Taller

Rectas

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,3)$ y $B(4,7)$.
2. Data la ecuación de la recta $3x - 4y + 12 = 0$, determina la pendiente y la ordenada al origen.
3. Halle los puntos de intersección de la recta $y = 2x + 1$ con los ejes x e y con la recta $3x + y - 5 = 0$.
4. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vertices del triangulo $A(-2,3)$, $B(4,-3)$ y $C(8,1)$. Que tipo de triangulo es? Justifique su respuesta.
5. Halle las ecuaciones de las alturas, de las medianas y de las mediatrices del triangulo del punto 4.

Parábolas

1. Hallar la ecuación de la parabola con vértice en $(1,-2)$ que abre hacia arriba y pasa por el punto $(2,1)$.
2. Dada la ecuación $y = 2(x-3)^2 + 5$, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola.
3. Encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 8x + 4y + 5 = 0$.
4. Halla los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $y = 2x$.
5. Halle la ecuación de la parabola que contiene los puntos $(-2,-3)$, $(1,2)$ y $(5,7)$, con directriz paralela al eje y.

Elipses

1. Halle la ecuación de la elipse con centro en $(-1,4)$, semiejes de longitud 4 y 3.
2. Dada la elipse $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{9} = 1$, determine las coordenadas de los extremos de los ejes y los focos.
3. Halle los puntos de intersección entre la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x + y = 4$.
4. Escribe la ecuación de la elipse $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ en su forma general. Dibuje la cónica.

Hipérbolas

1. Halle la ecuación de la hipérbola con centro en $(0,0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.
2. Dada la hipérbola $\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{(y+6)^2}{16} = 1$, determina las coordenadas de los focos, los vertices y las ecuaciones de las asíntotas.
3. Halla los puntos de intersección entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta $y = x - 1$.
4. Escribe la ecuación de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ en su forma estándar.

Desarrollo

Recta

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$.

   Encontramos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{7 - 3}{4 - 2}$$
$$m = \frac{4}{2}$$
$$m = 2$$

   Ahora con punto pendiente obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = 2(x - 2)$$
$$y - 3 = 2x - 4$$
$$-2x + y + 1 = 0$$

□

2. Data la ecuación de la recta $3x - 4y + 12 = 0$, determina la pendiente y la ordenada al origen.

   Expresamos la ecuación en forma Pendiente-Ordenada al origen

$$3x - 4y + 12 = 0$$
$$-4y = -3x - 12$$
$$4y = 3x + 12$$
$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

   Tenemos que la pendiente $m = \frac{3}{4}$ y la ordenada al origen $b = 3$

□

3. Halle los puntos de intersección de la recta $y = 2x + 1$ con los ejes x e y con la recta $3x + y - 5 = 0$.

   Remplazamos $x = 0$

$$y = 2(0) + 1$$
$$y = 1$$

   Punto de intersección en eje x $(0, 1)$

   Remplazamos $y = 0$

$$0 = 2x + 1$$
$$-\frac{1}{2} = x$$

   Punto de intersección en eje y $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

   Para la intersección de ambas rectas resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

Por igualación en y

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -3x + 5 \\ 5x &= 4 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Remplazamos x en alguna de las ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1 \\ y &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Punto de intersección entre las rectas es $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

4. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vertices del triangulo $A(-2, 3)$, $B(4, -3)$ y $C(8, 1)$. Que tipo de triangulo es? Justifique su respuesta.

   i. Recta A, B

      Pendiente:

      $$m = \frac{-3 - 3}{4 - (-2)} = -\frac{6}{6} = -1$$

      Ecuación General:

      $$\begin{aligned} y - 3 &= -1(x - (-2)) \\ y - 3 &= -x - 2 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   ii. Recta A, C

      Pendiente:

      $$m = \frac{1 - 3}{8 - (-2)} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

      Ecuación General:

      $$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{1}{5}(x - (-2)) \\ y - 3 &= -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5}x + y - \frac{13}{5} &= 0 \end{aligned}$$

   iii. Recta B, C

      Pendiente

      $$m = \frac{1 - (-3)}{8 - 4} = \frac{4}{4} = 1$$

      Ecuación General:

$$
\begin{aligned}
y-1 &= 1(x-8) \\
y-1 &= x-8 \\
-x+y+7 &= 0
\end{aligned}
$$

Que tipo de triangulo es?

Vemos que la pendiente de la recta B, C es $m_1 = 1$
También la pendiente de la recta A, B es $m_2 = -1$

Observamos que las rectas son perpendiculares siendo ya que m_2 es el negativo del inverso multiplicativo de m_1

Por lo tanto es un triangulo rectángulo.

$\square$

5. Halle las ecuaciones de las alturas, de las medianas y de las mediatrices del triangulo del punto 4.

   Vertices del triangulo $A(-2,3), B(4,-3), C(8,1)$

   Rectas del triangulo:
   - De los vertices A, B sea $l_1 : y = -x - 1$
   - De los vertices A, C sea $l_2 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$
   - De los vertices B, C sea $l_3 : y = x - 7$

   Puntos medios:
   - De l_1 sea $M_1 = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2}\right) = (1,0)$
   - De l_2 sea $M_2 = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (3,2)$
   - De l_3 sea $M_3 = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (6,-1)$

   Alturas:

   i. Altura l_1

      Hallamos l_4 tal que $l_4 \perp l_1$ y pase por C

      Pendiente de $l_1 = -1$
      Pendiente de $l_4 = -(-1)^{-1} = 1$
      Ecuación de l_4

$$
\begin{aligned}
y-1 &= 1(x-8) \\
y-1 &= x-8 \\
y &= x-7
\end{aligned}
$$

   ii. Altura l_2

      Hallamos l_5 tal que $l_5 \perp l_2$ y pase por B

      Pendiente de $l_2 = -\frac{1}{5}$
      Pendiente de $l_5 = -\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$
      Ecuación de l_5

$$
\begin{aligned}
y-(-3) &= 5(x-4) \\
y+3 &= 5x-20 \\
y &= 5x-23
\end{aligned}
$$

iii. Altura l_3

Hallamos l_6 tal que $l_6 \perp l_3$ y pase por A

Pendiente de $l_3 = 1$
Pendiente de $l_6 = -(1)^{-1} = -1$
Ecuación l_6

$$\begin{aligned} y - 3 &= -1(x - (-2)) \\ y - 3 &= -x - 2 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

Medianas:

i. Mediana C y l_1

Hallamos l_7 que pase por los puntos C y M_1

Pendiente l_7

$$m = \frac{1 - 0}{8 - 1} = \frac{1}{7}$$

Ecuación l_7

$$\begin{aligned} y - 0 &= \frac{1}{7}(x - 1) \\ y &= \frac{1}{7}x - \frac{1}{7} \end{aligned}$$

ii. Mediana B y l_2

Hallamos l_8 que pase por los puntos B y M_2

Pendiente l_8

$$m = \frac{-3 - 2}{4 - 3} = -5$$

Ecuación l_8

$$\begin{aligned} y - 2 &= -5(x - 3) \\ y - 2 &= -5x + 15 \\ y &= -5x + 17 \end{aligned}$$

iii. Mediana A y l_3

Hallamos l_9 que pase por los puntos A y M_3

Pendiente l_9

$$m = \frac{3 - (-1)}{-2 - 6} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación l_9

$$
\begin{aligned}
y - 3 &= -\frac{1}{2}(x - (-2)) \\
y - 3 &= -\frac{1}{2}x - 1 \\
y &= -\frac{1}{2}x + 2
\end{aligned}
$$

Mediatrices:

i. Mediatriz l_1

   Hallamos l_{10} tal que $l_{10} \perp l_1$ y pase por M_1

   Pendiente de $l_1 = -1$
   Pendiente de $l_{10} = -(-1)^{-1} = 1$
   Ecuación de l_{10}

$$
\begin{aligned}
y - 0 &= 1(x - 1) \\
y &= x - 1
\end{aligned}
$$

ii. Mediatriz l_2

   Hallamos l_{11} tal que $l_{11} \perp l_2$ y pase por M_2

   Pendiente de $l_2 = -\frac{1}{5}$
   Pendiente de $l_{11} = -\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$
   Ecuación de l_{11}

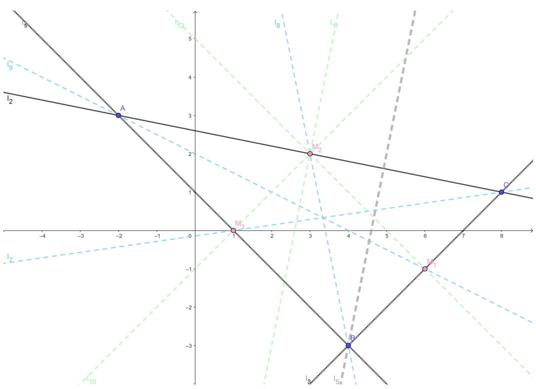
$$
\begin{aligned}
y - 2 &= 5(x - 3) \\
y - 2 &= 5x - 15 \\
y &= 5x - 13
\end{aligned}
$$

iii. Mediatriz l_3

   Hallamos l_{12} tal que $l_{12} \perp l_3$ y pase por M_3

   Pendiente de $l_3 = 1$
   Pendiente de $l_{12} = -(1)^{-1} = -1$
   Ecuación de l_{12}

$$
\begin{aligned}
y - (-1) &= -1(x - 6) \\
y + 1 &= -x + 6 \\
y &= -x + 5
\end{aligned}
$$



$\square$

Parábolas

1. Hallar la ecuación de la parabola con vértice en $(1, -2)$ que abre hacia arriba y pasa por el punto $(2, 1)$.

   Ecuación Cónica de la parabola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

   Remplazando vértice $(1, -2)$ y el punto $(2, 1)$ en la cónica

$$\begin{aligned} (2-1)^2 &= 4p(1-(-2)) \\ 1 &= 4p + 8p \\ \frac{1}{12} &= p \end{aligned}$$

   Remplazamos p y el vértice $(1, -2)$ en la cónica

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= 4\left(\frac{1}{12}\right)(y-(-2)) \\ (x-1)^2 &= \frac{1}{3}(y+2) \\ x^2 - 2x + 1 &= \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \\ x^2 - 2x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 1y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

2. Dada la ecuación $y = 2(x-3)^2 + 5$, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola.

   Expresarla de forma cónica

$$\begin{aligned} y &= 2(x-3)^2 + 5 \\ y - 5 &= 2(x-3)^2 \\ \frac{1}{2}(y-5) &= (x-3)^2 \\ (x-3)^2 &= \frac{1}{2}(y-5) \end{aligned}$$

   Hallamos p

$$4p = \frac{1}{2}; \quad p = \frac{1}{8}$$

   Vértice: $(3, 5)$
   Foco: $\left(3, 5 + \frac{1}{8}\right); \quad \left(3, \frac{41}{8}\right)$
   Directriz: $y = 5 - \frac{1}{8}; \quad y = \frac{39}{8}$

$\square$

3. Encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 8x + 4y + 5 = 0$.

   Expresamos de forma cónica la parabola

$$
\begin{aligned}
y^2 + 8x + 4y + 5 &= 0 \\
y^2 + 4y + \underline{4} &= -8x - 5 + \underline{4} \\
(y+2)^2 &= -8x - 1 \\
(y+2)^2 &= -8\left(x + \frac{1}{8}\right)
\end{aligned}
$$

Hallamos p

$$4p = -8; \quad p = -2$$

Vértice: $\left(-\frac{1}{8}, -2\right)$
Foco: $\left(-\frac{1}{8} - 2, -2\right); \quad \left(-\frac{17}{8}, -2\right)$
Directriz: $y = -\frac{1}{8} + 2; \quad y = \frac{15}{8}$

$\square$

4. Halla los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $y = 2x$.

   Igualamos las expresiones

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 &= 2x \\
x^2 - 2x - 4 &= 0
\end{aligned}
$$

   Resolvemos la cuadrática

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-4)}}{2} \\
x &= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \\
x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\
x &= 1 \pm \sqrt{5} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{5} \\ x_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases}
\end{aligned}
$$

   Remplazamos x_1 en la recta

$$
\begin{aligned}
y &= 2\left(1 + \sqrt{5}\right) \\
y &= 2 + 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

   Obtenemos el primer punto de intersección en $\left(1 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5}\right)$

   Remplazamos x_2 en la recta

$$
\begin{aligned}
y &= 2\left(1 - \sqrt{5}\right) \\
y &= 2 - 2\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

   Obtenemos el segundo punto de intersección en $\left(1 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5}\right)$

$\square$

5. Halle la ecuación de la parabola que contiene los puntos $(-2, -3)$, $(1, 2)$ y $(5, 7)$, con directriz paralela al eje y.

   Ecuación cónica de parabola horizontal $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Remplazamos $(-2,-3)$ en la cónica $x=-2 \quad y=-2$

$$\begin{aligned} (-3-k)^2 &= 4p(-2-h) \\ 9+6k+k^2 &= -8p-4ph \\ k^2+6k+4ph+8p &= -9 \end{aligned} \tag{1}$$

Remplazamos $(1,2)$ en la cónica $x=1 \quad y=2$

$$\begin{aligned} (2-k)^2 &= 4p(1-h) \\ 4-4k+k^2 &= 4p-4ph \\ k^2-4k+4ph-4p &= -4 \end{aligned} \tag{2}$$

Remplazamos $(5,7)$ en la cónica $x=5 \quad y=7$

$$\begin{aligned} (7-k)^2 &= 4p(5-h) \\ 49-14k+k^2 &= 20p-4ph \\ k^2-14k+4ph-20p &= -49 \end{aligned} \tag{3}$$

Ecuación $1 + -1 \cdot$ Ecuación 2

$$\begin{array}{l} k^2+6k+4ph+8p=-9 \\ -k^2+4k-4ph+4p=4 \\ \hline 10k+12p=-5 \end{array} \tag{4}$$

$-1 \cdot$ Ecuación 2 + Ecuación 3

$$\begin{array}{l} -k^2+4k-4ph+4p=4 \\ k^2-14k+4ph-20p=-49 \\ \hline -10k-16p=-45 \end{array} \tag{5}$$

Ecuación 4 + Ecuación 5

$$\begin{array}{l} 10k+12p=-5 \\ -10k-16p=-45 \\ \hline -4p=-50 \\ p=\dfrac{50}{4}=\dfrac{25}{2} \end{array}$$

Remplazo $p=\frac{25}{2}$ en Ecuación 4

$$\begin{aligned} 10k+12p &= -5 \\ 10k+12\left(\frac{25}{2}\right) &= -5 \\ 10k+150 &= -5 \\ 10k &= -155 \\ k &= -\frac{155}{10} = -\frac{31}{2} \end{aligned}$$

Remplazo $p=\frac{25}{2}$ y $k=-\frac{31}{2}$ en Ecuación 2

$$k^2 - 4k + 4ph - 4p = -4$$
$$\left(-\frac{31}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{31}{2}\right) + 4\left(\frac{25}{2}\right)h - 4\left(\frac{25}{2}\right) = -4$$
$$\left(-\frac{31}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{31}{2}\right) + 4\left(\frac{25}{2}\right)h - 4\left(\frac{25}{2}\right) = -4$$
$$\frac{961}{4} + 62 + 50h - 50 = -4$$
$$\frac{961}{4} + 16 = -50h$$
$$\frac{1025}{4} = -50h$$
$$-\frac{41}{8} = h$$

Remplazo $p = \frac{25}{2}$, $k = -\frac{31}{2}$ y $h = -\frac{41}{8}$ en la cónica

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$\left(y - \left(-\frac{31}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\frac{25}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{41}{8}\right)\right)$$
$$\left(y + \frac{31}{2}\right)^2 = 50\left(x + \frac{41}{8}\right)$$

Vértice: $\left(-\frac{41}{8}, -\frac{31}{2}\right)$

Foco: $\left(\frac{59}{8}, -\frac{31}{2}\right)$ $\qquad -\frac{41}{8} + \frac{25}{2} = \frac{-41+100}{8} = \frac{59}{8}$

Directriz: $x = -\frac{141}{8}$ $\qquad -\frac{41}{8} - \frac{25}{2} = \frac{-41-100}{8} = \frac{141}{8}$

$\square$

Elipses

1. Halle la ecuación de la elipse con centro en $(-1,4)$, semiejes de longitud 4 y 3.
2. Dada la elipse $\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(y-7)^2}{9}=1$, determine las coordenadas de los extremos de los ejes y los focos.
3. Halle los puntos de intersección entre la elipse $4x^2+y^2=16$ y la recta $x+y=4$.
4. Escribe la ecuación de la elipse $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ en su forma general. Dibuje la cónica.

Hipérbolas

1. Halle la ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.
2. Dada la hipérbola $\dfrac{(x-4)^2}{25} - \dfrac{(y+6)^2}{16} = 1$, determina las coordenadas de los focos, los vertices y las ecuaciones de las asíntotas.
3. Halla los puntos de intersección entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta $y = x - 1$.
4. Escribe la ecuación de la hipérbola $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ en su forma estándar.