

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И.
Лобачевского (ННГУ)»

Институт информационных технологий, математики и механики

ОТЧЕТ
по лабораторной работе
на тему:
«Численное решение задачи Коши для ОДУ.»

Выполнила:
студентка группы 382003-3
Семенова Вероника
Группа 2, вариант 2

Нижний Новгород
2022

Содержание

1	Постановка задачи.....	3
2	Краткие сведения по численным метода решения ОДУ.....	4
3	Исследование порядка сходимости для тестовой задачи. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка.	5
4	Результаты численных экспериментов для основных задач.	6
5	Наблюдения и выводы.	9

1. Постановка задачи
(тестовая, основная №1, основная №2)

Целью данной лабораторной работы является освоение основных методов численного интегрирования задачи Коши для ОДУ с жесткими нелинейными порциями на длине и времени. Тестовая задача имеет вид:

$$\frac{du}{dx} = u$$

основная задача 1: $u(0) = u_0$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{1+x^2} u^2 + u - u^3 \sin(10x)$$

$$u(0) = u_0$$

основная задача 2:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = au' + b \sin(u) = 0$$

$$u(0) = u_0$$

2. Краткие сведения по численным методам решения ОДУ

(запись метода, оценка погрешности, управление шагом метода)

решим тестовую и основные задачи, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка

а) без контроля локальной погрешности (с постоянным шагом)

б) с контролем локальной погрешности (параметр задается с клавиатуры)

запись метода:

$$x_0, v_0 = u_0$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, v_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, v_n + k_1 \frac{h_n}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, v_n + k_2 \frac{h_n}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h_n, v_n + h_n k_3\right)$$

контроль локальной погрешности за счет двойного счета с постоянным шагом.

Зная точку (x_n, v_n) , найдем следующую точку и оценим локальную погрешность. точку (x_{n+1}, v_{n+1}) вычислим, используя метод РК 4-го порядка с шагом h_n точки $(x_{n+1/2}, v_{n+1/2})$ вычислим, используя метод РК 4-го порядка с шагом $h_n/2$. точку (x_{n+1}, v_{n+1}) вычислим из точки $(x_{n+1/2}, v_{n+1/2})$, используя метод РК 4-го порядка с шагом $h_n/2$

вычислим значение $\delta = \frac{v_{n+1} - v_{n+1/2}}{v_{n+1}}$ и выберем $\epsilon > 0$

если $\frac{\epsilon}{2^5} \leq |\delta| \leq \epsilon$, тогда уменьшаем h . если $|\delta| < \epsilon/2^5$ тогда увеличиваем шаг h . если $|\delta| > \epsilon$, тогда уменьшаем шаг h в 2 раза.

оценка локальной погрешности $e_{n+1} = 2^4 \delta$

она используется для корректировки численной траектории. $v_{n+1} = v_{n+1} + 2^4 \delta$

3. Исследование порядка сходимости для тестовой задачи.
Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

рассмотрим тестовую задачу:

$$\begin{cases} du/dx = u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

h	e	действ. относительная погрешность
0,003	$1,7763 \cdot 10^{-15}$	
0,006	$6,10623 \cdot 10^{-14}$	34,375
0,012	$1,96487 \cdot 10^{-12}$	32,17818182
0,024	$6,37403 \cdot 10^{-11}$	32,43993672
0,048	$2,09623 \cdot 10^{-10}$	32,8870275
0,096	$7,0850 \cdot 10^{-8}$	32,7023971
0,192	$2,52945 \cdot 10^{-6}$	55,70123975
0,384	0,000100722	39,83952075

предположим относительную погрешность : 32

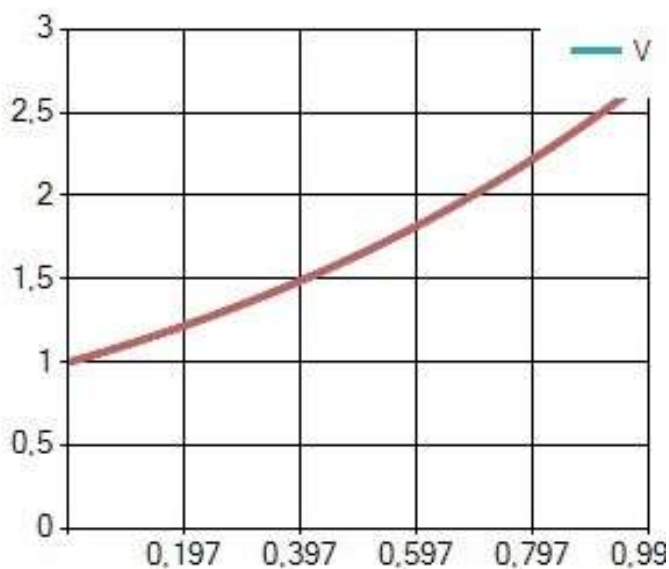
наша программа работает с заданным порядком

4. Результаты численных экспериментов для основных задач.

Тестовую задачу:

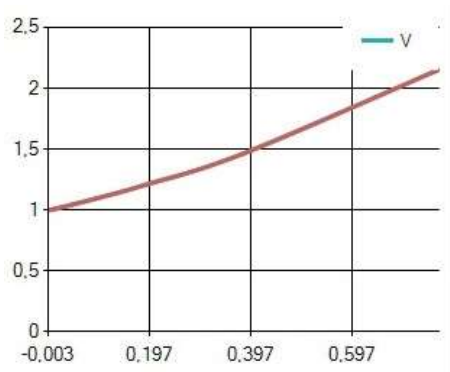
$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Начальное условие $u(0) = 1$, без контроля локальной погрешности, с шагом $h = 0,001$.



$h(n-1)$	$x(n)$	$v(n)$	$v(2n)$	S^*	$v(\text{итог})$	$U(n)$	$E(n)$
	0	1					
0,003	0,003	1,003005	1,003005	1,89E-15	1,003005	1,0030045	-2,00E-15
0,003	0,006	1,006018	1,006018	1,89E-15	1,006018	1,006018	-4,00E-15
0,003	0,009	1,009041	1,009041	1,89E-15	1,009041	1,0090406	-6,00E-15
0,003	0,012	1,012072	1,012072	2,13E-15	1,012072	1,0120723	-7,99E-15
0,003	0,015	1,015113	1,015113	1,89E-15	1,015113	1,0151131	-9,99E-15
0,003	0,018	1,018163	1,018163	1,89E-15	1,018163	1,018163	-1,20E-14
0,003	0,021	1,021222	1,021222	1,89E-15	1,021222	1,0212221	-1,40E-14
0,003	0,024	1,02429	1,02429	2,13E-15	1,02429	1,0242903	-1,62E-14
0,003	0,027	1,027368	1,027368	2,37E-15	1,027368	1,0273678	-1,84E-14
0,003	0,03	1,030455	1,030455	1,89E-15	1,030455	1,0304545	-2,07E-14
0,003	0,033	1,033551	1,033551	2,13E-15	1,033551	1,0335505	-2,26E-14
0,003	0,036	1,036656	1,036656	2,13E-15	1,036656	1,0366558	-2,49E-14
0,003	0,039	1,03977	1,03977	2,13E-15	1,03977	1,0397705	-2,71E-14
0,003	0,042	1,042894	1,042894	2,13E-15	1,042894	1,0428945	-2,93E-14
0,003	0,045	1,046028	1,046028	2,13E-15	1,046028	1,0460279	-3,15E-14
0,003	0,048	1,049171	1,049171	2,13E-15	1,049171	1,0491707	-3,38E-14
0,003	0,051	1,052323	1,052323	2,13E-15	1,052323	1,0523229	-3,57E-14
0,003	0,054	1,055485	1,055485	2,13E-15	1,055485	1,0554846	-3,82E-14

С контролем локальной погрешности, начальный шаг $h = 0,001$, контрольная величина $\varepsilon = 0,001$.

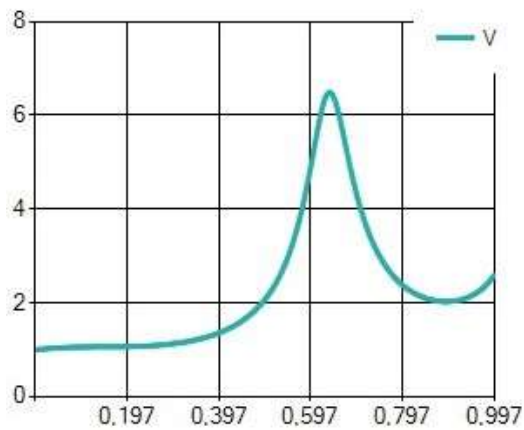


$h(n-1)$	$x(n)$	$v(n)$	$v(2n)$	S^*	$v(\text{итог})$	$U(n)$	$E(n)$	+	-
	0	1							
0,003	0,003	1,003005	1,003005	1,89E-15	1,003005	1,0030045	-2,00E-15	1	
0,006	0,009	1,009041	1,009041	6,51E-14	1,009041	1,0090406	-6,71E-14	1	
0,012	0,021	1,021222	1,021222	2,10E-12	1,021222	1,0212221	-2,16E-12	1	
0,024	0,045	1,046028	1,046028	6,80E-11	1,046028	1,0460279	-7,03E-11	1	
0,048	0,093	1,097462	1,097462	2,24E-09	1,097462	1,0974617	-2,31E-09	1	
0,096	0,189	1,208041	1,208041	7,56E-08	1,208041	1,208041	-7,83E-08	1	
0,192	0,381	1,463745	1,463747	2,70E-06	1,463745	1,4637476	-2,81E-06	1	
0,384	0,765	2,148882	2,148982	0,000107	2,148882	2,1489944	-0,000113		

Основная задача №1:

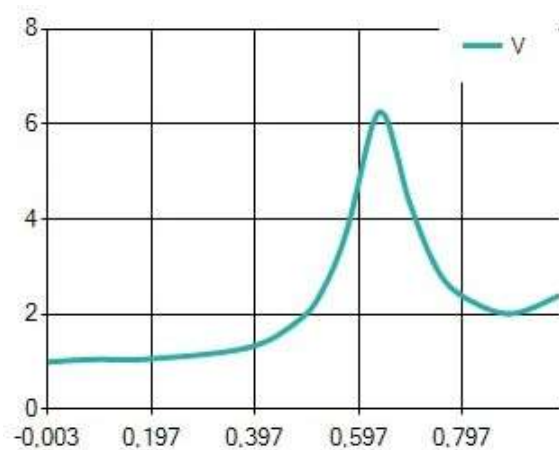
$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{x}{1+x^2}u^2 + u - u^3 \sin(10x) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Начальное условие $u(0) = 1$, без контроля локальной погрешности, с шагом $h = 0,001$.



$h(n-1)$	$x(n)$	$v(n)$	$v(2n)$	S^*	$v(\text{итог})$
	0	1			
0,003	0,003	1,002964	1,002964	5,79E-13	1,002964
0,003	0,006	1,005854	1,005854	5,37E-13	1,005854
0,003	0,009	1,008669	1,008669	4,92E-13	1,008669
0,003	0,012	1,011407	1,011407	4,44E-13	1,011407
0,003	0,015	1,014067	1,014067	3,94E-13	1,014067
0,003	0,018	1,016648	1,016648	3,41E-13	1,016648
0,003	0,021	1,01915	1,01915	2,86E-13	1,01915
0,003	0,024	1,02157	1,02157	2,30E-13	1,02157
0,003	0,027	1,023909	1,023909	1,73E-13	1,023909
0,003	0,03	1,026165	1,026165	1,15E-13	1,026165
0,003	0,033	1,028339	1,028339	5,64E-14	1,028339
0,003	0,036	1,03043	1,03043	1,42E-15	1,03043
0,003	0,039	1,032438	1,032438	5,87E-14	1,032438
0,003	0,042	1,034363	1,034363	1,14E-13	1,034363
0,003	0,045	1,036206	1,036206	1,69E-13	1,036206
0,003	0,048	1,037966	1,037966	2,21E-13	1,037966
0,003	0,051	1,039645	1,039645	2,71E-13	1,039645
0,003	0,054	1,041243	1,041243	3,18E-13	1,041243

С контролем локальной погрешности, начальный шаг $h = 0,001$, контрольная величина $\varepsilon = 0,001$.

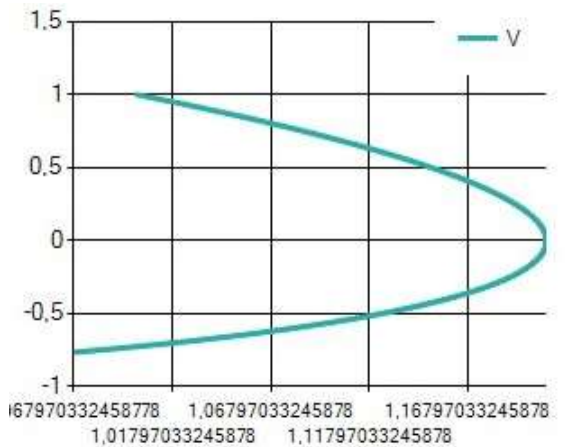


$h(n-1)$	$x(n)$	$v(n)$	$v(2n)$	S^*	$v(\text{итог})$	$U(n)$	$E(n)$	+	-
	0	1							
0,003	0,003	1,002964	1,002964	5,79E-13	1,002964			1	
0,006	0,009	1,008669	1,008669	1,64E-11	1,008669			1	
0,012	0,021	1,01915	1,01915	3,75E-10	1,01915			1	
0,024	0,045	1,036206	1,036206	1,08E-09	1,036206			1	
0,048	0,093	1,055241	1,055242	6,75E-07	1,055241			1	
0,096	0,189	1,063244	1,063285	4,36E-05	1,063244			1	
0,192	0,381	1,299201	1,302134	0,003129	1,299201				1
0,096	0,477	1,846785	1,847294	0,000543	1,846785			1	2
0,048	0,525	2,480079	2,480544	0,000496	2,480079			1	1
0,048	0,573	3,76005	3,764964	0,005242	3,76005				
0,048	0,621	5,923385	5,951043	0,029502	5,923385				1
0,024	0,645	6,205367	6,205594	0,000241	6,205367			1	1
0,024	0,669	5,393046	5,396236	0,003402	5,393046				
0,024	0,693	4,392742	4,392562	0,000192	4,392742			1	
0,048	0,741	3,080967	3,078315	0,002829	3,080967				
0,048	0,789	2,438104	2,438215	0,000119	2,438104			1	
0,096	0,885	2,015708	2,025168	0,010092	2,015708				
0,096	0,981	2,38688	2,387989	0,001182	2,38688				

Основная задача №2 имеет вид:

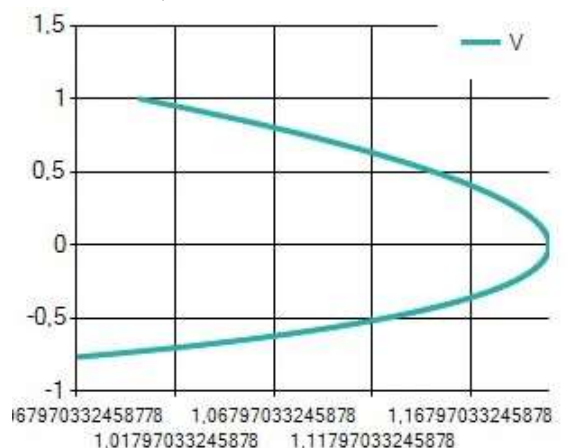
$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + au' + b \sin(u) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Начальное условие $u_1(0) = 1, u_2(0) = 2$, без контроля локальной погрешности, с шагом $h = 0,001$.



h(n-1)	x(n)	v1(n)	v1(2n)	v2(n)	v2(2n)	S*	v1(итог)	v2(итог)	+	-
	0	1		1						
0,003	0,003	1,003005	1,002996	0,991976	0,991967	9,58E-06	1,0030045	0,991976	0	0
0,003	0,006	1,005985	1,005977	0,983967	0,983958	9,50E-06	1,0059849	0,983967	0	0
0,003	0,009	1,008941	1,008933	0,975972	0,975963	9,42E-06	1,0089412	0,975972	0	0
0,003	0,012	1,011874	1,011865	0,967991	0,967982	9,34E-06	1,0118735	0,967991	0	0
0,003	0,015	1,014782	1,014774	0,960025	0,960016	9,27E-06	1,0147819	0,960025	0	0
0,003	0,018	1,017666	1,017658	0,952073	0,952064	9,19E-06	1,0176663	0,952073	0	0
0,003	0,021	1,020527	1,020519	0,944136	0,944128	9,12E-06	1,0205268	0,944136	0	0
0,003	0,024	1,023363	1,023355	0,936214	0,936205	9,04E-06	1,0233634	0,936214	0	0
0,003	0,027	1,026176	1,026168	0,928306	0,928298	8,97E-06	1,0261763	0,928306	0	0
0,003	0,03	1,028965	1,028957	0,920414	0,920405	8,90E-06	1,0289654	0,920414	0	0
0,003	0,033	1,031731	1,031723	0,912536	0,912527	8,82E-06	1,0317308	0,912536	0	0
0,003	0,036	1,034473	1,034465	0,904673	0,904665	8,75E-06	1,0344725	0,904673	0	0
0,003	0,039	1,037191	1,037183	0,896825	0,896817	8,68E-06	1,0371906	0,896825	0	0
0,003	0,042	1,039885	1,039877	0,888993	0,888985	8,61E-06	1,0398851	0,888993	0	0
0,003	0,045	1,042556	1,042548	0,881175	0,881167	8,54E-06	1,0425561	0,881175	0	0
0,003	0,048	1,045204	1,045196	0,873373	0,873365	8,47E-06	1,0452036	0,873373	0	0
0,003	0,051	1,047828	1,04782	0,865586	0,865579	8,40E-06	1,0478277	0,865586	0	0
0,003	0,054	1,050428	1,050421	0,857815	0,857807	8,33E-06	1,0504283	0,857815	0	0
0,003	0,057	1,053006	1,052998	0,850059	0,850051	8,28E-06	1,0530056	0,850059	0	0

С контролем локальной погрешности, начальный шаг $h = 0,001$, контрольная величина $\varepsilon = 0,001$.



$h(n-1)$	$x(n)$	$v1(n)$	$v1(2n)$	$v2(n)$	$v2(2n)$	S^*	$v1(\text{итог})$	$v2(\text{итог})$	+	-
	0	1		1						
0,003	0,003	1,003005	1,002996	0,991976	0,991967	9,58E-06	1,0030045	0,991976	0	0
0,003	0,006	1,005985	1,005977	0,983967	0,983958	9,50E-06	1,0059849	0,983967	0	0
0,003	0,009	1,008941	1,008933	0,975972	0,975963	9,42E-06	1,0089412	0,975972	0	0
0,003	0,012	1,011874	1,011865	0,967991	0,967982	9,34E-06	1,0118735	0,967991	0	0
0,003	0,015	1,014782	1,014774	0,960025	0,960016	9,27E-06	1,0147819	0,960025	0	0
0,003	0,018	1,017666	1,017658	0,952073	0,952064	9,19E-06	1,0176663	0,952073	0	0
0,003	0,021	1,020527	1,020519	0,944136	0,944128	9,12E-06	1,0205268	0,944136	0	0
0,003	0,024	1,023363	1,023355	0,936214	0,936205	9,04E-06	1,0233634	0,936214	0	0
0,003	0,027	1,026176	1,026168	0,928306	0,928298	8,97E-06	1,0261763	0,928306	0	0
0,003	0,03	1,028965	1,028957	0,920414	0,920405	8,90E-06	1,0289654	0,920414	0	0
0,003	0,033	1,031731	1,031723	0,912536	0,912527	8,82E-06	1,0317308	0,912536	0	0
0,003	0,036	1,034473	1,034465	0,904673	0,904665	8,75E-06	1,0344725	0,904673	0	0
0,003	0,039	1,037191	1,037183	0,896825	0,896817	8,68E-06	1,0371906	0,896825	0	0
0,003	0,042	1,039885	1,039877	0,888993	0,888985	8,61E-06	1,0398851	0,888993	0	0
0,003	0,045	1,042556	1,042548	0,881175	0,881167	8,54E-06	1,0425561	0,881175	0	0
0,003	0,048	1,045204	1,045196	0,873373	0,873365	8,47E-06	1,0452036	0,873373	0	0
0,003	0,051	1,047828	1,04782	0,865586	0,865579	8,40E-06	1,0478277	0,865586	0	0
0,003	0,054	1,050428	1,050421	0,857815	0,857807	8,33E-06	1,0504283	0,857815	0	0
0,003	0,057	1,053006	1,052998	0,850059	0,850051	8,28E-06	1,0530056	0,850059	0	0

5. Наблюдения и выводы.

Мы освоили численные методы интегрирования заданных функций для ОДУ с переменными коэффициентами и ищем и находимся упрощать шаги. Также, для тестовых функций, мы увидели, что можно проводить расчеты и методом, который мы используем, работает с заданными параметрами. Также это контролируем и находим работу метода с помощью компьютерной программы и др. и др.