ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

2η Ομάδα Ασκήσεων

Νικόλαος Δημητριάδης
03114016
ΗΜΜΥ 8ο

Εισαγωγή

Τα διάφορα μέρη παραδίδονται σε διαφορετικά σε διαφορετικά αρχεία .m και τα επιμέρους ερωτήματά τους χωρίζονται σε sections στον κώδικα για καλύτερη κατανόηση/διόρθωση. Το μέρος 1 βασίστηκε στο demo1.m που αναρτήθηκε στο site του μαθήματος. Χρησιμοποιήθηκε `MATLAB`.

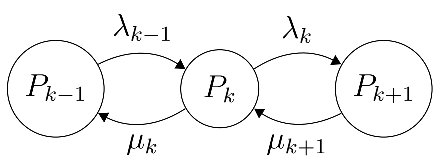
1 Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

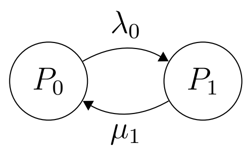
a

Η απαραίτητη συνθήκη ώστε μία ουρά αναμονής M/M/1 να είναι εργοδική είναι η ένταση του φορτίου ρ που προσφέρεται στο σύστημα να είναι μικρότερη του 1 Erlang:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \quad Erlang \tag{1}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός αφίξεων είναι μικρότερος από το ρυθμό εξυπηρέτησης. Το διάγραμμα ρυθμού μετάβασης της ουράς M/M/1 είναι το ακόλουθο:





Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι οι ακόλουθες:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \qquad k \geq 1 \tag{2}$$

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \tag{3}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 \tag{4}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις και θεωρώντας ότι $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$ και $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \mu$ υπολογίζουμε τις εργοδικές πιθανότητες για τις καταστάσεις της ουράς M/M/1:

$$(3) \implies P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(2),(5),(k=1) \implies & (\lambda_1+\mu_1)P_1 = \lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 \\ \implies & (\lambda+\mu)\rho P_0 = \lambda P_0 + \mu P_1 \\ \implies & P_2 = \rho^2 P_0 \qquad (6)\end{aligned}$$

Επεκτείνοντας την παραπάνω λογική βρίσκουμε ότι

$$P_k = \rho^k P_0 \tag{7}$$

Επομένως,

$$(2),(7) \implies \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k P_k = 1 \implies P_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \implies P_0 = 1-\rho \tag{8}$$

Αυτό σημαίνει για τις παραπάνω εργοδικές πιθανότητες ότι:

$$P_k = (1-\rho)\rho^k \tag{9}$$

b

Για τη μέση τιμή του πληθυσμού, όταν το σύστημα είναι σε κατάσταση ισορροπίας, έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned}E[n(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr[n(t)=k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k P_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k \\ &= (1-\rho)\rho \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1} \\ &= (1-\rho)\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial(\rho^k)}{\partial\rho} = \\ &= (1-\rho)\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{1}{\rho^2}\Big) = \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (10)\end{aligned}$$

Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα, σύμφωνα με τον τύπο του Little :

$$E[T] = \frac{E[n(t)]}{\gamma} \overset{\gamma=\lambda}{=} \frac{1}{\mu(1-\rho)} \tag{11}$$

c

Η πιθανότητα να βρίσκονται στο σύστημα 57 πελάτες υπολογίζεται από την εργοδική πιθανότητα:

$$(9) \implies P_{57} = (1-\rho)\rho^{57} \tag{12}$$

Η πιθανότητα αυτή ακόμα για $\rho \to 1$ ή $\rho \to 0$ τείνει στο 0.

d

Δεν έχει σημασία ο αρχικός αριθμός των πελατών, δηλαδή οι αρχικές συνθήκες. Αυτό συμβαίνει, διότι στην κατάσταση ισορροπίας ισχύουν οι εξισώσεις ισορροπίας πιθανότητες δεδομένης της συνθήκης εργοδικότητας.

2 Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

a

Σύμφωνα και με το πρώτο μέρος, απαραίτητη συνθήκη για την εργοδικότητα είναι $\rho < 1$. Εφόσον οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 5\frac{\pi\epsilon\lambda\alpha\tau\epsilon\varsigma}{min}$, θα πρέπει:

$$\rho < 1 \implies \frac{\lambda}{\mu} < 1 \implies \mu > 5 \tag{13}$$

Εφόσον, από την εκφώνηση δίνεται ότι $\mu \in [0, 10]$ συμπεραίνουμε ότι:

$$\mu \in (5, 10] \tag{14}$$

b

Σημειώνεται ότι αντί να χρησιμοποιηθεί η εντολή `qsmm1`, μεταφέρθηκε η λειτουργία της στο `MATLAB`. Εκεί, παρήχθησαν τα ακόλουθα διαγράμματα για την ουρά M/M/1 για τους επιτρεπτούς ρυθμούς μ:

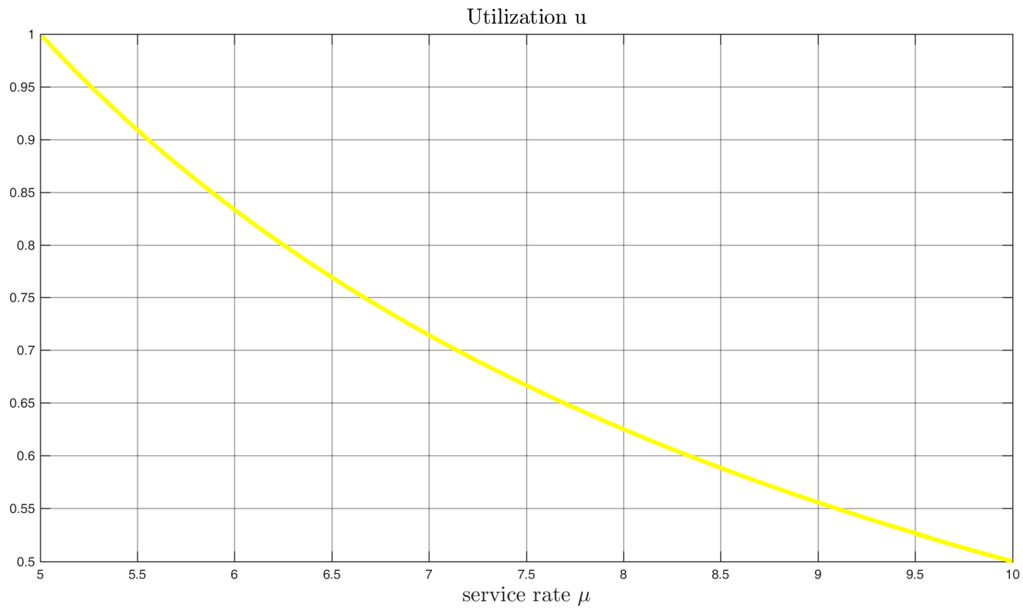


Figure 1: Βαθμός χρησιμοποίησης ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης μ

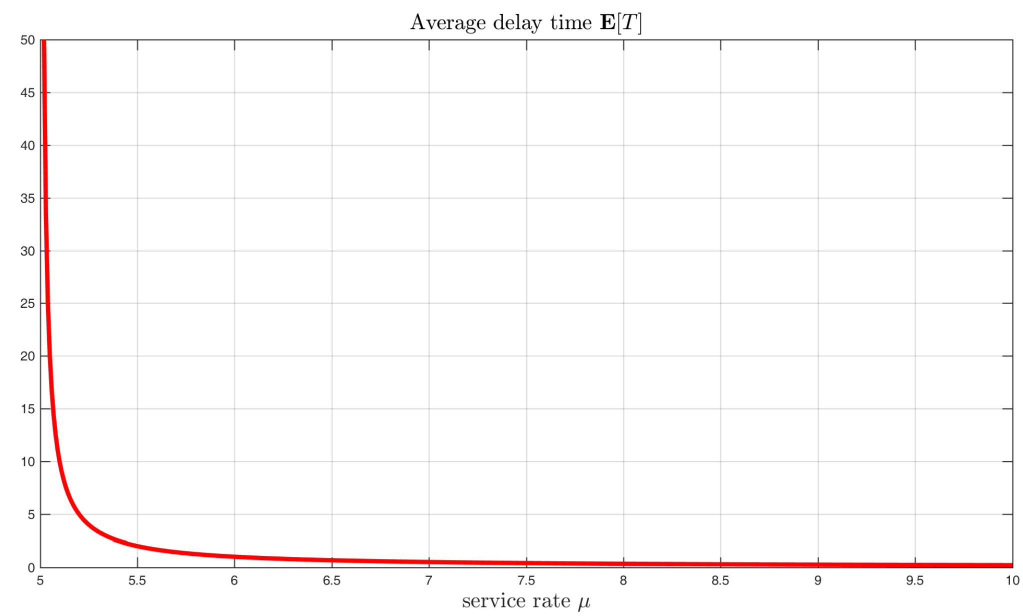


Figure 2: Μέσος χρόνος καθυστέρησης $E[T]$ ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης μ

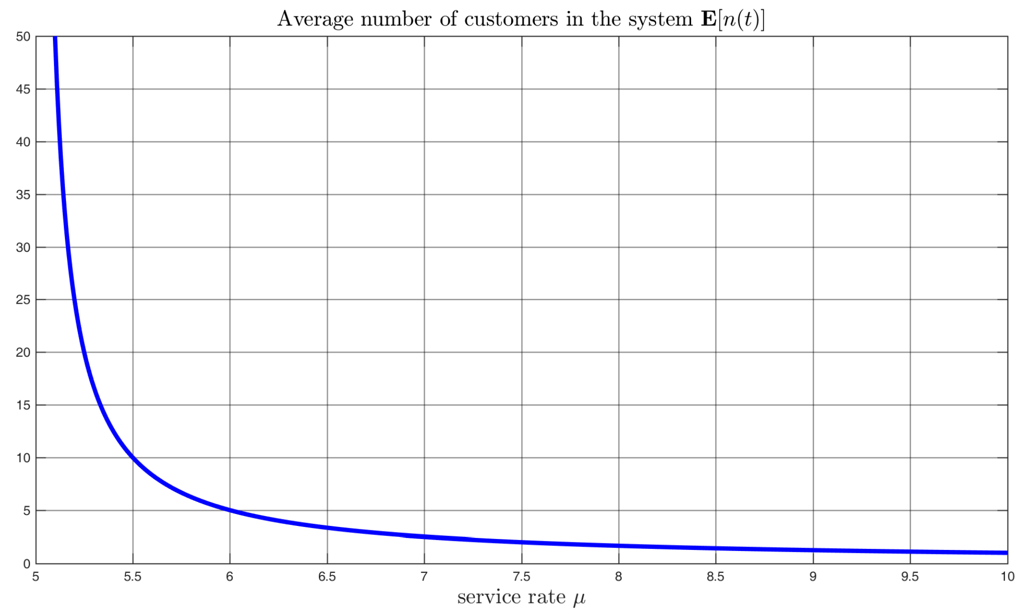


Figure 3: Μέσος αριθμός πελατών ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης μ

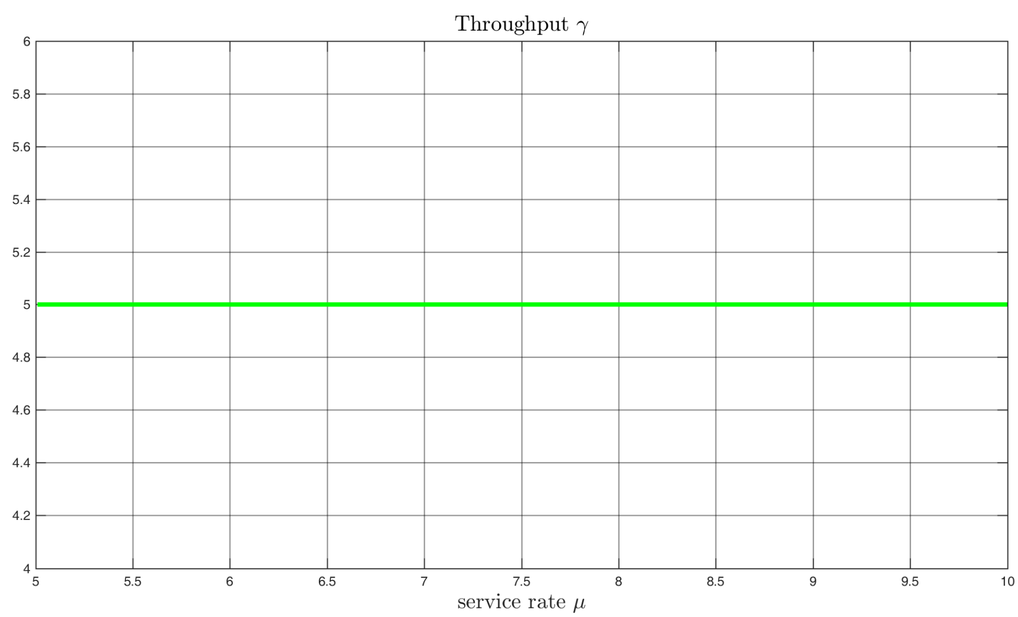


Figure 4: Ρυθμαπόδοση πελατών ως προς ρυθμό εξυπηρέτησης μ

c

Με βάση το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερο μ, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης μειώνεται. Επιλέγουμε, λοιπόν, το μέγιστο επιτρεπτό ρυθμό εξυπηρέτησης: $\mu = 10 \quad \frac{\pi\epsilon\lambda\alpha\tau\epsilon\varsigma}{min}$.

d

Παρατηρούμε ότι το throughput γ είναι ανεξάρτητο από το ρυθμό εξυπηρέτησης μ και ίσο με το ρυθμό άφιξης λ. Αυτό ισχύει στα εργοδικά συστήματα όπου $\Pr\{blocking\} = 0$.

3 Σύγκριση συστημάτων με δύο εξυπηρετητές

Έχουμε τις ακόλουθες δύο επιλογές:

3.1 ουρά M/M/2

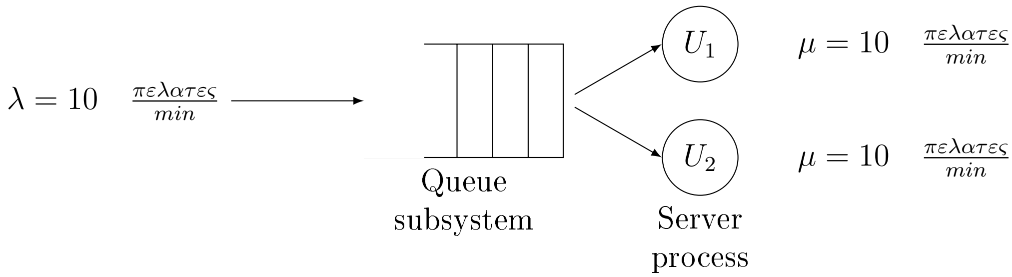


Figure 5: Ουρά αναμονής με δύο εξυπηρετητές

Με χρήση της συνάρτησης **qsmmm**, δημιουργήθηκε η ουρά M/M/2 που απεικονίζεται παραπάνω. Ο χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα κατά μέσο όρο είναι:

$$R_{M/M/2} = 0.1\overline{33} \quad min \tag{15}$$

3.2 2 παράλληλες ουρές M/M/1

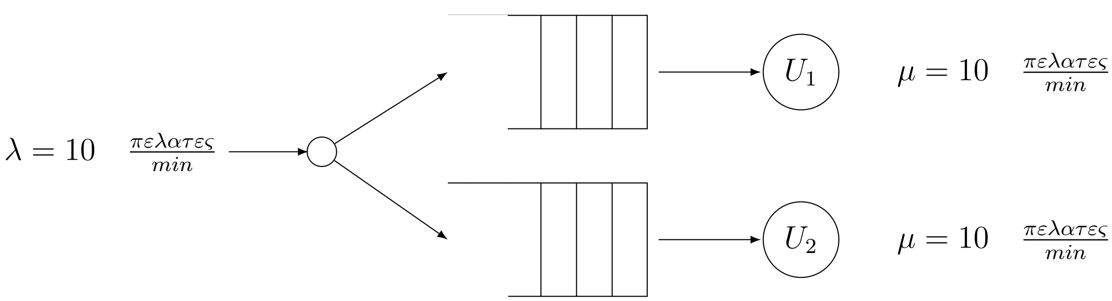


Figure 6: Ουρά αναμονής με δύο εξυπηρετητές

Με χρήση της συνάρτησης **qsmm1**, δημιουργήθηκαν οι ουρές M/M/1 που απεικονίζοντα παραπάνω. Ο χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα κατά μέσο όρο είναι:

$$R_{2\times M/M/1} = 0.2 \quad min \tag{16}$$

Συμπερασματικά, λοιπόν, το πρώτο σύστημα που αποτελείται από μία ουρά M/M/2 προσφέρει καλύτερη εξυπηρέτηση.

4 Διαδικασία γεννήσεων & θανάτων σε σύστημα M/M/1/K

Με τη βοήθεια του `OCTAVE` μοντελοποιήθηκε ένα σύστημα αναμονής M/M/1/4, δηλαδή με 1 εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 4 πελάτες. Οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με μεταβλητό μέσο ρυθμό λ_i που εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{(1+i)} \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \tag{17}$$

$$\mu = 5 \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \tag{18}$$

Επιπλέον, εφόσον τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα είναι άδειο έχουμε

$$P_0\{t=0\} = 1 \tag{19}$$

Τέλος, εφόσον το σύστημα είναι πεπερασμένης χωρητικότητας, συμπεραίνουμε ότι είναι εργοδικό, εφόσον δεν υπάρχει περίπτωση να προωθηθεί υπερβολικό φορτίο.

a

Για τους μεταβλητούς ρυθμούς αφίξεων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{\lambda}{(1+i)} \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \\
\implies \lambda_0 &= \frac{5}{1} = 5 \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \\
\implies \lambda_1 &= \frac{5}{2} = 2.5 \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \\
\implies \lambda_2 &= \frac{5}{3} = 1.\overline{66} \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \\
\implies \lambda_3 &= \frac{5}{4} = 1.25 \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min}
\end{aligned} \tag{20}$$

Επιπλέον,

$$\mu_i = \mu = 5 \quad {}^{\pi\varepsilon\lambda\alpha\tau\varepsilon\varsigma}/_{min} \qquad i = 0,1,2,3 \tag{21}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων είναι το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & P_1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & P_2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & P_3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda_3"] & P_4 \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω οπτικοποίηση του συστήματος και τις σχέσεις (19), (20), (21) προκύπτει ότι:

$$\lambda_0 P_0 = \mu P_1 \implies P_1 = 0.5P_0 \tag{22}$$

$$(\mu + \lambda_1)P_1 = \lambda_0 P_0 + \mu P_2 \implies P_2 = 0.125P_0 \tag{23}$$

$$(\mu + \lambda_2)P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu P_3 \implies P_3 = 0.0208P_0 \tag{24}$$

$$(\mu + \lambda_3)P_3 = \lambda_2 P_3 + \mu P_4 \implies P_4 = 0.0026P_0 \tag{25}$$

Επομένως,

$$(4) \longrightarrow P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \xrightarrow{(22),(23),(24),(25)} P_0 = 0.6066 \tag{26}$$

Αυτό σημαίνει ότι :

$$\underline{\underline{P_0 = 0.6066}}$$
$$\underline{\underline{P_1 = 0.3033}}$$
$$\underline{\underline{P_2 = 0.0758}}$$
$$\underline{\underline{P_3 = 0.0126}}$$
$$\underline{\underline{P_4 = 0.0016}}$$

Η πιθανότητα απώλειας πελάτη ισούται με $P_{blocking} = P_4 = 0.0016$, καθώς τότε το σύστημα δεν μπορεί να δεχθεί άλλον πελάτη.

b

i

Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ Q, όπου n το πλήθος των καταστάσεων. Το στοιχείο q_{ij} αναφέρεται στο ρυθμό μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j. Τα στοιχεία της διαγωνίου αντιστοιχούν στο συνολικό ρυθμό εξόδου από την εν λόγω κατάσταση και είναι αρνητικά. Με τη βοήθεια της εντολή `ctmcbd` λαμβάνουμε την ακόλουθη μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -11.\overline{66} & 1.\overline{66} & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -11.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} \tag{27}$$

ii

Χρησιμοποιήθηκε η εντολή `ctmc`. Προέκυψαν οι ακόλουθες εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6066351 \\ 0.3033175 \\ 0.0758294 \\ 0.0126382 \\ 0.0015798 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα αποτελέσματα ταυτίζονται.

iii

Η μέση τιμή του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι

$$\sum_{k=0}^{4} kP_k = 0.49921 \tag{29}$$

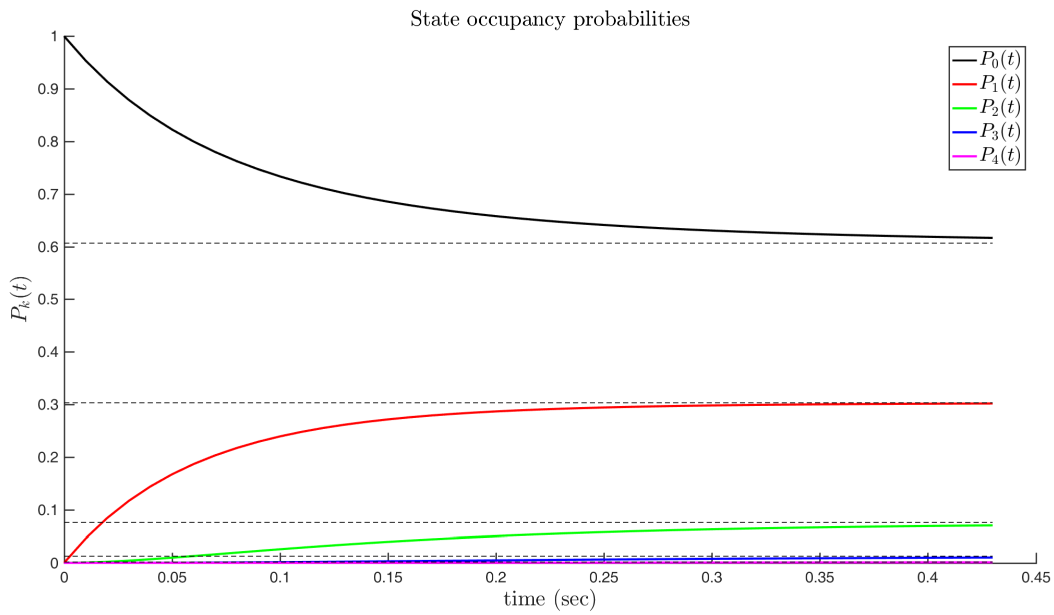
iv

Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability) από το σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας είναι ίση με

$$P_{blocking} = P_4 = 0.0016 \tag{30}$$

v

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ουρά είναι αρχικά άδεια. Το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες παρουσιάζεται παρακάτω:



vi

λ=5, μ=1

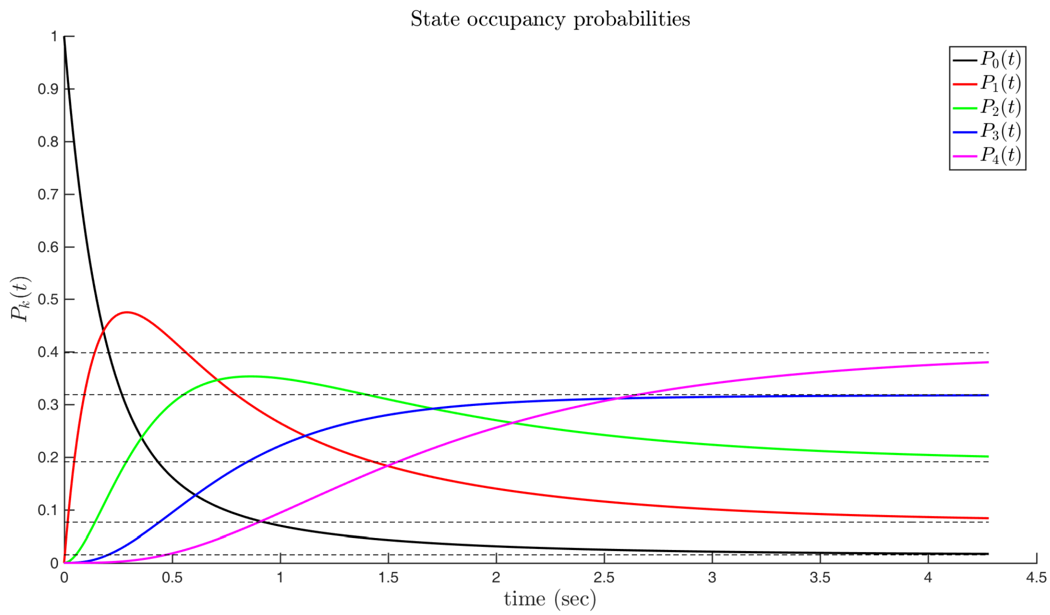
Λαμβάνουμε την ακόλουθη μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.66 & 1.66 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Οι νέες εγοδικές πιθανότητες είναι:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015296 \\ 0.076482 \\ 0.191205 \\ 0.318674 \\ 0.398343 \end{bmatrix} \tag{32}$$

και το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος


State occupancy probabilities
$P_0(t)$
$P_1(t)$
$P_2(t)$
$P_3(t)$
$P_4(t)$
$P_k(t)$
time (sec)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0.5
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

λ=5, μ=5

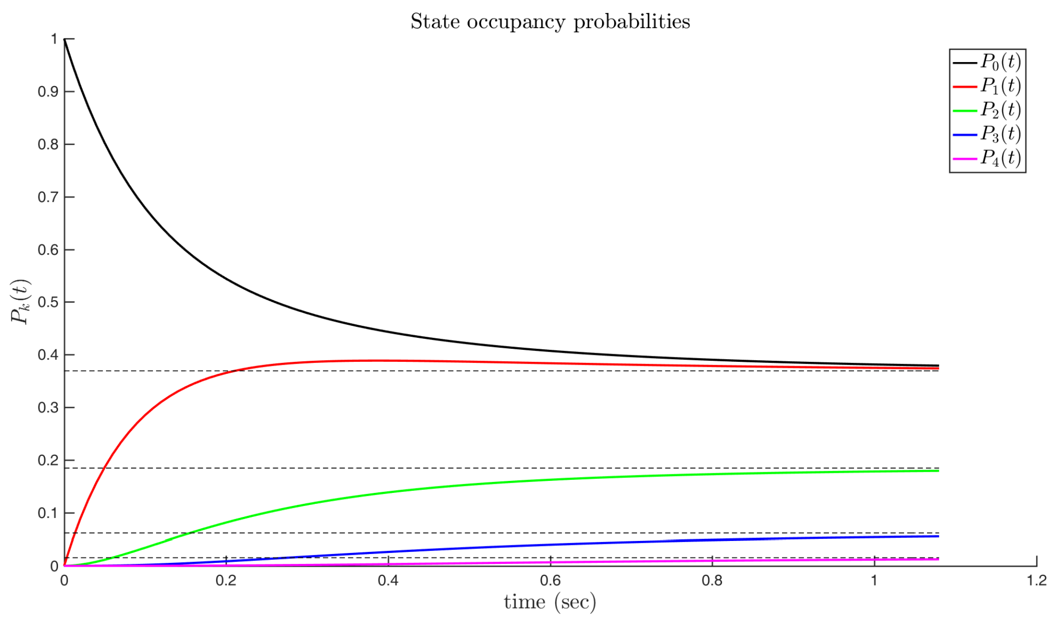
Λαμβάνουμε την ακόλουθη μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -7.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6.66 & 1.66 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Οι νέες εγοδικές πιθανότητες είναι:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.369231 \\ 0.369231 \\ 0.184615 \\ 0.061538 \\ 0.015385 \end{bmatrix} \tag{34}$$

και το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος



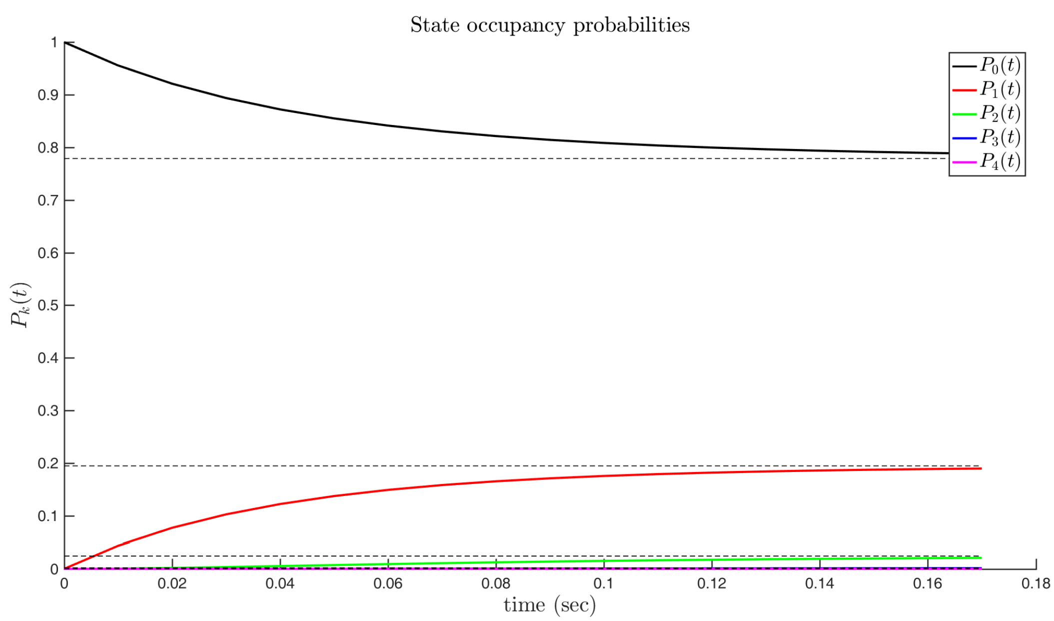
λ=5, μ=20

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -22.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -21.66 & 1.66 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -21.25 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Οι νέες εγοδικές πιθανότητες είναι:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.77881 \\ 0.1947 \\ 0.024338 \\ 0.0020281 \\ 0.0001267 \end{bmatrix} \tag{36}$$

και το κοινό διάγραμμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος



Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω αποτελέσματα, είναι εμφανές αυτό που εμπειρικά γνωρίζουμε. Πιο συγκεκριμένα:

- $\lambda >> \mu$:
  οι πιο πιθανές καταστάσεις είναι αυτές που το σύστημα είναι γεμάτο/ σχεδόν γεμάτο. Πιο συγκεκριμένα, για $\lambda = 5, \mu = 1$, η κατάσταση P_4 έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα.

Αυτό συνεπάγεται, ότι σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα απόρριψης ενός πελάτη είναι μεγάλη. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με $P_4 = P_{blocking} = 0.398343$. Επιπλέον, ο χρόνος αποκατάστασης για την εργοδική κατάσταση αυξάνεται και, επομένως,μειώνεται η ταχύτητα σύγκλισης. Αυτό συμβαίνει διότι η αρχική κατάσταση βρίσκει την ουρά άδεια, ενώ η πιο πιθανή τελική τη βρίσκει γεμάτη.

- $\lambda << \mu$:
  παρατηρείται το αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα, εφόσον ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι πολύ μεγαλύτερος από το ρυθμό άφιξης το σύστημα έχει πολύ μικρή πιθανότητα να γεμίσει και, επομένως, να απορρίψει πελάτη. Αυτό φανερώνει το γεγονός ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων P_0 και P_1 αθροίζονται άνω του 95%. Με άλλα λόγια, στη μόνιμη κατάσταση ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα και εξυπηρετείται πριν έλθει άλλος. Τέλος, ο χρόνος αποκατάστασης μειώνεται δραματικά.
- $\lambda \simeq \mu$:
  παρατηρείται μία μέση κατάσταση σε σχέση με τα παραπάνω.

Listing 1: computation part 2 – OCTAVE

```
% system M/M/1/4
% when there are 3 clients in the system, the capability of the server
   doubles.

clc;
clear all;
close all;

%% part_1 A
lambda = 4;
mu = 5;
states = [0,1,2,3,4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1,0,0,0,0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda,lambda,lambda,lambda];
deaths_D = [mu,mu,2*mu,2*mu];

% get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);

% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(1);
bar(states,P,'r',0.5);

% transient probability of state 0 until convergence to ergodic probability.
   Convergence takes place P0 and P differ by 0.01
index = 0;
for T=0:0.01:50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  if P0-P < 0.01
    break;
  end
end

T = 0:0.01:T;
figure(2);
plot(T,Prob0,'r','linewidth',1.3);
```

Listing 2: Plot part 2 – MATLAB

```
%% Part 2 : M/M/1 queue plots
clc; close all; clear all;
% plot specifications
fontsize = 12;
lineWidth = 1;
plotLineWidth = 4;
width=1920;
height=1080;

lambda = 5;         % average arrival rate (customers/min)
mu = 5.01:0.01:10;  % average service rate (customers/min)
rho = lambda./mu;   % service utilization (Erlang) [ergodic system => rho <1]

U = lambda./mu;     % System utilization
Q = rho./(1-rho);   % average number of customers
R = 1./(mu.*(1-rho));       % average time delay (Little's Law)
X(1:length(rho)) = lambda;  % Throughput of ergodic system is always lambda (
   no blocking)
p0 = 1-rho;
%% figure 1
fig1 = figure(1);
fig1.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
plot1 = plot(mu,U,'Color','y','LineWidth',plotLineWidth);
temp = gca;
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.Color = 'w';
temp.GridColor = 'k';
temp.GridAlpha = 0.4;
temp.FontSize = fontsize;
xlabel(['service rate $\mu$'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
title(['Utilization u'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf,'figure1.png');
%% figure 2
fig2 = figure(2);
fig2.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
plot2 = plot(mu,R,'Color','r','LineWidth',plotLineWidth);
temp = gca;
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.Color = 'w';
temp.GridColor = 'k';
```

```
temp.FontSize = fontsize;
ylim([0 50]);
xlabel(['service rate $\mu$'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
title(['Average delay time $\mathbf{E}[T]$'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf,'figure2.png');
%% figure 3
fig3 = figure(3);
fig3.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
plot3 = plot(mu,Q,'Color','b','LineWidth',plotLineWidth);

temp = gca;

temp.Color = 'w';
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.GridColor = 'k';
temp.GridAlpha = 0.5;
temp.FontSize = fontsize;

ylim([0 50]);

xlabel(['service rate $\mu$'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
title(['Average number of customers in the system $\mathbf{E}[n(t)]$'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf,'figure3.png');
%% figure 4
fig4 = figure(4);
fig4.Color = 'w';
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;
plot4 = plot(mu,X,'Color','g','LineWidth',plotLineWidth);

temp = gca;

temp.Color = 'w';
temp.LineWidth = lineWidth;
temp.GridColor = 'k';
temp.GridAlpha = 0.5;
temp.FontSize = fontsize;

xlabel(['service rate $\mu$'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
title(['Throughput $\gamma$'],'FontSize',20, 'Interpreter','latex');

```

```
grid on;
saveas(gcf,'figure4.png');
```

Listing 3: computation part 3 – OCTAVE

```
%% Part3
clear all;
close all;
clc;

lambdaServer = 10;
muServer = 10;
servers= 2;
lambdaQueue = 5;
muQueue = 10;

[~,R1,~,~,~,~] = qsmmm(lambdaServer,muServer,servers);

[~,R2,~,~,~] = qsmm1(lambdaQueue,muQueue);

display("The average delay time E[T] using 2 servers is :");
display(R1);

display("The average delay time E[T] using 2 queues is :");
display(R2);
```

Listing 4: computation part 4 – OCTAVE

```
%% Part 4 : Birth—Death Process in M/M/1/4 system
clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
mu = 10;

states = [0,1,2,3,4];            % system with capacity 4 states
initial_state = [1,0,0,0,0];     % the initial state of the system. The system
    is initially empty.

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda,lambda/2,lambda/3,lambda/4];
deaths_D = [mu,mu,mu,mu];

% get the transition matrix of the birth—death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B,deaths_D);
```

```

display("The transition matrix of the birth—death process is :");
display(transition_matrix);

% get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);

display("The ergodic probalities of the system are :");
display(P);

%the average number of customers in the system is

mean_customers = 0;

for i = 1 : (length(states)—1)
  mean_customers = mean_customers + i*P(i+1);
endfor

display("The average number of customers in the system is :");
display(mean_customers);

% transient probabilities of all states until convergence to ergodic
    probabilities. Convergence takes place when P0 and P differ by 0.01

index = 0;
for T=0:0.01:50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix,T,initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index) = P0(2);
  Prob2(index) = P0(3);
  Prob3(index) = P0(4);
  Prob4(index) = P0(5);
  if P0—P < 0.01
    break;
  endif
endfor
```

Listing 5: Plot part 4 – MATLAB

```
%% Part 4 : Birth—Death Process in M/M/1/4 system
clear all;
close all;
clc;

```

```
fontsize = 12;
lineWidth = 1;
plotLineWidth = 2;
width=1920;
height=1080;

%%%%%%%%%%%%%%%%%
Q = [ ];        %
P = [ ];        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%
initial_state = [1 0 0 0 0]; % initial state: empty system


index = 0;

for t=0:0.01:50
  index = index + 1;
  temp = initial_state*expm(Q*t);
  for j=1:5
     Prob(index, j) = temp(j);
  end
  if (temp-P) < 0.01
    break;
  end
end

P0(1:index) = P(1);
P1(1:index) = P(2);
P2(1:index) = P(3);
P3(1:index) = P(4);
P4(1:index) = P(5);

T = 0:0.01:t;

fig1 = figure(1);
fig1.Color = 'w';

hold on;



plot1 = plot(T,Prob(:,1),'Color','k','LineWidth',plotLineWidth);
plot1 = plot(T,Prob(:,2),'Color','r','LineWidth',plotLineWidth);
plot1 = plot(T,Prob(:,3),'Color','g','LineWidth',plotLineWidth);
plot1 = plot(T,Prob(:,4),'Color','b','LineWidth',plotLineWidth);
```

```
plot1 = plot(T,Prob(:,5),'Color','m','LineWidth',plotLineWidth);
plot1 = plot(T,P0,'--k','LineWidth',0.8);
plot1 = plot(T,P1,'--k','LineWidth',0.8);
plot1 = plot(T,P2,'--k','LineWidth',0.8);
plot1 = plot(T,P3,'--k','LineWidth',0.8);
plot1 = plot(T,P4,'--k','LineWidth',0.8);

ax = gca;

ax.Color = 'w';
ax.LineWidth = 1.2;
ax.GridColor = 'k';
ax.GridAlpha = 0.5;
ax.FontSize = 14;

% yticks([]); %insert y axis values here!!!

xlabel(['time (sec)'],'FontSize',20, 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$P_{k}(t)$','FontSize',20,'Interpreter', 'latex');
title('State occupancy probabilities','FontSize',20,'Interpreter', 'latex');

leg = legend('$P_{0}(t)$','$P_{1}(t)$','$P_{2}(t)$','$P_{3}(t)$','$P_{4}(t)$');
leg.FontSize = 18;
set(leg, 'Interpreter', 'latex');
set(gcf,'units','pixels','position',[0,0,width,height]) ;

hold off;
grid off;
saveas(gcf,'figure5.png');
```