# Teoria de Numeros

Christian Cardenas

# Table of Contents

## Información

**Profesor**: Carlos Andres Giraldo Hernandez

**Notas**:

| | | |
|---|---|---|
| Corte 1 | | |
| Taller | 10% | ? |
| Quiz | 5% | 11 Sep |
| Parcial | 20% | 25 Sep |
| Corte 2 | | |
| Taller | 10% | ? |
| Quiz | 5% | 16 Oct |
| Parcial | 20% | 30 Oct |
| Corte 3 | | |
| Parcial | 30% | 1 Dec |

**Tutorías**: Jueves 10-12, Viernes 8-10 (Biblioteca)

**Contenidos**:
- Números Naturales
- Números Entero
- Numero Primos
- Divisibilidad
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Congruencias
- Teorema Chino del residuo
- Funciones de la Teoría de Números
- Ecuaciones Diofánticas

**Bibliografía**: ?
- Niven. I, Zuckerman. N, and Montgomery. H.L, An Introduction to the Theory of Numbers.
- T. Koshy, Elementary Number Theory with applications.

# 1. Clase 2025-08-25

## 1.1. Principio del buen orden | PBO

**Definición 1.1** **Principio del buen orden**

Todo subconjunto no vacío de los números naturales tiene mínimo

## 1.2. Algoritmo de la division

**Algoritmo 1.2** **Algoritmo de la division**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

**Ejemplo** **Algoritmo 1.2**

- $-3, 7: \quad -3 = 7(-1) + 4, \quad 0 \leq 4 < 7$
- $0, 6: \quad 0 = 6(0) + 0, \quad 0 \leq 0 < 6$

***Demostración de Algoritmo 1.2:***

Sea $S = \{a - bx : x \in \mathbb{Z} \wedge a - bq \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}$

Comprobamos que $S \neq \emptyset$

- Si $a \geq 0$:
  Sea $x = -1$, entonces $a - b(-1) = a + b$, ahora $a + b \geq 0$, tal que $a - b(-1) \in S$
- Si $a < 0$:

$$a - ba = a(1 - b) \quad \begin{cases} b = 0 \Longrightarrow a(1 - b) = 0 \\ b > 1 \Longrightarrow 1 - b < 0 \end{cases}$$

$$1 - b < 0 \wedge a < 0 \Longrightarrow a(1 - b) \geq 0$$

Como $a - ba \geq 0 \Longrightarrow a - ba \in S$

Como $S$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ por el PBO, $S$ tiene mínimo.
Sea $r = \min(S)$. Luego, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a - bq = r \Longrightarrow a = bq + r$

Comprobamos unicidad de $q, r$

- Como el mínimo es único, $r$ es único.
- Supongamos que existe $q' \in \mathbb{Z}$, tal que $a - bq' = r$

$$\left.\begin{aligned} a - bq &= r \\ a - bq' &= r \end{aligned}\right] \quad a - bq = a - bq'$$

$$\begin{aligned} a - bq &= a - bq' \\ -bq &= -bq' \\ 0 &= bq - bq' \\ 0 &= b(q - q') \quad \begin{cases} b = 0 \text{ Falso} \\ q - q' = 0 \Longrightarrow \boxed{q = q'} \end{cases} \end{aligned}$$

□

## 1.3. Principio de inducción matemática (débil) | PIM(D)

**Definición 1.3** **PIM(D)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ que satisface

1. $\overbrace{0 \in S}^{\text{Paso base}}$
2. $\overbrace{\underbrace{n \in S}_{\text{HI}} \Longrightarrow n + 1 \in S}^{\text{Paso Inductivo}}$

Entonces $S = \mathbb{N}$

**Ejemplo** **Definición 1.3**

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

***Demostración:*** Prueba por inducción matemática

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} : 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right\}$$

1. Paso Base

$$r^0 = 1 = \frac{1 - r^{0+1}}{1 - r} = \frac{1 - r}{1 - r} \Longrightarrow 0 \in S$$

2. Paso Inductivo:

   Supongamos que $n \in S$, es decir

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{(HI)}$$

   Ahora verificamos comprobamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + r + r^2 + \ldots + r^n}_{\text{HI}} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{(n+1)+1}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - \cancel{r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \\ \frac{1 - r^{n-2}}{1 - r} &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \end{aligned}$$

   Entonces $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ □

**Ejemplo** **Definición 1.3**

$$3 | n^3 - n$$

Sea $S = \{n \in \mathbb{Z} : 3 | n^3 - n\}$

1. Paso Base

   $0^3 - 0 = 0 \wedge 3 | 0 \Longrightarrow 0 \in S$

2. Paso Inductivo

   Supongamos que $n \in S \Longrightarrow 3 | n^3 - n$

   Verificamos para $n + 1$

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 - (n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$

$$\overbrace{3 | n^3 - n}^{\text{Por HI}} \wedge 3 | 3(n^2 - n) \Longrightarrow 3 | (n^3 - n) + 3(n^2 - n)$$

   Luego $n + 1 \in S$

Por lo tanto $S = \mathbb{N}$

## 1.4. Ejercicios

**Ejercicio 1.4**

Demuestre que dadas $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ unicos tal que

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

***Demostración:***

- Si $a \geq 0 \wedge$

□

**Ejercicio 1.5**

Porque no es posible dividir por 0 en $\mathbb{Z}$?

**Ejercicio 1.6**

Demuestre que no hay enteros entre 0 y 1

**Ejercicio 1.7**

Se definen los números $F_n$ de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, n = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1} + 2 = F_n$$

**Ejercicio 1.8**

Demuestre que $54 | 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

# 2. Clase 2025-08-28

## 2.1. PBO $\iff$ PIM(D)

**Teorema 2.1**

El Principio del buen orden es equivalente al Principio de inducción matemática

***Demostración de Teorema 2.1:*** $\text{PBO} \iff \text{PIM(D)}$

1. $\text{PBO} \Longrightarrow \text{PIM(D)}$: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$, tal que
   1. $0 \in S$
   2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

   Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$. Como $S$ es no vació y $S \subsetneq \mathbb{N}$, $S^c$ no es vacío, luego por PBO, $S_c$ tiene mínimo, Sea $m = \min(S)$. Veamos que $m - 1 \in S$. Si $m - 1 \notin S \Longrightarrow m - 1 \in S^c$. Como $m - 1 < m$, entonces $m$ no seria el minimo de $S_c$. Luego $m - 1 \in S$.

   Por *2.* Se tiene que $(m - 1) + 1 = m \in S$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$
2. $\text{PIM(D)} \Longrightarrow \text{PBO}$: Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacio.

   Caso 1 ($0 \in S$): Entonces $\min(S) = 0$

   Caso 2 ($0 \notin S$): Sea $T = \{x \in \mathbb{N} : \forall s \in S, \quad x < s\} \subseteq S^c$. Como 0 es cota inferior de $S$ y $0 \notin S$, entonces $0 \in T$, ademas $T \neq \mathbb{N}$, para $T$ se satifase *1.* ($0 \in T$), si *2.* es satisfecho por $T$, entoncecs por el PIM(D) se concluye que $T = \mathbb{N}$ lo cual es una contradiccion $\rightarrow\leftarrow$

Por lo tanto $\text{PBO} \iff \text{PIM(D)}$ □

## 2.2. Principio de inducción matemática (general) | PIM(G)

**Definición 2.2** **PIM(G)**

Sea $S \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\} = \mathbb{N} \geq k$ que satisface

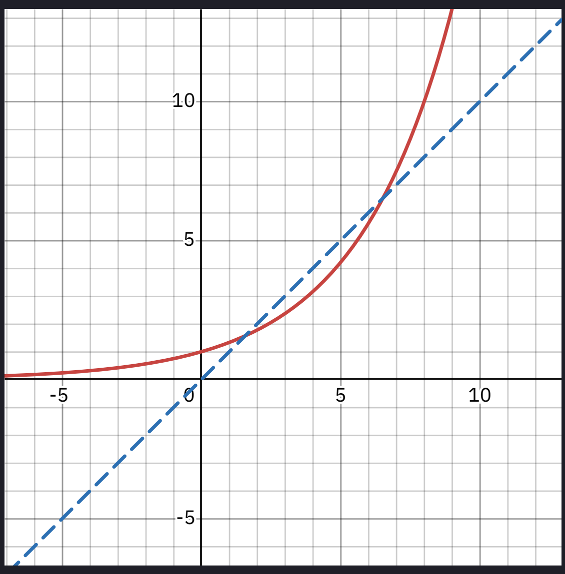
1. $k \in S$
2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, ...\}$

**Ejemplo** **PIM(G)**

Demuestre que $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$

| $n$ | $\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$ |
|---|---|
| $0$ | $1 > 0$ |
| $1$ | $1.33 > 1$ |
| $2$ | $1.71 \ngtr 2$ |
| $3$ | $2.37 \ngtr 3$ |
| $4$ | $3.16 \ngtr 4$ |
| $5$ | $4.21 \ngtr 5$ |
| $6$ | $5.62 \ngtr 6$ |
| $7$ | $7.49 > 7$ |
| $8$ | $9.99 > 8$ |




***Demostración:***

Caso Base: $n = 7$, $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \approx 7.49 > 7$

Paso Inductivo: Supongamos que $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$ para $k \geq 7$ (HI)

$$\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^k > \frac{4}{3}k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{3}\right)k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + \frac{k}{3}$$

Como $k \geq 7$, entonces $\frac{k}{3} \geq \frac{7}{3} > 1$, ahora $k + \frac{k}{3} > k + 1$ por lo tanto

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + 1$$

□

## 2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) | PIM(F)

**Definición 2.3** **PIM(F)**

Sea $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k + 1, k + 2, ...\}$ tal que

1. $k \in S$
2. Cada vez que $m \in S$, entonces $m + 1 \in S$ para $m \geq k$

Entonces $S = \mathbb{N}$

## 2.4. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Rubiano sección 1.3

# 3. Clase 2025-09-01

## 3.1. Sumatorias y Productorios

Tanto en las sumatorias como productorios podemos utilizar elementos de un conjuntos y tambien definir condiciones Algunos tipos de sumatorias y productorios

**Ejemplo**

Sea $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \mid 12}} x = 2 + 3 = 5$$

**Ejemplo**

Sea $K = \{7, 9, 11\}$

$$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i < j}} i^j = 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^{11}$$

$$\prod_{\substack{i,j \in K \\ i \leq j}} i^j = 7^7 \cdot 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^9 \cdot 9^{11} \cdot 11^{11}$$

## 3.2. Suma Telescópica

**Definición 3.1** **Suma Telescópica**

Una suma de la forma $\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$ con $n > m + 1$. Se llama suma telescópica

***Demostración de la Suma Telescópica por inducción:***

- *CB:* $n = m + 1$

$$\sum_{i=m+1}^{m+2} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_{m+1}} - a_m + a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}} = a_{m+2} - a_m$$

- *PI:* Supongamos que $\sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=m+1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} (a_i - a_{i-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (\cancel{a_n} - a_m) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

□

## 3.3. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Kochi 1.2

# 4. Clase 2025-09-04

## 4.1. Monotonía de una sucesión

**Definición 4.1**

Una sucesión $\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ...\}$ es:

1. Monótona creciente si: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq ...$
2. Monótona decreciente si: $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ...$

## 4.2. Acotamiento de una sucesión

**Definición 4.2**

Una sucesión es acotada si $|a_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+$

**Nota**

Una sucesión es acotada inferiormente si $a_n \geq k, k \in \mathbb{R}$

**Nota**

Una sucesión es acotada superiormente si $a_n \leq k, k \in \mathbb{R}$

## 4.3. Ejercicios

**Ejercicio 4.3**

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

***Demostración de monotonía:***

- Caso base: $x_1 = 3, x_2 = 2 - \frac{1}{3} = 1.\bar{6} \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- Paso inductivo: Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, Por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{n+1} \\ \frac{1}{x_{n+1}} \geq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_{n+1}} \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ x_{n+2} \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es monótona decreciente. □

***Demostración de acotamiento:***

Acotamiento inferior:

- *CB:* $x_1 = 3, \quad x_1 \geq 1$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq 1$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \geq 1 \\ 1 \geq \frac{1}{x_n} \\ -1 \leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - 1 \leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 1 \leq x_{n+1} \end{gathered}$$

Acotamiento superior:

- *CB:* $x_1 = 3, \quad x_1 \leq 3$
- *PI:* Supongamos que $x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} x_n \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{3} \geq 2 - \frac{1}{x_n} \\ 3 \geq 1.\bar{6} \geq x_{n+1} \end{gathered}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es acotada. □

**Ejercicio 4.4**

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}, \quad n \geq 1$$

***Demostración de monotonía:***

- *CB:* $x_1 = 4, \quad x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por HI

$$\begin{gathered} x_n \geq x_{x+1} \\ x_n - 1 \geq x_{x+1} - 1 \\ \sqrt{x_n - 1} \geq \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ 1 + \sqrt{x_n - 1} \geq 1 + \sqrt{x_{x+1} - 1} \\ x_{n+1} \geq x_{n+2} \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

***Demostración de acotamiento:***

- *CB:* $x_1 = 4, \quad 1 \leq x_1 \leq 5$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 5$, por HI.

$$\begin{gathered} 1 \leq x_n \leq 5 \\ 0 \leq x_n - 1 \leq 4 \\ 0 \leq \sqrt{x_n - 1} \leq 2 \\ 1 \leq 1 + \sqrt{x_n - 1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 3 \\ 1 \leq x_{n+1} \leq 5 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada. □

**Ejercicio 4.5**

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1$$

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | $\sqrt{3} \approx 1.73$ |
| 3 | $\sqrt{3.73} \approx 1.93$ |
| 4 | $\sqrt{3.93} \approx 1.98$ |
| 5 | $\sqrt{3.98} \approx 1.99$ |

***Demostración de monotonía:***

- *CB:* $x_1 = 1, \quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1.73 \Longrightarrow x_1 \leq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \leq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \leq x_{n+1} \Longrightarrow 2 + x_n \leq 2 + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente □

***Demostración de acotamiento:***

- *CB:* $x_1 = 1, \quad 1 \leq x_1 \leq 2$
- *PI:* Supongamos que $1 \leq x_n \leq 2$, Por hipótesis de inducción

$$1 \leq x_n \leq 2 \Longrightarrow 3 \leq 2 + x_n \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4} \Longrightarrow 1.73 \leq x_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq x_{n+1} \leq 2$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

**Ejercicio 4.6**

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5} + x_n}, \quad n \geq 1$$

| $n$ | $x_n$ |
|---|---|
| 1 | 2.236 |
| 2 | 2.114 |
| 3 | 2.085 |
| 4 | 2.078 |
| 5 | 2.077 |

***Demostración de monotonía:***

- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \approx 2.23, \quad x_2 = \sqrt{\sqrt{5} + x_1} \approx 2.11 \Longrightarrow x_1 \geq x_2$
- *PI:* Supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, por hipótesis de inducción

$$x_n \geq x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{5} + x_n \geq \sqrt{5} + x_{n+1} \Longrightarrow \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \geq \sqrt{\sqrt{5} + x_{n+1}} \Longrightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente □

***Demostración de acotamiento:***

- *CB:* $x_1 = \sqrt{5} \Longrightarrow 2 \leq x_1 \leq 3$
- *PI:* Supongamos que $2 \leq x_n \leq 3$, por hipótesis de inducción

$$\begin{gathered} 2 \leq x_n \leq 3 \\ \sqrt{5} + 2 \leq \sqrt{5} + x_n \leq \sqrt{5} + 3 \\ \sqrt{\sqrt{5} + 2} \leq \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \leq \sqrt{\sqrt{5} + 3} \\ 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \\ 2 \leq 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \leq 3 \end{gathered}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es acotada □

# 5. Clase 2025-09-08

Se desarrollaron Ejercicio 4.3 y Ejercicio 4.4

# 6. Clase 2025-09-11

## 6.1. Quiz

**Ejercicio 6.1**

Calcule el valor exacto de $\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{1023} (\log_2(n+1) - \log_2(n)) \\ &= \log_2(1024) - \log_2(1) \\ &= 10 - 0\end{aligned}$$

**Ejercicio 6.2**

Ejercicio 1.7

Se definen los números $F_n$ de Fermat por $F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = \{0, 1, 2, ...\}$

Demuestre que para todo $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$$

***Demostración:***

- *CB:* $n = 1$

$$\begin{aligned}F_0 + 2 &= \left(2^{2^0} + 1\right) + 2 = 5 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5\end{aligned} \implies F_0 + 2 = F_1$$

- *PI:* Supongamos que $F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} + 2 = F_n$

$$\begin{aligned}F_0 F_1 F_2 ... F_{n-1} F_n + 2 &= (F_n - 2) F_n + 2 \\ &= (F_n)^2 - 2F_n + 2 \\ &= \left(2^{2^n} + 1\right)^2 - 2\left(2^{2^n} + 1\right) + 2 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} + 1 - \cancel{2 \cdot 2^{2^n}} - \cancel{2} + \cancel{2} \\ &= 2^{2^n \cdot 2} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= F_{n+1}\end{aligned}$$

□

**Ejercicio 6.3**

Demuestre por que por PBO 1.1 si $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq y$ o $y \geq x$

***Demostración:*** Sean $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $\{x, y\} \subseteq \mathbb{N}$. Como $\{x, y\}$ es no vació, entonces existe $m = \min(\{x, y\})$

- Caso 1: $m = x \land m = x \leq y$
- Caso 2: $m = y \land m = y \leq x$

□

# 7. Clase 2025-09-16

## 7.1. Divisibilidad

**Definición 7.1** **Divisibilidad**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, decimos que $a$ divide a $b$ lo cual se denota por $a|b$, si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $ax = b$, también decimos que $b$ es múltiplo de $a$. Si lo anterior no se tiene, decimos que $a$ no divide a $b$ lo cual se denota por $a \nmid b$.

En algunos contextos $a^n \| b$ significa que $a^n | b$ pero $a^{n+1} \nmid b$

**Ejemplo**

1. $4, 2 : 2(2) = 4 \implies 2|4$
2. $2, 8 : 2|8 \wedge 2^2|8 \implies 2 \nparallel 8$
3. $3, 6 : 3|6 \wedge 3^2 \nmid 6 \implies 3\|6$

**Propiedades**

1. $a|b \implies a|bc, \quad \forall c \in \mathbb{Z}$
2. $a|b \wedge b|c \implies a|c$
3. $a|b \wedge a|c \implies a|(bx + cy), \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$
4. $a|b \wedge b|a \implies a = \pm b$

**Definición 7.2**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, decimos $a \leq b$ si existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $a + k = b$

5. $a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0 \implies a \leq b$
6. $a|b \iff am|bm, \quad m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0:$

**Demostración de propiedades:**

1. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$

$$bc = axc \implies a|bc$$

□

2. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge c = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$c = by = axy \implies a|c$$

□

3. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = an \wedge c = am, \quad n, m \in \mathbb{Z}$

$$bx + cy = anx + amy = a(nx + my) \implies a \mid (bx = cy)$$

□

4. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a = by, \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a = by = axy &\implies axy - a = 0 \\ &\implies a(xy - 1) = 0 \\ &\implies \begin{cases} a &= 0 \\ xy &= 1 \implies \begin{cases} x=1=y \\ x=-1=y \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

   1. $b = a(1) \implies b = a$
   2. $b = a(-1) \implies b = -a$

□

5. ***Demostración:*** Por hipótesis $b = ax \wedge a > 0 \wedge b > 0, \quad x \in \mathbb{Z}$

   $a > 0 \wedge b > 0 \implies x > 0$
   1. $x = 1 \implies b = a$
   2. $x \geq 2 \implies b = ax = \underbrace{a + a + ... + a}_{\text{x veces}} = a + (k-1)a$, donde $(k-1) > 0$, entonces $a < b$

   Por lo tanto $a \leq b$ □
6. ***Demostración:***
   - $a|b \implies am|bm:$ Por hipótesis $b = ax, \quad x \in \mathbb{Z}$

   $$bm = axm = (am)x \implies am \mid bm$$

   - $am|bm \implies a|b:$ Por hipótesis $bm = amx, \quad x \in \mathbb{Z}$

   Como $m \neq 0$

   $$bm = amx \implies b = ax \implies a|b$$

□

## 7.2. Estructuras algebraicas

**Definición 7.3**

Dado un conjunto no vació $A$, una **operación binaria** $\star$ sobre $A$, es una función

$$\begin{aligned} \star : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow \star(a, b) \end{aligned}$$

**Notación:** $\star(a, b) = a \star b$

**Ejemplo**

1. Suma en naturales es una operación binaria
$$\begin{aligned} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$
2. Multiplicación en enteros es una operación binaria
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$
3. La suma en $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ es una operación binaria
$$\begin{array}{c|ccc} +_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{aligned} +_3 : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 &\longrightarrow \mathbb{Z}_3 \\ (2, 1) &\longrightarrow 2 +_3 1 = 0 \end{aligned}$$
4. La resta en $\mathbb{N}$ no es una operación binaria
$$(\mathbb{N}, -) \quad 5 - 7 = -2$$
5. La division en $\mathbb{R}$ no es una operación binaria
$$(\mathbb{R}, \div) \quad \frac{5}{0} \text{ no esta definido}$$
6. La division en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una operación binaria
$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$$
$$\begin{aligned} \div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{x}{y} \end{aligned}$$

**Definición 7.4**

Sea $A$ un conjunto no vació y $\star$ una operación binaria sobre $A$. Decimos que:
1. $\star$ es asociativa si:
$$(\forall x, y, z \in A)((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$$
2. $\star$ es modulativa si:
$$(\exists e \in A)(\forall x \in A)(e \star x = x \star e = x)$$
3. $\star$ es invertiva si:
$$(\forall x \in A)(\exists x' \in A)(x \star x' = e = x' \star x)$$
4. $\star$ es conmutativa si:
$$(\forall x, y \in A)(x \star y = y \star x)$$

Una pareja $(A, \star)$ se dice:
1. **Semi-grupo** si $\star$ es asociativa.
2. **Monoide** si $\star$ es asociativa y modulativa.
3. **Grupo** si $\star$ es asociativa, modulativa e invertiva.
4. **Grupo Abeliano** si $\star$ es asociativa, modulativa, invertiva y conmutativa.

# 8. Clase 2025-09-18

## 8.1. Ejemplos Estructuras Algebraicas

**Ejemplo** — **Semi-grupos**

1. $(\mathbb{N}_{>0}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$
   - √ Es asociativa $x + (y + z) = (y + x) + z$
   - √ No existe $e$ tal que $x + e = e + x = x$
2. $(A, *)$ :

   $$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}$$

   - √ Es asociativa

     $a * (a * a) = a = (a * a) * a$

     $a * (a * b) = a = (a * a) * b$

     $a * (b * a) = a = (a * b) * a$

     $b * (a * a) = b = (b * a) * a$
   - √ No existe $e \in A$ tal que $e * x = x * e = x$

     $$e = a \Longrightarrow \begin{cases} a * e = a = e * a \\ b * e = b \neq a = e * b \end{cases} \Longrightarrow a \text{ no es neutro}$$

     $$e = b \Longrightarrow \begin{cases} a * b = a \neq b = b * a \\ b * b = b = b * b \end{cases} \Longrightarrow b \text{ no es neutro}$$

**Ejemplo** — **Monoides**

1. $(\mathbb{N}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{N}$
   - √ Es asociativa: $x + (y + z) = (y + x) + z$
   - √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   - √ No es invertiva: No existe $x'$ tal que $x + x' = 0 = x' + x$
2. $(\mathcal{P}(A), \cup)$
   Sea $x, y \in \mathcal{P}(A)$
   - √ Es asociativa: $x \cup y = y \cup x$
   - √ Es modulativa: Existe $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ tal que $x \cup \emptyset = \emptyset \cup x = x$
   - √ No es invertiva: No existe $x' \in \mathcal{P}(A)$ tal que $x \cup x' = \emptyset = x' \cup x$

**Ejemplo** — **Grupos**

1. $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$

**Ejemplo** — **Grupos Abelianos**

1. $(\mathbb{Z}, +)$
   Sea $x, y, z \in \mathbb{Z}$
   - √ Es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$
   - √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   - √ Es invertiva: Existe $x'$ tal que $x + x' = 0 = x' + x$
   - √ Es conmutativa: $x + y = y + x$
2. $(\mathbb{R}, +)$ Sea $x, y, z \in \mathbb{R}$
   - √ Es asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$
   - √ Es modulativa: Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$
   - √ Es invertiva: Existe $x'$ tal que $x + x' = 0 = x' + x$
   - √ Es conmutativa: $x + y = y + x$

## 8.2. Anillos

**Definición 8.1** — **Anillos**

Sea $A$ un conjunto y $*_1, *_2$ operaciones binarias sobre $A$ la tripla $(A, *_1, *_2)$ se dice anillo si:

1. $(A, *_1)$ es un grupo abeliano.
2. $*_2$ es asociativa.
3. Se cumple:

   $$\begin{aligned}(\forall x, y \in A)( \quad & x *_2 (y *_1 z) = (x *_2 y) *_1 (x *_2 z) \wedge \\ & (y *_1 z) *_2 x = (y *_2 x) *_1 (z *_2 x) \quad )\end{aligned}$$

La operación $*_1$ se suele llamar **suma** y se suele denotar por $+$.
La operación $*_2$ se suele llamar **producto** y se suele denotar por $\cdot$

- Si $*_2$ es conmutativa en $A$, se llama **anillo conmutativo**.
- Si $*_2$ es conmutativa y modulativa en $A$, se llama **anillo conmutativo de identidad**.
- Si $*_2$ es invertiva en $A \setminus \{e\}$, siendo $e$ el modulo de $*_1$, se llama **anillo de division**.
- A se dice **dominio de integridad (DI)** si cada vez que $a *_2 b = e$ se tiene que $a = e \vee b = e$

**Ejemplo**

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
   - $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.
   - $\cdot$ es distributivo con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - 1 es el modulo multiplicativo.
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$

   $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo con identidad que es dominio de integridad**.
2. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad 2\mathbb{Z} = \text{enteros pares}$
   - $(2\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - No hay modulo multiplicativo.
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

   $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo sin identidad que es dominio de integridad**
3. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
   - $(\mathbb{R}, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
   - $\cdot$ es asociativo.
   - 1 es modulo multiplicativo.
   - $\cdot$ es invertiva en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ siendo 0 modulo de $+$
   - Siempre que $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

   $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo con identidad que es de division y dominio de integridad**
4. $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
   $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

   $$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

   - $(\mathbb{Z}_4, +)$ es grupo abeliano.
   - $\cdot$ es conmutativo.
   - No hay modulo multiplicativo.
   - No se cumple que $a \cdot b = e \Longrightarrow a = e \vee b = e$ ya que $2 \cdot 2 = 0$

   $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ es **Anillo conmutativo sin identidad (no es DI)**.

## 8.3. Algoritmo de la division

**Definición 8.2** — **Algoritmo de la division**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

**Ejemplo**

$$\begin{aligned} -7, 3: \quad -7 &= 3(-3) + 2, \quad 0 \leq 2 < 3 \\ 3 &= -7(0) + 3, \quad 0 \leq 3 < |-7| \end{aligned}$$

## 8.4. Máximo Común Divisor

**Definición 8.3**

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente, el **máximo común divisor** de $a$ y $b$, denotado por $(a, b)$ o $\mathrm{mcd}(a, b)$ es el mas grande de los divisores comunes de $a$ y $b$. Si $(a, b) = 1$, decimos que $a$ y $b$ son co-primos o primos relativos.

**Ejemplo**

$$\begin{aligned} 14, 42: \quad & \mathrm{div}(14) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} \\ & \mathrm{div}(42) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42\} \end{aligned}$$

Divisores comunes de 14 y 42 son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$

$\max\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} = 14 \Longrightarrow (14, 42) = 14$

**Nota**

1. $a|0$ si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = ax$

   Entonces $\mathrm{div}(0) = \mathbb{Z}$, $a|0$ porque $a \cdot \underbrace{0}_{x} = 0$

   Por ello no se puede considerar $(0, 0)$ porque los divisores comunes de 0 y 0 es $\mathbb{Z}$
2. $a \neq 0, \quad (a, 0) = |a|$

**Teorema 8.4**

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente, entonces existen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$(a, b) = ax_0 + bx_0$$

***Demostración:*** □

**Ejemplo**

$(42, 105) = 21$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = 42(-2) + 105(1)$

$21 = 42(3) + 105(-1)$