Taller

1 $\mathbb{Z}$

$-1 = 1-2 = 2-3 = 3-4$
$-2 = 1-3 = 2-4 = 3-5$

$$1-2 = 2-3 \iff 1+3 = 2+2$$

Tenga el conjunto $B = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Definimos la relación $(m,n) \sim (p,q) \iff m+q = n+p$

Compruebe si $\sim$ es equivalencia

2 $\mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \iff 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$$

Tenga el conjunto $A = \left\{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}\right\} \quad \mathbb{Z}^{\#} = \mathbb{Z} - \{0\}$

Definimos la relación $(m,n) \sim (p,q) \iff mq = np$

Compruebe si $\sim$ es equivalencia

3 Halle dominio y rango de las siguientes funciones

a $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

b $f(x) = \ln x$

c $f(x) = \cos x$

d $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Desarrollo

- R es **reflexiva** si y solo si $\forall a (a \in A \longrightarrow aRa)$
- R es **simétrica** si y solo si $\forall a \forall b (a, b \in A \wedge aRb \longrightarrow bRa)$
- R es **transitiva** si y solo si $\forall a \forall b \forall c (a, b, c \in A \wedge aRb \wedge bRc \longrightarrow aRc)$
- R es **antisimétrica** si y solo si $\forall a \forall b (a, b \in A \wedge aRb \wedge bRa \longrightarrow a = b)$

1 $B = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

$R = \{(a,b),(c,d) \in B \mid a+d = b+c\}$

✓ R es reflexiva $\iff \forall (a,b)((a,b) \in B \Longrightarrow (a,b)R(a,b))$

$$\begin{aligned} (a,b)R(a,b) &\iff a+b = b+a \\ &\iff a+b = a+b \end{aligned}$$

✓ R es simétrica $\iff \forall (a,b) \forall (c,d)((a,b),(c,d) \in B \wedge (a,b)R(c,d) \Longrightarrow (c,d)R(a,b))$

$$\begin{aligned} (a,b)R(c,d) &\iff a+d = b+c \\ &\iff d+a = c+b \\ &\iff c+b = d+a \\ &\iff (c,d)R(a,b) \end{aligned}$$

✓ R es transitiva $\iff \forall (a,b) \forall (c,d) \forall (m,n)((a,b),(c,d)(m,n) \in B \wedge (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(m,n) \Longrightarrow (a,b)R(m,n))$

$$(a,b)R(c,d) \iff a+d = b+c \tag{1}$$

$$(c,d)R(m,n) \iff c+n = d+m \tag{2}$$

Sumamos (1) y (2)

$$\begin{gathered} (a+d)+(c+n) = (b+c)+(d+m) \\ a+\cancel{d}+\cancel{c}+n = b+\cancel{c}+\cancel{d}+m \\ a+n = b+m \end{gathered} \tag{3}$$

Ahora con (3) vemos que

$$a+n = b+m \iff (a,b)R(m,n) \tag{4}$$

R es una relacion de equivalencia

□

2 $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\#}\right\} \quad \mathbb{Z}^{\#} = \mathbb{Z} - \{0\}$

$R = \{(a,b),(c,d) \in A \mid ad = bc\}$

✓ R es reflexiva $\iff \forall (a,b)((a,b) \in A \Longrightarrow (a,b)R(a,b))$

$$\begin{aligned} (a,b)R(a,b) &\iff ab = ba \\ &\iff ab = ab \end{aligned}$$

✓ R es simétrica $\iff \forall (a,b) \forall (c,d)((a,b),(c,d) \in A \wedge (a,b)R(c,d) \Longrightarrow (c,d)R(a,b))$

$$\begin{aligned} (a,b)R(c,d) &\iff ad = bc \\ &\iff da = cb \\ &\iff cb = da \\ &\iff (c,d)R(a,b) \end{aligned}$$

✓ R es transitiva $\iff \forall (a,b) \forall (c,d) \forall (m,n)((a,b),(c,d),(m,n) \in A \wedge (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(m,n) \Longrightarrow (a,b)R(m,n))$

$$(a,b)R(c,d) \iff ad = bc \tag{1}$$

$$(c,d)R(m,n) \iff cn = dm \tag{2}$$

Multiplicamos (1) y (2)

$$\begin{gathered} (ad)(cn) = (bc)(dm) \\ a\cancel{d}\cancel{c}n = b\cancel{c}\cancel{d}m \\ an = bm \end{gathered} \tag{3}$$

Ahora con (3) vemos que

$$an = bm \iff (a,b)R(m,n) \tag{4}$$

R es una relacion de equivalencia

□

3 Halle Dominio y Rango de las siguientes funciones

a $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Dominio

$$\begin{gathered} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ (x-2)(x+3) \geq 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (x-2 \geq 0 \wedge x+3 \geq 0) \vee (x-2 \leq 0 \wedge x+3 \leq 0) \\ (x \geq 2 \wedge x \geq -3) \vee (x \leq 2 \wedge x \leq -3) \\ [2,\infty) \cup (-\infty,-3] \end{gathered}$$

El dominio es $[2,\infty) \cup (-\infty,-3]$

Rango

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + x - 6} \\ y^2 &= x^2 + x - 6 \\ 0 &= x^2 + x - y^2 - 6 \end{aligned}$$

El rango es $[0,\infty)$

b $f(x) = \ln x$

Dominio

$$\begin{gathered} x > 0 \\ (0,\infty) \end{gathered}$$

El dominio es $(0,\infty)$

Rango

$$\begin{gathered} y = \ln x \\ e^y = x \end{gathered}$$

El rango es $\mathbb{R}$

c $f(x) = \cos x$

Dominio $\mathbb{R}$

Rango $[-1,1]$

d $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

Dominio

Miramos cuando se índetermina la función

$$\begin{gathered} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \end{gathered}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

Rango

Simplificamos teniendo en cuenta $x - 1 \neq 0$ osea cuando $x = 1$

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-1}{x^2-1} \\ &= \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{x+1} \\ yx + y &= 1 \\ x &= \frac{1-y}{y} \end{aligned}$$

Vemos que el en el rango no puede estar $y = 0$ y ademas excluimos el caso cuando $x = 1$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

El rango de la funcion es $\mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$