Лабораторная работа №1 (весна) – ступень 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
(итерационный метод и его реализация в нестандартной области)

Выполнил(а): Семенова Вероника

Группа: 2 Вариант: 1

Метод (МВР, МПИ, ММН, МЧеб(К), МСГ): МВР

1. Постановка задачи

$\Delta u(x, y) = 2\pi^2 e^{\sin^2 \pi xy}(x^2+y^2)\left(\frac{\sin^2 2xy\pi}{2}+\cos 2xy\pi\right)$ при $(x,y) \in G \subset [0, 1] \otimes [0, 1]$,

M_1 $u(x, 1/2) = e^{\sin^2(\pi x/2)}$ $x \in [0, 1/2]$;

M_2 $u(1/2, y) = e^{\sin^2(\pi y/2)}$ $y \in [0, 1/2]$;

M_3 $u(x, 0) = 1$ $x \in [1/2, 1]$;

M_4 $u(1, y) = e^{\sin^2(\pi y)}$ $y \in [1, y]$;

M_5 $u(x, 1) = e^{\sin^2(\pi x)}$ $x \in [0, 1]$;

M_6 $u(0, y) = 1$ $y \in [1/2, 1]$;

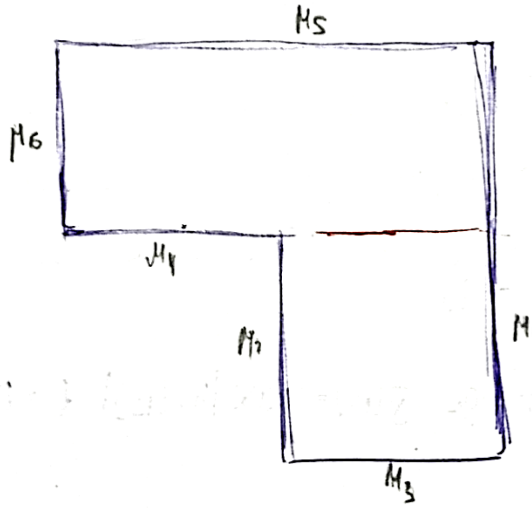
Функция температуры (обозначение): $u(x,y)$

Функция плотности источников и стоков тепла (обозначение): $f(x,y)$

Какую функцию нужно искать (запишите): $u(x,y)$, где $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$

Решение тестовой задачи (запишите) $u^*(x, y) = e^{\sin^2 \pi xy}$

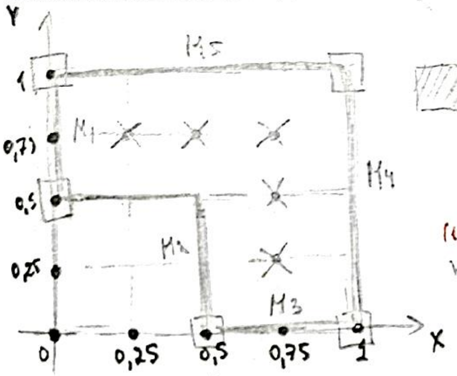
Изображение пластины (нарисовать $G \cup dG$)

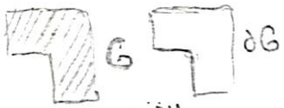


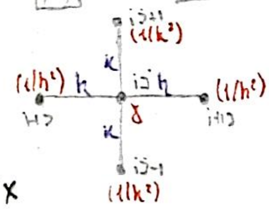
2. Сетка и разностная схема (общий вид)

Укажите кратность сетки-основы, приведите описание «своей» сетки (рисунок и формулы, можно вклеить рисунок).

Запишите схему как систему разностных уравнений (для конкретной сетки или для сетки произвольной размерности с учетом кратности), укажите диапазоны изменения индексов. Нарисуйте шаблон разностного оператора.







основная сетка: $(n,m)=(4,4)$

$\Omega = w_{hk} + \gamma_{hk}$ – сетка задачи

w_{hk} – 5 узлов внутри

γ_{hk} – все граничные узлы, кроме угловых $16-5=11$

$h=(b-a)/n$

$k=(c-d)/m$

$\gamma = -2(1/h^2+1/k^2)$

$x_i = a + hi \quad i=\overline{0,n}$

$y_i = c + \quad j=\overline{0,m}$

разностная схема:

$$\begin{cases} [V_{x\bar{x}}]_{ij} + [V_{y\bar{y}}]_{ij} = -f_{ij} & ij \in G \\ V_{i\,1/2} = \mu_1(x) & i=\overline{0,n/2} \\ V_{1/2\,j} = \mu_2(y) & j=\overline{0,n/2} \\ V_{i0} = \mu_3(x) & i=\overline{n/2+1,n} \\ V_{ij} = \mu_4(y) & j=\overline{0,n} \\ V_{i1} = \mu_5(x) & i=\overline{0,n} \\ V_{0j} = \mu_6(y) & j=\overline{n/2+1,n} \end{cases}$$

3. Разностная схема как СЛАУ $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$

Привести для конкретных (n, m) = (4 , 4): размерность $\mathcal{A}$ 5 X 5

Свойства $\mathcal{A}$:

1) невырожденная $\det A \neq 0$

2) отрицательно определенная $-A>0$

3) $A=A^T$

4) блочно трехдиагональная

Далее приводятся по выбору студента для конкретных (n, m) = (4 , 4):

минимальное по модулю собственное число $|\lambda_{min}| \geq 32$, $|\lambda_{min}| = 36{,}287$.

максимальное по модулю собственное число $|\lambda_{max}| < 96$. $|\lambda_{max}| = 91{,}7128$.

число обусловленности $\mu = |\lambda_{max} / \lambda_{min}| = \frac{36{,}287}{91{,}7128} = 2{,}52806$

Input

eigenvalues	$\begin{pmatrix} -64 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -64 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -64 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -64 & 16 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & -64 \end{pmatrix}$

Results

$\lambda_1 = -16(4 + \sqrt{3}) = -91.7128$

$\lambda_2 = -80$

$\lambda_3 = -64$

$\lambda_4 = -48$

$\lambda_5 = 16(\sqrt{3} - 4) = -36.287$

4. Запись схемы в виде $\mathcal{A}V = \mathcal{F}$ или $-\mathcal{A}V = -\mathcal{F}$

на сетке размерности (4 , 4)

(должны быть указаны все элементы матрицы, вектора и правой части на сетке конкретной размерности, использовать альбомный разворот или вклеить свой рисунок)

$V = (V_{31}, V_{32}, V_{13}, V_{23}, V_{33})$ $\quad A = -2(1/h^2 + 1/k^2)$

$$\begin{pmatrix} A & 1/k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/k^2 & A & 0 & 0 & 1/k^2 \\ 0 & 0 & A & 1/k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h^2 & A & 1/k^2 \\ 0 & 1/k^2 & 0 & 1/k^2 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{31} \\ V_{32} \\ V_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{13} - 1/h^2 M_2 - 1/x^2 M_3 - 1/k^2 M_4 \\ -f_{23} - 1/h^2 M_2 - 1/k^2 M_4 \\ -f_{31} - 1/h^2 M_1 - 1/k^2 M_6 - 1/k^2 M_5 \\ -f_{32} - 1/h^2 M_1 - 1/k^2 M_5 \\ -f_{33} - 1/h^2 M_4 - 1/k^2 M_5 \end{pmatrix}$$

$$A = -2\left(\frac{1}{(1/4)^2} + \frac{1}{(1/4^2)}\right) = -64$$

$$1/k^2 = 1/h^2 = \frac{1}{(1/4)^2} = 16$$

5. Описание итерационного метода

1) Запишите итерационный метод в каноническом виде (т.е. для решения произвольных СЛАУ вида $Ax = b$, $A=A^T>0$), укажите параметры метода;

2) Запишите итерационный метод для решения схемы $-\mathcal{A}\mathcal{V} = -\mathcal{F}$, а именно:

– формулы для расчета каждой компоненты искомого вектора $\mathcal{V}$ на очередной итерации (исходный вариант и оптимизация):

– формулы для расчета невязки $\mathcal{R}$ (исходный вариант и оптимизация);

– формулы для расчета параметров метода (оптимизация).

Укажите, зачем проведена замена знаков в системе $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$.

1) $AX = B$, $A = A^T > 0$ $\exists$ A - исходная матрица

$A = L + D + R$ L - нижне Δ-ая с нулевой гл. диагональю

R - верхне Δ-ая с нулевой гл. диагональю

D - диагональная

МВР принимает вид:

$(D + wL)\dfrac{x^{s+1} - x^s}{w} + Ax^s = b$, где w - параметр метода $w \in [0,2]$

$$x_i^{s+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left[-w\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{s+1} - w\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^s \ (1-w) a_{ii} x_j^s + w b_i\right]$$

2) вектор $v_{ij}^{(s+1)}$ рассчитывается как: $-AV = -F$

$$v_{ij}^{s+1} = -\frac{1}{A}\left[(1-w)(-A)\cdot v_{ij}^s + w\left(\frac{1}{h^2} v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2} v_{ij-1}^{s+1}\right) + w\left(\frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s + \frac{1}{h^2} v_{i+1j}^s\right) + w f_{ij}\right]$$

невязка рассчитывается как:

$$r_{ij}^s = -A v_{ij}^s - 1/h^2 (v_{i+1j}^s + v_{i+1j}^s) - 1/k^2 (v_{ij-1}^s + v_{ij+1}^s) - f_{ij}$$

замена знаков в системе $AV = F$ произведена для того, чтобы предложенный метод сходился (чтобы получить положительно определенную матрицу)

|| если матрица $A = A^T > 0$ и параметр $w \in (0,2)$, то МВР сходится

$w_{opt} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}}$: где $\rho(B) = \max|\lambda_i(B)|$ $B = D^{-1}(L - R)$

6. Анализ структуры погрешности

Запишите обозначения и определения всех типов (компонент) погрешностей, возникающих при решении основной и тестовой задачи с помощью разностных схем итерационными методами.

Запишите утверждения, необходимые для оценки погрешностей, и формулировку теоремы о сходимости итерационного метода.

$Z^s = V^s - V^*$ погрешность решение СЛАУ на s-й итерации

$R^s = AV^s - F$ невязка СЛАУ на s-й итерации

$Z = U - V$ погрешность решения разностной схемы

U - точное решение, V - решение схемы

общая погрешность записывается в виде: $Z_{общ} = U - \tilde{V}_s$

U - точное решение, $\tilde{V}$ - численное решение разностной схемы

$$Z_{общ} = \underbrace{U - V}_{\text{погрешность схемы}} + \underbrace{V - V_s}_{\text{погрешность метода}} + \underbrace{V_s - \tilde{V}_s}_{\text{погрешность счета}}$$

погрешность решения СЛАУ на шаге s можно оценить по невязке на шаге s, используя норму обратной матрицы:

$\|Z^s\| \le \|A^{-1}\| \|r^s\|$ $\quad \|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\min(\lambda)} = \dfrac{1}{\frac{4}{h^2}\sin(\pi/2n) + \frac{4}{k^2}\sin(\pi/2m)}$

(T) если матрица A симметричная и положительно определена и параметр $\omega \in (0,2)$ МВР сходится

$$\|Z^s\|_2 \le \frac{1}{\min|\lambda_i|} \|r^{(s)}\|_2$$

(T) пусть решение задачи ∃! и достаточно гладкое, тогда при $h \to 0$, $k \to 0$ решение разностной схемы сх-ся к решению задачи со вторым порядком

погрешность схемы:

$$\|Z\| \le \left(\frac{M_1 h^2 + M_2 k^2}{16}\right)\left((b-a)^2 + (d-c)^2\right)$$

7. Численное решение задачи с заданной погрешностью

Тестовая задача должна быть решена с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Тестовая задача решена с погрешностью $\varepsilon_1 = 3{,}004 \cdot 10^{-6}$.

Максимальное отклонение точного и численного решений в узле

$x =$ 0,705 $y =$ 0,706

Для решения тестовой задачи использована сетка-основа

число разбиений по x $n =$ 900 число разбиений по y $m =$ 900

метод верхней релаксации

параметры $\omega =$ 1,9921

Значения критериев остановки метода:

по точности $\varepsilon_{мет} = 10^{-12}$ по числу итераций $N_{max} =$ 5000

На решение СЛАУ затрачено $N =$ 4051 итерации

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 3{,}514 \cdot 10^{-13}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N)} \| = 1{,}1004 \cdot 10^{-5}$ (указать)

для невязки использована норма евклидова (указать)

погрешность решения СЛАУ $\| Z^{(N)} \|_\infty \le \| Z^{(N)} \|_2 \le \| A^{-1} \|_2 \, \| R^{N} \|_2 =$ (оценить)

$= \frac{1}{\min |\lambda|} \| R^{N} \|_2 \le 0{,}000356 \cdot 1{,}1004 \cdot 10^{-5} = 3{,}8918 \cdot 10^{-9}$

Начальное приближение итерационного метода

нулевое (указать)

Невязка на начальном приближении $\| R^{(0)} \| =$ 7135 8406,13 (указать)

для невязки использована норма евклидова (указать)

погрешность решения СЛАУ $\| Z^{(N)} \|_\infty \le \| Z^{(N)} \|_2 \le$ ______ (оценить)

По теореме о сходимости схемы *погрешность схемы*

$\| z \|_\infty \le \left(\frac{M_1 h^2 + M_2 k^2}{16} \right) \left((b-a)^2 + (d-c)^2 \right) = 0{,}0061362$ (оценить)

использована норма $\| z \|_\infty = \max |z_{ij}|$ $i,j \in \Omega$ (указать)

Общая погрешность решения тестовой задачи с учетом ее компонент

$\| z_{общ} \|_\infty \le \| z_{сл} \| + \| z_{мет} \| \le 3{,}8918 \cdot 10^{-9} + 1{,}362 \cdot 10^{-4} = 1{,}3624 \cdot 10^{-4}$ (оценить)

использована норма $\| z_{общ} \|_\infty = \max\limits_{i,j \in \Omega} |z_{ij}|$ (указать) погрешность схемы:

$$\|z_\infty\| \le \left(\frac{M_1 h^2 + M_2 k^2}{16}\right)\left((b-a)^2+(d-c)^2\right)$$

$$M_1 = \frac{1}{12}\max|u_x^{IV}| \qquad M_2 = \frac{1}{12}\max|u_y^{IV}|$$

$$u = e^{\sin^2 xy\pi}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = 4\pi^4 y^4 e^{\sin^2 \pi xy}\left(\sin^2(\pi xy)\left(3\sin^2(\pi xy)+2\right)+4\sin^4(\pi xy)+12\sin^2(\pi xy)+3\right)$$
$$\cos^4(\pi xy) - 2\left(6\sin^4(\pi xy)+11\sin^2(\pi xy)+1\right)\cos^2(\pi xy))$$

$$\max|u_x^{IV}| = \max|u_y^{IV}| = 20e\pi^4 \approx 5295{,}70724$$

$$\|z_\infty\| \le (h^2+k^2)\,55{,}16362$$

погрешность метода:

$$\|z^s\|_\infty \le \|z^s\|_2 \le \|A^{-1}\|_2\|R^s\|_2 = \frac{1}{\min|\lambda|}\|R^s\|_2$$

$$\min\lambda = \left\{\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{4}{k^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right\}$$

Derivative

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(e^{\sin(x\,y\,\pi)\sin(x\,y\,\pi)}\right) =$$
$$4\pi^4 y^4 e^{\sin^2(\pi x y)}\left(\sin^2(\pi x y)\left(3\sin^2(\pi x y)+2\right)+\left(4\sin^4(\pi x y)+12\sin^2(\pi x y)+3\right)\right.$$
$$\left.\cos^4(\pi x y) - 2\left(6\sin^4(\pi x y)+11\sin^2(\pi x y)+1\right)\cos^2(\pi x y)\right)$$

Input interpretation

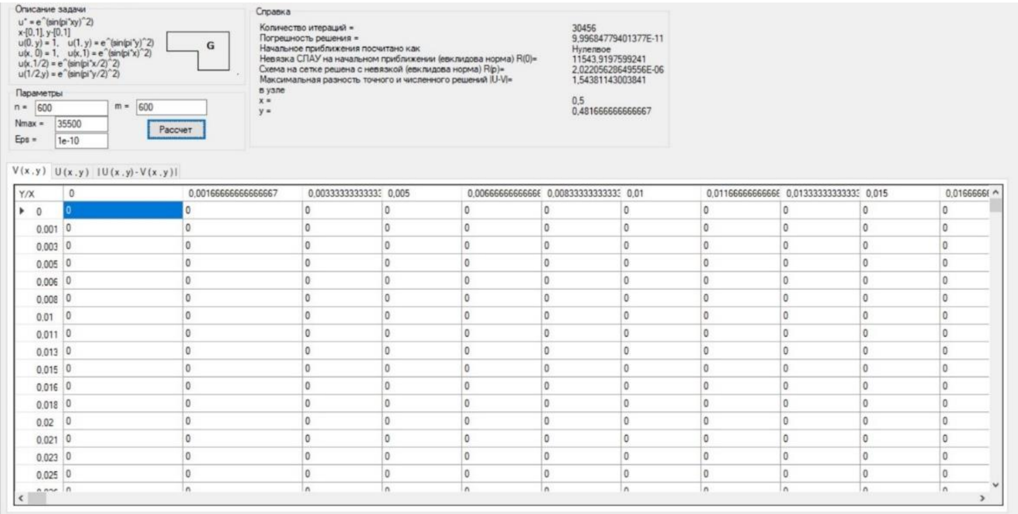
maximize		
	function	$(4\pi^4)\,y^4 e^{\sin^2(\pi x y)}\left(\sin^2(\pi x y)\left(3\sin^2(\pi x y)+2\right)+\left(4\sin^4(\pi x y)+12\sin^2(\pi x y)+3\right)\cos^4(\pi x y) - 2\left(6\sin^4(\pi x y)+11\sin^2(\pi x y)+1\right)\cos^2(\pi x y)\right)$
	domain	$0 \le x \le 1 \land 0 \le y \le 1$

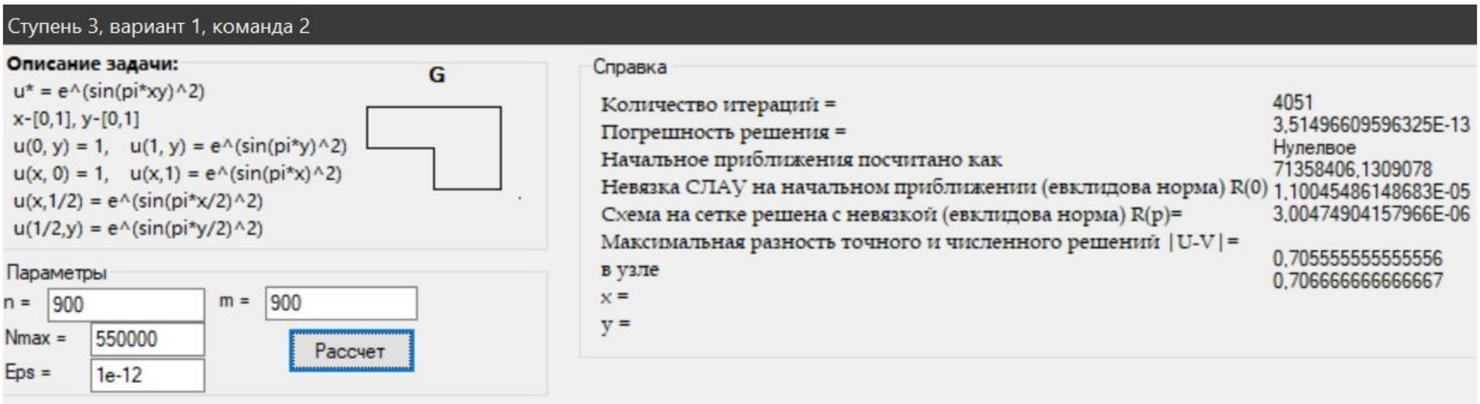
$e_1 \land e_2 \land \ldots$ is the logical AND function

Global maxima

$$\max\left\{(4\pi^4)\,y^4 e^{\sin^2(\pi x y)}\left(\sin^2(\pi x y)\left(3\sin^2(\pi x y)+2\right)+\left(4\sin^4(\pi x y)+12\sin^2(\pi x y)+3\right)\cos^4(\pi x y) - 2\left(6\sin^4(\pi x y)+11\sin^2(\pi x y)+1\right)\cos^2(\pi x y)\right) \,\middle|\, 0 \le x \le 1 \land 0 \le y \le 1\right\} \approx 5295.71 \text{ at } (x, y) = (0.5, 1)$$

Скриншот программы со справкой





Приведите таблицы (скриншоты)

Значения точного решения $u^{*}(x, y)$ *в узлах сетки*

V(x,y) U(x,y) |U(x,y)-V(x,y)|

Y/X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0,1	0	0	0	0	0	1,024773632...	1,0351415727...	1,047506599...	1,062058302...	1,079348021...	1,100199473
0,2	0	0	0	0	0	1,1001994733...	1,1437604772...	1,195858651...	1,256835544...	1,3279794666...	1,412684087
0,3	0	0	0	0	0	1,228885147...	1,3309261236...	1,4524917843...	1,592503462...	1,7497527629...	1,924196536
0,4	0	0	0	0	0	1,412684087...	1,597428007...	1,810320100...	2,040045027...	2,268733894...	2,470717260
0,5	1	1,0247736324935	1,1001994733...	1,228885147...	1,412684087...	1,648721270...	1,9277599294...	2,219852532...	2,483353514...	2,666552804...	2,718281828
0,6	1	1,03514157278661	1,1437604772...	1,3309261236...	1,597428007...	1,9277599294...	2,278224173...	2,5738117219...	2,730788467...	2,694492091...	2,470717260
0,7	1	1,04750659937472	1,195858651...	1,4524917843...	1,810320100...	2,219852532...	2,5738117219...	2,740442378...	2,645446534...	2,330418328...	1,924196536
0,8	1	1,06205830265016	1,256835544...	1,592503462...	2,040045027...	2,483353514...	2,730788467...	2,645446534...	2,2755131114...	1,808012108...	1,412684087
0,9	1	1,07934802138137	1,3279794666...	1,7497527629...	2,268733894...	2,666552804...	2,694492091...	2,330418328...	1,808012108...	1,366348600...	1,100199473
1	1	1,10019947339303	1,412684087...	1,9241965369...	2,470717260...	2,718281828...	2,470717260...	1,9241965369...	1,412684087...	1,1001994733...	1

Значения численного решения $v^{(N)}(x, y)$ *в узлах сетки*

V(x,y) U(x,y) |U(x,y)-V(x,y)|

Y/X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0,1	0	0	0	0	0	1,024773632...	1,035735453...	1,048736885...	1,063799209...	1,080945409...	1,100199473
0,2	0	0	0	0	0	1,1001994733...	1,1451271584...	1,198760378...	1,2612289496...	1,3325712602...	1,412684087
0,3	0	0	0	0	0	1,228885147...	1,3325712602...	1,455944828...	1,5977633423...	1,755347102...	1,924196536
0,4	0	0	0	0	0	1,412684087...	1,5977633423...	1,810658619...	2,039877273...	2,267577304...	2,470717260
0,5	1	1,0247736324935	1,1001994733...	1,228885147...	1,412684087...	1,648721270...	1,9241965369...	2,211990140...	2,470717260...	2,652568081...	2,718281828
0,6	1	1,03573545307678	1,1451271584...	1,3325712602...	1,5977633423...	1,9241965369...	2,267577304...	2,555258365...	2,707585695...	2,6759155422...	2,470717260
0,7	1	1,04873688542939	1,198760378...	1,455944828...	1,810658619...	2,211990140...	2,555258365...	2,7156011969...	2,624494334...	2,3216393510...	1,924196536
0,8	1	1,06379920922668	1,2612289496...	1,5977633423...	2,039877273...	2,470717260...	2,707585695...	2,624494334...	2,267577304...	1,810658619...	1,412684087
0,9	1	1,08094540935633	1,3325712602...	1,755347102...	2,267577304...	2,652568081...	2,6759155422...	2,3216393510...	1,810658619...	1,3715448381...	1,100199473
1	1	1,10019947339303	1,412684087...	1,9241965369...	2,470717260...	2,718281828...	2,470717260...	1,9241965369...	1,412684087...	1,1001994733...	1

Значения погрешности $u^{*}(x, y) – v^{(N)}(x, y)$ *в узлах сетки*

V(x,y) U(x,y) |U(x,y)-V(x,y)|

Y/X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0,00059388...	0,001230286...	0,001740906...	0,001597387...	0
0,2	0	0	0	0	0	0	0,001366681...	0,002901726...	0,004393405...	0,004591793...	0
0,3	0	0	0	0	0	0	0,001645136...	0,003453043...	0,005259880...	0,005594339...	0
0,4	0	0	0	0	0	0	0,000335334...	0,000338519...	0,000167754...	0,001156589...	0
0,5	0	0	0	0	0	0	0,003563392...	0,007862392...	0,012636254...	0,013984722...	0
0,6	0	0,0005938802901774...	0,001366681...	0,001645136...	0,000335334...	0,003563392...	0,010646868...	0,018553356...	0,023202771...	0,018576549...	0
0,7	0	0,00123028605466913	0,002901726...	0,003453043...	0,000338519...	0,007862392...	0,018553356...	0,024841181...	0,020952200...	0,008778977...	0
0,8	0	0,00174090657652348	0,004393405...	0,005259880...	0,000167754...	0,012636254...	0,023202771...	0,020952200...	0,007935806...	0,002646511...	0
0,9	0	0,00159738797495623	0,004591793...	0,005594339...	0,001156589...	0,013984722...	0,018576549...	0,008778977...	0,002646511...	0,005196238...	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Приведите графики (скриншоты)

График точного решения $u^*(x, y)$ *(поверхность);*

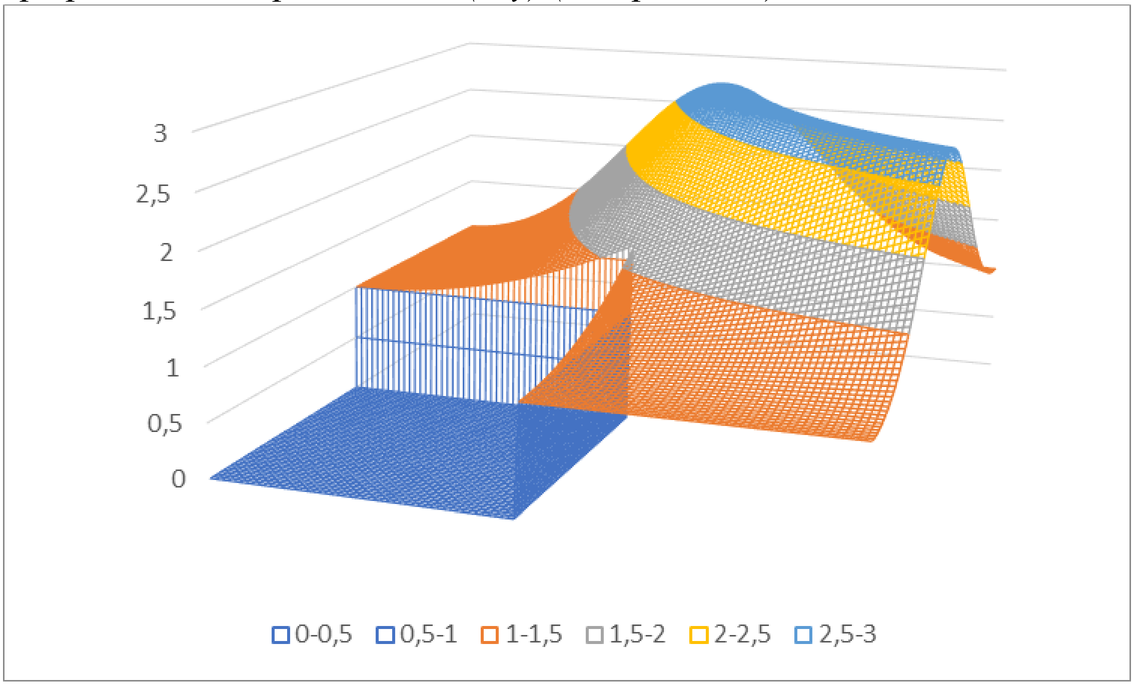


График численного решения $v^{(N)}(x, y)$ *(поверхность)*

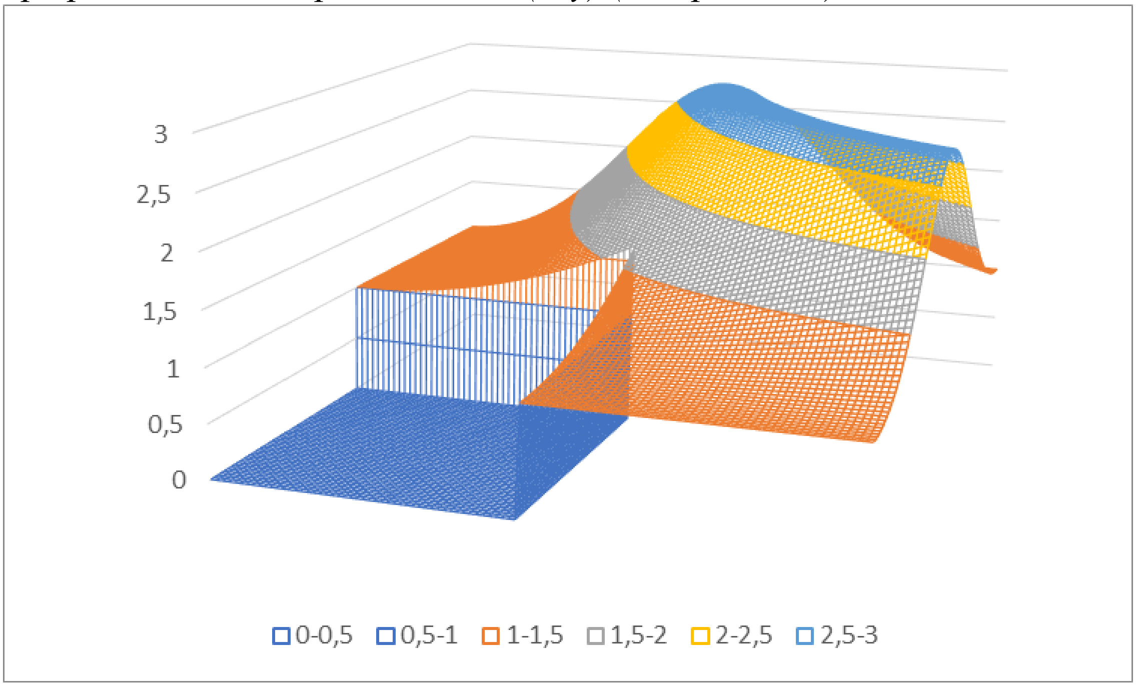
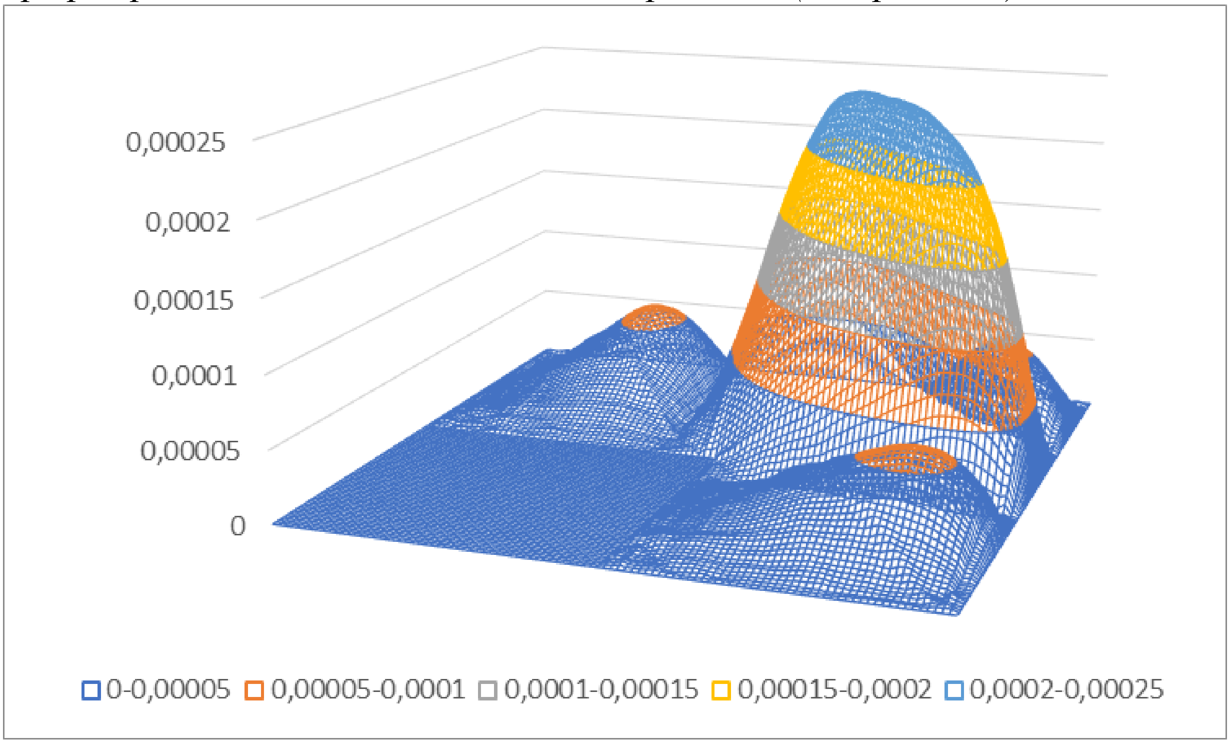


График разности точного и численного решения (поверхность).



9. Проверка программы: контроль «порядка сходимости»

Проверка убывания погрешности ε_1 показывает следующее:

n	m	ω, τ или K	$\varepsilon_{мет}$	$\varepsilon^{(N)}$	Тестовая задача, величина $max\,\lvert u_*(x_i y_j) - v_{(N)}(x_i y_j)\rvert$	Отношение значений погрешности
10	10	1,5233	$1 \cdot 10^{-5}$	$9{,}4 \cdot 10^{-6}$	$2{,}47 \cdot 10^{-2}$	
20	20	1,728	$1 \cdot 10^{-5}$	$9{,}02 \cdot 10^{-6}$	$6{,}06 \cdot 10^{-3}$	4,08
40	40	1,854	$1 \cdot 10^{-5}$	$9{,}75 \cdot 10^{-6}$	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	4,04
80	80	1,924	$1 \cdot 10^{-5}$	$9{,}56 \cdot 10^{-6}$	$3{,}66 \cdot 10^{-4}$	4,1
Порядок 2						

10. Выводы, ответы на вопросы

1) погрешность ε_1 удовлетворяет оценке, полученной для оценки погрешности. основным источником оценки погрешности является погрешность схемы.
2) не удалось достичь погрешности $\varepsilon_1 \leq 1/2 \cdot 10^{-6}$, т.к. требуется сетка больших размеров, чтобы уменьшилась погрешность схемы, из-за этого возрастут требования на точность, что приведет к увеличению времени работы программы и кол-ва вычислений.

11. Сведения о программе

код программы.

```
double X(int i)
{
	return aa + h * i;
}
double Y(int i)
{
	return cc + k * i;
}
double Mu(double x, double y) // GU
{
	return -pow(M_E, sin(M_PI * x * y) * sin(M_PI * x * y));
}
double F(double x, double y) // test
{
	return  -0.5 * M_PI * M_PI * (x * x + y * y) * pow(M_E, sin(M_PI * x * y) *
sin(M_PI * x * y)) * (-4 * cos(2 * M_PI * x * y) + cos(4 * M_PI * x * y) - 1);
             }

//Метод

{ double h2, k2, A, Emax = 0.0, R0 = 0.0, xMax = 0.0, yMax = 0.0, Rn = 0.0, Eps_max;
            double w = 1.98958;//Параметр МВР
            int p = 0;                   //Текущее число итераций

            //Ввод данных
            int n = Convert::ToInt32(textBox5->Text);
            if (n % 2 == 1) {
                  MessageBox::Show("Значение не кратно двум, n будет умножено на
два", "Предупреждение", MessageBoxButtons::OK);  n = n * 2;
                  textBox5->Text = Convert::ToString(n);
            }
            int m = Convert::ToInt32(textBox6->Text);
            if (m % 2 == 1) {
                  MessageBox::Show("Значение не кратно двум, m будет умножено на
два", "Предупреждение", MessageBoxButtons::OK);  m = m * 2;
                  textBox6->Text = Convert::ToString(m);
            }
            int Nmax = Convert::ToInt32(textBox7->Text);
            double Eps = Convert::ToDouble(textBox8->Text);

            //Инилициализация переменных
            h = (bb - aa) / n; k = (dd - cc) / m;        //Шаги по x и y
            h2 = 1.0 / (h * h), k2 = 1.0 / (k * k);
            A = -2 * (h2 + k2);

            double** v, ** f, ** u, ** hv, ** R;
            u = new double* [n + 1];  //истинное решение
            v = new double* [n + 1];  //численное решение
            R = new double* [n + 1];
            for (int i = 0; i <= n; i++)
            {
                  v[i] = new double[m + 1];
                  u[i] = new double[m + 1];
                  R[i] = new double[m + 1];
                  for (int j = 0; j <= m; j++)
                  {
                        v[i][j] = 0.0; //Нулевое начальное приближение
                        u[i][j] = 0.0;
                  }
```

```
		}

		//Заполнение граничных условий в массив v
		for (int i = 0; i <= n / 2; i++)
		{
			v[i][m] = Mu(X(i), 1);		//Mu(5)
			v[i][m / 2] = Mu(X(i), 0.5);	//Mu(1)

			R[i][0] = 0.0;
			R[i][m] = 0.0;
		}
		for (int i = n / 2; i <= n; i++)
		{
			v[i][m] = Mu(X(i), 1);		//Mu(5)
			v[i][0] = Mu(X(i), 0);		//Mu(3)

			R[i][0] = 0.0;
			R[i][m] = 0.0;
		}
		for (int j = 0; j <= m / 2; j++)
		{
			v[n][j] = Mu(1, Y(j));		//Mu(4)
			v[n / 2][j] = Mu(0.5, Y(j));	//Mu(2)

			R[0][j] = 0.0;
			R[n][j] = 0.0;
		}
		for (int j = m / 2; j <= m; j++)
		{
			v[n][j] = Mu(1, Y(j));		//Mu(4)
			v[0][j] = Mu(0, Y(j));		//Mu(6)

			R[0][j] = 0.0;
			R[n][j] = 0.0;
		}


		//Заполнение U, подсчет невязки
		for (int j = 0; j <= m/2; j++)
		{
			for (int i = n/2; i <= n; i++)
			{
				u[i][j] = Mu(X(i), Y(j));
			}
		}
		for (int j = m / 2; j <= m; j++)
		{
			for (int i = 0; i <= n; i++)
			{
				u[i][j] = Mu(X(i), Y(j));
			}
		}

		//Подсчет невязки
		double tmp = 0.0;
		for (int j = 1; j < m / 2; j++)
		{
			for (int i = n / 2 + 1; i < n; i++)
			{
				tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * 
(v[j - 1][i] + v[j + 1][i]) + F(X(i), Y(j));
				R0 += tmp * tmp;
			}
		}
```

```
            for (int j = m / 2 + 2; j < m; j++)
            {
                  for (int i = 1; i < n; i++)
                  {
                        tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * (v[j - 1][i] + v[j + 1][i]) + F(X(i), Y(j));
                        R0 += tmp * tmp;
                  }
            }
            R0 = std::sqrt(R0);

            //Метод верхней релаксации
            while (true) {
                  Eps_max = 0.0;
                  for (int j = 1; j < m / 2+1; j++) {
                        for (int i = n / 2 + 1; i < n; i++) {
                              double tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * (v[j - 1][i] + v[j + 1][i]);
                              v[j][i] = v[j][i] - w * (tmp + F(X(i), Y(j))) / A;

                              double CurE = std::fabs(v[j][i] - v[j][i]);
                              if (CurE > Eps_max)
                                    Eps_max = CurE;
                        }
                  }
                  for (int j = m/2+1; j < m; j++) {
                        for (int i = 1; i < n; i++) {
                              double last = v[j][i];
                              double tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * (v[j - 1][i] + v[j + 1][i]);
                              v[j][i] = v[j][i] - w * (tmp + F(X(i), Y(j))) / A;
                              double CurE = std::fabs(v[j][i] - last);
                              if (CurE > Eps_max)
                                    Eps_max = CurE;
                        }
                  }

                  p++;
                  if ((Eps_max < Eps) || (p > Nmax))
                        break;
            }
            //Вычисление невяки
            tmp = 0.0;
            for (int j = 1; j < m/2; j++)
            {
                  for (int i = n/2+1; i < n; i++)
                  {
                        tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * (v[j - 1][i] + v[j + 1][i]) + F(X(i), Y(j));
                        Rn += tmp * tmp;
                  }
            }
            for (int j = m/2+2; j < m; j++)
            {
                  for (int i =1; i < n; i++)
                  {
                        tmp = A * v[j][i] + h2 * (v[j][i - 1] + v[j][i + 1]) + k2 * (v[j - 1][i] + v[j + 1][i]) + F(X(i), Y(j));
                        Rn += tmp * tmp;
                  }
            }
                        Rn = std::sqrt(Rn);

}
```