ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 4: Ánh xạ tuyến tính

NỘI DUNG

4.0. Định nghĩa và các tính chất:

Cho 2 tập hợp khác rỗng X, Y. Ánh xạ f từ X đến Y là một quy tắc sao cho mỗi x thuộc X, tồn tại duy nhất y thuộc Y. Ta viết

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Ánh xạ f gọi là đơn ánh nếu: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ánh xạ f gọi là toàn ánh nếu: $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$

Ánh xạ f gọi là song ánh nếu đơn ánh và toàn ánh. Hàm số ở phổ thông là ví dụ về ánh xạ.

Cho ánh xạ tức là chỉ ra quy luật, dựa vào đó xác định ảnh của mọi phần tử thuộc X.

Có nhiều cách cho ánh xạ: bằng đồ thị, bằng biểu đồ, bằng biểu thức đại số, bằng cách liệt kê,. . .

Cho ánh xạ hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Xét tính đơn ánh, toàn ánh, sóng ánh của các hàm số sau:

a. $f(x) = x^2$.

   Vì $f(1) = f(-1)$ nên hàm số không đơn ánh.

   Xét $y = -1$. Không tồn tại bất kỳ số thực x nào để $f(x) = x^2 = -1$. Do đó f không toàn ánh.

b. $f(x) = x^3 - x$

   Vì $f(0) = f(1)$ nên hàm số không đơn ánh.

   Vì tập giá trị của f bằng $(-\infty, +\infty)$ nên hàm số toàn ánh.

c. $f(x) = \arctan x$.

   Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$. Vì hàm số luôn tăng nên đơn ánh.

   Tập giá trị của f là $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nên không toàn ánh. Hay cách khác, ta chọn $y = 2 > \dfrac{\pi}{2}$ thì không tồn tại x để $.f(x) = 2$.

d. $f(x) = x^3 + 3x$.

   Ta có $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Hàm số đồng biến trên R nên đơn ánh.

   Tập giá trị của f là R nên hàm số toàn ánh

4.1. Ánh xạ tuyến tính

4.1.1 Định nghĩa và các tính chất:

Định nghĩa 1: Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính từ E vào F nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $\forall u, v \in E$ thì $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ thì $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

(có nghĩa là f bảo toàn phép cộng và phép nhân ngoài của E trên F).

Nếu $E = F$ thì ánh xạ tuyến tính $f : E \to E$ được gọi là phép biến đổi tuyến tính trong E hay là toán tử tuyến tính trong E.

Nếu $F = \mathbb{R}$ thì ánh xạ tuyến tính $f : E \to \mathbb{R}$ được gọi là dạng tuyến tính trên E.

Ví dụ: $f(x_1; x_2; x_3) = (2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2)$ là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^2$. Thật vậy:
$\forall x = (x_1; x_2; x_3), y = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3$ ta có
$x + y = (x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$. Do đó

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (2(x_1+y_1) + (x_2+y_2) - 3(x_3+y_3); (x_1+y_1) - 4(x_2+y_2)) \\ &= (2x_1 + 2y_1 + x_2 + y_2 - 3x_3 - 3y_3; x_1 + y_1 - 4x_2 - 4y_2) \\ &= (2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2) + (2y_1 + y_2 - 3y_3; y_1 - 4y_2) \\ &= f(x) + f(y) \quad (1). \end{aligned}$$

Hơn nữa, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ và $\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ ta có
$\lambda x = (x_1; x_2; x_3) = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3)$ va do đó

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= (2\lambda x_1 + \lambda x_2 - 3\lambda x_3; \lambda x_1 - 4\lambda x_2) \\ &= \lambda(2x_1 + x_2 - 3x_3; x_1 - 4x_2) \\ &= \lambda f(x) \quad (2). \end{aligned}$$

Từ $(1), (2)$ ta kết luận f là ánh xạ tuyến tính.

Định lý Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f : E \to F$ là ánh xạ tuyến tính nếu

$$\forall u, v \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ thì } f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Hệ quả Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Nếu $f : E \to F$ là ánh xạ tuyến tính thì $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall u_i \in E$, $i = \overline{1, m}$ ta có:

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \cdots + \lambda_m f(u_m).$$

Ví dụ: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, biết $f(1;1;0) = (2;-1)$, $f(1;1;1) = (1;2)$, $f(1;0;1) = (-1;1)$. Tìm $f(3;1;5)$. và $f(x_1;x_2;x_3)$.

Bài giải

1. Viết $(3;1;5) = \alpha(1;1;0) + \beta(1;1;1) + \gamma(1;0;1)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + \beta \qquad = 1 \\ \alpha \qquad + \gamma = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Như vậy $(3;1;5) = -2(1;1;0) + 3(1;1;1) + 2(1;0;1)$
$\Longrightarrow f(3;1;5) = -2(2;-1) + 3(1;2) + 2(-1;1) = (-3;10)$.

2. *Việc biểu diễn véc tơ tổng quát $(x_1;x_2;x_3)$ qua 3 véc tơ trên hơi phức tạp. Tham khảo cách làm sau.*
$f(0;0;1) = f(1;1;1) - f(1;1;0) = (1;2) - (2;-1) = (-1;3)$.
$f(0;1;0) = f(1;1;1) - f(1;0;1) = (1;2) - (-1;1) = (2;1)$.
$f(1;0;0) = f(1;1;0) - f(0;1;0) = (2;-1) - (2;1) = (0;-2)$
$f(x_1;x_2;x_3) = x_1 f(1;0;0) + x_2 f(0;1;0) + x_3 f(0;0;1) =$
$x_1(0;-2) + x_2(2;1) + x_3(-1;3)$
$f(x_1;x_2;x_3) = (2x_2 - x_3; -2x_1 + x_2 + 3x_3)$

Các tính chất: Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $f : E \to F$ là ánh xạ tuyến tính từ E vào F. Khi đó

1. $f(0_E) = 0_F$,
2. Nếu $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là hệ phụ thuộc tuyến tính trong E thì $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính trong F. Từ đó, nếu $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$ độc lập tuyến tính trong F thì $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ độc lập tuyến tính trong E.
3. Nếu E' là không gian con của E thì $f(E')$ là không gian con của F và nếu F' là không gian con của F thì $f^{-1}(F')$ là không gian con của E.
4. Cho E' là không gian con của E. Nếu hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_m\}$ là một hệ sinh của E' thì hệ $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)\}$ là một hệ sinh của $f(E')$ và $\dim f(E') \leqslant \dim E'$.

Các ví dụ khác :

- Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x, y) = (2x - y, 4x - 2y, 6x - 3y)$$

là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^3$.

- Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} f : \quad & E \to F \\ & x \mapsto f(x) = O_F \end{aligned}$$

là ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là ánh xạ không, kí hiệu là $\theta(.)$

- Cho E là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \quad & E \to E \\ & x \mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

  là ánh xạ tuyến tính và được gọi là ánh xạ đồng nhất, kí hiệu Id(.)

- Ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cho dưới đây không phải là ánh xạ tuyến tính:
  a) $f(x, y) = (x, y^2)$,
  b) $f(x, y) = (x + 1, y)$.

Định nghĩa 2: Cho E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$. Một ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ được gọi là

- đơn cấu nếu nó là một đơn ánh;
- toàn cấu nếu nó là một toàn ánh;
- đẳng cấu nếu nó là một song ánh. Nếu thêm $E = F$ thì nó được gọi là một tự đẳng cấu.

Khi có một đẳng cấu f từ E vào F thì ta viết $f : E \cong F$ và nói rằng E và F là hai không gian đẳng cấu với nhau.

4.1.2 Cách xác định ánh xạ tuyến tính

Định lý: Giả sử E và F là hai không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, $(e) = \{e_1, \dots e_m\}$ là một cơ sở của E và $e'_1, \dots, e'_m$ là m vectơ tùy ý của F. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ sao cho $f(e_i) = e'_i$ với mọi $i = \overline{1, m}$.

Nhận xét:

- Muốn xác định một ánh xạ tuyến tính ta chỉ cần xác định ảnh của các vectơ cơ sở của nó.
- Mỗi hệ m vectơ của F xác định một ánh xạ tuyến tính từ E vào F. Như vậy, có vô số ánh xạ tuyến tính từ E vào F, nếu $F \neq \{O_F\}$.

Bài tập 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ và $B = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (3, 5)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Giả sử $f(u_1) = (1, 1, 2)$ và $f(u_2) = (4, 2, 1)$.

a. Cho $u = (4, 5)$. Tìm $f(u)$.

b. Xác định biểu thức của f.

Bài tập 2: Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Cho biết $f(1, 1, 0) = (-2, -1)$, $f(1, 1, 1) = (1, 2)$ và $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$.

a. Xác định biểu thức của f.

b. Tìm $f(3, 1, 5)$.

4.1.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

a. Định nghĩa: Cho f là ánh xạ tuyến tính đi từ không gian vectơ n chiều E có cơ sở là $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ vào không gian vectơ m chiều F có cơ sở là $(f) = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$. Ma trận A cỡ $m \times n$ với cột thứ j là tọa độ của vectơ $f(e_j)$ đối với cơ sở (f) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở (e) và (f).

Ví dụ: Cho axtt $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ biết

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3; 2x_1 + x_3).$$

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

a) Cặp cơ sở chính tắc
$E = \{(1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)\}, \quad F = \{(1; 0), (0; 1)\}.$

b) Cặp cơ sở tùy ý
$B_1 = \{(1; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0)\}, \quad B_2 = \{(1; 3), (2; 5)\}.$

Bài giải

a)

$f(1;0;0) = (1;2)$; $f(0;1;0) = (2;0)$ và $f(0;0;1) = (-3;1)$

Ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $A := A_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1. \end{bmatrix}$

Nhận xét dạng ma trận của f:

$$[f(x_1;x_2;x_3)]_F = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + 0.x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1. \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b)

$$f(1;1;1) = (0;3) \Longrightarrow [f(1;1;1)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$$f(1;0;1) = (-2;3) \Longrightarrow [f(1;0;1)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 16 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

$$f(1;1;0) = (3;2) \Longrightarrow [f(1;1;0)]_{B_2} = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ma trận cần tìm là $A_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -11 \\ -3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

Ví dụ 2: Ánh xạ $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$f(X) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X, \quad \forall X \in M_2(\mathbb{R}).$$

a. Chứng minh rằng f là một phép biến đổi tuyến tính.
b. Tìm ma trận của f theo cơ sở

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) $\forall X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có

$$
\begin{aligned}
f(\alpha X + \beta Y) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot (\alpha X + \beta Y) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot (\alpha X) + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot (\beta Y) \\
&= \alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X + \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot Y \\
&= \alpha \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \right) + \beta \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot Y \right) \\
&= \alpha f(X) + \beta f(Y).
\end{aligned}
$$

b)

$$f(E_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.E_1 + 3.E_3$$

$$\Longrightarrow f(E_1) = 2.E_1 + 0.E_2 + 3.E_3 + 0.E_4$$

$$f(E_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(E_2) = 0.E_1 + 2.E_2 + 0.E_3 + 3.E_4$$

$$f(E_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(E_3) = 1.E_1 + 0.E_2 + 4.E_3 + 0.E_4$$

$$f(E_4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(E_4) = 0.E_1 + 1.E_2 + 0.E_3 + 4.E_4$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(E_1) = 2.E_1 + 0.E_2 + 3.E_3 + 0.E_4 \\ f(E_2) = 0.E_1 + 2.E_2 + 0.E_3 + 3.E_4 \\ f(E_3) = 1.E_1 + 0.E_2 + 4.E_3 + 0.E_4 \\ f(E_4) = 0.E_1 + 1.E_2 + 0.E_3 + 4.E_4 \end{cases}$$

Vậy ma trận cần tìm $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. Định lý 1 (Mối liên hệ giữa tọa độ của ảnh và tạo ảnh của một vectơ): Cho E là không gian vectơ n chiều, F là không gian vectơ m chiều và $f : E \to F$ là ánh xạ tuyến tính. Giả sử (e) là cơ sở của E, (f) là cơ sở của F và A là ma trận của f đối với cặp cơ sở (e) và (f). Nếu $u \in E$ và $f(u) = v$ thì

$$[v]_{(f)} = A \cdot [u]_{(e)} \qquad (1)$$

Trong đó $[u]_{(e)}, [v]_{(f)}$ lần lượt là ma trận cột biểu diễn tọa độ của u đối với cơ sở (e) và của v đối với cơ sở (f). Hơn nữa, A là ma trận duy nhất thỏa mãn (1).

Dạng ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : E \to F$ như sau:

$$f(x) = A \cdot X$$

với A là ma trận của f đối với cặp cơ sở (e) của E và (f) của F còn X là ma trận cột biểu diễn tọa độ của x đối với cơ sở (e).

Bài tập 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2[\mathbb{R}]$ xác định bởi

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d) + (a+2b)x + (b-3c)x^2.$$

Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $M_2(\mathbb{R})$ và $P_2[\mathbb{R}]$.

4.1.4 Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

a. Định nghĩa: Cho f là một ánh xạ tuyến tính đi từ không gian vectơ E vào không gian vectơ F. Khi đó,

- Tập hợp tất cả các phần tử của E có ảnh là phần tử $O_F \in F$ được gọi là nhân của f, ký hiệu là Ker$f$. Vậy

$$\text{Ker}f = \{u \in E |\ f(u) = O_F\}.$$

- Tập hợp tất cả các phần tử của F là ảnh của ít nhất một phần tử của E gọi là ảnh của ánh xạ f. Ký hiệu là $f(E)$ hay Imf. Vậy

$$\text{Im}f = \{v \in F |\ \exists u \in E :\ f(u) = v\}.$$

Nhận xét 2:

- $u \in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(u) = O_F$. Do đó tìm $\mathrm{Ker}f$ với $f : E \to F$ chẳng qua là tìm tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $f(u) = O_F$.
- $v \in \mathrm{Im}f \Leftrightarrow$ phương trình $f(u) = v$ có nghiệm $u \in E$.

b. Các định lý:

Định lý 1: Cho f là một ánh xạ tuyến tính đi từ không gian vectơ E vào không gian vectơ F. Khi đó

- $\mathrm{Ker}f$ là một không gian vectơ con của E.
- $\mathrm{Im}f$ là một không gian vectơ con của F.

Định lý 2: Cho f là một ánh xạ tuyến tính đi từ không gian vectơ E vào không gian vectơ F. Khi đó

- f là một đơn cấu nếu $\text{Ker}f = \{O_E\}$.
- f là một toàn cấu nếu $\text{Im}f = F$.

Định lý 3 Cho f là một ánh xạ tuyến tính đi từ không gian vectơ E vào không gian vectơ F và hệ vectơ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E. Khi đó

- f đơn cấu khi và chỉ khi hệ $\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ độc lập tuyến tính.
- $\text{Im}f = \text{Span}\{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$
- Công thức liên hệ giữa số chiều của ảnh, hạt nhân và không gian nguồn

$$\boxed{\dim \text{Ker}f + \dim \text{Im}f = \dim E}.$$

Ví dụ : Tìm $Kerf$, $dim(Kerf)$, Imf, $dim(Imf)$ với $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép biến đổi tuyến tính xác định bởi

$$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - 2y, x - y).$$

Giải
$Ker(f) = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : f((x; y; z)) = (0; 0; 0)\}$.
$\forall (x; y; z) \in Ker(f)$ ta có:
$f(x, y, z) = (x - y + z; 2x - 2y; x - y) = (0; 0; 0)$ suy ra hệ

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = y, z = 0$, suy ra $(\alpha; \alpha; 0)$ là nghiệm tổng quát của hệ trên. Vậy

$$Kerf = \{(\alpha; \alpha; 0) \in \mathbb{R}^3 : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Mặt khác $(\alpha;\alpha;0) \in Kerf$, ta có $(\alpha;\alpha;0) = \alpha(1;1;0)$ là nghiệm tổng quát của hệ. Suy ra $Kerf = <(1;1;0)>$. Lại do $(1;1;0)$ là véc tơ đltt nên nó là cơ sở của $Kerf$. Kết luận $dim(Kerf) = 1$.

Tìm Imf :

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ Ta có
$f(e_1) = f(1;0;0) = (1;2;1), f(e_2) = f(0;1;0) = (-1;-2;-1)$,
$f(e_3) = f(0;0;1) = (1;0;0)$. Suy ra
$Imf =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< (1;2;1), (-1;-2;-1), (1;0;0) >$.
Xét ma trận véc tơ hàng

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Vậy $Imf =< (1;2;1), (1;0;0) >=< (1;2;1), (0;-2;-1) >$.
Ma trận có hạng bằng 2 suy ra hai hệ $\{(1;2;1), (1;0;0)\}$ và $\{(1;2;1), (0;-2;-1)\}$ đều độc lập tuyến tính.
Kết luận $dim(Imf) = 2$ với cơ sở $\{(1;2;1), (1;0;0)\}$ hoặc $\{(1;2;1), (0;-2;-1)\}$.

Bài tập 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 4x_1 - 2x_2, 6x_1 - 3x_2)$ với mọi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

a. Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm Imf và số chiều của nó.

c. Tìm Ker$f$ và số chiều của nó.

Bài tập 2: Cho ánh xạ $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - 3x_3, 2x_2 - x_3)$ với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a. Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b. Tìm Imf và số chiều của nó.

c. Tìm Ker$f$ và số chiều của nó.

Bài tập 3: Cho ánh xạ $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & a+b+c+d \end{bmatrix}$$

a. Chứng minh rằng f là toán tử tuyến tính.
b. Tìm Ker$f$, dim(Ker$f$), Imf, dim(Imf).

4.1.5 Ma trận của ánh xạ tuyến tính khi thay đổi cơ sở:

Cho $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính đi từ không gian n chiều E vào không gian m chiều F.

Cho $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $(e') = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở của E và $(f) = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$, $(f') = \{f'_1, f'_2, ..., f'_m\}$ là hai cơ sở của F.

Gọi $A = A_{m\times n}$ là ma trận của ánh xạ f đối với cặp cơ sở $(e), (f)$ và $B = B_{m\times n}$ là ma trận của ánh xạ f đối với cặp cơ sở $(e'), (f')$.

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e') và S là ma trận chuyển cơ sở từ (f) sang (f').

Khi đó ta có

$$B = S^{-1}AP$$

Đặc biệt, nếu f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian n chiều E vào chính nó, ta có

$$B = P^{-1}AP$$

Ví dụ 1: Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận trong cặp cơ sở $(e) = \{(1,1,1); (1,0,1); (1,1,0)\}$ và $(f) = \{(1,1); (2,1)\}$ là

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc.
b. Tìm biểu thức của f (trong cặp cơ sở chính tắc).

Ví dụ 2: Cho $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_1 - 2a_2) + (2a_0 + 3a_2)x + 3a_2x^2.$$

Cho $B = \{1, x, x^2\}$ và $C = \{1 + x, 1 - x, x + x^2\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{P}_2$.
a. Tìm ma trận của T trong cơ sở chính tắc B.
b. Tìm ma trận của T trong cơ sở C theo hai cách dùng định nghĩa và dùng ma trận của T trong cơ sở chính tắc B.

Bài tập Hãy xác định ma trận của phép biến đổi tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sao cho qua f các vectơ $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0)$, $a_3 = (2, 0, 0)$ theo thứ tự được biến thành các vectơ tương ứng $b_1 = (1, 1, 2)$, $b_2 = (2, 3, 1)$, $b_3 = (3, 4, -1)$ đối với cơ sở chính tắc.

4.1.6 Ma trận đồng dạng:

a. Định nghĩa: Ta nói ma trận A vuông cấp n đồng dạng với ma trận B vuông cấp n nếu tồn tại ma trận T vuông cấp n, không suy biến sao cho

$$B = T^{-1}AT.$$

Ký hiệu: $A \sim B$.

Nhận xét: Cho f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian n chiều E vào chính nó. Nếu A là ma trận của f đối với cơ sở (e) và B là ma trận của nó đối với cơ sở (f) thì $A \sim B$.

b. Tính chất:

- $A \sim A$.
- Nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.
- Nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.

4.2. Chéo hóa ma trận:

4.2.1 Trị riêng và vectơ riêng:

a. Định nghĩa: Cho f là phép biến đổi tuyến tính trên không gian vectơ E trên $\mathbb{K}$. Số λ được gọi là giá trị riêng của f nếu tồn tại một vectơ $x \in E, x \neq O_E$ sao cho $f(x) = \lambda x$. Vectơ x khi đó được gọi là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ.

b. Tính chất:

- Nếu x là vectơ riêng nào đó cho trước ứng với giá trị riêng λ thì λ là duy nhất.
  Thật vậy, gọi x là vectơ riêng ứng với hai giá trị riêng λ và $\lambda^{'}$.
  Khi đó $f(x) = \lambda x$; $f(x) = \lambda^{'} x$. Do đó

$$\lambda x - \lambda^{'} x = f(x) - f(x) = O_E$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - \lambda^{'})x = O_E$$
$$\Leftrightarrow x = O_E \text{ vô lý.}$$

- Nếu x là vectơ riêng nào đó cho trước ứng với giá trị riêng λ thì vectơ $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ đó.
  Thật vậy, từ giả thiết, ta có: $x \neq O_E$; $f(x) = \lambda x$; $\alpha x \neq O_E$.
  Do đó
  $$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x).$$

Nhận xét:

$+$ Với mỗi giá trị riêng λ có vô số các vectơ riêng ứng với nó nhưng với mỗi vectơ khác phần tử không của không gian vectơ E chỉ ứng với (nếu có) một giá trị riêng duy nhất.

$+$ Cho E là không gian vectơ n chiều. Gọi A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trên E đối với cơ sở (e). Giả sử x là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ và $X = [x]/(e)$. Khi đó

$$\begin{aligned} & f(x) = \lambda x \\ \Leftrightarrow \quad & A \cdot X = \lambda X \\ \Leftrightarrow \quad & (A - \lambda I)X = O_{n\times 1} \end{aligned}$$

Cụ thể, nếu tọa độ của x đối với (e) là $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ và $A = (a_{ij})_n$ thì phương trình $(A - \lambda I)X = O_{n\times 1}$ được viết lại như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.2.2 Đa thức đặc trưng - Cách tìm vectơ riêng:

a. Định nghĩa: Đa thức

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Phương trình $P_A(\lambda) = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng của A.

Giả sử λ_0 là nghiệm của $P_A(\lambda) = 0$. Khi đó số lần nhân tử (λ - λ_0) xuất hiện trong $P_A(\lambda)$ được gọi là bội đại số của λ_0.

b. Các định lý:

Định lý 1: Cho E là không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{K}$. Gọi A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trên E đối với một cơ sở nào đó. Khi đó

- λ là giá trị riêng của f khi và chỉ khi $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Vectơ $x \neq O_E$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ khi và chỉ khi tọa độ X của nó là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$(A - \lambda I)X = O_{n\times 1}.$$

Nhận xét: Nếu ta xét E là không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ thì tập nghiệm của $\det(A - \lambda I) = 0$ luôn khác rỗng.

Định lý 2: Nếu A và B là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trên không gian vectơ n chiều E trên $\mathbb{K}$ tương ứng theo hai cơ sở (e) và (e') thì

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I), \quad \text{với mọi } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Nhận xét: Các giá trị riêng của của phép biến đổi tuyến tính f trên không gian vectơ n chiều E trên $\mathbb{K}$ không phụ thuộc vào cơ sở của E.

Cách tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính f

Bước 1 Tìm ma trận A của f theo một cơ sở nào đó của E.

Bước 2 Tìm đa thức đặc trưng $\det(A - \lambda I)$.

Bước 3 Giải phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$ trên $\mathbb{K}$. Các nghiệm của phương trình này (nếu có) là các giá trị riêng cần tìm.

Bước 4 Để tìm các vectơ riêng x ứng với một giá trị riêng λ_0 nào đó ta giải hệ phương trình thuần nhất $(A - \lambda_0 I)X = O_{n\times 1}$ trên $\mathbb{K}$ với $X = [x]/E$. Để ý rằng hệ này luôn có vô số nghiệm nên vectơ riêng thường được tìm dưới dạng nghiệm tổng quát.

Chú ý Hệ phương trình thuần nhất $(A - \lambda I)X = O_{n\times 1}$ với $X = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ được viết dưới dạng tường minh là:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Ví dụ Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$, biết rằng đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ ma trận của f là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-9) - 2(-\lambda-3) - 2(3+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

Giải phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda I) = 0$ ta thu được 3 giá trị riêng phân biệt của A là -3, 1 và 3.

Gọi $x = (x_1, x_2, x_3) \neq O_{\mathbb{R}^3}$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Khi đó x là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - \lambda x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - \lambda x_3 &= 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$+$ Với $\lambda = -3$ thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(6\alpha, -7\alpha, 5\alpha)$. Do đó vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -3$ có tọa độ với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(6\alpha, -7\alpha, 5\alpha)$ với α tùy ý khác 0.

$+$ Với $\lambda = 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(-2\alpha, \alpha, \alpha)$. Do đó vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ có tọa độ với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(-2\alpha, \alpha, \alpha)$ với α tùy ý khác 0.

$+$ Với $\lambda = 3$ thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(0, \alpha, \alpha)$. Do đó vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ có tọa độ với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $(0, \alpha, \alpha)$ với α tùy ý khác 0.

Định nghĩa Cho A là ma trận vuông cấp n của ánh xạ tuyến tính $f : E \to E$ đối với cơ sở nào đó. Nếu λ là một giá trị riêng của A thì

- Tập tất cả các nghiệm X làm cho $(A - \lambda I)X = O_{n\times 1}$ được kí hiệu là E_λ và được gọi là không gian con riêng ứng với λ.
- Số chiều của E_λ được gọi là bội hình học của λ.
- Nếu A có một giá trị riêng λ sao cho bội hình học của λ nhỏ hơn bội đại số của λ thì A được gọi là ma trận khuyết.

Ví dụ 2 Xác định bội đại số và bội hình học của các giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính f trên $\mathbb{R}^3$, biết rằng ma trận của f đối với một cơ sở nào đó là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ 0 & 2\lambda-18 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-9)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-9)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -20 & -8 \\ -4 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-9)^2(\lambda+9).$$

Giải phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda I) = 0$ ta thu được 2 giá trị riêng phân biệt của A là - 9 và 9. Vậy bội đại số của -9 là 1 và bội đại số của 9 là 2.

Gọi $x = (x_1, x_2, x_3) \neq O_{\mathbb{R}^3}$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Khi đó x là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 4x_2 - 8x_3 & = 0 \\ -4x_1 + (7-\lambda)x_2 - 4x_3 & = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + (1-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$+$ Với $\lambda = -9$ thì (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 8x_3 & = 0 \\ -4x_1 + 16x_2 - 4x_3 & = 0 \\ -8x_1 - 4x_2 + 10x_3 & = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(2\alpha, \alpha, 2\alpha)$. Do đó $E_{-9} = \{(2\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là: $\{(2,1,2)\} \Rightarrow \dim E_{-9} = 1$ và bội hình học của -9 là 1.

+ Với $\lambda = 9$ thì (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(\alpha; -2\alpha - 2\beta; \beta)$. Do đó $E_9 = \{(\alpha; -2\alpha - 2\beta; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là:

$$\{(1, -2, 0);\ (0, -2, 1)\}$$

$\Rightarrow \dim E_9 = 2$ và bội hình học của 9 là 2.

Định lý 3 Cho A là ma trận vuông cấp n và λ là một giá trị riêng của A. Khi đó

- λ^k là giá trị riêng của A^k, $k = 2, 3, \ldots$
- Nếu A là ma trận không suy biến thì $1/\lambda$ là giá trị riêng của A^{-1}.
- Nếu $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý thì $\lambda + \alpha$ là giá trị riêng của $A + \alpha I$.
- A và A^T có cùng các giá trị riêng.
- A suy biến khi và chỉ khi $\lambda = 0$ là giá trị riêng của A.

Ví dụ Cho

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Tìm các giá trị riêng của A^5, A^{-1}, A^T và $A + 2I$.

Giải:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & -1\\ -12 & -\lambda & 5\\ 4 & 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Giải phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda I)=0$ ta thu được 3 giá trị riêng phân biệt của A là -1, 1 và 2. Từ đó

- A^5 có 3 giá trị riêng là -1, 1, và $2^5=32$.
- A^{-1} có 3 giá trị riêng là -1, 1, và $1/2$.
- A^T có 3 giá trị riêng là -1, 1, và 2.
- $A+2I$ có 3 giá trị riêng là 1, 3, và 4.

Định lý 4 Cho $f : E \to E$ là ánh xạ tuyến tính trên không gian vectơ n chiều E trên $\mathbb{K}$. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là m vectơ riêng ứng với m giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ thì hệ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ độc lập tuyến tính.

Định lý 5 Cho $f : E \to E$ là ánh xạ tuyến tính trên không gian vectơ n chiều E trên $\mathbb{K}$. Giả sử ma trận A của f đối với cơ sở (e) nào đó có n giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Gọi x_i là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó

- Hệ vectơ $(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là một cơ sở của E.
- Ma trận của f theo cơ sở (x) này là ma trận chéo:

$$B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = P^{-1}AP,$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (x).

Ví dụ Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 5x_1 + 3x_2 + 4x_3, -5x_1 - 2x_2 + 9x_3)$$

a. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f là ma trận chéo.

Giải: a. Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ của $\mathbb{R}^3$. Ta có

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (3,5,-5);\ f(e_2) = f(0,1,0) = (0,3,-2)$$
$$f(e_3) = f(0,0,1) = (0,4,9).$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ -5 & -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 4 \\ -5 & -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-7)(\lambda-5).$$

Giải phương trình đặc trưng $\det(A-\lambda I) = 0$ ta thu được 3 giá trị riêng phân biệt của A là 3, 5 và 7.

Gọi $x = (x_1, x_2, x_3) \neq O_{\mathbb{R}^3}$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ. Khi đó x là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = 0 \\ 5x_1 + (3-\lambda)x_2 + 4x_3 & = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + (9-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

+ Với $\lambda = 3$ thì (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 0x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(-4\alpha, 25\alpha, 5\alpha)$. Do đó $E_3 = \{(-4\alpha, 25\alpha, 5\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là: $\{u_1 = (-4, 25, 5)\} \Rightarrow \dim E_3 = 1$ và bội hình học của $\lambda = 3$ là 1.

+ Với $\lambda = 5$ thì (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(0, 2\alpha, \alpha)$. Do đó $E_5 = \{(0, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là: $\{u_2 = (0, 2, 1)\} \Rightarrow \dim E_5 = 1$ và bội hình học của $\lambda = 5$ là 1.

$+$ Với $\lambda = 7$ thì (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 & = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm tổng quát của nó là: $(0, \alpha, \alpha)$. Do đó $E_7 = \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ có một cơ sở là: $\{u_3 = (0, 1, 1)\} \Rightarrow \dim E_7 = 1$ và bội hình học của $\lambda = 7$ là 1.

Hệ ba vectơ $\{u_1, u_2, u_3\} = (u)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (u). Vì $\{e_1; e_2; e_3\}$ là cơ sở chính tắc nên P chỉ là ma trận cột của $\{u_1, u_2, u_3\} = (u)$. Khi đó P là

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 25 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gọi B là ma trận của f đối với cơ sở (u). Khi đó

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ -15/4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ -5 & -2 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 25 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nhận thấy B là ma trận chéo. Vậy cơ sở cần tìm là:

$$\{(-4, 25, 5); (0, 2, 1); (0, 1, 1)\}.$$

4.2.3 Chéo hóa ma trận:

a. Định nghĩa: Ma trận A cấp n được gọi là chéo hóa được, nếu tồn tại ma trận P cấp n khả nghịch sao cho $P^{-1}AP = B$ là ma trận chéo. Ma trận P khi đó được gọi là ma trận làm chéo hóa A.

Nhận xét:

- Từ định nghĩa ta suy ra, chéo hóa ma trận A là tìm ma trận B có dạng chéo đồng dạng với A.
- Từ định lý 5 mục trước ta suy ra nếu ma trận A cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.

b. Định lý: Nếu ma trận A cấp n có đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính thì A chéo hóa được.

c. Ứng dụng của chéo hóa ma trận:

- Tính lũy thừa của ma trận : Với A là ma trận cấp n chéo hóa được thì

$$A^k = P\big[\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\big]^k P^{-1},\ k = 2, 3, \ldots$$

  với $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = B$ là ma trận chéo của A.
- Định lý Cayley - Hamilton: Nếu phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận là A và đa thức đặc trưng là $P(\lambda)$ thì $P(A) = O_{n\times n}$.

Ví dụ: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

a. Hãy chéo hóa ma trận A.
b. Tìm A^{10}.
c. Kí hiệu $P(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của A. Chứng minh

$$P(A) = O_{2\times 2}.$$

Giải: a. $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + \lambda + 2.$

Giải phương trình đặc trưng $\det(A - \lambda I) = 0$ ta thu được 3 giá trị riêng phân biệt của A là -1 và 2.

Các không gian con riêng ứng với $\lambda = -1$ và $\lambda = 2$ là:

$$E_{-1} = \{(\alpha, \alpha) \big| \alpha \in \mathbb{R}\};\ E_2 = \{(2\alpha, \alpha) \big| \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow E_{-1}$ có một cơ sở là $\{u_1 = (1, 1)\}$,
E_2 có một cơ sở là $\{u_2 = (2, 1)\}$.

Rõ ràng $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B$$

Vậy ma trận P làm chéo hóa ma trận A và ma trận chéo là B.

b.

$$
\begin{aligned}
B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A &= PBP^{-1} \\
&\Rightarrow A^{10} = PB^{10}P^{-1} \\
&\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

c.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= A^2 - A - I \\
&= \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bài tập 1: Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ với ma trận của nó đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a. Tìm $\mathrm{Im} f$.

b. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f là ma trận chéo.

Bài tập 2: Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$$

a. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

b. Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ để đối với cơ sở đó ma trận của f là ma trận chéo.

Bài tập 3: Cho $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là ánh xạ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_2 + 9x_3, x_2 + 2x_3).$$

a. Chứng minh f là phép biến đổi tuyến tính.

b. Gọi A là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Tìm A và tính A^{10}.