

Taller

Rectas

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$.
2. Dada la ecuación de la recta $3x - 4y + 12 = 0$, determina la pendiente y la ordenada al origen.
3. Halle los puntos de intersección de la recta $y = 2x + 1$ con los ejes x e y con la recta $3x + y - 5 = 0$.
4. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vertices del triangulo $A(-2, 3)$, $B(4, -3)$ y $C(8, 1)$. Que tipo de triangulo es? Justifique su respuesta.
5. Halle las ecuaciones de las alturas, de las medianas y de las mediatrices del triangulo del punto 4.

Parábolas

1. Hallar la ecuación de la parabola con vértice en $(1, -2)$ que abre hacia arriba y pasa por el punto $(2, 1)$.
2. Dada la ecuación $y = 2(x - 3)^2 + 5$, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola.
3. Encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 8x + 4y + 5 = 0$.
4. Halla los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $y = 2x$.
5. Halle la ecuación de la parabola que contiene los puntos $(-2, -3)$, $(1, 2)$ y $(5, 7)$, con directriz paralela al eje y .

Elipses

1. Halle la ecuación de la elipse con centro en $(-1, 4)$, semiejes de longitud 4 y 3.
2. Dada la elipse $\frac{(x + 5)^2}{16} + \frac{(y - 7)^2}{9} = 1$, determine las coordenadas de los extremos de los ejes y los focos.
3. Halle los puntos de intersección entre la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x + y = 4$.
4. Escribe la ecuación de la elipse $\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$ en su forma general. Dibuje la cónica.

Hipérbolas

1. Halle la ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$.
2. Dada la hipérbola $\frac{(x - 4)^2}{25} - \frac{(y + 6)^2}{16} = 1$, determina las coordenadas de los focos, los vertices y las ecuaciones de las asíntotas.
3. Halla los puntos de intersección entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta $y = x - 1$.
4. Escribe la ecuación de la hipérbola $\frac{(x - 1)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$ en su forma estándar.

Desarrollo

Recta

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(4, 7)$.

Encontramos la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{7 - 3}{4 - 2}$$

$$m = \frac{4}{2}$$

$$m = 2$$

Ahora con punto pendiente obtenemos

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

$$y - 3 = 2x - 4$$

$$-2x + y + 1 = 0$$

□

2. Data la ecuación de la recta $3x - 4y + 12 = 0$, determina la pendiente y la ordenada al origen.

Expresamos la ecuación en forma Pendiente-Ordenada al origen

$$3x - 4y + 12 = 0$$

$$-4y = -3x - 12$$

$$4y = 3x + 12$$

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

Tenemos que la pendiente $m = \frac{3}{4}$ y la ordenada al origen $b = 3$

□

3. Halle los puntos de intersección de la recta $y = 2x + 1$ con los ejes x e y con la recta $3x + y - 5 = 0$.

Remplazamos $x = 0$

$$y = 2(0) + 1$$

$$y = 1$$

Punto de intersección en eje x $(0, 1)$

Remplazamos $y = 0$

$$0 = 2x + 1$$

$$-\frac{1}{2} = x$$

Punto de intersección en eje y $(-\frac{1}{2}, 0)$

Para la intersección de ambas rectas resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

Por igualación en y

$$2x + 1 = -3x + 5$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Remplazamos x en alguna de las ecuaciones

$$y = 2\left(\frac{4}{5}\right) + 1$$

$$y = \frac{13}{5}$$

Punto de intersección entre las rectas es $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

4. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por los vertices del triangulo $A(-2, 3)$, $B(4, -3)$ y $C(8, 1)$. Que tipo de triangulo es? Justifique su respuesta.

i. Recta A, B

Pendiente:

$$m = \frac{-3 - 3}{4 - (-2)} = -\frac{6}{6} = -1$$

Ecuación General:

$$y - 3 = -1(x - (-2))$$

$$y - 3 = -x - 2$$

$$x + y - 1 = 0$$

ii. Recta A, C

Pendiente:

$$m = \frac{1 - 3}{8 - (-2)} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

Ecuación General:

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - (-2))$$

$$y - 3 = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{5}x + y - \frac{13}{5} = 0$$

iii. Recta B, C

Pendiente

$$m = \frac{1 - (-3)}{8 - 4} = \frac{4}{4} = 1$$

Ecuación General:

$$y - 1 = 1(x - 8)$$

$$y - 1 = x - 8$$

$$-x + y + 7 = 0$$

Que tipo de triangulo es?

Vemos que la pendiente de la recta B, C es $m_1 = 1$

También la pendiente de la recta A, B es $m_2 = -1$

Observamos que las rectas son perpendiculares siendo ya que m_2 es el negativo del inverso multiplicativo de m_1

Por lo tanto es un triangulo rectángulo.

□

5. Halle las ecuaciones de las alturas, de las medianas y de las mediatrices del triangulo del punto 4.

Vertices del triangulo $A(-2, 3), B(4, -3), C(8, 1)$

Rectas del triangulo:

- De los vertices A, B sea $l_1 : y = -x - 1$
- De los vertices A, C sea $l_2 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$
- De los vertices B, C sea $l_3 : y = x - 7$

Puntos medios:

- De l_1 sea $M_1 = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right) = (1, 0)$
- De l_2 sea $M_2 = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (3, 2)$
- De l_3 sea $M_3 = \left(\frac{4+8}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) = (6, -1)$

Alturas:

i. Altura l_1

Hallamos l_4 tal que $l_4 \perp l_1$ y pase por C

Pendiente de $l_1 = -1$

Pendiente de $l_4 = -(-1)^{-1} = 1$

Ecuación de l_4

$$y - 1 = 1(x - 8)$$

$$y - 1 = x - 8$$

$$y = x - 7$$

ii. Altura l_2

Hallamos l_5 tal que $l_5 \perp l_2$ y pase por B

Pendiente de $l_2 = -\frac{1}{5}$

Pendiente de $l_5 = -\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

Ecuación de l_5

$$y - (-3) = 5(x - 4)$$

$$y + 3 = 5x - 20$$

$$y = 5x - 23$$

iii. Altura l_3

Hallamos l_6 tal que $l_6 \perp l_3$ y pase por A

Pendiente de $l_3 = 1$

Pendiente de $l_6 = -(1)^{-1} = -1$

Ecuación l_6

$$y - 3 = -1(x - (-2))$$

$$y - 3 = -x - 2$$

$$y = -x + 1$$

Medianas:

i. Mediana C y l_1

Hallamos l_7 que pase por los puntos C y M_1

Pendiente l_7

$$m = \frac{1 - 0}{8 - 1} = \frac{1}{7}$$

Ecuación l_7

$$y - 0 = \frac{1}{7}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{7}x - \frac{1}{7}$$

ii. Mediana B y l_2

Hallamos l_8 que pase por los puntos B y M_2

Pendiente l_8

$$m = \frac{-3 - 2}{4 - 3} = -5$$

Ecuación l_8

$$y - 2 = -5(x - 3)$$

$$y - 2 = -5x + 15$$

$$y = -5x + 17$$

iii. Mediana A y l_3

Hallamos l_9 que pase por los puntos A y M_3

Pendiente l_9

$$m = \frac{3 - (-1)}{-2 - 6} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Ecuación l_9

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Mediatrices:

i. Mediatriz l_1

Hallamos l_{10} tal que $l_{10} \perp l_1$ y pase por M_1

Pendiente de $l_1 = -1$

Pendiente de $l_{10} = -(-1)^{-1} = 1$

Ecuación de l_{10}

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1$$

ii. Mediatriz l_2

Hallamos l_{11} tal que $l_{11} \perp l_2$ y pase por M_2

Pendiente de $l_2 = -\frac{1}{5}$

Pendiente de $l_{11} = -(-\frac{1}{5})^{-1} = 5$

Ecuación de l_{11}

$$y - 2 = 5(x - 3)$$

$$y - 2 = 5x - 15$$

$$y = 5x - 13$$

iii. Mediatriz l_3

Hallamos l_{12} tal que $l_{12} \perp l_3$ y pase por M_3

Pendiente de $l_3 = 1$

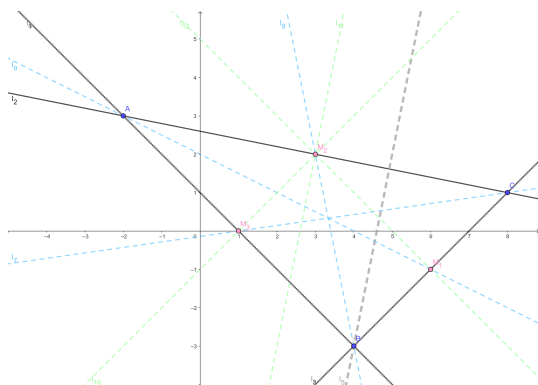
Pendiente de $l_{12} = -(1)^{-1} = -1$

Ecuación de l_{12}

$$y - (-1) = -1(x - 6)$$

$$y + 1 = -x + 6$$

$$y = -x + 5$$



□

Parábolas

1. Hallar la ecuación de la parábola con vértice en $(1, -2)$ que abre hacia arriba y pasa por el punto $(2, 1)$.

Ecuación Cónica de la parábola $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Remplazando vértice $(1, -2)$ y el punto $(2, 1)$ en la cónica

$$(2 - 1)^2 = 4p(1 - (-2))$$

$$1 = 4p + 8p$$

$$\frac{1}{12} = p$$

Remplazamos p y el vértice $(1, -2)$ en la cónica

$$(x - 1)^2 = 4\left(\frac{1}{12}\right)(y - (-2))$$

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{3}(y + 2)$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} = 0$$

$$3x^2 - 6x - 1y + 1 = 0$$

□

2. Dada la ecuación $y = 2(x - 3)^2 + 5$, hallar el vértice, el foco y la directriz de la parábola.

Expresarla de forma cónica

$$y = 2(x - 3)^2 + 5$$

$$y - 5 = 2(x - 3)^2$$

$$\frac{1}{2}(y - 5) = (x - 3)^2$$

$$(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y - 5)$$

Hallamos p

$$4p = \frac{1}{2}; \quad p = \frac{1}{8}$$

Vértice: $(3, 5)$

Foco: $(3, 5 + \frac{1}{8})$; $(3, \frac{41}{8})$

Directriz: $y = 5 - \frac{1}{8}$; $y = \frac{39}{8}$

□

3. Encuentra el vértice, el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 8x + 4y + 5 = 0$.

Expresamos de forma cónica la parábola

$$y^2 + 8x + 4y + 5 = 0$$

$$y^2 + 4y + \underline{4} = -8x - 5 + \underline{4}$$

$$(y + 2)^2 = -8x - 1$$

$$(y + 2)^2 = -8\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

Hallamos p

$$4p = -8; \quad p = -2$$

Vértice: $\left(-\frac{1}{8}, -2\right)$

Foco: $\left(-\frac{1}{8} - 2, -2\right); \quad \left(-\frac{17}{8}, -2\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{8} + 2; \quad y = \frac{15}{8}$

□

4. Halla los puntos de intersección entre la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $y = 2x$.

Igualemos las expresiones

$$x^2 - 4 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

Resolvemos la cuadrática

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-4)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{5} \\ x_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Remplazamos x_1 en la recta

$$y = 2(1 + \sqrt{5})$$

$$y = 2 + 2\sqrt{5}$$

Obtenemos el primer punto de intersección en $(1 + \sqrt{5}, 2 + 2\sqrt{5})$

Remplazamos x_2 en la recta

$$y = 2(1 - \sqrt{5})$$

$$y = 2 - 2\sqrt{5}$$

Obtenemos el segundo punto de intersección en $(1 - \sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$

□

5. Halle la ecuación de la parábola que contiene los puntos $(-2, -3)$, $(1, 2)$ y $(5, 7)$, con directriz paralela al eje y .

Ecuación cónica de parábola horizontal $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Remplazamos $(-2, -3)$ en la cónica $x = -2 \quad y = -2$

$$\begin{aligned}(-3 - k)^2 &= 4p(-2 - h) \\ 9 + 6k + k^2 &= -8p - 4ph \\ k^2 + 6k + 4ph + 8p &= -9\end{aligned}\tag{1}$$

Remplazamos $(1, 2)$ en la cónica $x = 1 \quad y = 2$

$$\begin{aligned}(2 - k)^2 &= 4p(1 - h) \\ 4 - 4k + k^2 &= 4p - 4ph \\ k^2 - 4k + 4ph - 4p &= -4\end{aligned}\tag{2}$$

Remplazamos $(5, 7)$ en la cónica $x = 5 \quad y = 7$

$$\begin{aligned}(7 - k)^2 &= 4p(5 - h) \\ 49 - 14k + k^2 &= 20p - 4ph \\ k^2 - 14k + 4ph - 20p &= -49\end{aligned}\tag{3}$$

Ecuación 1 $+ -1 \cdot$ Ecuación 2

$$\begin{array}{r} k^2 + 6k + 4ph + 8p = -9 \\ -k^2 + 4k - 4ph + 4p = 4 \\ \hline 10k + 12p = -5 \end{array}\tag{4}$$

$-1 \cdot$ Ecuación 2 $+$ Ecuación 3

$$\begin{array}{r} -k^2 + 4k - 4ph + 4p = 4 \\ k^2 - 14k + 4ph - 20p = -49 \\ \hline -10k - 16p = -45 \end{array}\tag{5}$$

Ecuación 4 $+$ Ecuación 5

$$\begin{array}{r} 10k + 12p = -5 \\ -10k - 16p = -45 \\ \hline -4p = -50 \\ p = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} \end{array}$$

Remplazo $p = \frac{25}{2}$ en Ecuación 4

$$\begin{aligned}10k + 12p &= -5 \\ 10k + 12\left(\frac{25}{2}\right) &= -5 \\ 10k + 150 &= -5 \\ 10k &= -155 \\ k &= -\frac{155}{10} = -\frac{31}{2}\end{aligned}$$

Remplazo $p = \frac{25}{2}$ y $k = -\frac{31}{2}$ en Ecuación 2

$$k^2 - 4k + 4ph - 4p = -4$$

$$\left(-\frac{31}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{31}{2}\right) + 4\left(\frac{25}{2}\right)h - 4\left(\frac{25}{2}\right) = -4$$

$$\left(-\frac{31}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{31}{2}\right) + 4\left(\frac{25}{2}\right)h - 4\left(\frac{25}{2}\right) = -4$$

$$\frac{961}{4} + 62 + 50h - 50 = -4$$

$$\frac{961}{4} + 16 = -50h$$

$$\frac{1025}{4} = -50h$$

$$-\frac{41}{8} = h$$

Remplazo $p = \frac{25}{2}$, $k = -\frac{31}{2}$ y $h = -\frac{41}{8}$ en la cónica

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$\left(y - \left(-\frac{31}{2}\right)\right)^2 = 4\left(\frac{25}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{41}{8}\right)\right)$$

$$\left(y + \frac{31}{2}\right)^2 = 50\left(x + \frac{41}{8}\right)$$

Vértice: $\left(-\frac{41}{8}, -\frac{31}{2}\right)$

Foco: $\left(\frac{59}{8}, -\frac{31}{2}\right)$

Directriz: $x = -\frac{141}{8}$

$$-\frac{41}{8} + \frac{25}{2} = \frac{-41 + 100}{8} = \frac{59}{8}$$

$$-\frac{41}{8} - \frac{25}{2} = \frac{-41 - 100}{8} = \frac{141}{8}$$

□

Elipses

1. Halle la ecuación de la elipse con centro en $(-1, 4)$, semiejes de longitud 4 y 3.

Como no se especifica cual es el semieje vertical ni el horizontal hallamos ambas elipses

- Remplazamos el centro y los semiejes en la ecuación de elipse horizontal

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-(-1))^2}{4^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} &= 1 \\ \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

- Remplazamos el centro y los semiejes en la ecuación de elipse horizontal

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{(x-(-1))^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{4^2} &= 1 \\ \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} &= 1\end{aligned}$$

□

2. Dada la elipse $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{9} = 1$, determine las coordenadas de los extremos de los ejes y los focos.

$$a = 4; \quad b = 3; \quad c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

- Centro: $(-5, 7)$
- Extremos eje mayor: $(-5+4, 7), (-5-4, 7); \quad (-1, 7), (-9, 7)$
- Extremos eje menor: $(-5, 7+3), (-5, 7-3); \quad (-5, 10), (-5, 4)$
- Focos: $(-5+\sqrt{7}, 7), (-5-\sqrt{7}, 7)$

□

3. Halle los puntos de intersección entre la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x + y = 4$.

Despejamos y en la recta $y = -x + 4$

Remplazamos y en la elipse

$$\begin{aligned}4x^2 + (-x+4)^2 &= 16 \\ 4x^2 + x^2 - 8x + 16 &= 16 \\ 5x^2 - 8x &= 0 \\ x(5x-8) &= 0\end{aligned}$$

Obtenemos que $x = 0$ o $5x - 8 = 0; x = \frac{8}{5}$

Remplazamos x en la recta

- Para $x = 0$

$$y = 4 - x$$

$$y = 4 - 0 = 4$$

Obtenemos punto $(0, 4)$

- Para $x = \frac{8}{5}$

$$y = 4 - x$$

$$y = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$$

Obtenemos punto $\left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$

□

4. Escribe la ecuación de la elipse $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ en su forma general. Dibuja la cónica.

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

$$16(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 25 \cdot 16$$

$$16(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) = 400$$

$$16x^2 - 64x + 64 + 25y^2 + 50y + 25 = 400$$

$$16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$$

Hipérbolas

1. Halle la ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, asíntotas $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Como la pendiente de una hipérbola es $m = \frac{b}{a}$ tenemos $a = 4$, $b = 3$

Como no se especifica si la hipérbola es horizontal o vertical hallamos ambas:

- Para la hipérbola horizontal remplazamos a y b y el centro

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{4^2} - \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Para la hipérbola vertical remplazamos a y b y el centro

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$-\frac{(x-0)^2}{4^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

□

2. Dada la hipérbola $\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{(y+6)^2}{16} = 1$, determina las coordenadas de los focos, los vertices y las ecuaciones de las asíntotas.

$$a = 5; \quad b = 4; \quad c = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

- Centro $(4, -6)$
- Vertices $(4 + 5, -6), (4 - 5, -6); (9, -6), (-1, -6)$
- Focos $(4 + \sqrt{41}, -6), (4 - \sqrt{41}, -6)$

Hallamos las asíntotas

Sabemos que la pendiente de las asíntotas es $\pm \frac{b}{a}$

Hallamos la primera usando punto pendiente

$$y - (-6) = \frac{4}{5}(x - 4)$$

$$y + 6 = \frac{4}{5}x - \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{46}{5}$$

Hallamos la segunda usando punto pendiente

$$y - (-6) = -\frac{4}{5}(x - 4)$$

$$y + 6 = -\frac{4}{5}x + \frac{16}{5}$$

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{14}{5}$$

□

3. Halla los puntos de intersección entre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y la recta $y = x - 1$.

Remplazamos $y = x - 1$ en la hipérbola

$$x^2 - (x - 1)^2 = 1$$

$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$x^2 - x^2 + 2x - 1 = 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Remplazamos $x = 1$ en la recta $y = x - 1 = 1 - 1 = 0$

Obtenemos punto de intersección en $(1, 0)$

□

4. Escribe la ecuación de la hipérbola $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ en su forma estándar.

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

$$4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 = 9 \cdot 4$$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 + 4y + 4) = 36$$

$$4x^2 - 8x + 4 - 9y^2 - 36y - 36 - 36 = 0$$

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$$

□