# Appendix

Linus Bergkvist

**Sats 1:** Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är differentierbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$ måste:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ och } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Vi utgår från derivatans definition:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ får gå mot 0 från alla riktningar i det komplexa planet. Om $\Delta z \to 0$ horisontellt är $\Delta z = \Delta x$ och vi får då:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y) + iv(x_0 + \Delta x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x}\right] + i \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}\right] \\
&= \frac{du}{dx}(x_0, y_0) + i\frac{dv}{dx}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}$$

Om $\Delta z \to 0$ vertikalt är $\Delta z = i\Delta y$ och *vi* får då:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right] + i \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right] \\
&= -i\frac{du}{dy}(x_0, y_0) + \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}$$

Om vi sätter real-delarna lika med varandra och imagenärdelarna lika med varandra får vi:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

. $\square$

**Definition 1: Klass $C_1$** Låt $f$ vara definierad i en mängd $D$. Vi säger att $f$ är av klass $C_1$ och $f$ är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i $D$.

**Sats 2:** För två av klass $C_1, P(x,y)$ och $Q(x,y)$ gäller det att:

$$\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left( \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right)\ dx\ dy$$

.

Där $D$ är ett kompakt område och $\partial D$ är randen till $D$.

Beviset genomförs under förutsättningen att $D$ med räta linjer parallella med y-axeln, kan delas upp i ett ändligt antal områden av typen:

$$E\{(x,y) : J(x) \leq y \leq K(x), a \leq x \leq b\}$$

Och att det finns en motsvarande uppdelning för x-axeln Inledningsvis visas det att:

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy$$

.

$$\iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy = \int_{x=a}^{b} [-P(x,y)]_{x=J(x)}^{x=K(x)}\ dx$$

$$\int_a^b P(x, J(x))\ dx - \int_b^a P(x, K(x))\ dx \tag{1}$$

Kurvan $\gamma$ i figuren kan framställas med $x$ som parameter:

$$\gamma = (x, J(x)), a \leq x \leq b.$$

Den första integralen i (1) kan därför skrivas som

$$\int_\gamma P\ dx + 0\ dy = \int_\gamma P\ dx.\ (2)$$

På samma sätt får vi för den andra termen att:

$$-\int_a^b P(x, K(x))\ dx = \int_\sigma P\ dx\ (3)$$

då karringtegralen av de (evetuella) randstyckena $v_1$ och $v_2$ är noll innebär detta att addition av (2) och (3) ger $\int_{\partial E} P\ dx$ vilket innebär att.

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

genom att addera ihop det här resultatet för alla uppkommande områden av $E$ ger detta:

$$\int_{\partial D} P\ dx = \iint_D -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

Om vi gör på samma sätt med en uppdelning av $D$ med linjer parallella med X-axeln för vi på liknande sätt att:

$$\int_{\partial D} Q\ dy = \iint_D \frac{dQ}{dx}\ dydx.$$

genom att addera uttrycken följer nu att:

$$\iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dx}\right)\ dxdy = \int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy.$$

$\square$

**Definition 2:** En funktion $f$ är analytisk i ett område $D$ om den har en derivata i alla punkter i $D$.

**Sats 3** : Om $\Gamma$ är en sluten kurva i det kompexa talplanet och $f(z)$ är analytisk i området som innesluts av $\Gamma$ så är:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0.$$

Med den vanliga notationen:
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ får vi:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\ dt = \int_a^b [a(x(t),y(t)){+}iv(x(t),y(t))] \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\ dt$$

$$= \int_a^b \left[a(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt{+}i\int_a^b \left[v(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt$$

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_\Gamma (u\ dx - v\ dy) + i\int_\Gamma v\ dx + u\ dy$$

Stas 2 ger nu:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \iint_{D'} \left(-\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)\ dxdy + i\iint_{D'} \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) c\ dxdy$$

där $D'$ är området som innesluts av $\Gamma$. Men ekvationerna från Sats 1 ger nu att dubbelintegralerna är 0. vilket ger:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$$

$\square$

**Sats 4:** Alla slutna kurvor i det kompexa talplanet kan krympas ner till "punktkurvan" $\zeta = 0$.

Om kurvan $\Gamma_0$ parametisiras av $\zeta = \zeta_0(t),\ \ 0 \leq t \leq 1$. då kan "krympningen"uppnås genom att multiplicera $\zeta_0(t)$ med en skalfaktor som varierar från 0 till 1. Deformationsfunktionen ges då av $\zeta(s,t) = (1-s)(\zeta_0(t))$. $s = 1$ ger då den önkade krympningen. $\square$

**Sats 5:** Alla slutna kurvor i det kompexa talplanet kan deformeras till varanda.

Då alla kurvor kan deformeras till $\zeta = 0$ kan en kurva, $\Gamma_0$ deformeras till $\zeta = 0$, och därifrån deformeras till en annan kurva, $\Gamma_1$ med inversen till deformationsfunktionen från $\Gamma_1 \to \zeta = 0$.

**Sats 6:** $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$

$\frac{f(z)}{z-z_0}$ är analytisk överallt i området som innesluts av $\Gamma$ förutom i punkten $z = z_0$. Vi kan därför deformera $\Gamma$ till en cirkel $C_r$ med radien $r$ och som är centrerad kring $z_0$.

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz.$$

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0) + f(z_0)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz + \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0}\, dz \quad (1)$$

substitutionen

$$z = r \cdot e^{iv} + z_0$$
$$dz = r \cdot i \cdot e^{iv}\, dv$$

ger i den vänstra integralen:

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0) \cdot r \cdot i \cdot e^{iv}}{r \cdot e^{iv}}\, dv = [f(z_0) \cdot iv]_0^{2\pi} = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

den högra integralen i (1) $\to 0$ då radien av cirkeln $\to 0$. Detta visas genom att sätta $M_r := max[|f(z) - f(z_0)|; z$ på $C_r]$ Detta innebär att

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} \right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} \leq \frac{M_r}{r}$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0}\, dz \right| \leq \frac{M_r}{r} l(C_r)$$

där $l(C_r)$ är längden av kurvan $C_r$.

$$\frac{M_r}{r} \cdot l(C_r) = \frac{M_r}{r} \cdot 2r\pi = M_r \cdot 2\pi$$

men då $f$ är kontinuerlig i punkten $z_0$ går $M_r \to 0$ då $r \to 0$. Alltså är $\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\ dz = 0$. Vilket innebär att $(1) = 2\pi i \cdot f(z_0) + 0$ division med $2\pi i$ ger:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz.$$

$\square$

**Sats 7:**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(n+1)}}\ dz \cdot n!$$

Detta inses genom att derivera uttrycket med avseende på $z_0$.

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-1}\ dz \\
f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -1 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-2}\ dz \\
f''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -2 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-3}\ dz \\
f'''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot -1 \cdot -3 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-4}\ dz \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot n! \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z\ z_0)^{-(n+1)}\ dz
\end{aligned}$$

$\square$

**Sats 8:**

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j. \text{ med } a_j = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\ d\zeta$$

Detta kallas för en Laurent-serie

Låt $\Gamma$ vara en sluten kurva runt $z$. Låt därefter $\Gamma$ se ut som en “donut” med en “bit” borta. Låt $\Gamma'$ vara den “borttagna biten”. då $f(z)$ är analytisk i hela områdetsom innesluts av $\Gamma'$ ger Sats 3 att.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta = 0'$$

därmed följer att vi kan "sätt tillbaka biten". Då integralen var $= 0$ följer att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma+\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

då integralerna längs linjesegmenten tar ut varandra följer det att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) \qquad (1)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{taylorpolynom}$$

Sats 7 ger nu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Om man nu fokuserar på integralen runt $C_1$ i (1) så ser man att då $z$ ligger untanför $C_1$ måste vi integrera kring en annan punkt.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)} \left( \frac{1}{1 - \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)}} \right)$$

taylorpolynomet till den högra faktorn ger nu:

$$-\frac{1}{(z - z_0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)} \right)^k$$

insättning i integralen ger nu:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint f(\zeta) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k}\, d\zeta - \sum_{k=1}^{\infty} -2\pi i \cdot \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$$

Ekvation (1) blir nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

□

**Sats 9:** Om $f$ har en singularitet i punkten $z_0$ så ,r linjeintegralen runt singulariteten $= 2\pi i \cdot a_{-1}$.

Sats 8 ger att $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$

$$\oint_{C_r} f(z)\, dz = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \cdot \oint_{C_r} (z - z_0)^j\, dz$$

$$
\begin{aligned}
z &= e^{iv} + z_0 \\
dz &= ie^{iv} dv \qquad \text{för } j \neq -1
\end{aligned}
$$

$$\oint_{C_r} (z - z_0)^j \, dz = \int_0^{2\pi} ie^{ir(j+1)} \, dv = \left[ i \frac{e^{iv(i+1)}}{i(j+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{för } j = -1 \text{ gäller: } \int_0^{2\pi} ie^{iv(-1+1)} \, dv = [i \cdot v]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

för alla $j \neq -1$ blir integralen $= 0$ och för $j = -1$ blir integralen like med $2\pi i a_{-1}$. alltså:

$$\oint_{C_r} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

där termen $a_{-1}$ kallas för residualen

$\square$

**Sats 10:** $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)$

Om $f(z)$ har en "borttagbar" singularitet i Punkten $z = z_0$ $\left( \frac{1}{z - z_0} \right)$ blir alla koefficienter till $f(z)$'s Laurentserie för $j < -1 = 0$. Detta kan visas med partialintegrering av koeficienterna. Men om $f(z)$ har en singularitet i punkten $z = z_0$ gäller:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a-1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 \dots \\
f(z)(z - z_0) &= a_{-1} + (z - z_0)(a_0 + a_1(z - z_0) \dots) \\
\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) &= a_{-1} + (0)(a_0 + a_1(z - z_0) \dots) = a_{-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

**Sats 11:** Om $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_1$, då är $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n \cdot b_n$

$$a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k$$

i den andra summan substitueras $k$ mot $i + 1$

$$\sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot b_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$

vi har nu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$

**Sats 12:** $(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \cdot \int\limits_{n}^{n+1} x^{-s-1}\, dx$

$$s \cdot \int_{n}^{n+1} x^{-s-1}\, dx = -[x^{-s}]_n^{n+1} = -((n+1)^{-s} - n^{-s}) = n^{-s} - (n+1)^{-s}$$

$\square$

**Definition 3:** $\lfloor x \rfloor =$ heltalsdelen av $x$

exempel:
$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor e \rfloor = 2, \quad \lfloor 38.5 \rfloor = 38$

**Definition 4:** $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

exempel:
$\{\pi\} = 0.14159265358979\ldots, \quad \{e\} = 0.72182818284590\ldots, \{38.5\} = 0.5$

**Sats 13:** $\frac{s}{s-1} - s \cdot \int\limits_{1}^{\infty} \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx + s \cdot \int\limits_{1}^{\infty} \{x\} x^{-s-1}\, dx$

$$s \cdot \int_{1}^{\infty} x^{-s-1}(\lfloor x \rfloor + \{x\})\, dx = s \cdot \int_{1}^{\infty} x^{-s}\, dx$$

$$= s \cdot \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^{\infty} = \frac{1^{1-s}}{1-s} \cdot s = \frac{s}{1-s}$$

$\square$

**Sats 14:** $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int\limits_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx$

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq n} \frac{1}{n^{-s}}$$

Sats 11 ger:

$$\sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^{-s}} = \sum_{n \leq 1} n \cdot (n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

Sats 12 ger nu att:

$$s\sum_{n \leq 1} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s\sum_{n \leq 1} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\,dx = s\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\,dx$$

Sats 13 ger slutligen att:

$$\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\,dx = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx = \zeta(s)$$

$\square$

**Sats 15:** $\zeta(s)$ har en singularitet i $s = 1$ med residualen 1.

Sats 10 visar att residualen $= \lim_{z-z_0} f(z)(z - z_0)$

$$\zeta(s) - (s-1) = \left(\frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx\right)(s-1)$$

$$\lim_{s \to 1} \zeta(s)(s-1) = \lim_{s \to 1} s - s(s-1) \cdot \int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\,dx = 1 - 0 = 1$$

$\square$