Desarrollo

1. El area de la superficie de un cilindro circular recto cerrado es de $50\pi cm^2$. Expresar el volumen del cilindro en función de su radio.

   Sabemos que el area de un cilindro es $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ donde r es el radio y h es la altura del cilindro

   También sabemos que el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$

   Ahora, nos dicen que $A = 50\pi$, entonces $50\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

   Hallamos h

$$\begin{aligned} 50\pi &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ 50 &= 2r^2 + 2rh \\ 50 - 2r^2 &= 2rh \\ \frac{50 - 2r^2}{2r} &= h \\ \frac{25 - r^2}{r} &= h \end{aligned}$$

   Ahora para expresar el volumen en función del radio remplazamos h en la formula del volumen

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 \left(\frac{25 - r^2}{r}\right) \\ &= \pi r(25 - r^2) \\ &= 25\pi r - \pi r^3 \end{aligned}$$

   $\therefore V(r) = 25\pi r - \pi r^3$

2. Un comerciante vende 750 de sus productos al mes, a un precio de \$25.000 cada uno, y por cada \$4.000 de reducción en el precio de cada uno, se venden cada mes 40 productos mas. Si s representa el numero de veces que se reduce el precio en \$4.000, exprese el ingreso generado cada mes por ventas del producto como función de s

$$f(s) = (25000 - 4000s)(750 + 40s)$$

3. Exprese el área del rectángulo en función del radio del circulo.

4. El punto $(3, 1)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(a, 0)$, exprese el area del triangulo formado por la recta y los ejes de coordenadas en función de a

   Como los puntos están en los ejes podemos usar la forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y remplazamos el punto $(3, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{3}{a} + \frac{1}{b} &= 1 \\ \frac{1}{b} &= 1 - \frac{3}{a} \\ \left(\frac{1}{b}\right)^{-1} &= \left(\frac{a-3}{a}\right)^{-1} \\ b &= \frac{a}{a-3} \end{aligned}$$

   Sabemos que el area de un triangulo es $A = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$, sabemos que la base es a y la altura es b, remplazando:

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{a}{a-3}\right) = \frac{a^2}{2a - 6}$$

5. Determine el dominio y rango de las siguientes funciones, elabore una tabla de valores y represente cada función en un plano xy

   a. $f(x) = \frac{x-2}{3x+2}$

   La función se índetermina en $3x + 2 = 0; x = -\frac{2}{3}$

   Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

   Por definición de rango

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{3x+2} \\ y(3x+2) &= x - 2 \\ 3xy + 2y - x &= -2 \\ 3xy - x &= -2y - 2 \\ x(3y - 1) &= -2y - 2 \\ x &= \frac{-2y-2}{3y-1} \end{aligned}$$

   La función se índetermina en $3y - 1 = 0; y = \frac{1}{3}$

   Rango: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

   b. $f(x) = \frac{4x^2-4}{2x-2}$

$$\frac{4x^2 - 4}{2x - 2} = \frac{4(x^2 - 1)}{2(x - 1)} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

   Simplificamos siempre que $x \neq 1$ entonces

$$f(x) = 2(x + 1)$$

   Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

   Excluimos cuando $f(1) = 2(1 + 1) = 4$

   Rango: $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

   c. $f(x) = 5x^2 + 4x - 2$

   Dominio: $\mathbb{R}$

   Encontramos el vértice de la parabola

$$\begin{aligned} 5x^2 + 4x - 2 &= y \\ 5\left(x^2 + \frac{4}{5}x\right) &= y + 2 \\ 5\left(x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25}\right) &= y + 2 \\ 5\left(\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right) &= y + 2 \\ 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} &= y + 2 \\ 5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 &= y + \frac{14}{5} \\ \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 &= \frac{1}{5}\left(y + \frac{14}{5}\right) \end{aligned}$$

   Vértice en $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

   Rango: $\left[-\frac{14}{5}, \infty\right)$

   d. $f(x) = \frac{4x^2+4}{2x^2-8}$

   Simplificamos la ecuación

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4}{2x^2 - 8} = \frac{4(x^2 + 1)}{2(x^2 - 4)} = \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 4}$$

   La función se indetermina en $x^2 - 4 = 0; x = \{-2, 2\}$

   Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

   Por definición de rango

$$\begin{aligned} y &= \frac{2(x^2 + 1)}{x^2 - 4} \\ y(x^2 - 4) &= 2(x^2 + 1) \\ x^2 y - 4y &= 2x^2 + 2 \\ x^2 y - 2x^2 &= 4y + 2 \\ x^2(y - 2) &= 4y + 2 \\ x^2 &= \frac{4y + 2}{y - 2} \end{aligned}$$

   Verificamos $\frac{4y+2}{y-2} \geq 0$

$$\begin{gathered} (4y + 2 \geq 0 \wedge y - 2 > 0) \vee (4y + 2 \leq 0 \wedge y - 2 < 0) \\ \left(y \geq -\frac{1}{2} \wedge y > 2\right) \vee \left(y \leq -\frac{1}{2} \wedge y < 2\right) \\ (2, \infty) \cup \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \end{gathered}$$

   Rango: $\mathbb{R} \setminus \left\{\left(-\frac{1}{2}, 2\right]\right\}$

   e. $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+3x+2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} \\ &= \frac{x(x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} \\ &= \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

   La función se índetermina en $x = \{-2, -1\}$

   Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

   Simplificamos la función teniendo en cuenta que $x \neq \{-2, -1\}$

$$f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = x$$

   Excluimos $f(-2) = -2$ y $f(-1) = -1$ del rango

   Rango: $\mathbb{R}\{-2, -1\}$

   f. $f(x) = \sqrt[3]{4 - 2x}$

   Como el indice de la raíz es impar el dominio es el mismo que el de la interna, Entonces hallamos dominio de $4 - 2x$, que por definición son todos los reales

   Dominio: $\mathbb{R}$

   Por definición de rango

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{4 - 2x} \\ y^3 &= 4 - 2x \\ y^3 + 4 &= 2x \\ \frac{y^3}{2} + 2 &= x \end{aligned}$$

   Rango: $\mathbb{R}$

   g. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$

   La función se índetermina en $x - 2 = 0; x = 2$

   La función se índetermina en $x + 3 \leq 0; x \leq -3$

   Dominio: $[-3, 2) \cup (2, \infty)$

   Por definición de rango

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{x+3}}{x-2} \\ y(x - 2) &= \sqrt{x+3} \\ (xy - 2y)^2 &= x + 3 \\ (xy)^2 - 2(xy)(2y) + (-2y)^2 &= x + 3 \\ x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2 &= x + 3 \\ x^2y^2 - 4xy^2 - x + 4y^2 - 3 &= 0 \\ x^2y^2 - x(4y^2 + 1) + 4y^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

   Tenemos una cuadrática, revisamos si el discriminante $D \geq 0$

$$\begin{aligned} D &= \left(4y^2 + 1\right)^2 - 4(y^2)(4y^2 - 3) \\ &= 16y^4 + 8y^2 + 1 - 16y^4 + 12y^2 \\ &= 20y^2 + 1 \end{aligned}$$

   $20y^2 + 1 \geq 0$ siempre se cumple para todos los $\mathbb{R}$

   Rango: $\mathbb{R}$

   h. $f(x) = \frac{x}{|x|}$

   La función se índetermina en $|x| = 0; x = 0$

   Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Analizamos el comportamiento de la función en los casos:

   - $x > 0$

     $|x| = x \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{x} = 1$
   - $x < 0$

     $|x| = -x \Longrightarrow f(x) = \frac{x}{-}x = -1$

   Rango: $\{-1, 1\}$

6. Si $f(x) = 3x^2 + x - 5$ Hallar

   a. $\frac{f(x-2)-f(x)}{2}$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x-2) - f(x)}{2} \\ &= \frac{(3(x-2)^2 + (x-2) - 5) - (3x^2 + x - 5)}{2} \\ &= \frac{3(x^2 - 4x + 4) + x - 2 - 5 - 3x^2 - x + 5}{2} \\ &= \frac{3x^2 - 12x + 12 + x - 2 - 5 - 3x^2 - x + 5}{2} \\ &= \frac{-12x + 10}{2} \\ &= -6x + 5 \end{aligned}$$

   b. $\frac{f(x+4)-f(x)}{-4}$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x+4) - f(x)}{-4} \\ &= \frac{(3(x+4)^2 + (x+4) - 5) - (3x^2 + x - 5)}{-4} \\ &= \frac{3(x^2 + 8x + 16) + x + 4 - 5 - 3x^2 - x + 5}{-4} \\ &= \frac{3x^2 + 24x + 48 + x + 4 - 5 - 3x^2 - x + 5}{-4} \\ &= \frac{24x + 52}{-4} \\ &= -6x - 13 \end{aligned}$$

   c. $\frac{f(x-h)-f(f)}{h}$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(3(x-h)^2 + (x-h) - 5) - (3x^2 + x - 5)}{h} \\ &= \frac{3(x^2 - 2xh + h^2) + x - h - 5 - 3x^2 - x + 5}{h} \\ &= \frac{3x^2 - 6xh + 3h^2 + x - h - 5 - 3x^2 - x + 5}{h} \\ &= \frac{-6xh + 3h^2 - h}{h} \\ &= -6x + 3h - 1 \end{aligned}$$

7. Un asesor comercial cobra \$75.000 por una consulta inicial con duración de máximo una hora y \$100.000 por cada hora adicional dedicada al proyecto, exprese el cobro del asesor en función de la cantidad total de horas dedicadas al proyecto.

$$f(h) = 75000 + 100000h$$

8. Exprese y en función de x, como también el area del triangulo ΔABC

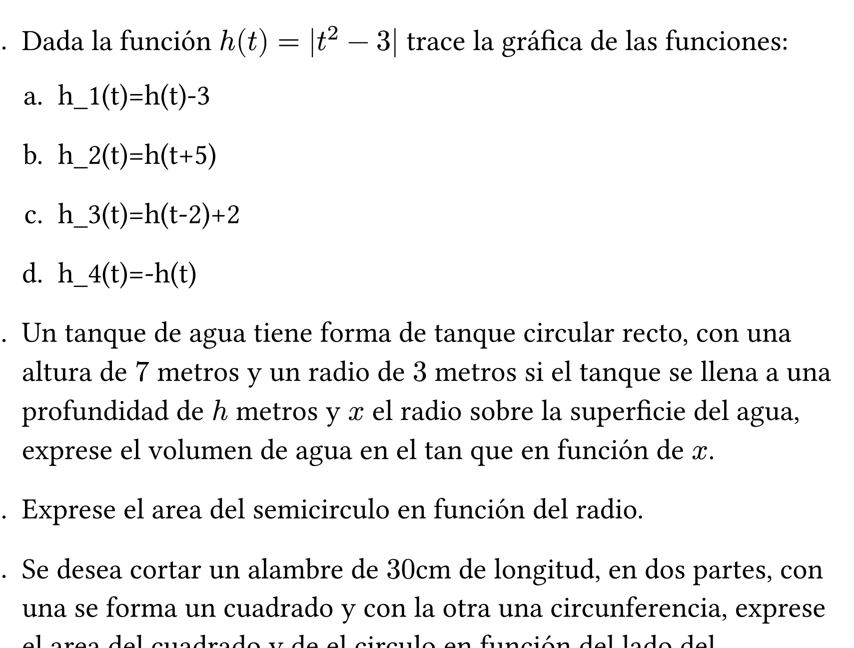
9. Dada la función $g(x) = \sqrt{x - 2}$ trace la gráfica de las funciones:

   a. g_1(x)=g(x)+5/2

   b. g_2(x)=g(x+3)

   c. g_3(x)=g(x+2)-2

   d. g_4(x)=-3g(x)



10. Dada la función $h(t) = |t^2 - 3|$ trace la gráfica de las funciones:

    a. h_1(t)=h(t)-3

    b. h_2(t)=h(t+5)

    c. h_3(t)=h(t-2)+2

    d. h_4(t)=-h(t)

11. Un tanque de agua tiene forma de tanque circular recto, con una altura de 7 metros y un radio de 3 metros si el tanque se llena a una profundidad de h metros y x el radio sobre la superficie del agua, exprese el volumen de agua en el tan que en función de x.

12. Exprese el area del semicirculo en función del radio.

13. Se desea cortar un alambre de 30cm de longitud, en dos partes, con una se forma un cuadrado y con la otra una circunferencia, exprese el area del cuadrado y de el circulo en función del lado del cuadrado.