Divisibilidad

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ $a, b \neq 0$ decimos que a divide a b si existe un numero entero c tal que $b = a \cdot c$ y se representa por $\frac{a}{b}$

También se dice que:

- b es divisible por a
- b es múltiplo de a
- a es un factor de b
- a es divisor de b

Ejemplo:

Determine si es verdadero o falso y justifique

- 3 divide a 15? $3|15$
  Verdadero porque $\exists 5 \in \mathbb{Z}$ tal que $15 = 3 \cdot 5$
- 6 es divisor de 100? $6|100$
  Falso porque $\neg\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $100 = 6 \cdot c$
- 8 es divisible por 3? $3|8$
  Falso porque $\neg\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $8 = 3 \cdot c$
- 7 es factor de 63? $7|63$
  Verdadero porque $\exists 9 \in \mathbb{Z}$ tal que $63 = 7 \cdot 9$
- 2 divide a 1000? $2|1000$
  Verdadero porque $\exists 500 \in \mathbb{Z}$ tal que $1000 = 2 \cdot 500$
- 500 es divisor de 12? $500|12$
  Falso porque $\neg\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $12 = 500 \cdot c$

Enteros divisibilidad y multiplicidad

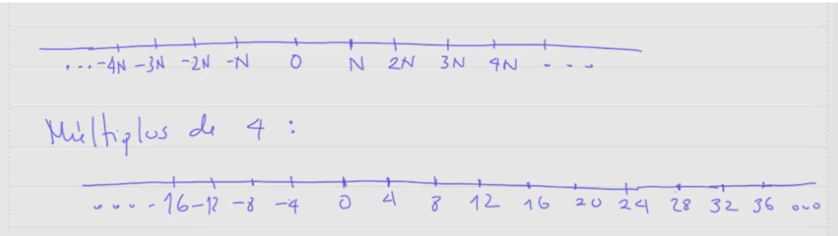
1. Escriba todos los divisores de 100:
   $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$
2. Escriba los 10 primeros múltiplos de 4:
   $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$
3. Determine si $6|120, 120|6, 3|12, 12|3$

$$\begin{aligned} V &: 6|120 \implies 120 = 6 \cdot 20 \\ F &: 120|6 \implies 6 = 120 \cdot c \land c \notin \mathbb{Z} \\ V &: 3|12 \quad \implies 12 = 3 \cdot 4 \\ F &: 12|3 \quad \implies 3 = 12 \cdot c \land c \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Observe:

- Un divisor de un entero n siempre es menor o igual que n. Ademas 1 es divisor de cualquier entero n pues $n = n \cdot 1$

  $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$
- Un múltiplo de un entero n siempre es mayor o igual que n y son de la forma $n, 2n, 3n, \ldots$ o también $\ldots, -3n, -2n, -n$

  Observe que hay una cantidad infinita de múltiplos de un numero. Ademas 0 es múltiplo de cualquier entero distinto de 0: Si $n \in \mathbb{Z} \implies 0 = 0 \cdot n$

Teoremas

> Teorema: Es una afirmación verdadera que debe ser probada por medio de una demostración matemática

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se cumple que:

- $a|b \land a|c \implies a|(b + c)$
  $H: a|b \land a|c$
  $T: a|(b + c)$ osea $\exists n \in \mathbb{Z} \implies b + c = a \cdot n$

  Supongamos que $a|b \land a|c$

  Es decir, $\exists k \in \mathbb{Z} \land b = ak$ y también $\exists m \in \mathbb{Z} \land c = am$

  Sumando estas igualdades termino a termino obtenemos

  $$\begin{aligned} b + c &= ak + am \\ &= a(k + m) \end{aligned}$$

  Como $k \in \mathbb{Z} \land m \in \mathbb{Z}$ entonces $k + m \in \mathbb{Z}$. Sea $n = k + m$. Luego:

  $$b + c = an; \quad n \in \mathbb{Z}$$

  $\therefore a|(b + c)$
- $a|b \implies a|bc$
  $H: a|b$
  $T: a|bc$ osea $\exists n \in \mathbb{Z} \land bc = an$

  Supongamos que $a|b$. Es decir, $\exists k \in \mathbb{Z} \land b = ak$

  Multiplicamos por c

  $$\begin{aligned} bc &= akc \\ &= a(kc) \end{aligned}$$

  Como $k \in \mathbb{Z} \land c \in \mathbb{Z} \implies kc \in \mathbb{Z}$ llamamos $n = kc$. Luego $bc = an; \quad n \in \mathbb{Z}$

  $\therefore a|bc$
- $a|b \land b|c \implies a|c$
  $H: a|b \land b|c$
  $T: a|c$ osea $\exists n \in \mathbb{Z} \land c = an$

  Supongamos que $a|b \land b|c$

  Es decir $\exists x, y \in \mathbb{Z} \land b = ax \land c = by$

  Remplazamos $b = ax$ en $c = by$ tenemos que $c = (ax)y = a(xy)$

  Como $x, y \in \mathbb{Z} \implies xy \in \mathbb{Z}$ llamamos $n = xy$

  Luego $c = an; \quad n \in \mathbb{Z}$

  $\therefore a|c$

Corolarios

> Corolario: Es una afirmación que es consecuencia de un teorema

- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \land a|b \land a|c \implies a|(bm + cn) \land m, n \in \mathbb{Z}$

  Supongamos que $a|b \land a|c$

  Por la parte 2 del teorema anterior tenemos que $a|bm$ para cualquier entero m

  Por la parte 2 del teorema anterior tenemos que $a|cn$ para cualquier entero n

  Luego como $a|bm \land a|cn$ por la parte 1 del teorema anterior se obtiene $a|(bm + cn)$