Université de Versailles - Saint Quentin
“Algorithmique de Graphes”
TD4 : Composantes connexes et fortement connexes

1 Composantes connexes

Soit le nouvel algorithme suivant :

Algorithm 1 Colorier(G,s,c)

```
couleur[s] := c ;
Pour chaque sommet v, voisin de s, faire
    Si (couleur[v] == 0) alors
        Colorier(G,v,c) ;
Fins Si - Pour
```

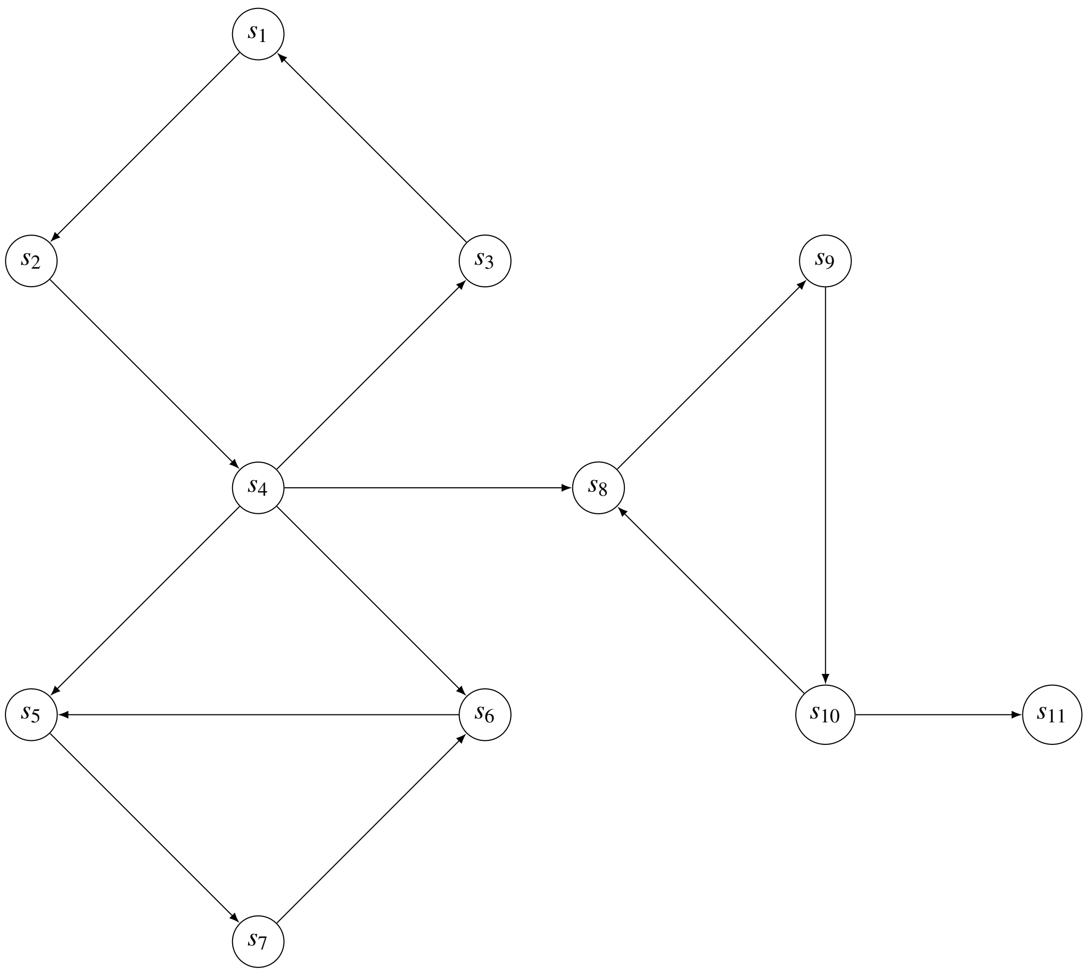
1. Expliquer brièvement pourquoi cet algorithme permet de déterminer une composante connexe. Effectue t’il un parcours en largeur ou en profondeur ?
2. Ecrire l’algorithme du programme principal (appelant cette fonction Colorier) permettant de déterminer toutes les composantes connexes d’un graphe en leur attribuant à chacune une couleur différente.
3. Un peu de géographie : Soient les 12 pays suivants : Allemagne, Angleterre, Belgique, Ecosse, Espagne, France, Irlande, Italie, Pays Bas, Pays de Galles, Portugal, Suisse. Construire le graphe dans lequel 2 pays sont reliés s’ils ont une frontière commune (le tunnel sous la manche ne compte pas et malgré Gibraltar, l’Espagne et l’Angleterre ne sont pas considérés comme voisins)
4. Appliquer sur ce graphe l’algorithme de détermination des composantes connexes.

2 Composantes fortement connexes

L’algorithme le plus classique pour déterminer les composantes fortement connexes d’un graphe orienté est le suivant :

- PP(G)
- I := Inverse(G) (on inverse le sens de tous les arcs)
- PP(I) : en considérant les sommets dans l’ordre décroissant des f(s) comme pour le tri topologique
- chaque arborescence obtenue donne une composante fortement connexe

L’appliquer au graphe donné ci-dessous :



3 K-connexité

1. Proposer un exemple d'un graphe à 6 sommets connexe mais pas 2-connexe (donc 1-connexe). Dans cet exemple, le degré de chaque sommet doit être strictement supérieur à 1.
2. Proposer un exemple d'un graphe à 8 sommets 2-connexe. Dans cet exemple, le degré de chaque sommet doit être strictement supérieur à 2.
3. Rappeler la définition d'un graphe k-connexe. En déduire la propriété qui doit être vérifiée pour qu'un graphe ne soit pas k-connexe.

4 Un exercice supplémentaire et optionnel

Titre : Il faut creuser les puits aujourd'hui pour étancher les soifs de demain (proverbe Africain) (exercice partiel 2019)

On considère un graphe orienté G (G' est le graphe non orienté correspondant c'est à dire le graphe avec les mêmes sommets et une arête entre deux sommets s'il existe au moins un arc entre les deux sommets dans *G*). Un sommet p de *G* est un puits parfait si et seulement si pour tout sommet u différent de p, (u,p) est un arc et (p,u) n'est pas un arc.

1. Un graphe G contenant un puits parfait peut-il être fortement connexe ? Le graphe G' associé peut-il être connexe ?
2. Un graphe G peut-il contenir plusieurs puits parfaits ?
3. Donner le nombre minimum et maximum d'arcs d'un graphe G de n sommets contenant un puits parfait.
4. Etant donné un graphe orienté G représenté par sa matrice d'adjacence, donner un algorithme déterminant si ce graphe contient un puits parfait. Quelle est la complexité de votre algorithme ?