ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

Νικόλαος Δημητριάδης
03114016
ΗΜΜΥ 8ο

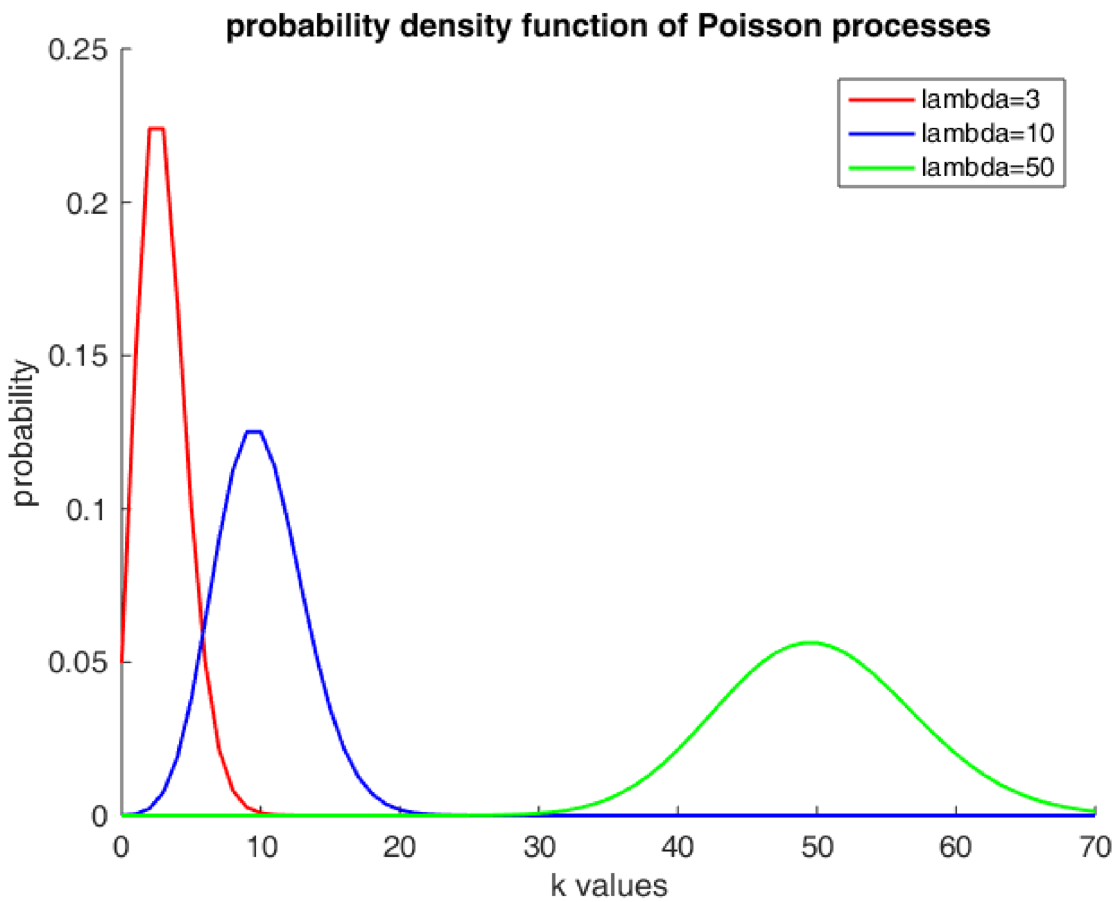
Εισαγωγή

Τα διάφορα μέρη παραδίδονται σε διαφορετικά σε διαφορετικά αρχεία .m και τα επιμέρους ερωτήματά τους χωρίζονται σε sections στον κώδικα για καλύτερη κατανόηση/διόρθωση. Το μέρος 1 βασίστηκε στο demo1.m που αναρτήθηκε στο site του μαθήματος. Χρησιμοποιήθηκε `MATLAB`.

1 Κατανομή Poisson

1.1 A

Το κοινό διάγραμμα των κατανομών είναι το ακόλουθο:



Η κάθε κατανομή Poisson με παράμετρο λ εμφανίζει μέγιστο για $k = \lambda$. Επιπλέον, για μεγαλύτερο λ το μέγιστο μειώνεται.

1.2 B

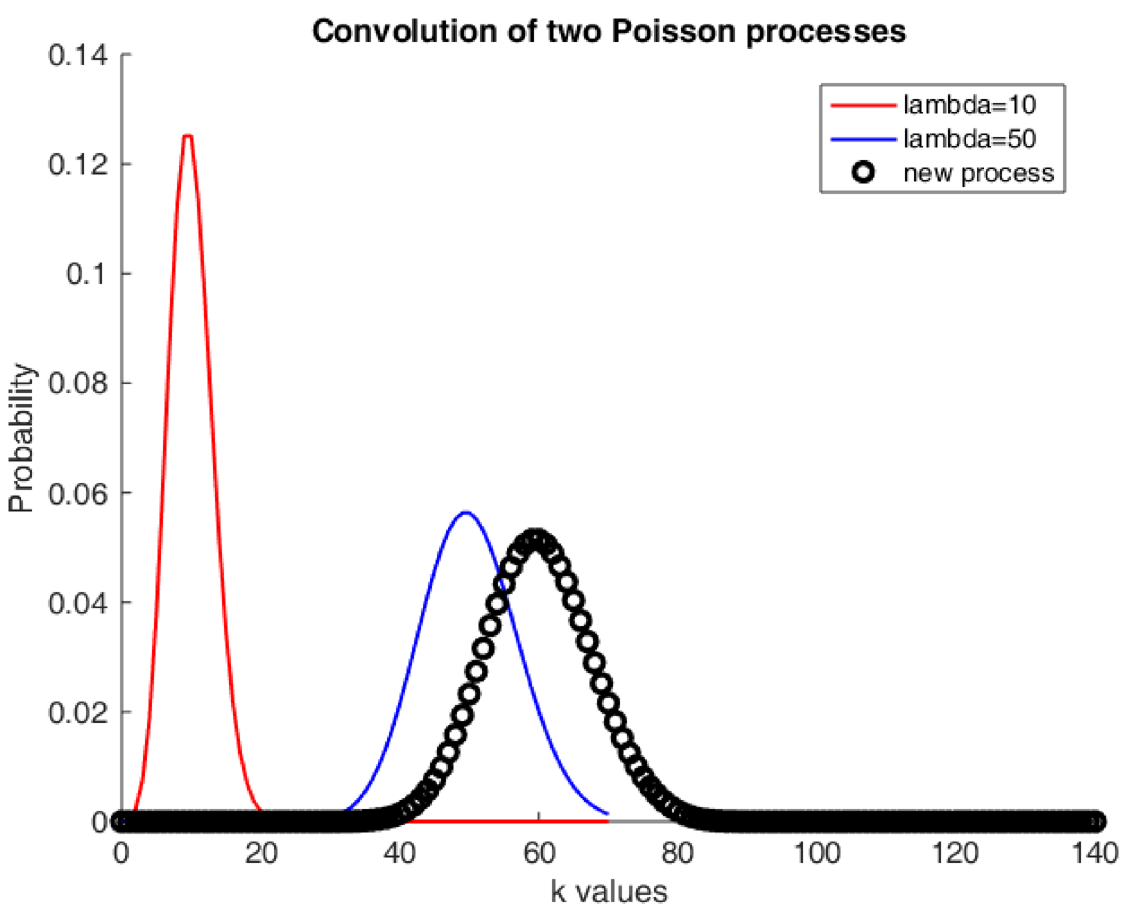
Παρατηρούμε ότι για η κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 30$ χαρακτηρίζεται από μέση τιμή και διακύμανση ίσες με την ίδια την παράμετρο λ. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με όσα γνωρίζουμε και από τη θεωρία για μία κατανομή Poisson:

$$\mu_{Poisson(\lambda)} = \lambda$$

$$\sigma_{Poisson(\lambda)} = \lambda$$

1.3 Γ

Λαμβάνουμε το ακόλουθο διάγραμμα για την υπέρθεση των κατανομών Poisson:



Αυτό σημαίνει ότι για δύο κατανομές Poisson με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα ισχύεο ότι:

$$X \sim Poisson(\lambda_1) \wedge Y \sim Poisson(\lambda_2) \implies Z = X + Y \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$$

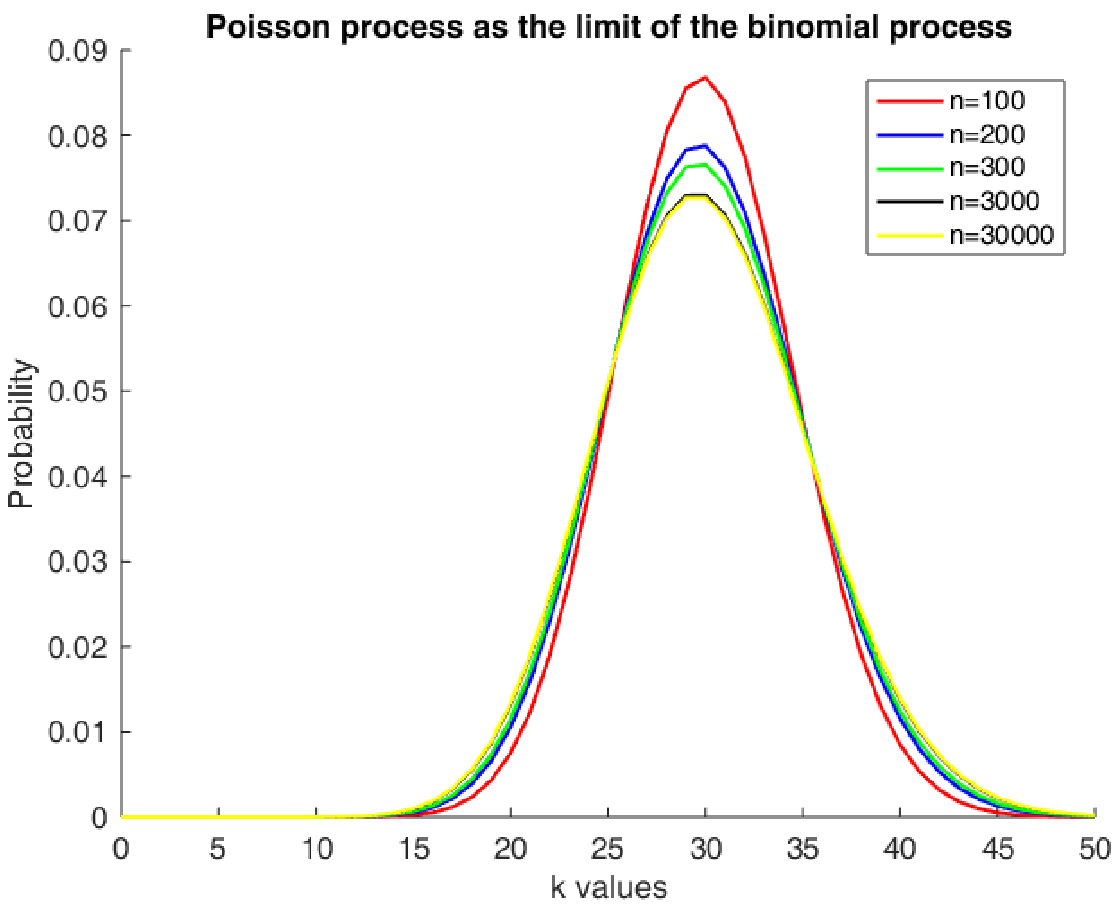
Η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό είναι οι δύο κατανομές X, Υ να είναι *ανεξάρτητες*.

1.4 Δ

Μία κατανομή Poisson(λ) μπορεί να ληφθεί ως όριο της διωνυμικής $Bin(n,p)$ ανν:

$$Bin(n,p) \longrightarrow Poisson(\lambda) : np \to \lambda, n \to \infty, p \to 0$$

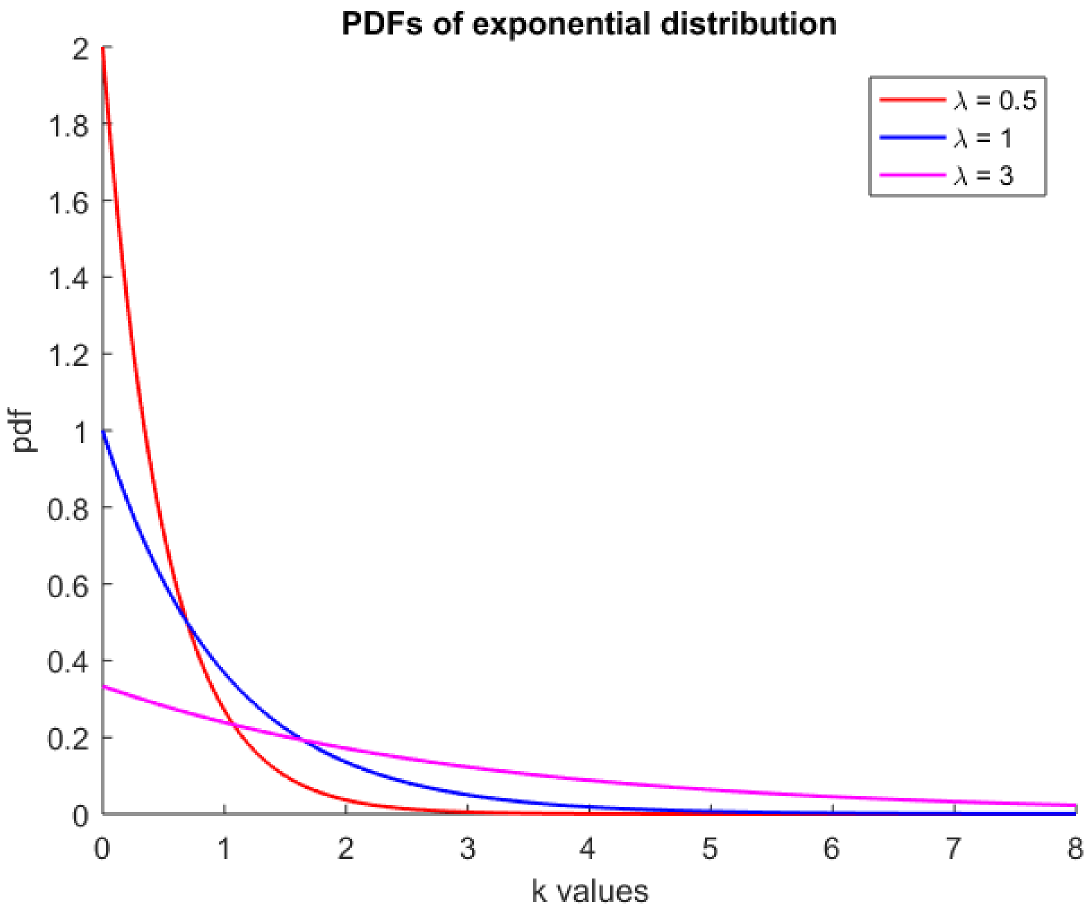
Αυτό είναι εμφανές και στο παρακάτω διάγραμμα:



2 Εκθετική Κατανομή

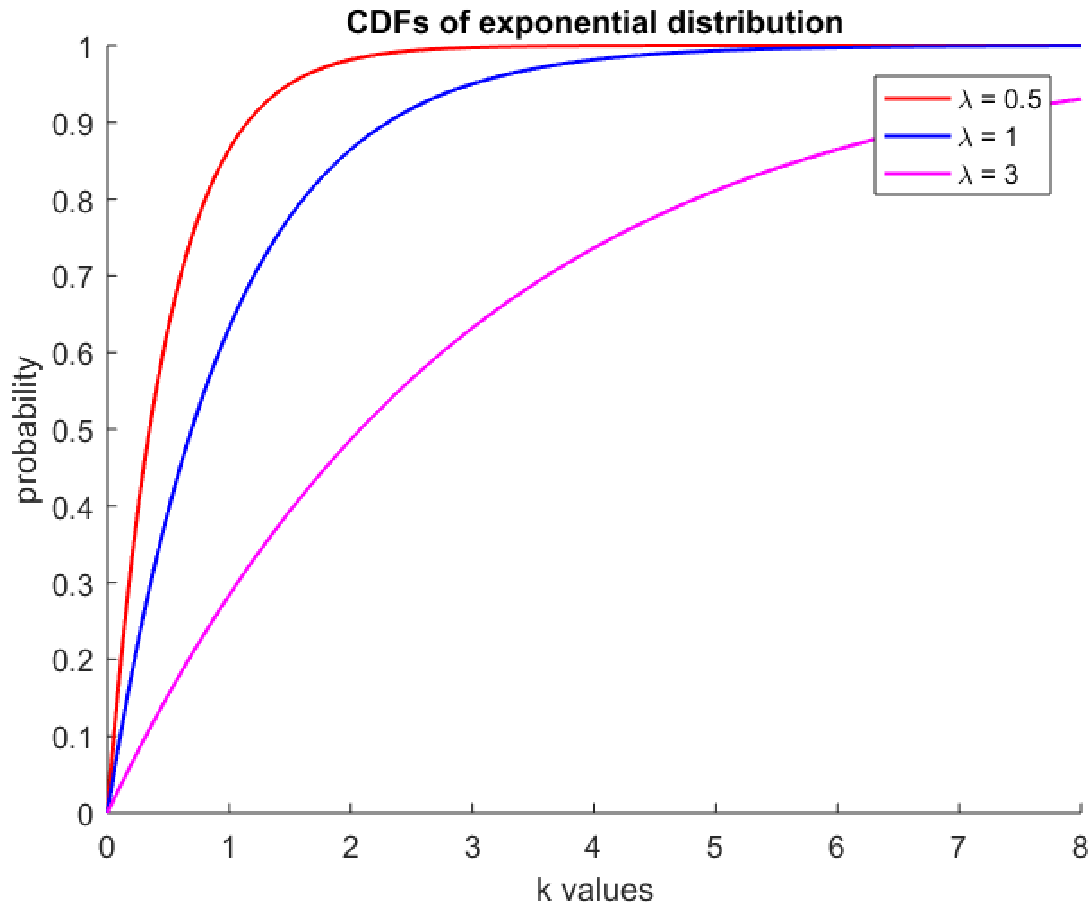
2.1 Α

Το κοινό διάγραμμα των PDF των εκθετικών κατανομών παρουσιάζεται παρακάτω:



2.2 Β

Το κοινό διάγραμμα των CDF των εκθετικών κατανομών παρουσιάζεται παρακάτω:



2.3 Γ

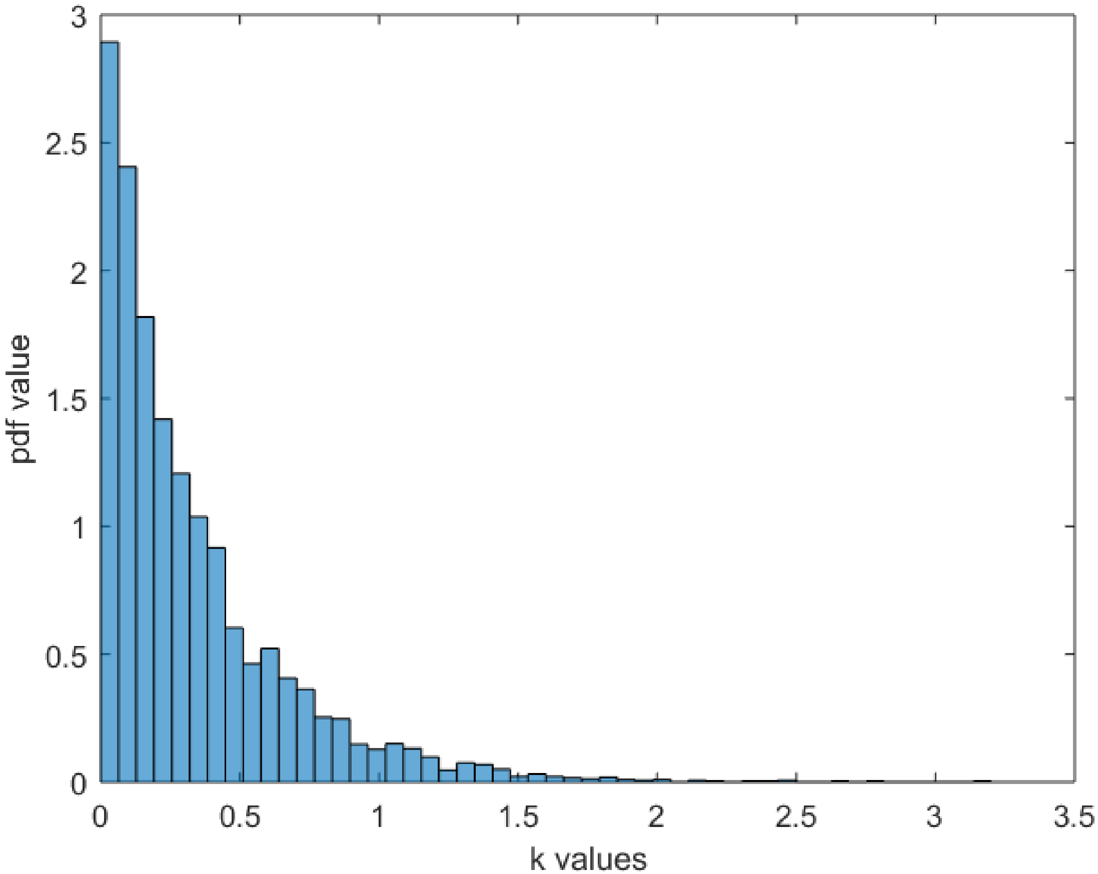
Η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από **απώλεια μνήμης**:

$$\begin{aligned}
\Pr(T > s + t | T > s) &= \frac{\Pr(T > s + t \wedge T > s)}{\Pr(T > s)} \\
&= \frac{\Pr(T > s + t)}{\Pr(T > s)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= \Pr(T > t) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Τότε, σύμφωνα με τη σχέση (1) έχουμε ότι $\Pr(X > 50000|X > 20000) = \Pr(X > 30000)$.

2.4 Δ

Το κανονικοποιημένο ιστόγραμμα της τυχαίας μεταβλητής $Y = min(X_1, X_2)$ είναι το ακόλουθο:



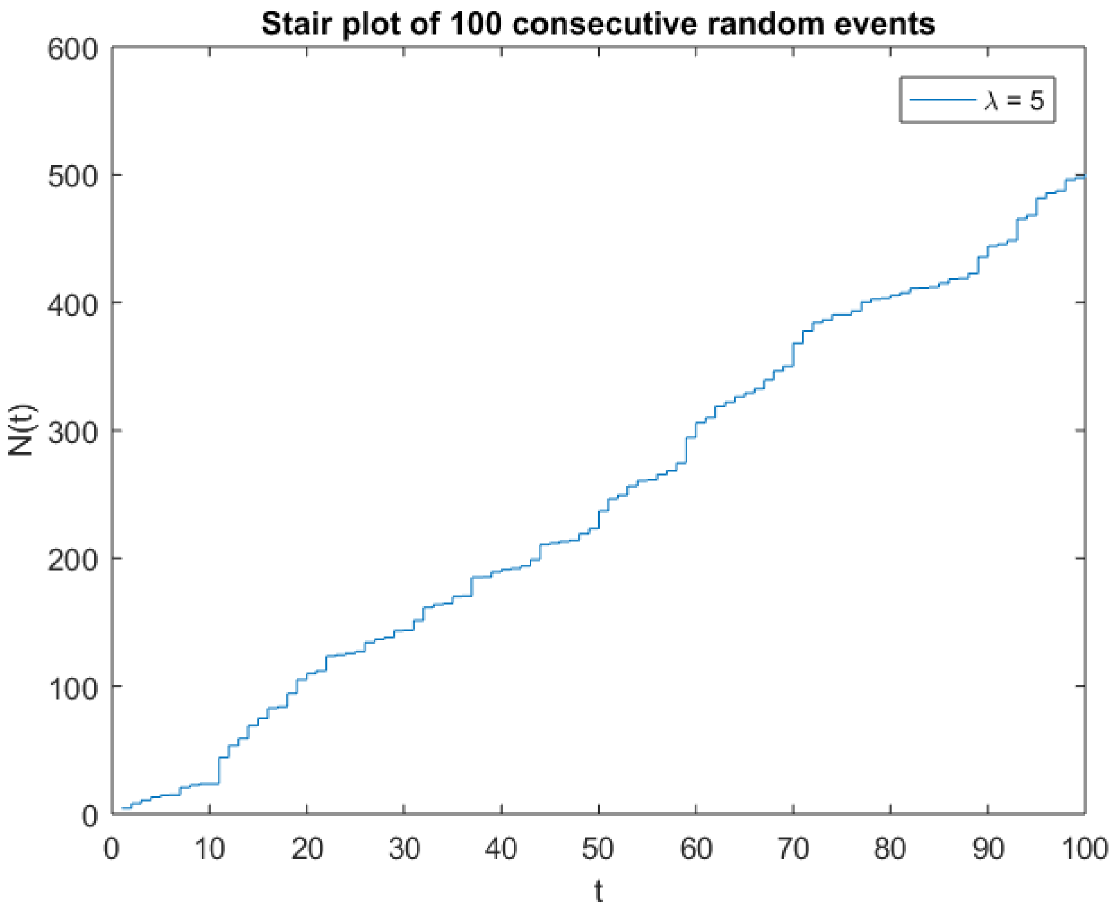
Φαίνεται ότι ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 0.5 = 1.5$. Ακολουθεί η θεωρητική απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\Pr(Z \leq t) &= \Pr(min(X,Y) \leq t) \\
&= 1 - \Pr(min(X,Y) > t) \\
&= 1 - \Pr(X > t) \cdot \Pr(Y > t) \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \\
&\Rightarrow Z \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

3 Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

3.1 A

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν *εκθετική* κατανομή.

3.2 B

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός γεγονότων μίας διαδικασίας Poisson με παράμετρο λ σε ένα χρονικό διάστημα Δt ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda' = \lambda \cdot \Delta t$. Αυτό επιβεβαιώνεται και πειραματικά από το MATLAB. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα 100 τυχαία γεγονότα δεν είναι αρκετά για να μας δώσουν *ακριβώς* λ ως το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου (βλ. νόμος μεγάλων αριθμών). Ωστόσο, η προσέγγιση είναι ικανοποιητική.

3.3 Γ

Και στις δύο περιπτώσεις, ο μέσος χρόνος είναι ίσος με $\lambda = 5$ γεγονότα/sec. Αυτό είναι εμφανές από την ανάλυση του ερωτήματος Β: ο αριθμός γεγονότων μίας διαδικασίας Poisson με παράμετρο λ σε ένα χρονικό διάστημα Δt ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda' = \lambda \cdot \Delta t$. Στη μονάδα του χρόνου, λοιπόν, ισχύει ότι $\lambda' = \lambda = 5$. Αυξάνοντας τον αριθμό των επαναλήψεων της προσομοίωσης (μεταβλητή `loops` στο παραδοτέο) το αποτέλεσμα προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή.

Appendix

Listing 1: part 1

```
clc;
clear all;
close all;


%% Poisson A
% # TASK: In a common diagram, desing the power density functions of Poisson processes
% # with lambda parameters 3,10,50. In the horizontal axes, choose k parameters
% # between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3,10,50];

for i=1:length(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
end

colors = 'rbgky';
figure(1);
hold on;
for i=1:length(lambda)
  plot(k,poisson(i,:),colors(i),'linewidth',1.2);
end
hold off;

title('probability density function of Poisson processes');
xlabel('k values');
ylabel('probability');
legend('lambda=3','lambda=10','lambda=50');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros1_A.png']);
%% Poisson B

% # TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
% # value and variance
lambda = 30;
poisson30 = poisspdf(k,lambda);
```

```matlab
mean_value = 0;
for i=0:(length(poisson30)-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson30(i+1);
end

display('mean value of Poisson with lambda 30 is');
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(length(poisson30)-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson30(i+1);
end

variance = second_moment - mean_value.^2;
display('Variance of Poisson with lambda 30 is');
display(variance);

%% Poisson C

% # TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 20 with
% # the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(2,:);
poisson_second = poisson(3,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
plot(k,poisson_first(:),colors(1),'linewidth',1.2);
plot(k,poisson_second(:),colors(2),'linewidth',1.2);
plot(new_k,composed,'ko','linewidth',2);
hold off;
title('Convolution of two Poisson processes');
xlabel('k values');
ylabel('Probability');
legend('lambda=10','lambda=50','new process');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros1_C.png']);
%% Poisson D
```

```
% # TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution
    .
k = 0:1:50;
% # Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1:1:5;
% n = lambda.*i;
% p = lambda./n;
n = [ 100, 200, 300, 3000, 30000];
p = lambda./n;

figure(3);
title('Poisson process as the limit of the binomial process');
% legend('n=300','n=3000','n=30000');
xlabel('k values');
ylabel('Probability');
hold on;
for i=1:5
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  plot(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
end
legend('n=100','n=200','n=300','n=3000','n=30000');
hold off;
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros1_D.png']);
```

Listing 2: part 2

```
clc;
clear all;
close all;


%% Exponential A

k = 0:0.00001:8;
m = [0.5,1,3];

for i=1:length(m)
  exponential(i,:) = exppdf(k,m(i));
end

colors = 'rbm';
figure();
hold on;
for i=1:length(m)
  plot(k,exponential(i,:),colors(i),'linewidth',1.2);
end
hold off;

title('PDFs of exponential distribution');
xlabel('k values');
ylabel('pdf');
legend('\lambda = 0.5','\lambda = 1','\lambda = 3');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros2_A.png']);
%% Exponential B
for i=1:length(m)
  exponential(i,:) = expcdf(k,m(i));
end

colors = 'rbm';
figure();
hold on;
for i=1:length(m)
  plot(k,exponential(i,:),colors(i),'linewidth',1.2);
end
hold off;

title('CDFs of exponential distribution');
```

```
xlabel('k values');
ylabel('probability');
legend('\lambda = 0.5','\lambda = 1','\lambda = 3');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros2_B.png']);
%% Exponential C
% no code required for this. It is only theoretical.

%% Exponential D
X1 = exprnd(1, 5000, 1);
X2 = exprnd(0.5, 5000, 1);

Y = min(X1, X2);

histogram(Y,50,'Normalization', 'pdf');
% plot(Y,f,'LineWidth',1.5)
xlabel('k values');
ylabel('pdf value');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros2_D.png']);
```

Listing 3: part 3

```
clc;
clear all;
close all;

%% Poisson Process A

R = exprnd(5,1,100);
X(1) = R(1);
for i = 2:100
    X(i) = X(i-1) + R(i);
end
figure()
stairs(X);
title('Stair plot of 100 consecutive random events');
xlabel('t');
ylabel('N(t)');
legend('\lambda = 5');
set(gcf,'color','w');
temp = getframe(gcf);
imwrite(temp.cdata, [ 'output/meros3_A.png']);

%% Poisson Process B
n = max(size(X));
answer = X(n) / n;


%% Poisson Process C

loops = 100;
mean_49_50 = 0;
mean_50_51 = 0;
for k = 1:loops
   R = exprnd(5,1,100);
   mean_49_50 = mean_49_50 + abs( R(50)-R(49) );
   mean_50_51 = mean_50_51 + abs( R(51)-R(50) );
end

mean_49_50 = mean_49_50 / loops;
mean_50_51 = mean_50_51 / loops;
```