



Université de Haute-Alsace

IUT de COLMAR

Cours
de
Filtrage Numérique

S. FEMMAM
Département GTR

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Analyse des filtres numériques | 3 |
| 1.1 | Introduction au filtrage numérique | 3 |
| 1.2 | Représentation d'un filtre numérique | 6 |
| 1.3 | Spécification des filtres numériques | 8 |
| 1.3.1 | Filtre idéal | 8 |
| 1.3.2 | Gabarit | 9 |
| 1.4 | Classification des filtres numériques | 11 |
| 1.4.1 | Filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I) | 11 |
| 1.4.2 | Filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F) | 12 |
| 1.5 | Réalisation des filtres numériques | 13 |
| 1.5.1 | Réalisation transverse (ou non-recursive) | 13 |
| 1.5.2 | Réalisation récursive | 13 |
| 1.5.3 | Structure canonique d'un filtre récursif | 15 |
| 1.5.4 | Forme série (ou cascade) | 16 |
| 1.5.5 | Forme parallèle | 16 |
| 1.6 | Analyse des filtres numériques | 17 |
| 1.6.1 | Filtre du premier ordre | 17 |
| 1.6.2 | Stabilité des filtres du second ordre | 21 |
| 1.6.3 | Filtres couramment utilisés. | 22 |
| 2 | Synthèse de filtres RII | 27 |
| 2.1 | Introduction et rappels sur les filtres analogiques. | 27 |
| 2.1.1 | Introduction | 27 |
| 2.1.2 | Rappels en filtrage analogique | 28 |
| 2.2 | Synthèse par transformation de p en Z | 30 |
| 2.2.1 | Equivalence de la dérivation (méthode des rectangles) | 31 |
| 2.2.2 | Transformation bilinéaire | 33 |
| 2.2.3 | Transformation homographique | 34 |
| 2.3 | Synthèse par invariance temporelle. | 36 |
| 2.3.1 | Invariance impulsionnelle | 36 |
| 2.3.2 | Invariance indicielle | 37 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.3 | Invariance pour une entrée quelconque | 38 |
| 3 | Synthèse de filtres RIF | 39 |
| 3.1 | Méthode de synthèse par fenêtrage | 39 |
| 3.2 | Synthèse par échantillonnage en fréquence | 47 |

Chapitre 1

Analyse des filtres numériques

1.1 Introduction au filtrage numérique

Il est difficile de donner une définition formelle de la notion de filtrage. L'ingénieur électronicien pense souvent à une modification des caractéristiques fréquentielles d'un signal donné d'entrée. D'un point de vue théorique, le domaine fréquentiel est couplé au domaine temporel, le filtrage modifie donc également la réponse dans ce dernier.

1. **Système numérique.** A une séquence d'échantillons d'un signal d'entrée discret $x(k)$, un système ou filtre numérique S , défini par sa réponse impulsionnelle $h(k)$ ou par sa fonction de transfert en z $H(z)$, répond par une séquence d'échantillons d'un signal $y(k)$:

$$y(k) = S[x(k)] \quad x(k) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y(k)$$

2. **Système linéaire.** Un système est linéaire si le principe de superposition s'applique. C'est à dire si :

$$\forall \alpha \in C, S[\alpha x_1(k) + x_2(k)] = \alpha S[x_1(k)] + S[x_2(k)]$$

Exemple 1 : :Amplificateur de gain K (linéaire) :

$$S[x(k)] = Kx(k)$$

Exemple 2 : Opérateur quadratique (Non Linéaire) :

$$S[x(k)] = x^2(k)$$

3. **Système invariant.** Un système est invariant si pour tout retard entier k_0 appliqué à l'entrée, la sortie est retardée de k_0 : $S[x(k - k_0)] = y(k - k_0)$
4. **Système Linéaire Invariant (S.L.I).** Un SLI est caractérisé par une fonction $h(k)$. La relation qui lie l'entrée $x(k)$ et la sortie $y(k)$ est donnée par :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i)x(i)$$

$h(k)$ correspond à la réponse du système à l'impulsion unité définie par :

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

La réponse $y_{imp}(k)$ s'écrit :

$$y_{imp}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)d(k-i) = h(k)$$

$h(k)$ est appelée réponse impulsionnelle.

Remarque 1 La réponse indicielle $y_{ind}(k)$ est obtenue par sommation de la réponse impulsionnelle :

$$y_{ind}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)u(k-i) = \sum_{i=-\infty}^k h(i)$$

5. **Causalité.** Un système est causal si l'effet (la réponse) ne précède jamais la cause (l'entrée). C'est à dire si :

$$\forall k < k_0, x(k) = 0 \Rightarrow y(k) = 0$$

L'impulsion unité étant nulle pour $k < 0$, un système linéaire invariant est causal si et seulement si $\forall k < 0, h(k) = 0$. Dans ce cas $y(k)$ s'écrit :

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(k-i)$$

6. **Stabilité.** Un système est stable si pour toute entrée bornée $x(k)$, la sortie reste bornée. C'est à dire si :

$$\forall k \in R, |x(k)| < M \Rightarrow |y(k)| < N \text{ avec } (M, N) \in R^{2+}$$

On peut montrer qu'un S.L.I est stable si et seulement si :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty.$$

Démonstration. Soit $x(k)$ un signal borné : $|x(k)| < M, \forall k \in R$

– Si $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$ alors :

$$|y(k)| = \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(k-i) \right| \Rightarrow |y(k)| \leq \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| |x(k-i)| \leq M \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|$$

Ce qui donne $|y(k)| < +\infty$. La sortie est donc bornée, d'où le système est stable.

- Réciproquement, si $|y(k)| < +\infty$ pour toute entrée $x(k)$ alors, dans le cas particulier :

$$x(k) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } h(-k) < 0 \\ 1 & \text{si } h(-k) > 0 \end{array} \right\} = \text{sign}(h(-k))$$

En partant de :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(k-i)$$

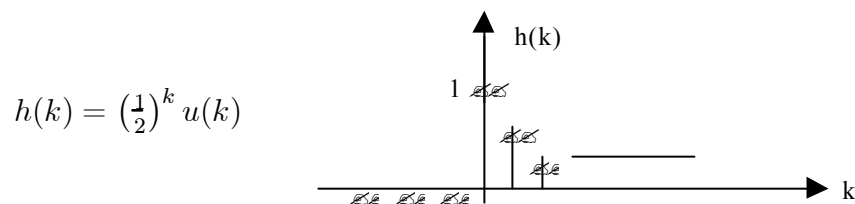
on peut écrire pour $k = 0$:

$$y(0) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)\text{sign}(h(i)) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)|$$

or $y(0) < +\infty$ d'où $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| < +\infty$.

■

Exemple 1 Soit $h(k)$ la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique :

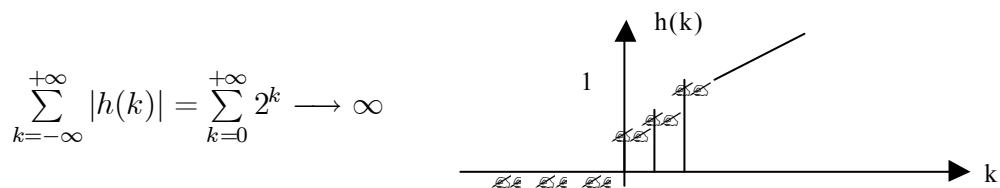


où $u(k)$ est l'échelon.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 < +\infty$$

Le filtre est stable

Exemple 2 Si $h(k) = (2)^k u(k)$ alors



Le filtre est donc instable.

Remarque 2 Compte tenu des relations entre la TZ et la transformée de Laplace :

$$H(p) = H(z)|_{z=e^{pT_e}}$$

si $H(z)$ est stable alors le filtre analogique correspondant $H(p)$ a ses pôles à partie réelle négative, C'est à dire dans le demi-plan gauche. $H(p)$ est donc stable. Le passage du filtre numérique au filtre analogique (ou l'inverse) s'effectue sans modifier la stabilité.

Exemple 3 Si $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ alors :

$$h(k) = a^k u(k) \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k < +\infty$$

si et seulement si $|a| < 1$

1.2 Représentation d'un filtre numérique

Un filtre numérique peut être représenté en utilisant plusieurs types de spécifications.

1. **Fonction de transfert en z.** Ce mode de représentation est le plus usuel. Il permet de lier l'entrée et la sortie dans le plan z par $Y(z) = H(z).X(z)$. On posera dans la suite :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

où $N(z)$ est le polynôme du numérateur de la fonction de transfert, tandis que $D(z)$ est son dénominateur. N est ici l'ordre du filtre. Dans le cas où $H(z)$ possède des pôles, on parlera de filtres RII (pour Réponse Impulsionnel Infinie). Si $N(z) = 1$, on parlera de filtre purement récursif. Dans le cas où $D(z) = 1$, le filtre ne possède que des zéros. Cette famille de filtre correspond au cas des filtres RIF (pour Réponse Impulsionnelle Finie). Celle-ci n'a pas d'équivalent en filtrage analogique.

Si la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = G_1(z)G_2(z) \cdots G_L(z) = \prod_{i=1}^L G_i(z)$$

on parle de forme série ou forme cascade.

Si $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = G_1(z) + \cdots + G_L(z) = \sum_{i=1}^L G_i(z)$$

on parle de forme parallèle.

2. **Réponse Impulsionnelle.** La réponse impulsionnelle est la fonction en z inverse de $H(z)$.

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

Comme en filtrage analogique, la sortie du filtre $y(kT_e)$ est le résultat de la convolution du signal d'entrée représenté de manière temporelle $x(kT_e)$ avec la réponse

impulsionnelle $h(kT_e)$. On a alors $y(kT_e) = x(kT_e) * h(kT_e)$, ou si on fait abstraction de la période d'échantillonnage T_e :

$$y(k) = x(k) * h(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)h(k-n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(k-n)h(n)$$

Dans le cas où $x(k)$ est une impulsion de Dirac $\delta(k)$, on retrouve bien $y(k) = h(k)$. Selon les cas où $h(k)$ est à support infini ou fini, on retrouvera respectivement les deux types de filtres RII et RIF.

3. **Equation aux différences.** Les filtres réalisables vérifient une équation appelée équation aux différences (ou équation de récurrence), qui relie l'entrée et la sortie du filtre :

$$\sum_{i=0}^N a_i y(k-i) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \text{ avec } (a_i, b_n) \in R \text{ avec } a_0 = 1$$

Les a_i et b_n sont les coefficients du filtre. N est l'ordre du filtre. Comme pour les filtres analogiques, on dit que le filtre est "physiquement réalisable" si $N \geq M$. Dans la pratique (réalisation du filtre numérique) cette condition n'est pas nécessaire.

On utilise plus fréquemment l'écriture suivante :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i)$$

avec $a_0 = 1$.

Remarque 3 Dans le cas d'un filtre R.I.F, la réponse impulsionnelle est égale aux coefficients de l'équation de récurrence. En effet, on a d'une part :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M h(n)x(k-n)$$

et d'autre part :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \text{ avec } \forall i \neq 0, a_i = 0 \text{ et } a_0 = 1,$$

d'où $b_n = h(n)$.

4. **Réponse fréquentielle.** La fonction de transfert $H(z)$ et la réponse fréquentielle $H(f)$ sont obtenues en appliquant la Transformée en z à l'équation de récurrence :

$$Tz \left[\sum_{i=0}^N a_i y(k-i) \right] = \left[\sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \right] \Rightarrow \sum_{i=0}^N a_i Tz [y(k-i)] = \sum_{n=0}^M b_n Tz [x(k-n)]$$

soit :

$$Y(z) \left(\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \right) = X(z) \left(\sum_{n=0}^M b_n z^{-n} \right) \Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

La réponse fréquentielle $H(f)$ est alors :

$$H(f) = H(z = e^{2\pi j f T_e}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi j n f T_e}}{\sum_{i=0}^N a_i e^{-2\pi j i f T_e}}$$

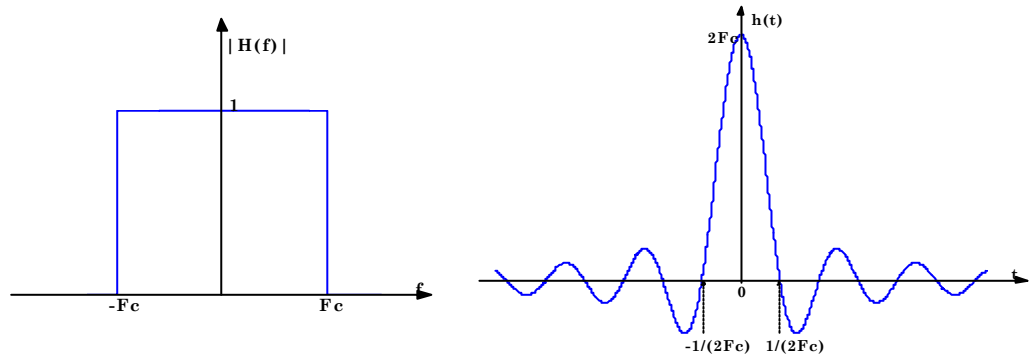
1.3 Spécification des filtres numériques

1.3.1 Filtre idéal

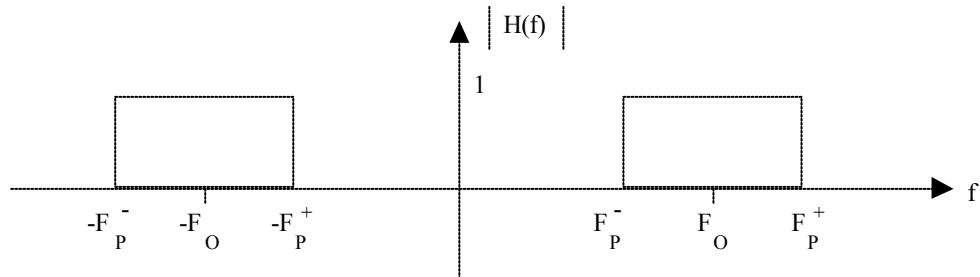
Un filtre idéal est généralement représenté, en fréquences, par une ou plusieurs fonctions portes.

- Considérons le filtre passe-bas de réponse fréquentielle $H(f)$ et de réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)} \text{ avec } \begin{cases} |H(f)| = \prod_{F_c}(f) \\ \varphi(f) = 0 \end{cases} \Rightarrow h(t) = 2F_c \text{sinc}(2\pi F_c t)$$



- De même pour le filtre passe-bande :



Ce type de filtre n'est pas physiquement réalisable. La réponse impulsionnelle n'est pas causale. En supposant que cette réponse est limitée par une fenêtre $w(t)$, la nouvelle réponse, notée $h_1(t)$, s'écrit :

$$h_1(t) = h(t)w(t)$$

La réponse fréquentielle $H_1(f)$ correspondante est :

$$H_1(f) = H(f) * W(f)$$

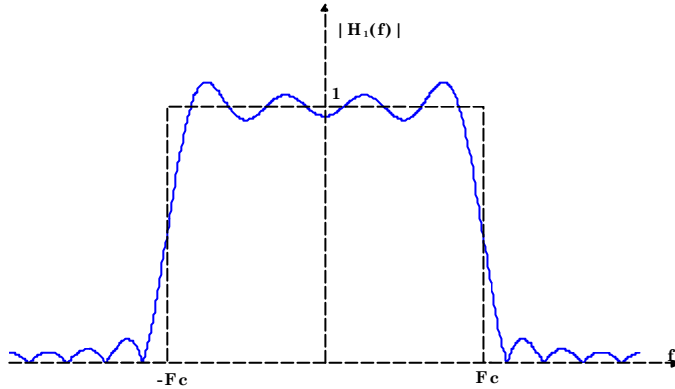
Exemple 4 Si $w(t) = \prod_{\frac{T}{2}} \left(t - \frac{T}{2}\right)$ alors :

$$H_1(f) = H(f) * T \text{sinc}(\pi f T) e^{-\pi j f T}$$

Ainsi, dans le cas d'un filtre passe-bas on trouve :

$$H_1(f) = \int_{-F_C}^{F_C} T \text{sinc}(\pi(f-u)T) e^{-\pi j(f-u)T} du$$

$\varphi_1(f)$ est différent de zéro et $H_1(f)$ est représentée par :

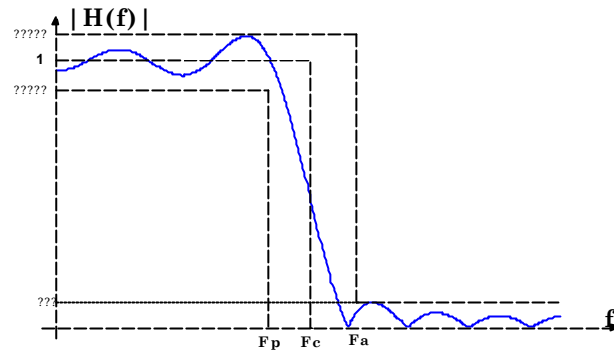


Exemple 5

Ces ondulations sont connues sous le nom de phénomène de GIBBS.

1.3.2 Gabarit

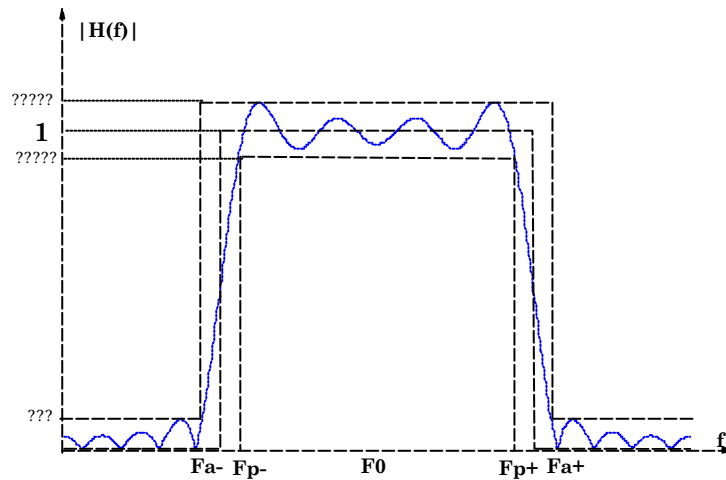
On approche donc la réponse fréquentielle idéale par un gabarit. Pour un filtre passe-bas, le gabarit est défini par :



La fréquence de coupure F_c est obtenue pour une atténuation de $3dB$. La bande $[0, F_c]$ est appelé bande passante, $[F_p, F_a]$ est la bande de transition. et $[F_a, +\infty]$ la bande atténuée. Les valeurs δ_1 et δ_2 sont, respectivement les taux d'ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée. On mesure la raideur s (ou sélectivité) du filtre par :

$$s = \frac{F_p}{F_a}$$

De même, pour le filtre passe-bande, le gabarit est donné par :



On définit la fréquence centrale F_0 , la sélectivité s et la largeur de bande relative B par :

$$F_0 = \sqrt{F_p^+ F_p^-}; \quad s = \frac{F_p^+ - F_p^-}{F_a^+ - F_a^-}; \quad B = \frac{F_p^+ - F_p^-}{F_0}$$

Si B est inférieur à 0.1 le filtre est dit à bande étroite. Si B est supérieur à 0.5, le filtre est à large bande.

Le gabarit du filtre passe-haut (Resp. coupe-bande) est défini de façon analogue au passe-bas (Resp. passe-bande). Le rôle des bande atténuée et passante est inversé.

Le tableau suivant résume les paramètres des différents gabarits étudiés :

| | Passe-Bas | Passe-Haut | Passe-Bande | Coupe-Bande |
|---------------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Sélectivité | $\frac{F_p}{F_a}$ | $\frac{F_a}{F_p}$ | $\frac{F_p^+ - F_p^-}{F_a^+ - F_a^-}$ | $\frac{F_a^+ - F_a^-}{F_p^+ - F_p^-}$ |
| Ondulation Bande passante | δ_1 | δ_1 | δ_1 | δ_1 |
| Ondulation Bande Atténuée | δ_2 | δ_2 | δ_2 | δ_2 |
| Fréquence centrale F_0 | — | — | $\sqrt{F_p^+ F_p^-}$ | $\sqrt{F_p^+ F_p^-}$ |
| Largeur de bande | — | — | $\frac{F_p^+ - F_p^-}{F_0}$ | $\frac{F_p^+ - F_p^-}{F_0}$ |

1.4 Classification des filtres numériques

On classe les filtres en deux grandes familles et suivant la durée de leur réponse impulsionnelle.

1.4.1 Filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I)

Dans ce cas la réponse impulsionnelle est illimitée et la réponse $y(k)$ s'écrit de manière générale :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(k-i)$$

Si $h(k)$ est causale, alors

$$y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i)x(k-i)$$

Exemple 6 Si $h(k) = u(k)$ alors :

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(k-i)x(i) \implies y(k) = \sum_{i=-\infty}^k x(i)$$

La sortie $y(k)$ est la somme des entrées $x(i)$ jusqu'à l'instant k . Ce filtre est donc de type Intégrateur.

Les principales caractéristiques des filtres RII sont :

1. une bande de transition qui peut être très étroite ;
2. des méthodes de synthèse par transposition des méthodes pour les filtres analogiques (voir chapitre 2) ;
3. une instabilité potentielle due à des pôles situés en dehors du cercle unité ;
4. une instabilité numérique (après quantification des coefficients et du signal) potentielle due au rebouclage.

1.4.2 Filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F)

Ces filtres sont caractérisés par des réponses impulsionnelles de durée finie :

$$\exists(k_0, k_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall k \in]-\infty, k_0[\cup]k_1, +\infty[, h(k) = 0$$

La réponse $y(k)$ du filtre s'écrit :

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k_1} h(i)x(k-i)$$

On note, plus généralement, $k_1 = k_0 + M - 1$, d'où :

$$y(k) = \sum_{i=k_0}^{k_0+M-1} h(i)x(k-i)$$

M est la longueur du filtre. Dans le cas d'un filtre causal, nous avons $k_0 = 0$.

Exemple 7 Soit $h(k)$ la réponse impulsionnelle définie par $h(0) = 2$, $h(1) = h(-1) = 1$ et $h(k) = 0$ ailleurs, d'où :

$$\begin{aligned} y(k) &= h(-1)x(k+1) + h(0)x(k) + h(1)x(k-1) \\ y(k) &= x(k+1) + 2x(k) + x(k-1) \end{aligned}$$

Ce filtre est non-causal.

Remarque 4 Un filtre R.I.F est toujours stable. Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(z) = \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}$$

Il n'y a aucun pôle et la série $\sum_{n=0}^M |b_n| = \sum_{n=0}^M |h(n)|$ converge toujours.

Les principales caractéristiques des filtre RIF sont :

1. une bande de transition qui sera plus large qu'un filtre RII ayant le même nombre de coefficients ;
2. des méthodes de synthèse permettant de dériver n'importe quelle réponse fréquentielle (voir chapitre 3) ;
3. une stabilité inhérente ($\sum_{k=0}^N |h(k)| < \infty$) ;
4. une plus grande stabilité numérique que le RII ;
5. une phase qui peut être linéaire, par conséquent un temps de propagation de groupe constant et une absence de distorsion harmonique dans le signal ;
6. une plus grande facilité d'implantation dans un système numérique de traitement.

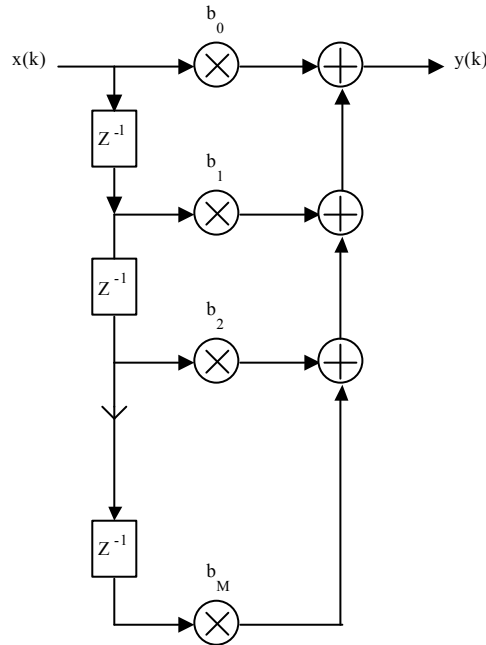
1.5 Réalisation des filtres numériques

On distingue deux types de réalisations : transverse ou récursive. Ces réalisations sont effectuées à partir de circuits numériques de base (sommateurs, retards, multiplieurs, ...)

1.5.1 Réalisation transverse (ou non-récursive)

Cette réalisation est dite non-récursive ou transverse car elle ne fait apparaître aucun bouclage de la sortie sur l'entrée. Elle est associée exclusivement aux filtres R.I.F. La relation de récurrence est :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) \text{ d'où } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}$$



1.5.2 Réalisation récursive

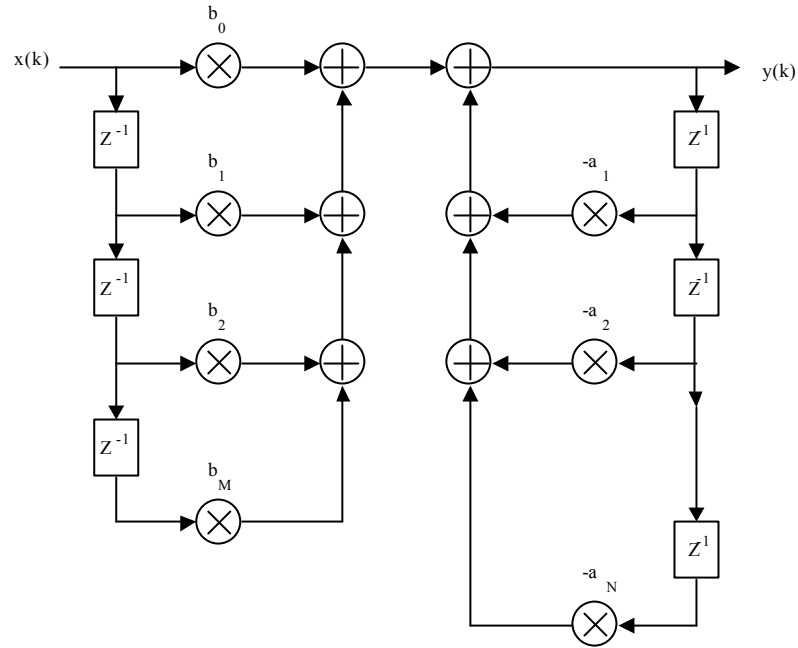
Ces réalisations sont utilisées lorsque la sortie à l'instant k dépend de l'entrée et de la sortie aux instants précédents. L'équation aux différences est :

$$y(k) = \sum_{n=0}^M b_n x(k-n) - \sum_{i=1}^N a_i y(k-i)$$

et la fonction de transfert est comme suit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \text{ avec } a_0 = 1$$

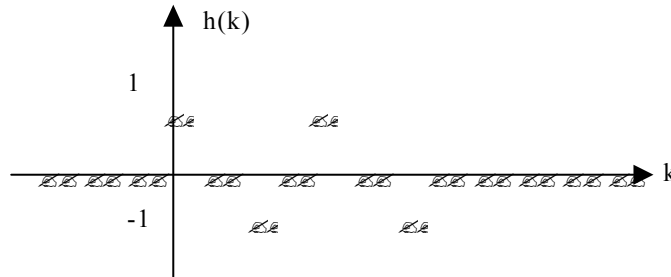
Une réalisation possible de ces filtres est la suivante :



Remarque 5 Une réalisation récursive peut s'appliquer à un filtre RII ou RIF. Certains auteurs associent, à tort, RII-Récuratif.

Exemple 8 Considérons le filtre à réponse impulsionnelle finie $h(k)$:

$$h(0) = h(4) = 1, h(2) = h(6) = -1, h(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z} - (0, 2, 4, 6)$$



Ce filtre peut être réalisé sous forme transverse :

$$H(z) = \sum_{k=0}^6 h(k)z^{-k} = 1 - z^{-2} + z^{-4} - z^{-6}$$

soit :

$$y(k) = x(k) - x(k-2) + x(k-4) - x(k-6)$$

On peut aussi donner une forme récursive à ce filtre :

$$H(z) = \sum_{k=0}^3 (-z^{-2})^k = \frac{1 - (-z^{-2})^4}{1 - (-z^{-2})} = \frac{1 - z^{-8}}{1 + z^{-2}}$$

La nouvelle équation de récurrence (forme récursive) est :

$$y(k) = x(k) - x(k-8) - y(k-2)$$

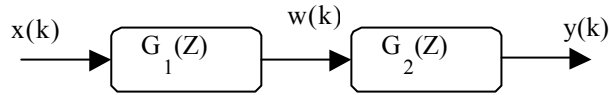
1.5.3 Structure canonique d'un filtre récursif

Nous avons vu que la réalisation d'un filtre récursif nécessite $N + M$ retards. Il est souvent utile, pour des raisons de coût ou d'intégration, de diminuer le nombre de retards. Nous allons montrer que l'on peut ramener ce nombre à N , en supposant $N \geq M$.

Soit $H(z)$ la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} = G_1(z)G_2(z) \text{ avec } a_0 = 1, \quad G_1(z) = \frac{1}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \text{ et } G_2(z) = \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}$$

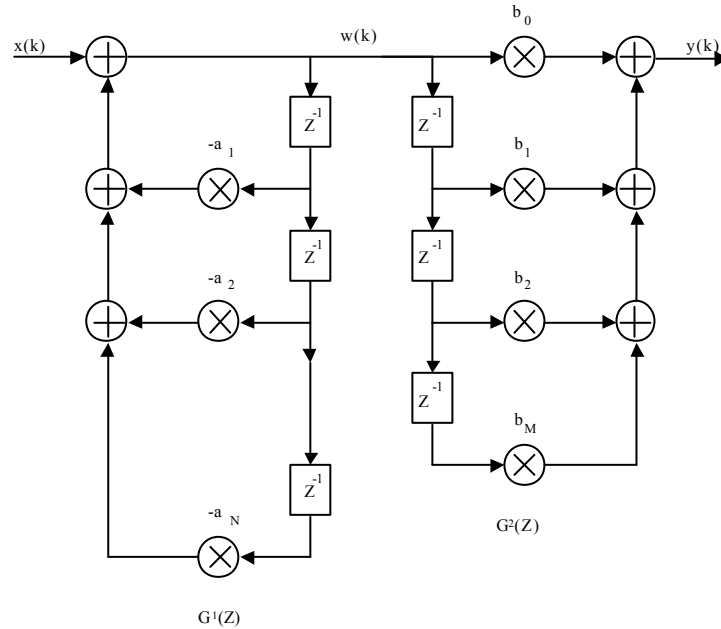
$G_1(z)$ est un filtre purement récursif et $G_2(z)$ un filtre transverse. Soit $w(k)$ la sortie de $G_1(z)$, on a :



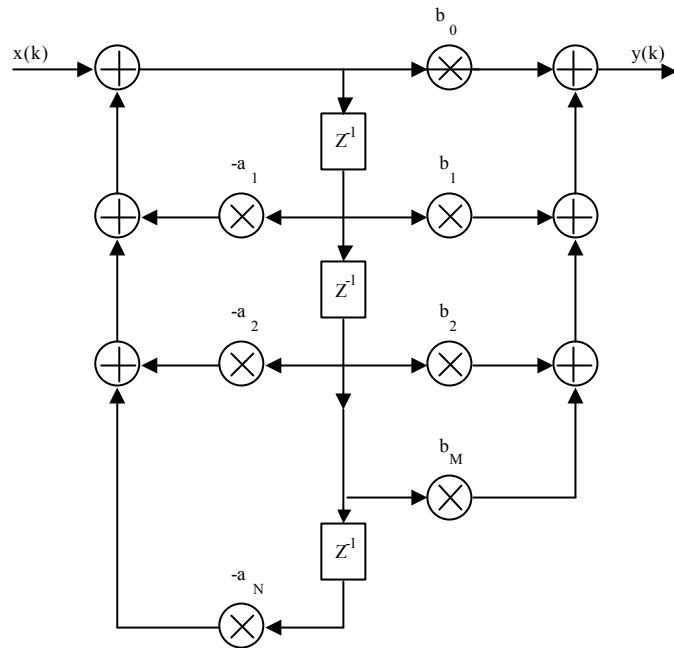
Les relations entre $x(k)$, $w(k)$ et $y(k)$ sont :

$$\begin{cases} W(z) = G_1(z)G_2(z) \\ Y(z) = G_2(z)W(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w(k) = x(k) - \sum_{i=1}^N a_i w(k-i) \\ y(k) = \sum_{n=0}^M b_n w(k-n) \end{cases}$$

On peut réaliser $H(z)$ de la façon suivante :



où encore, en regroupant les sorties retardées $w(k-i)$, utilisées dans les deux filtres $G_1(z)$ et $G_2(z)$:



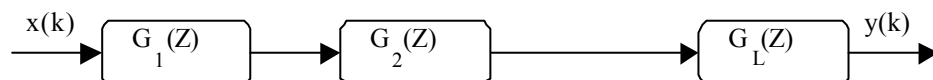
Cette réalisation est sous forme canonique ne comporte plus que N retards.

1.5.4 Forme série (ou cascade)

Si la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = G_1(z)G_2(z)...G_L(z) = \prod_{i=1}^L G_i(z)$$

la réalisation du filtre est :

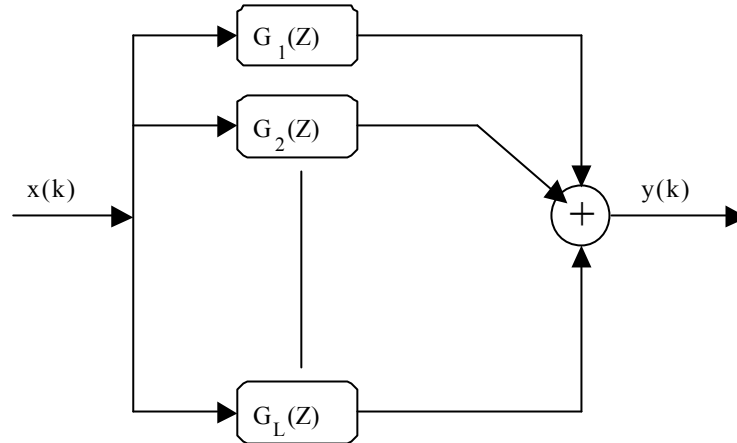


1.5.5 Forme parallèle

Si $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = G_1(z) + ... + G_L(z) = \sum_{i=1}^L G_i(z)$$

alors :



1.6 Analyse des filtres numériques

L'analyse d'un filtre numérique consiste à extraire les principales caractéristiques de ce filtre, qui sont :

- La fonction de transfert $H(z)$.
- Les réponses temporelles (impulsionnelle, indicielle).
- La stabilité.
- La réponse fréquentielle $H(f) = H(z = e^{j2\pi f T_e})$ et la nature du filtre.

Nous allons illustrer ces différents points en étudiant en détail un filtre premier ordre.

1.6.1 Filtre du premier ordre

Considérons le filtre défini par l'équation de récurrence :

$$y(k) = ay(k-1) + x(k) \text{ avec } (a < 0 \text{ et } a \neq 1)$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert $H(Z)$ est obtenue en appliquant la TZ aux deux membres de l'équation on obtient :

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$$

soit

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Réponses temporelles

Réponse impulsionnelle : La réponse impulsionnelle peut être obtenue de deux façons. Soit par programmation directe, soit par TZ inverse.

La programmation directe consiste à utiliser l'équation aux différences et à remplacer $x(k)$ par l'impulsion unité $d(k)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall k < 0, y(k) &= 0 \\ k = 0, y(0) &= ay(-1) + x(0) = d(0) = 1 \\ k = 1, y(1) &= ay(0) + x(1) = ay(0) = a \\ k = 2, y(2) &= ay(1) + x(2) = ay(1) = a^2\end{aligned}$$

Par récurrence on trouve :

$$\forall k > 0, y(k) = a^k$$

d'où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, y(k) = a^k u(k)$$

On peut obtenir ce résultat plus directement en calculant la TZ inverse de $H(z)$. En effet, si $x(k) = d(k)$ alors $X(z) = 1$, d'où :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

par suite :

$$y(k) = a^k u(k)$$

Réponse indicielle : En ce qui concerne la réponse indicielle on peut procéder de même façon. C'est à dire soit par programmation directe en remplaçant $x(k)$ par $u(k)$, soit par TZ inverse de :

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{H(z)}{1 - z^{-1}}$$

soit :

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} = \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right] \frac{1}{1 - a}$$

et :

$$\begin{aligned}y(k) &= \frac{1}{1 - a} [1 - a^{k+1}] u(k) \\ \text{Si } a > 1 \text{ alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) &= +\infty \\ \text{Si } a < 1 \text{ alors } \lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) &= \frac{1}{1 - a}\end{aligned}$$

On peut aussi calculer la réponse indicielle en sommant la réponse impulsionnelle :

$$\begin{aligned}y(0) &= h(0) = 1 \\y(1) &= h(0) + h(1) = 1 + a \\y(2) &= h(0) + h(1) + h(2) = 1 + a + a^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\forall k > 0, y(k) = \sum_{i=0}^k h(i) = \sum_{i=0}^k a^i = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} u(k)$$

Réponse à une entrée quelconque : De manière générale, pour une entrée $x(k)$ quelconque on peut calculer $y(k)$ soit par programmation directe, soit par calcul de la TZ inverse.

Stabilité

On peut étudier la stabilité du filtre à partir de la position des pôles de $H(z)$. Pour ce premier ordre on a un seul pôle p_0 :

$$1 - ap_0^{-1} = 0 \Leftrightarrow p_0 = a$$

Le filtre est donc stable si $|p_0| < 1$ C'est à dire si $a < 1$.

Il est aussi possible d'étudier la stabilité à partir de la réponse impulsionnelle. En effet :

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h(i)| = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

On retrouve la même condition de stabilité.

Réponse fréquentielle et nature du filtre

On peut calculer la réponse fréquentielle $H(f)$ par transformation de Fourier de $h(k)$. Cependant, on l'obtient plus facilement en posant :

$$H(f) = H(z) \big|_{z=e^{+2\pi j f T_e}}$$

Dans le cas du premier 1^{er} ordre :

$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-2\pi j f T_e}}$$

ou encore

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$$

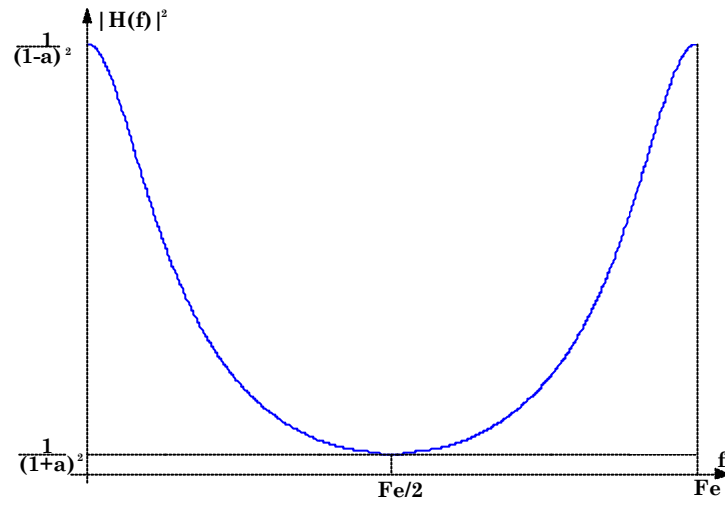
avec :

$$H(f) = \frac{e^{j\varphi(f)}}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi fT_e)}}$$

et :

$$\begin{cases} \varphi(f) = -\arctan\left[\frac{a\sin(2\pi fT_e)}{1-a\cos(2\pi fT_e)}\right] \\ |H(f)|^2 = \frac{1}{1+a^2-2a\cos(2\pi fT_e)} \end{cases}$$

Pour tracer $|H(f)|^2$ on s'intéresse à la bande $[0, F_e]$, car $H(f + F_e) = H(f)$.



Remarque 6 D'une façon plus générale, si le filtre à des coefficients réels alors sa réponse impulsionnelle est réelle. D'après les propriétés de la transformée de Fourier, on en déduit que $H(-f) = H^*(f)$ d'où :

$$\begin{cases} |H(f)| = |H(-f)| \\ \varphi(f) = -\varphi(-f) \end{cases}$$

Comme de plus les signaux sont échantillonnés on a :

$$H(f) = H(f + F_e)$$

d'où :

$$H(F_e - f) = H(-f) = H^*(f)$$

Par suite :

$$\begin{cases} |H(f)| = |H(F_e - f)| \\ \varphi(f) = -\varphi(F_e - f) \end{cases}$$

On peut donc, dans le cas d'un filtre à coefficients réels, restreindre l'étude à la bande $[0, F_e/2]$. Ceci est cohérent avec le fait que le signal d'entrée est échantillonné à une fréquence F_e . Sa fréquence maximale est $F_e/2$.

Pour finir, on définit le gain statique G_s par :

$$G_s = H(p = 0) = H(f = 0) = H(z = 1)$$

Dans le cas d'un premier ordre le gain statique est :

$$G_s = \frac{1}{1 - a}$$

L'étude de la réponse fréquentielle permet de déterminer la fonction du filtre. On constate que ce filtre amplifie les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. C'est donc un filtre passe-bas.

1.6.2 Stabilité des filtres du second ordre

On peut, dans tous les cas, décomposer la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ d'un filtre, en un produit de fonctions de transfert $G_i(z)$ d'ordre 1 ou 2 :

$$H(z) = \prod_{i=1}^n G_i(z)$$

Le cas où $G_i(z)$ est d'ordre 1 ayant déjà été traité, nous allons nous intéresser au cas où $G_i(z)$ est d'ordre 2, c'est à dire si :

$$G_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

L'étude de la stabilité peut s'effectuer dans le plan (a_1, a_2) . En effet on sait que a_2 est le produit des pôles z_1 et z_2 qui sont complexes conjugués. D'où :

$$a_2 = z_1 z_2 = |z_1|^2 < 1$$

Une première condition de stabilité est donc :

$$a_2 < 1 \tag{1.1}$$

De plus les pôles sont réels si $a_2 < \frac{a_1^2}{4}$ et complexes dans le cas contraire. La parabole d'équation :

$$a_2 = \frac{a_1^2}{4} \tag{1.2}$$

porte les pôles doubles. Supposons les pôles réels :

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ z_2 = -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \end{cases}$$

Le filtre est stable si :

$$-1 < z_2 < z_1 < 1$$

c'est à dire si :

$$\begin{cases} -1 < -\frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ 1 > -\frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a_1^2 - 4a_2 < (2 - a_1)^2 \\ a_1^2 - 4a_2 < (2 + a_1)^2 \end{cases}$$

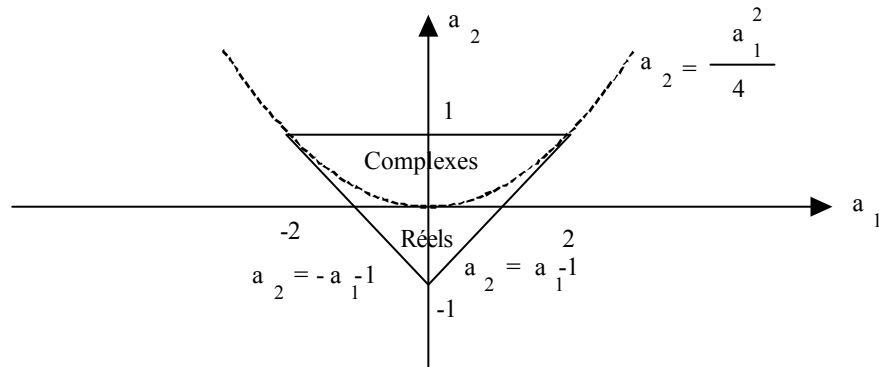
ou encore :

$$\begin{cases} a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

Le domaine de stabilité dans le plan des coefficients (a_1, a_2) est délimité par les trois droites obtenues à partir des relations (1.1) et (1.3) :

$$a_2 = 1; \quad a_2 = -1 + a_1; \quad a_2 = -1 - a_1$$

De plus la parabole obtenue en (1.2) est la frontière entre les pôles complexes et réels



Le filtre est stable si les coefficients a_1 et a_2 se trouvent à l'intérieur du triangle.

1.6.3 Filtres couramment utilisés.

Filtres à phase linéaire

Un filtre est caractérisé par le module et la phase de sa réponse fréquentielle $H(f)$:

$$H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$$

On définit le temps de propagation de groupe (ou retard) $\tau(f)$ par :

$$\tau(f) = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df}$$

Le filtre est à phase linéaire si $\tau(f)$ est constant. Dans ce cas :

$$\varphi(f) = -2\pi f\tau + \varphi_0$$

Cette caractéristique est souvent recherchée car elle permet d'avoir un retard constant τ quelque soit la fréquence du signal d'entrée.

Pour un filtre R.I.F on peut montrer que la phase est linéaire si les coefficients sont symétriques :

$$b_i = b_{N-i}$$

En effet la fonction de transfert s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}$$

Si $M = 2P$ alors :

$$H(z) = b_P z^{-P} + \sum_{i=0}^{P-1} b_i [z^{-i} + z^{-(N-i)}]$$

$$H(z) = z^{-P} \left[b_P + \sum_{i=0}^{P-1} b_i [z^{P-i} + z^{i-P}] \right]$$

d'où :

$$H(f) = e^{-2\pi j f P T_e} \left[b_P + 2 \sum_{i=0}^{P-1} b_i \cos(2\pi f (P-i) T_e) \right]$$

Suivant le signe de l'expression entre crochets, la phase $\varphi(f)$ vaut :

$$\begin{cases} \varphi(f) = -2\pi f P T_e \\ \text{ou} \\ \varphi(f) = -2\pi f P T_e + \pi \end{cases}$$

La phase est linéaire et le temps de propagation est constant :

$$\tau = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} = P T_e$$

On peut montrer de même que si N est impair ($N = 2P + 1$) alors $\tau = (P + \frac{1}{2}) T_e$

Filtres à déphasage minimal

Lors de la réalisation d'un filtre numérique, le cahier des charges porte le plus souvent sur la fonction du filtre (Passe-Haut, Passe-Bande, ..). C'est à dire sur le module $|H(f)|$ de la réponse fréquentielle. Cependant, pour certaines applications, la variation de la phase, pour une variation de fréquence donnée, doit être minimale. Ces filtres sont appelés filtre à déphasage minimal. On peut montrer qu'un filtre stable est à déphasage minimal si ses zéros sont dans le cercle unité.

Exemple : Considérons les deux filtres $H_1(z)$ et $H_2(z)$ définis par :

$$H_1(z) = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}; H_2(z) = \frac{1 - 0,2z}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont stables ($p_0 = 0,5$). De plus les réponses fréquentielles $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont telles que :

$$|H_1(f)| = |H_2(f)| = \sqrt{\frac{1,04 - 0,4\cos(2\pi fT_e)}{1,25 - \cos(2\pi fT_e)}}$$

$$\varphi_1(f) = \arctan\left(\frac{0,2\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,2\cos(2\pi fT_e)}\right) - \arctan\left(\frac{0,5\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,5\cos(2\pi fT_e)}\right)$$

$$\varphi_2(f) = -\arctan\left(\frac{0,2\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,2\cos(2\pi fT_e)}\right) - \arctan\left(\frac{0,5\sin(2\pi fT_e)}{1 - 0,5\cos(2\pi fT_e)}\right)$$

Ces filtres ne diffèrent que par leur réponse en phase. Si l'on fait varier f de 0 à $F_e/4$, les phases $\varphi_1(f)$ et $\varphi_2(f)$ varient respectivement de 0 à -15° et de 0 à -37° . De plus les zéros de $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont respectivement 0,2 et $1/0,2 = 5$. $H_1(z)$ est à déphasage minimal.

Filtres Passe-Tout

Ces filtres $H_{pt}(z)$ ne modifient que la phase des signaux d'entrée :

$$|H_{pt}(f)| = 1$$

Ils sont couramment utilisés pour modifier le comportement de certains systèmes numériques en éliminant, par exemple, les pôles instables.

Exemple 9 Au premier ordre, ces filtres sont définis par :

$$H_{pt}(f) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \text{ avec } a < 1$$

Le zéros z_0 vaut $\frac{1}{a}$ et le pôle $p_0 = a$.

$$|H_{pt}(f)| = \left| \frac{e^{-2\pi jfT_e} - a}{1 - ae^{-2\pi jfT_e}} \right| = 1$$

$$\varphi_{pt}(f) = \arctan\left(\frac{\sin(2\pi fT_e)}{a - \cos(2\pi fT_e)}\right) - \arctan\left(\frac{a\sin(2\pi fT_e)}{1 - a\cos(2\pi fT_e)}\right)$$

Filtres Moyenneurs

Ces filtres effectuent une moyenne glissante sur le signal. L'équation de récurrence est :

$$y(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(k-i)$$

La fonction de transfert est :

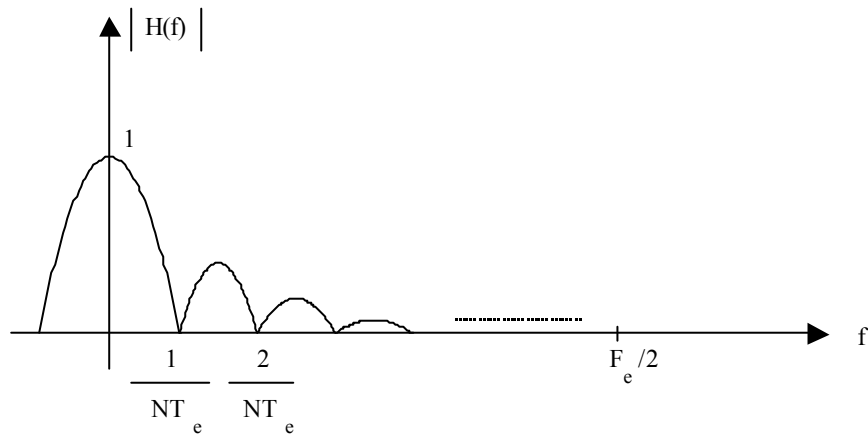
$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

La forme récursive obtenue pour $H(z)$ conduit à une nouvelle expression de l'équation de récurrence :

$$y(k) = y(k-1) + \frac{x(k) - x(k-N)}{N}$$

La réponse fréquentielle s'écrit :

$$H(f) = \frac{1 - e^{-2\pi j f N T_e}}{1 - e^{-2\pi j f T_e}} = e^{-\pi j f (N-1) T_e} \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f N T_e)}{\sin(\pi f T_e)}$$



C'est un filtre passe-bas. Le lissage du signal d'entrée $x(k)$ sera d'autant plus important que N sera grand. Le gain statique G_s vaut : $G_s = H(z=1) = 1$. C'est un filtre à réponse impulsionnelle finie :

$$h(k) = \frac{1}{N} \prod_{\frac{N}{2}} \left(k - \frac{N}{2} \right)$$

C'est un filtre à phase linéaire. Le temps de propagation τ est de $\left(\frac{N-1}{2}\right) T_e$.

Filtre en peigne

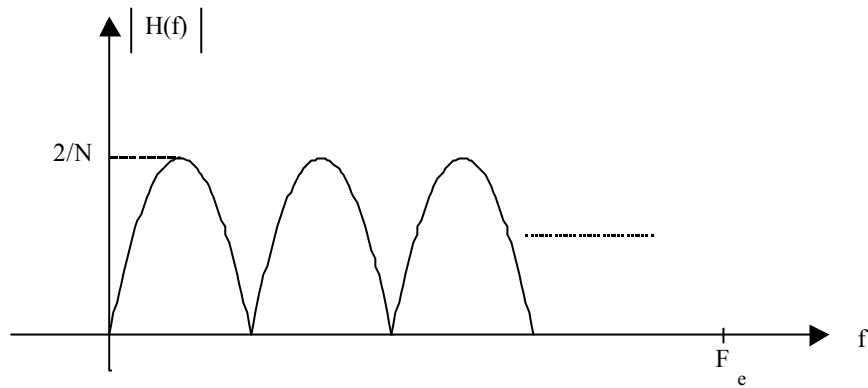
Le filtre dont la fonction de transfert s'écrit

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N}$$

est appelé filtre en peigne à cause de sa représentation fréquentielle :

$$H(f) = \frac{1 - e^{-2\pi j f N T_e}}{N} = e^{-\pi j f N T_e + j \frac{\pi}{2}} \frac{2}{N} \sin(2\pi f N T_e)$$

d'où :



Sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(0) = -h(N) = \frac{1}{N} \text{ et } h(k) = 0 \text{ si } k \neq 0 \text{ et } k \neq N$$

Son équation aux différences est :

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k - N)}{N}$$

C'est un filtre à phase linéaire : $\tau = (N T_e)/2$

Chapitre 2

Synthèse de filtres RII

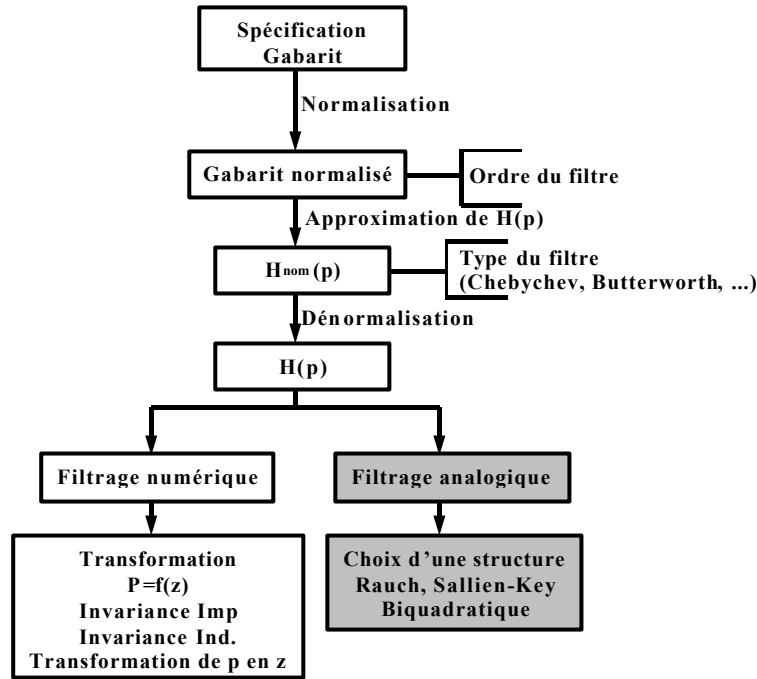
2.1 Introduction et rappels sur les filtres analogiques.

2.1.1 Introduction

La synthèse d'un filtre numérique est la recherche d'une fonction $H(z)$ (ou $h(k)$) correspondant à la spécification sous forme d'un gabarit. La recherche de cette fonction peut être réalisée selon diverse méthodes :

1. La méthode la plus courante est l'utilisation des méthodes de synthèse des filtres analogiques aboutissant à une fonction $H(p)$ correspondant aux spécifications requises. Une fonction permettant le passage du plan p au plan z (i.e. $p = f(z)$) est ensuite utilisée pour obtenir $H(z)$. Cette fonction doit maintenir la stabilité du filtre analogique et maintenir, au mieux, les caractéristiques de la réponse fréquentielle $H(z = e^{j\omega T_e})$ du filtre numérique. Nous étudions dans la suite du chapitre trois types de transformation.
2. Des méthodes d'optimisation issues de l'analyse numérique peuvent être utilisées afin de rechercher une fonction $H(z)$ s'approchant le plus possible d'une fonction prototype. La minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle est alors appliquée. Dans ce cas les algorithmes utilisés sont issues de la programmation non linéaire, qui n'assurent pas la convergence à l'optimum. Ces méthodes ne seront pas développées ici.

La procédure de synthèse d'un filtre numérique présentée ici est décrite par l'organigramme suivant :



2.1.2 Rappels en filtrage analogique

Les filtres analogiques sont spécifiés de manière équivalente aux filtres numériques. La fonction de transfert $H(p)$ est exprimée en $p = j\omega$. La synthèse de cette fonction est composée de trois étapes principales :

1. normalisation du gabarit ;
2. approximation de la fonction de transfert normalisée $H_{Norm}(p)$;
3. dénormalisation de $H_{Norm}(p)$ aboutissant à la fonction de transfert $H(p)$.

Normalisation

Cette première phase permet d'aboutir au gabarit passe-bas prototype (ou gabarit normalisé) à partir de n'importe quel type des 4 types principaux de filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande). Celui-ci est un gabarit passe-bas possédant une pulsation de coupure normalisée à 1 et une pulsation de bande atténuée $\frac{1}{s}$, s étant la sélectivité. Les valeurs des ondulations (δ_1, δ_2) sont inchangées.

Approximation de la fonction de transfert

La phase suivante consiste en la recherche d'une fonction $H_{Norm}(p)$ entrant dans le gabarit prototype passe-bas défini avant. Il existe plusieurs fonctions d'approximation, nous exposons ci-après deux fonctions très utilisées (filtre de Butterworth, Chebyshev).

Pour la détermination de l'ordre du filtre et des coefficients de la fonction de transfert $H(p)$, on pourra soit utiliser les formules et tableaux donnés ci-après, soit utiliser les

abaques.

1. **Filtres de Butterworth.** Un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre N et de pulsation de coupure ω_c est défini par le carré de sa réponse fréquentielle :

$$|H_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Les principales propriétés des filtres de Butterworth sont :

- l'amplitude est une fonction monotique décroissante sur ω ,
- la réponse fréquentielle est plate dans les bandes passante et atténuées,
- le gain maximum est pour $\omega = 0$ et vaut 1,
- $|H_B(\omega_c)| = \sqrt{0.5}$, ω_c est donc la pulsation de coupure à $-3dB$,
- l'atténuation asymptotique dans les hautes fréquences vaut $20n \text{ dB/décade}$.

L'ordre du filtre est déterminé par la relation :

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{\delta_2\sqrt{\delta_1}}\right)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}$$

Les coefficients des filtres de BUTTEWORTH normalisés sont :

| n | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 |
|-----|-------|------------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 2 | 1 | $\sqrt{2}$ | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 2.6131 | 3.4142 | 2.6131 | 1 | | |
| 5 | 1 | 3.2361 | 5.2361 | 5.2361 | 3.2361 | 1 | |
| 6 | 1 | 3.8637 | 7.4641 | 9.1416 | 7.4641 | 3.8637 | 1 |

2. **Filtres de Chebyshev.** Un filtre de Chebyshev de type **I** d'ordre n et de pulsation de coupure ω_c est défini par le carré de sa réponse fréquentielle :

$$|H_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

où $T_n(x)$ est un polynôme de Chebyshev de degré n , ϵ un paramètre permettant de régler l'amplitude de l'ondulation en bande passante ou en bande atténuée.

Les principales propriétés des filtres de Chebyshev sont :

- Pour un filtre de type **I**, l'amplitude dans la bande passante possède une ondulation respectant :

$$0 \leq \omega \leq \omega_c \implies \frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq |H_C(\omega)|^2 \leq 1$$

Pour un filtre de type **II**, ces ondulations sont situées dans la bande atténuée ($\omega \geq \omega_c$),

$$|H_C(0)| = \begin{cases} 1/(1 + \epsilon^2), & n \text{ impair} \\ 1, & n \text{ pair} \end{cases}$$

- l'atténuation asymptotique dans les hautes fréquences vaut $20n \text{ dB/décade}$, mais l'ordre du filtre sera plus faible qu'un Butterworth à spécification équivalentes.

Dénormalisation

Pour réaliser des filtres passe-bande, passe-haut ou coupe-bande, il suffit d'effectuer une transformation du filtre passe-bas normalisé. Cette transformation porte sur la variable de Laplace p :

1. Filtre passe-bas de fréquence de coupure ω_C

$$p \rightarrow \frac{p}{\omega_C}$$

2. Filtre passe-haut de fréquence de coupure ω_C

$$p \rightarrow \frac{\omega_C}{p}$$

3. Filtre passe-bande de fréquence centrale ω_0 et de largeur de bande relative B

$$p \rightarrow \frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)$$

4. Filtre coupe-bande de fréquence centrale ω_0 et de largeur de bande relative B

$$p \rightarrow \left[\frac{1}{B} \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) \right]^{-1}$$

Exemple 10 Transformation du filtre passe-bas du 1^{er} ordre en un filtre passe haut de fréquence de coupure ω_C :

$$H(p) = \frac{1}{1+p} \longrightarrow H_1(p) = H\left(\frac{\omega_C}{p}\right) = \frac{p}{p + \omega_C}$$

2.2 Synthèse par transformation de p en Z .

Le passage de la fonction de transfert $H(p)$ à $H(z)$ s'effectue, de façon théorique, en posant $p = Ln[z]$, ce qui conduit à une fonction $H(z)$ non-rationnelle et donc à un filtre difficilement réalisable.

Pour passer du filtre analogique au filtre numérique, il faut donc trouver une transformation $p = f(z)$ qui permet d'écrire la fonction de transfert du filtre discret sous forme rationnelle, donc réalisable simplement. Ces relations sont établies par équivalence entre la fonction réalisée par le filtre analogique $H(p)$ et le filtre discret $H_1(z)$.

Dans tous les cas, la relation entre p et z n'est qu'une approximation de $z = e^{pT_e}$, qui conduit à une déformation de la réponse fréquentielle. C'est à dire :

$$H(p = j\omega) \neq H_1(z = e^{j\omega T_e})$$

où $H_1(z)$ est le filtre obtenu pour $H(p = f(z))$.

2.2.1 Equivalence de la dérivation (méthode des rectangles)

L'action dérivée, en continu, est caractérisée par la fonction de transfert $H_D(p)$:

$$H_D(p) = p$$

En discret la dérivée $y(k)$ du signal $x(k)$ peut s'approcher par :

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e} \quad (2.1)$$

d'où :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

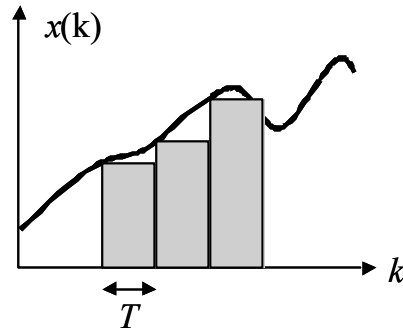
Si l'on pose $H_D(p) = H(z)$ alors :

$$p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Remarque 7 C'est une approximation au 1^{er} ordre de $z = e^{pT_e}$:

$$z^{-1} = e^{-pT_e} \approx 1 - pT_e \text{ d'où } p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

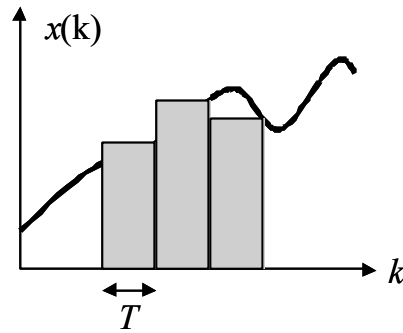
Remarque 8 Cette méthode est aussi appelée, méthode des rectangles car elle découle d'une approximation de l'intégrale continue $H(p) = \frac{1}{p}$ par une intégrale discrète sous forme de surface de rectangles. Le schéma de principe est donné par les figures ci-dessous.



$$y(k) = y(k-1) + T_e x(k-1)$$

$$H(z) = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}; \quad H(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow p \longrightarrow \frac{z-1}{T_e}$$

rectangles inférieurs



$$y(k) = y(k-1) + T_e x(k)$$

$$H(z) = \frac{T_e}{1 - z^{-1}}; \quad H(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow p \longrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

rectangles supérieurs

Exemple 11 La relation de récurrence du filtre numérique $H_1(z)$ correspondant au filtre analogique passe bas, défini par sa fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{1+p}$ (passe-bas normalisé), est calculée à partir de la fonction de transfert en z obtenue par l'approximation des rectangles comme suit :

$$H_1(z) = H\left(p = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}\right) = \frac{T_e}{T_e + 1 - z^{-1}}$$

d'où l'équation de récurrence suivante :

$$y(k) = \frac{1}{T_e + 1} [T_e x(k) + y(k-1)]$$

2.2.2 Transformation bilinéaire

C'est une transformation très fréquente dans la réalisation de filtres numériques. Elle consiste à approcher l'intégration idéal $H_I(p) = \frac{1}{p}$, par la relation de récurrence, en discret :

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T_e}{2} [x(k) + x(k-1)]$$

où, $\frac{T_e}{2} [x(k) + x(k-1)]$ représente l'aire entre $x(k)$ et $x(k-1)$, calculée par la méthode des trapèze. $H_1(z)$ s'écrit :

$$H_1(z) = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

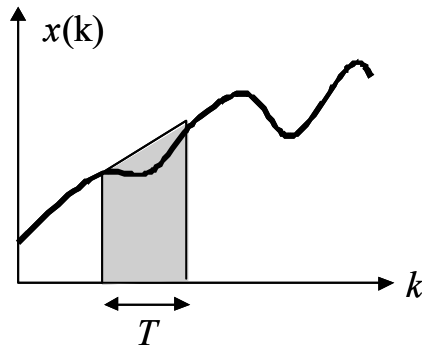
La relation entre p et z est donc :

$$\frac{1}{p} = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

d'où :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Cette transformation est appelée transformation bilinéaire. Le schéma de principe de cette approximation est donné par la figure ci-dessous :



$$y(k) = y(k-1) + T_e \frac{x(k-1) + x(k)}{2}$$

$$H(z) = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Exemple 12 Si $H(p) = \frac{1}{1+p}$ alors :

$$H_1(z) = H\left(p = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{T_e (1 + z^{-1})}{T_e + 2 + (T_e - 2)z^{-1}}$$

L'équation de récurrence est :

$$y(k) = \frac{1}{T_e + 2} [T_e x(k) + T_e x(k-1) + (2 - T_e)y(k-1)]$$

Remarque 9 On peut établir d'autres expressions de "l'intégration discrète", donc d'autres transformation de p en z . Par exemple, l'approximation de Simpson :

$$y(k) = y(k-2) + \frac{T_e}{3} (x(k) + 4x(k-1) + x(k-2)) \text{ d'où } p = \frac{3}{T_e} \frac{1 - z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}$$

2.2.3 Transformation homographique

Dans la méthode de la transformation bilinéaire, on remplace généralement le facteur $\frac{1}{T}$ par une constante K . Cette constante permet de laisser un degré de liberté supplémentaire pour l'ajustement des réponses en fréquence. Cette transformation est la transformation homographique, elle s'écrit :

$$p = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = K \frac{z - 1}{z + 1}$$

La transformation bilinéaire est un cas particulier de transformation homographique. K est le facteur d'adaptation en fréquence. Etudions d'abord le cas où $K = 1$, C'est à dire si :

$$p = \frac{z - 1}{z + 1} \Leftrightarrow z = \frac{1 + p}{1 - p}$$

La stabilité du filtre numérique est assurée si le filtre analogique est stable. En effet, si le pôle p_0 est à partie réelle négative, z_0 s'écrit :

$$z_0 = \frac{1 + p_0}{1 - p_0} = \frac{1 + \sigma_0 + 2\pi j f_0}{1 - \sigma_0 - 2\pi j f_0}$$

d'où :

$$|z_0|^2 = \frac{(1 + \sigma_0)^2 + (2\pi f_0)^2}{(1 - \sigma_0)^2 + (2\pi f_0)^2} < 1 \text{ avec } \sigma_0 < 0$$

Le filtre est donc stable. Cependant, les réponses fréquentielles du filtre analogique $H(p = j\omega)$ et du filtre discret $H_1(z = e^{j\omega' T_e})$ sont différentes. En effet, ce type de transformation introduit une distorsion en fréquence. Appelons ω_A une fréquence dans le domaine continu et ω_D une fréquence dans le domaine discret. En théorie, $z = e^{j\omega_D T_e} = e^{p T_e} = e^{j\omega_A T_e}$ d'où $\omega_A = \omega_D$. En pratique, si l'on utilise la transformation homographique, on trouve :

$$p = \frac{z - 1}{z + 1} \Leftrightarrow j\omega = \frac{e^{j\omega' T_e} - 1}{e^{j\omega' T_e} + 1}$$

soit encore :

$$j\omega = \frac{e^{j\frac{1}{2}\omega' T_e} \cdot e^{\frac{1}{2}j\omega' T_e} - e^{-\frac{1}{2}j\omega' T_e}}{e^{\frac{1}{2}j\omega' T_e} \cdot e^{\frac{1}{2}j\omega' T_e} + e^{-\frac{1}{2}j\omega' T_e}}$$

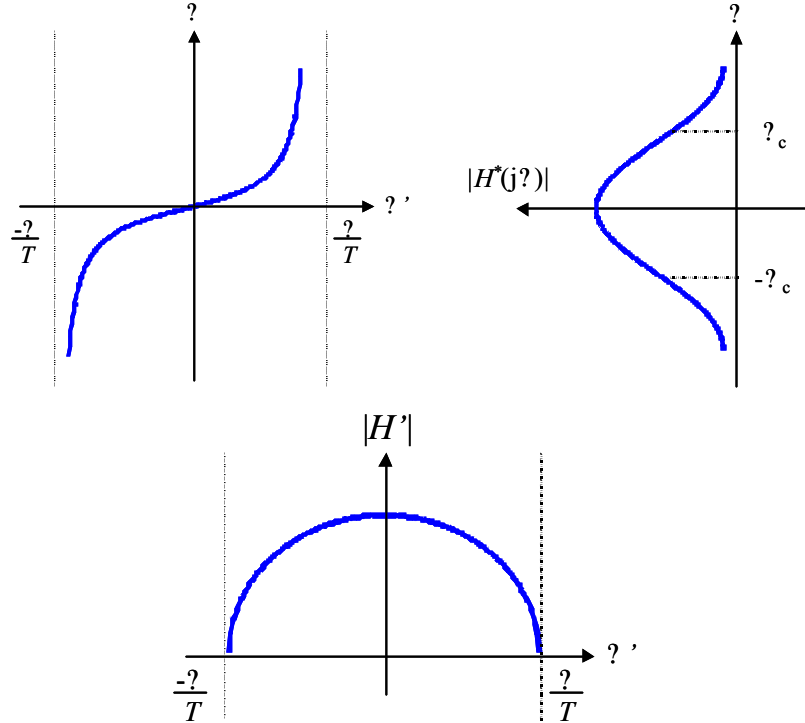
ou :

$$j\omega = j \tan\left(\frac{1}{2}\omega' T_e\right)$$

La relation qui lie ω et ω' est donc :

$$\omega = \tan\left(\frac{\omega' T_e}{2}\right)$$

La courbe donnant la transformation de la pulsation analogique ω à la pulsation numérique ω' est :



d'où :

$$\omega_D = \frac{2}{T_e} \arctan(\omega_A)$$

Cette relation montre que lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, ω' varie de 0 à π/T_e . La fréquence f' varie donc de 0 à $\frac{F_e}{2}$. Cette transformation a l'avantage d'éviter le problème de recouvrement spectral, lié à l'échantillonnage. Si l'on veut que les réponses fréquentielles des filtres analogique et discret soient égales pour les pulsations $\omega = \omega_A$ et $\omega' = \omega_D$, il faut introduire un facteur d'adaptation K tel que :

$$K = \frac{\omega_A}{\tan\left(\frac{\omega_D T_e}{2}\right)} \Rightarrow p = \frac{\omega_A}{\tan\left(\frac{\omega_D T_e}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}$$

On est ainsi assuré que les réponses fréquentielles $H(p = j\omega)$ et $H_1(z = e^{j\omega_D T_e})$ vérifient la relation :

$$H(p = j\omega_A) = H_1(z = e^{j\omega_D T_e})$$

Exemple 13 Considérons le filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_C :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_C}}$$

On désire réaliser un filtre numérique passe-bas de fréquence de coupure identique ω_C .
On a alors $\omega_D = \omega_A = \omega_C$, donc :

$$K = \frac{\omega_C}{\tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)} \text{ et } H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}}$$

On vérifie bien que :

$$H_1(z = e^{j\omega_C T_e}) = \frac{1}{1+j} = H(p = j\omega_C)$$

D'autre part l'équation de récurrence du filtre numérique est :

$$y(k) = \frac{1 - \tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)} y(k-1) + \frac{\tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{\omega_C T_e}{2}\right)} [x(k) + x(k-1)]$$

2.3 Synthèse par invariance temporelle.

Ce type de synthèse a pour but de faire correspondre les sorties des filtres analogique et numérique pour des entrées données. C'est à dire :

$$y_1(k) = y(t = kT_e)$$

où $y_1(k)$ est la sortie du filtre discret et $y(t)$ la sortie du filtre continu.

2.3.1 Invariance impulsionnelle

On veut, dans ce cas, que les réponses impulsionnelles soient identiques. Il faut dans un premier temps calculer $h(t)$ par transformation de Laplace inverse ($h(t) = L^{-1}[H(p)]$). Puis en déduire $h(k)$ par $h(k) = h(t = kT_e)$. Enfin calculer $H(z)$ à partir de $h(k)$:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k} = Tz [h(k)]$$

Ces trois opérations sont écrites de façon simplifiée :

$$H(z) = Tz [L^{-1}[H(p)]]$$

Exemple 14 Effectuer la synthèse du filtre passe-bas du 1^{er} ordre, de fréquence de coupure f_C , par une technique d'invariance impulsionnelle.

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_C}} = \frac{1}{1 + \frac{p}{2\pi f_C}}$$

d'où $h(t) = L^{-1}[H(p)] = \omega_C e^{-\omega_C t}$ et $h(k) = \omega_C e^{-\omega_C kT_e}$. On en déduit $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\omega_C}{1 - e^{-\omega_C T_e} z^{-1}}$$

Par suite :

$$y(k) = e^{-\omega_C T_e} y(k-1) + \omega_C x(k)$$

2.3.2 Invariance indicielle

On désire que les réponses indicielles soient identiques. Soit $Y_{ind}(p)$ la transformée de Laplace de la réponse indicielle, c'est à dire :

$$Y_{ind}(p) = H(p)U(p)$$

où $U(p)$ est la transformée de Laplace de l'échelon $u(t)$:

$$U(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Y_{ind}(p) = \frac{H(p)}{p}$$

d'où :

$$Y_{ind}(t) = L^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right]$$

De même en discret on a :

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

où $U(z)$ est la transformée en z de l'échelon $u(k)$:

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

d'où :

$$Y(z) = H(z)U(z) = Tz [y_{ind}(k)]$$

soit encore :

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Tz \left[L^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right] \right]$$

Exemple 15 Appliquons l'invariance indicielle au filtre du 1^{er} ordre $H(p)$:

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_C}} = \frac{\omega_C}{\omega_C + p}$$

d'où :

$$\frac{H(p)}{p} = \frac{\omega_C}{p(p + \omega_C)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \omega_C}$$

$$y_{ind}(t) = L^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right] = (1 - e^{-\omega_C t}) u(t)$$

et :

$$Y(z) = Tz [y_{ind}(k)] = Tz [(1 - e^{-\omega_C k T_e}) u(k)]$$

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\omega_C T_e}} \text{ si } |z| > 1$$

donc :

$$H(z) = \frac{z-1}{z} Y(z) = 1 - \frac{z-1}{z-e^{-\omega_C T_e}} = \frac{1-e^{-\omega_C T_e}}{z-e^{-\omega_C T_e}}$$

$$H(z) = (1-e^{-\omega_C T_e}) \frac{z^{-1}}{1-e^{-\omega_C T_e} z^{-1}}$$

On en déduit la réponse impulsionnelle et l'équation de récurrence :

$$\begin{cases} h(k) = (1-e^{-\omega_C T_e}) e^{-\omega_C (k-1) T_e} u(k-1) \\ y(k) = e^{-\omega_C T_e} y(k-1) + (1-e^{-\omega_C T_e}) x(k-1) \end{cases}$$

2.3.3 Invariance pour une entrée quelconque

On procède, pour une entrée quelconque $e(kT_e)$ de la même façon que précédemment. La sortie $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = L^{-1} [H(p)E(p)]$$

avec $E(p) = L[e(t)]$. D'autre part :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{Tz[y(k)]}{E(z)}$$

Par suite :

$$H(z) = \frac{1}{E(z)} Tz [L^{-1} [H(p)E(p)]]$$

Chapitre 3

Synthèse de filtres RIF

L'équation de récurrence reliant l'entrée à la sortie d'un filtre RIF étant du type

$$y(k) = \sum_{n=0}^N h(n)x(k-n)$$

$h(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre de longueur N .

Le problème qui se pose est celui de déterminer $h(n)$ qui vont permettre de satisfaire les spécifications données dans le domaine fréquentiel : filtre passe bas, passe haut, passe bande, etc. Les conditions sont souvent définies dans l'espace des fréquences et la fonction du transfert du filtre doit, comme dans le cas de la synthèse des filtres continus, approcher une fonction donnée et rester à l'intérieur d'un gabarit qui constitue la spécification.

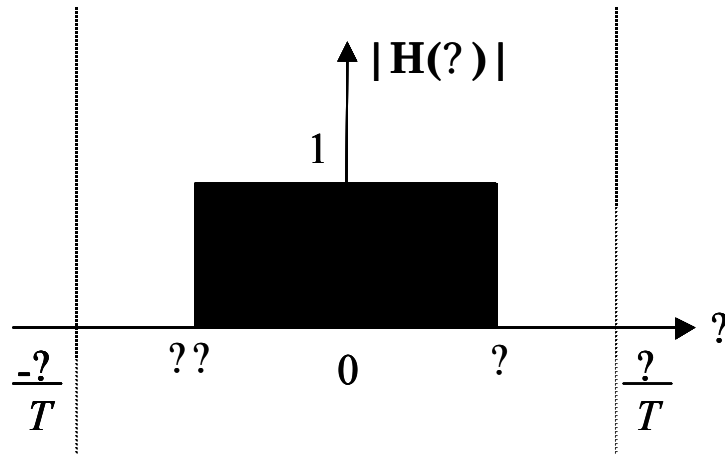
A la différence des filtres RII, les filtres RIF ne sont réalisables que dans le domaine discret. Par conséquent, leurs méthodes de synthèse ne sont pas dérivées des filtres analogiques. On distingue trois principales méthodes, dont deux seront détaillées dans les sections suivantes.

1. **La méthode du fenêtrage (*windowing*)** : consiste à appliquer une fenêtre de taille N au filtre idéal équivalent.
2. **La méthode de l'échantillonnage fréquentiel** : utilise la Transformée de Fourier Discrète inverse depuis une fonction discrète représentative du filtre et définie en fréquence.
3. Les méthodes d'optimisation se concentrent sur la minimisation d'un critère d'erreur entre la courbe réelle et le filtre idéal. La plus utilisée est la méthode de Parks and McClellan, qui formule le problème de synthèse de filtre sous la forme d'une approximation polynômiale.

3.1 Méthode de synthèse par fenêtrage

On considère le cas où l'on veut faire la synthèse d'un filtre RIF de longueur 4 (horizon) à phase linéaire qui approxime la caractéristique d'un filtre passe bas ($\omega_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$). La

cadence d'échantillonnage utilisé est de $T_e = 1$ s. Le gabarit idéal de ce type de filtre est décrit par $H(\omega)$ comme suit :



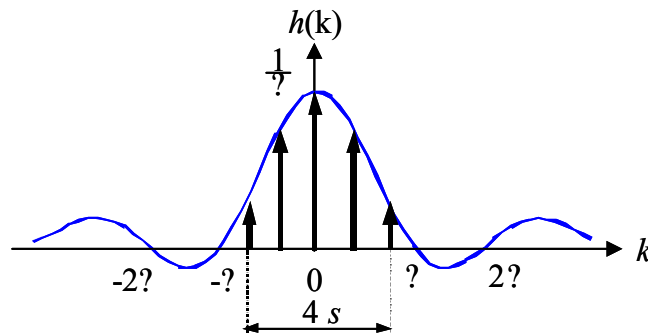
Les coefficients de la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique dont on connaît la réponse en fréquence $H(\omega)$ sont donnés par les coefficients de la série de Fourier comme suit :

$$h(k) = \frac{T_e}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_e}}^{\frac{\pi}{T_e}} H(\omega) e^{-j\omega k T_e} d\omega$$

Dans le cas de ce filtre

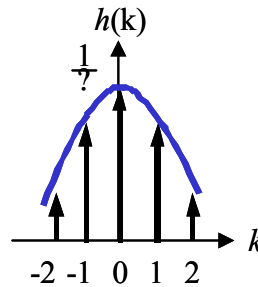
$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} 1 \cdot e^{-j\omega k T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-j\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jk} [e^{jk} - e^{-jk}] = \frac{1}{\pi} \frac{\sin k}{k} \end{aligned}$$

on obtient une allure des $h(k)$ en forme d'un sinus cardinal. $h(k)$ s'annule pour $k = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Les minimas ou maximas ont lieu pour $k = \tan k$.



Pour approximer le gabarit idéal, l'horizon du filtre doit être infini. Cependant, au fur et à mesure que k augmente les échantillons $h(k)$ deviennent plus faibles à cause de la forme du sinus cardinal.

Comme on demande de synthétiser un filtre RIF de longueur $4T = 4\text{ s}$, on doit faire une troncature, i.e. on ne prend que les 5 échantillons $k = 0, k = \pm 1$ et $k = \pm 2$.



Ce filtre sera non causal donc sans déphasage linéaire car les échantillons sont symétriques par rapport à l'axe $k = 0$. Nous avons :

$$h(0) = \frac{1}{\pi} = 0.3183$$

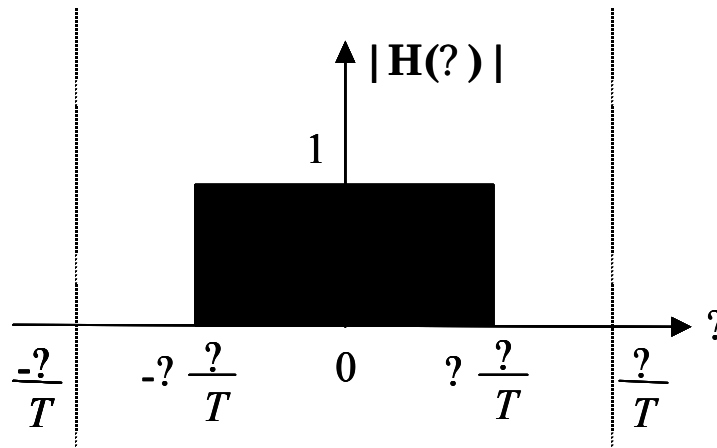
$$h(-1) = h(1) = 0.2680$$

$$h(-2) = h(2) = 0.1447$$

La transmittance en z d'un tel filtre est :

$$H(z) = 0.1447z^2 + 0.2680z + 0.3183 + 0.2680z^{-1} + 0.1447z^{-2}$$

Pour réaliser la troncature, il faut multiplier la courbe de $h(k)$ en sinus cardinal par une fenêtre $W(k)$, or la multiplication dans le domaine temporel devient une convolution fréquentielle. Dans le cadre général d'un filtre passe bas de gabarit



le sinus cardinal des coefficients $h(k)$ est

$$h(k) = \frac{\sin(\alpha k \pi)}{k \pi}$$

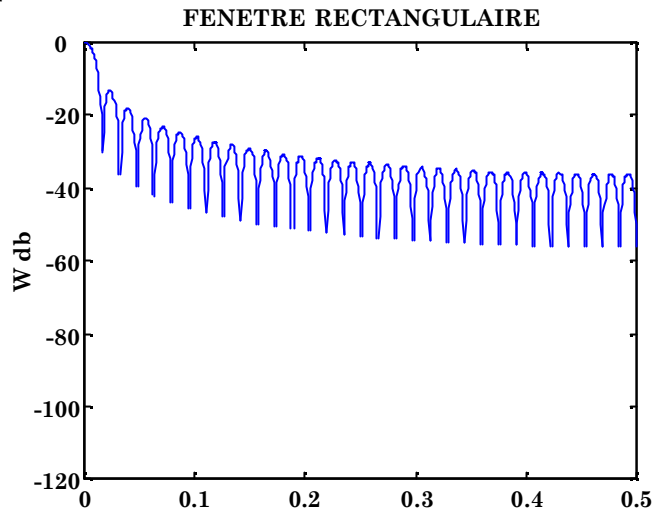
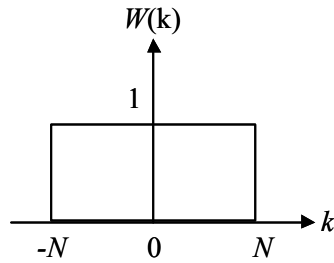
c'est une fonction paire telle que $h(0) = \alpha$ et $h(k) = h(-k)$.

Un filtre réalisable doit posséder un nombre fini $(2N + 1)$ échantillons pour sa réponse impulsionnelle.

Il existe plusieurs fenêtres pour la troncature :

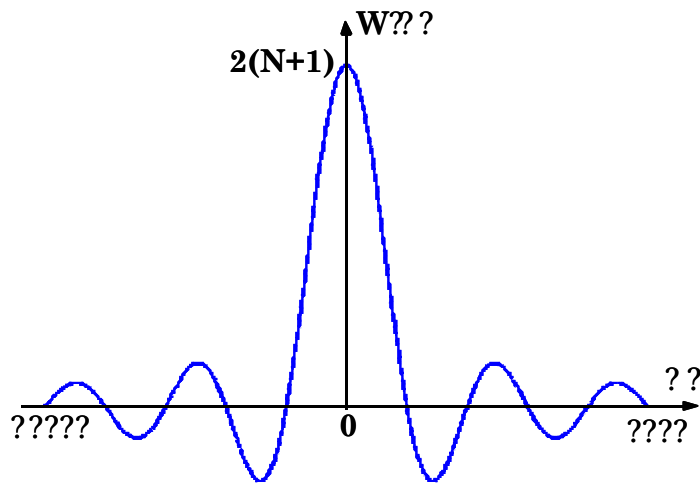
– Fenêtre rectangulaire

$$W(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

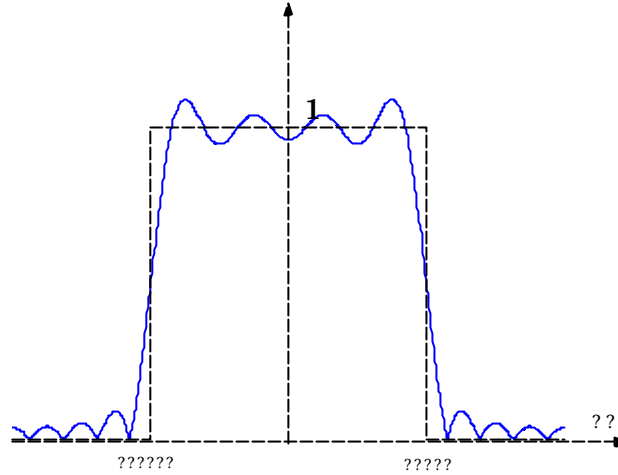


La transformée de Fourier de cette fenêtre rectangulaire est :

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{k=-N}^N W(k) e^{-jk\omega T} = \sum_{k=-N}^N 1 \cdot e^{-jk\omega T} \\ &= e^{-jN\omega T} + e^{-j(N-1)\omega T} + \dots + e^{-j\omega T} + 1 + e^{j\omega T} + \dots + e^{j(N-1)\omega T} + e^{jN\omega T} \\ &= e^{-jN\omega T} \frac{1 - e^{2j(N+1)\omega T}}{1 - e^{j\omega T}} \\ &= e^{-jN\omega T} \frac{e^{j(N+1)\omega T} (e^{-j(N+1)\omega T} - e^{j(N+1)\omega T})}{e^{j\omega \frac{T}{2}} (e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{j\omega \frac{T}{2}})} \\ &= e^{j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin(N+1)\omega T}{\sin \frac{1}{2}\omega T} \end{aligned}$$



La troncature de $h(k)$ par cette fenêtre rectangulaire se traduit par des oscillations au niveau du gabarit obtenu, c'est le phénomène de Gibbs.



Gabarit obtenu après troncature par fenêtre rectangulaire

La troncature des $h(k)$ par la fenêtre idéale rectangulaire permet d'aboutir à des $h'(k)$ après troncature tels que

$$h'(k) = \begin{cases} h(k) & \text{pour } -N \leq k \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le nouveau gabarit du filtre est alors :

$$H'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h'(k) e^{-jk\omega T} = \sum_{k=-N}^{k=+N} \frac{\sin \alpha k \pi}{k \pi} e^{-jk\omega T}$$

on sort le terme pour $k = 0$ qui vaut α , les autres termes en s'ajoutant 2 à 2 donnent des termes en cosinus, soit :

$$H'(\omega) = \alpha + 2 \sum_{k=1}^{k=N} \frac{\sin \alpha k \pi}{k \pi} \cos k \omega T$$

Pour le cas particulier du filtre passe bas considéré précédemment :

$T = 1$, $\omega_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $N = 2$ donnent $\alpha = \frac{T}{\pi} = \frac{1}{\pi}$, soit

$$\begin{aligned} H'(\omega) &= \frac{1}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{k=2} \frac{\sin k}{k \pi} \cos k \omega \\ &= \frac{1}{\pi} + 2 \frac{\sin 1}{\pi} \cos \omega + 2 \frac{\sin 2}{\pi} \cos 2 \omega \end{aligned}$$

si l'on considère un autre filtre passe bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{\pi}{4T}$ et si l'on fait une troncature à 7 échantillons, nous aurons

$$h(n) = \frac{\sin n \frac{\pi}{4}}{n \pi} \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{4} \right)$$

et le gabarit du filtre après troncature sera :

$$H'(\omega) = \frac{1}{4} + 2 \sum_{n=1}^3 \frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n\pi} \cos n\omega$$

– Troncature par d'autres fenêtres

La fenêtre rectangulaire est dite idéale car sa coupure est franche mais elle a l'inconvénient d'introduire des oscillations dites de Gibbs dans le gabarit du filtre obtenu.

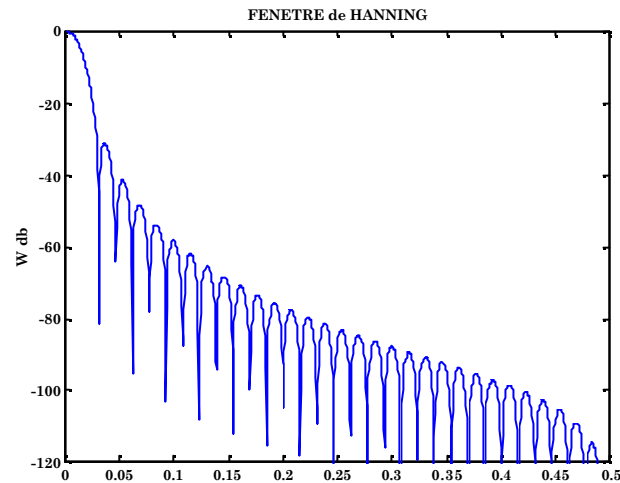
– Fenêtre de HAMMING généralisé

$$W(k) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{k\pi}{N} & |k| \leq N \\ 0 & \text{si } |k| > N \end{cases}$$

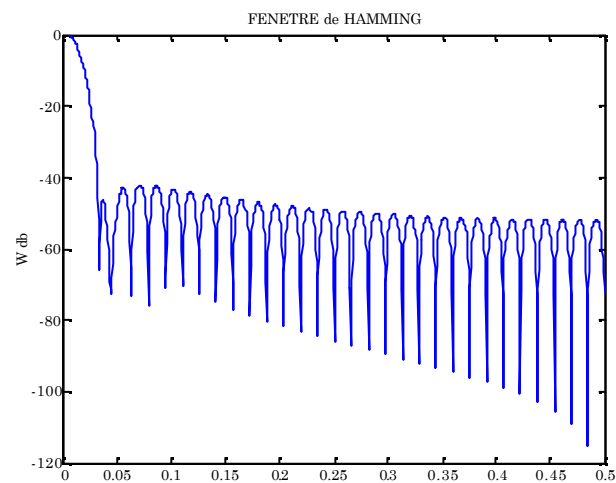
$$W(0) = 0 \quad \forall \alpha$$

$$W(N) = 2\alpha - 1 \quad \forall \alpha$$

Si $\alpha = 0.5$ la fenêtre est dite de HANNING



Si $\alpha = 0.54$ la fenêtre est dite de HAMMING



Application de la fenêtre de Hamming au filtre passe bas :

$$h''(k) = W(k)h(k) = \frac{\sin \alpha k\pi}{k\pi} \left[0.54 + 0.46 \cos \frac{k\pi}{N} \right]$$

Le gabarit du filtre est :

$$H''(\omega) = \sum_{k=-N}^{k=N} h''(k)e^{-jk\omega T} = \sum_{k=-N}^{k=N} \frac{\sin \alpha k\pi}{k\pi} \left[0.54 + 0.46 \cos \frac{k\pi}{N} \right] e^{-jk\omega T}$$

Comme l'expression $\frac{\sin \alpha k\pi}{k\pi} \left[0.54 + 0.46 \cos \frac{k\pi}{N} \right]$ est paire, pour $k = 0$ elle vaut α et l'addition des termes 2 à 2 donnera des expressions en cosinus, soit :

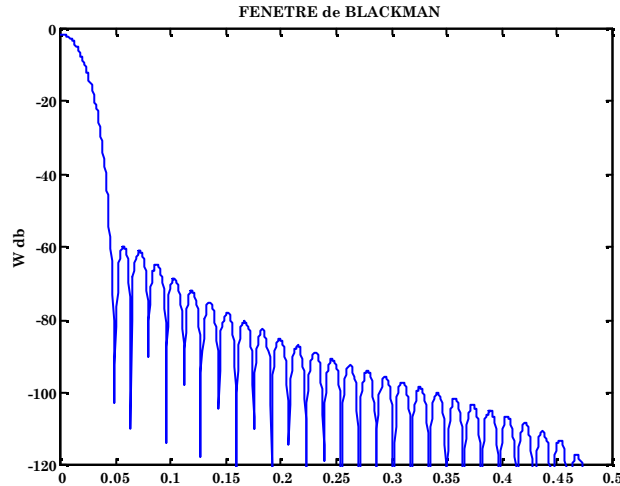
$$H''(\omega) = \sum_{k=1}^{k=N} \frac{\sin \alpha k\pi}{k\pi} \left[0.54 + 0.46 \cos \frac{k\pi}{N} \right] \cos k\omega T$$

– Fenêtre de BLACKMAN

$$W(k) = 0.42 + 0.5 \cos \frac{k\pi}{N} + 0.08 \cos \frac{2k\pi}{N}$$

$$W(0) = 1$$

$$W(N) = 0$$

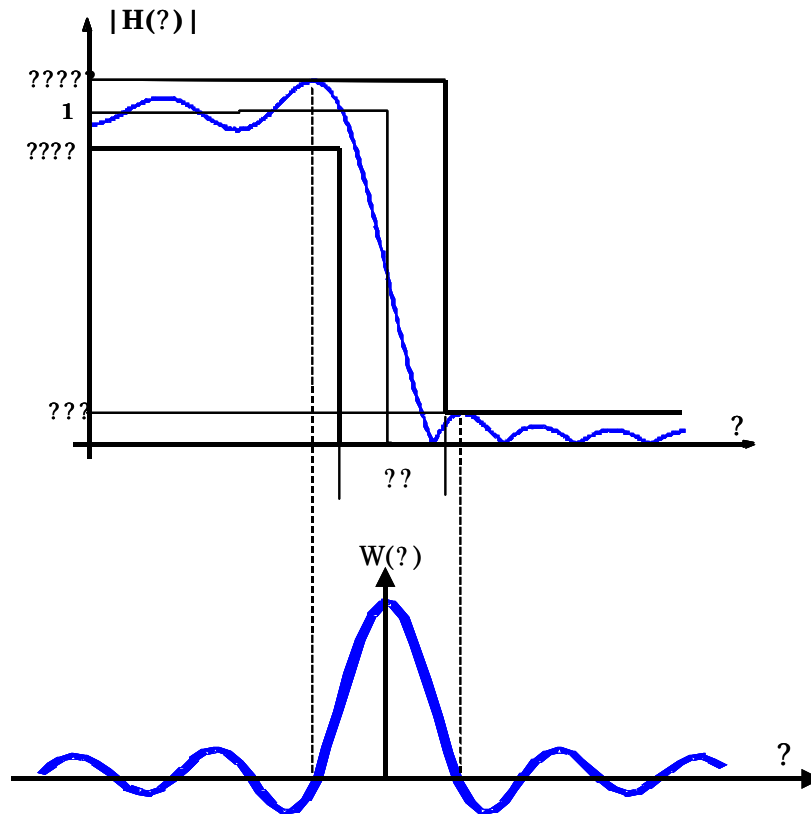


On voit bien que le choix de la fenêtre a une influence sur les performances du filtre. En particulier, les caractéristiques importantes et leur influence sur le filtre synthétisé sont détaillées ci-dessous :

- La largeur de la zone de transition $\Delta\omega = [\omega_p - \omega_a]$ sera directement fonction de la largeur du lobe principal $\Delta\omega_m$ donné par le tableau ci-dessous. Lorsque la fréquence de coupure ou de transition du filtre n'est pas trop proche de 0 ou de π , on peut considérer que $\Delta\omega \simeq \frac{\Delta\omega_m}{2}$. On voit que la transition est d'autant plus faible que N sera grand.

| Type de fenêtre | Rapport d'amplitude entre lobe principal et lobe secondaire | Largeur du lobe principal $\Delta\omega_m$ | Atténuation minimale en bande atténuée ΔA |
|-----------------|---|--|---|
| Rectangulaire | $-13dB$ | $4\pi/N$ | $-21dB$ |
| Bartlett | $-25dB$ | $8\pi/N$ | $-25dB$ |
| Hanning | $-31dB$ | $8\pi/N$ | $-44dB$ |
| Hamming | $-41dB$ | $8\pi/N$ | $-53dB$ |
| Blackman | $-57dB$ | $12\pi/N$ | $-74dB$ |

- Les ondulations en bande passante et en bande atténuée seront égales, on notera $\Delta A = \delta_1 = \delta_2$ et on parlera de filtre equiripple. Cette atténuation est donnée par le tableau ci-dessus. On voit que ΔA ne dépend que du type de fenêtre et non du nombre N .



3.2 Synthèse par échantillonnage en fréquence

Il est possible de filtrer le signal d'entrée $x(k)$ dans le domaine fréquentiel, en calculant sa TFD. On a alors :

$$X(n) = TFD\{x(k)\}$$

Le signal $y(k)$ est obtenu par TFD Inverse :

$$Y(k) = TFD^{-1}\{Y(n)\} = TFD^{-1}\{H(n)X(n)\}$$

La synthèse de filtre par invariance fréquentielle suppose la connaissance de la réponse fréquentielle $H(n)$ échantillonnée sur N points aux fréquences $\frac{nF_e}{N}$:

$$H(n) = TFD_N\{h(k)\}$$

où $h(k)$ est la réponse impulsionnelle limitée aux N premiers points . On a alors :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$$

Soit :

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} H(n)W_N^{+nk} \right] z^{-k}$$

Soit enfin :

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \frac{1}{1 - W_N^{+n} z^{-1}}$$

Remarque 10 $h(k)$ est réelle si $H(N - n) = H^*(n)$

Exemple 16 Un signal $x(t)$ est échantillonné sur 8 points, à une fréquence $F_e = 8KHz$. On désire filtrer $x(k)$ par un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_C = 2.5KHz$. On en déduit :

$$N = 8 \text{ et } \Delta f = \frac{F_e}{N} = 1KHz$$

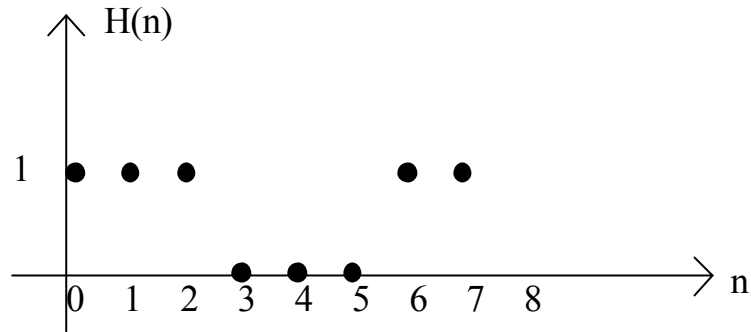
On doit donc avoir :

$$H(0) = 1; H(1) = 1; H(2) = 1; H(3) = 0; H(4) = 0$$

et par symétrie :

$$H(5) = H^*(8 - 5) = 0; H(6) = H^*(8 - 6) = 1; H(7) = H^*(8 - 7) = 1$$

On peut représenter $H(n)$ par :



d'où

$$H(z) = \frac{1 - z^{-8}}{8} \sum_{n=0}^7 H(n) \frac{1}{1 - W_8^{+n} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-8}}{8} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^1 z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^2 z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^6 z^{-1}} + \frac{1}{1 - W_8^7 z^{-1}} \right]$$

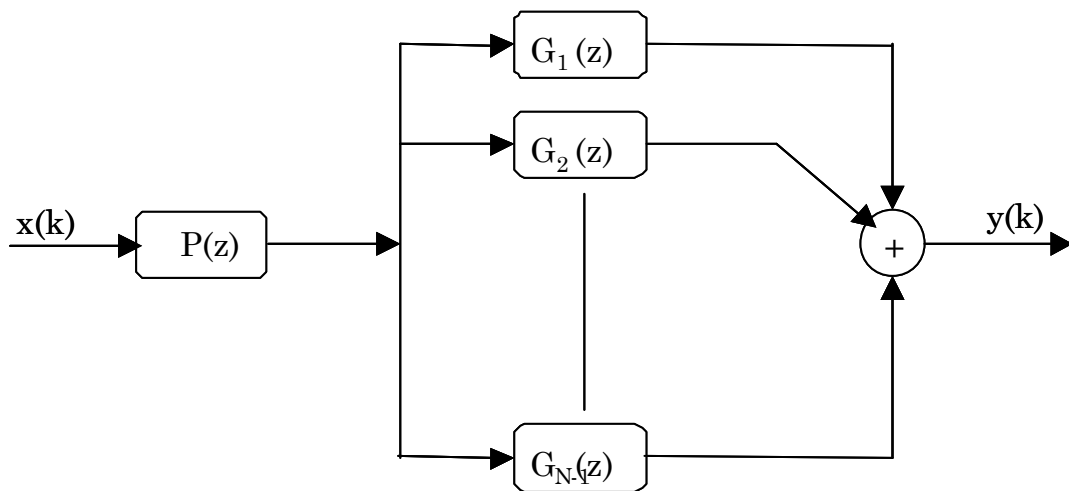
La réalisation de tels filtres s'effectue en posant :

$$H(z) = P(z) \sum_{n=0}^{N-1} G_n(z)$$

avec :

$$P(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \text{ un filtre en peigne}$$

$$G_n(z) = \frac{H(n)}{1 - W_N^{+n} z^{-1}}$$



| $x[n]$ | $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$ |
|--|--|
| $\delta[n]$ | 1 |
| $\delta[n-i]$ | z^{-i} |
| $u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| $a^n u[n]$ | $\frac{z}{z-a}$ |
| $nu[n]$ | $\frac{z}{(z-1)^2}$ |
| $n^2 u[n]$ | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$ |
| $x[n-i]$ | $z^{-i} X(z)$ |
| $a^n x[n]$ | $X(z/a)$ |
| $nx[n]$ | $-z \frac{dX(z)}{dz}$ |
| $a^n \cos(n\theta) u[n]$ | $\frac{z^2 - az \cos(\theta)}{z^2 - 2az \cos(\theta) + a^2}$ |
| $a^n \sin(n\theta) u[n]$ | $\frac{az \sin(\theta)}{z^2 - 2az \cos(\theta) + a^2}$ |
| $a^n \sin(n\theta + \psi) u[n]$ | $\frac{z^2 \sin(\psi) + az \sin(\theta - \psi)}{z^2 - 2az \cos(\theta) + a^2}$ |
| $\frac{1}{n} u[n-1]$ | $\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$ |

Quelques paires usuelles de transformées en z