ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

5η Ομάδα Ασκήσεων

Νικόλαος Δημητριάδης
03114016
ΗΜΜΥ 8ο

1 Δίκτυο δύο εκθετικών ουρών εν σειρά

ερώτημα 1

Οι παραδοχές που απαιτούνται ώστε να έχουν οι εργοδικές πιθανότητες του συστήματος τη μορφή γινομένου είναι:

- ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών που αντιστοιχούν στους χρόνους εξυπηρέτησης των ουρών Q_1, Q_2
- Παραδοχή ανεξαρτησίας Leonard Kleinrock:
  Οι χρόνοι εξυπηρέτησης δεν διατηρούν την τιμή τους όταν προωθούνται μεταξύ διαφορετικών ουρών (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογο με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή. Εδώ, ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη στην Q_2 δεν επηρεάζεται από το χρόνο που, ενδεχομένως, έκανε ο πελάτης στην Q_1
- οι αφίξεις από εξωτερικές πηγές είναι Poisson και ανεξάρτητες
- ισχύει η συνθήκη εργοδικότητας

ερώτημα 2

Οι εντάσεις φορτίου για κάθε ουρά είναι:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \tag{1}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2} \tag{2}$$

εφόσον γνωρίζουμε από θεώρημα <u>Burke</u> ότι η έξοδος της ουράς 1 ακολουθεί ρυθμό εισόδου ίσο με το ρυθμό εισόδου λ_1.

ερώτημα 3

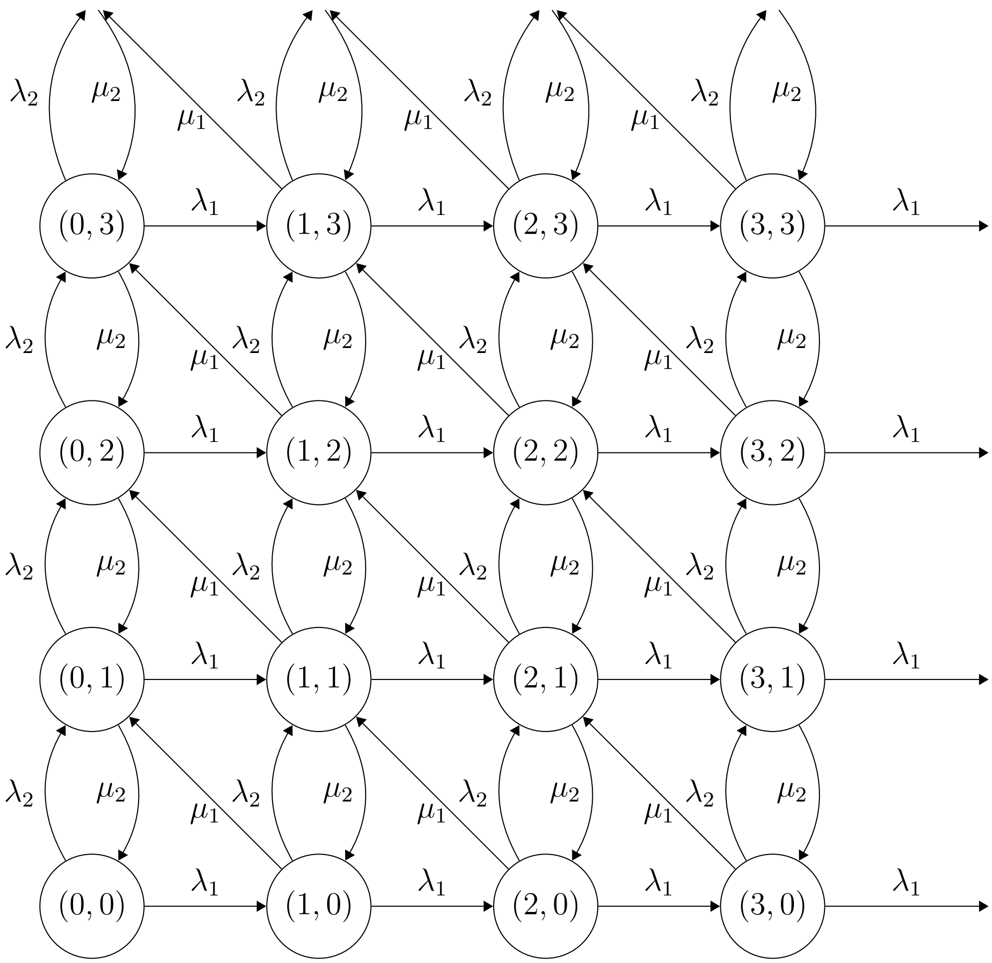

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων συστήματος

ερώτημα 4

έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{n}) &= P(n_1, n_2) \\ &= P(n_1)P(n_2) \\ &= (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2} \\ &= K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \end{aligned} \tag{3}$$

Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο διάγραμμα για $n_1, n_2 > 0$ προκύπτει

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \lambda_1 P(n_1-1,n_2) \\
&+ \mu_2 P(n_1,n_2+1) \\
&+ \mu_1 P(n_1+1,n_2-1) \\
&+ \lambda_2 P(n_1,n_2-1) \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \lambda_1 K\rho_1^{n_1-1}\rho_2^{n_2} \\
&+ \mu_2 K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2+1} \\
&+ \mu_1 K\rho_1^{n_1+1}\rho_2^{n_2-1} \\
&+ \lambda_2 K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2-1} \\
\stackrel{(1),(2)}{\implies} (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \lambda_1 K\rho_1^{n_1-1}\rho_2^{n_2} \\
&+ \mu_2 K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2+1} \\
&+ \mu_1 K\rho_1^{n_1+1}\rho_2^{n_2-1} \\
&+ \lambda_2 K\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2-1} \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \lambda_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1-1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2+1} \\
&+ \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1+1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} \\
&+ \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1} \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ (\lambda_1+\lambda_2) K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ \lambda_1\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{-1} K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ \lambda_2\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{-1} K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)P(n_1,n_2) &= \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ (\lambda_1+\lambda_2) K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \\
&+ \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Για $\underline{n_1 > 0, n_2 = 0}$

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \lambda_1 P(n_1-1,0) \\
&\quad + \mu_2 P(n_1,1) \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \lambda_1 K \rho_1^{n_1-1} \\
&\quad + \mu_2 K \rho_1^{n_1}\rho_2 \\
\overset{(1),(2)}{\implies} (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \lambda_1 K \rho_1^{n_1-1} \\
&\quad + \mu_2 K \rho_1^{n_1}\rho_2 \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \lambda_1 K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1-1} \\
&\quad + \mu_2 K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right) \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \mu_1 K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \\
&\quad + (\lambda_1+\lambda_2) K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)P(n_1,0) &= \mu_1 K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \\
&\quad + (\lambda_1+\lambda_2) K \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Για $\underline{n_1 = 0, n_2 > 0}$

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= \mu_2 P(0,n_2+1)\\
&\quad + \mu_1 P(1,n_2-1)\\
&\quad + \lambda_2 P(0,n_2-1)\\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= \mu_1 K\rho_1\rho_2^{n_2-1}\\
&\quad + \lambda_2 K\rho_2^{n_2-1}\\
\overset{(1),(2)}{\implies} (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= \mu_2 K\rho_2^{n_2+1}\\
&\quad + \mu_1 K\rho_1\rho_2^{n_2-1}\\
&\quad + \lambda_2 K\rho_2^{n_2-1}\\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= \mu_1 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1}\\
&\quad + \lambda_2 K\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2-1}\\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= (\lambda_1+\lambda_2)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}\\
&\quad + \lambda_1\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{-1} K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}\\
&\quad + \lambda_2\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{-1} K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}\\
\implies (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P(0,n_2) &= (\lambda_1+\lambda_2)K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}\\
&\quad + \mu_2 K\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2}
\end{aligned}
$$

■

ερώτημα 5

Έχουμε

$$\mathbb{E}[n_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1}{\mu_1-\lambda_1} \tag{4}$$

$$\mathbb{E}[n_2] = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{1}{\mu_2-\lambda_1-\lambda_2} \tag{5}$$

και

$$\gamma = \lambda_1+\lambda_2 \tag{6}$$

Τότε από τύπο του Little έχουμε για τη συνολική μέση καθυστέρηση $\mathbb{E}[T]$:

$$(4),(5),(6) \implies \mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[n_1]+\mathbb{E}[n_2]}{\gamma} = \frac{\frac{1}{\mu_1-\lambda_1}+\frac{1}{\mu_2-\lambda_1-\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2 Δίκτυο με εναλλακτική δρομολόγηση

ερώτημα 1

Οι απαραίτητες παραδοχές ώστε οι σύνδεσμοι (γραμμές) να μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν M/M/1 ουρές είναι:

- Ανοικτό δίκτυο M δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i, i = 1, 2, \cdot, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$ προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1, 2, \cdots, M\}$
- Εσωτερική δρομολόγηση (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_j$: r_{ij}
- Έστω $\delta_{sd} = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_i$ ή αλλιώς $\delta_{sd} = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_i$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sd}\delta_{sd}$
- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (Kleinrock's Independence Assumption, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ερώτημα 2

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σύστημα μοντελοποιείται ως δύο ουρές αναμονής M/M/1 με:

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda = 10000$ $^{\text{πακέτα}}/_{\text{sec}}$
- ρυθμός αφίξεων γραμμής 1: $\lambda_1 = a\lambda$
- ρυθμός αφίξεων γραμμής 2: $\lambda_2 = (1-a)\lambda$
- μέσο μήκος πακέτου: $\mathbb{E}[L] = 128\ Bytes = 1024\ bits$
- μέση τιμή χρόνου εξυπηρέτησης 1: $\mu_1 = \frac{C_1}{\mathbb{E}[L]} = 14648$ $^{\text{πακέτα}}/_{\text{sec}}$
- μέση τιμή χρόνου εξυπηρέτησης 12: $\mu_2 = \frac{C_2}{\mathbb{E}[L]} = 11719$ $^{\text{πακέτα}}/_{\text{sec}}$

Αυτό σημαίνει ότι ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πακέτου στο σύστημα είναι από τον τύπο του Little:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[n_1] + \mathbb{E}[n_2]}{\gamma} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2}}{\lambda} = \frac{a}{\mu_1 - a\lambda} + \frac{1-a}{\mu_2 - (1-a)\lambda}$$

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:

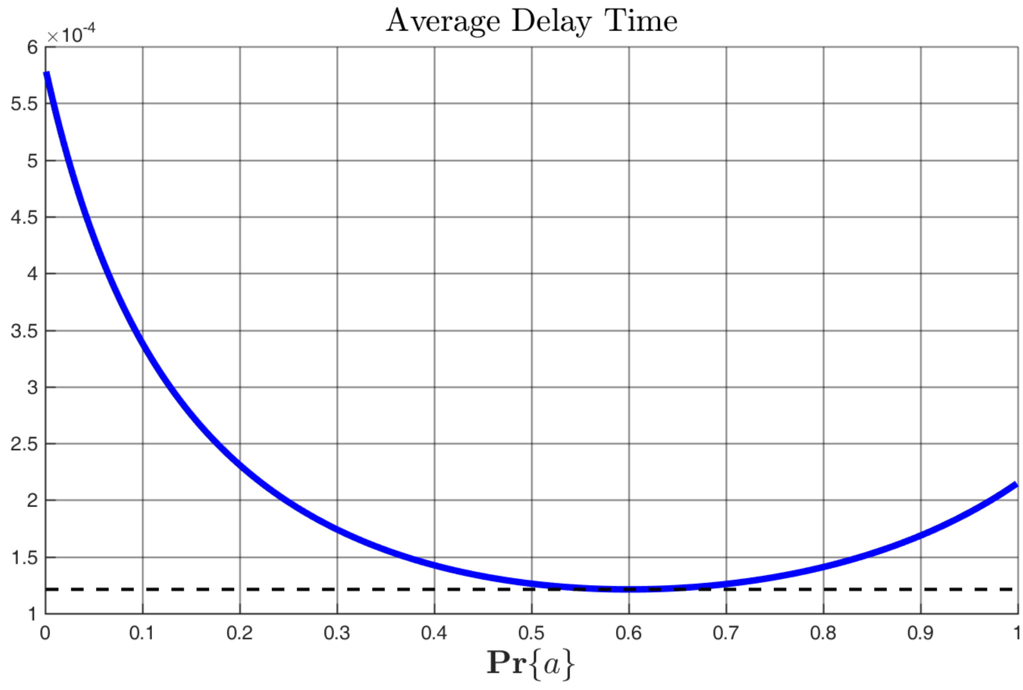

Figure 2: μέσος χρόνος καθυστέρησης $E(T)$ ενός τυχαίου πακέτου στο σύστημα συναρτήσει του α.

Από αυτό βρίσκουμε ότι:

$$\mathbb{E}[T]_{min} \simeq 1.21 \cdot 10^{-4} \text{ sec} \ \ \text{για } \alpha = 0.6016 \tag{7}$$

3 Ανοιχτό δίκτυο ουρών αναμονής

ερώτημα 1

Οι απαραίτητες παραδοχές ώστε το παραπάνω δίκτυο να μπορεί να μελετηθεί ως ένα ανοιχτό δίκτυο με το θεώρημα Jackson είναι:

- Ανοικτό δίκτυο Μ δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i, i = 1, 2, \cdot, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i
- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$ προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: Ανεξάρτητες ροές Poisson μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1, 2, \cdots, M\}$
- Εσωτερική δρομολόγηση (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_j$: r_{ij}
- Έστω $\delta_{sd} = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_i$ ή αλλιώς $\delta_{sd} = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_i$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sd}\delta_{sd}$
- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (Kleinrock's Independence Assumption, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ερώτημα 2

Σύμφωνα με το διάγραμμα του δικτύου έχουμε:

$$\lambda_{Q1} = \lambda_1 \tag{8}$$
$$\lambda_{Q2} = \frac{2}{7}\lambda_1 + \lambda_2 \tag{9}$$
$$\lambda_{Q3} = \frac{2}{7}\lambda_1 + \lambda_2 \tag{10}$$
$$\lambda_{Q4} = \frac{1}{7}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_{Q3} = \frac{3}{7}\lambda_1 \tag{11}$$
$$\lambda_{Q5} = \lambda_{Q2} + \frac{1}{2}\lambda_{Q3} = \frac{4}{7}\lambda_1 + \lambda_2 \tag{12}$$

Επομένως:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_{Q1}}{\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \tag{13}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_{Q2}}{\mu_2} = \frac{\frac{2}{7}\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_2} \tag{14}$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda_{Q3}}{\mu_3} = \frac{\frac{2}{7}\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_3} \tag{15}$$

$$\rho_4 = \frac{\lambda_{Q4}}{\mu_4} = \frac{\frac{3}{7}\lambda_1}{\mu_4} \tag{16}$$

$$\rho_5 = \frac{\lambda_{Q5}}{\mu_5} = \frac{\frac{4}{7}\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_5} \tag{17}$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (8)-(12) και (13)-(17) προκύπτει η συνάρτηση `intensities` που παρουσιάζεται παρακάτω:

Listing 1: `intensities.m`

```
function [ rho, erg ] = intensities( lambda , mu )

lambda_Q(1) = lambda(1);
lambda_Q(2) = 2/7 * lambda(1) + lambda(2);
lambda_Q(3) = 4/7 * lambda(1);
lambda_Q(4) = 1/2 * lambda_Q(3) + 1/7 * lambda_Q(1);
lambda_Q(5) = 1/2 * lambda_Q(3) + lambda_Q(2);

for i=1:5
    rho(i) = lambda_Q(i) / mu(i);
end

erg = ( rho < 1);

% display(rho);

end
```

ερώτημα 3

Γνωρίζουμε ότι για εργοδικά συστήματα ότι $Q = \frac{\rho}{1-\rho}$. Τότε, η συνάρτηση `mean_clients.m` είναι η ακόλουθη:

Listing 2: `mean_clients.m`

```
function [ Q ] = mean_clients( lambda , mu )

[ rho, erg ] = intensities( lambda , mu );

if (erg == 1)
    Q = rho ./ (1-rho);
else
    fprintf('Error\n');
    Q = (-1) * ones(1,length(erg));
end


end
```

ερώτημα 4

Για τις τιμές των παραμέτρων της εκφώνησης βρίσκουμε τις ακόλουθες εντάσεις φορτίου ρ_i για $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.6667 \\ 0.4286 \\ 0.2857 \\ 0.2449 \\ 0.5476 \end{bmatrix} \tag{18}$$

και τους μέσους αριθμούς πελατών σε κάθε ουρά $\mathbf{Q}_i = \mathbb{E}[n_i]$ για $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 0.7500 \\ 0.4000 \\ 0.3243 \\ 1.2105 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Επομένως, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι από τύπο του Little:

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{n}]}{\gamma} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{n}]}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0.9730 \tag{20}$$

ερώτημα 5

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η στενωπός ουρά είναι η $Q1$, καθώς χαρακτηρίζεται από τη μεγαλύτερη ένταση φορτίου ρ_1. Από τύπο (13) βλέπουμε ότι $\lambda_1^{max} = 6$.

ερώτημα 6

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:

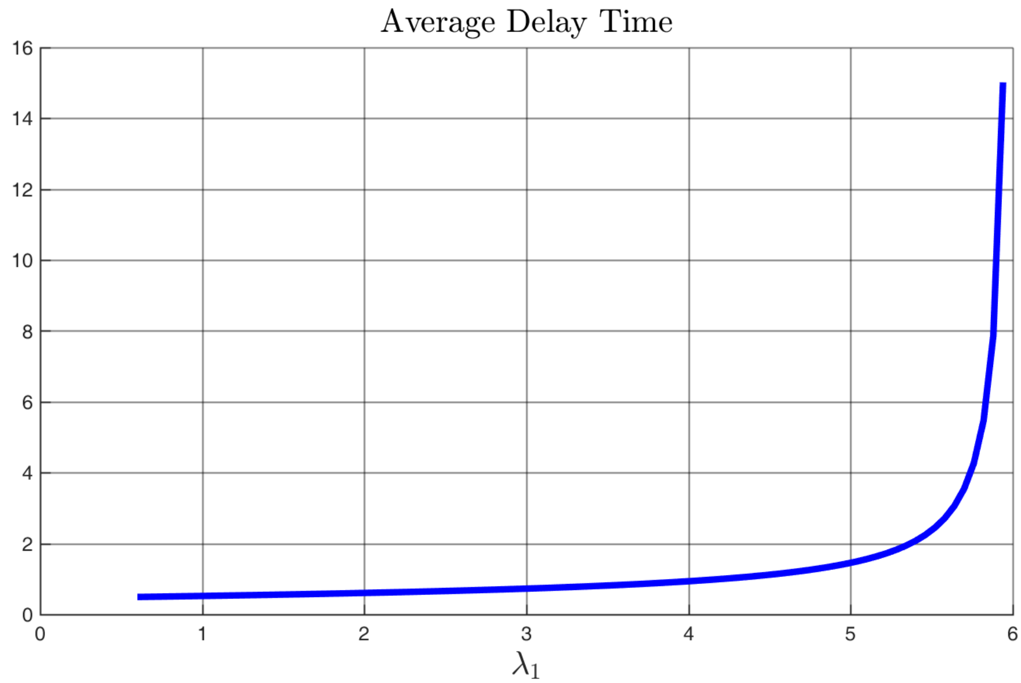

Figure 3: μέσος χρόνος καθυστέρησης $E(T)$ ενός πελάτη από άκρο σε άκρο του δικτύου.

Από το διάγραμμα αυτό επαληθεύεται η απάντηση του υποερωτήματος (5).

ς απλο

4 Appendix

Listing 3: intensities

```
function [ rho, erg ] = intensities( lambda , mu )

lambda_Q(1) = lambda(1);
lambda_Q(2) = 2/7 * lambda(1) + lambda(2);
lambda_Q(3) = 4/7 * lambda(1);
lambda_Q(4) = 1/2 * lambda_Q(3) + 1/7 * lambda_Q(1);
lambda_Q(5) = 1/2 * lambda_Q(3) + lambda_Q(2);

for i=1:5
    rho(i) = lambda_Q(i) / mu(i);
end

erg = ( rho < 1);

% display(rho);

end
```

Listing 4: mean_clients

```
function [ Q ] = mean_clients( lambda , mu )

[ rho, erg ] = intensities( lambda , mu );

if (erg == 1)
    Q = rho ./ (1-rho);
else
    fprintf('Error\n');
    Q = (-1) * ones(1,length(erg));
end


end
```

Listing 5: part 2

```
clc
clear all;
close all;

```

```
%% erwthma 2
lambda = 10000; %pps
mu1 = 15*10^6 / (8 * 128);
mu2 = 12*10^6 / (8 * 128);
a = 0.001:0.001:0.999;

E = a./(mu1-a.*lambda) + (1-a)./(mu2-(1-a).*lambda);

[val, id] = min(E);
disp(val);
disp(id/999);
%% plot erwthma 2
fontsize = 12;
lineWidth = 1;
plotLineWidth = 4;
width=1024;
height=568;

fig1 = figure();
fig1.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
hold on

plot(a, E,'Color','b','LineWidth',plotLineWidth);
y(1:length(E)) = val;
plot(a,y,'--k','LineWidth', 2);
temp = gca;

temp.Color = 'w';
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.GridColor = 'k';
temp.GridAlpha = 0.5;
temp.FontSize = fontsize;
hold off
% ylim([0 50]);

title(['Average Delay Time'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
xlabel(['$\mathbf{Pr}\{a\}$'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf,'figure2.png');
```

Listing 6: part 3

```
clc
clear all;
```

```
close all;
%%
lambda = [4, 1];
mu = [6, 5, 8, 7, 6];
[ rho, erg ] = intensities( lambda , mu );

[~, bottleneck] = max(rho)
if (erg == 1)
    Q = mean_clients( lambda , mu );
end
%% epalhteysh bottleneck
lambda = [6, 1];
mu = [6, 5, 8, 7, 6];
[ rho, erg ] = intensities( lambda , mu );


%%
for j = 10 : 99
    i =  0.01 * j;
    lambda1 = mu(1) * i ;
    lambda = [lambda1, 1];
    [ rho, erg ] = intensities( lambda , mu );
    if (erg == 1)
        Q = mean_clients( lambda , mu );
    end
    E_T(j-9) = sum(Q) / sum(lambda);
end
%%
fontsize = 12;
lineWidth = 1;
plotLineWidth = 4;
width=1024;
height=568;

fig1 = figure();
fig1.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
hold on
lambda1 = mu(1) * (0.1:0.01:0.99);
plot(lambda1,E_T,'Color','b','LineWidth',plotLineWidth);
% y(1:length(E)) = val;
% plot(a,y,'--k','LineWidth', 2);
temp = gca;
xlim([0 6]);
temp.Color = 'w';
```

```
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.GridColor = 'k';
temp.GridAlpha = 0.5;
temp.FontSize = fontsize;
hold off


title(['Average Delay Time'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
xlabel(['$\lambda_1$'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf,'figure3.png');
```