Nollställena till Riemanns Zeta-funktion och dess Beteende på den Kritiska Linjen

Linus Bergkvist

Introduktion

Riemannhypotesen beskrevs för första gången 1859 av Bernhard Riemann och lyder: Alla icke-triviala nollställen till Riemanns Zeta-funktion har Realdelen $\frac{1}{2}$. För $\text{Re}(s) > 1$ definieras Riemanns Zeta-funktion som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. För att kunna studera dess nollställen i det komplexa talplanet måste man alltså först hitta ett sätt att beskriva Zeta-funktionen på som gäller för alla s i C. Arbetet är i huvudsak uppdelat i 2 delar och ett Appendix. I den första delen begränsas Zeta-funktionens icke-triviala nollställen till en "remsa" i det komplexa talplanet (de triviala nollställena $(-2, -4, -6, -8 \ldots)$ får också sin förklaring). I den andra delen studeras nollställena längs den "kritiska linjen" $(\frac{1}{2} + it, \quad t \in \mathbb{R})$. Det finns även ett appendix i vilket vissa, inte helt uppenbara satser som används i arbetet, härleds.

Del 1

I denna del kommer det först att bevisas att zeta-funktionen inte har några nollställen för $\text{Re}(s) > 1$. Därefter påvisas en funktion som har samma nollställen som zeta-funktionen, och som därefter bevisas vara invariant från $s \to (1 - s)$. Av denna invarians följer det att zeta-funktionen omöjligt kan ha några icke-triviala nollställen för $\text{Re}(s) < 0$. Därefter visas en funktion som på linjen $1 + it$, har samma nollställen som zeta-funktionen . Därefter visas det att denna funktion inte har något nollställe för något värde på t, vilket har som följd att zeta-funktionen inte har några nollställen på linjen $\text{Re}(s) = 1$ Därefter följer det av den sedan tidigare påvisade invariansen att zeta-funktionen inte heller har några nollställen på linjen $\text{Re}(s) = 0$. Sammanfattningsvis har alltså zeta-funktionens nollställen begränsats till remsan $0 < \text{Re}(s) < 1$.

Sats 1: Det finns inga nollställen till Riemanns zeta-funktion med Realdelen > 1.

Bevis:
För s med $\text{Re}(s) > 1$ definieras Riemanns zeta-funktion som $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \ldots$$

$$\zeta(s) \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} \ldots$$

$$\zeta(s) - \frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} \ldots$$ Vi har nu tagit bort alla multiplar av $\frac{1}{2^s}$

$$\zeta(s)(1 - \frac{1}{2^s}) \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} \ldots$$

$$\zeta(s)(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} \ldots$$ Vi har nu tagit bort alla återstående multiplar av $\frac{1}{3^s}$

Om man gör så med alla primtal får man:

$$\zeta(s) \cdot (1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s})(1 - \frac{1}{5^s}) \ldots = \frac{1}{1^s} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\zeta(s) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^s})(1 - \frac{1}{3^s}) \ldots} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

$$\frac{\zeta(s)}{\prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})}} = 1 = \zeta(s) \cdot \prod_p (1 - p^{-s})$$

Då produkten till höger inte har några singulariteter visar detta att $\zeta(s) \neq 0$ för $\mathrm{Re}(s) > 1$

Definition: Den kompletta zeta-funktionen.

$$\xi(s) = \frac{1}{2} \cdot s(s-1) \cdot \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s)$$

där

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \cdot e^{-t} \, dt$$

Sats 2: Den kompletta zeta-funktionens nollställen är nollställen för Riemanns zeta-funktion.

Bevis:
Det här är ett väldigt kort bevis. Eftersom varken $\frac{1}{2} \cdot s, (s-1), \pi^{-s/2}$ eller $\Gamma(\frac{s}{2})$ har några nollställen utöver punkterna $s = 0$ och $s = 1$ så måste $\xi(s)$ ha samma nollställen som $\zeta(s)$.

Sats 3: $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Bevis:

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty t^{s/2-1} \cdot e^{-t} \, dt$$

Vi gör substitutionen $t = \pi \cdot n^2 \cdot x$.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty \pi^{(s/2-1)} \cdot n^{2^{(s/2-1)}} \cdot x^{(s/2-1)} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot x} \, dx$$

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot e^{-\pi n^2 x} \, dx$$

Vi vet att $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$
Vi summerar båda leden över n med $n > 0$ och erhåller då:

$$\sum_{n \geq 1} \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x} \, dx$$

framöver betecknar vi $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-\pi x n^2}$ som $\omega(x)$. Nu delar vi upp integralen vid 1 och erhåller:

$$\int_0^1 x^{s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx + \int_1^\infty x^{s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx$$

För att få samma integrationgränser i de båda integralerna gör vi substitutionen $x = x^{-1}$ i den första integralen och erhåller då:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1})\, dx + \int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x)\, dx$$

Vi definierar nu funktionen $\theta(x)$ som:

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-xn^2\pi}$$

Eftersom $n^2 = (-n)^2$ och $e^{-x0^2\pi} = 1$ får vi att

$$\theta(x) = 2\omega(x) + 1$$

Vi använder nu Fouriertransformen på $e^{-\pi n^2 x}$ och erhåller

$$\mathcal{F}(e^{-\pi n^2 x})(u) = x^{-1/2} \cdot e^{-\pi u^2/x}$$

Vi använder därefter summationsformeln från Sats 1 i appendix och erhåller då:

$$\theta(x) = x^{-1/2}\theta(x^{-1})$$

$$2\omega(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2\omega(x^{-1}) + 1) \Leftrightarrow \omega(x^{-1}) = \omega(x) \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$$

Om vi nu använder vårt uttryck för $\omega(x^{-1})$ i den tidigare integralen erhåller vi:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1})\, dx = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{(s+1)/2} \cdot \omega(x)\, dx$$

Och hela ekvationen blir då:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}) \cdot \omega(x)\, dx$$

Om vi byter ut s mot $(1-s)$ i det högra uttrycket erhåller vi samma uttryck igen. Därför gäller det att $\xi(s) = \xi(1-s)$

$\square$

(Division med $\Gamma(\frac{s}{2})$ i den sista likheten, innebär att zeta-funktionen har nollställen varje gång då $\Gamma(\frac{s}{2})$ har en singularitet. På så sätt erhålls de "triviala nollställena")

Sats 4: De triviala nollställena till Riemanns zeta-funktion är de enda nollställena utanför intervallet $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

Bevis:
I Sats 1 bevisades det att $\zeta(s)$ inte har några nollställen för $\zeta(s)$ och i Sats 3 bevisades det att $\xi(s) = \xi(1-s)$. Om vi antar att det finns en punkt p med $\mathrm{Re}(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$ innebär det av Sats 2 att $\xi(p) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-p) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-p) = 0$ men om $\mathrm{Re}(p) < 0$ är $\mathrm{Re}(1-p) > 1$. Då innebär det att det finns en punkt $q = 1-p$ med $\mathrm{Re}(q) > 1$ sådan att $\zeta(q) = 0$. Men detta strider mot Sats 1. Det kan alltså inte finnas en punkt p med $\mathrm{Re}(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$.

$\square$

Sats 5: $\zeta(s+it) = 0$ for $s = 1$ omm $\zeta(s)^3 \cdot \zeta(s+it)^4 \cdot \zeta(s+2it) = 0$ för $s = 1$.

Bevis:
$\zeta(s)$ har en singularitet för $s = 1$. Men eftersom faktorn $\zeta(s+it)^4$ är av högre grad kan singulariteterna för $\zeta(s)$ inte ta ut ett eventuellt nollställe. Termen $\zeta(s+2it)$ kan bli 0, men då den aldrig kan bli en singularitet kan den inte ta ut ett eventuellt nollställe.

$\square$

Hjälpsats 6: $\ln(1-i) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Bevis:

$$f(x) = \ln(1-x) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$$

Definitionen av Maclaurinpolynom är:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

men då $\ln(1) = 0$ är:

$$\ln(1-x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

Derivering ger att

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$

$$\Downarrow$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)! \cdot x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$\square$

Sats 7: $\zeta(s)$ har inga nollställen för $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Bevis:
Vi använder oss av ett uttryck från Sats 1:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$\ln(\frac{1}{1-p^{-s}}) = \ln(1) - \ln(1-p^{-s}) = -\ln(1-p^{-s})$$

$$\ln|\zeta(s)| = \ln\left|\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right| = \sum_p \ln\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| = -\sum_p \ln\left|1-p^{-s}\right| = -\mathrm{Re}(\sum_p \ln(1-p^{-s})$$

Hjälpsats 6 ger nu:

$$-\mathrm{Re}(\sum_p \ln(1-p^{-s})) = (\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{p^{-ns}}{n}))$$

Vi definierar nu $h(x) = \zeta(x)^3 \cdot \zeta(x+it)^4 \cdot \zeta(x+2it)$, logaritmlagarna ger nu:

$$\begin{aligned} \ln(h(x)) &= 3\ln|\zeta(x)| + 4\ln|\zeta(x+it)| + \ln|\zeta(x+2it)| \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot p^{nx} \cdot \mathrm{Re}(3 + 4p^{-int} + p^{-int \cdot 2}) \end{aligned}$$

eftersom:

$$\frac{1}{n} \cdot p^{-nx} \geq 0$$

följer det att det vi måste undersöka är om

$$\mathrm{Re}(3 + 4p^{-int} + p^{-2int}) \geq 0$$

$$p^{-int} = e^{\ln(p) \cdot -int}$$

$$\theta = -\ln(p) \cdot n \cdot t \Rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow \mathrm{Re}(3 + 4 \cdot e^{i\theta} + e^{i2\theta})$$

Eulers formel ger nu:

$$\mathrm{Re}(3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = 3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta)$$

likheten $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ ger:

$$3 + 4\cos(\theta) + 2\cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0$$

alla termer i vår summa är alltså större eller lika med 0. Då exempelvis $\theta = -\ln(2) \cdot 2$ ger en term > 0 innebär detta att summan är strikt större än 0. Det finns alltså inga nollställen för $\zeta(s)$ med $\mathrm{Re}(s) = 1$.

$\square$

Sats 8: Det finns inga nollställen för $\zeta(s)$ med $\mathrm{Re}(s) = 0$.

Bevis:
Sats 2 och 3 visar att om $\zeta(s)$ är ett nollställe är $\zeta(1-s)$ också det. Om det finns något $\zeta(0+it) = 0$ följer även att $\zeta(1-(0+it)) = \zeta(1-it) = 0$. Men detta motbevisades i Sats 7.
Notera att Sats 2 inte fungerar i punkterna $s = 1$ och $s = 0$. Med då $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ och $\zeta(1) = \infty$ håller Satsen. $\square$

Del 2

I denna del så utgår man från ett uttryck av 2 variabler som bland annat innehåller $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, som därefter, genom flera hjälpsatser, skrivs om till ett annat uttryck. Detta uttryck förändras i sin tur genom derivering med avseende på en av variablerna. Genom ett motsägelsebevis visas det därefter slutligen att denna derivata omöjligt kan sluta växla tecken för $t > T$ för något stort T. Då den enda funktionen i uttrycket som potentiellt sett kan växla tecken oändligt många gånger är $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ följer det därav att zeta-funktionen har oändligt många nollställen på den kritiska linjen.

Sats 9: Om $\zeta(s) = 0$ för något tal $s = \frac{1}{2} + it$ med $t \in \mathbb{R}$ är $\zeta(\overline{s}) = 0$

Bevis:
Det har tidigare visats att om $\zeta(s) = 0$ är $\zeta(1-s) = 0$. $\zeta(\frac{1}{2}+it) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-(\frac{1}{2}+it)) = \zeta(\frac{1}{2}-it) = 0$ $\square$

Definition: Mellintransform $\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot f(x)\, dx$

Mellintransformen har inversionsformen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} x^{-s} \cdot \varphi(s)\, ds$$

Hjälpsats 10:

$$\{\mathcal{M}\omega\}(x) = \zeta(2s) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s}$$

med

$$\omega(y) = \sum_{n \leq 1} e^{-n^2 \pi y}$$

Bevis:
Denna likhet härleddes i Sats 3, men då utan beteckningen Mellintransform.

Hjälpsats 11:

$$\omega(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \zeta(zs) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s} \cdot y^{-s}\, ds \text{ för } c > \frac{1}{2}$$

Bevis:
Detta följer av att applicera Mellintransformens inversionsformel på Hjälpsats 10.

Definition: $\Xi(t) = \zeta(\frac{1}{2}+it)$

Sats 12:

$$\int_0^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\cos(xt)\,dt = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}\omega(e^{-2x}))$$

Bevis:

$$\text{Sätt } Q(x) = \int_0^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\cos(xt)\,dt$$

Då $(t^2+\frac{1}{4})\cdot\Xi(t)\cdot\cos(xt)$ är symmetrisk kring $t=0$ (se Sats 9 för $\Xi(t)$'s symmetri) så gäller:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\cos(xt)\,dt \quad (1)$$

Då $\sin(xt)$ är "inverst symmetrisk" kring $t=0$ följer det att

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\cdot\cos(xt)\,dt = 0 \quad (2)$$

Addition av (1) och (2) tillsammans med Eulers formel ger nu:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cdot e^{ixt}dt$$

låt $s=\frac{1}{2}+it$. Då följer:

$$Q(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{2i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\frac{1}{s(1-s)}\Xi(s)\cdot e^{xs}\,ds$$

Definitionen av $\Xi(s)$ på den kritiska linjen ger nu:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs}\,ds$$

$z(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{0}}\cdot e^{xs}$ har singulariteter i $s=0$ och $s=1$. Därmed följer det att om vi flyttar linjeintegralen till höger om linjen $c=1$ så korrigeras förändringen med att subtrahera residualen i $s=1$ så för $c>1$ gäller:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot\int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs}\,ds+\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i}\cdot 2\pi i\cdot\mathrm{Res}(\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot e^{xs},1)$$

Då $\mathrm{Res}(\zeta(s),1)=1$ (se Appendix Sats 14) följer det att:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i}\cdot 2\pi i\cdot 1\cdot\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot e^x = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2}\cdot\pi\cdot 1\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}\pi}{2}$$

Därmed följer:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i}\cdot\int_{C-\infty}^{C+\infty}\zeta(s)\cdot\Gamma(\frac{s}{2})\cdot\pi^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{xs}\,ds+\frac{\pi}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

genom att sätta $y=e^{-2x}$ erhålls det från Hjälpsats 11 att:

$$Q(x) = -\pi e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\omega(e^{-2x})+\frac{\pi}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x}-2e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\omega(e^{-2x}))$$

$\square$

Hjälpsats 13: För alla heltal n gäller:

$$\lim_{a \to \frac{n}{4}\pi^+} \frac{d^{2n}[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia}))]}{da^{2n}} = 0$$

Bevis:
Observera att:

$$\begin{aligned}
\omega(i+v) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+v)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot e^{-\pi i n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot (-1)^{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot (-1)^{n}
\end{aligned}$$

Det sista steget gäller då udda n ger udda n^2 och jämna n ger jämna n^2.

$$2\omega(4v) - \omega(v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi 4v} - e^{-n^2\pi v} = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(2n)^2\pi v} - e^{-n^2\pi v}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2 vt} = \omega(i+v) = 2\omega(4v) - \omega(v) \qquad (1)$$

$$\omega(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \omega(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \text{ (Se Sats 3 för härledning)}$$

Vilket ger att (1) blir:

$$\omega(i+v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega(\frac{1}{4v}) - \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega(\frac{1}{v}) - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Om man nu skriver ut summorna ser man att $\omega(i+v) + \frac{1}{2}$ och alla dess derivator går mot 0 då $v \to 0$ för $v \in \mathbb{R}^+$ vilket även innebär att de går mot 0 längs all vinklar $|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi$ då vi för något v med $\mathrm{Re}(v) > 0$ har att:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{v}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{\mathrm{Re}(v)}{|v^2|}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{|v|}}.$$

Då $a \to \frac{\pi^+}{4}$ antyder att $e^{2ia} \to i$ längs alla "vägar" med $|\arg(e^{2ia} - i)| < \frac{1}{2}\pi$, så bevisar detta Satsen

□

Sats 14: Riemanns Zeta-funktion har oändligt många nollställen längst linjen $\frac{1}{2} + it$

Bevis:
Genom att substituera $x = -ia$ i Sats 12 så erhålls uttrycket:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi}{2}(e^{-\frac{1}{2}ia} - 2e^{\frac{1}{2}ia} \cdot \omega(e^{2ia}))$$

$$= \pi \cos(\frac{a}{2}) - \pi e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \qquad (1)$$

$$\text{där } \cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{-at} + e^{at})$$

om man nu deriverar (1) $2n$ antal gånger med avseende på a får man:

$$\int_0^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \cdot \Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{a}{2}) - \frac{\pi d^{2n}}{da^{2n}} \left[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \right]$$

(deriveringen sker ett jämnt antal gånger för att få en "regelbunden" derivata) a får nu gå mot $\frac{1}{4}\pi^+$. Hjälpsats 13 innebär nu att den sista termen i det högra ledet $\to 0$, vilket ger:

$$\lim_{a \to \frac{1}{4}\pi^+} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{8}{\pi}). \qquad (2)$$

Om satsen är fel skulle det innebära att $\Xi(t)$ har ändligt många nollställen vilket innebär att $\Xi(t)$ aldrig ändrar tecken för $t > T$ för något stort T. Antag nu att $\Xi(t) > 0$ ($\Xi(t) < 0$ hanteras på samma sätt). låt L Definieras som:

$$\lim_{a \to \frac{\pi^+}{4}} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(at) \,\mathrm{d}t = L$$

Då cosh ökar monotont i $[0, \infty]$ antyder det för $T' > T$ att:

$$\int_T^{T'} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(at) \,\mathrm{d}t \leq L$$

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{1}{4}\pi t) \,\mathrm{d}t$$

är absolut konvergent. Då $(t^2+\frac{1}{4})^{-1} t^{2n} \Xi(t) \cos(\frac{\pi}{4}t)$ är större än $(t^2+\frac{1}{4})^{-1} t^{2n} \Xi(t) \cos(at)$ För alla $a \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (Då cosh växer monotont), låter Dominerande konvergenssatsen oss att byta plats på gränsvärdet och integralen. (2) ger nu att vi för varje n har:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) \,\mathrm{d}t = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cdot \cos(\frac{\pi}{8})$$

Det är dock omöjligt då högerledet växlar tecken oändligt ofta. Låt n vara udda, högerledet är då strikt mindre än 0 och vi har då:

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cosh(\frac{\pi}{4}t) \,\mathrm{d}t < 0$$

$$\int_T^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cosh(\frac{\pi}{4}t)\ \mathrm{d}t < -\int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cosh(\frac{\pi}{4}t)\ \mathrm{d}t$$

Då T är fixt är:

$$\left|\int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cosh(\frac{\pi}{4}t)\ \mathrm{d}t\right| \leq T^{2n}\int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}|\Xi(t)|\cosh(\frac{1}{4}\pi t)\ dt$$

sätt $R = \int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}|\Xi(t)|\cosh(\frac{1}{4}\pi t)\ dt$. Detta ger nu:

$$-\int_0^T (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cosh(\frac{\pi}{4}t)\ \mathrm{d}t \leq RT^{2n}$$

där R är oberoende av n. Man kan nu anta att det finns ett $K > 0$ så att $\Xi(t)(t^2 + \frac{1}{4})^{-1} > K$ för alla $2T < t < (2T + 1)$ så att:

$$\int_T^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t)\cosh(\frac{\pi}{4}t)\ \mathrm{d}t \geq \int_{2T}^{2T+1} t^{2n}K\ \mathrm{d}t \geq K \cdot (2T)^{2n}$$

Därmed är

$$K(2T)^{2n} < RT^{2n}$$

för alla n, vilket är ekvivalent med:

$$2^{2n} < \frac{R}{K}$$

vilket är omöjligt då $\frac{R}{K}$ är oberoende av n och n kan väljas godtyckligt stort. Vi har därmed en modsägelse, Satsen är bevisad.

$\square$

Appendix

Definition: Fourierserie och Fouriertransform.
Eulers formel ger att $e^{i\cdot x} = cos(x) + i \cdot sin(x)$ Men går det att uttrycka en funktion som en oändlig summa med sinus och cosinusvågor?
Mer matematisk blir frågan om kan man skriva en funktion $f(t)$ som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

Detta går om $f(t)$ är periodisk med perioden 2π. Om så är fallet gäller:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

$$f(t) \cdot e^{-imt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(e^{i(n-m)\cdot t})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-imt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i(n-m)\cdot t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\cdot t}\, dt$$

Integralen på höger sida $= 0$ om $n \neq m$ och $= 2\pi$ om $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i\cdot m\cdot t}\, dt = C_n \cdot 3\pi = C_m \cdot 2\pi \Leftrightarrow C_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{i\cdot m\cdot t}\, dt$$

Mer generellt så gäller att om $f(t)$ har en Period L så är:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot 2\pi\cdot \frac{t}{L}}$$

$$\text{där } C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \cdot e^{-\frac{i\cdot n\cdot 2\pi}{L}}$$

där C_n kallas för den n:te Fourierkoefficienten till $f(t)$.
Fouriertransformen av en funktion f(t) definieras som:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\cdot u\cdot t}\, dt$$

Sats 1: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$ där $\hat{f}(m)$ är Fouriertransformen till $f(n)$.

Bevis:
Vi börjar med att definiera $g(x)$ som $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ eftersom $g(x)$ är periodisk med perioden 1 kan vi skriva ett uttryck för dess Fourierkoefficienter.

$$\begin{aligned}
\hat{g_k} &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx \\
&= ... \int_{-1}^0 f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx + \int_0^1 f(x) - e^{-ikx}\ dx + \int_1^2 f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx... \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-ikx}\ dx = \hat{f}(x)
\end{aligned}$$

Som är fouriertransformen av $f(x)$.

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^{ikx}$$

som är fourierserien till $g(x)$. Om vi nu väljer $x=0$ får vi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

$\square$

Sats 2: Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är differentierbar i punkten $z_0 = x_0 + iy_0$ måste:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ och } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

Bevis:
Vi utgår från derivatans definition:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ får gå mot 0 från alla riktningar i det komplexa planet. Om $\Delta z \to 0$ horisontellt är $\Delta z = \Delta x$ och vi får då:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{u(x_0,+) - u(x_0,y_0)}{\Delta}\right] x, y\Delta x + i \lim_{\Delta x\to 0} \left[\frac{v(x_0,+) - v(x_0,y_0)}{\Delta}\right] x, y\Delta x \\
&= \frac{du}{dx}(x_0,y_0) + i\frac{dv}{dx}(x_0,y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x, y) + iv(x_0+\Delta x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0, +\Delta x, y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] + i \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{v(x_0, +\Delta x, y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{du}{dx}(x_0, y_0) + i\frac{dv}{dx}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}
$$

Om $\Delta z \to 0$ vertikalt är $\Delta z = i\Delta y$ och vi får då:

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] + i \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{v(x_0, y+y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \right] \\
&= -i\frac{du}{dy}(x_0, y_0) + \frac{dv}{dy}(x_0, y_0) = f'(z_0)
\end{aligned}
$$

Om vi sätter real-delarna lika med varandra och imaginärdelarna lika med varandra får vi:

$$
\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}
$$

□

Definition: Klass C_1 Låt f vara definierad i en mängd D. Vi säger att f är av klass C_1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna är kontinuerliga i D.

Sats 3: För två funktioner av klass $C_1, P(x, y)$ och $Q(x, y)$ gäller det att:

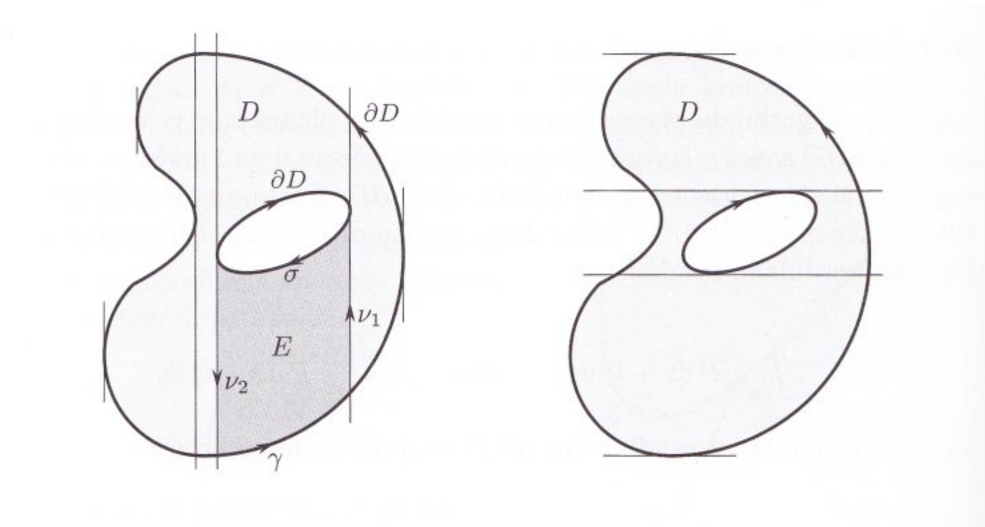
$$
\int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right)\ dx\ dy
$$

Där D är ett kompakt område och ∂D är randen till D.

Bevis:
Beviset genomförs under förutsättningen att D med räta linjer, parallella med y-axeln, kan delas upp i ett ändligt antal områden av typen:

$$
E\{(x, y) : \psi(x) \leq y \leq \varphi(x), a \leq x \leq b\}
$$

Och att det finns en motsvarande uppdelning för x-axeln



Inledningsvis visas det att:

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy$$

$$\iint_E -\frac{dP}{dy}\ dx\ dy = \int_{x=a}^{b} [-P(x,y)]_{x=\psi(x)}^{x=\varphi(x)}\ dx$$

$$\int_a^b P(x,\psi(x))\ dx - \int_b^a P(x,\varphi(x))\ dx \quad (1)$$

Kurvan γ i figuren kan framställas med x som parameter:

$$\gamma = (x, \psi(x)), a \leq x \leq b.$$

Den första integralen i (1) kan därför skrivas som

$$\int_\gamma P\ dx + 0\ dy = \int_\gamma P\ dx.\ (2)$$

På samma sätt får vi för den andra termen att:

$$-\int_a^b P(x,\varphi(x))\ dx = \int_\sigma P\ dx\ (3)$$

då kurvintegralen av de (eventuella) randstyckena v_1 och v_2 är noll innebär detta att addition av (2) och (3) ger $\int_{\partial E} P\ dx$, vilket innebär att:

$$\int_{\partial E} P\ dx = \iint_E -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

genom att addera ihop det här resultatet för alla uppkommande områden av E ger detta:

$$\int_{\partial D} P\ dx = \iint_D -\frac{dP}{dy}\ dxdy.$$

Om vi gör på samma sätt med en uppdelning av D med linjer parallella med X-axeln får vi på liknande sätt att:

$$\int_{\partial D} Q\ dy = \iint_D \frac{dQ}{dx}\ dydx.$$

genom att addera uttrycken följer nu att:

$$\iint_D \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\ dxdy = \int_{\partial D} P\ dx + Q\ dy.$$

$\square$

Definition: En funktion f är analytisk i ett område D om den har en derivata i alla punkter i D.

Sats 4: Om Γ är en sluten kurva i det komplexa talplanet och $f(z)$ är analytisk i området som innesluts av Γ så är:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0.$$

Bevis:
Med den vanliga notationen:
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ får vi:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\ dt = \int_a^b [a(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\ dt$$

$$= \int_a^b \left[a(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt + i\int_a^b \left[v(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right]\ dt$$

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \int_\Gamma (u\ dx - v\ dy) + i\int_\Gamma v\ dx + u\ dy$$

Sats 3 ger nu:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = \iint_{D'} \left(-\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)\ dxdy + i\iint_{D'} \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)\ dxdy$$

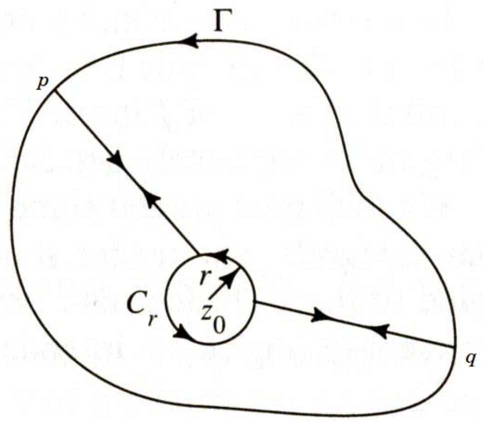
där D' är området som innesluts av Γ. Men ekvationerna från Sats 2 ger nu att dubbelintegralerna är 0. vilket ger:

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$$

$\square$

Sats 5: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$

Bevis:
$\frac{f(z)}{z-z_0}$ är analytisk överallt i området som inneslutс av Γ förutom i punkten $z = z_0$. Vi kan därför deformera Γ till en cirkel C_r med radien r och som är centrerad kring z_0.



man kan dela upp den slutna kurvan Γ i två kurvor, en som går moturs från p till q, och en som går moturs från q till p. Betrakta därefter kurvan från p till q som rör sig in mot z_0 och därefter rör sig i en halvcirkel under z_0 och som därefter rör sig mot q längs en rät linje. Som en följd av Sats 4 gäller att integralen längs alla kurvor med samma start och slutpunkt är lika. Alltså är integralen längs den ovan beskrivna kurvan och integralen längs delkurvan till Γ från p till q lika. Man kan skapa en liknande kurva som rör sig i en halvcirkel ovanför z_0 vars integral är lika med integralen längs delkurvan till Γ som rör sig från q till p. Summan av integralen längs delkurvorna till Γ blir lika med integralen längs Γ. Men denna integral blir även lika med summan av integralerna längs de ovan beskrivna kurvorna. Men då integralen längs de båda linjesegmenten tar ut varandra, gäller det att integralen längs Γ är lika med integralen längs en cirkel med radien r, C_r, med centrum i z_0. Alltså:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz.$$

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz + \int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz \quad (1)$$

substitutionen

$$z = r \cdot e^{iv} + z_0$$
$$dz = r \cdot i \cdot e^{iv}\, dv$$

ger i den vänstra integralen:

$$\int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0)\cdot r \cdot i \cdot e^{iv}}{r \cdot e^{iv}}\, dv = [f(z_0)\cdot iv]_0^{2\pi} = f(z_0)\cdot 2\pi i.$$

den högra integralen i (1) $\to 0$ då radien av cirkeln $\to 0$. Detta visas genom att sätta $M_r := \max[|f(z) - f(z_0)|; z \text{ på } C_r]$ Detta innebär att

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \frac{|f(z) - f(z_0)|}{r} \leq \frac{M_r}{r}$$

$$\left|\int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz\right| \leq \frac{M_r}{r} l(C_r)$$

där $l(C_r)$ är längden av kurvan C_r.

$$\frac{M_r}{r} \cdot l(C_r) = \frac{M_r}{r} \cdot 2r\pi = M_r \cdot 2\pi$$

men då f är kontinuerlig i punkten z_0 går $M_r \to 0$ då $r \to 0$. Alltså är $\int_{C_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz = 0$. Vilket innebär att (1) $= 2\pi i \cdot f(z_0) + 0$ division med $2\pi i$ ger:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

□

Sats 6:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{(n+1)}}\, dz \cdot n!$$

Bevis:
Detta inses genom att derivera uttrycket med avseende på z_0.

$$\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-1}\, dz \\
f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -1 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-2}\, dz \\
f''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot -1 \cdot -2 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-3}\, dz \\
f'''(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot 2 \cdot -1 \cdot -3 \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z - z_0)^{-4}\, dz \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \cdot n! \cdot \int_\Gamma f(z) \cdot (z\ z_0)^{-(n+1)}\, dz
\end{aligned}$$

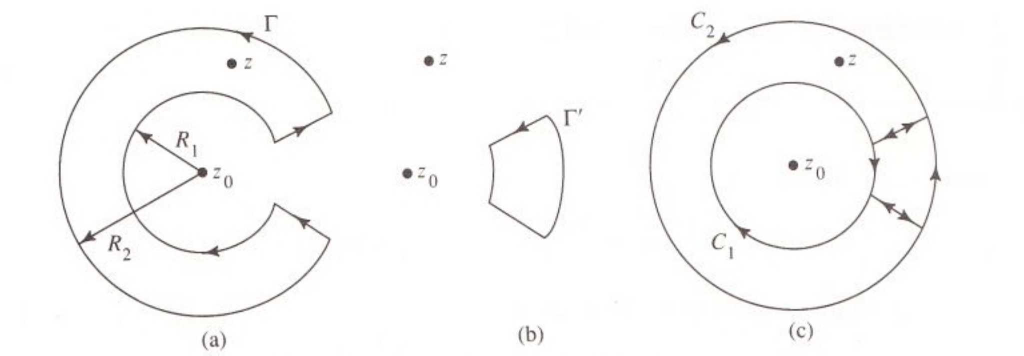
□

Sats 7:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j. \text{ med } a_j = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\, d\zeta$$

Detta kallas för en Laurent-serie

Bevis:
Låt Γ vara en sluten kurva runt z. Låt därefter Γ se ut som en "donut" med en "bit" borta.



Låt Γ' vara den "borttagna biten". då $f(z)$ är analytisk i hela området som innesluts av Γ' ger Sats 3 att.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

därmed följer att vi kan "sätta tillbaka biten". Då integralen var $= 0$ följer att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma+\Gamma'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

då integralerna längs linjesegmenten tar ut varandra följer det att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) \quad (1)$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{(taylorpolynom)}$$

Sats 6 ger nu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Om man nu fokuserar på integralen runt C_1 i (1) så ser man att då z ligger utanför C_1 måste vi integrera kring en annan punkt.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)} \left(\frac{1}{1 - \frac{(\zeta - z_0)}{(z - z_0)}} \right)$$

taylorpolynomet till den högra faktorn ger nu:

$$-\frac{1}{(z-z_0)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(\zeta-z_0)}{(z-z_0)}\right)^k$$

insättning i integralen ger nu:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(\zeta)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k}\,d\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\,d\zeta\cdot(z-z_0)^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

Där $a_{-k}=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k+1}}\,d\zeta$. Ekvation (1) blir nu:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}(z-z_0)^{-k}$$

□

Sats 8: Om f har en singularitet i punkten z_0 så är linjeintegralen runt singulariteten $= 2\pi i\cdot a_{-1}$.

Bevis:
Sats 7 ger att $f(z)=\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}a_j(z-z_0)^j$

$$\oint_{C_r} f(z)\,dz=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\cdot\oint_{C_r}(z-z_0)^j\,dz$$

$$z=e^{iv}+z_0$$
$$dz=ie^{iv}dv \qquad \text{för } j\neq -1$$

$$\oint_{C_r}(z-z_0)^j\,dz=\int_0^{2\pi} ie^{ir(j+1)}\,dv=\left[i\frac{e^{iv(i+1)}}{i(j+1)}\right]_0^{2\pi}=0$$

$$\text{för } j=-1 \text{ gäller: } \int_0^{2\pi} ie^{iv(-1+1)}\,dv=[i\cdot v]_0^{2\pi}=2\pi i$$

för alla $j\neq -1$ blir integralen $= 0$ och för $j=-1$ blir integralen lika med $2\pi i a_{-1}$. Alltså:

$$\oint_{C_r} f(z)\,dz=2\pi i\cdot a_{-1}$$

där termen a_{-1} kallas för residualen

□

Sats 9: $a_{-1}=\lim_{z\to z_0}f(z)\cdot(z-z_0)$

Bevis:
Om $f(z)$ har en "borttagbar" singularitet i Punkten $z=z_0$ $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ blir alla koefficienter till $f(z)$'s Laurentserie för $j<-1=0$. Detta på grund av

att integralen i a_k för $k < -1$ inte innesluter en singularitet, och integralen är därmed, enligt Sats 3, lika med 0. Men om $f(z)$ har en singularitet i punkten $z = z_0$ gäller:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a-1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 \ldots \\
f(z)(z-z_0) &= a_{-1} + (z-z_0)(a_0 + a_1(z-z_0)\ldots) \\
\lim_{z \to z_0} f(z)(z-z_0) &= a_{-1} + (0)(a_0 + a_1(z-z_0)\ldots) = a_{-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Hjälpsats 10: Om $A_n = \sum_{i=0}^{n} a_1$, då är $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n \cdot b_n$

Bevis:

$$a_k = A_k - A_{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k$$

i den andra summan substitueras k mot $i+1$

$$\sum_{k=0}^{n} A_{k-1} \cdot b_k = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot b_{i+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1}$$

vi har nu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k \cdot b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot b_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$

Hjälpsats 11: $(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \cdot \int_n^{n+1} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$s \cdot \int_n^{n+1} x^{-s-1}\, dx = -[x^{-s}]_n^{n+1} = -((n+1)^{-s} - n^{-s}) = n^{-s} - (n+1)^{-s}$$

$\square$

Definition: $\lfloor x \rfloor =$ heltalsdelen av x

exempel:
$\lfloor \pi \rfloor = 3, \quad \lfloor e \rfloor = 2, \quad \lfloor 38.5 \rfloor = 38$

Definition: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

exempel:
$\{\pi\} = 0.14159265358979\ldots, \quad \{e\} = 0.72182818284590\ldots, \{38.5\} = 0.5$

Hjälpsats 12: $\frac{s}{s-1} - s \cdot \int\limits_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx + s \cdot \int\limits_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$s \cdot \int_1^\infty x^{-s-1}(\lfloor x \rfloor + \{x\})\, dx = s \cdot \int_1^\infty x^{-s}\, dx$$
$$= s \cdot \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^\infty = \frac{1^{1-s}}{1-s} \cdot s = \frac{s}{1-s}$$

$\square$

Sats 13: $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int\limits_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx$

Bevis:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq n} \frac{1}{n^{-s}}$$

Hjälpsats 10 ger:

$$\sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^{-s}} = \sum_{n \leq 1} n \cdot (n^{-s} - (n+1)^{-s})$$

Hjälpsats 11 ger nu att:

$$s \sum_{n \leq 1} n(n^{-s} - (n+1)^{-s}) = s \sum_{n \leq 1} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx = s \int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx$$

Hjälpsats 12 ger slutligen att:

$$\int_1^\infty \lfloor x \rfloor x^{-s-1}\, dx = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx = \zeta(s)$$

$\square$

Sats 14: $\zeta(s)$ har en singularitet i $s = 1$ med residualen 1.

Bevis:
Sats 9 visar att residualen $= \lim_{z - z_0} f(z)(z - z_0)$

$$\zeta(s) \cdot (s-1) = \left(\frac{s}{s-1} - s \cdot \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx\right)(s-1)$$

$$\lim_{s \to 1} \zeta(s)(s-1) = \lim_{s \to 1} s - s(s-1) \cdot \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}\, dx = 1 - 0 = 1$$

$\square$

Källor:

Arne Persson & Lars-Christer Böiers, (2005), Analys i Flera Variabler. Lunds Studentlitteratur AB.

E. B Saff & A. D. Snider, (1993), Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, And Engineering, Upper Saddle River, New Jersey:
Simon & Schutser Company.

Elias M. Stein & Rami Shakarchi, (2003), Fourier Analysis An Introduction, Princeton, New Jersey:
Princeton University Press.

Eric Naslund, (2011), Zeros on the Critical Line [Digital].
Tillgänglig:
http://www.math.ubc.ca/~gerg/teaching/613-Winter2011/ZerosCriticalLine.pdf

Okänd, (2007), Notes on the Riemann Zeta Function [Digital]
Tillgänglig:
http://people.math.gatech.edu/~ecroot/riemann_notes.pdf

Robert B. Nash, (Okänd), Complex Variables (Chapter 7, The Prime Number Theorem) [Digital].
Tillgänglig:
http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV/CV7.pdf