Taller 2 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cardenas Baron
20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez
Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025-11-06

1. Taller

Desarrollar ejercicios 2,4,7,9,11 del Libro *Introducción a la Teoría de Conjuntos - Muñoz J.* sección 3.6 pagina 115.

2) Pruebe que en $\mathbb{R}$ la relación

$$xRy \iff \sin(x-y)=0$$

es de equivalencia. Halle para esta relación las clases de equivalencias de los reales $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, a$

Demostración:

- Simetría: Sea $x \in \mathbb{R}$. Como

$$\sin(x-x)=\sin(0)=0$$

Por lo tanto xRx

- Reflexividad: Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Tal que xRy. Como xRy

$$\sin(x-y)=\sin(-(y-x))=-\sin(y-x)=-0=0$$

Tenemos que $\sin(y-x)=0$, Por lo tanto yRx

- Transitividad: Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tal que xRy y yRz.

Como $\sin(\theta)=0$ cuando $\theta = k\pi$ para algun entero k. Entonces

$xRy \Longrightarrow \sin(x-y)=0 \Longrightarrow x-y=n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

$yRz \Longrightarrow \sin(y-z)=0 \Longrightarrow y-z=m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$

Sumando

$$\begin{aligned} x-y+y-z &= n\pi+m\pi \\ x-z &= \pi(n+m) \end{aligned}$$

Entonces $\sin(x-z)=0$, Por lo tanto xRz

Por lo tanto R es una relación de equivalencia. □

- Hallar $[a]_R$

$$[a]_R = \{x \in \mathbb{R} : xRa)\}$$

Como $\sin(x-a)=0$ cuando $x-a=k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $x = a + (-k)\pi$, como k es cualquier entero $x = a + k\pi$

Por lo tanto $[a]_R = \{k \in \mathbb{Z} : a + k\pi\}$

- Hallar $[0]_R$

$$[0]_R = \{k \in \mathbb{Z} : 0 + k\pi\} = \{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\}$$

- Hallar $\left[\frac{\pi}{2}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{2}\right]_R = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \left\{\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$$

- Hallar $\left[\frac{\pi}{4}\right]_R$

$$\left[\frac{\pi}{4}\right] = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{4} + k\pi\right\} = \left\{\ldots, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots\right\}$$

4) a) Halle el numero de particiones que existen para un conjunto con 4 elementos

Sea $A = \{a, b, c, d\}$

Particiones de 1 subconjunto

$$P_{15} = \{\{a, b, c, d\}\}$$

Particiones de 2 sub conjuntos

Tipo 1,3

$$P_8 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$$
$$P_9 = \{\{b\}, \{a, c, d\}\}$$
$$P_{10} = \{\{c\}, \{a, b, d\}\}$$
$$P_{11} = \{\{d\}, \{a, b, c\}\}$$

Tipo 2,2

$$P_{12} = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$$
$$P_{13} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$$
$$P_{14} = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$$

Particiones de 3 sub conjuntos

$$P_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$$
$$P_3 = \{\{a\}, \{c\}, \{b, d\}\}$$
$$P_4 = \{\{a\}, \{d\}, \{b, c\}\}$$
$$P_5 = \{\{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$$
$$P_6 = \{\{b\}, \{d\}, \{a, c\}\}$$
$$P_7 = \{\{c\}, \{d\}, \{a, b\}\}$$

Particiones de 4 sub conjuntos

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

Por tanto existen 15 particiones para un conjunto con 4 elementos

b) Idéntico para un conjunto con 5 elementos

El número de Bell B_n representa el numero de particiones de un conjunto con n elementos. Una forma de obtenerlo es a partir de la suma de los números de Stirling de segundo tipo

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$$

Los números de Stirling de segundo tipo $S(n, k)$, se definen como el numero de formas de particionar un conjunto de n elementos en exactamente k subconjuntos no vacíos.

Se obtiene mediante de la recurrencia

$$S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1), \qquad \begin{cases} S(0,0) = 1 \\ S(n,0) = 0, \quad n > 0 \end{cases}$$

Ademas se intuye:
- $S(n, 0) = 0$ para $n > 0$, no se puede particionar elementos en 0 conjuntos
- $S(0, k) = 0$ para $k > 0$, no se puede armar subconjuntos sin elementos
- $S(n, n) = 1$ cada elemento en su propio conjunto
- $S(n, 1) = 1$ todos los elementos en un conjunto

Demostración:

Hallemos todas las particiones de $\{1, 2, ..., n\}$ en k subconjuntos, primero particionemos $\{1, 2, ..., n-1\}$ y luego agregamos el elemento n.

Caso 1: n esta en su propio subconjunto
- Primero se particiona $\{1, 2, ..., n-1\}$ en $k-1$ subconjuntos. Hay $S(n-1, k-1)$ formas de hacerlo.
- Luego n queda en su propio subconjunto.
- El total en este caso:

$$S(n-1, k-1) \times 1 = S(n-1, k-1)$$

Caso 2: n se agrega a un subconjunto existente
- Primero se particiona $\{1, 2, n-1\}$ en k subconjuntos. Hay $S(n-1, k)$ formas de hacerlo.
- Luego se elije en cual de los k bloques se agrega n. Hay k opciones.
- El total en este caso:

$$S(n-1, k) \times k = kS(n-1, k)$$

Toda particion de $\{1, 2, ..., n\}$ en k subconjuntos cae en uno y solo uno de los casos. Por tanto, aplicando la regla de la suma.

$$S(n, k) = \underbrace{S(n-1, k-1)}_{\text{Caso 1}} + \underbrace{k \cdot S(n-1, k)}_{\text{Caso 2}}$$

□

Construimos los números de Stirling para $n = 1, 2, ..., 5$

n	$S(n,k)$
$n = 1$	$S(1,1) = 1$
$n = 2$	$S(2,1) = 1$ $S(2,2) = 1$
$n = 3$	$S(3,1) = 1$ $S(3,2) = 2 \cdot S(2,2) + S(2,1) = 2(1) + 1 = 3$ $S(3,3) = 1$
$n = 4$	$S(4,1) = 1$ $S(4,2) = 2 \cdot S(3,2) + S(3,1) = 2(3) + 1 = 7$ $S(4,3) = 3 \cdot S(3,3) + S(3,2) = 3(1) + 3 = 6$ $S(4,4) = 1$
$n = 5$	$S(5,1) = 1$ $S(5,2) = 2 \cdot S(4,2) + S(4,1) = 2(7) + 1 = 15$ $S(5,3) = 3 \cdot S(4,3) + S(4,2) = 3(6) + 7 = 25$ $S(5,4) = 4 \cdot S(4,4) + S(4,3) = 4(1) + 6 = 10$ $S(5,5) = 1$

Por lo tanto vemos que para un conjunto de 5 elementos

$$\begin{aligned} B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) &= S(5,1) + S(5,2) + S(5,3) + S(5,4) + S(5,5) \\ &= 1 + 15 + 25 + 10 + 1 \\ &= 52 \end{aligned}$$

7) Si R_1, R_2 son relaciones de equivalencia en A

a) Pruebe que $R_1 \cap R_2$ también es de equivalencia.

Demostración:

Sea A un conjunto y $R_1, R_2 \subseteq A \times A$ dos relaciones de equivalencia en A
Definimos

$$R = R_1 \cap R_2 = \{(x,y) \in A \times A : xR_1y \land xR_2y\}$$

- **Reflexividad:** Sea $x \in A$.
  Como R_1, R_2 son relaciones de equivalencia, entonces xR_1x y xR_2x.
  Por lo tanto xRx
- **Simetría:** Sean $x, y \in A$ tal que xRy.
  Entonces xR_1y y xR_2y, como R_1, R_2 son simétricas, entonces yR_1x y yR_2x. Por lo tanto yRx

- **Transitiva:** Sean $x, y, z \in A$ tal que xRy y yRz.
  Entonces xR_1y, xR_2y, yR_1z y yR_2z
  Como R_1, R_2 son transitivas entonces xR_1z y xR_2z. Por lo tanto xRz

Concluyendo $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia ◻

b) Dé un contraejemplo para hacer ver que en general $R_1 \cup R_2$ no es una relación de equivalencia.

9) Definimos en $\mathbb{R}^2$ la relación

$$(x, y)R(u, v) \iff (\exists m, n \in \mathbb{Z})(x = u + m \wedge y = v + n)$$

a) Demuestre que es de equivalencia.

Demostración:

- Simetría: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x + 0$ y $y = y + 0$.
  Por lo tanto $(x, y)R(x, y)$
- Reflexividad: Sean $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Tal que $(x, y)R(u, v)$

  Existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = u + m$ y $y = v + n$.

  Como $u = x + (-m)$ y $v = y + (-n)$, entonces $(u, v)R(x, y)$
- Transitividad: Sean $(x, y), (u, v), (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Tal que $(x, y)R(u, v)$ y $(u, v)R(a, b)$

  Como $(x, y)R(u, v)$, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = u + k_1$ y $y = v + k_2$

  Como $(u, v)R(a, b)$, existen $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tal que $u = a + k_3$ y $v = b + k_4$

$$\begin{aligned} x + u &= u + k_1 + a + k_3 \\ x &= a + (k_1 + k_3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y + v &= v + k_2 + b + k_4 \\ y &= b + (k_2 + k_4) \end{aligned}$$

  Por lo tanto $(x, y)R(a, b)$

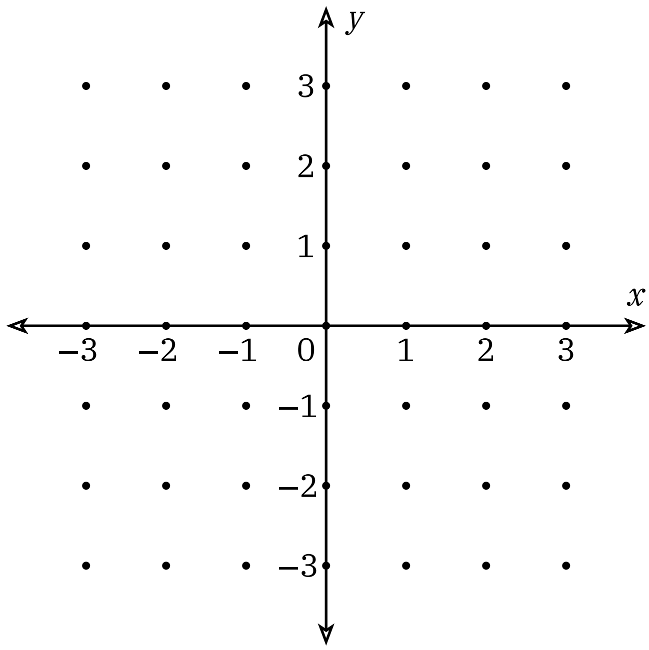
◻

b) Localice en un gráfico $[(0, 0)]_R$ y $\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R$

- Para $[(0, 0)]_R$ tenemos que:

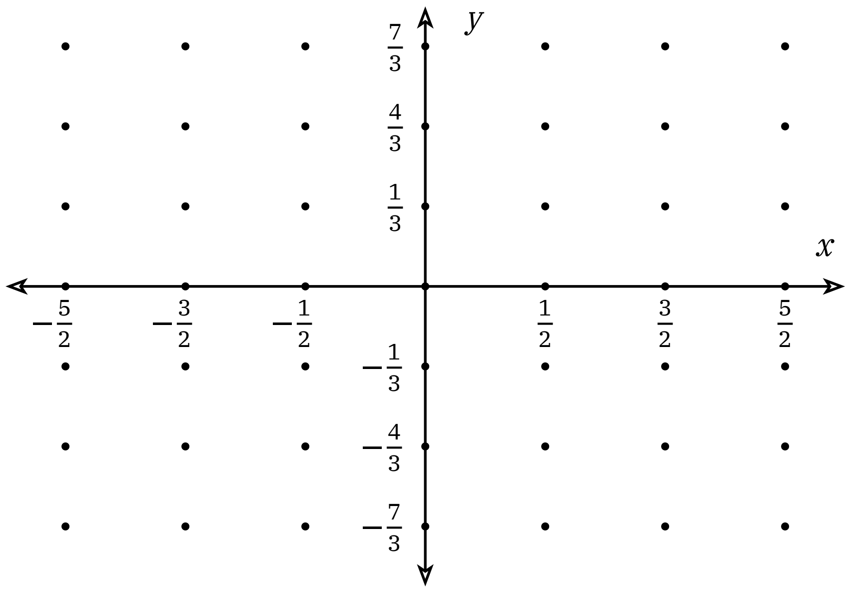
$$\begin{aligned} [(0, 0)]_R &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)R(0, 0)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = m \wedge y = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(0, 0), (-1, 0), (0, 1), (-1, -1), (1, 1), ...\} \end{aligned}$$

Por lo tanto la gráfica son todos los puntos enteros en el plano.



- Para $\left[\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right]_R$, primero expresamos $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right]_R &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) R \left(\frac{1}{2}, \frac{10}{3}\right)\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2} + m \wedge y = 3 + \frac{1}{3} + n, \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{3} + n\right) : m, n \in \mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right), \ldots\right\}
\end{aligned}$$



c) Pruebe que toda pareja ordenada (x, y) de $\mathbb{R}^2$ es equivalente según R con un único punto de $[0, 1) \times [0, 1)$

Demostración:

- **Existencia:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$, sean $m = \lfloor x \rfloor$ y $n = \lfloor y \rfloor$,

  Entonces $x' = x - m$ satisface $0 \leq x' < 1$
  También $y' = y - n$ satisface $0 \leq y' < 1$.

  Entonces:
  - $m, n \in \mathbb{Z}$, por definición de parte entera.
  - $x = x' + m$ y $y = y' + n$, Luego $(x, y)R(x', y')$
  - $(x', y') \in [0, 1) \times [0, 1)$
- **Unicidad:** Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [0, 1) \times [0, 1)$ tales que $(x, y)R(x_1, y_1)$ y $(x, y)R(x_2, y_2)$.

  Por simetría y transitividad $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ con

  $$x_1 = x_2 + m \quad y_1 = y_2 + n$$

  Como $0 \leq x_1 < 1$ y $0 \leq x_2 < 1$, entonces $x_1 - x_2 = m$ debe estar en $(-1, 1)$. Como $m \in \mathbb{Z}$ y el único entero en el intervalo $(-1, 1)$ es 0, entonces $m = 0 = x_1 - x_2$. Por lo tanto $x_1 = x_2$. «Analógicamente para $y_1 = y_2$»

□

11) Considere en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo m

   a) Demuestre que nunca dos elementos del conjunto $\{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ pueden ser congruentes entre si módulo m.

   Demostración:

   Sea $m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$
   Sea $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ tal que $a \equiv b (\text{mod } m)$

   Por definición de congruencia $m|(a - b)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$a - b = mk$$

   Como $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$, entonces $|a - b| \leq m - 1$. Si $k \neq 0$, entonces $|km| \geq m$, lo que es una contradicción. Por tanto $k = 0$, entonces $a - b = 0$, se sigue $a = b$

   Concluyendo si $a, b \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ solo pueden ser congruentes entre si modulo m, si $a = b$ □

   b) Pruebe que todo entero es congruente módulo m con un único elemento del conjunto $\{0, 1, 2, ..., m - 1\}$

   Demostración:

   Sea $a, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$
   - **Existencia:**

Por algoritmo de la division existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m$$

Como $a - r = mq$, entonces $m|(a-r)$, se sigue que $a \equiv r (\operatorname{mod} m)$.

Entonces todo entero a es congruente modulo m con algún elemento r del conjunto $\{0, 1, ..., m-1\}$

- **Unicidad:** Supongamos $r, s \in \{0, 1, ..., m-1\}$, y también $a \equiv r (\operatorname{mod} m)$ y $a \equiv s (\operatorname{mod} m)$

$$a \equiv r (\operatorname{mod} m) \implies m|(a-r) \implies a - r = mk_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$a \equiv s (\operatorname{mod} m) \implies m|(a-s) \implies a - s = mk_2, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

Restando $(a-s) - (a-r) = mk_2 - mk_1$, tenemos $r - s = m(k_2 - k_1)$

Como $r, s \in \{0, 1, ..., m-1\}$, entonces $|r - s| \leq m - 1$. Si $k_2 - k_1 \neq 0$, entonces $|m(k_2 - k_1)| \geq m$, lo cual es una contradicción. Por tanto $k_2 - k_1 = 0$, entonces $r - s = 0$, concluyendo $r = s$

Por lo tanto todo entero a es congruente modulo m con un único elemento del conjunto $\{0, 1, ..., m-1\}$ □

c) Deduzca de (a) y (b) que

$$\mathbb{Z}/(m) = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$$

De (a) Se tiene que dos elementos distintos de $\{0, 1, ..., m-1\}$ no son congruentes modulo m entre si. Por lo tanto las clases de equivalencia $[0], [1], ..., [m-1]$ son distintas.

De (b) Se tiene que todo $a \in \mathbb{Z}$ es congruente modulo m con un único elemento de $\{0, 1, ..., m-1\}$. Por lo tanto cada entero perteneces a una única de estas clases

Cada clase $[r]$ contiene todos los enteros congruentes con r

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv r (\operatorname{mod} m)\} = \{k \in \mathbb{Z} : r + mk\}$$

Por lo tanto el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/(m) = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$$