Axiomas de cuerpo/campo

Sea $\mathbb{R}$ un conjunto. Supongamos que en $\mathbb{R}$ definimos dos operaciones $+$ y $\cdot$ que cumplen los siguientes axiomas:

A_0	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x + y \in \mathbb{R} \land xy \in \mathbb{Z}$	P. Clausurativa
A_1	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x + y = y + x \land xy = yx$	P. Conmutativa
A_2	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $\land x(yz) = (xy)z$	P. Asociativa
A_3	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x(y + z) = xy + xz$	P. Distributiva
A_4	$\exists 0 \in \mathbb{R} \land \exists 1 \in \mathbb{R}$	$x + 0 = x \land x \cdot 1 = x$	P. Modulativa
A_5	$\forall x \in \mathbb{R} \land \exists y \in \mathbb{R}$	$x + y = 0$	P. Inv. Aditivo
A_6	$\forall x \in \mathbb{R} \land x \neq 0 \land \exists z \in \mathbb{R}$	$xz = 1$	P. Inv. Multiplicativo

Decimos que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo

Teoremas

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \land a + b = a + c \Longrightarrow b = c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists! x \in \mathbb{R} \land a + x = b$

Definición Inverso Aditivo

Al numero x solución de la ecuación $a + x = b$ lo notaremos por $b - a$. En particular, si $b = 0$ (A_5), entonces $a + x = 0$ y así $x = 0 - a = -a$, al cual llamaremos el inverso aditivo de a o el opuesto de a.

Teoremas

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a - b = a + (-b)$
- $\forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow -(-a) = a$
- $\forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow a \cdot 0 = 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow -(ab) = (-a) \cdot b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Longrightarrow (a + b)c = ac + bc$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \Longrightarrow a(b - c) = ab - ac$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \land ab = ac \Longrightarrow b = c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \Longrightarrow \exists! x \in \mathbb{R} \land ax = b$

Definición Inverso Multiplicativo

Al numero x solución de la ecuación $ax = b$, $a \neq 0$ lo notaremos por $\frac{b}{a}$. En particular, si $b = 1$ (A_6), entonces $ax = 1$ y así $x = \frac{1}{a}$ que notaremos por a^{-1} y lo llamaremos el inverso multiplicativo de a o el reciproco de a.

Teoremas

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \Longrightarrow \frac{b}{a} = ba^{\{-1\}}$
- $\forall a \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \land a^{-1}$ es inversible $\Longrightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} = a$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \land ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \lor b = 0$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow (-a)(-b) = ab$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \land ab \neq 0 \Longrightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \land b \neq 0 \land d \neq 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \land b \neq 0 \land d \neq 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ejercicios