

Лабораторная работа №2.

Построение интерполирующего кубического сплайна

Выполнил(а): Семенова Вероника

Группа: 2 Вариант: 14

1. Постановки задач

(укажите функции, отрезки и граничные условия)

Сплайн-интерполяция функции $F(x) = \varphi(x)$ (тест)

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & x \in [-1, 0] \\ -x^3 + 3x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S''(a) = \varphi''(-1) = S''(b) = \varphi''(1) = 0$$

Сплайн-интерполяция функции $F(x) = f(x)$,

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, x \in [0, 1]$$

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

Сплайн-интерполяция функций

$$F(x) = f(x) + \cos 10x$$

$$f(x) = \sqrt{1+x^4} + \cos 10x \quad x \in [0, 1]$$

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

2. Краткие сведения по теории сплайн-интерполяции

(определение кубического сплайна, каноническая форма записи, постановка задач сплайн-интерполяции, типы граничных условий; описание способа построения сплайна, используемого в программе)

кубический сплайн на сетке x_i ($i = \overline{0, n}$) на отрезке $[a, b]$ — это функция $s(x)$ дважды непрерывно диф-чура на отрезке и представляющая собой полином степени не выше 3 на \forall участке:

$$s(x) := \begin{cases} s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + d_i \frac{(x - x_i)^3}{6} \\ x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

самоцветные гр.усл: $s''(a) = s''(b) = 0$

соблюдение вторых производных: $\begin{cases} s''(a) = f''(a) = \mu_1 \\ s''(b) = f''(b) = \mu_2 \end{cases}$

соблюдение первых производных: $\begin{cases} s'(a) = f'(a) = \lambda_1 \\ s'(b) = f'(b) = \lambda_2 \end{cases}$

недифференцируемый сплайн:

$$\begin{cases} c_0 = \mu_1 \\ c_{i-1} h_i + 2(h_i + h_{i+1})c_i + c_{i+1} h_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_L}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_R}{h_i} \right) \quad i = \overline{1, n-1} \\ c_n = \mu_2 \end{cases}$$

$$a_i = f_i$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \quad i = \overline{1, n}$$

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + c_i \frac{h_i}{3} + c_{i-1} \frac{h_i}{6} \quad i = \overline{1, n}$$

3. Тест

(приведите таблицу коэффициентов сплайна, график тестовой функции $F(x) = \varphi(x)$ и сплайна $S(x)$ при $n=4$; выкладки, подтверждающие, что сплайн построен правильно)

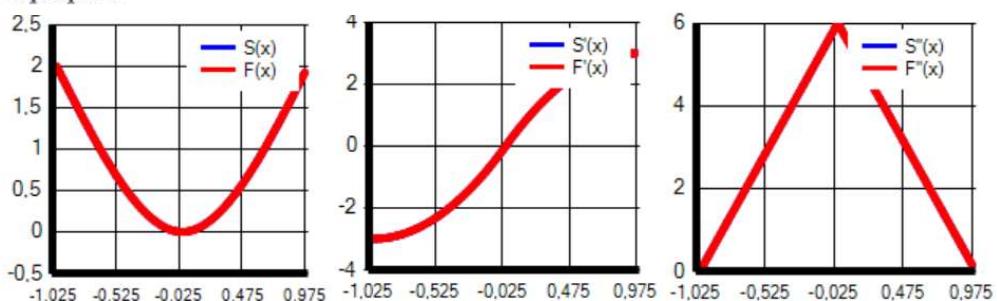
i	x_{i-1}	x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	-1	-0,5	0,625	-2,25	3	6
2	-0,5	0	0	0	6	6
3	0	0,5	0,625	2,25	3	-6
$n=4$	0,5	1	2	3	0	-6

Каноническая запись (от руки):

$$S(x) = \begin{cases} 0,625 + (-2,25)(x+0,5) + 3/2(x+0,5)^2 + (x+0,5)^3 & x \in [-1, -1/2] \\ 0 + 0(x-0) + 3(x-0)^2 + (x-0)^3 & x \in [-0,5, 0] \\ 0,625 + (2,25)(x-0,5) + 3/2(x-0,5)^2 - (x-0,5)^3 & x \in [0, 0,5] \\ 2 + 3(x-1) + 0(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [0,5, 1] \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} 3x^2 + x^3 & x \in [-1, -1/2] \\ 3x^2 + x^3 & x \in [-1/2, 0] \\ 3x^2 - x^3 & x \in [0, 1/2] \\ 3x^2 - x^3 & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

График:



Выкладки:

$$a_1 = 0,625 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0,625 \quad a_4 = 2$$

$$c_0 = 0$$

$$\begin{cases} 2c_1 + a_1 \cdot 1/2 = 0 - 2(0,625 + 2) \\ c_1 \cdot 1/2 + 2c_2 + 1/2 \cdot c_3 = 0/2 (0,625 - 2 \cdot 0 + 0,625) \\ c_2 \cdot 1/2 + 2c_3 = 0/2 (2 - 2 \cdot 0,625) \\ c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 3/0,5 = 6$$

$$d_2 = 3/0,5 = 6$$

$$d_3 = -3/0,5 = -6$$

$$d_4 = -3/0,5 = -6$$

$$b_1 = \frac{0,625 - 2}{1/2} + 3 \cdot \frac{0,5}{3} = -2,25$$

$$b_2 = \frac{-0,625}{1/2} + 6 \cdot \frac{0,5}{3} + 6 \cdot \frac{0,5}{6} = 0$$

$$b_3 = \frac{0,625}{1/2} + 3 \cdot \frac{0,5}{3} + 6 \cdot \frac{0,5}{6} = 2,25$$

$$b_4 = \frac{2 - 0,625}{1/2} + 3 \cdot \frac{0,5}{3} = 3$$

полученные значения совпадают с ранее найденными правильными

4. Анализ порядка сходимости

Границные условия: $S''(a) = 0, S''(b) = 0$

(для функций $f(x), f(x) + \cos 10x$ заполните следующие таблицы, последний столбец с заливкой – опция)

$$F(x) = \sqrt{1+x^4}, [a, b] = [0; 1]$$

n	$\max_{j=0 \dots N} F(x_j) - S(x_j) $	$\max_{j=0 \dots N} F'(x_j) - S'(x_j) $	$\max_{j=0 \dots N} F''(x_j) - S''(x_j) $
10	$1,34 \cdot 10^{-3}$	$5,73 \cdot 10^{-2}$	
100	$1,38 \cdot 10^{-5}$	$7,88 \cdot 10^{-3}$	
1000	$1,37 \cdot 10^{-7}$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	2,82
Порядок сходимости	2	1	

$$F(x) = \sqrt{1+x^4} + \cos(10x), [a, b] = [0; 1]$$

n	$\max_{j=0 \dots N} F(x_j) - S(x_j) $	$\max_{j=0 \dots N} F'(x_j) - S'(x_j) $	$\max_{j=0 \dots N} F''(x_j) - S''(x_j) $
10	$5,51 \cdot 10^{-2}$	3,13	
100	$4,91 \cdot 10^{-4}$	0,28	
1000	$4,85 \cdot 10^{-6}$	0,028	
Порядок сходимости	2	1	

5. Итоговая таблица

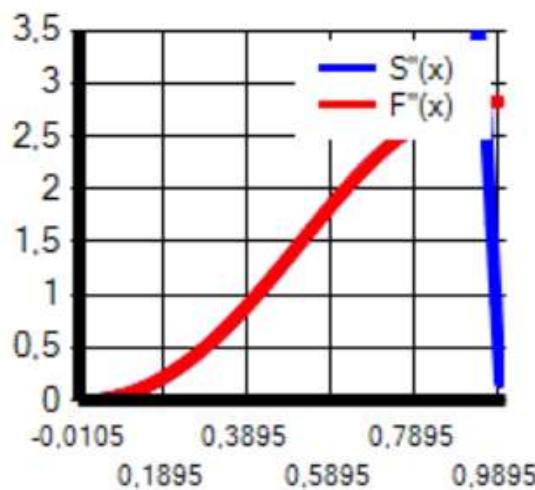
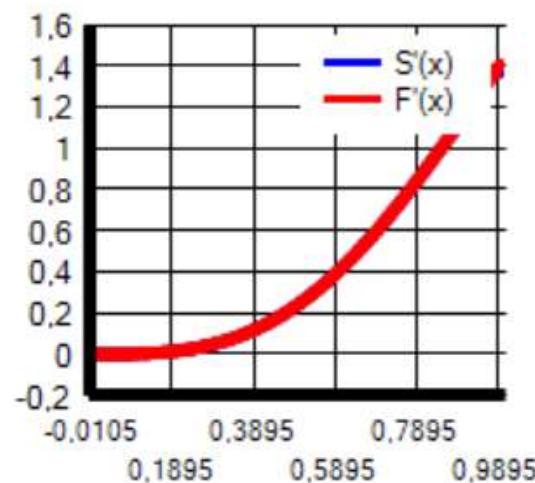
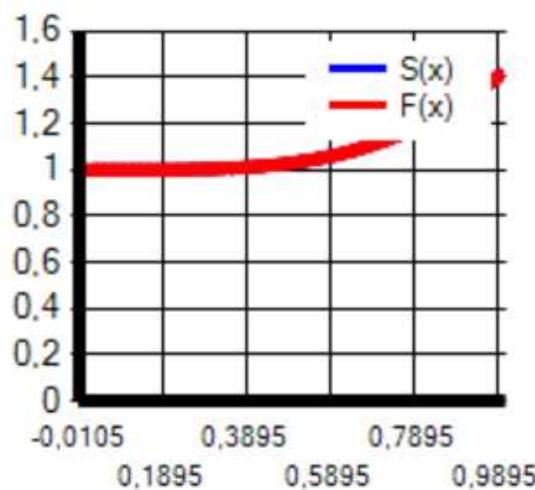
Границные условия: $S''(a) = 0, S'(b) = 0$

$f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $[a, b] = [0; 1]$ (строки и столбцы с заливкой – опция)

	Выбор функции $F(x)$		
	$f(x)$	$f(x) + \cos 10x$	$\varphi(x)$
При $n = «100»$			
$\max_{j=0,\dots,N} F(x) - S(x) $	$1,38 \cdot 10^{-5}$	$4,91 \cdot 10^{-4}$	$8,81 \cdot 10^{16}$
$\max_{j=0,\dots,N} F'(x) - S'(x) $	$7,88 \cdot 10^{-3}$	0,28	$3,19 \cdot 10^{14}$
$\max_{j=0,\dots,N} F''(x) - S''(x) $	2,82	100	$4,91 \cdot 10^{12}$
При достижении погрешности сплайн-интерполяции не более $\varepsilon = 10^{-6}$			
Число участков сетки сплайна n	1000	10 000	4
$\max_{j=0,\dots,N} F(x) - S(x) $	$1,37 \cdot 10^{-7}$	$3,02 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-11}$
$\max_{j=0,\dots,N} F'(x) - S'(x) $	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$2,08 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-16}$
$\max_{j=0,\dots,N} F''(x) - S''(x) $	2,82	106	$4 \cdot 10^{-16}$
Оценка порядка сходимости			
Сходимость к функции (оценка порядка)	2	2	
Сходимость к производной (оценка порядка)	1	1	
Сходимость к второй производной (оценка порядка)			
«Остановка» сходимости: число участков, начиная с которого в силу накопления вычислительной погрешности «меняется» сходимость (опция)			
n^*			

6. Графики функций, сплайнов и производных Естественные граничные условия

Сплайн-интерполяция функции $F(x) = f(x)$
 $S''(a) = 0, S''(b) = 0$



Фрагмент таблицы коэффициентов (скрин)

	x(i-1)	x(i)	a(i)	b(i)	c(i)	d(i)
1	0	0,05	1,0000003	0,00026	0,01183	0,236603
2	0,05	0,1	1,000005	0,001997	0,057676	0,916925
3	0,1	0,15	1,000253	0,006749	0,132393	1,494338
4	0,15	0,2	1,0008	0,015987	0,237134	2,094806
5	0,2	0,25	1,001951	0,03119	0,370961	2,676556
6	0,25	0,3	1,004042	0,053783	0,532787	3,236515
7	0,3	0,35	1,007475	0,085115	0,720475	3,753747
8	0,35	0,4	1,012719	0,126394	0,930688	4,204274
9	0,4	0,45	1,020297	0,178626	1,158612	4,55847
10	0,45	0,5	1,030776	0,242538	1,397846	4,784689
11	0,5	0,55	1,044752	0,3185	1,64062	4,855466
12	0,55	0,6	1,062826	0,406465	1,877989	4,747394
13	0,6	0,65	1,08559	0,505952	2,101506	4,470338

Фрагмент таблицы сравнения и справка (скрин)

	x(i)	F(x(i))	S(x(i))	F(x(i))-S(x(i))	F'(x(i))	S'(x(i))	F'(x(i))-S'(x(i))
0	0	1					
1	0,025	1	1	4,81E-07	3,12E-05	3,79E-05	-6,60E-06
2	0,05	1,0000003	1,0000003		0	0,00025	0,00026
3	0,075	1,0000016	1,0000016	1,19E-07	0,000844	0,000842	1,77E-06
4	0,1	1,000005	1,000005		0	0,002	0,001997
5	0,125	1,000122	1,000122	2,15E-07	0,003906	0,003906	-4,51E-07
6	0,15	1,000253	1,000253		0	0,006748	0,006749
7	0,175	1,000469	1,000469	1,87E-07	0,010714	0,010714	1,90E-07
8	0,2	1,0008	1,0008		0	0,015987	0,015987
9	0,225	1,001281	1,00128	1,89E-07	0,022752	0,022752	9,87E-08
10	0,25	1,001951	1,001951		0	0,031189	0,03119
11	0,275	1,002855	1,002855	1,78E-07	0,041475	0,041475	2,46E-07
12	0,3	1,004042	1,004042		0	0,053783	0,053783
13	0,325	1,005563	1,005563	1,61E-07	0,068276	0,068276	3,74E-07

Справка:

Сетка сплайна: n = «_20 :

Контрольная сетка: N = «_40 »

Погрешность сплайна на к.с.:

max|F(x_j)-S(x_j)|= 0,0003338899530545

при x = 0,9869999999999998

Погрешность производной на к.с.:

max|F'(x_j)-S'(x_j)|= 0,0340043847136553

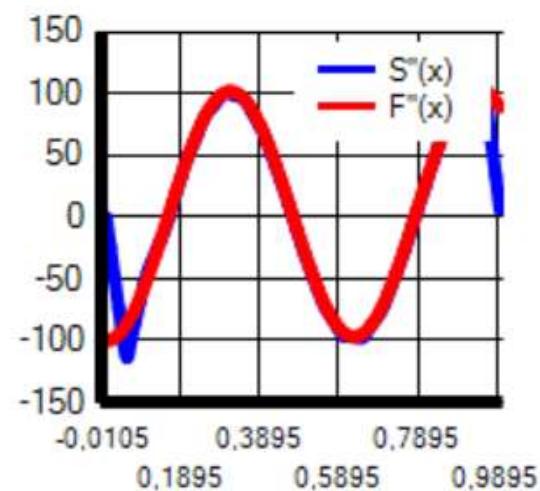
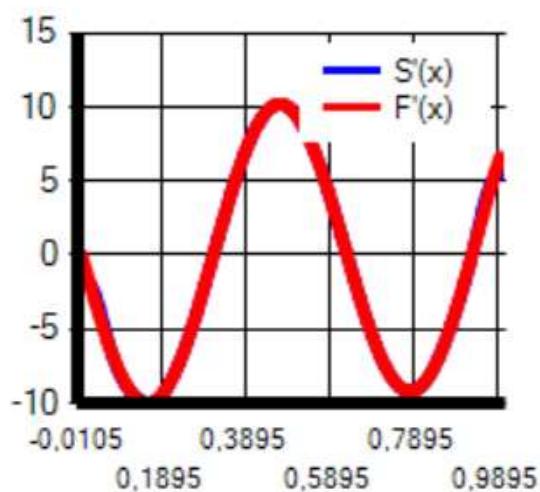
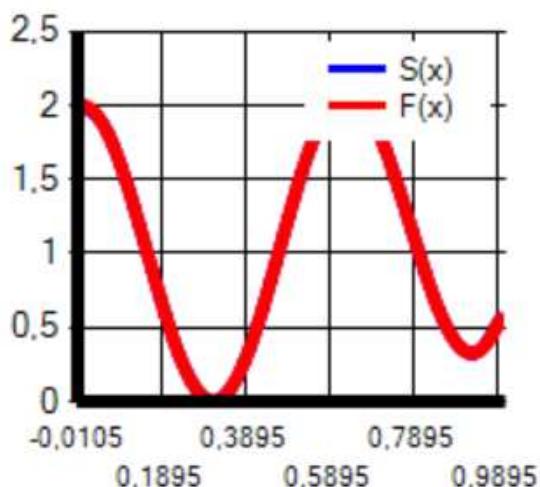
при x = 1,008

Погрешность второй производной на на к.с.:

max|F''(x_j)-S''(x_j)|= 2,64952584000527

при x = 1,008

Сплайн-интерполяция функции $F(x) = f(x) + \cos 10x$
 $S''(a) = 0, S''(b) = 0$



Фрагмент таблицы коэффициентов (скрин)

	x(i-1)	x(i)	a(i)	b(i)	c(i)	d(i)
1	0	0,05	1,877586	-4,39741	-116,947	-2338,94
2	0,05	0,1	1,540352	-8,51551	-47,7768	1383,408
3	0,1	0,15	1,07099	-9,93628	-9,05408	774,4553
4	0,15	0,2	0,584653	-9,08133	43,25213	1046,124
5	0,2	0,25	0,200808	-5,94936	82,02689	775,4953
6	0,25	0,3	0,014049	-1,35746	101,649	392,443
7	0,3	0,35	0,071018	3,591839	96,3228	-106,525
8	0,35	0,4	0,359075	7,691672	67,67056	-573,045
9	0,4	0,45	0,809501	9,950442	22,68023	-899,807
10	0,45	0,5	1,314439	9,828345	-27,5641	-1004,89
11	0,5	0,55	1,753422	7,371389	-70,7142	-863,001
12	0,55	0,6	2,022997	3,199587	-96,1579	-508,874
13	0,6	0,65	2,062178	-1,64436	-97,5998	-28,8389

Фрагмент таблицы сравнения и справка (скрин)

	x(i)	F(x(i))	S(x(i))	F(x(i))-S(x(i))	F'(x(i))	S'(x(i))	F'(x(i))-S'(x(i))
0	0	2					
1	0,025	1,968913	1,957066	0,011846769	-2,47401	-2,20465	-0,26936214
2	0,05	1,877586	1,877586	0	-4,79401	-4,39741	-0,39659863
3	0,075	1,731705	1,734707	-0,00300244	-6,81554	-6,88877	0,073228743
4	0,1	1,540352	1,540352	0	-8,41271	-8,51551	0,102798746
5	0,125	1,315444	1,314551	0,000893292	-9,48594	-9,46791	-0,0180278
6	0,15	1,07099	1,07099	0	-9,9682	-9,93628	-0,03191957
7	0,175	0,822223	0,822478	-0,00025535	-9,82915	-9,83572	0,006574549
8	0,2	0,584653	0,584653	0	-9,07699	-9,08133	0,004343891
9	0,225	0,373107	0,373155	-4,84E-05	-7,75798	-7,75769	-0,00029434
10	0,25	0,200808	0,200808	0	-5,95353	-5,94936	-0,00417675
11	0,275	0,078553	0,078729	-0,00017599	-3,77513	-3,77604	0,000910287
12	0,3	0,014049	0,014049	0	-1,35742	-1,35746	3,99E-05
13	0,325	0,011433	0,011601	-0,00016765	1,150228	1,15048	-0,00025181

Справка:

Сетка сплайна: n = «_20 :

Контрольная сетка: N = «_40 »

Погрешность сплайна на к.с.:

max|F(x_j)-S(x_j)|= 0,0125894192943254

при x = 0,0315

Погрешность производной на к.с.:

max|F'(x_j)-S'(x_j)|= 1,47372601700166

при x = 0,0105

Погрешность второй производной на к.с.:

max|F''(x_j)-S''(x_j)|= 100

при x = 0,0105

7. Наблюдения и выводы

Для основной и осциллирующей функции мы видим, что с увеличением числа разбиений в 10 раз погрешность спектра на кратной частоте уменьшается в 100 раз, погрешность же производной уменьшается в 10 раз, а погрешность отклона производной не меняется, то слажено с естественным уравнением условиями $S'(a) = S''(b) = 0$, т.к. функции имеют на концах отрезка значение производной отличной от нуля, именно на концах можно задать начальную погрешность второго производного, при замене граничных условий на производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ в концах отрезка разделяя различия в обеих производных функции и спектра звукового излучения. Постовая функция предоставляет собой полином 3-степени и при вычислении ее кубический спектр достигает звукового пика при погрешности уже при малом кол-во разбиении.

При этом сходимость спектра 2, при производной 1

8. Код программы (основные алгоритмы)

```
double** FF(double* A)
{
    // Инициализация
    int n;                                //кол-во шагов
    double S1, S2;                          //границы
    double a = -1, b = 1;                   //границы
    double h = (b-a)/(n-1);                //шаг

    int N = n - 2;
    TridiagMatrix MM(N);
    double* B = new double[N];

    MM[0][0] = 4 * h; MM[0][1] = h;
    B[0] = 6 * (f(x(2)) + f(x(0)) - 2 * f(x(1))) / h - h * S1;
    MM[N-1][1] = 4 * h; MM[N-1][0] = h;
    B[N-1] = 6 * (f(x(n-1)) + f(x(n-3)) - 2 * f(x(n-2))) / h - h * S2;
    for (int i = 1; i < N - 1; i++) {
        MM[i][0] = h;
        MM[i][1] = 4 * h;
        MM[i][2] = h;
        B[i] = 6.0 / h;
        double a2 = f(x(i+2));
        double b2 = f(x(i));
        double c2 = -2 * f(x(i+1));
        B[i] = B[i] * (a2+b2+c2);
    }

    double* C1 = new double[N];
    C1 = runth(MM, B, N);

    for (int i = 1; i < N; i++)
    {
        a[i] = f(x(i));
        b[i] = (f(x(i)) - f(x(i-1))) / h + C[i] * h / 3 + C[i-1] * h / 6;
        c[i] = C[i];
        d[i] = (C[i] - C[i-1]) / h;
    }
}

double* runth(TridiagMatrix A, double* B, int n)
{
    double* a = new double[n];
    double* b = new double[n];
    double* res = new double[n];

    double y = A[0][0];
    a[0] = -A[0][1] / y;
    b[0] = B[0] / y;

    for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
        y = A[i][1] + A[i][0] * a[i - 1];
        a[i] = -A[i][2] / y;
        b[i] = (B[i] - A[i][0] * b[i - 1]) / y;
    }

    res[n-1] = (B[n-1] - A[n-1][0] * b[n-1-1]) / (A[n-1][1] + A[n-1][0] * a[n-1-1]);

    for (int i = n - 1 - 1; i >= 0; i--) {
        res[i] = a[i] * res[i + 1] + b[i];
    }

    return res;
}
```