# p100

Linus Bergkvist

**Introduktion**
Riemannhypotesen går ut på att alla icke-triviala nollställen till Riemanns zeta-funktionligger på linjen $\frac{1}{2}+i\cdot t$. De triviala nollställena är $-2, -4, -6, -8, -10\ldots$

**Sats 1:** Det finns inga nollställen till Riemanns zeta-funktion med $Re > 1$.

För $s$ med $Re(s) > 1$ definieras Riemanns zeta-funktion som $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}...$$
$$\zeta(s) \cdot \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s}...$$
$$\zeta(s) - \frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s}...$$

Vi har nu tagit bort alla multiplar av $\frac{1}{2^s}$

$$\zeta(s)(1-\frac{1}{2^s}) \cdot \frac{1}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s}...$$
$$\zeta(s)(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s}...$$

Vi har nu tagit bort alla återstående multiplar av $\frac{1}{3^s}$

Om man gör så med alla primtal får man:

$$\zeta(s) \cdot (1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})(1-\frac{1}{5^s})... = \frac{1}{1^s} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\zeta(s) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^s})(1-\frac{1}{3^s})...} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}. \quad Re(s) > 1$$
$$\frac{\zeta(s)}{\prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})}} = 1 = \zeta(s) \cdot \prod_p (1-p^{-s})$$

Vilket visar att $\zeta(s) \neq 0$ För $Re(s) > 1$

**Definition: Fourierserie och Fouriertransform.**

Eulers formel ger att $e^{i\cdot x} = cos(x) + i \cdot sin(x)$ Men går det att uttrycka en funktion som en oändlig summa med sinus och cosinusvågor?
Mer matematisk blir frågan om kan man skriva en funktion $f(t)$ som

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

Detta går om $f(t)$ är periodisk med perioden $2\pi$. Om så är fallet gäller:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot t}$$

$$f(t) \cdot e^{-imt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (e^{i(n-m)\cdot t})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-imt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i(n-m)\cdot t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\cdot t}\, dt$$

Integralen på höger sida $= 0$ om $n \neq m$ och $= 2\pi$ om $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-i\cdot m\cdot t}\, dt = C_n \cdot 2\pi = C_m \cdot 2\pi \Leftrightarrow C_m = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{i\cdot m\cdot t}\, dt$$

Mer generellt så gäller att om $f(t)$ har en Period $L$ så är:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i\cdot n\cdot 2\pi\cdot \frac{t}{L}}$$

$$\text{där } C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(t) \cdot e^{-\frac{i\cdot n\cdot 2\pi}{L}}$$

Fouriertransformen av en funktion f(t) definieras som:

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\cdot u\cdot t} dt$$

**Sats 2:** $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$ där $\hat{f}(m)$ är Fouriertransformen till $f(n)$.
Vi börjar med att definiera $g(x)$ som $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ eftersom $g(x)$ är periodisk med perioden 1 kan vi skriva ett uttryck för dess Fourierkoefficienter.

$$\begin{aligned}
\hat{g_k} &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\cdot e^{-ikx}\,dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\cdot e^{-ikx}\,dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x)\cdot e^{-ikx}\,dx \\
&= ...\int_{-1}^0 f(x)\cdot e^{-ikx}\,dx + \int_0^1 f(x) - e^{-ikx}\,dx + \int_1^2 f(x)\cdot e^{-ikx}\,dx... \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-ikx}\,dx = \hat{f}(x)
\end{aligned}$$

Som är fouriertransformen av $f(x)$.

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^{ikx}$$

som är fourierserien till $g(x)$. Om vi nu väljer $x = 0$ får vi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\cdot e^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

$\square$

**Definition:** Den kompletta zeta-funktionen.

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\cdot s(s-1)\cdot \pi^{-s/2}\cdot \Gamma(\frac{s}{2})\cdot \zeta(s)$$

där

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\cdot e^{-t}\,dt$$

**Sats 3:** Den kompletta zeta-funktionens nollställen är nollställen för Riemanns zeta-funktion.

Det här är ett väldigt kort bevis. Eftersom varken $\frac{1}{2} \cdot s, (s-1), \pi^{-s/2}$ eller $\Gamma(\frac{s}{2})$ har några nollställen utöver punkterna $s = 0$ och $s = 1$ så måste $\xi(s)$ ha samma nollställen som $\zeta(s)$.

**Sats 4:** $\xi(s) = \xi(1-s)$.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty t^{s/2-1} \cdot e^{-t} \, dt$$

Vi gör substitutionen $t = \pi \cdot n^2 \cdot x$.

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty \pi^{(s/2-1)} \cdot n^{2^{(s/2-1)}} \cdot x^{(s/2-1)} \cdot e^{-\pi \cdot n^2 \cdot x} \, dx$$

$$\pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot e^{-\pi n^2 x} \, dx$$

Vi vet att $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$

$$\sum_{n \geq 1} \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot n^{-s} = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \cdot \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x} \, dx$$

framöver betecknar vi $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi x n^2}$ som $\omega(x)$. Nu delar vi upp integralen vid 1 och erhåller:

$$\int_0^1 x^{s/2-1} \cdot \omega(x) \, dx + \int_1^\infty x^{s/2-1} \cdot \omega(x) \, dx$$

För att få samma integrationgränser i de båda integralerna gör vi substitutionen $x = x^{-1}$ i den första integralen och erhåller då:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1}) \, dx + \int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x) \, dx$$

Vi definierar nu funktionen $\theta(x)$ som:

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-xn^2\pi}$$

Eftersom $n^2 = (-n)^2$ och $e^{-x0^2\pi} = 1$ får vi att

$$\theta(x) = 2\omega(x) + 1$$

Vi använder nu Fouriertransformen på $e^{-\pi n^2 x}$ och erhåller

$$\mathcal{F}(e^{-\pi n^2 x})(u) = x^{-1/2} \cdot e^{-\pi u^2/x}$$

Vi använder därefter summationsformeln från Sats 2 och erhåller då:

$$\theta(x) = x^{-1/2}\theta(x^{-1})$$

$$2\omega(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2\omega(x^{-1}) + 1) \Leftrightarrow \omega(x^{-1}) = \omega(x) \cdot \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2}$$

Om vi nu använder vårt uttryck för $\omega(x^{-1})$ i den tidigare integralen erhåller vi:

$$\int_1^\infty x^{-s/2-1} \cdot \omega(x^{-1})\, dx = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{(s+1)/2} \cdot \omega(x)\, dx$$

Och hela ekvationen blir då:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \zeta(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty (x^{s/2-1} + x^{-(s+1)/2}) \cdot \omega(x)\, dx$$

Om vi byter ut $s$ mot $(1-s)$ i det högra uttrycket erhåller vi samma uttryck igen. Därför gäller det att $\xi(s) = \xi(1-s)$

$\square$

**Sats 5:** De triviala nollställena till Riemanns zeta-funktion är de enda nollställena utanför intervallet $0 < Re(s) < 1$.

I Sats 1 bevisade jag att $\zeta(s)$ inte har några nollställen för $\zeta(s)$ och i Sats 4 bevisade jag att $\xi(s) = \xi(1-s)$. Om vi antar att det finns en punkt p med $Re(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$ innebär det av Sats 3 att $\xi(p) = 0 \Leftrightarrow \xi(1-p) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1-p) = 0$ men om $Re(p) < 0$ är $Re(1-p) > 1$. Då innebär det att det finns en punkt $q = 1-p$ med $Re(q) > 1$ sådan att $\zeta(q) = 0$. Men detta strider mot Sats 1. Det kan alltså inte finnas en punkt $p$ med $Re(p) < 0$ sådan att $\zeta(p) = 0$.

$\square$

**Sats 6:** $Re(ln(-a)) = ln(a)$
Vi börjar med Eulers identitet:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \Leftrightarrow -a = a \cdot e^{i\pi} \\ &= e^{ln(a)} \cdot e^{i\pi} \\ &= e^{ln(a)+i\pi} \\ &= e^{ln(-a)} \Leftrightarrow ln(-a) \\ &= ln(a) + i\pi \end{aligned}$$

$$Re(ln(a) + i\pi) = ln(a) = Re(ln(-a))$$

$\square$

**Sats 7:** $ln(1-i) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$f(x) = ln(1-x) \Rightarrow f(0) = ln(1) = 0$$

Definitionen av Maclaurinpolynom är:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

men då $ln(1) = 0$ är:

$$ln(1-x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) \cdot x^n}{n!}$$

Derivering ger att

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)!$$
$$\Downarrow$$
$$ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n-1)! \cdot x^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$\square$

**Sats 8:** $\zeta(s+it) = 0$ for $s = 1$ omm $\zeta(s)^3 \cdot \zeta(s+it)^4 \cdot \zeta(s+2it) = 0$ för $s = 1$.

$\zeta(s)$ har en singularitet för $s = 1$. Men eftersom faktorn $\zeta(s+it)^4$ är av högre grad kan singulariteterna för $\zeta(s)$ inte ta ut ett eventuellt nollställe. Termen $\zeta(s+2it)$ kan bli 0, men då den aldrig kan bli en singularitet kan den inte ta ut ett eventuellt nollställe.

**Sats 9:** $\zeta(s)$ har inga nollställen för $Re(s) = 1$.

Vi använder oss av ett uttryck från Sats 1:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$ln(\frac{1}{1-p^{-s}}) = ln(1) - ln(1-p^{-s}) = -ln(1-p^{-s})$$

$$ln\left|\zeta(s)\right| = ln\left|\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}\right| = \sum_p ln\left|\frac{1}{1-p^{-s}}\right| = -\sum_p ln\left|1-p^{-s}\right|$$

Sats 6 ger nu:

$$-\sum_p ln\left|1-p^{-s}\right| = -Re(\sum_p ln(1-p^{-s}))$$

Sats 7 ger nu:

$$-Re(\sum_p ln(1-p^{-s})) = Re(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{p^{-ns}}{n}))$$

Vi definierar nu $h(x) = \zeta(x)^3 \cdot \zeta(x+it)^4 \cdot \zeta(x+2it)$ logaritmlagarna ger nu:

$$\begin{aligned} ln(h(x)) &= 3ln\,|\zeta(x)| + 4ln\,|\zeta(x+it)| + ln\,|\zeta(x+2it)| \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot p^{nx} \cdot Re(3 + 4p^{-int} + p^{-int \cdot 2}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \cdot p^{-nx} \geq 0$$

vilket innebär att det vi måste undrsöka är om

$$Re(3 + 4p^{-int} + p^{-2int}) \geq 0$$

.

$$p^{-int} = e^{ln(p) \cdot -int}$$

$$\theta = -ln(p) \cdot n \cdot t \Rightarrow e^{i\theta} \Rightarrow Re(3 + 4 \cdot e^{i\theta} + e^{i2\theta})$$

Eulers formel ger nu:

$$Re(3 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = 3 + 4cos(\theta) + cos(2\theta)$$

likheten $cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$ ger:

$$3 + 4cos(\theta) + 2cos^2(\theta) - 1 = 2(1 + 2cos(\theta) + cos^2(\theta)) = 2(1 + cos(\theta))^2 \geq 0$$

alla termer i vår summa är alltså större eller lika med 0. Då exempelvis $\theta = -ln(2) \cdot 2$ ger en term $> 0$ innebär detta att summan är strikt större än 0. Det finns alltså inga nollställen för $\zeta(s)$ med $Re(s) = 1$.

□

**Sats 10:** Det finns inga nollställen för $\zeta(s)$ med $Re(s) = 0$.

Sats 3 och 4 visar att om $\zeta(s)$ är ett nollställe är $\zeta(1-s)$ också det. Om det finns något $\zeta(0+it) = 0$ följer även att $\zeta(1-(0+it)) = \zeta(1-it) = 0$. Men detta motbevisades i Sats 9.
Notera att Sats 4 inte fungerar i punkterna $s = 1$ och $s = 0$. Med då $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ och $\zeta(1) = \infty$ håller satsen. □

**Sats 11:** Om $\zeta(s) = 0$ för något tal $s = \frac{1}{2} + it$ med $t \in \mathbb{R}$ är $\zeta(\overline{s}) = 0$

Det har tidigare visats att om $\zeta(s) = 0$ är $\zeta(1-s) = 0$. $\zeta(\frac{1}{2} + it) = 0 \Leftrightarrow \zeta(1 - (\frac{1}{2} + it)) = \zeta(\frac{1}{2} - it) = 0$ □

**Definition: Mellintransform** $\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot f(x)\, dx$

Mellintransformen har inversionsformen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} x^{-s} \cdot \varphi(s)\, ds$$

**Sats 12:**

$$\{\mathcal{M}\omega\}(x) = \zeta(2s) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s}$$

med

$$\omega(y) = \sum_{n \leq 1} e^{-n^2 \pi y}$$

Denna likhet härleddes i Sats 4, men då utan beteckningen Mellintransform.

**Sats 13:**

$$\omega(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C-i\infty} \zeta(zs) \cdot \Gamma(s) \cdot \pi^{-s} \cdot y^{-s}\, ds \text{ för } c > \frac{1}{2}$$

Detta följer av att applicera Mellintransformens inversionsformel i Sats 12.

**Definition:** $\Xi(t) = \zeta(\frac{1}{2} + it)$

**Sats 14:**

$$\int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)\, dt = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\omega(e^{-2x}))$$

$$\text{Sätt } Q(x) = \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)\, dt$$

Då $t^2 + \frac{1}{4}) \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)$ är symmetrisk kring $t = 0$ (se Sats 11 för $\Xi(t)$'s symmetri) så gäller:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot \cos(xt)\, dt \quad (1)$$

Då $\sin(xt)$ är "inverst symmetrisk" kring $t = 0$ följer det att

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot \Xi(t) \cdot i \sin(xt)\, dt = 0 \quad (2)$$

Attidion av (1) och (2) tillsammans med Eulers formel ger nu:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \Xi(t) \cdot e^{ixt} \, dt$$

låt $s = \frac{1}{2} + it$. Då följer:

$$Q(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{2i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \frac{1}{s(1-s)} \Xi(s) \cdot e^{xs} \, ds$$

Definitionen av $\zeta(s)$ ger nu:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs} \, ds$$

$z(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{0}} \cdot e^{xs}$ har singulariteter i $s = 0$ och $s = 1$. Därmed följer det att om vi flyttar linjeintegralen till höger om linjen $c = 1$ så korrigeras förändringen med att subtrahera residualen i $s = 1$ så för $c > 1$ gäller:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\infty}^{\frac{1}{2}+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs} \, ds + \frac{e^{-\frac{1}{2}xt}}{4i} \cdot 2\pi i \, \mathrm{Res}(\zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot e^{xs}, 1)$$

Då $\mathrm{Res}(\zeta(s), 1) = 1$ (se Appendix Sats 15) följer det att:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i} \cdot 2\pi i \cdot 1 \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{x} = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{2} \cdot \pi 1 \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{e^{\frac{12}{x}} \pi}{2}$$

Därmed följer:

$$Q(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{4i} \cdot \int_{C-\infty}^{C+\infty} \zeta(s) \cdot \Gamma(\frac{s}{2}) \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{xs} \, ds + \frac{\pi}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

genom att sätta $x = e^{-2x}$ fås det från Sats 13 att:

$$Q(x) = -\pi e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \omega(e^{-2x}) + \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\pi(e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \omega(e^{-2x}))$$

$\square$

**Sats 15:** För alla heltal $n$ gäller:

$$\lim_{a \to \frac{n}{4}\pi^{+}} \frac{d^{2n}[e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia}))]}{da^{2n}} = 0$$

Observera att:

$$\begin{aligned}\omega(i+v) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi(i+v)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot e^{-\pi i n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot (-1)^{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 v\pi} \cdot (-1)^{n}\end{aligned}$$

Det sista steget gäller då udda $n$ ger udda $n^2$ och jämna $n$ ger jämna $n^2$.

$$2\omega(4v) - \omega(v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi 4v} - e^{-n^2\pi v} = \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-(2n)^2\pi v} - e^{-n^2\pi v}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-n^2 vt} = \omega(i+v) = 2\omega(4v) - \omega(v) \qquad (1)$$

$$\omega(x)x^{-\frac{1}{2}} \cdot \omega(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \text{ Se Sats 4 för härledning}$$

Vilket ger att (1) blir:

$$\omega(i+v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega(\frac{1}{4v}) - \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \omega(\frac{1}{v}) - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Om man nu skriver ut summorna ser man att $\omega(i+v)+\frac{1}{2}$ och alla dess derivator går vilket även innebär att de går mod 0 längs all vinklar $|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi$ då vi för något $v$ med $\mathrm{Re}(v) > 0$ har att:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{v}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{\mathrm{Re}(v)}{|v|}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{|v|}}.$$

Då $a \to \frac{\pi}{4}^{+}$ antyder att $e^{2ia} \to i$ längs alla "vägar" med $|\arg(e^{2\pi i} - i)| < \frac{1}{2}\pi$, så bevisar detta satsen

$\square$

**Sats 16:** Riemanns Zeta-funktion har oändligt många nollställen längst linjen $\frac{1}{2} + it$

Genom att substituera $x = -ia$ i Sats 14 så fås uttrycket:

$$\int_0^{\infty} (t^2 + \frac{1}{4})^{-1}\Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi}{2}(e^{-\frac{1}{2}ia} - 2e^{\frac{1}{2}ia} \cdot \omega(e^{2ia}))$$

$$= \pi \cos(\frac{a}{2}) - \pi e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \qquad (1)$$

$$\text{där } \cosh(at) = \frac{1}{2}(e^{-at} + e^{at})$$

om man nu deriverar (1) $2n$ antal gånger med avseende på a får man:

$$\int_0^\infty (t^2+\frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \cdot \Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{a}{2}) - \frac{\pi d^{2n}}{da^{2n}} \left[ e^{\frac{1}{2}ia}(\frac{1}{2} + \omega(e^{2ia})) \right]$$

$a$ får nu gå mot $\frac{1}{4}\pi^+$. Sats 15 innebär nu att den sista tremen i det högra ledet $\to 0$, vilket ger:

$$\lim_{a \to \frac{1}{4}\pi^+} \int_0^\infty (t^2 + \frac{1}{4})^{-1} \cdot t^{2n} \Xi(t) \cdot \cosh(at)\, dt = \frac{\pi(-1)^n}{2^{2n}} \cos(\frac{8}{\pi}). \qquad (2)$$

Detta innebär att det vänstra ledet växlar tecken oändligt många gånger. Då vänstra ledet är kontinuerligt längs linjen $\frac{1}{2} + it$ innebär detta att det även blir lika med 0 oändligt många gger. Och dåingen av de andra faktorerna blir 0 oändligt många gånger betyder detta att $\Xi(t)$ har oändligt många nollställen.

□