

# Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron  
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez  
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas  
2025-11-06

## 2. Divisibilidad

### 2.5. Mínimo Común Múltiplo

#### Ejercicios:

- 3) Probar que  $(a, b) = (a + b, [a, b])$
- 5) Si  $k$  es múltiplo de  $a$  y  $b$ , probar que

$$\frac{|k|}{\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)} = [a, b]$$

- 7) Sean  $d$  y  $g$  enteros positivos. Probar que existen enteros  $a$  y  $b$  tales que  $(a, b) = d$  y  $[a, b] = g$  si y solo si  $d|g$
- 10) Hallar enteros  $a$  y  $b$  tales que  $a + b = 216$  y  $[a, b] = 480$
- 11) Hallar todos los números  $a$  y  $b$  que satisfacen  $(a, b) = 24$  y  $[a, b] = 1440$

## 4. Congruencias

### 4.1. Definición y Propiedades Básicas

#### Ejercicios:

- 2) Probar que si  $ac \equiv_{cn} bc$  entonces  $a \equiv_n b$

#### Demostración:

$$\begin{aligned} ac \equiv_{cn} bc &\implies cn \mid ac - bc \\ &\implies cn \mid c(a - b) \\ &\implies n \mid a - b \implies a \equiv_n b \end{aligned}$$

□

- 4) Probar que  $3^{105} + 4^{105} \equiv_{13} 0$
- 6) Si  $p$  es un primo impar probar que:
  - a)  $1 + 2 + 3 + \dots + (p - 1) \equiv_p 0$
  - b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (p - 1)^2 \equiv_p 0$
  - c)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (p - 1)^3 \equiv_p 0$
- 8) Si  $f(x)$  es un polinomio con coeficientes enteros y  $f(a) \equiv_n k$  probar que para todo entero  $t$ ,  $f(a + tn) \equiv_n k$
- 10) Hallar el dígito de las unidades de los números  $13^{13}$  y  $(5)(7)^{29} + (8)(9)^{72}$

### 4.2. Criterios de Divisibilidad

#### Ejercicios:

- 1) Sea  $n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_k 10^k$  la representación decimal del entero positivo  $n$ . Probar que  $n$  es divisible por 11, si y solo si  $\sum_{i=0}^k (-1)^i a_i$  es divisible por 11
- 2) A partir de la relación  $10^3 \equiv_7 -1$ , deducir un criterio de Divisibilidad por 7.
- 3) Probar que  $6|n$  si y solo si  $2|n$  y  $3|n$ .
- 4) Con las notaciones del ejercicio 1, probar que  $8|n$  si y solo si  $8|(100a_2 + 10a_1 + a_0)$
- 5) Expresando los enteros positivos en el sistema de numeración con base 100, deducir un criterio de divisibilidad por 101.