:
$$(\forall x, y, z \in A)((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$$
2. $\star$ es modulativa si:
$$(\exists e \in A)(\forall x \in A)(e \star x = x \star e = x)$$
3. $\star$ es invertiva si:
$$(\forall x \in A)(\exists x' \in A)(x \star x' = e = x' \star x)$$
4. $\star$ es conmutativa si:
$$(\forall x, y \in A)(x \star y = y \star x)$$

Una pareja $(A, \star)$ se dice:
1. **Semi-grupo** si $\star$ es asociativa.
2. **Monoide** si $\star$ es asociativa y modulativa.
3. **Grupo** si $\star$ es asociativa, modulativa e invertiva.
4. **Grupo Abeliano** si $\star$ es asociativa, modulativa, invertiva y conmutativa.

8. Clase 2025-09-18

8.1. Ejemplos Estructuras Algebraicas

Ejemplo **Semi-grupos**

1. $(\mathbb{N}_{>0}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$
   √ Es asociativa $x + (y + z) = (y + x) + z$
   √ No existe e tal que $x + e = e + x = x$
2. $(A, *)$:

$$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}$$

   √ Es asociativa

$$a * (a * a) = a = (a * a) * a$$
$$a * (a * b) = a = (a * a) * b$$
$$a * (b * a) = a = (a * b) * a$$
$$b * (a * a) = b = (b * a) * a$$

   √ No existe $e \in A$ tal que $e * x = x * e = x$

$$e = a \Longrightarrow \begin{cases} a * e = a = e * a \\ b * e = b \neq a = e * b \end{cases} \Longrightarrow a \text{ no es neutro}$$

$$e = b \Longrightarrow \begin{cases} a * b = a \neq b = b * a \\ b * b = b = b * b \end{cases} \Longrightarrow b \text{ no es neutro}$$

Ejemplo **Monoides**

1. $(\mathbb{N}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$
   √ Es asociativa: $x + (y + z) = (y + x) + z$
   √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   √ No es invertiva: No existe x' tal que $x + x' = 0 = x' + x$
2. $(\mathcal{P}(A), \cup)$
   Sea $x, y \in \mathcal{P}(A)$
   √ Es asociativa: $x \cup y = y \cup x$
   √ Es modulativa: Existe $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ tal que $x \cup \varnothing = \varnothing \cup x = x$
   √ No es invertiva: No existe $x' \in \mathcal{P}(A)$ tal que $x \cup x' = \varnothing = x' \cup x$

Ejemplo **Grupos**

1. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$

Ejemplo **Grupos Abelianos**

1. $(\mathbb{Z}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   √ Es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$
   √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   √ Es invertiva: Existe x' tal que $x + x' = 0 = x' + x$
   √ Es conmutativa: $x + y = y + x$
2. $(\mathbb{R}, +)$ Sea $x, y, z \in \mathbb{R}$
   √ Es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$
   √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   √ Es invertiva: Existe x' tal que $x + x' = 0 = x' + x$
   √ Es conmutativa: $x + y = y + x$

8.2. Anillos

Definición 8.1 **Anillos**

Sea A un conjunto y $*_1, *_2$ operaciones binarias sobre A la tripla $(A, *_1, *_2)$ se dice anillo si:

1. $(A, *_1)$ es un grupo abeliano.
2. $*_2$ es asociativa.
3. Se cumple:

$$\begin{aligned}(\forall x, y \in A)(\quad & x *_2 (y *_1 z) = (x *_2 y) *_1 (x *_2 z) \land \\ & (y *_1 z) *_2 x = (y *_2 x) *_1 (z *_2 x) \quad)\end{aligned}$$

La operación $*_1$ se suele llamar **suma** y se suele denotar por $+$.
La operación $*_2$ se suele llamar **producto** y se suele denotar por $\cdot$

- Si $*_2$ es conmutativa en A, se llama **anillo conmutativo**.
- Si $*_2$ es conmutativa y modulativa en A, se llama **anillo conmutativo de identidad**.
- Si $*_2$ es invertiva en $A \setminus \{e\}$, siendo e el modulo de $*_1$, se llama **anillo de division**.
- A se dice **dominio de integridad (DI)** si cada vez que $a *_2 b = e$ se tiene que $a = e \lor b = e$

Ejemplo

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
   - $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.
   - $\cdot$ es distributivo con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - 1 es el modulo multiplicativo.
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \lor b = 0$

   $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo con identidad que es dominio de integridad**.
2. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad 2\mathbb{Z} = \text{enteros pares}$
   - $(2\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - No hay modulo multiplicativo.
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \lor b = 0$.

   $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo sin identidad que es dominio de integridad**
3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
   - $(\mathbb{R}, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - 1 es modulo multiplicativo.
   - $\cdot$ es invertiva en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ siendo 0 modulo de $+$
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \lor b = 0$.

   $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo con identidad que es de division y dominio de integridad**
4. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
   $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

   - $(\mathbb{Z}_4, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ es conmutativo.
   - No hay modulo multiplicativo.
   - No se cumple que $a \cdot b = e \Longrightarrow a = e \lor b = e$ ya que $2 \cdot 2 = 0$

   $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo sin identidad (no es DI)**.

8.3. Algoritmo de la division

Definición 8.2 **Algoritmo de la division**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} -7, 3: \quad -7 &= 3(-3) + 2, \quad 0 \leq 2 < 3 \\ 3 &= -7(0) + 3, \quad 0 \leq 3 < |-7| \end{aligned}$$

8.4. Máximo Común Divisor

Definición 8.3

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente, el **máximo común divisor** de a y b, denotado por (a, b) o $\operatorname{mcd}(a, b)$ es el mas grande de los divisores comunes de a y b. Si $(a, b) = 1$, decimos que a y b son co-primos o primos relativos.

Ejemplo

$$\begin{aligned} 14, 42: \quad & \operatorname{div}(14) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} \\ & \operatorname{div}(42) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\} \end{aligned}$$

Divisores comunes de 14 y 42 son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$

$\max\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} = 14 \Longrightarrow (14, 42) = 14$

Nota

1. $a|0$ si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = ax$

   Entonces $\operatorname{div}(0) = \mathbb{Z}$, $a|0$ porque $a \cdot \underbrace{0}_{x} = 0$

   Por ello no se puede considerar $(0, 0)$ porque los divisores comunes de 0 y 0 es $\mathbb{Z}$
2. $a \neq 0, \quad (a, 0) = |a|$

Teorema 8.4

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente, entonces existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$(a, b) = ax_0 + bx_0$$

Demostración: Sea $S = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z} \land ax + by > 0\} \subseteq \mathbb{N}$

1. Si $a \leq b$ entonces:
   - $a = b \land a > 0 \longrightarrow a(1) + b(1) \in S$
   - $a = b \land a < 0 \longrightarrow a(-1) + b(-1) \in S$
   - $a < b \longrightarrow b - a > 0 \longrightarrow a(-1) + b(1) \in S$

   «El razonamiento para $a \geq b$ es análogo.»

   Entonces S es no vació, por PBO tiene mínimo
2. Como $\min(S) \in S$, existe $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\min(S) = ax_0 + by_0$$

   $(a, b)|a \land (a, b)|b \Longrightarrow (a, b)| \min(S)$

   Como $(a, b)| \min(S) \land (a, b) > 0 \land \min(S) > 0 \Longrightarrow \boxed{(a, b) \leq \min(S)}$

   Por algoritmo de Euclídes existen q, r únicos tal que

$$a = \min(S)q + r, \quad 0 \leq r < \min(S)$$

$$\begin{aligned} r &= a - \min(S)q \\ &= a - q(ax_0 + by_0) \\ &= a - ax_0q - by_0q \\ &= a(1 - x_0q) + b(-y_0q) \end{aligned}$$

   Si $r > 0$, entonces $r \in S \Longrightarrow r \geq \min(S)$ Lo cual es una contradicción, por lo tanto $r = 0 \Longrightarrow a = \min(S)q \Longrightarrow \min(S)|a$

   «El razonamiento para $\min(S)|b$ es análogo»

   Duda: Como $\min(S)|a \land \min(S)|b \Longrightarrow \min(S)|(a, b) \Longrightarrow \min(S) \leq (a, b)$

   Por lo tanto $\min(S) \leq (a, b) \land \min(S) \geq (a, b) \Longrightarrow \min(S) = (a, b)$

□

Ejemplo

$(42, 105) = 21$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = 42(-2) + 105(1)$

$21 = 42(3) + 105(-1)$

9. Clase 2025-09-22

Se hizo demostración de Teorema 8.4