TRANSFORMATION DE LAPLACE

A- Intégrale de Laplace

B- Propriétés de la Transformation de Laplace

C- Transformation de Laplace inverse

D- Propriétés de la Transformation de Laplace inverse

A - Intégrale de Laplace

Rappel :

La transformée de Fourier de $s(t)$, notée $S(f)$, s'écrit :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

La transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi f t} \cdot df$$

La transformée de Fourier n'existe que si l'intégrale qui permet de la calculer est convergente (valeur finie)

Sinon, on peut rendre cette intégrale convergente en multipliant $s(t)$ par $e^{-\sigma \cdot t}$.

σ : valeur réelle positive appelée "rayon de convergence"

$\Rightarrow$ définition d'une nouvelle grandeur, appelée "fréquence complexe" : $p = \sigma + j2\pi f$

1. Définition

Soit f une fonction de la variable réelle $x \in \mathbb{R}$ et supposée nulle pour $x < 0$

La transformée de Laplace $F(p)$ de la fonction $f(x)$ est définie par :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} \cdot f(x)\, dx}$$

p est une variable complexe

On écrit : $F(p) = \mathcal{L}[f(x)]$ $F(p)$ aussi appelée image de $f(x)$

L'application $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$ est la transformation de Laplace.

Pour que la transformée de Laplace de $f(x)$ existe, il faut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx$ soit convergente.

Pour cela, il faut que f :

- soit continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$,
- soit d'ordre exponentiel à l'infini, càd qu'il existe $M > 0$ et α tels que :

$$|f(x)| < M e^{\alpha x} \quad \text{pour } x > X$$

Dans ce cas, la transformée de Laplace est définie pour $p > \alpha$, ou si p est complexe, pour $Re(p) > \alpha$.
Le domaine de convergence de $F(p)$ est donc l'ouvert $]\alpha, +\infty[$ ou le demi-plan complexe défini par $Re(p) > \alpha$.

2. Exemples.

1) Fonction échelon unité (ou fonction de Heaviside)

$$\begin{cases} U(x) = 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ U(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2) Fonction impulsion unité (ou distribution de Dirac)

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0, \varepsilon[\\ f_\varepsilon(x) = 0 & \text{si } x \notin [0, \varepsilon[\end{cases}$$

3) Fonction puissance

$$\begin{cases} f(x) = x^n & \text{si } x \geqslant 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) Fonction exponentielle

$$\begin{cases} f(x) = e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \quad (a \text{ complexe}) \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5) Fonctions trigonométriques

Synthèse des résultats :

$f(x)$	$F(p)$
$U(x)$	$\dfrac{1}{p}$
$\delta(x)$	1
x^{α}	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
e^{-ax}	$\dfrac{1}{p+a}$
$\cos \omega x$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega x$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$

($\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$)

Toutes ces fonctions sont supposées nulles pour $x < 0$.

B - Propriétés de la transformation de Laplace

1 - Linéarité

La transformation de Laplace $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$ est linéaire :

$\forall\ \lambda, \mu$ complexes, on a : $\boxed{\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}(f) + \mu \mathcal{L}(g)}$

2 - Transformée de $f(ax)$ - Homothétie

Soit $g(x) = f(ax)$ $\quad a > 0$

$$\mathcal{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(ax)\, dx$$

On fait le changement de variable : $ax = t$

$$\mathcal{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{t}{a}} f(t)\, d\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{p}{a}\right)t} f(t)\, dt$$

Donc, si $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(p)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}\left[f(ax)\right] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)}$

3 - Transformée de $f(x-a)$ - Translation

Soit $\begin{cases} g(x) = f(x-a) & \text{si } x \geq a \\ g(x) = 0 & \text{si } x < a \end{cases}$ $\quad$ avec $a > 0$

$$\mathcal{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x)\, dx = \int_a^{+\infty} e^{-px} f(x-a)\, dx$$

On fait le changement de variable : $x - a = t$

$$\mathcal{L}[g(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-p(a+t)} f(t)\,dt = e^{-pa}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

Donc, si $\mathcal{L}[f(x)] = F(p) \Rightarrow \mathcal{L}[g(x)] = e^{-pa}.F(p)$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(x-a)] = e^{-pa}.\mathcal{L}[f(x)]}$$

Ce résultat est aussi appelé "théorème du retard".

4. Transformée de la dérivée

Si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$ et si $\mathcal{L}[f(x)] = F(p)$, alors on a :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'(x)] = p\,F(p) - f(0^+)}$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)\,dx \quad \text{par définition}$$

$$\mathcal{L}[f'(x)] = \left[e^{-px} f(x)\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx \quad \text{intégration par parties}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-px} f(x) = 0$ on a $\left[e^{-px} f(x)\right]_0^{+\infty} = -f(0^+)$

où $f(0^+)$ est la limite à droite de $f(x)$ quand $x \to 0$.

d'où : $\mathcal{L}[f'(x)] = pF(p) - f(0^+)$ cqfd.

De même, si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème :

$$\mathcal{L}[f''(x)] = p\mathcal{L}[f'(x)] - f'(0^+)$$
$$= p[pF(p) - f(0^+)] - f'(0^+)$$
$$= p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

De façon générale :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Et dans le cas particulier où $f(0^+) = f'(0^+) = \dots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$,

on a :

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = p^nF(p)}$$

Dériver f correspond donc à multiplier F par p.

Remarque :

On a $\mathcal{L}[f'(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)dx = pF(p) - f(0^+)$, $p \in \mathbb{R}$

1) Si $p \to +\infty$, $e^{-px} \to 0$.

Si $\lim\limits_{p \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)\,dx = 0$, alors $\lim\limits_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+)$

(théorème de la valeur initiale)

2) Si $p \to 0$, $e^{-px} \to 1$

Si $\lim\limits_{p \to 0} \int_0^{+\infty} e^{-px} f'(x)dx = \int_0^{+\infty} f'(x)\, dx = f(+\infty) - f(0^+)$,

alors $\boxed{\lim\limits_{p \to 0} p\, F(p) = f(+\infty)}$

(Théorème de la valeur finale)

5_ Transformée de la primitive

Si $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(p)$, alors on a :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = \frac{F(p)}{p}}$$

Démonstration :

On pose $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow \varphi'(x) = f(x)$ et $\varphi(0^+) = 0$

On a $\mathcal{L}\left[\varphi'(x)\right] = p\,\mathcal{L}\left[\varphi(x)\right] - \varphi(0^+) = p\,\mathcal{L}\left[\varphi(x)\right]$

par ailleurs $\mathcal{L}\left[\varphi'(x)\right] = \mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(p)$

d'où $\mathcal{L}\left[\varphi(x)\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ cqfd.

C – Transformation de Laplace inverse

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(x)$.

On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$, la fonction $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]}$$

· Si $f(x)$ possède les propriétés énoncées au début du chapitre :
- continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$,
- d'ordre exponentiel à l'infini,

alors la transformée de Laplace inverse $f(x)$ d'une fonction $F(p)$ est unique sur tout sous-ensemble où elle est continue.

D – Propriétés de la transformation de Laplace inverse

1 – Linéarité

L'inverse d'une application linéaire étant linéaire, on a :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(\lambda F + \mu G) = \lambda \mathcal{L}^{-1}(F) + \mu \mathcal{L}^{-1}(G)}$$

Pour obtenir la transformée de Laplace inverse d'une fraction rationnelle $F(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$ on utilise sa décomposition en éléments simples.

2- Original de $F(ap)$

$a>0$

Soit $f(x)$ l'original de $F(p)$: $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

alors $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(ap)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)}$$

3- Original de $F(p+a)$

Soit $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

alors $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(p+a)] = e^{-ax} f(x)}$$

4- Originaux de $F'(p)$ et de $\int_p^{+\infty} F(u)\,du$

Soit $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$

alors $\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F'(p)] = -x f(x)}$ et $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(u)\,du\right] = \frac{f(x)}{x}}$

5. Original de $F(p).G(p)$

Si $f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ et $g(x) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)]$,

alors $$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(p) \cdot G(p)] = \int_0^x f(t) \cdot g(x-t)\,dt}$$

L'intégrale $\int_0^x f(t).g(x-t)\,dt$ est appelée <u>produit de convolution</u> de f par g et est notée $(f*g)(x)$

On a : $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

L'original du produit algébrique de deux fonctions est donc le produit de convolution des originaux.

Synthèse des propriétés des transformées de Laplace et de leurs inverses :

$f(x) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$	
$\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$
$f(ax)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f(x-a) . U(x-a)$ $e^{-ax} . f(x)$	$e^{-ap} . F(p)$ $F(p+a)$
$f'(x)$ $-x f(x)$	$p F(p) - f(0^+)$ $F'(p)$
$\int_0^x f(t)\, dt$ $\frac{f(x)}{x}$	$\frac{F(p)}{p}$ $\int_p^\infty F(u)\, du$
$\int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dx$	$F(p) . G(p)$