

# Teoria de Numeros

Christian Cardenas

## Table of Contents

Información .....	4
1. Clase 2025-08-25 .....	5
1.1. Principio del buen orden   PBO .....	5
1.2. Algoritmo de la division .....	5
1.3. Principio de inducción matemática (débil)   PIM(D) .....	5
1.4. Ejercicios .....	5
2. Clase 2025-08-28 .....	6
2.1. $PBO \iff PIM(D)$ .....	6
2.2. Principio de inducción matemática (general)   PIM(G) .....	6
2.3. Principio de inducción matemática (fuerte)   PIM(F) .....	6
2.4. Ejercicios .....	6
3. Clase 2025-09-01 .....	7
3.1. Sumatorias y Productorios .....	7
3.2. Suma Telescópica .....	7
3.3. Ejercicios .....	7
4. Clase 2025-09-04 .....	8
4.1. Monotonía de una sucesión .....	8
4.2. Acotamiento de una sucesión .....	8
4.3. Ejercicios .....	8
5. Clase 2025-09-08 .....	9
6. Clase 2025-09-11 .....	10
6.1. Quiz .....	10
7. Clase 2025-09-16 .....	11
7.1. Divisibilidad .....	11
7.2. Estructuras algebraicas .....	11
8. Clase 2025-09-18 .....	12
8.1. Ejemplos Estructuras Algebraicas .....	12
8.2. Anillos .....	12
8.3. Algoritmo de la division .....	12
8.4. Máximo Común Divisor .....	12

9. Clase 2025-09-22 .....	13
10. Clase 2025-09-25 .....	13
11. Clase 2025-09-29 .....	13
12. Clase 2025-10-02 .....	14
12.1. Parcial .....	14
13. Clase 2025-10-06 .....	15
14. Clase 2025-10-09 .....	16
14.1. Parcial 1 Parte 2 .....	16
15. Clase 2025-10-13 .....	17
16. Clase 2025-10-16 .....	17
17. Clase 2025-10-20 .....	17
18. Clase 2025-10-23 .....	18
18.1. Relaciones .....	18
19. Clase 2025-10-27 .....	18
20. Clase 2025-10-30 .....	19
20.1. Ejercicios .....	19

## Información

**Profesor:** Carlos Andres Giraldo Hernandez

**Notas:**

Corte 1		
Taller	10%	?
Quiz	5%	11 Sep
Parcial	20%	25 Sep
Corte 2		
Taller	10%	?
Quiz	5%	16 Oct
Parcial	20%	30 Oct
Corte 3		
Parcial	30%	1 Dec

**Tutorías:** Jueves 10-12, Viernes 8-10 (Biblioteca)

**Contenidos:**

- Números Naturales
- Números Entero
- Numero Primos
- Divisibilidad
- Teorema Fundamental de la Aritmética
- Congruencias
- Teorema Chino del residuo
- Funciones de la Teoría de Números
- Ecuaciones Diofánticas

**Bibliografía:** ?

- Niven. I, Zuckerman. N, and Montgomery. H.L, An Introduction to the Theory of Numbers.
- T. Koshy, Elementary Number Theory with applications.



## 2. Clase 2025-08-28

### 2.1. PBO $\iff$ PIM(D)

#### Teorema 2.1

El Principio del buen orden es equivalente al Principio de inducción matemática

**Demostración de Teorema 2.1:** PBO  $\iff$  PIM(D)

1. PBO  $\implies$  PIM(D): Sea  $S \subseteq \mathbb{N}$ , tal que

1.  $0 \in S$
2. Si  $n \in S$ , entonces  $n + 1 \in S$ .

Supongamos que  $S \subsetneq \mathbb{N}$ . Como  $S$  es no vacío y  $S \subsetneq \mathbb{N}$ ,  $S^c$  no es vacío, luego por PBO,  $S^c$  tiene mínimo, Sea  $m = \min(S^c)$ . Veamos que  $m - 1 \in S$ . Si  $m - 1 \notin S \implies m - 1 \in S^c$ . Como  $m - 1 < m$ , entonces  $m$  no sería el mínimo de  $S^c$ . Luego  $m - 1 \in S$ .

Por 2. Se tiene que  $(m - 1) + 1 = m \in S$  lo cual es una contradicción  $\rightarrow \leftarrow$

2. PIM(D)  $\implies$  PBO: Sea  $S \subseteq \mathbb{N}$  no vacío.

Caso 1 ( $0 \in S$ ): Entonces  $\min(S) = 0$

Caso 2 ( $0 \notin S$ ): Sea  $T = \{x \in \mathbb{N} : \forall s \in S, x < s\} \subseteq S^c$ . Como 0 es cota inferior de  $S$  y  $0 \notin S$ , entonces  $0 \in T$ , ademas  $T \neq \mathbb{N}$ , para  $T$  se satisfice 1. ( $0 \in T$ ), si 2. es satisfecho por  $T$ , entonces por el PIM(D) se concluye que  $T = \mathbb{N}$  lo cual es una contradicción  $\rightarrow \leftarrow$

Por lo tanto PBO  $\iff$  PIM(D) □

### 2.2. Principio de inducción matemática (general) | PIM(G)

#### Definición 2.2

PIM(G)

Sea  $S \subseteq \{x \in \mathbb{N} : x \geq k\} = \mathbb{N} \geq k$  que satisface

1.  $k \in S$
2. Si  $n \in S$ , entonces  $n + 1 \in S$

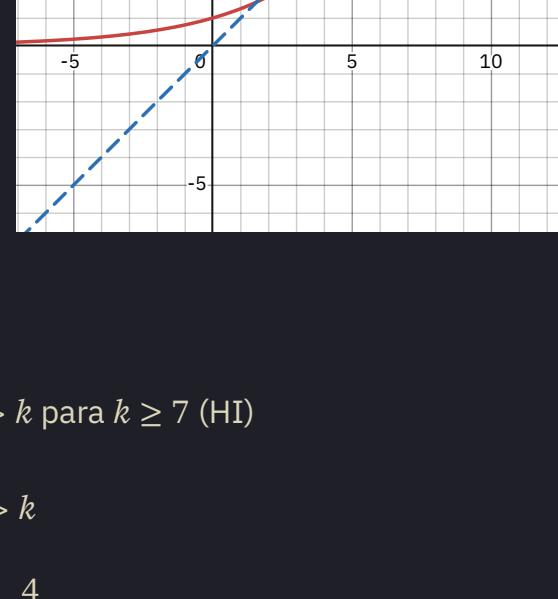
Entonces  $S = \mathbb{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$

#### Ejemplo

PIM(G)

Demuestre que  $\left(\frac{4}{3}\right)^n > n$

$n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$
0	$1 > 0$
1	$1.33 > 1$
2	$1.71 > 2$
3	$2.37 > 3$
4	$3.16 > 4$
5	$4.21 > 5$
6	$5.62 > 6$
7	$7.49 > 7$
8	$9.99 > 8$



#### Demostración:

Caso Base:  $n = 7$ ,  $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \approx 7.49 > 7$

Paso Inductivo: Supongamos que  $\left(\frac{4}{3}\right)^k > k$  para  $k \geq 7$  (HI)

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^k &> k \\ \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^k &> \frac{4}{3}k \end{aligned}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{3}\right)k$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + \frac{k}{3}$$

Como  $k \geq 7$ , entonces  $\frac{k}{3} \geq \frac{7}{3} > 1$ , ahora  $k + \frac{k}{3} > k + 1$  por lo tanto

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} > k + 1$$

□

### 2.3. Principio de inducción matemática (fuerte) | PIM(F)

#### Definición 2.3

PIM(F)

Sea  $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq k} = \{k, k + 1, k + 2, \dots\}$  tal que

1.  $k \in S$
2. Cada vez que  $m \in S$ , entonces  $m + 1 \in S$  para  $m \geq k$

Entonces  $S = \mathbb{N}$

### 2.4. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Rubiano sección 1.3

### 3. Clase 2025-09-01

#### 3.1. Sumatorias y Productorios

Tanto en las sumatorias como productorios podemos utilizar elementos de un conjuntos y tambien definir condiciones Algunos tipos de sumatorias y productorios

##### Ejemplo

Sea  $I = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x|12}} x = 2 + 3 = 5$$

##### Ejemplo

Sea  $K = \{7, 9, 11\}$

$$\prod_{\substack{i, j \in K \\ i < j}} i^j = 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^{11}$$

$$\prod_{\substack{i, j \in K \\ i \leq j}} i^j = 7^7 \cdot 7^9 \cdot 7^{11} \cdot 9^9 \cdot 9^{11} \cdot 11^{11}$$

#### 3.2. Suma Telescópica

##### Definición 3.1

##### Suma Telescópica

Una suma de la forma  $\sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$  con  $n > m + 1$ . Se llama suma telescópica

##### Demostración de la Suma Telescópica por inducción:

- CB:  $n = m + 1$

$$\sum_{i=m+1}^{m+2} (a_i - a_{i-1}) = \cancel{a_{m+1}} - a_m + a_{m+2} - \cancel{a_{m+1}} = a_{m+2} - a_m$$

- PI: Supongamos que  $\sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_m$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=m+1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=m+1}^n (a_i - a_{i-1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= (\cancel{a_n} - a_m) + (a_{n+1} - \cancel{a_n}) \\ &= a_{n+1} - a_m \end{aligned}$$

□

#### 3.3. Ejercicios

Desarrollar Ejercicios Libro Kochi 1.2

## 4. Clase 2025-09-04

### 4.1. Monotonía de una sucesión

#### Definición 4.1

Una sucesión  $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$  es:

1. Monótona creciente si:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$
2. Monótona decreciente si:  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

### 4.2. Acotamiento de una sucesión

#### Definición 4.2

Una sucesión es acotada si  $|a_n| \leq M, M \in \mathbb{R}^+$

#### Nota

Una sucesión es acotada inferiormente si  $a_n \geq k, k \in \mathbb{R}$

#### Nota

Una sucesión es acotada superiormente si  $a_n \leq k, k \in \mathbb{R}$

### 4.3. Ejercicios

#### Ejercicio 4.3

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

#### Demostración de monotonía:

- Caso base:  $x_1 = 3, x_2 = 2 - \frac{1}{3} = 1.\bar{6} \implies x_1 \geq x_2$
- Paso inductivo: Supongamos que  $x_n \geq x_{n+1}$ , Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_{n+1} \\ \frac{1}{x_{n+1}} &\geq \frac{1}{x_n} \\ -\frac{1}{x_{n+1}} &\leq -\frac{1}{x_n} \\ 2 - \frac{1}{x_{n+1}} &\leq 2 - \frac{1}{x_n} \\ x_{n+2} &\leq x_{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\{x_n\}$  es monótona decreciente.  $\square$

#### Demostración de acotamiento:

Acotamiento inferior:

- CB:  $x_1 = 3, x_1 \geq 1$
- PI: Supongamos que  $x_n \geq 1$ , por hipótesis de inducción

Acotamiento superior:

- CB:  $x_1 = 3, x_1 \leq 3$
- PI: Supongamos que  $x_n \leq 3$ , por hipótesis de inducción

$$x_n \geq 1 \quad x_n \leq 3$$

$$1 \geq \frac{1}{x_n} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x_n}$$

$$-1 \leq -\frac{1}{x_n} \quad -\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{x_n}$$

$$2 - 1 \leq 2 - \frac{1}{x_n} \quad 2 - \frac{1}{3} \geq 2 - \frac{1}{x_n}$$

$$1 \leq x_{n+1} \quad 3 \geq 1.\bar{6} \geq x_{n+1}$$

Por lo tanto  $\{x_n\}$  es acotada.  $\square$

#### Ejercicio 4.4

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 4, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}, \quad n \geq 1$$

#### Demostración de monotonía:

- CB:  $x_1 = 4, x_2 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
- PI: Supongamos que  $x_n \geq x_{n+1}$ , por HI

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_{n+1} \\ x_n - 1 &\geq x_{n+1} - 1 \\ \sqrt{x_n - 1} &\geq \sqrt{x_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

$$1 + \sqrt{x_n - 1} \geq 1 + \sqrt{x_{n+1} - 1}$$

$$x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona decreciente.  $\square$

#### Ejercicio 4.5

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \geq 1$$

$n$	$x_n$
1	1
2	$\sqrt{3} \approx 1.73$
3	$\sqrt{3.73} \approx 1.93$
4	$\sqrt{3.93} \approx 1.98$
5	$\sqrt{3.98} \approx 1.99$

#### Demostración de monotonía:

- CB:  $x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3} \approx 1.73 \implies x_1 \leq x_2$
- PI: Supongamos que  $x_n \leq x_{n+1}$ , por hipótesis de inducción

$$x_n \leq x_{n+1} \implies 2 + x_n \leq 2 + x_{n+1} \implies \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + x_{n+1}} \implies x_{n+1} \leq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona creciente.  $\square$

#### Ejercicio 4.6

Demostrar que la siguiente sucesión es monótona y acotada:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5} + x_n}, \quad n \geq 1$$

$n$	$x_n$
1	2.236
2	2.114
3	2.085
4	2.078
5	2.077

#### Demostración de monotonía:

- CB:  $x_1 = \sqrt{5} \approx 2.23, x_2 = \sqrt{\sqrt{5} + x_1} \approx 2.11 \implies x_1 \geq x_2$
- PI: Supongamos que  $x_n \geq x_{n+1}$ , por hipótesis de inducción

$$x_n \geq x_{n+1} \implies \sqrt{5} + x_n \geq \sqrt{5} + x_{n+1} \implies \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \geq \sqrt{\sqrt{5} + x_{n+1}} \implies x_{n+1} \geq x_{n+2}$$

Por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es monótona decreciente.  $\square$

#### Demostración de acotamiento:

- CB:  $x_1 = \sqrt{5} \implies 2 \leq x_1 \leq 3$
- PI: Supongamos que  $2 \leq x_n \leq 3$ , por hipótesis de inducción

$$2 \leq x_n \leq 3$$

$$\sqrt{5} + 2 \leq \sqrt{5} + x_n \leq \sqrt{5} + 3$$

$$\sqrt{\sqrt{5} + 2} \leq \sqrt{\sqrt{5} + x_n} \leq \sqrt{\sqrt{5} + 3}$$

$$2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28$$

$$2 \leq 2.05 \leq x_{n+1} \leq 2.28 \leq 3$$

Por lo tanto la sucesión  $\{x_n\}$  es acotada.  $\square$

## 5. Clase 2025-09-08

Se desarrollaron Ejercicio 4.3 y Ejercicio 4.4

## 6. Clase 2025-09-11

### 6.1. Quiz

#### Ejercicio 6.1

Calcule el valor exacto de  $\sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{1023} \log_2\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{1023} (\log_2(n+1) - \log_2(n)) \\ &= \log_2(1024) - \log_2(1) \\ &= 10 - 0 \end{aligned}$$

#### Ejercicio 6.2

Ejercicio 1.7

Se definen los números  $F_n$  de Fermat por  $F_n = 2^{2^n} + 1$ ,  $n = \{0, 1, 2, \dots\}$

Demuestre que para todo  $n \geq 1$

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} + 2 = F_n$$

#### Demostración:

- CB:  $n = 1$

$$\begin{aligned} F_0 + 2 &= (2^{2^0} + 1) + 2 = 5 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5 \end{aligned} \implies F_0 + 2 = F_1$$

- PI: Supongamos que  $F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} + 2 = F_n$

$$\begin{aligned} F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} F_n + 2 &= (F_n - 2) F_n + 2 \\ &= (F_n)^2 - 2F_n + 2 \\ &= (2^{2^n} + 1)^2 - 2(2^{2^n} + 1) + 2 \\ &= (2^{2^n})^2 + 2 \cancel{2^{2^n}} + 1 - 2 \cancel{2^{2^n}} - 2 + 2 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= F_{n+1} \end{aligned}$$

□

#### Ejercicio 6.3

Demuestre por que por PBO 1.1 si  $x, y \in \mathbb{N}$ , entonces  $x \geq y$  o  $y \geq x$

**Demostración:** Sean  $x, y \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{x, y\} \subseteq \mathbb{N}$ . Como  $\{x, y\}$  es no vacío, entonces existe  $m = \min(\{x, y\})$

- Caso 1:  $m = x \wedge m = x \leq y$
- Caso 2:  $m = y \wedge m = y \leq x$

□

## 7. Clase 2025-09-16

### 7.1. Divisibilidad

#### Definición 7.1

#### Divisibilidad

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  con  $a \neq 0$ , decimos que  $a$  divide a  $b$  lo cual se denota por  $a|b$ , si existe  $x \in \mathbb{Z}$  tal que  $ax = b$ , también decimos que  $b$  es múltiplo de  $a$ . Si lo anterior no se tiene, decimos que  $a$  no divide a  $b$  lo cual se denota por  $a \nmid b$ .

En algunos contextos  $a^n \parallel b$  significa que  $a^n|b$  pero  $a^{n+1} \nmid b$

#### Ejemplo

1.  $4, 2 : 2(2) = 4 \implies 2|4$
2.  $2, 8 : 2|8 \wedge 2^2|8 \implies 2 \nmid 8$
3.  $3, 6 : 3|6 \wedge 3^2 \nmid 6 \implies 3 \nmid 6$

#### Propiedades

1.  $a|b \implies a|bc, \forall c \in \mathbb{Z}$
2.  $a|b \wedge b|c \implies a|c$
3.  $a|b \wedge a|c \implies a|(bx + cy), \forall x, y \in \mathbb{Z}$
4.  $a|b \wedge b|a \implies a = \pm b$

#### Definición 7.2

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , decimos  $a \leq b$  si existe  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  tal que  $a + k = b$

5.  $a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0 \implies a \leq b$
6.  $a|b \iff am|bm, m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0 :$

#### Demostración de propiedades:

1. **Demostración:** Por hipótesis  $b = ax, x \in \mathbb{Z}$

$$bc = axc \implies a|bc$$

□

2. **Demostración:** Por hipótesis  $b = ax \wedge c = by, x, y \in \mathbb{Z}$

$$c = by = axy \implies a|c$$

□

3. **Demostración:** Por hipótesis  $b = an \wedge c = am, n, m \in \mathbb{Z}$

$$bx + cy = anx + amy = a(nx + my) \implies a | (bx - cy)$$

□

4. **Demostración:** Por hipótesis  $b = ax \wedge a = by, x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} a = by &\implies axy = axy - a = 0 \\ &\implies a(xy - 1) = 0 \\ &\implies \begin{cases} a = 0 \\ xy = 1 \implies \begin{cases} x=1=y \\ x=-1=y \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

1.  $b = a(1) \implies b = a$
2.  $b = a(-1) \implies b = -a$

□

5. **Demostración:** Por hipótesis  $b = ax \wedge a > 0 \wedge b > 0, x \in \mathbb{Z}$

$$a > 0 \wedge b > 0 \implies x > 0$$

1.  $x = 1 \implies b = a$

2.  $x \geq 2 \implies b = ax = \underbrace{a + a + \dots + a}_{x \text{ veces}} = a + (k-1)a$ , donde  $(k-1) > 0$ , entonces  $a < b$

Por lo tanto  $a \leq b$

□

6. **Demostración:**

- $a|b \implies am|bm$  : Por hipótesis  $b = ax, x \in \mathbb{Z}$

$$bm = axm = (am)x \implies am | bm$$

- $am|bm \implies a|b$  : Por hipótesis  $bm = amx, x \in \mathbb{Z}$

Como  $m \neq 0$

$$bm = amx \implies b = ax \implies a|b$$

□

### 7.2. Estructuras algebraicas

#### Definición 7.3

Dado un conjunto no vacío  $A$ , una **operación binaria**  $*$  sobre  $A$ , es una función

$$\begin{aligned} * : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow *(a, b) \end{aligned}$$

**Notación:**  $*(a, b) = a * b$

#### Ejemplo

1. Suma en naturales es una operación binaria

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

2. Multiplicación en enteros es una operación binaria

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

3. La suma en  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  es una operación binaria

$$\begin{array}{c} +_3 | \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array} \quad +_3 : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$(2, 1) \longrightarrow 2 +_3 1 = 0$$

4. La resta en  $\mathbb{N}$  no es una operación binaria

$$(\mathbb{N}, -) \quad 5 - 7 = -2$$

5. La división en  $\mathbb{R}$  no es una operación binaria

$$(\mathbb{R}, \div) \quad \frac{5}{0} \text{ no está definido}$$

6. La división en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  es una operación binaria

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$$

$$\div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \frac{x}{y}$$

#### Definición 7.4

Sea  $A$  un conjunto no vacío y  $*$  una operación binaria sobre  $A$ . Decimos que:

1.  $*$  es asociativa si:

$$(\forall x, y, z \in A)((x * y) * z = x * (y * z))$$

2.  $*$  es modulativa si:

$$(\exists e \in A)(\forall x \in A)(e * x = x * e = x)$$

3.  $*$  es invertiva si:

$$(\forall x \in A)(\exists x' \in A)(x * x' = e = x' * x)$$

4.  $*$  es commutativa si:

$$(\forall x, y \in A)(x * y = y * x)$$

Una pareja  $(A, *)$  se dice:

1. **Semi-grupo** si  $*$  es asociativa.

2. **Monoide** si  $*$  es asociativa y modulativa.

3. **Grupo** si  $*$  es asociativa, modulativa e invertiva.

4. **Grupo Abeliano** si  $*$  es asociativa, modulativa, invertiva y commutativa.

## 8. Clase 2025-09-18

### 8.1. Ejemplos Estructuras Algebraicas

#### Ejemplo

#### Semi-grupos

1.  $(\mathbb{N}_{>0}, +)$

Sea  $x, y, z \in \mathbb{N}$

✓ Es asociativa:  $x + (y + z) = (y + x) + z$

✓ No existe  $e$  tal que  $x + e = e + x = x$

2.  $(A, *)$ :

$$\begin{array}{c|cc} * & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}$$

✓ Es asociativa

$$a * (a * a) = a = (a * a) * a$$

$$a * (a * b) = a = (a * a) * b$$

$$a * (b * a) = a = (a * b) * a$$

$$b * (a * a) = b = (b * a) * a$$

✓ No existe  $e \in A$  tal que  $e * x = x * e = x$

$$e = a \implies \begin{cases} a * e = a = e * a \\ b * e = b \neq a = e * b \end{cases} \implies a \text{ no es neutro}$$

$$e = b \implies \begin{cases} a * b = a \neq b = b * a \\ b * b = b = b * b \end{cases} \implies b \text{ no es neutro}$$

#### Ejemplo

#### Monoïdes

1.  $(\mathbb{N}, +)$

Sea  $x, y, z \in \mathbb{N}$

✓ Es asociativa:  $x + (y + z) = (y + x) + z$

✓ Es modularia: Existe  $0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x + 0 = 0 + x = x$

✓ No es invertiva: No existe  $x'$  tal que  $x + x' = 0 = x' + x$

2.  $(\mathcal{P}(A), \cup)$

Sea  $x, y \in \mathcal{P}(A)$

✓ Es asociativa:  $x \cup y = y \cup x$

✓ Es modularia: Existe  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  tal que  $x \cup \emptyset = \emptyset \cup x = x$

✓ No es invertiva: No existe  $x' \in \mathcal{P}(A)$  tal que  $x \cup x' = \emptyset = x' \cup x$

#### Ejemplo

#### Grupos

1.  $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$

#### Ejemplo

#### Grupos Abelianos

1.  $(\mathbb{Z}, +)$

Sea  $x, y, z \in \mathbb{Z}$

✓ Es asociativa:  $x + (y + z) = (x + y) + z$

✓ Es modularia: Existe  $0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $x + 0 = 0 + x = x$

✓ Es invertiva: Existe  $x'$  tal que  $x + x' = 0 = x' + x$

✓ Es conmutativa:  $x + y = y + x$

2.  $(\mathbb{R}, +)$  Sea  $x, y, z \in \mathbb{R}$

✓ Es asociativa:  $x + (y + z) = (x + y) + z$

✓ Es modularia: Existe  $0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x + 0 = 0 + x = x$

✓ Es invertiva: Existe  $x'$  tal que  $x + x' = 0 = x' + x$

✓ Es conmutativa:  $x + y = y + x$

## 8.2. Anillos

#### Definición 8.1

#### Anillos

Sea  $A$  un conjunto y  $*_1, *_2$  operaciones binarias sobre  $A$  la tripla  $(A, *_1, *_2)$  se dice anillo si:

1.  $(A, *_1)$  es un grupo abeliano.

2.  $*_2$  es asociativa.

3. Se cumple:

$$(\forall x, y \in A)(x *_2 (y *_1 z) = (x *_2 y) *_1 (x *_2 z) \wedge (y *_1 z) *_2 x = (y *_2 x) *_1 (z *_2 x))$$

La operación  $*_1$  se suele llamar **suma** y se suele denotar por  $+$ .

La operación  $*_2$  se suele llamar **producto** y se suele denotar por  $\cdot$ .

• Si  $*_2$  es conmutativa en  $A$ , se llama **anillo conmutativo**.

• Si  $*_2$  es conmutativa y modularia en  $A$ , se llama **anillo conmutativo de identidad**.

• Si  $*_2$  es invertiva en  $A \setminus \{e\}$ , siendo  $e$  el modulo de  $*_1$ , se llama **anillo de división**.

• A se dice **dominio de integridad (DI)** si cada vez que  $a *_2 b = e$  se tiene que  $a = e \vee b = e$

#### Ejemplo

1.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano.
- $\cdot$  es distributivo con respecto a  $+$ .
- $\cdot$  es asociativo.
- $1$  es el modulo multiplicativo.
- Siempre que  $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  es **Anillo conmutativo con identidad que es dominio de integridad**.

2.  $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ,  $2\mathbb{Z}$  = enteros pares

- $(2\mathbb{Z}, +)$  es grupo abeliano.
- $\cdot$  distribuye con respecto a  $+$ .
- $\cdot$  es asociativo.
- No hay modulo multiplicativo.
- Siempre que  $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ .

$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$  es **Anillo conmutativo sin identidad que es dominio de integridad**.

3.  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

- $(\mathbb{R}, +)$  es grupo abeliano.
- $\cdot$  distribuye con respecto a  $+$ .
- $\cdot$  es asociativo.
- $1$  es modulo multiplicativo.
- $\cdot$  es invertiva en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  siendo  $0$  modulo de  $+$
- Siempre que  $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$ .

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es **Anillo conmutativo con identidad que es de división y dominio de integridad**.

4.  $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

- $(\mathbb{Z}_4, +)$  es grupo abeliano.
- $\cdot$  es conmutativo.
- No hay modulo multiplicativo.
- No se cumple que  $a \cdot b = e \implies a = e \vee b = e$  ya que  $2 \cdot 2 = 0$

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$  es **Anillo conmutativo sin identidad (no es DI)**.

## 8.3. Algoritmo de la division

#### Definición 8.2

#### Algoritmo de la division

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  con  $b \neq 0$ , entonces existen  $q, r \in \mathbb{Z}$  únicos tal que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$$

#### Ejemplo

$-7, 3 : -7 = 3(-3) + 2, \quad 0 \leq 2 < 3$

$$3 = -7(0) + 3, \quad 0 \leq 3 < |-7|$$

## 8.4. Máximo Común Divisor

#### Definición 8.3

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos simultáneamente, el **máximo común divisor** de  $a$  y  $b$ , denotado por  $(a, b)$  o  $\text{mcd}(a, b)$  es el mas grande de los divisores comunes de  $a$  y  $b$ . Si  $(a, b) = 1$ , decimos que  $a$  y  $b$  son co-primos o primos relativos.

#### Ejemplo

$14, 42 : \text{div}(14) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$

$\text{div}(42) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 14, \pm 21, \pm 42\}$

Divisores comunes de 14 y 42 son  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$

$$\max\{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\} = 14 \implies (14, 42) = 14$$

#### Nota

1.  $a|0$  si existe  $x \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 = ax$

Entonces  $\text{div}(0) = \mathbb{Z}$ ,  $a|0$  porque  $a \cdot 0 = 0$

Por ello no se puede considerar  $(0, 0)$  porque los divisores comunes de 0 y 0 es  $\mathbb{Z}$

2.  $a \neq 0, (a, 0) = |a|$

#### Teorema 8.4

Sea  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos simultáneamente, entonces existen  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  tal que:

$$(a, b) = ax_0 + by_0$$

$(a, b)|a \wedge (a, b)|b \implies (a, b)|ax_0 + by_0 \implies (a, b)|\min(S)$

$$\text{Como } (a, b)|\min(S) \wedge (a, b) > 0 \wedge \min(S) > 0 \implies [(a, b) \leq \min(S)]$$

Por algoritmo de Euclides existen  $q, r$  únicos tal que

$$a = \min(S)q + r, \quad 0 \leq r < \min(S)$$

$$r = a - \min(S)q$$

$$= a - q(ax_0 + by_0)$$

$$= a - ax_0q - by_0q$$

$$= a(1 - x_0q) + b(-y_0q)$$

Si  $r > 0$ , entonces  $r \in S \implies r \geq \min(S)$  Lo cual es una contradicción, por lo tanto  $r = 0 \implies a = \min(S)q \implies \min(S)|a$

«El razonamiento para  $a \geq b$  es análogo»

**Duda:** Como  $\min(S)|a \wedge \min(S)|b \implies \min(S)|(a, b) \implies \min(S) \leq (a, b)$

Por lo tanto  $\min(S) \leq (a, b) \wedge \min(S) \geq (a, b) \implies \min(S) = (a, b)$

□

#### Ejemplo

$(42, 105) = 21$

$$\begin{array}{c|ccc} 42 & 2 & 105 & 3 \\ \hline 21 & 3 & 35 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & & & 1 \end{array}$$

$$21 =$$

## **9. Clase 2025-09-22**

Se hizo demostración de Teorema 8.4

## **10. Clase 2025-09-25**

No clase por evento

## **11. Clase 2025-09-29**

Se hizo demostración de Ejercicios 1,3,4 del Taller 1

## 12. Clase 2025-10-02

### 12.1. Parcial

#### Ejercicio 12.1

Realizar los siguientes cálculos:

$$1. \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 (i^2 - j + 1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^4 (i^2 - j + 1) &= \sum_{j=1}^5 (2 - j + 5 - j + 10 - j + 17 - j) \\ &= \sum_{j=1}^5 (34 - 4j) \\ &= \sum_{j=1}^5 34 - \sum_{j=1}^5 4j \\ &= 5 \cdot 34 - (4 + 8 + 12 + 16 + 20) \\ &= 170 - 60 \\ &= 110 \end{aligned}$$

$$2. \prod_{\substack{d \geq 1 \\ d|12}} \left( \frac{12}{d} \right)$$

$$d \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$\prod_{\substack{d \geq 1 \\ d|12}} \left( \frac{12}{d} \right) = \frac{12}{1} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{6} \cdot \frac{12}{12}$$

$$= 12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 12^3$$

$$= 1728$$

$$3. (963, 657)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 963 & 3 & 657 & 3 \\ 321 & 3 & 219 & 3 \\ 107 & 107 & 73 & 73 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

$$963 = 3^2 \cdot 73^0 \cdot 107^1$$

$$657 = 3^2 \cdot 73^1 \cdot 107^0$$

$$(963, 657) = 3^2 \cdot 73^0 \cdot 107^0 = 9$$

4. Exprese (36, 63) como combinación lineal entera de 36 y 63.

$$\begin{array}{c|cc|c} 36 & 2 & 63 & 3 \\ 18 & 2 & 21 & 3 \\ 9 & 3 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & \\ 1 & & & \end{array}$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0$$

$$63 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

$$(36, 63) = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7^0 = 9$$

$$(36, 63) = 36(2) + 63(-1) = 72 - 63 = 9$$

#### Ejercicio 12.2

Demuestra que si  $m > 0$ , entonces  $(ma, mb) = m(a, b)$

**Demostración:** Sea  $S_1 = \{max + mby : x, y \in \mathbb{Z} \wedge max + mby > 0\}$

$$(ma, mb) = \min(S_1) = max_0 + mby_0 = m(ax_0 + by_0)$$

Como  $m(ax_0 + by_0) > 0$  y  $m > 0$ , entonces  $ax_0 + by_0 > 0$

Sea  $S_2 = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z} \wedge ax + by > 0\}$

$$m(ax_0 + by_0) = m \cdot \min(S_2) = m(a, b)$$

Por lo tanto  $(ma, mb) = m(a, b)$

□

#### Ejercicio 12.3

Considere la sucesión de números reales  $(x_n)$ , la cual se define por

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1$$

1. Explicite los primeros 6 términos de la sucesión.

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}$$

$$x_3 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$x_4 = 2 - \frac{5}{7} = \frac{9}{7} \approx 1.285$$

$$x_5 = 2 - \frac{7}{9} = \frac{11}{9} = 1.\bar{2}$$

$$x_6 = 2 - \frac{9}{11} = \frac{13}{11} = 1.\overline{18}$$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline x_n & 3 & \frac{5}{3} & \frac{7}{5} & \frac{9}{7} & \frac{11}{9} & \frac{13}{11} & \end{array}$$

2. Demuestre por inducción que  $1 \leq x_n \leq 3$

**Demostración:**

- Caso base:  $n = 1$ ,  $x_1 = 3$ ,  $1 \leq x_1 \leq 3$
- Paso inductivo: Supongamos que  $1 \leq x_n \leq 3$ .

Por HI

$$1 \leq x_n \implies \frac{1}{x_n} \leq 1 \implies -\frac{1}{x_n} \geq -1 \implies 2 - \frac{1}{x_n} \geq 1 \implies x_{n+1} \geq 1$$

Por HI

$$x_n \leq 3 \implies \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x_n} \implies -\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{x_n} \implies 2 - \frac{1}{3} \geq 2 - \frac{1}{x_n} \implies \frac{5}{3} \geq x_{n+1}$$

Por lo tanto  $1 \leq x_{n+1} \leq \frac{5}{3} < 3$

□

3. Demuestre por inducción que  $(x_n)$  es monótona decreciente

**Demostración:**

- Caso base:  $n = 2$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{5}{3}$ ,  $x_1 > x_2$
- Paso inductivo: Supongamos  $x_n > x_{n+1}$

Por HI

$$x_n > x_{n+1} \implies \frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n} \implies -\frac{1}{x_{n+1}} < -\frac{1}{x_n} \implies 2 - \frac{1}{x_{n+1}} < 2 - \frac{1}{x_n} \implies x_{n+2} < x_{n+1}$$

□

## **13. Clase 2025-10-06**

Corrección parcial

## 14. Clase 2025-10-09

### 14.1. Parcial 1 Parte 2

#### Ejercicio 14.1

1. Defina MCM de dos números y explique la importancia de la necesidad de las hipótesis.
2. Ejemplifique y demuestre el método usado.
3. Extienda la definición de MCM a un conjunto de  $n$  números finito.
4. Realice una lista de 10 propiedades del MCM.
5. Demuestre cada una de las propiedades anteriores.

Resuelto en anexo «assignments/parcial-1.2.pdf»

## 15. Clase 2025-10-13

Festivo no clase

## 16. Clase 2025-10-16

Clase cancelada

## 17. Clase 2025-10-20

Entrega Parcial,Taller,Quiz

**Actividad:** Demostrar  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$  por casos

**Demostración:**

- Caso 1:  $(a, b) = 1$ ,  $[a, b] = |ab|$ 
  1.  $|ab| > 0$
  2.  $|ab|$  es múltiplo común de  $a$  y  $b$
  3.  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $a|n$  y  $b|n$

Por (3)  $n = ak = bt$ ,  $k, t \in \mathbb{Z}$

- Caso 2:  $(a, b) > 1$

□

**18. Clase 2025-10-23**

**18.1. Relaciones**

**Apuntes pendientes**

**19. Clase 2025-10-27**

## 20. Clase 2025-10-30

### 20.1. Ejercicios

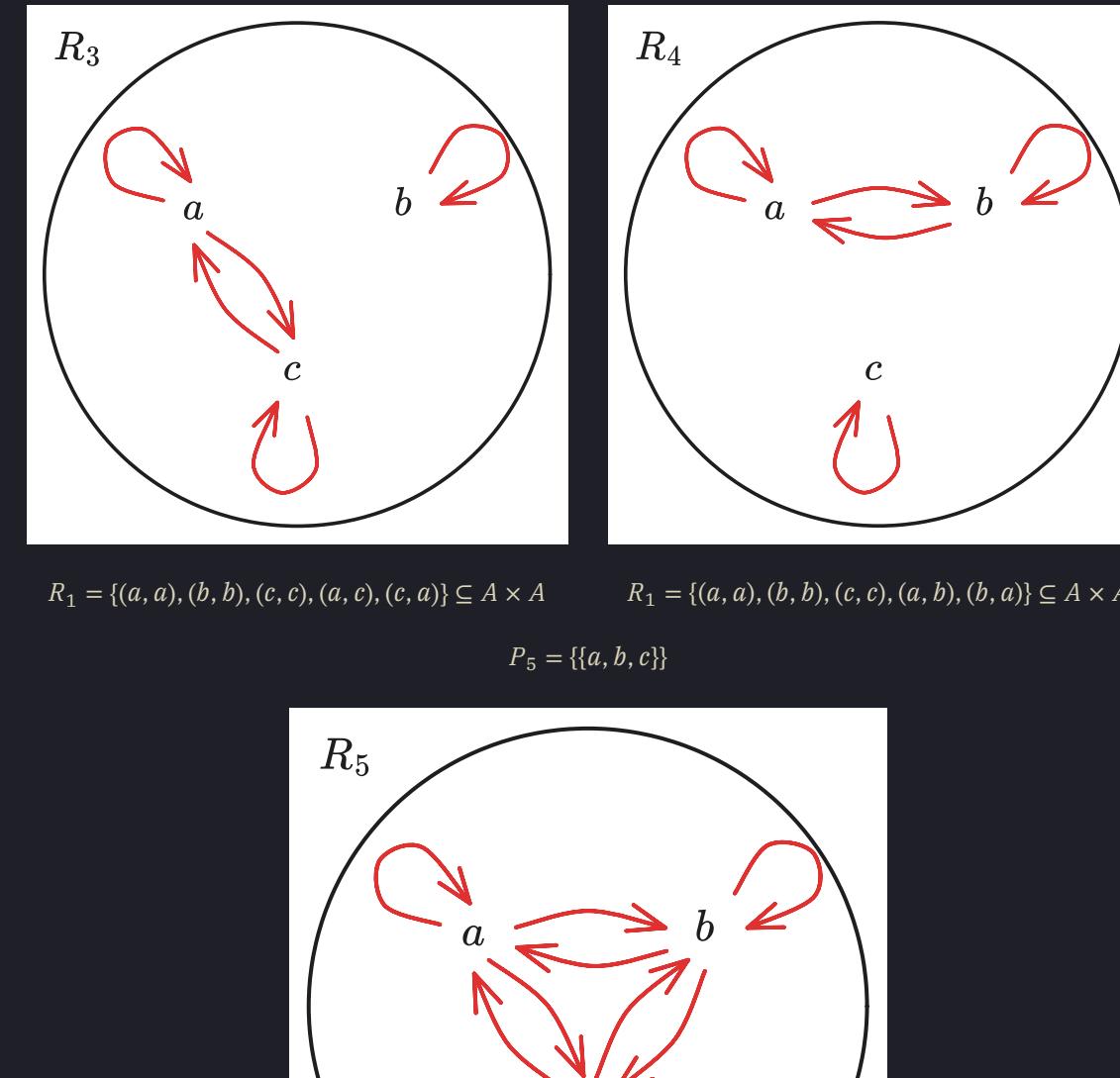
Resolución ejercicios 3,5,6 pagina 115 Muñoz

3. Sea  $A = \{a, b, c\}$ . Halle todas las particiones del conjunto  $A$ . Encuentre dando como conjuntos de parejas ordenadas, las relaciones de equivalencia correspondientes a las particiones halladas.

Particiones de  $A$

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$$

$$P_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$$

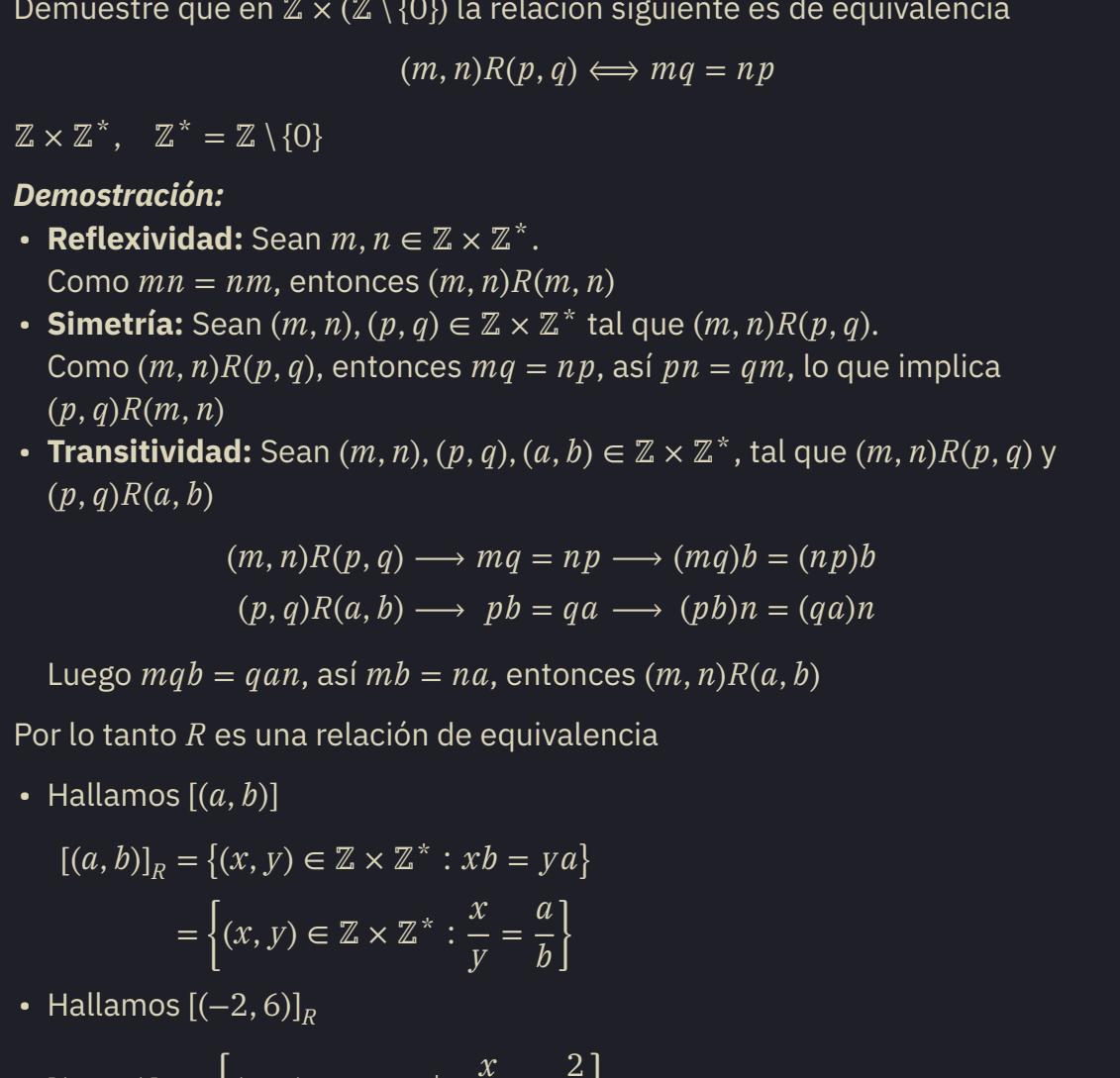


$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\} \subseteq A \times A$$

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, d)\} \subseteq A \times A$$

$$P_3 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$$

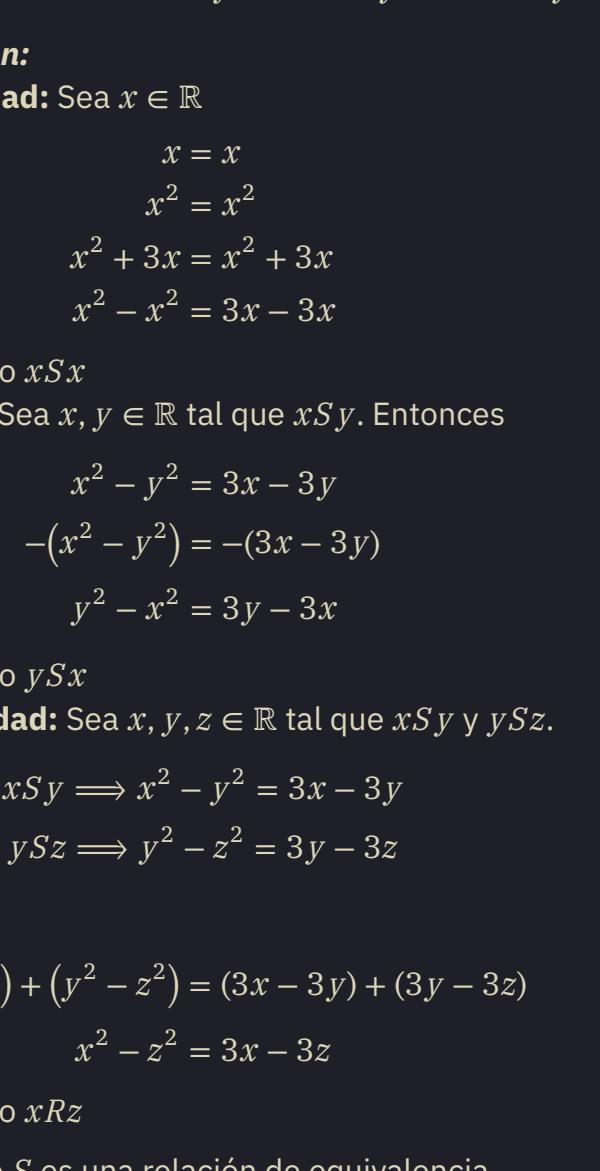
$$P_4 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$$



$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\} \subseteq A \times A$$

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (a, c), (c, b)\} \subseteq A \times A$$

$$P_5 = \{\{a, b, c\}\}$$



$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\} \subseteq A \times A$$

5. Demuestre que en  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  la relación siguiente es de equivalencia

$$(m, n)R(p, q) \iff mq = np$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

**Demostración:**

- **Reflexividad:** Sean  $m, n \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Como  $mn = nm$ , entonces  $(m, n)R(m, n)$
- **Simetria:** Sean  $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tal que  $(m, n)R(p, q)$ . Como  $(m, n)R(p, q)$ , entonces  $mq = np$ , así  $pn = qm$ , lo que implica  $(p, q)R(m, n)$
- **Transitividad:** Sean  $(m, n), (p, q), (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , tal que  $(m, n)R(p, q)$  y  $(p, q)R(a, b)$

$$(m, n)R(p, q) \rightarrow mq = np \rightarrow (mq)b = (np)b \\ (p, q)R(a, b) \rightarrow pb = qa \rightarrow (pb)n = (qa)n$$

Luego  $mqb = qan$ , así  $mb = na$ , entonces  $(m, n)R(a, b)$

Por lo tanto  $R$  es una relación de equivalencia □

- Hallamos  $[(a, b)]$

$$[(a, b)]_R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : xb = ya\} \\ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \right\}$$

- Hallamos  $[(-2, 6)]_R$

$$[(-2, 6)]_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \frac{x}{y} = -\frac{2}{6} \right\}$$

- Hallamos  $[(0, 1)]_R$

$$[(0, 1)]_R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : \frac{x}{y} = \frac{0}{1} \right\}$$

6. 1. Pruebe que en  $\mathbb{R}$  la relación es de equivalencia

$$xSy \iff x^2 - y^2 = 3x - 3y$$

**Demostración:**

- **Reflexividad:** Sea  $x \in \mathbb{R}$

$$x = x \rightarrow x^2 = x^2 \rightarrow x^2 + 3x = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x = x^2 + 3x \rightarrow x^2 - x^2 = 3x - 3x$$

Por lo tanto  $xSx$

- **Simetria:** Sea  $x, y \in \mathbb{R}$  tal que  $xSy$ . Entonces

$$x^2 - y^2 = 3x - 3y$$

$$-(x^2 - y^2) = -(3x - 3y)$$

$$y^2 - x^2 = 3y - 3x$$

Por lo tanto  $ySx$

- **Transitividad:** Sea  $x, y, z \in \mathbb{R}$  tal que  $xSy$  y  $ySz$ .

$$xSy \implies x^2 - y^2 = 3x - 3y$$

$$ySz \implies y^2 - z^2 = 3y - 3z$$

Luego

$$(x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (3x - 3y) + (3y - 3z)$$

$$x^2 - z^2 = 3x - 3z$$

Por lo tanto  $xSz$

Concluyendo  $S$  es una relación de equivalencia □

- Halle  $[a]_S$

$$[a]_S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - a^2 = 3x - 3a\}$$

Resolviendo  $x$  en la ecuación:

$$x^2 - a^2 = 3x - 3a$$

$$(x + a)(x - a) = 3(x - a)$$

$$(x + a)(x - a) - 3(x - a) = 0$$

$$(x - a)(x + a - 3) = 0$$

Entonces  $x = a \vee x = 3 - a$

Por lo tanto

$$[a]_S = \{a, 3 - a\}$$

- Halle  $[0]_S = \{0, 3\}$
- Halle  $[2]_S = \{2, 1\}$

2. Pruebe que en  $\mathbb{R}$  la relación es de equivalencia

$$xTy \iff x^3 + 2y = y^3 + 2x$$

**Demostración:**

- **Reflexividad:** Sea  $x \in \mathbb{R}$

$$x = x \rightarrow x^3 = x^3 \rightarrow x^3 + 2x = x^3 + 2x$$

Por lo tanto  $xTx$

- **Simetria:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tal que  $xTy$ .

$$xTy \implies x^3 + 2y = y^3 + 2x$$

$$y^3 + 2x = x^3 + 2y \implies yTy$$

Luego

$$(x^3 + 2y) + (y^3 + 2x) = (y^3 + 2x) + (x^3 + 2y)$$

$$x^3 + 2z + y^3 + 2y = z^3 + 2x + y^3 + 2y$$

$$x^3 + 2z = z^3 + 2x$$

Por lo tanto  $xTz$

Concluyendo  $T$  es una relación de equivalencia □

- Halle  $[a]_T$

$$[a]_T = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2a = a^3 + 2x\}$$

Resolviendo  $x$  en la ecuación:

$$x^3 - a^3 = 2x - 2a$$

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2) = 2(x - a)$$

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2) - 2(x - a) = 0$$

$$(x - a)(x^2 + xa + a^2 - 2) = 0$$

Entonces  $x = a \vee x = 3 - a$

Por lo tanto

$$[a]_T = \{a, 3 - a\}$$

- Halle  $[0]_T = \{0, 3\}$
- Halle  $[2]_T = \{2, 1\}$

2. Pruebe que en  $\mathbb{R}$  la relación es de equivalencia

$$xTy \iff x^3 + 2y = y^3 + 2x$$

**Demostración:**

- **Reflexividad:** Sea  $x \in \mathbb{R}$

$$x = x \rightarrow x^3 = x^3 \rightarrow x^3 + 2x = x^3 + 2x$$

Por lo tanto  $xTx$

- **Simetria:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tal que  $xTy$ .

$$xTy \implies x^3 + 2y = y^3 + 2x$$

$$y^3 + 2x = x^3 + 2y \implies yTy$$

Luego

$$(x^3 + 2y) + (y^3 + 2x) = (y^3 + 2x) + (x^3 + 2y)$$

$$x^3 + 2z + y^3 + 2y = z^3 + 2x + y^3 + 2y$$

$$x^3 + 2z = z^3 + 2x$$

Por lo tanto  $xTz$

Concluyendo  $T$  es una relación de equivalencia □

- Halle  $[a]_T$

$$[a]_T = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2a = a^3 + 2x\}$$

Resolviendo  $x$  en la ecuación:

$$x^3 - a^3 = 2x - 2a$$

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2) = 2(x - a)$$

$$(x + a)(x^2 - xa + a^2) - 2(x - a) = 0$$

$$(x - a)(x^2 + xa + a^2 - 2) = 0$$

Entonces  $x = a \vee x = 3 - a$

Por lo tanto

$$[a]_T = \{a, 3 - a\}$$

- Halle  $[0]_T = \{0, 3\}$
- Halle  $[2]_T = \{2, 1\}$

2. Pruebe que en  $\mathbb{R}$  la relación es de equivalencia

$$xTy \iff x^3 + 2y = y^3 + 2x$$

<b