Chương 3.Không gian vectơ

NỘI DUNG

3.1. Định nghĩa và các tính chất

3.1.1 Định nghĩa tích Descartes:

- Tích Descartes (Đề các) của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là tập hợp tất cả các bộ có thứ tự n phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sao cho $a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots, a_n \in A_n$. Kí hiệu là $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Vậy, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, \forall i = \overline{1, n}\}$, và $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i = \overline{1, n}$.
- Tích Descartes $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ lần}}$ viết gọn là A^n được định nghĩa như sau:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A, \forall i = \overline{1, n}\}$$

3.1.2 Định nghĩa không gian vectơ: Cho V là một tập hợp khác rỗng. Trên tập V ta xây dựng 2 phép toán sau:

- Phép cộng $+$

$$
\begin{aligned}
+ : \quad & V \times V \to V \\
& (x, y) \mapsto x + y
\end{aligned}
$$

- Phép nhân ngoài $\cdot$

$$
\begin{aligned}
\cdot : \quad & \mathbb{K} \times V \to V \\
& (\lambda, x) \mapsto \lambda x
\end{aligned}
$$

($\mathbb{K}$ là trường số. Từ đây về sau ta luôn hiểu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nếu không nói gì thêm.)

Nếu $(V,+,\cdot)$ thỏa mãn 8 tiên đề sau:

1. $x+y=y+x, \forall x,y\in V$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z, \forall x,y,z\in V$
3. $\exists O_V\in V: x+O_V=O_V+x=x, \forall x\in V$
4. $\forall x\in V, \exists -x\in V: x+(-x)=(-x)+x=O_V,$
5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, \forall x,y\in V, \forall\alpha\in\mathbb{K}$
6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, \forall x\in V, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$
7. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x), \forall x\in V, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}$
8. $1x=x, \forall x\in V$

thì V được gọi là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ hay một $\mathbb{K}$- không gian vectơ. Mỗi phần tử $x\in V$ được gọi là một vectơ, mỗi $\alpha\in\mathbb{R}$ được gọi một vô hướng. Phần tử O_V ở trên được gọi là phần tử không của V, phần tử $-x$ được gọi là phần tử đối của x.

3.1.3 Các ví dụ:

- Tập V các vectơ hình học chung gốc O trong không gian cùng với phép cộng hai vectơ và phép nhân một số thực với một vectơ là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ với phần tử không là vectơ không $\vec{0}$ và phần tử đối của $\overrightarrow{OA} \in V$ là vectơ đối $-\overrightarrow{OA}$.
- Tập $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ các ma trận cỡ $m \times n$ cùng với phép cộng hai ma trận và phép nhân một số thực với một ma trận là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ với phần tử không là $O_{m\times n}$ và phần tử đối là ma trận đối.
- Tập $K[x]$ các đa thức một biến với các hệ số trên $\mathbb{R}$ với phép cộng hai đa thức và phép nhân một số thực với một đa thức là một không gian vector trên $\mathbb{R}$ với phần tử không là đa thức $P(x) = 0$ và phần tử đối của đa thức $P(x)$ là đa thức $-P(x)$.

- Tập $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ lần}}$

$$= \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\right\}$$

Trên $\mathbb{R}^n$ ta định nghĩa phép toán cộng hai phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ và phép nhân với một vô hướng $\alpha \in \mathbb{R}$ như sau:

  - Phép cộng hai phần tử: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
  - Phép nhân với một vô hướng: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

Tập $\mathbb{R}^n$ cùng với hai phép toán trên là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với phần tử $O = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ lần}}$ và phần tử đối của $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ là $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Xét $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$. Tổng của hai hàm số $f, g \in C[a, b]$ là hàm số $f + g \in C[a, b]$ được định nghĩa bởi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

và tích của một số $\alpha \in \mathbb{R}$ với hàm số $f \in C[a, b]$ là hàm số $\alpha f \in C[a, b]$ được định nghĩa bởi

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Khi đó $C[a, b]$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

- Xét tập số thực $\mathbb{R}$ và tập số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Đối với $\mathbb{R}$, tổng của hai số thực là một số thực và nếu $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\alpha x \in \mathbb{R}$. Tám tiên đề trong định nghĩa của một không gian vectơ chính là các tính chất quen thuộc của số thực. Vì vậy $\mathbb{R}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên $\mathbb{Q}$ không là không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ vì $x \in \mathbb{Q}, \alpha \in \mathbb{R}$ thì nói chung $\alpha x \notin \mathbb{Q}$.

3.1.4 Các tính chất: Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

1. Tính duy nhất của phần tử không

$$\forall x \in V: \; x + O_V = O_V + x = x.$$

2. Với mỗi $x \in V$, tồn tại duy nhất phần tử đối của nó.
3. $\forall x \in E : 0x = O_V$.
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha O_V = O_V$.
5. $\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{R} : \alpha x = O_V$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$ hoặc $x = O_V$.
6. $\forall x \in E : (-1)x = -x$.
7. Nếu $x + z = y + z$ thì $x = y, \forall x, y, z \in V$ (Luật giản ước).
8. Nếu $x + y = z$ thì $x = z - y$, $\forall x, y, z \in V$ (Quy tắc chuyển vế).

3.2. Không gian vectơ con

3.2.1 Định nghĩa: Nếu V và W đều là không gian vectơ trên $\mathbb{K}$ và nếu W là một tập con khác rỗng của V thì W được gọi là không gian vectơ con của V (gọi gọn là không gian con của V).

3.2.2 Các định lý:

Định lý 1: Tập con W khác rỗng của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$ là không gian con của V nếu và chỉ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

1. $\forall x, y \in W : x + y \in W$.
2. $\forall x \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha x \in W$.

Nhận xét:

- Bất kì không gian vectơ V đều có hai không gian con là bản thân tập V và tập $\{O_V\}$ gồm chỉ một phần tử không của V. Các không gian con này được gọi là các không gian con tầm thường.
- Nếu W là một không gian vectơ con của V trên $\mathbb{K}$ thì $O_V \in W$. Thật vậy, do W là một không gian vectơ con của V nên $W \neq \varnothing$. Do đó, tồn tại $x \in W \subset V$. Từ đó, với $0 \in \mathbb{K}$, ta có: $O_V = 0 \cdot x \in W$ (bởi vì W là một không gian vectơ con của V nên điều kiện 2 được thỏa mãn).
  Từ đó, nếu $O_V \notin W$ thì W không phải là một không gian vector con của V.

Định lý 2: Tập W khác rỗng của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$ là không gian con của V trên $\mathbb{K}$ khi và chỉ khi với mọi $x, y \in W$, với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ta có: $\alpha x + \beta y \in W$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ là một không gian vectơ con trên $\mathbb{R}$ của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2: Hỏi tập nào sau đây là không gian vectơ con trên $\mathbb{R}$ của $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \qquad U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Định lý 3: Giả sử $W_1, W_2, \ldots, W_m$ là những không gian con của một không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$. Khi đó $W = \cap_{i=1}^{m} W_i$ là một không gian con của V.

Định lý 4: Giả sử W_1, W_2 là hai không gian con của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$. Ta định nghĩa

$$W = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}.$$

Khi đó W là một không gian con của V trên $\mathbb{K}$ và được gọi là tổng của hai không gian con W_1, W_2 và được kí hiệu là $W_1 + W_2$.

3.3. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

3.3.1 Tổ hợp tuyến tính: Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Vectơ $w \in V$ được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_1, \ldots, x_m$ trong V nếu tồn tại $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ sao cho

$$w = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m.$$

Nếu w là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_1, \ldots, x_m$ thì ta nói w biểu thị tuyến tính được qua các vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Ví dụ 1: Trong $\mathbb{R}^2$ cho $x_1 = (1,2)$ và $x_2 = (0,1)$. Khi đó

$$w = (2,-1) = 2x_1 + (-5)x_2.$$

Vậy w biểu thị tuyến tính qua x_1 và x_2.
Ví dụ 2: Trong $\mathbb{R}^2$ xét hệ 3 vectơ sau:

$$\{x_1 = (1,1); x_2 = (2,0); x_3 = (3,1)\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{R}^2} = (0,0) &= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \\ &= 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 \end{aligned}$$

Nhận xét:

- Phần tử O_V luôn được biểu thị tuyến tính qua hệ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ với cách biểu thị là

$$O_V = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$$

  Cách biểu diễn này được gọi là cách biểu diễn tầm thường.

- Cách biểu thị tuyến tính của một vectơ qua một hệ vectơ nói chung không phải là duy nhất.

Ví dụ 3: Tìm a để vectơ $x = (1, 3, 5)$ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ x_1, x_2, x_3 trong $\mathbb{R}^3$ với $x_1 = (2, 4, 7)$; $x_2 = (3, 2, 5)$; $x_3 = (5, 6, a)$.

3.3.2 Phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính: Cho m vectơ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$, $m \geq 1$.

- Hệ vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{K}$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = O_V.$$

- Hệ vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ được gọi là độc lập tuyến tính nếu nó không phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là từ đẳng thức $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = O_V$ kéo theo $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Chú ý: Xét phương trình vectơ $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = O_V$ theo các ẩn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Nếu phương trình này có nghiệm duy nhất thì hệ vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ độc lập tuyến tính, còn nếu phương trình này có vô số nghiệm thì hệ vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 4 Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ với $e_1 = (1, 2, 3)$; $e_2 = (0, 1, 1)$; $e_3 = (1, 1, -1)$. Hỏi hệ (e) độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Ví dụ 5 Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ với $e_1 = (2, 0, 3)$; $e_2 = (1, 1, 4)$; $e_3 = (1, -1, -1)$. Hỏi hệ (e) độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Ví dụ 6 Trong $M_2(\mathbb{R})$ cho hệ 4 vectơ $\{A, B, C, D\}$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Chứng minh rằng hệ bốn vectơ này độc lập tuyến tính.

3.3.3 Các tính chất của hệ độc lập và phụ thuộc tuyến tính:

1. Trong không gian vectơ, mỗi vectơ khác O_V là một hệ độc lập tuyến tính.
2. Mọi hệ con của một hệ độc lập tuyến tính là một hệ độc lập tuyến tính.
   Từ tính chất này suy ra nếu thêm vào một hoặc nhiều vectơ của một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì hệ mới cũng phụ thuộc tuyến tính.
3. Mọi hệ vectơ chứa O_V là một hệ phụ thuộc tuyến tính.
4. Điều kiện cần và đủ để một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính là có một vectơ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại.

Ví dụ 7 Trong không gian vectơ hình học V.

- Hai vectơ lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng cùng phương; độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không cùng phương.
- Ba vectơ lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi chúng đồng phẳng; độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
- Bốn vectơ bất kỳ lập thành một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 8: Cho $\mathbb{P}_2$ là không gian các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2 và

$$p_1 := p_1(x) = x^2 - 1$$
$$p_2 := p_2(x) = x^2 + x + 1$$
$$p_3 := p_3(x) = x^2 - ax - 3$$

Với giá trị nào của a thì hệ $U = \{p_1, p_2, p_3\}$ độc lập tuyến tính?

3.4. Cơ sở - Số chiều - Tọa độ

3.4.1 Không gian con sinh bởi một hệ vectơ:

a. Định lý: Cho hệ gồm m vectơ $x_1, x_2, ..., x_m$ của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$. Tập hợp

$$W = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m | \alpha_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, m}\}.$$

là một không gian con của V và được gọi là không gian con sinh bởi hệ vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, còn hệ $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ được gọi là hệ sinh của W.

Kí hiệu không gian con sinh bởi hệ vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ là Span$\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ hoặc $< x_1, x_2, ..., x_m >$.

Ví dụ: Cho $S = \{v_1 = (1,1,1); v_2 = (2,3,1); v_3 = (3,5,1)\}$ là tập con của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Chứng tỏ rằng S phụ thuộc tuyến tính và hãy chỉ ra tập con $T \subset S$ sao cho T chỉ có hai vectơ nhưng $\text{Span}(T) = \text{Span}(S)$.

Giải: Xét phương trình vectơ

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = O_{\mathbb{R}^3} \qquad (1)$$

Khi đó $\quad (1) \Leftrightarrow \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(2,3,1) + \alpha_3(3,5,1) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_i \to h_i - h_1, i \neq 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó, $\mathrm{r}(A) = 2 < 3$ nên (2) có nghiệm không tầm thường. Do đó, (1) đúng ngay cả khi các $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ không đồng thời bằng 0.

Vậy hệ S phụ thuộc tuyến tính.

Hệ pt (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = \alpha_3 \\ \alpha_2 & = -2\alpha_3 \end{cases}$

Lấy $\alpha_3 = 1$, ta có $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2$. Thay vào (1), ta được $v_1 - 2v_2 + v_3 = O_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow v_3 = 2v_2 - v_1$.

Xét hệ $T = \{v_1, v_2\}$. Ta chứng minh $\mathrm{Span}(T) = \mathrm{Span}(S)$.

Để chứng minh điều này, ta chứng minh $\mathrm{Span}(T) \subset \mathrm{Span}(S)$ và $\mathrm{Span}(S) \subset \mathrm{Span}(T)$.

+ Lấy $v \in \text{Span}(T)$. Khi đó $\exists\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + 0\beta_3$$

Từ đó, $v \in \text{Span}(S)$.

+ Lấy $v \in \text{Span}(T)$. Khi đó $\exists\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3$. Thay $v_3 = 2v_2 - v_1$ vào, ta được

$$\begin{aligned} v &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 (2v_2 - v_1) \\ &= (\gamma_1 - \gamma_3) v_1 + (\gamma_2 + 2\gamma_3) v_2 \end{aligned}$$

Từ đó, $v \in \text{Span}(S)$.

b. Định nghĩa (hệ sinh của một không gian vectơ): Giả sử V là một $\mathbb{K}$-không gian vectơ. Một hệ vectơ trong V được gọi là một hệ sinh của V nếu mọi vectơ của V đều biểu thị tuyến tính qua hệ đó. Nếu V có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử thì V được gọi là $\mathbb{K}$-không gian vectơ hữu hạn sinh.

Ví dụ 1: Hệ vectơ $\{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

Giải: $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ta có

$$x = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Do đó, hệ vectơ $\{e_1; e_2; e_3\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng hệ vectơ $\{f_1 = (1, 1, 0);$ $f_2 = (1, 0, 1); f_3 = (0, 1, 1)\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

Giải: Hệ vectơ (f) là một hệ sinh của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, x biểu thị tuyến tính qua (f)

$\Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$

$\Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(0, 1, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = x_1 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = x_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = x_3 \end{cases} \tag{3}$$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \to h_2 - h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3 \to h_3 + h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 2 & x_3 + x_2 - x_1 \end{array}\right]$$

Nhận thấy $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\bar{A}) = 3$ nên hệ pt (3) có nghiệm duy nhất với mỗi $x \in \mathbb{R}^3$ cho trước. Vậy (f) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Cách khác: Vì $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ và hệ pt (3) có số ẩn bằng với số pt nên hệ pt (3) là hệ pt Cramer. Do đó hệ pt (3) có nghiệm duy nhất với mỗi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ cho trước.Vậy (f) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 3: Xét tập $W = \{(a_1, a_2, 0, 0) : a_i \in \mathbb{R}\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$.

a. Chứng minh rằng W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b. Chứng minh rằng hệ hai vectơ $\{e_1, e_2\}$ với $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ và $e_2 = (0, 1, 0, 0)$ là một hệ sinh của W.

c. Thêm vectơ $\delta = (2, 3, 0, 0)$ vào hệ vectơ $\{e_1, e_2\}$. Xét không gian con W' sinh bởi hệ $\{e_1, e_2, \delta\}$. Chứng tỏ rằng $W = W'$, tức là hai hệ $\{e_1, e_2\}$ và $\{e_1, e_2, \delta\}$ đều là hệ sinh của W.

Giải:

a. Vì $O_{\mathbb{R}^4} \in W$ nên $W \neq \varnothing$. Lấy tùy ý $a, b \in W$.

Giả sử $a = (a_1, a_2, 0, 0)$, $b = (b_1, b_2, 0, 0)$. Khi đó $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned}\alpha a + \beta b &= \alpha \cdot (a_1, a_2, 0, 0) + \beta \cdot (b_1, b_2, 0, 0)\\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, 0, 0)\end{aligned}$$

Do $a, b \in W$ nên $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Từ đó, $\alpha a_1 + \beta b_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha a_2 + \beta b_2 \in \mathbb{R}$ và $\alpha a + \beta b \in W$. Vậy W là không gian con của $\mathbb{R}^4$.

b. $\forall x = (x_1, x_2, 0, 0) \in W$ thì

$$\begin{aligned} x &= x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_1 \end{aligned}$$

Do đó, mọi $x \in W$ đều biểu thị tuyến tính qua $\{e_1, e_2\}$. Vậy $\{e_1, e_2\}$ là một hệ sinh của W.

c. Ta sẽ chứng minh $W' = \text{Span}\{e_1, e_2, \delta\} = \text{Span}\{e_1, e_2\} = W$.
+ Lấy $x \in W$. Khi đó $\exists\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$:

$$x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + 0 \cdot \delta$$

Từ đó, $x \in W'$.
+ Lấy $x \in W'$. Khi đó $\exists\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R} : v = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$.
Vì $\delta = (2, 3, 0, 0) = 2e_1 + 3e_2$ nên

$$\begin{aligned} x &= \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 (2e_1 + 3e_2) \\ &= (\gamma_1 + 2\gamma_3) v_1 + (\gamma_2 + 3\gamma_3) v_2 \end{aligned}$$

Từ đó, $x \in W$.

Câu hỏi Trong một hệ sinh của một không gian vectơ có thể có một số tối thiểu vectơ sinh ra không gian ấy không?
Trả lời: Khái niệm độc lập tuyến tính.

3.4.2 Cơ sở:

a. Định nghĩa: Một hệ sinh độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V được gọi là một cơ sở của V.

Ví dụ 1: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, hệ ba vectơ

$$\{e_1 = (1,0,0); e_2 = (0,1,0); e_3 = (0,0,1)\}$$

là một cơ sở, người ta gọi đó là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Tổng quát: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ là hệ n vectơ

$$\{e_1 = \underbrace{(1,0,0,\ldots,0)}_{n \text{ thành phần}}; e_2 = (0,1,0,\ldots 0); \ldots; e_n = (0,0,0,\ldots,1)\}.$$

Hệ vectơ $(f) = \{f_1 = (1, 1, 0);\ f_2 = (1, 0, 1); f_3 = (0, 1, 1)\}$ cũng là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

Thật vậy, theo ví dụ 2 mục 3.4.1 ta đã chứng minh hệ vectơ (f) là một hệ sinh của $\mathbb{R}^3$. Hơn nữa, do $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ nên hệ vectơ (f) độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2: Trong không gian vectơ $\mathbb{P}_2$ gồm các đa thức có bậc bé hơn hoặc bằng 2, hệ vectơ $\{1, x, x^2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{P}_2$.

Tổng quát: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ $\mathbb{P}_n$ là hệ $n+1$ vectơ $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Hệ các vectơ sau

$$\begin{aligned} p_1 &:= p_1(x) = x^2 - 1 \\ p_2 &:= p_2(x) = x^2 + x + 1 \\ p_3 &:= p_3(x) = x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

cũng là một cơ sở của $\mathbb{P}_2$.

Ta sẽ chỉ ra rằng hệ vectơ $\{p_1, p_2, p_3\}$ độc lập tuyến tính và là một hệ sinh của $\mathbb{P}_2$.

Xét phương trình $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = O_{\mathbb{P}_2}$.

Pt này $\Leftrightarrow \alpha_1(x^2 - 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 - 2\alpha_3)x - \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 & = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Vì $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nên hệ vectơ $\{p_1, p_2, p_3\}$ độc lập tuyến tính.

Lấy tùy ý $p \in \mathbb{P}_2$. Giả sử $p = ax^2 + bx + c$. Khi đó p biểu thị tuyến tính qua $\{p_1, p_2, p_3\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$: $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$.
$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = \alpha_1(x^2 - 1) + \alpha_2(x^2 + x + 1) + \alpha_3(x^2 - 2x - 3)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 - 2\alpha_3)x - \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = ax^2 + bx + c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = a \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 & = b \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 & = c \end{cases} \quad \text{có nghiệm}$$

Vì $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nên hệ đang xét là hệ Cramer $\rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, tức là với mọi $p \in \mathbb{P}_2$ thì p luôn biểu thị tuyến tính qua hệ $\{p_1, p_2, p_3\}$. Do đó hệ $\{p_1, p_2, p_3\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{P}_2$.

b. Sự tồn tại của một cơ sở:

Bổ đề: Nếu không gian vectơ V có một hệ sinh gồm m vectơ thì số vectơ của mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính của V không vượt quá m.

Hệ quả: Số vectơ trong hai cơ sở khác nhau của cùng một không gian vectơ thì bằng nhau.

Định lý 1: Mọi không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$ khác $\{O_V\}$ đều có cơ sở.

Hệ quả: Trong không gian vectơ, mỗi hệ vectơ độc lập tuyến tính bất kỳ đều có thể bổ sung thành một cơ sở.

Định lý 2: Từ một hệ sinh của một không gian vectơ khác $\{O_V\}$ ta có thể chọn ra một cơ sở.

Ví dụ 3: Trong không gian vectơ $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$, cho tập

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 3a-b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chứng minh rằng W là một không gian con của $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ và hãy chỉ ra một cơ sở của W.

Giải: Dễ dàng chứng minh được W là không gian con của $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ theo định nghĩa.

$$\forall v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 3a-b \end{bmatrix} \in W, \text{ ta có: } v = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Đặt $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix} = v_1, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = v_2$ thì hệ vectơ $\{v_1, v_2\}$ là một hệ sinh của W. Ta sẽ chứng minh hệ vectơ này độc lập tuyến tính.

Xét phương trình $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = O_{M_{3\times 1}(\mathbb{R})}$.

Pt này $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\3\alpha_1 - \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Vậy $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$ là một cơ sở của W.

Ví dụ 4: Cho W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$ được sinh bởi hệ vectơ $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ với $v_1 = (1, 1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, 4, -1, 5)$, $v_4 = (1, 0, 4, -1)$, $v_5 = (2, 5, 0, 2)$. Hãy tìm tập con T của tập S mà T là cơ sở của W.

3.4.3 Số chiều của không gian vectơ:

a. Định nghĩa: Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{K}$.

- Ta nói V là một không gian n chiều ($n \geq 1$) nếu hệ vectơ cơ sở của V có số phần tử bằng n. Ta cũng nói số chiều của V là n và kí hiệu $\dim V = n$.
  Không gian $\{O_V\}$ được xem là có số chiều bằng 0 vì nó không có cơ sở. Các không gian n chiều được gọi chung là các không gian hữu hạn chiều.
- V gọi là không gian vô hạn chiều, nếu nó không hữu hạn chiều, tức là hệ vectơ cơ sở của V có vô hạn phần tử ($\dim V = \infty$).

Ví dụ 1: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$,
$\dim K[x] = \infty$, $\dim C[a, b] = \infty$.

Ví dụ 2: $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ vì $M_2(\mathbb{R})$ có một cơ sở là:

$$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

b. Định lý 1: Trong một không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{K}$ mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính gồm n vectơ đều là cơ sở.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng hệ vectơ $\{A, B, C, D\}$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$.

Giải: Vì số vectơ của hệ $S = \{A, B, C, D\}$ bằng với $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$ nên ta chỉ còn phải chứng minh hệ S độc lập tuyến tính.
Xét phương trình $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = O_{M_2(\mathbb{R}}$
Pt này $\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Do đó, S độc lập tuyến tính.

Định lý 2: Giả sử W là một không gian con của không gian vectơ V trên $\mathbb{K}$. Khi đó

- $\dim W \leqslant \dim V$.
- $\dim W = \dim V$ khi và chỉ khi $W = V$.

Định lý 3: Cho U và W là hai không gian con của không gian vectơ trên $\mathbb{K}$. Khi đó

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Ví dụ 4: Giả sử U, W là hai không gian con thực sự của không gian vectơ V.

a. Nếu $\dim V = 3$, $\dim U = \dim W = 2$ thì $\dim(U \cap W)$ bằng bao nhiêu?

b. Nếu $\dim V = 6$, $\dim U = \dim W = 4$ thì $\dim(U \cap W)$ có thể bằng bao nhiêu?

3.4.4 Tọa độ của một vectơ:

a. Định lý: Cách biểu thị tuyến tính của một vectơ qua một hệ các vectơ độc lập tuyến tính là duy nhất.

b. Định nghĩa: Trong không gian vectơ n-chiều V trên $\mathbb{K}$ cho một cơ sở $(e) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ và $x \in V$. Khi đó tồn tại duy nhất một bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ sao cho

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ được gọi là tọa độ của x đối với cơ sở (e).

Kí hiệu $x/(e) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ hoặc $[x]/(e) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

Chú ý 1: Tọa độ của một vectơ đối với cơ sở chính tắc là chính nó. Do đó, sau này khi nói đến tọa độ của một vectơ mà không đề cập gì đến cơ sở thì ta hiểu đó là tọa độ của nó đối với cơ sở chính tắc.

Ví dụ 1: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$ cho hệ vectơ $(u) = (u_1, u_2, u_3)$ với $u_1 = (1, 1, 1)$; $u_2 = (1, 1, 2)$; $u_3 = (1, 2, 3)$.

a. Chứng minh rằng (u) là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b. Cho $x = (6, 9, 14)$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở (u).

c. Tìm tọa độ của $y = (1, 2, 3)$ đối với cơ sở (u).

Giải:

Ví dụ 2: Cho $(p) = \{p_1, p_2, p_3\}$ với $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^2 - 2x - 3$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{P}_2$. Tìm tọa độ của $p(x) = 3x^2 + x + 1$ đối với cơ sở (p).
Giải:

c. Ma trận chuyển cơ sở: Cho V là một không gian vector n chiều trên $\mathbb{K}$, $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ và $(e') = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở của V. Ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e') là một ma trận vuông cấp n với cột thứ j là tọa độ của vectơ e'_j đối với cơ sở (e).

Chú ý: Gọi B, B' lần lượt là ma trận cột các vectơ cơ sở (e) và (e') của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$. Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'. Khi đó P là ma trận không suy biến và là nghiệm của phương trình: $BP = B'$.

Ví dụ 3: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$ cho hai cơ sở sau:

$$(e) = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$(e') = \{e'_1 = (1, 1, 0), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 0, 1)\}.$$

a. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e').

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ (e') sang (e).

d. Công thức đổi tọa độ (Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau): Cho V là một không gian vectơ n chiều trên $\mathbb{K}$, $(e) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ và $(e') = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở của V và $x \in V$. Giả sử $x/(e) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$ và $x/(e') = (\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)^T$. Khi đó

$$x/(e) = P \cdot x/(e')$$

trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ (e) sang (e').

Ví dụ 4: Xét không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ trên $\mathbb{R}$ với hai cơ sở

$$(e) = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$(e') = \{e'_1 = (1, 1, 0), e'_2 = (0, 1, 1), e'_3 = (1, 0, 1)\}.$$

Cho $x = (-5, 0, 1)$. Tìm tọa độ của x đối với cơ sở (e').

Ví dụ 5: Gọi $\mathbb{P}_3$ là không gian vectơ gồm các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 3.

a. Chứng minh rằng hệ

$$(p) = \{p_1 = 1, p_2 = x - 1, p_3 = (x-1)^2, p_4 = (x-1)^3\}$$

là một cơ sở của $\mathbb{P}_3$.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc $(e) = \{1, x, x^2, x^3\}$ của $\mathbb{P}_3$ sang cơ sở (p) này.

c. Tìm tọa độ của $f(x) = 2x^3 - x + 5$ đối với cơ sở (p).

3.5. Hạng của một hệ vectơ

3.5.1 Định nghĩa: Hạng của hệ vectơ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ của không gian vectơ V là số tối đa các vectơ độc lập tuyến tính có thể rút ra từ hệ đó.

3.5.2 Cách tìm hạng của một họ vectơ:

Định lý Trong không gian vectơ m-chiều V trên $\mathbb{K}$. Cho hệ vectơ bất kỳ $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Giả sử tọa độ của n vectơ này đối với một cơ sở nào đó của V là:

$$\begin{cases} x_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m1}) \\ x_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{m2}) \\ \ldots \\ x_n = (\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{mn}) \end{cases} , \alpha_{ij} \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Khi đó hạng của hệ vectơ trên bằng hạng của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

(cột thứ j tương ứng với tọa độ của vectơ x_j, $j = \overline{1, n}$).
Chú ý: $r(A^T) = r(A)$.

Ví dụ 1: Tìm hạng của hệ vectơ $\{x_1, x_2, x_3\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$ với $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 2, 3, 4)$, $x_3 = (2, 3, 2, 3)$.

3.5.3 Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một hệ vectơ:

Định lý: Số chiều của không gian con W sinh bởi một hệ vectơ $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ của không gian vectơ V bằng hạng r của S. Mọi hệ gồm r vectơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của W.

Nhận xét:

- Muốn tìm một cơ sở của không gian con W sinh bởi hệ vectơ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ của không gian vectơ $\mathbb{R}^m$, ta thực hiện như sau:
  Bước 1: Lập ma trận A cỡ $m \times n$, trong đó cột thứ j của A là tọa độ của vectơ x_j. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa A^T về ma trận bậc thang B.
  Bước 2: Tập tất cả các dòng khác không có trong B tạo nên một cơ sở của W.
- Nếu V là không gian vectơ n chiều và hệ S gồm n vectơ của V sinh ra V, tức là $V = \text{Span}(S)$ thì S là cơ sở của V.
- Để chứng minh một hệ n vectơ là một cơ sở của không gian vectơ n chiều ta chứng minh hạng của hệ đó bằng n.

Ví dụ 2: Cho W là một không gian con của $\mathbb{R}^4$ được cho trong ví dụ 4 của mục 3.4.2 b. Sử dụng hạng của ma trận, hãy xây dựng một cơ sở cho W.

3.5.3. Sự đồng nhất các vectơ của không gian vectơ n chiều E với các phần tử của $\mathbb{R}^n$:

Bổ đề: Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của V. Nếu u và v là các vectơ trong V và c là một số thực thì

- $[u + v]/B = [u]/B + [v]/B$
- $[cu]/B = c[u]/B$.

Mở rộng: Cho V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ và $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của V. Khi đó,

$$[c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_m u_m]/B = c_1[u_1]/B + c_2[u_2]/B + \ldots + c_m[u_m]/B$$

Ví dụ 3: Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$ cho hệ vectơ $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ với

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là một cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$ và $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Tìm $[A + B]/(e)$ và $2[A]/(e)$.

Định lý: Giả sử V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với cơ sở $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ là một tập con của V và $T = \{[u_1]/B, [u_2]/B, \ldots, [u_p]/B\}$.

a. Vectơ $u \in V$ thuộc Span(S) khi và chỉ khi $[u]/B$ thuộc Span(T).

b. Tập S độc lập tuyến tính trong V khi và chỉ khi tập T độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^p$.

Hệ quả: Giả sử V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$ với cơ sở $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$. Cho $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ là một tập con của V và $T = \{[u_1]/B, [u_2]/B, \ldots, [u_p]/B\}$. Khi đó S là một cơ sở của V khi và chỉ khi T là một cơ sở của $\mathbb{R}^p$.

Nhận xét: Từ hệ quả ta suy ra các bước tìm một cơ sở cho không gian con W sinh bởi hệ vectơ $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ của không gian $m-$chiều $V \neq \mathbb{R}^m$:

1. Tìm $[A_i]/E, i = \overline{1, n}$ với E là một cơ sở nào đó của V. Đặt
$$T = \Big\{[A_1]/E, [A_2]/E, \ldots, [A_n]/E\Big\}.$$
Để ý, $[A_i]/E \in \mathbb{R}^m, \ \forall i = \overline{1, n}.$
2. Tìm một cơ sở $(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ cho Span(T) theo các bước trong nhận xét trước của mục 3.5.3.
3. Với mỗi $u_i \in (u)$ ta tìm B_i sao cho $[B_i]/E = u_i$.
4. Kết luận $\{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ là một cơ sở cho $W =$ Span(S).

Ví dụ 4: Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$ cho tập $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ với

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tìm một cơ sở cho Span(S).

Bài tập chương không gian vectơ

Bài tập 1: Tìm a (nếu có) để vectơ $x = (9, 12, a)$ biểu thị tuyến tính được qua các vectơ x_1, x_2, x_3 trong $\mathbb{R}^3$ với $x_1 = (3, 4, 2)$; $x_2 = (6, 8, 7)$; $x_3 = (3, 4, 5)$.

Bài tập 2: Tập $\{\sin x, \cos x\}$ là tập con của không gian vectơ $C[-\pi, \pi]$. Chứng minh rằng tập này độc lập tuyến tính.
(HD: Đặt $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ và giả sử $f(x) = O_V$. Khi đó $f(0) = 0$ và $f(\frac{\pi}{2}) = 0$).

Bài tập 3: Cho tập các hàm số

$$V = \{f(x) : f(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{3x} + de^{4x}, \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

a. Chứng tỏ rằng V là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$.

b. Chỉ ra rằng $B = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong V. (HD: Đặt $h(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{4x}$ và giả sử rằng $h(x) = O_V$. Khi đó $h'(x) = O_V, h''(x) = O_V, h'''(x) = O_V$. Do đó, $h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0, h'''(0) = 0$).

Bài tập 4: Trong $\mathbb{P}_4$ xét tập các vectơ $S = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, trong đó $p_1(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 4$, $p_2(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$, $p_3(x) = x^4 + x + 3$, $p_4(x) = x^4 + x^3 - x + 2$ và $p_5(x) = x^4 + x^2$. Hỏi S có phải là một cơ sở của $\mathbb{P}_4$?

Bài tập 5: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$, $e_3 = (1, 1, 0)$, $e_4 = (3, 5, 4)$, $e_5 = (2, 3, 3)$. Tìm cơ sở của không gian con sinh bởi hệ các vectơ này. Tìm tọa độ của các vectơ e_4 và e_5 đối với cơ sở đó.

Bài tập 6: Trong không gian vectơ $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$ các ma trận vuông cấp hai, cho tập

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 3b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Chứng minh rằng E là một không gian con của $M_2(\mathbb{R})$ và tính $\dim E$. Hãy chỉ ra một cơ sở của E.

Bài tập 7: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ hãy lập ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở

$$(e) = \{e_1 = (1,2,3), e_2 = (2,-1,1), e_3 = (3,1,1)\}$$

sang cơ sở

$$(e') = \{e_1' = (1,1,0), e_2' = (0,1,1), e_3' = (1,0,1)\}.$$

Tìm tọa độ của $u = 3e_1 + 4e_2 - 6e_3$ đối với cơ sở (e').

Bài tập 8: Trong không gian vectơ $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$ các ma trận vuông cấp hai, cho tập (E) các vectơ sau:

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

a. Chứng minh rằng (E) là cơ sở của $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $\dim E$.

b. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc (e) của $M_2(\mathbb{R})$ sang (E).

c. Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ đối với cơ sở (E).

Bài tập 9: Cho W là một không gian con của $\mathbb{R}^3$, $W = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ với $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (3, 5, 2)$, $u_4 = (2, 5, -2)$.

a. Hãy tìm 03 cơ sở khác nhau cho W.

b. Tìm số chiều của W.

b. Tìm các ma trận chuyển cơ sở cho các cơ sở trên.

Hướng dẫn giải bài tập 9a:

Cách 1: Sử dụng đặc trưng đại số của W: Lấy $b = (b_1, b_2, b_3)$ là vectơ tùy ý của $\mathbb{R}^3$ thì $b \in W$ khi và chỉ khi phương trình $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = b$ có nghiệm (x_1, x_2, x_3, x_4).

Cách 2: Bỏ bớt những vectơ không cần thiết trong hệ sinh của W. Vì $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ sinh ra W nên một cơ sở cho W là tập con của hệ này. Để có được điều này, ta giải phương trình $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = O_{\mathbb{R}^3}$. Nếu ẩn x_i nào là ẩn chính thì ta giữ lại u_i. Tập tất cả các u_i này tạo ra một cơ sở cho W.

Cách 3: Đặt $A = [u_1^T \, u_2^T \, u_3^T \, u_4^T]$ (các cột của A sinh ra W). Biến đổi A về ma trận bậc thang B. Các cột khác không trong B là cơ sở cho W.

Bài tập 10: Trong không gian $M_2(\mathbb{R})$ trên $\mathbb{R}$ cho tập $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ với

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tìm hai cơ sở khác nhau cho Span(S) và tìm ma trận chuyển cơ sở cho chúng.

Bài tập 11: Tìm cơ sở cho không gian con

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \big| x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}.$$