Université de Versailles-Saint Quentin
Licence 2 Informatique

Année 2020-2021

Projet IN303 : Placement de tâches

Table des matières

1 Introduction

Il s'agit dans ce projet de pouvoir planifier des tâches selon différents scénarios et différentes contraintes. Vous allez étudier les situations suivantes :

Situation 1 : Placement réalisable A chaque unité de temps, il existe une capacité de traitement de tâches. En fonction des capacités disponibles à chaque unité de temps, quels sont les ensembles de tâches qui vont être possibles de traiter ou non ?

Situation 2 : Minimiser le temps Si les capacités de traitement sont identiques à chaque unité de temps, quel est le temps minimum requis pour traiter un ensemble de tâches ?

Situation 3 : Minimiser les capacités Si maintenant on se fixe un délai maximum pour traiter un ensemble de tâches, quelle est la capacité minimale requise pour pouvoir traiter un ensemble de tâches ?

Nous allons dans un premier temps, définir exactement nos différents paramètres dans la section 2 puis nous aborderons les différentes situations décrites ci-dessus dans les sections suivantes.

2 Modèle général

Un *profil* $\mathcal{P}$ de *durée* t est une suite $c_1, \dots, c_t$ de *capacités* entières positives ou nulles ($c_i \geq 0$) où chaque c_i est la capacité au *temps* i.

Une *tâche* est représentée par un identifiant et une *durée* (entier strictement positif).

Par abus de notation, un ensemble de k tâches sera noté $S = \{d_1, \dots, d_k\}$ où $d_i \geq 0$ est la durée de la tâche i.

Un *placement réalisable* d'un ensemble $S = \{d_1, \ldots, d_k\}$ de k tâches dans un profil $\mathcal{P} = c_1, \ldots, c_t$ est une suite de k entiers $t_1, \ldots, t_k$ tels que :

— la tâche i débute au temps t_i et se termine au temps $t_i + d_i - 1$ (on doit donc avoir $t_i + d_i - 1 \leq t$).

— une tâche utilisant une unité de capacité à chaque unité de temps où elle est placée, pour respecter les capacités du profil $\mathcal{P}$, la somme des capacités utilisées à chaque unité de temps $j = 1..t$ doit être inférieure ou égale à c_j.

Exemple :

Soit $\mathcal{P} = 5, 7, 10, 2, 3, 6$, un profil de durée $t = 6$. Soit $S = \{3, 5, 3, 4\}$ un ensemble de 4 tâches (sur cet exemple, on constate que plusieurs tâches peuvent avoir la même durée). Considérons les placements suivants :

— $1, 1, 1, 1$ est un placement réalisable

— $1, 2, 1, 3$ est un placement réalisable

— $1, 3, 2, 1$ n'est pas un placement réalisable car la tâche 2, de durée 5, ne peut pas débuter au temps 3 et finir avant le temps 6.

— $2, 2, 1, 1$ n'est pas un placement réalisable car au temps 4 la somme des capacités des 3 tâches placées à cet instant dépasse c_4.

Les Figures 1 et 2 schématisent ces 4 situations.

2.1 Situation 1 : Placement réalisable

Dans cette situation, on vous donne un profil $\mathcal{P}$, il faut que vous calculiez ou donniez des informations sur les nombres de tâches qu'il sera possible de placer.

Question 1

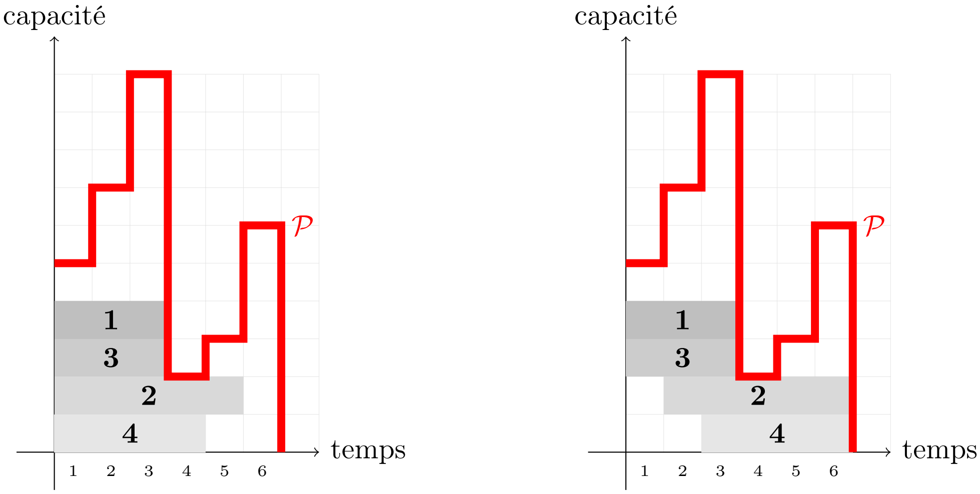
Pour chacun des profils suivants, calculez le nombre maximum de tâches de durée 2 que vous pouvez placer.

1. $\mathcal{P}^1 = 5, 5, 5, 5, 5, 5$
2. Soit $c > 0$ une constante positive. $\mathcal{P}^2 = c, \ldots, c$ de durée t quelconque.
3. $\mathcal{P}^3 = 1, 2, 3, 4, 5, 5, 4, 3, 2, 1$
4. $\mathcal{P}^4$ de durée t paire, $c_i = i$ pour $i = 1, \ldots, t/2$, et $c_i = t - i + 1$ pour $i = t/2 + 1, \ldots, t$
5. $\mathcal{P}^5$ de durée $t = 3p$ avec p entier positif pair. Soit a est un entier positif.
   $c_i = a$ pour $i = 1, \ldots, p$. $c_i = a/2$ pour $i = p + 1, \ldots, 2p$, $c_i = a$ pour $i = 2p + 1, \ldots, 3p$.

Question 2

Étant donnés un profil $\mathcal{P} = c_1, \ldots, c_t$ et un ensemble de tâches $S = \{d_1, \ldots, d_k\}$, proposez et expliquez :

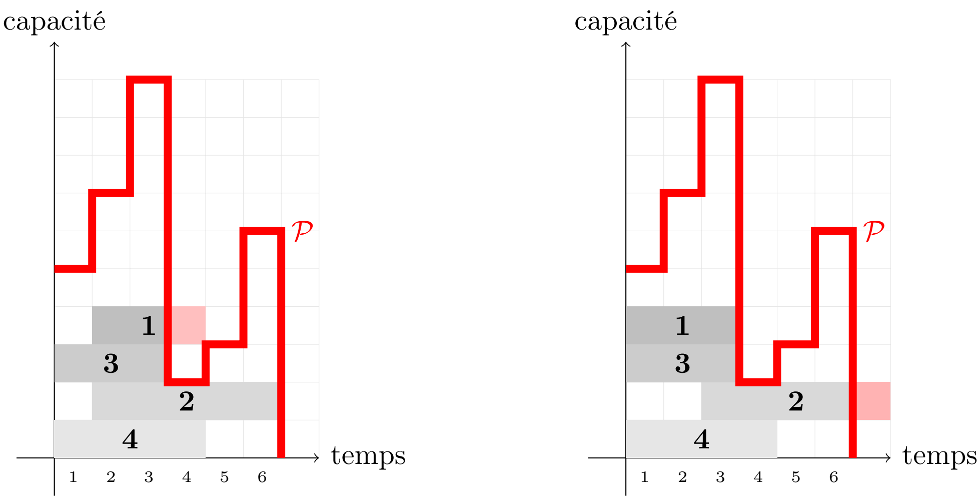
1. des conditions sur $\mathcal{P}$ pour qu'il n'existe aucun placement réalisable de S dans $\mathcal{P}$
2. des conditions sur $\mathcal{P}$ pour qu'il existe un placement réalisable de S dans $\mathcal{P}$.



(a) $1, 1, 1, 1$ est un placement réalisable

(b) $1, 2, 1, 3$ est un placement réalisable

FIGURE 1 – 2 exemples de placements réalisables avec $\mathcal{P} = 5, 7, 10, 2, 3, 6$, un profil de durée $t = 6$ et $S = \{3, 5, 3, 4\}$ un ensemble de 4 tâches



(a) $2, 2, 1, 1$ n'est pas un placement réalisable

(b) $1, 3, 2, 1$ n'est pas un placement réalisable

FIGURE 2 – 2 exemples de placements non réalisables avec $\mathcal{P} = 5, 7, 10, 2, 3, 6$, un profil de durée $t = 6$ et $S = \{3, 5, 3, 4\}$ un ensemble de 4 tâches

2.2 Situation 2 : Minimiser le temps

Dans cette partie nous considérerons des profils de durée infinie. $\forall i, c_i = C \geq 1$, C étant une constante. Considérons un ensemble S de k tâches de durées quelconques. Dans ces conditions, il existe toujours un placement réalisable de S.

Le profil est infini, l'ensemble de tâches est lui fini, il y a donc toujours une manière de placer les tâches (par exemple les unes à la suite des autres). Ce que l'on cherche à faire ici, c'est de trouver un placement de tâches qui soit le moins long (en plaçant des tâches en parallèle tout en respectant les capacités). On se pose donc la question de la durée minimale du meilleur placement.

Nous noterons $D_{min}(S)$, la durée minimale d'un placement réalisable (c'est-à-dire parmi tous les placements réalisables de S dans $\mathcal{P}$, la durée de celui qui se termine le plus tôt possible). Pour réaliser un tel placement, nous proposons les deux stratégies suivantes.

Stratégie liste simple. Considérez les tâches par identifiant croissant et placez les tâches le plus tôt possible en fonction des capacités non encore utilisées.

Stratégie liste triée par durée décroissante. Même algorithme que précédemment, en faisant un tri décroissant préalable des tâches (c'est-à-dire placer le plus tôt possible les tâches les plus longues).

Question 3

Prouvez que ces stratégies permettent toujours de construire un placement réalisable optimal de S (de durée $D_{min}(S)$) ou donnez un contre-exemple prouvant le contraire.

Question 4

Proposez une autre stratégie de placement. Comparez la aux 2 stratégies précédentes. Montrez qu'elle est optimale ou donnez un contre-exemple prouvant le contraire.

2.3 Situation 3 : Minimiser les capacités

Dans la dernière situation, on se fixe l'ensemble de k tâches et on se fixe aussi une durée maximale pour la fin de placement de cet ensemble de tâches, on se pose ici la question de quelle est la capacité nécessaire dans le profil pour que l'objectif soit atteint. Evidemment, on veut que cette capacité soit la plus petite possible.

La *capacité maximale* d'un profil $\mathcal{P}$ est :

$$C_{max}(\mathcal{P}) = \max\{c_i : i = 1..t\}$$

Étant donnés un ensemble S de k tâches et un entier T_{max}, l'objectif est de calculer la capacité maximale la plus petite possible d'un profil dans lequel l'ensemble S a un placement réalisable en moins de T_{max} unités de temps.

Question 5

Décrivez une stratégie algorithmique pour essayer d'atteindre cet objectif. Prouvez que vous y êtes parvenus ou donnez un contre-exemple.

3 Consignes générales

- Le rapport que vous devrez rendre devra contenir les réponses justifiées aux questions posées. Il devra être au format **pdf**. Tout autre format ne sera pas évalué.
- La présentation et l'orthographe du rapport seront prises en compte.
- **Date de remise du rapport le 11 janvier 2021 à 10h00 *dernier délai*** sur moodle.
- Ce projet est à faire en **binôme**. Il est TRES TRES fortement recommandé de former des binômes entre étudiant·e·s du même groupe de TD.
- Il y aura une soutenance sur zoom. La date sera communiquée ultérieurement.