Taller 1 - Teoría de Números

Christian Mauricio Cárdenas Barón

20251167009

Carlos Andres Giraldo Hernandez

Facultad de Ciencias Matemáticas y Naturales

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

2025-09-25

1. Taller

1. Demuestre por inducción:

   Si $a_1|a_2, a_2|a_3, ..., a_{n-1}|a_n$, entonces $a_1|a_n$

   ***Demostración** (no inducción):*

   Por Hipótesis existen $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 x_1 \\ a_3 &= a_2 x_2 & &= a_1 x_1 x_2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} x_{n-1} &&= a_1 x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \end{aligned}$$

   Entonces podemos expresar $a_n = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} x_i$

   Como $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \in \mathbb{Z}$, entonces $a_1|a_n$ □

   ***Demostración** (inducción):*

   - Caso Base: $n = 2$, $a_1|a_2$
   - Paso inductivo: Supongamos que si $a_1|a_2, a_2|a_3, ..., a_{n-1}|a_n$, entonces $a_1|a_n$

     Por HI $a_1|a_n$ entonces $a_n = a_1 k_1$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

     Duda: Como $a_n|a_{n+1}$ entonces $a_{n+1} = a_n k_2$ para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$

     $a_{n+1} = a_n k_2 = a_1 k_1 k_2 \implies a_1|a_{n+1}$

   Por lo tanto si $a_1|a_2, a_2|a_3, ..., a_{n-1}|a_n$ entonces $a_1|a_n$ □

2. Demuestre por inducción:

   Si $a|b_1, a|b_2, ..., a|b_n$, entonces $a|b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n, \quad x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}$

   Demostración:

   - Caso base: $n = 2$

$$\begin{aligned} b_1 = ak_1 \land b_2 = ak_2 &\implies b_1 x_1 = ak_1 x_1 \land b_2 x_2 = ak_2 x_2 \\ &\implies b_1 x_1 + b_2 x_2 = ak_1 x_1 + ak_2 x_2 \\ &\implies b_1 x_1 + b_2 x_2 = a(k_1 x_1 + k_2 x_2) \\ &\implies a|(b_1 x_1 + b_2 x_2) \end{aligned}$$

   - Paso Inductivo: Supongamos

     $a|b_1, a|b_2, ..., a|b_n \implies a|b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n, \quad x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}$

     Por HI $b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i x_i) = ak, \quad k \in \mathbb{Z}$

     Duda: Como $a|b_{n+1}$, entonces $b_{n+1} = aq, \quad q \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
ak &= \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i) \\
ak + b_{n+1}x_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i) + b_{n+1}x_{n+1} \\
ak + aqx_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1}(b_i x_i) \\
a(k + qx_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1}(b_i x_i)
\end{aligned}$$

Esto muestra que $a | \sum_{i=1}^{n+1}(b_i x_i)$

Por lo tanto si $a|b_1, a|b_2, ..., a|b_n$, entonces $a| \sum_{i=1}^{n}(b_i x_i)$ □

3. Demostrar por inducción: Sean $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente, existen enteros $x_1, x_2, ..., x_n$, tales que $(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... a_n x_n$

4. Demostrar: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos simultáneamente,

$$d = (a, b) \iff \begin{cases} d|a \wedge d|b \\ m|a \wedge m|b \implies m|d \end{cases}$$

5. Demostrar: $m > 0 \implies (ma, mb) = m(a, b)$

6. Demostrar: $d > 0 \wedge d|a \wedge d|b \implies \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{d}(a, b)$

7. Demostrar: $(a, m) = (b, m) = 1 \implies (ab, m) = 1$

8. Demostrar: $(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (a, b + ax), \quad x \in \mathbb{Z}$

9. Demostrar: $c|ab \wedge (c, b) = 1 \implies c|a$