1. Máximo Común Divisor

El mayor entero que divide a 2 enteros se llama máximo común divisor de estos enteros

Definicion 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. El mayor entero c tal que $c|a \wedge c|b$ se llama máximo común divisor y se denota por $\text{mcd}(a, b)$

1.1. Forma básica de hallar MCD

Pregunta: Hallar $\text{mcd}(45, 120)$

Respuesta: $\text{mcd}(45, 120) = 15$

Divisores de $45 = \{\boxed{1}, \boxed{3}, 9, \boxed{15}, 45\}$
Divisores de $120 = \{\boxed{1}, 2, \boxed{3}, 4, 5, 6, 8, 10, 12, \boxed{15}, 20, 24, 30, 40, 60\}$

1.2. Forma avanzada de hallar MCD

Hallamos la descomposición en factores primos de a y b es decir:
$a = P_1^{m_1} \cdot P_2^{m_2} \cdot ... \cdot P_k^{m_k}$
$b = P_1^{n_1} \cdot P_2^{n_2} \cdot ... \cdot P_k^{n_k}$

Donde $P_1, P_2, ..., P_k$ son números primos y $m_1, m_2, ..., m_k$ y $n_1, n_2, ..., n_k$ son enteros no negativos. De modo que:
$\text{mcd}(a, b) = P_1^{\min(m_1, n_1)} \cdot P_2^{\min(m_2, n_2)} \cdot ... \cdot P_k^{\min(m_k, n_k)}$

Pregunta: Hallar $\text{mcd}(45, 120)$

Respuesta:

$$\begin{aligned} 45 &= 3^2 \cdot 5 &&= 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 120 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 &&= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ \text{mcd}(45, 120) &= 15 &&= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

1.3. Algoritmo de Euclides para hallar $\text{mcd}(a, b)$

Sean a y b enteros positivo con $a \geq b$

Aplicamos el algoritmo de la division sucesivamente

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 && 0 \leq r_1 \leq b \\ b &= r_1 q_2 + r_2 && 0 \leq r_2 \leq r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 && 0 \leq r_3 \leq r_2 \\ r_2 &= r_3 q_4 + r_4 && 0 \leq r_4 \leq r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-3} &= r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} && 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + 0 \end{aligned}$$

Siguiendo este proceso hallamos una sucesión de residuos $r_1, r_2, ..., r_{n-2}, r_{n-1}, 0$ y por el lema tenemos que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r_1) = \text{mcd}(r_1, r_2) = ... = \text{mcd}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{mcd}(r_{n-1}, 0) = r_{n-1}$

Es decir $\text{mcd}(a, b)$ es el ultimo residuo no nulo de la sucesión de divisores

Pregunta: Hallar $\text{mcd}(621, 512)$

Respuesta:

$$\begin{aligned} 621 &= 512 \cdot 1 + 109 \\ 512 &= 109 \cdot 4 + 76 \\ 109 &= 76 \cdot 1 + 33 \\ 76 &= 33 \cdot 3 + 10 \\ 33 &= 10 \cdot 3 + 3 \\ 10 &= 3 \cdot 3 + \boxed{1} \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{mcd}(621, 512) &= \text{mcd}(512, 109) \\ &= \text{mcd}(109, 76) \\ &= \text{mcd}(76, 33) \\ &= \text{mcd}(33, 10) \\ &= \text{mcd}(10, 3) \\ &= \text{mcd}(3, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pregunta: Hallar $\text{mcd}(80, 44)$

Respuesta:

$$\begin{aligned} 80 &= 44 \cdot 1 + 36 \\ 44 &= 36 \cdot 1 + 8 \\ 36 &= 8 \cdot 4 + \boxed{4} \\ 8 &= 4 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{mcd}(80, 44) &= \text{mcd}(44, 36) \\ &= \text{mcd}(36, 8) \\ &= \text{mcd}(8, 4) \\ &= 4 \end{aligned}$$