



## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

---

### Εργασία Προσομοίωσης 2018

Ουρά M/M/2/8 με Κατώφλι και Τυχαία Ενεργοποίηση

---

Νικόλαος Δημητριάδης

03114016

HMMΥ 8ο

nikosdimitriadis@yahoo.com

Σημειώνεται ότι ο κώδικας της προσομοίωσης υλοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB.

## 1 Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων είναι:

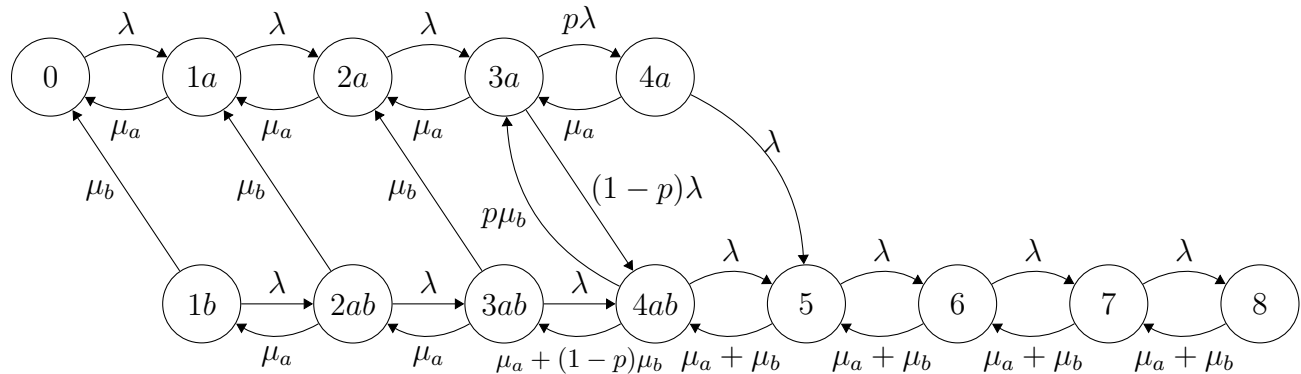


Figure 1: Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων συστήματος για  $k = 3$

## 2 Ερωτήματα

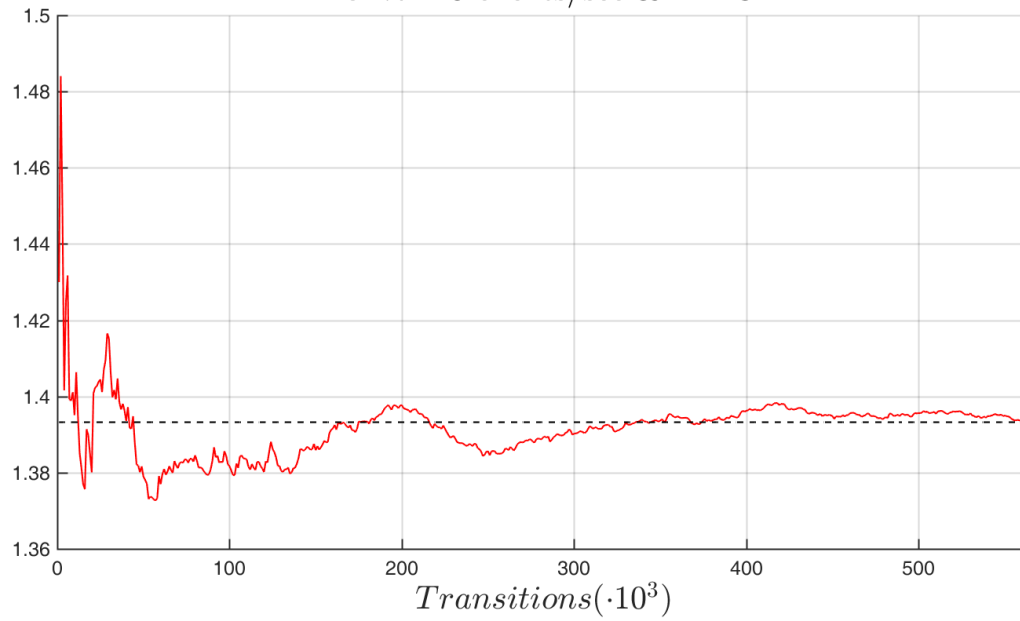
### 2.1 ερώτημα (1)

Ως κριτήριο σύγκλισης επιλέγεται η διαφορά τιμών δύο διαδοχικών μετρήσεων του μέσου αριθμού πελατών να είναι μικρότερη από  $\epsilon = 10000000$ .

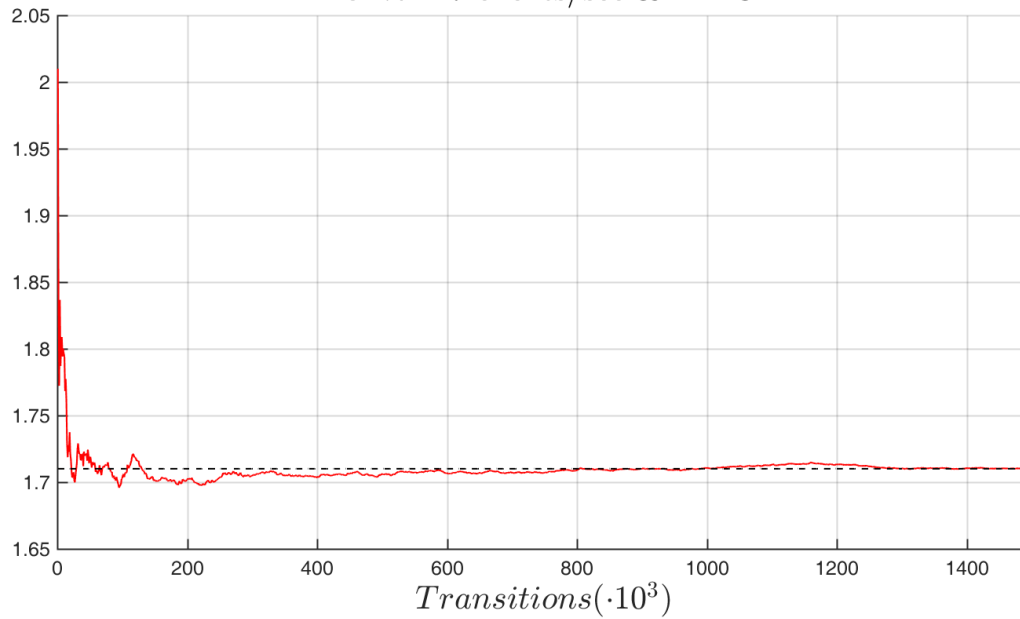
Προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα:

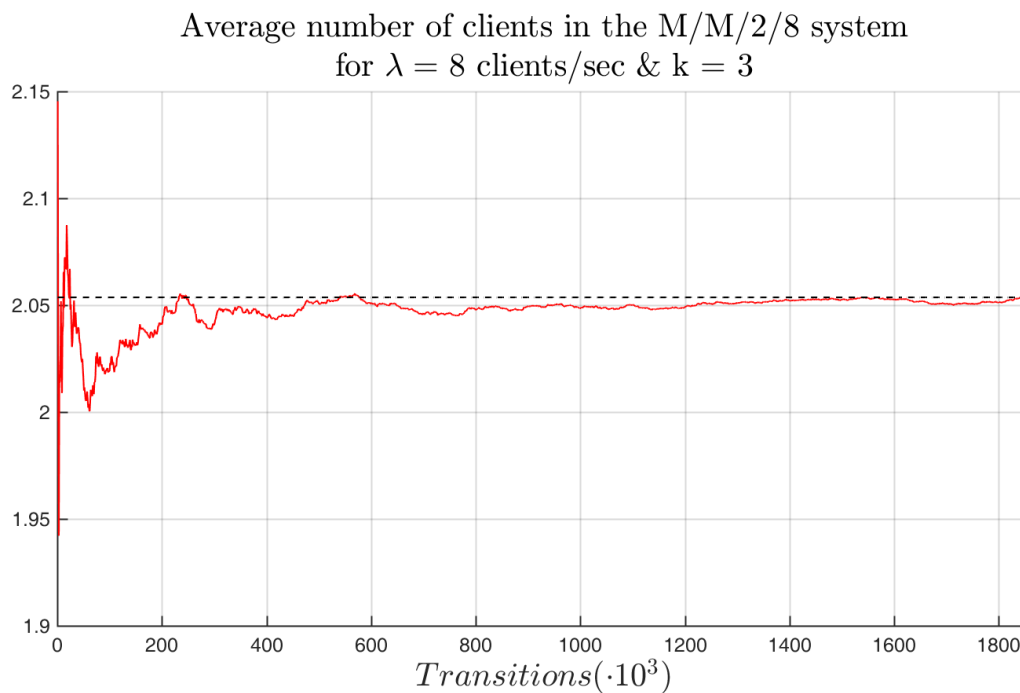
**2.1.1**  $k = 3$ 

Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 6$  clients/sec &  $k = 3$

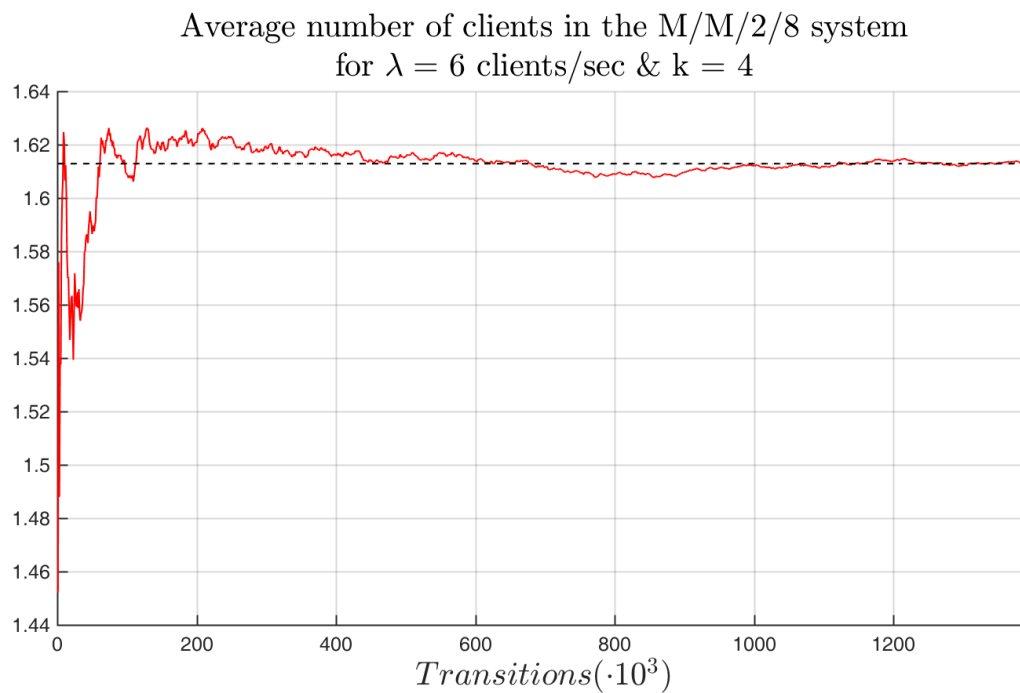


Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 7$  clients/sec &  $k = 3$

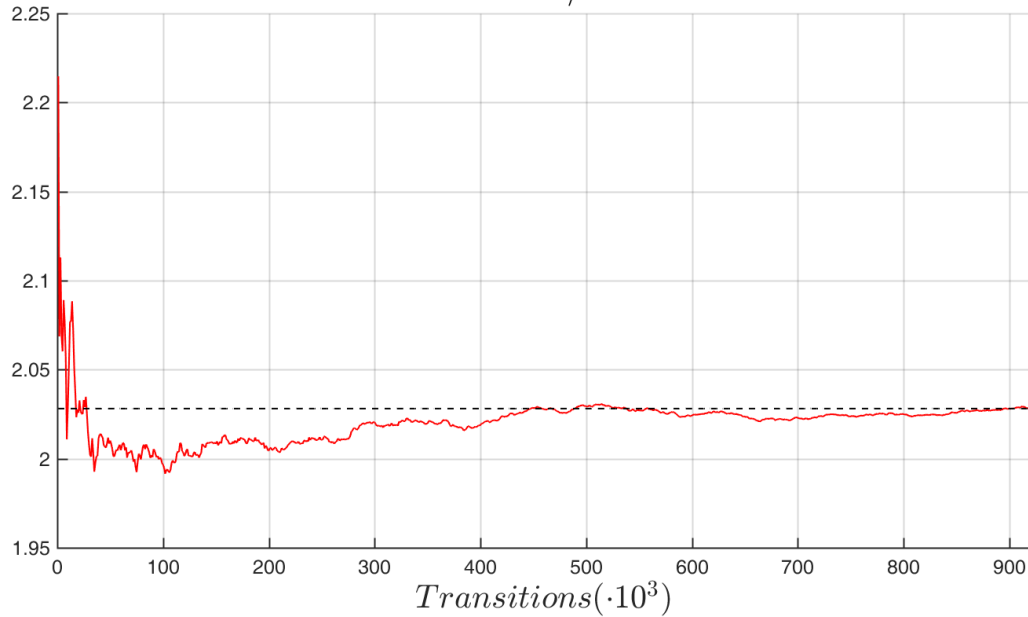




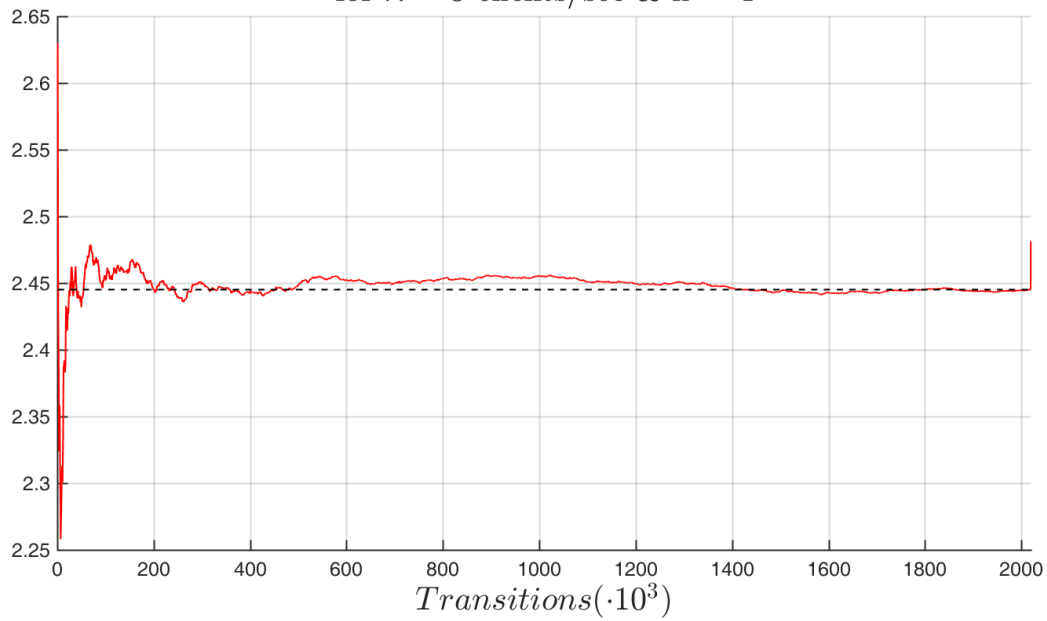
### 2.1.2 $k = 4$



Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 7$  clients/sec &  $k = 4$

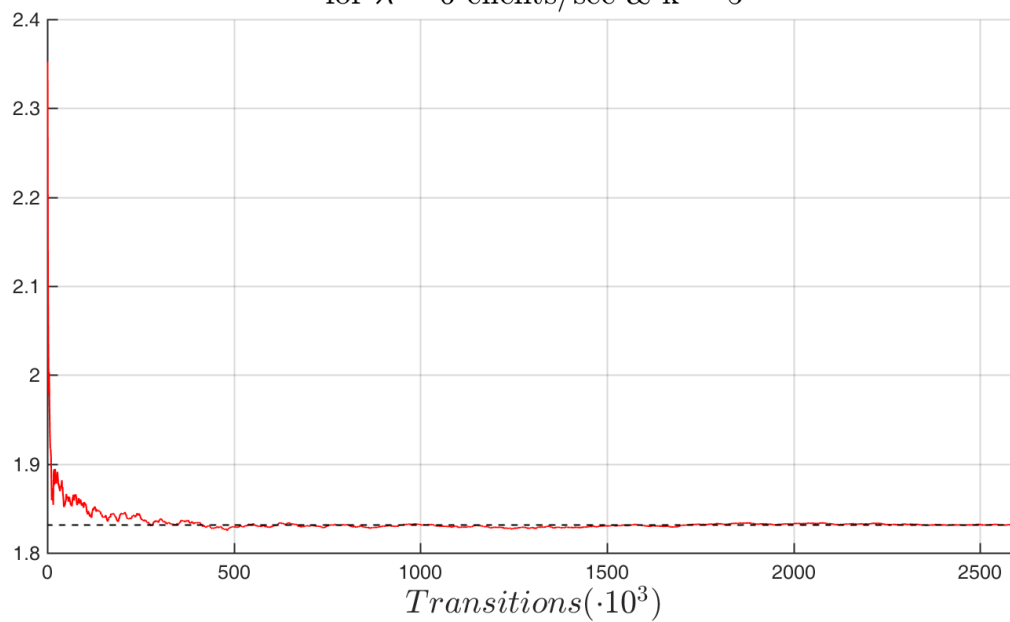


Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 8$  clients/sec &  $k = 4$

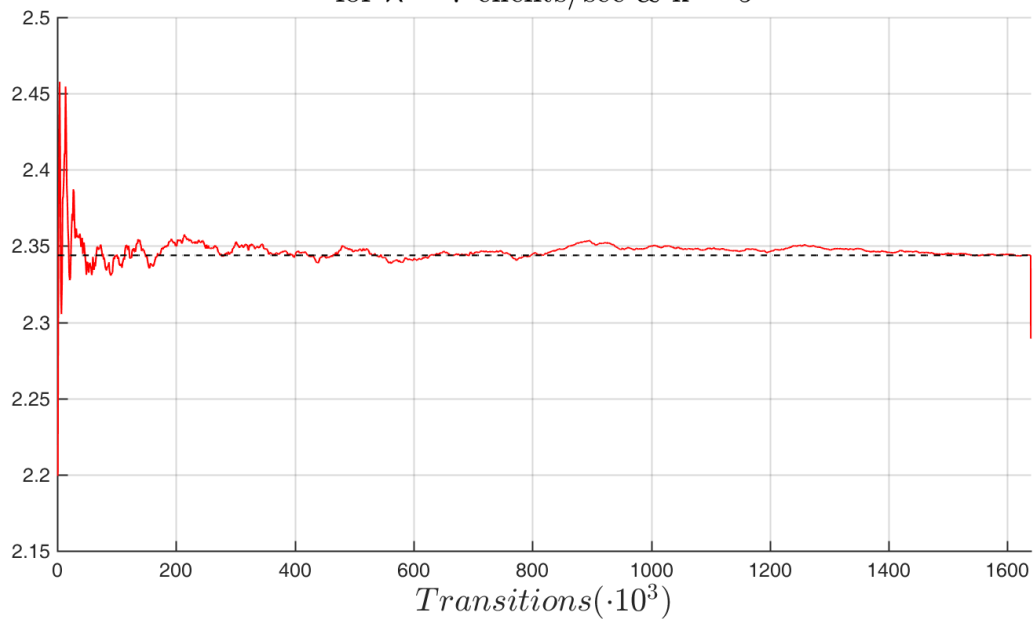


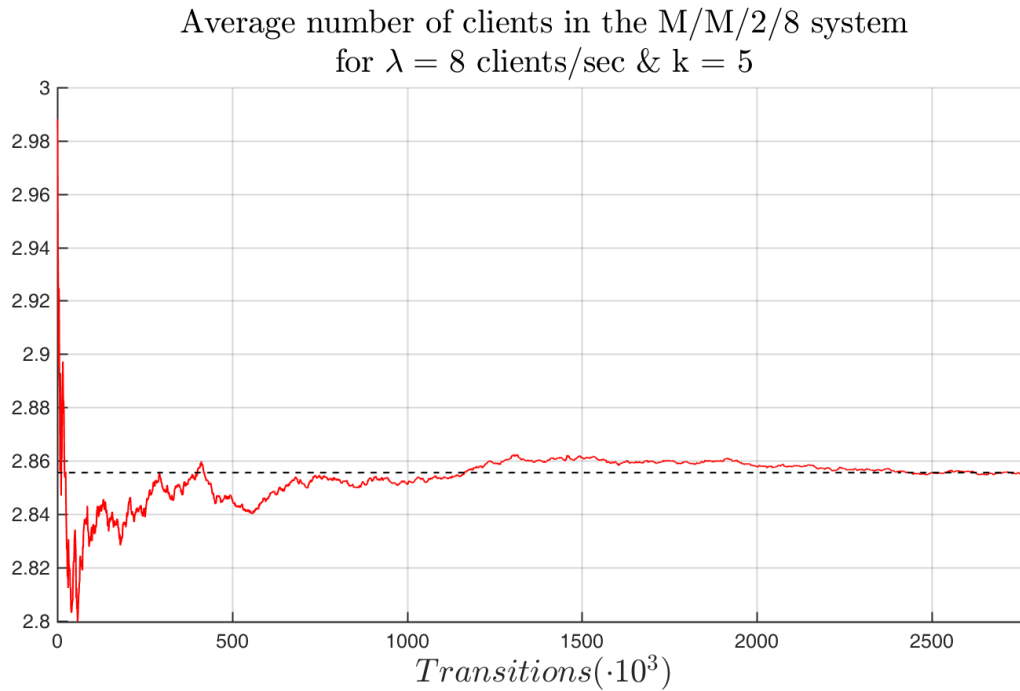
**2.1.3**  $k = 5$ 

Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 6$  clients/sec &  $k = 5$

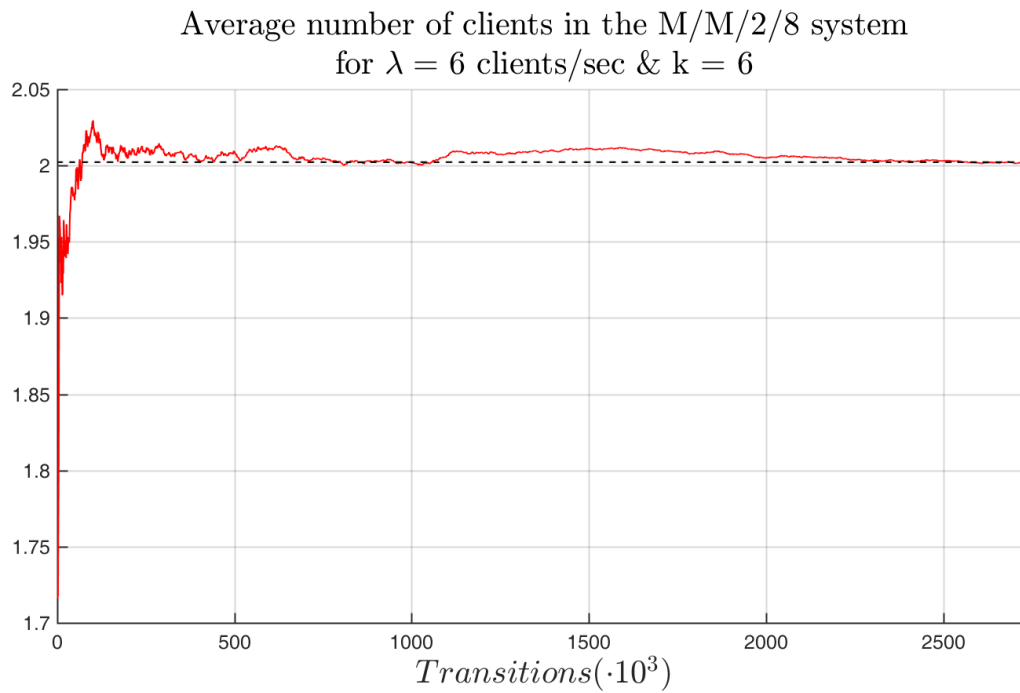


Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 7$  clients/sec &  $k = 5$

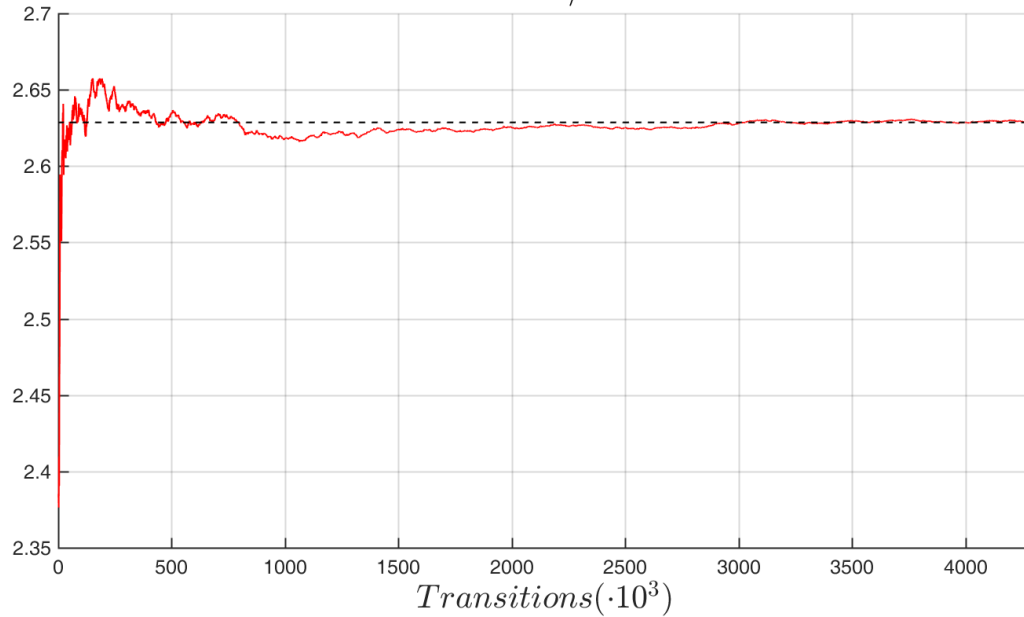




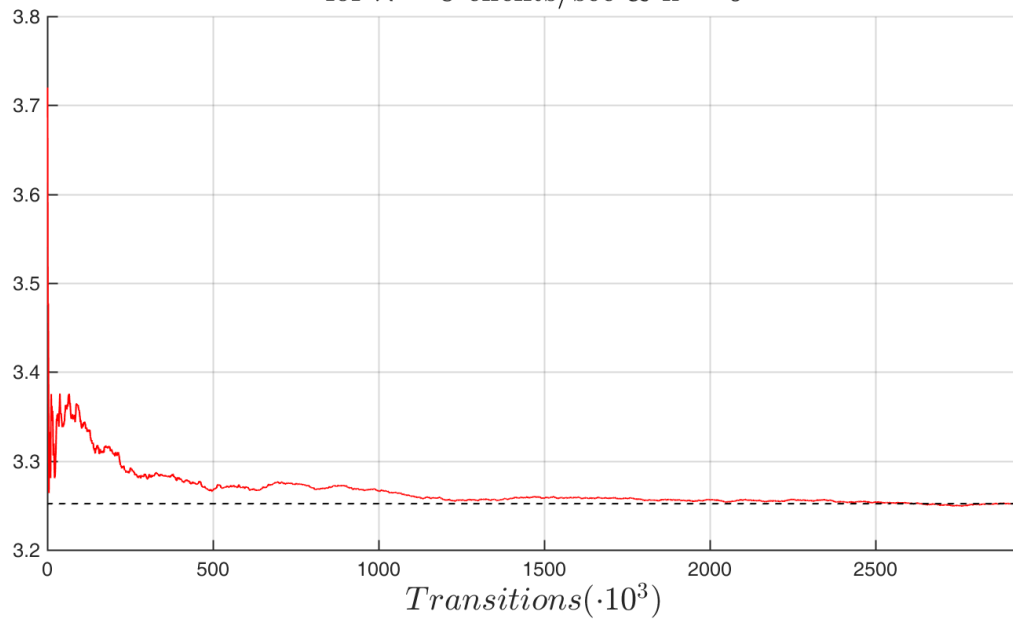
#### 2.1.4 $k = 6$



Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 7$  clients/sec &  $k = 6$



Average number of clients in the M/M/2/8 system  
for  $\lambda = 8$  clients/sec &  $k = 6$



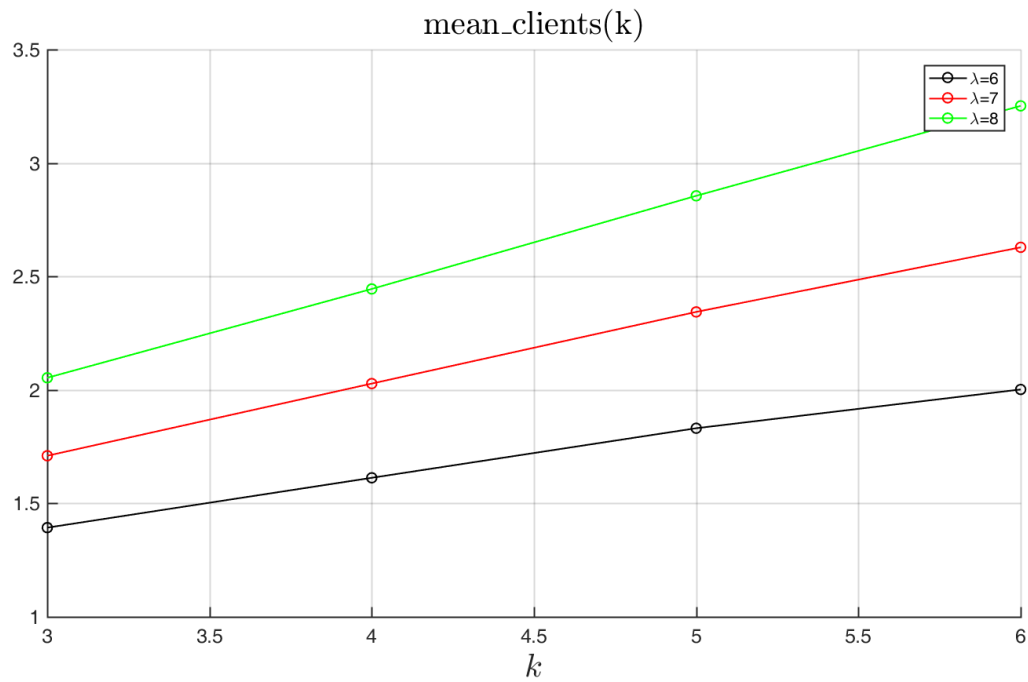


## 2.2 ερώτημα (2)

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι για:

$\lambda \backslash k$	3	4	5	6
6	1.3858	1.6244	1.8360	2.0040
7	1.7189	2.0316	2.3392	2.6414
8	2.0438	2.4472	2.8590	3.2500

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα συναρτήσει του  $k$  παρουσιάζεται παρακάτω για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$ :



## 2.3 ερώτημα (3)

Ζητείται ο προσδιορισμός της ελάχιστης τιμής του κατωφλίου  $\kappa$  ώστε ο λόγος των ρυθμών απόδοσης  $\gamma_a, \gamma_b$  είναι μεγαλύτερος από 5:

$$f = \frac{\gamma_a}{\gamma_b} > 5 \quad (1)$$

Για τις διάφορες τιμές του ρυθμού αφίξεων  $\lambda$  προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα για  $p = 0.5$ :

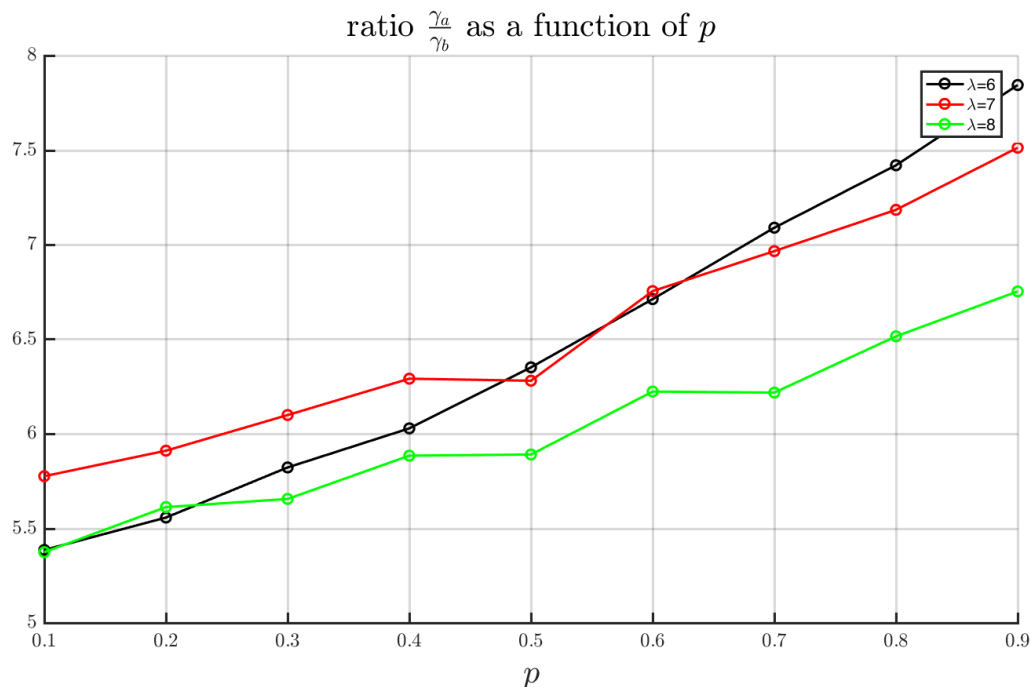
$\lambda \backslash k$	3	4	5	6
6	<b>6.3263</b>	9.942	14.8347	22.9243
7	4.5688	<b>6.3908</b>	8.9019	12.4824
8	3.4551	4.6316	<b>5.9034</b>	7.8772

Table 1: λόγος ρυθμών απόδοσης  $\frac{\gamma_a}{\gamma_b}$

Με **bold** σημειώνονται οι ελάχιστες τιμές για τις οποίες ο λόγος είναι μεγαλύτερος του 5. Αναλυτικότερα:

- $\lambda = 6 \rightarrow k = 3$
- $\lambda = 7 \rightarrow k = 4$
- $\lambda = 8 \rightarrow k = 5$

Για τους εν λόγω συνδυασμούς  $\lambda$  και  $k$  μελετάται η συμπεριφορά του λόγου ρυθμών απόδοσης  $\frac{\gamma_a}{\gamma_b}$  συναρτήσει της πιθανότητας δρομολόγησης  $p$ .

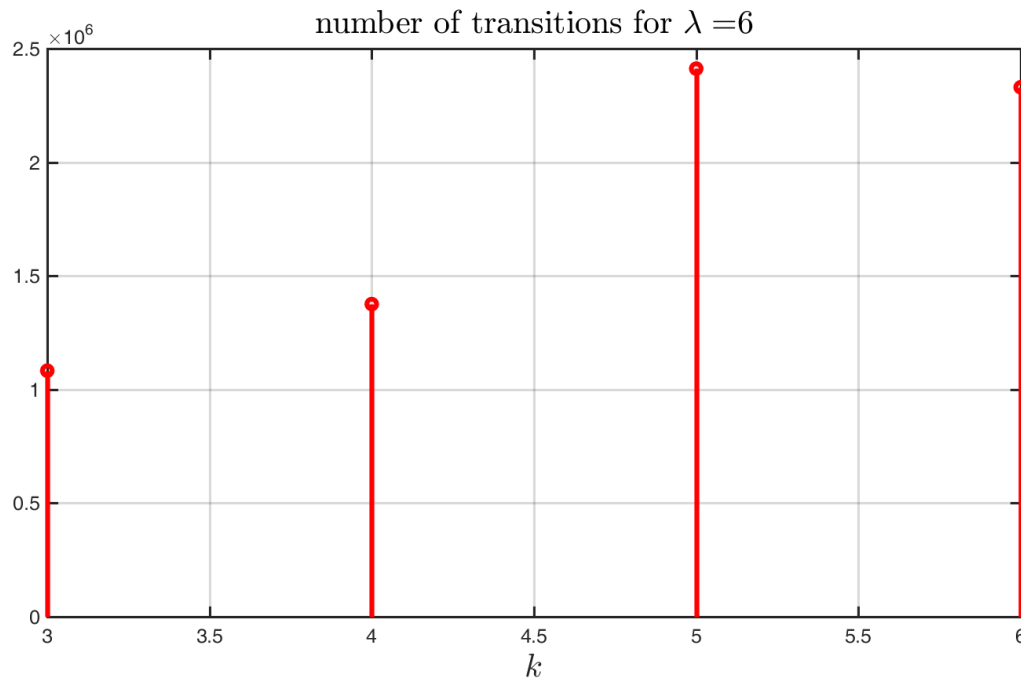


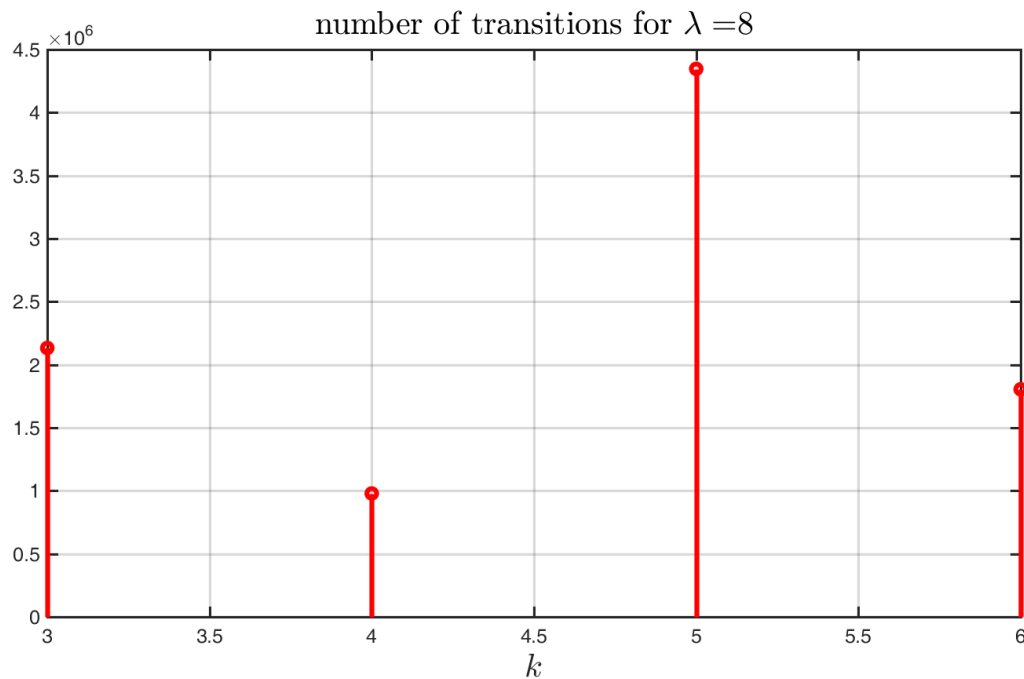
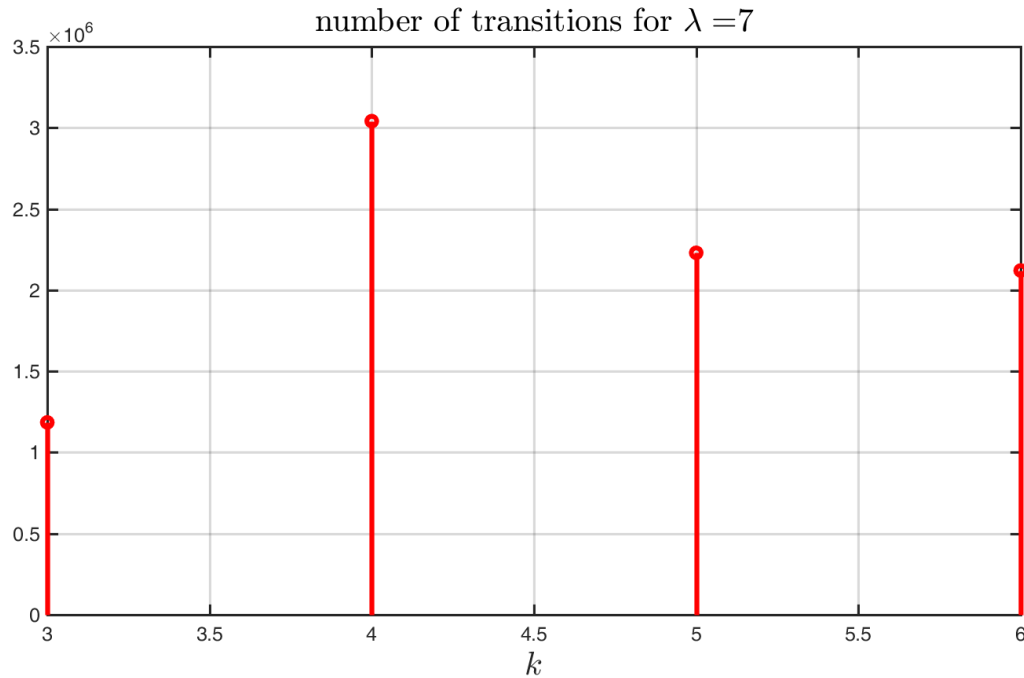
Σύμφωνα με την παραπάνω γραφική παράσταση, συμπεραίνουμε ότι η αύξηση της πιθανότητας δρομολόγησης  $p$  οδηγεί στην αύξηση του λόγου. Αυτό συμβαίνει, διότι η πιθανότητα  $p$  καθορίζει με ποια πιθανότητα θα ενεργοποιηθεί ο εξυπηρετητής  $b$ . Πιο συγκεκριμένα με πιθανότητα  $1 - p$  ενεργοποιείται ο εξυπηρετητής  $b$  και, κατά συνέπεια, αυξάνεται η ρυθμιαπόδοσή του, μειώνοντας το λόγο. Αυτό σημαίνει ότι για μικρές τιμές της πιθανότητας δρομολόγησης  $p$ , η πιθανότητα να μείνει ανενεργός ο εξυπηρετητής  $b$  είναι μικρή και ο λόγος μειώνεται. Αντίστροφα αν λάβει μεγάλες τιμές.

Τέλος, παρατηρούμε ότι για μικρότερο ρυθμό εισόδου  $\lambda$  ο λόγος ρυθμών απόδοσης  $\frac{\gamma_a}{\gamma_b}$  επηρεάζεται σε μεγαλύτερο βαθμό από την επιλογή της πιθανότητας δρομολόγησης  $p$ . Παρουσιάζει, δηλαδή, μεγαλύτερη διασπορά στις μετρήσεις. Αυτό είναι λογικό, αν αναλογιστεί κανείς ότι όσο το  $\lambda$  αυξάνεται, μεταβαίνουμε στις καταστάσεις μεγαλύτερου πληθυσμού εντός του συστήματος με μεγαλύτερη πιθανότητα, στις οποίες ο εξυπηρετητής  $b$  έχει ενεργοποιηθεί.

## 2.4 ερώτημα (4)

Για κριτήριο ταχύτητας σύγκλισης θα χρησιμοποιήσουμε το μέγιστο πλήθος μεταβάσεων που απαιτούνται για να επιτευχθεί η σύγκλιση. Για τις διάφορες τιμές του ρυθμού αφίξεων  $\lambda$  προκύπτουν τα ακόλουθα διαγράμματα:





#### Σχολιασμός αποτελεσμάτων:

- ταχύτητα σύγκλισης

Από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι δεν είναι δυνατή η συσχέτιση των παραμέτρων με την ταχύτητα σύγκλισης. Αυτό συμβαίνει, διότι, αφενός, η ταχύτητα σύγκλισης βασίζεται στη συνάρτηση `rand` και, αφετέρου, για όλα τα  $\lambda$  οι εργοδικές πιθανότητες είναι διαμοιρασμένες (όχι ομοιόμορφα) στις διάφορες καταστάσεις με αποτέλεσμα να μην υπ-

άρχει προκαθορισμένη συμπεριφορά του συστήματος.

- απόδοση συστήματος συναρτήσει του  $k$   
Θεωρούμε ότι η απόδοση του συστήματος είναι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, στοχεύουμε στη μείωση του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα, καθώς αυτό συνεπάγεται ότι λιγότεροι πελάτες αναμένουν στην ουρά. Από τα παραπάνω αποτελέσματα (γραφικές παραστάσεις ερωτήματος 2), παρατηρούμε ότι η αύξηση του των παραμέτρων  $\lambda$  και  $k$  οδηγεί στην αύξηση των πελατών στο σύστημα και, κατά συνέπεια, σε μείωση της απόδοσης του συστήματος.

### 3 Appendix

Σημειώνεται ότι ο κώδικας της προσομοίωσης υλοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB.

Listing 1: runSINGLE.m: Αυτό το script χρησιμοποιείται σε όλα τα ερωτήματα. Εκτελεί την προσομοίωση για δεδομένα  $\lambda$  και  $k$

```
1 % clc;
2 % clear all;
3 % close all;
4
5 % k = 3;
6 % lambda = 6;
7 % p = 0.5;
8
9 % EXPLANATION
10 % states 1–9 of MATLAB code correspond to states
11 % 0,1a,2a,...,8 of the transition rate diagram.
12 % The other (k+2) states of the diagram correspond
13 % to the states 10–(10+k+1) states of MATLAB code
14
15 % In deciding the next state of the simulation, we check
16 % $$IN THE ORDER of the states in MATLAB CODE
17 % described above$$ the current state!!
18
19 clear arrivals P
20 P = zeros(9+k+1,1);
21 arrivals = zeros(9+k+1,1);
22 total_arrivals = 0;           % to measure the total number of arrivals
23 state = 1;                   % holds the current state of the system
24 previous_mean_clients = 0;    % will help in the convergence test
25 index = 0;
26 convergence_criterion = 0.0000001 ;
27 mu_a = 8;
28 mu_b = 8;
29
30 flag = true;
31 transitions = 0; % holds the transitions of the simulation in transitions
    steps
32
33 while (flag)
34
35     transitions = transitions + 1; % one more transitions step
```

```
36
37     if mod(transitions,1000) == 0 % check for convergence every 1000
38         transitions steps
39         index = index + 1;
40         P = arrivals/total_arrivals;
41         mean_clients = 0; % calculate the mean number of clients in the
42             system
43         for i = 1 : 9
44             mean_clients = mean_clients + (i-1)*P(i);
45         end
46         for i = 10 : (10+k)
47             mean_clients = mean_clients + (i-9)*P(i);
48         end
49         Mean_values_of_clients(index) = mean_clients;
50
51         if (abs(previous_mean_clients-mean_clients) < convergence_criterion)
52             flag = false;
53         end
54         previous_mean_clients = mean_clients;
55     end
56
57     random_number = rand(1);
58
59     if state == 1 % state 0
60         total_arrivals = total_arrivals + 1;
61         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
62         state = state+1;
63     elseif (state <= k) %1a,2a,3a...(k-1)a
64         if random_number < lambda/(lambda + mu_a)
65             total_arrivals = total_arrivals + 1;
66             arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
67             state = state+1;
68         else
69             state = state-1;
70         end
71     elseif (state == k+1) % state 3a
72         if random_number < (p*lambda)/(lambda + mu_a)
73             total_arrivals = total_arrivals + 1;
74             arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
75             state = state+1;
76         elseif random_number < lambda/(lambda + mu_a)
77             total_arrivals = total_arrivals + 1;
78             arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
79             state = 10+k; %state 4ab
80         else
```

```
79         state = state-1;
80     end
81 elseif (state == k+2) %state 4a
82     if random_number < lambda/(lambda + mu_a)
83         total_arrivals = total_arrivals + 1;
84         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
85         state = state+1;
86     else
87         state = state-1;
88     end
89 elseif (state == k+3) % state 5
90     if random_number < lambda/(lambda + mu_a + mu_b)
91         total_arrivals = total_arrivals + 1;
92         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
93         if (state<9)
94             state = state+1;
95         end
96     else
97         state = 10+k; %goto 4ab
98     end
99 elseif (state < 9)
100     if random_number < lambda/(lambda + mu_a + mu_b)
101         total_arrivals = total_arrivals + 1;
102         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
103         state = state+1;
104     else
105         state = state-1;
106     end
107 elseif (state == 9) %state 8 BLOCKING
108     if random_number < lambda/(lambda + mu_a + mu_b)
109         total_arrivals = total_arrivals + 1;
110         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
111     else
112         state = state-1;
113     end
114 elseif (state == 10) %state 1b
115     if random_number < lambda/(lambda + mu_b)
116         total_arrivals = total_arrivals + 1;
117         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
118         state = state+1;
119     else
120         state = 1; %goto state 0
121     end
122 elseif (state < 10+k)
123     if random_number < lambda/(lambda + mu_a + mu_b)
```



```
124         total_arrivals = total_arrivals + 1;
125         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
126         state = state+1;
127     elseif random_number < (lambda + mu_a) / (lambda + mu_a + mu_b)
128         state = state-1;
129     else
130         state = state-9;
131     end
132 elseif (state == 10+k)
133     if random_number < lambda/(lambda + mu_a + mu_b)
134         total_arrivals = total_arrivals + 1;
135         arrivals(state) = arrivals(state) + 1;
136         state = k+3;
137     elseif random_number < (lambda + p*mu_b) / (lambda + mu_a + mu_b)
138         state = state-9;
139     else
140         state = state-1;
141     end
142 else
143     % for debugging purposes
144     display('ERROR_ERROR_ERROR_ERROR_ERROR_ERROR');
145 end
146 end
147
148
149
150 if (plotsON)
151     run('plotSINGLE.m');
152 end
```

Listing 2: runALL.m: εκτελεί όλα τα ερωτήματα μαζί και παράγει όλες τις γραφικές παραστάσεις της αναφοράς

```
1  clc;
2  clear all;
3  close all;
4
5  %% REMEMBER TO COMMENT LINES 5–7 IN runSINGLE.m
6  plotsON = 1;
7  p = 0.5;
8  for lambda = 6:8
9      for k = 3:6
10         run('runSINGLE.m');
11         throughput_a(k-2,lambda-5) = mu_a*(1 - P(1) - P(10) );
12         throughput_b(k-2,lambda-5) = mu_b*(1 - sum(P(1:k+2)));
13         ratio(k-2,lambda-5) = throughput_a(k-2,lambda-5)/throughput_b(k-2,
14             lambda-5);
15         results(k-2,lambda-5) = mean_clients;
16         NumberOfTransitions(k-2,lambda-5) = transitions;
17     end
18     k_min(lambda-5) = find(ratio(:,lambda-5) > 5,1) + 2;
19     display(['The minimum ratio for lambda=', num2str(lambda), ' is achieved
20         for k=', num2str( k_min(lambda-5))]);
21 end
22
23 %% plots for questions 2 & 4
24 run('plot_q2.m');
25 run('plot_q4.m');
26
27 %% extra calculations needed for question 3
28 plotsON = 0;
29 for lambda = 6:8
30     k = k_min(lambda-5);
31     for ii=1:9
32         p=ii/10;
33         run('runSINGLE.m');
34         thr_a = mu_a*(1 - P(1) - P(10) );
35         thr_b = mu_b*(1 - sum(P(1:k+2)));
36         ratio_Q3(ii,lambda-5) = thr_a/thr_b;
37     end
38 end
39
40 %% plot for question 3
41 run('plot_q3.m');
```

Listing 3: q2.m: εκτέλεση μόνο για το ερώτημα 2

```
1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4
5 %% REMEMBER TO COMMENT LINES 5–7 IN runSINGLE.m
6 plotsON = 0;
7 p = 0.5;
8 for lambda = 6:8
9     for k = 3:6
10         run('runSINGLE.m');
11         results(k-2,lambda-5) = mean_clients;
12         NumberOfTransitions(k-2,lambda-5) = transitions;
13     end
14 end
15
16 %% plot question 2
17 run('plot_q2.m');
```

Listing 4: plot\_q2.m: plots μόνο για το ερώτημα 2

```
1 %% PLOT for question 2
2 % IT IS NECESSARY TO RUN q2.m BEFORE
3
4 fontsize = 12;
5 lineWidth = 1;
6 plotLineWidth = 4;
7 width=1024;
8 height=568;
9
10
11 fig1 = figure();
12 fig1.Color = 'w';
13 set(gcf, 'units', 'pixels', 'position', [0,0,width,height]) ;
14
15 k = 3:6;
16 hold on
17 plot(k, results(:,1), 'o-k', 'LineWidth', lineWidth);
18 plot(k, results(:,2), 'o-r', 'LineWidth', lineWidth);
19 plot(k, results(:,3), 'o-g', 'LineWidth', lineWidth);
20 temp = gca;
21 temp.Color = 'w';
22 temp.LineWidth = lineWidth;
23 temp.GridColor = 'k';
24 temp.FontSize = fontsize;
25 hold off
26
27 legend('\lambda=6', '\lambda=7', '\lambda=8')
28 xlabel(['$k$'], 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
29 title(['mean\_clients(k)'], 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
30 grid on;
31 saveas(gcf, ['output/q2.png']);
```

Listing 5: q3.m: εκτέλεση μόνο για το ερώτημα 3

```
1  clc;
2  clear all;
3  close all;
4
5  %% REMEMBER TO COMMENT LINES 5&6 IN runSINGLE.m
6  plotsON = 0;
7  p = 0.5;
8  for lambda = 6:8
9      for k = 3:6
10         run('runSINGLE.m');
11         throughput_a(k-2,lambda-5) = mu_a*(1 - P(1) - P(10) );
12         throughput_b(k-2,lambda-5) = mu_b*(1 - sum(P(1:k+2)));
13         ratio(k-2,lambda-5) = throughput_a(k-2,lambda-5)/throughput_b(k-2,
            lambda-5);
14     end
15     k_min(lambda-5) = find(ratio(:,lambda-5) > 5,1) + 2;
16     display(['The minimum ratio for lambda=', num2str(lambda), ' is achieved
            for k=', num2str( k_min(lambda-5))]);
17 end
18
19 %%
20 plotsON = 0;
21 for lambda = 6:8
22     k = k_min(lambda-5);
23     for ii=1:9
24         p=ii/10;
25         run('runSINGLE.m');
26         thr_a = mu_a*(1 - P(1) - P(10) );
27         thr_b = mu_b*(1 - sum(P(1:k+2)));
28         ratio_Q3(ii,lambda-5) = thr_a/thr_b;
29     end
30 end
31
32
33 %% plot question 3
34 run('plot_q3.m');
```

Listing 6: plot\_q3.m: plots μόνο για το ερώτημα 3

```
1 %% PLOT for question 3
2 % IT IS NECESSARY TO RUN q3.m BEFORE
3
4 fontsize = 12;
5 lineWidth = 1.5;
6 plotLineWidth = 4;
7 width=1024;
8 height=568;
9
10
11 fig1 = figure();
12 fig1.Color = 'w';
13 set(gcf, 'units', 'pixels', 'position', [0,0,width,height]) ;
14
15 k = 1:9;
16 p = k/10;
17 hold on
18 plot(p, ratio_Q3(:,1), 'o-k', 'LineWidth', lineWidth);
19 plot(p, ratio_Q3(:,2), 'o-r', 'LineWidth', lineWidth);
20 plot(p, ratio_Q3(:,3), 'o-g', 'LineWidth', lineWidth);
21 temp = gca;
22 set(temp, 'TickLabelInterpreter', 'latex')
23 temp.Color = 'w';
24 temp.LineWidth = lineWidth;
25 temp.GridColor = 'k';
26 temp.FontSize = fontsize;
27 hold off
28
29 legend('\lambda=6', '\lambda=7', '\lambda=8')
30 xlabel(['$p$'], 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
31 title(['ratio $\frac{\gamma_{a}}{\gamma_{b}}$ as a function of $p$'], '
    FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
32 grid on;
33 saveas(gcf, ['output/q3.png']);
```

Listing 7: q4.m: εκτέλεση μόνο για το ερώτημα 4

```
1 clc;
2 clear all;
3 close all;
4
5 %% REMEMBER TO COMMENT LINES 5–7 IN runSINGLE.m
6 plotsON = 0;
7 p = 0.5;
8 for lambda = 6:8
9     for k = 3:6
10         run('runSINGLE.m');
11         results(k-2,lambda-5) = mean_clients;
12         NumberOfTransitions(k-2,lambda-5) = transitions;
13     end
14 end
15
16 %% plot question 4
17 run('plot_q4.m');
```

Listing 8: plot\_q4.m: plots μόνο για το ερώτημα 4

```
1 %% PLOT for question 4
2 % IT IS NECESSARY TO RUN q4.m BEFORE
3
4 fontsize = 12;
5 lineWidth = 1.5;
6 plotLineWidth = 4;
7 width=1024;
8 height=568;
9
10 for lambda = 6:8
11     fig1 = figure();
12     fig1.Color = 'w';
13     set(gcf, 'units', 'pixels', 'position', [0,0,width,height]) ;
14
15     k = 3:6;
16     stem(k,NumberOfTransitions(:,lambda-5),'o-r','LineWidth', 3);
17 %     bar(k,NumberOfTransitions(:,lambda-5));
18     temp = gca;
19     temp.Color = 'w';
20     temp.LineWidth = lineWidth;
21     temp.GridColor = 'k';
22     temp.FontSize = fontsize;
23
24     xlabel(['$k$'],'FontSize',20,'Interpreter','latex');
25     title(['number of transitions for $\lambda=$',num2str(lambda)], 'FontSize'
26         ,20, 'Interpreter','latex');
27     grid on;
28     saveas(gcf,['output/q4_lambda=',num2str(lambda),'.png']);
29 end
```



Listing 9: plotSINGLE.m: plots μόνο για το ερώτημα 1

```
1  fontsize = 12;
2  lineWidth = 1;
3  plotLineWidth = 4;
4  width=1024;
5  height=568;
6
7
8  fig1 = figure();
9  fig1.Color = 'w';
10 set(gcf, 'units', 'pixels', 'position', [0,0,width,height]) ;
11
12
13 hold on
14 MeanValue(1:length(Mean_values_of_clients)) = mean_clients;
15 plot(Mean_values_of_clients, 'r', 'LineWidth', lineWidth);
16 plot(MeanValue, '—k', 'LineWidth', lineWidth);
17 temp = gca;
18 temp.Color = 'w';
19 temp.LineWidth = lineWidth;
20 temp.GridColor = 'k';
21 % temp.GridAlpha = 0.5;
22 temp.FontSize = fontsize;
23 xlim([0 index]);
24 hold off
25
26
27 xlabel(['$Transitions (\cdot 10^3)$'], 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
28 title(['\begin{tabular}{c} Average number of clients in the M/M/2/8 system \\for $\lambda$ = ', num2str(lambda), ' clients/sec \& k = ', num2str(k), ' \\end{tabular}'], 'FontSize', 20, 'Interpreter', 'latex');
29 grid on;
30 saveas(gcf, ['output/clients_lambda=', num2str(lambda), 'k=', num2str(k), '.png'])
    ;
```