HY-573
csd-4690

1º Assignment

1.1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_L : A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα / ιδιοτιμές θα λύσουμε,

$$(A_L - \lambda I) \cdot v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & 7 \\ 7 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(11-\lambda)^2 - 49 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 18 \quad \lambda_2 = 4 \quad , V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_R : AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_R - \lambda I) \cdot v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 & 4 \\ 6 & 10-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

- $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 0$, $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Τα singular values είναι:

- $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2$
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των μη-μηδενικών σ_i είναι το rank του A, δηλαδή $Rank(A) = 2$

Το rank ενώς πίνακα ορίζεται ως την διάσταση του διανυσματικού χώρου που παράγουν οι στήλες του πίνακα. Από τον ορισμό, συμπεραίνουμε ότι η διάσταση δεν μπορεί να πάρει μεγαλύτερη τιμή από το πλήθος των στηλών από τον οποίο απαρτίζεται ο πίνακας.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/6 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/6 \\ 2/3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}/6 \\ 1/3 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}$$

Οι στήλες του πίνακα U είναι τα normalized ιδιοδιανύσματα.

Αντίστοιχα τα unit eigenvectors του A^TA αποτελούν τις στήλες του πίνακα V

Δηλαδή

$$V = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε το SVD για να κάνουμε dimensionality reduction, μπορούμε από τους U, Σ, V^T πίνακες να κρατήσουμε τις πρώτες r στήλες. Οι πρώτες στήλες είναι αυτές που κρατάνε τις πιο "σημαντικές" πληροφορίες για τον πίνακα A, ενώ οι επόμενες, καθώς το singular value της στήλης μειώνεται, η πληροφορία που διατηρεί η στήλη εκφράζει όλο και λιγότερη πληροφορία για τον A.

Άρα αν κρατήσουμε τις πρώτες r στήλες το A εκφράζεται:

$$A \cong U_r \Sigma_r V_r^T$$

1.2) Για να βρούμε τον PCA θα υπολογίσουμε ιδιοδιανύσματα/τιμές για τον πίνακα

$$C = A^T A \cdot \frac{1}{n-1} \quad (\alpha)$$

Αν όμως κάνουμε SVD πρώτα, δηλαδή:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (\beta)$$

$$\Rightarrow C = A^T A \quad (\text{από } (\alpha))$$

$$\Rightarrow C = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T$$

$$\Rightarrow C = (V \Sigma^2 V^T) / n-1$$

Άρα τα διανύσματα του V είναι τα principal directions/eigenvectors του C, ενώ οι ιδιοτιμές δίνονται αν υψώσουμε τα singular values στο τετράγωνο, δηλαδή

$$PC1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \frac{1}{n-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{bmatrix}, \quad PC2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Για να κάνουμε project σε 1 Dimension, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ του A και του πρώτου μόνο PC1

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 + 3(\sqrt{2}/4) \\ 3(\sqrt{2}/4) + \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 + \sqrt{2}/4 \end{bmatrix} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}$$