Nollställena till Riemanns Zeta-funktion och dess Beteende på den Kritiska Linjen

Linus Bergkvist

Introduktion

Riemannhypotesen går ut på att alla icke-triviala nollställen till Riemanns zeta-funktionligger på linjen $\frac{1}{2}+i\cdot t$. De triviala nollställena är $-2, -4, -6, -8, -10\dots$

Del 1

Sats 1: Det finns inga nollställen till Riemanns zeta-funktion med $Re > 1$.

Bevis:
För s med $Re(s) > 1$ definieras Riemanns zeta-funktion som $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}...$

$\zeta(s) \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s}...$

$\zeta(s) - \frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s}...$ Vi har nu tagit bort alla multiplar av $\frac{1}{2^s}$

$\zeta(s)(1 - \frac{1}{2^s}) \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s}...$

$\zeta(s)(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s}...$ Vi har nu tagit bort alla återstående multiplar av $\frac{1}{3^s}$

Om man gör så med alla primtal får man:

$$\zeta(s) \cdot (1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s})... = \frac{1}{1^s} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})...} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad Re(s) > 1$$
$$\frac{\zeta(s)}{\prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})}} = 1 = \zeta(s) \cdot \prod_p (1 - p^{-s})$$

Vilket visar att $\zeta(s) \neq 0$ För $Re(s) > 1$

Definition: Den kompletta zeta-funktionen.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s(s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$$

där

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

Sats 2: Den kompletta zeta-funktionens nollställen är nollställen för Riemanns zeta-funktion.

Bevis:
Det här är ett väldigt kort bevis. Eftersom varken $\frac{1}{2} \cdot s, (s-1), \pi^{-s/2}$ eller $\Gamma(\frac{s}{2})$ har några nollställen utöver punkterna $s = 0$ och $s = 1$ så måste $\xi(s)$ ha samma nollställen som $\zeta(s)$.

Sats 3: $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Bevis:

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty t^{s/2-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

Vi gör substitutionen $t = \pi \cdot n^2 \cdot x$.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty \pi^{(s/2-1)} \cdot n^{2^{(s/2-1)}} \cdot x^{(s/2-1)} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot x}\, dx$$

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

Vi vet att $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$
Vi summerar båda leden över n med $n > 0$ och erhåller då:

$$\sum_{n \geq 1} \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x}\, dx$$

framöver betecknar vi $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi x n^2}$ som $\omega(x)$. Nu delar vi upp integralen vid 1 och erhåller:

$$\int_0^1 x^{s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx + \int_1^\infty x^{s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx$$

För att få samma integrationgränser i de båda integralerna gör vi substitutionen $x = x^{-1}$ i den första integralen och erhåller då:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1})\, dx + \int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx$$

Vi definierar nu funktionen $\theta(x)$ som:

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-xn^2\pi}$$

Eftersom $n^2 = (-n)^2$ och $e^{-x0^2\pi} = 1$ får vi att

$$\theta(x) = 2\omega(x) + 1$$

Vi använder nu Fouriertransformen på $e^{-\pi n^2 x}$ och erhåller

$$\mathcal{F}(e^{-\pi n^2 x})(u) = x^{-1/2} \cdot e^{-\pi u^2/x}$$

Vi använder därefter summationsformeln från Sats 1 i appendix och erhåller då:

$$\theta(x) = x^{-1/2}\theta(x^{-1})$$

$$2\omega(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2\omega(x^{-1}) + 1) \Leftrightarrow \omega(x^{-1}) = \omega(x) \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$$

Om vi nu använder vårt uttryck för $\omega(x^{-1})$ i den tidigare integralen erhåller vi:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1})\, dx = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{(s+1)/2} \cdot \omega(x)\, dx$$

Och hela ekvationen blir då:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}) \cdot \omega(x)\, dx$$

Om vi byter ut s mot $(1-s)$ i det högra uttrycket erhåller vi samma uttryck igen. Därför gäller det att $\xi(s) = \xi(1-s)$

$\square$

(Division med $\Gamma(\frac{s}{2})$ i den sista likheten, innebär att zeta-funktionen har nollställen varje gång då $\Gamma(\frac{s}{2})$ har en singularitet. På så sätt erhålls de "triviala nollställena")

Sats 4: De triviala nollställena till Riemanns zeta-funktion är de enda nollställena utanför intervallet $0 < Re(s) < 1$.

Bevis:
I Sats 1 bevisades det att $\zeta(s)$ inte har några nollställen för $\zeta(s)$ och i Sats 3 bevisade jag att $\xi(s) = \xi(1-s)$. Om vi antar att det finns en punkt p med $Re(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$ innebär det av Sats 2 att $\xi(p) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-p) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-p) = 0$ men om $Re(p) < 0$ är $Re(1-p) > 1$. Då innebär det att det finns en punkt $q = 1-p$ med $Re(q) > 1$ sådan att $\zeta(q) = 0$. Men detta strider mot Sats 1. Det kan alltså inte finnas en punkt p med $Re(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$.

$\square$

Sats 5: $ln(1-i) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Bevis:

$$f(x) = ln(1-x) \Rightarrow f(0) = ln(1) = 0$$

Definitionen av Maclaurinpolynom är:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

men då $ln(1) = 0$ är:

$$ln(1-x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

Derivering ger att

$$\begin{aligned} &f^{(n)}(0) = -(n-1)! \\ &\Downarrow \\ &ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)! \cdot x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

$\square$

Sats 6: $\zeta(s+it) = 0$ for $s = 1$ omm $\zeta(s)^3 \cdot \zeta(s+it)^4 \cdot \zeta(s+2it) = 0$ för $s = 1$.

Bevis:
$\zeta(s)$ har en singularitet för $s = 1$. Men eftersom faktorn $\zeta(s+it)^4$ är av högre grad kan singulariteterna för $\zeta(s)$ inte ta ut ett eventuellt nollställe. Termen $\zeta(s+2it)$ kan bli 0, men då den aldrig kan bli en singularitet kan den inte ta ut ett eventuellt nollställe.

Sats 7: $\zeta(s)$ har inga nollställen för $Re(s) = 1$.

Bevis:
Vi använder oss av ett uttryck från Sats 1:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$ln(\frac{1}{1-p^{-s}}) = ln(1) - ln(1-p^{-s}) = -ln(1-p^{-s})$$

$$ln\,|\zeta(s)| = ln\left|\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right| = \sum_p ln\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| = -\sum_p ln\left|1-p^{-s}\right| = -Re(\sum_p ln(1-p^{-s}))$$

Sats 5 ger nu:

$$-Re(\sum_p ln(1-p^{-s})) = Re(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{p^{-ns}}{n}))$$

Vi definierar nu $h(x) = \zeta(x)^3 \cdot \zeta(x+it)^4 \cdot \zeta(x+2it)$, logaritmlagarna ger nu:

$$ln(h(x)) = 3ln\,|\zeta(x)| + 4ln\,|\zeta(x+it)| + ln\,|\zeta(x+2it)|$$
$$= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot p^{nx} \cdot Re(3 + 4p^{-int} + p^{-int\cdot 2})$$

eftersom:

$$\frac{1}{n} \cdot p^{-nx} \geq 0$$

följer det att det vi måste undrsöka är om

$$Re(3 + 4p^{-int} + p^{-2int}) \geq 0$$

$$p^{-int} = e^{ln(p)\cdot -int}$$
$$\theta = -ln(p) \cdot n \cdot t \Rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow Re(3 + 4 \cdot e^{i\theta} + e^{i2\theta})$$

Eulers formel ger nu:

$$Re(3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = 3 + 4cos(\theta) + cos(2\theta)$$

likheten $cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$ ger:

$$3 + 4cos(\theta) + 2cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + 2cos(\theta) + cos^2(\theta)) = 2(1 + cos(\theta))^2 \geq 0$$

alla termer i vår summa är alltså större eller lika med 0. Då exempelvis $\theta = -ln(2) \cdot 2$ ger en term > 0 innebär detta att summan är strikt större än 0. Det finns alltså inga nollställen för $\zeta(s)$ med $Re(s) = 1$.

$\square$

Sats 8: Det finns inga nollställen för $\zeta(s)$ med $Re(s) = 0$.

Bevis:
Sats 3 och 4 visar att om $\zeta(s)$ är ett nollställe är $\zeta(1-s)$ också det. Om det finns något $\zeta(0+it) = 0$ följer även att $\zeta(1-(0+it)) = \zeta(1-it) = 0$. Men detta motbevisades i Sats 7.
Notera att Sats 3 inte fungerar i punkterna $s = 1$ och $s = 0$. Med då $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ och $\zeta(1) = \infty$ håller satsen. $\square$

Del 2

Sats 9: Om $\zeta(s) = 0$ för något tal $s = \frac{1}{2} + it$ med $t \in \mathbb{R}$ är $\zeta(\overline{s}) = 0$

Bevis:
Det har tidigare visats att om $\zeta(s) = 0$ är $\zeta(1-s) = 0$. $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1 - (\frac{1}{2} + it)) = \zeta(\frac{1}{2} - it) = 0$ $\square$

Definition: Mellintransform $\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot f(x)\, dx$

Mellintransformen har inversionsformen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} x^{-s} \cdot \varphi(s)\, ds$$

Sats 10:

$$\{\mathcal{M}\omega\}(x) = \zeta(2s) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s}$$

med

$$\omega(y) = \sum_{n \leq 1} e^{-n^2 \pi y}$$

Bevis:
Denna likhet härleddes i Sats 3, men då utan beteckningen Mellintransform.

Sats 11:

$$\omega(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \zeta(zs) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s} \cdot y^{-s}\, ds \text{ för } c > \frac{1}{2}$$

Bevis:
Detta följer av att applicera Mellintransformens inversionsformel på Sats 10.

Definition: $\Xi(t) = \zeta(\frac{1}{2} + it)$

Sats 12:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)\, dt = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\omega(e^{-2x}))$$

Bevis:

$$\text{Sätt } Q(x) = \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)\, dt$$

Då $(t^2+\frac{1}{4})\cdot\Xi(t)\cdot\cos(xt)$ är symmetrisk kring $t=0$ (se Sats 9 för $\Xi(t)$'s symmetri) så gäller:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\Xi(t)\cdot\cos(xt)\,dt \quad (1)$$

Då $\sin(xt)$ är "inverst symmetrisk" kring $t=0$ följer det att

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\Xi(t)\cdot i\sin(xt)\,dt = 0 \quad (2)$$

Addition av (1) och (2) tillsammans med Eulers formel ger nu:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cdot e^{ixt}\,dt$$

låt $s=\frac{1}{2}+it$. Då följer:

$$Q(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{2i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\frac{1}{s(1-s)}\Xi(s)\cdot e^{xs}\,ds$$

Definitionen av $\zeta(s)$ ger nu:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs}\,ds$$

$z(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{0}}\cdot e^{xs}$ har singulariteter i $s=0$ och $s=1$. Därmed följer det att om vi flyttar linjeintegralen till höger om linjen $c=1$ så korrigeras förändringen med att subtrahera residualen i $s=1$ så för $c>1$ gäller:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs}\,ds + \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs},1)$$

Då $\mathrm{Res}(\zeta(s),1)=1$ (se Appendix Sats 16) följer det att:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i}\cdot 2\pi i\cdot 1\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{x} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2}\cdot\pi\cdot 1\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\frac{12}{x}}\pi}{2}$$

Därmed följer:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i}\cdot\int_{C-\infty}^{C+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{xs}\,ds + \frac{\pi}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

genom att sätta $x=e^{-2x}$ erhålls det från Sats 11 att:

$$Q(x) = -\pi e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\omega(e^{-2x}) + \frac{\pi}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\omega(e^{-2x}))$$

$\square$

Sats 13: För alla heltal n gäller:

$$\lim_{a\to\frac{n}{4}\pi^+} \frac{d^{2n}[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2}+\omega(e^{2ia}))]}{da^{2n}} = 0$$

Bevis:
Observera att:

$$\begin{aligned}\omega(i+v) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+v)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi}\cdot e^{-\pi in^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi}\cdot(-1)^{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2v\pi}\cdot(-1)^{n}\end{aligned}$$

Det sista steget gäller då udda n ger udda n^2 och jämna n ger jämna n^2.

$$2\omega(4v)-\omega(v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi 4v} - e^{-n^2\pi v} = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(2n)^2\pi v} - e^{-n^2\pi v}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot e^{-n^2vt} = \omega(i+v) = 2\omega(4v)-\omega(v) \qquad (1)$$

$$\omega(x)x^{-\frac{1}{2}}\cdot\omega(\frac{1}{x})+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2} \text{ (Se Sats 4 för härledning)}$$

Vilket ger att (1) blir:

$$\omega(i+v) = \frac{1}{\sqrt{v}}\cdot\omega(\frac{1}{4v}) - \frac{1}{\sqrt{v}}\cdot\omega(\frac{1}{v}) - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Om man nu skriver ut summorna ser man att $\omega(i+v)+\frac{1}{2}$ och alla dess derivator går mot 0 då $v\to 0$ för $v\in\mathbb{R}^+$ vilket även innebär att de går mot 0 längs all vinklar $|\arg(z)|<\frac{1}{2}\pi$ då vi för något v med $\mathrm{Re}(v)>0$ har att:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2\frac{1}{v}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2\frac{\mathrm{Re}(v)}{|v^2|}} \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2\frac{1}{|v|}}.$$

Då $a\to\frac{\pi^+}{4}$ antyder att $e^{2ia}\to i$ längs alla "vägar" med $|\arg(e^{2ia}-i)|<\frac{1}{2}\pi$, så bevisar detta satsen

$\square$

Sats 14: Riemanns Zeta-funktion har oändligt många nollställen längst linjen $\frac{1}{2} + it$

Bevis:
Genom att substituera $x = -ia$ i Sats 12 så erhålls uttrycket:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi}{2}(e^{-\frac{1}{2}ia} - 2e^{\frac{1}{2}ia} \cdot \omega(e^{2ia}))$$

$$= \pi \cos(\frac{a}{2}) - \pi e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \qquad (1)$$

$$\text{där } \cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{-at} + e^{at})$$

om man nu deriverar (1) $2n$ antal gånger med avseende på a får man:

$$\int_0^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot t^{2n}\cdot\Xi(t)\cdot\cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}}\cos(\frac{a}{2}) - \frac{\pi d^{2n}}{da^{2n}}\left[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia}))\right]$$

(deriveringen sker ett jämnt antal gånger för att få en “regelbunden” derivata) a får nu gå mot $\frac{1}{4}\pi^+$. Sats 13 innebär nu att den sista tremen i det högra ledet $\to 0$, vilket ger:

$$\lim_{a \to \frac{1}{4}\pi^+} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n}\Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{8}{\pi}). \qquad (2)$$

Detta innebär att det vänstra ledet växlar tecken oändligt många gånger. Då vänstra ledet är kontinuerligt längs linjen $\frac{1}{2} + it$ innebär detta att det även blir lika med 0 oändligt många gånger. Och då ingen av de andra faktorerna blir 0 oändligt många gånger betyder detta att $\Xi(t)$ har oändligt många nollställen.

$\square$

Appendix:

Definition: Fourierserie och Fouriertransform.

Eulers formel ger att $e^{i\cdot x} = cos(x) + i\cdot sin(x)$ Men går det att uttrycka en funktion som en oändlig summa med sinus och cosinusvågor?
Mer matematisk blir frågan om kan man skriva en funktion $f(t)$ som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

Detta går om $f(t)$ är periodisk med perioden 2π. Om så är fallet gäller:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

$$f(t)\cdot e^{-imt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (e^{i(n-m)\cdot t})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-imt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\cdot e^{i(n-m)\cdot t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\cdot t}\,dt$$

Integralen på höger sida $= 0$ om $n \neq m$ och $= 2\pi$ om $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{-i\cdot m\cdot t}\,dt = C_n\cdot 2\pi = C_m \cdot 2\pi \Leftrightarrow C_m = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot e^{i\cdot m\cdot t}\,dt$$

Mer generellt så gäller att om $f(t)$ har en Period L så är:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot 2\pi\cdot \frac{t}{L}}$$

$$\text{där } C_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\cdot e^{-\frac{i\cdot n\cdot 2\pi}{L}}$$

där C_n kallas för den n:te Fourierkoefficienten till $f(t)$.
Fouriertransformen av en funktion f(t) definieras som:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\cdot u\cdot t}dt$$

Sats 1: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$ där $\hat{f}(m)$ är Fouriertransformen till $f(n)$.

Bevis:

Vi börjar med att definiera $g(x)$ som $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ eftersom $g(x)$ är periodisk med perioden 1 kan vi skriva ett uttryck för dess Fourierkoefficienter.

$$
\begin{aligned}
\hat{g_k} &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= ... \int_{-1}^0 f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx + \int_0^1 f(x) - e^{-ikx}\ dx + \int_1^2 f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx... \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx = \hat{f}(x)
\end{aligned}
$$

Som är fouriertransformen av $f(x)$.

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^{ikx}$$

som är fourierserien till $g(x)$. Om vi nu väljer $x = 0$ får vi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

$\square$

Sats 2: Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är differentierbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$ måste:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ och } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}.$$

Bevis:
Vi utgår från derivatans definition:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ får gå mot 0 från alla riktningar i det komplexa planet. Om $\Delta z \to 0$ horisontellt är $\Delta z = \Delta x$ och vi får då:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y) + iv(x_0+\Delta x, y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{u(x_0+\Delta x, y) - u(x_0,y_0)}{\Delta x}\right] + i\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\Delta x}\right] \\
&= \frac{du}{dx}(x_0,y_0) + i\frac{dv}{dx}(x_0,y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}
$$

Om $\Delta z \to 0$ vertikalt är $\Delta z = i\Delta y$ och vi får då:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] + i \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right]$$
$$= -i\frac{du}{dy}(x_0, y_0) + \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) = f'(z_0)$$

Om vi sätter real-delarna lika med varandra och imaginärdelarna lika med varandra får vi:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

$\square$

Definition 1: Klass C_1 Låt f vara definierad i en mängd D. Vi säger att f är av klass C_1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

Sats 3: För två funktioner av klass $C_1, P(x, y)$ och $Q(x, y)$ gäller det att:

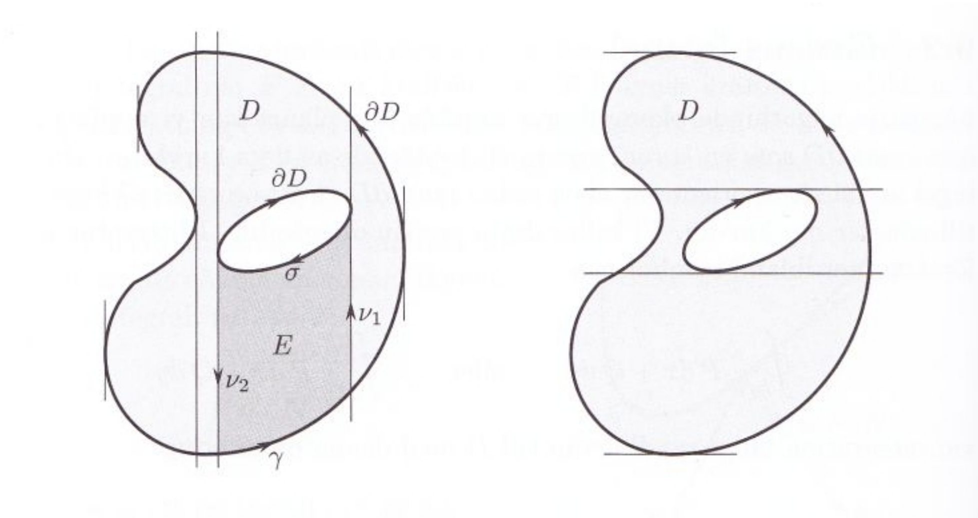
$$\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right)\ dx\ dy$$

Där D är ett kompakt område och ∂D är randen till D.

Bevis:
Beviset genomförs under förutsättningen att D med räta linjer, parallella med y-axeln, kan delas upp i ett ändligt antal områden av typen:

$$E\{(x, y) : \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), a \leq x \leq b\}$$

Och att det finns en motsvarande uppdelning för x-axeln



Inledningsvis visas det att:

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy$$

$$\iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy = \int_{x=a}^{b} [-P(x,y)]_{x=\psi(x)}^{x=\varphi(x)}\ dx$$

$$\int_a^b P(x,\psi(x))\ dx - \int_b^a P(x,\varphi(x))\ dx \tag{1}$$

Kurvan γ i figuren kan framställas med x som parameter:

$$\gamma = (x, \psi(x)), a \leq x \leq b.$$

Den första integralen i (1) kan därför skrivas som

$$\int_\gamma P\ dx + 0\ dy = \int_\gamma P\ dx. \ (2)$$

På samma sätt får vi för den andra termen att:

$$-\int_a^b P(x,\varphi(x))\ dx = \int_\sigma P\ dx\ (3)$$

då kurvintegralen av de (eventuella) randstyckena v_1 och v_2 är noll innebär detta att addition av (2) och (3) ger $\int_{\partial E} P\ dx$, vilket innebär att:

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

genom att addera ihop det här resultatet för alla uppkommande områden av E ger detta:

$$\int_{\partial D} P\ dx = \iint_D -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

Om vi gör på samma sätt med en uppdelning av D med linjer parallella med X-axeln får vi på liknande sätt att:

$$\int_{\partial D} Q\ dy = \iint_D \frac{dQ}{dx}\ dydx.$$

genom att addera uttrycken följer nu att:

$$\iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dx}\right)\ dxdy = \int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy.$$

□

Definition 2: En funktion f är analytisk i ett område D om den har en derivata i alla punkter i D.

Sats 4: Om Γ är en sluten kurva i det komplexa talplanet och $f(z)$ är analytisk i området som innesluts av Γ så är:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0.$$

Bevis:
Med den vanliga notationen:
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ får vi:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\ dt = \int_a^b [a(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))]\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\ dt$$

$$= \int_a^b \left[a(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt + i\int_a^b \left[v(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt$$

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_\Gamma (u\ dx - v\ dy) + i\int_\Gamma v\ dx + u\ dy$$

Sats 3 ger nu:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \iint_{D'} \left(-\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)\ dxdy + i\iint_{D'} \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right) c\ dxdy$$

där D' är området som innesluts av Γ. Men ekvationerna från Sats 2 ger nu att dubbelintegralerna är 0. vilket ger:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$$

□

Sats 5: Alla slutna kurvor i det komplexa talplanet kan krympas ner till "punktkurvan" $\zeta = 0$.

Bevis:
Om kurvan Γ_0 parametisiras av $\zeta = \zeta_0(t),\ 0 \leq t \leq 1$. då kan "krympningen" uppnås genom att multiplicera $\zeta_0(t)$ med en skalfaktor som varierar från 0 till 1. Deformationsfunktionen ges då av $\zeta(s,t) = (1-s)(\zeta_0(t))$. $s = 1$ ger då den önkade krympningen. $\square$

Sats 6: Alla slutna kurvor i det komplexa talplanet kan deformeras till varanda.

Bevis:
Då alla kurvor kan deformeras till $\zeta = 0$ kan en kurva, Γ_0 deformeras till $\zeta = 0$, och därifrån deformeras till en annan kurva, Γ_1 med inversen till deformationsfunktionen från $\Gamma_1 \to \zeta = 0$.

Sats 7: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

Bevis:
$\frac{f(z)}{z-z_0}$ är analytisk överallt i området som innesluts av Γ förutom i punkten $z = z_0$. Vi kan därför deformera Γ till en cirkel C_r med radien r och som är centrerad kring z_0.

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \quad (1)$$

substitutionen

$$z = r \cdot e^{iv} + z_0$$
$$dz = r \cdot i \cdot e^{iv}\,dv$$

ger i den vänstra integralen:

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0)\cdot r \cdot i \cdot e^{iv}}{r \cdot e^{iv}}\,dv = [f(z_0)\cdot iv]_0^{2\pi} = f(z_0)\cdot 2\pi i.$$

den högra integralen i (1) $\to 0$ då radien av cirkeln $\to 0$. Detta visas genom att sätta $M_r := \max[|f(z) - f(z_0)|; z \text{ på } C_r]$ Detta innebär att

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{r} \leq \frac{M_r}{r}$$

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \le \frac{M_r}{r} l(C_r)$$

där $l(C_r)$ är längden av kurvan C_r.

$$\frac{M_r}{r} \cdot l(C_r) = \frac{M_r}{r} \cdot 2r\pi = M_r \cdot 2\pi$$

men då f är kontinuerlig i punkten z_0 går $M_r \to 0$ då $r \to 0$. Alltså är $\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0$. Vilket innebär att $(1) = 2\pi i \cdot f(z_0) + 0$ division med $2\pi i$ ger:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

□

Sats 8:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{(n+1)}}\,dz \cdot n!$$

Bevis:
Detta inses genom att derivera uttrycket med avseende på z_0.

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma f(z)\cdot(z-z_0)^{-1}\,dz \\
f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -1 \cdot \int_\Gamma f(z)\cdot(z-z_0)^{-2}\,dz \\
f''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -2 \cdot \int_\Gamma f(z)\cdot(z-z_0)^{-3}\,dz \\
f'''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot -1 \cdot -3 \cdot \int_\Gamma f(z)\cdot(z-z_0)^{-4}\,dz \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot n! \cdot \int_\Gamma f(z)\cdot(z\ z_0)^{-(n+1)}\,dz
\end{aligned}$$

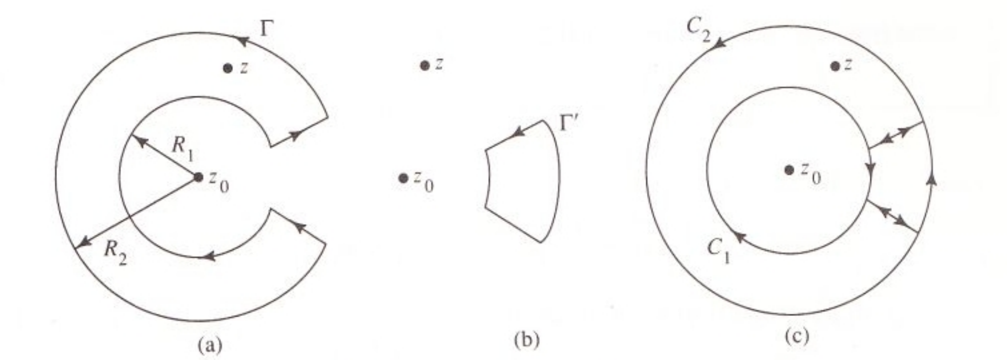
□

Sats 9:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-z_0)^j.\ \text{med } a_j = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}\,d\zeta$$

Detta kallas för en Laurent-serie

Bevis:
Låt Γ vara en sluten kurva runt z. Låt därefter Γ se ut som en "donut" med en "bit" borta.



Låt Γ' vara den "borttagna biten". då $f(z)$ är analytisk i hela området som innesluts av Γ' ger Sats 3 att.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$$

därmed följer att vi kan "sätta tillbaka biten". Då integralen var $= 0$ följer att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\Gamma+\Gamma'}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,dz$$

då integralerna längs linjesegmenten tar ut varandra följer det att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right) \qquad (1)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{(taylorpolynom)}$$

Sats 8 ger nu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Om man nu fokuserar på integralen runt C_1 i (1) så ser man att då z ligger utanför C_1 måste vi integrera kring en annan punkt.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)}\left(\frac{1}{1 - \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)}}\right)$$

taylorpolynomet till den högra faktorn ger nu:

$$-\frac{1}{(z-z_0)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\zeta-z_0)}{(z-z_0)}\right)^k$$

insättning i integralen ger nu:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(\zeta)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k}\,d\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\,d\zeta\cdot(z-z_0)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

Där $a_{-k}=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\,d\zeta$. Ekvation (1) blir nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

□

Sats 10: Om f har en singularitet i punkten z_0 så är linjeintegralen runt singulariteten $=2\pi i\cdot a_{-1}$.

Bevis:
Sats 9 ger att $f(z)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$

$$\oint_{C_r} f(z)\,dz=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\cdot\oint_{C_r}(z-z_0)^j\,dz$$

$$z=e^{iv}+z_0$$
$$dz=ie^{iv}dv \qquad \text{för } j\neq -1$$

$$\oint_{C_r}(z-z_0)^j\,dz=\int_0^{2\pi} ie^{ir(j+1)}\,dv=\left[i\frac{e^{iv(i+1)}}{i(j+1)}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$\text{för } j=-1 \text{ gäller: } \int_0^{2\pi} ie^{iv(-1+1)}\,dv=[i\cdot v]_0^{2\pi}=2\pi i$$

för alla $j\neq -1$ blir integralen $=0$ och för $j=-1$ blir integralen lika med $2\pi i a_{-1}$. Alltså:

$$\oint_{C_r} f(z)\,dz=2\pi i\cdot a_{-1}$$

där termen a_{-1} kallas för residualen

□

Sats 11: $a_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)$

Bevis:
Om $f(z)$ har en "borttagbar" singularitet i Punkten $z = z_0$ $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ blir alla koefficienter till $f(z)$'s Laurentserie för $j < -1 = 0$. Detta på grund av att integralen i a_k för $k < -1$ inte innesluter en singularitet, och integralen är därmed, enligt sats 3, lika med 0. Men om $f(z)$ har en singularitet i punkten $z = z_0$ gäller:

$$f(z) = \frac{a-1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \ldots$$
$$f(z)(z-z_0) = a_{-1} + (z-z_0)(a_0 + a_1(z-z_0)\ldots)$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0) = a_{-1} + (0)(a_0 + a_1(z-z_0)\ldots) = a_{-1}$$

□

Sats 12: Om $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_1$, då är $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n \cdot b_n$

Bevis:

$$a_k = A_k - A_{k-1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n}(A_k - A_{k-1}) \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k$$

i den andra summan substitueras k mot $i+1$

$$\sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot b_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$

vi har nu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$

Sats 13: $(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \cdot \int_{n}^{n+1} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$s \cdot \int_n^{n+1} x^{-s-1}\, dx = -[x^{-s}]_n^{n+1} = -((n+1)^{-s} - n^{-s}) = n^{-s} - (n+1)^{-s}$$

□

Definition 3: $\lfloor x \rfloor =$ heltalsdelen av x

exempel:
$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor e \rfloor = 2, \quad \lfloor 38.5 \rfloor = 38$

Definition 4: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

exempel:
$\{\pi\} = 0.14159265358979\ldots, \quad \{e\} = 0.72182818284590\ldots, \{38.5\} = 0.5$

Sats 14: $\frac{s}{s-1} - s \cdot \int\limits_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx + s \cdot \int\limits_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$s \cdot \int_1^\infty x^{-s-1}(\lfloor x \rfloor + \{x\})\, dx = s \cdot \int_1^\infty x^{-s}\, dx$$
$$= s \cdot \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^\infty = \frac{1^{1-s}}{1-s} \cdot s = \frac{s}{1-s}$$

□

Sats 15: $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq n} \frac{1}{n^{-s}}$$

Sats 12 ger:

$$\sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^{-s}} = \sum_{n \leq 1} n \cdot (n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

Sats 13 ger nu att:

$$s \sum_{n \leq 1} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \sum_{n \leq 1} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx = s \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx$$

Sats 14 ger slutligen att:

$$\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx = \zeta(s)$$

□

Sats 16: $\zeta(s)$ har en singularitet i $s = 1$ med residualen 1.
Bevis:

Sats 11 visar att residualen $= \lim_{z-z_0} f(z)(z - z_0)$

$$\zeta(s) - (s-1) = \left(\frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} \, dx \right) (s-1)$$

$$\lim_{s \to 1} \zeta(s)(s-1) = \lim_{s \to 1} s - s(s-1) \cdot \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} \, dx = 1 - 0 = 1$$

$\square$