

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Кафедра компьютерного моделирования

**Направление подготовки:** 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)

**Направленность (профиль) подготовки:** Аэродинамика и теплообмен летательных аппаратов

**Форма обучения:** очная

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**«Моделирование трансформации дисперсных характеристик  
трёхфазного потока в процессе движения по каналу сложной формы»**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Тух Никита Михайлович

---

*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**

Горячев Алексей Владимирович,

к-т техн. наук

---

*(подпись научного руководителя)*

Жуковский

2025

## АННОТАЦИЯ

В настоящей работе разработана и исследована физико-математическая модель трансформации дисперсных характеристик трёхфазного потока, включающего воздух, капли воды и кристаллы льда, при их движении по каналу сложной формы. Актуальность исследования обусловлена задачей прогнозирования процессов обледенения газотурбинных двигателей, при расчете которых необходима информация о динамических и дисперсных характеристиках потока.

В основу моделирования положены безразмерные параметры (число Вебера, Лапласа, Рейнольдса, параметр разбрызгивания Ярина—Вейсса и число Видора), позволяющие выделить четыре режима взаимодействия капель с твёрдой поверхностью — прилипание, отскок, растекание и разбрызгивание, а также три режима поведения ледяных кристаллов — упругий и неупругий отскок, фрагментация. Для частиц сформулированы дифференциальные уравнения движения и их фрагментации при взаимодействии со стенками канала.

Результаты численного моделирования демонстрируют зависимость траекторий и изменения диаметров частиц от начальных скоростей, размеров и условий потока. Показано, что для капель малого радиуса преобладают режимы прилипание и растекание, тогда как при увеличении числа Вебера наблюдается фрагментация и разбрызгивание. Аналогичные результаты получены для кристаллов льда.

Предложенные модели и полученные зависимости могут быть использованы при оптимизации противообледенительных систем, так как могут быть полезны для предсказания входных параметров потока в компрессор, что

важно для его дальнейшего расчета обледенения.

## СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ . . . . .	2
СОДЕРЖАНИЕ . . . . .	4
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
1 Общие положения . . . . .	9
1.1 Виды обледенения . . . . .	9
1.2 Обледенение переохлажденными каплями . . . . .	10
1.3 Обледенение ледяными кристаллами и смесью фаз . . . . .	14
1.4 Постановка задачи . . . . .	16
2 Многофазная модель процесса . . . . .	18
2.1 Математическая модель движения несущей фазы . . . . .	18
2.2 Математическая модель движения частиц в потоке . . . . .	19
2.3 Модель разрушения капель в потоке . . . . .	20
2.4 Модель взаимодействия частиц со стенкой . . . . .	21
2.4.1 Модель взаимодействия капель со стенкой . . . . .	21
2.4.2 Модель Трухильо . . . . .	23
2.4.3 Модель взаимодействия кристаллов со стенкой . . . . .	28
2.4.4 Модель MUSIC-haic . . . . .	29
3 Особенности программы . . . . .	34
3.1 Моделирование капель . . . . .	34
3.2 Моделирование кристаллов . . . . .	36

4	Результаты расчета по программе . . . . .	38
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	47
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	49

## ВВЕДЕНИЕ

### **Тема:**

Моделирование трансформации дисперсных характеристик трёхфазного потока в процессе движения по каналу сложной формы.

### **Актуальность**

Лёд может образовываться на аэродинамических поверхностях двигателя, особенно при низких температурах и наличии атмосферной воды. Эта вода поступает в виде переохлаждённых капель или кристаллов льда, и накопление льда приводит к ухудшению аэродинамических характеристик, повреждениям деталей (*Рисунок 1*) и даже блокировке потока. Такие явления могут вызвать серьезные аварийные ситуации — например, падение оборотов двигателя или погасание камеры сгорания, повреждение проточной части компрессора.

В связи с этим как в нашей стране, так и за рубежом разработаны новые нормативные документы, касающиеся безопасности полетов, которые определяют два типа обледенения: связанное с наличием в атмосфере жидких переохлаждённых капель, и обледенение, вызванное присутствием в атмосферном облаке ледяных кристаллов или смеси фаз. Особенно важным становится рост летных происшествий, связанных с попаданием в условия ледяных кристаллов. Это существенно влияет на безопасность полётов, поскольку даже незначительное нарушение в работе двигателя может иметь катастрофические последствия.

Данная работа направлена на моделирование трансформации дисперсных характеристик трёхфазного потока (воздух – жидкие капли – ледяные кристаллы) в канале сложной формы, чтобы получить распределение по ско-

ростам и по размерам частиц внутри двигателя. Эти данные необходимы для предсказания процессов обледенения на поверхностях двигателя, лопатках, а также как входные данные для дальнейшего расчета обледенения внутри компрессора.

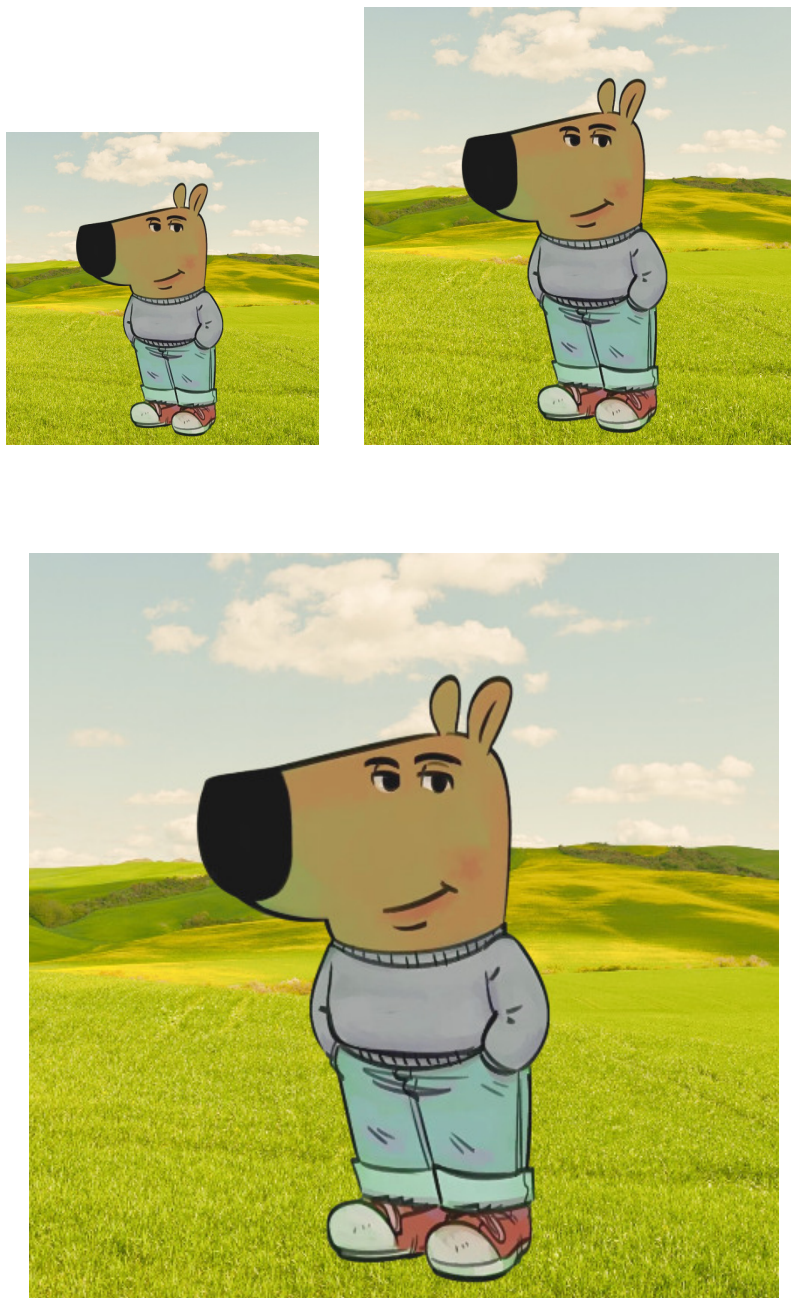


Рисунок 1 - Повреждения лопаток компрессора двигателя

### **Цель работы**

Основной целью данной работы является разработка программы на которой производится отработка физической и математической модели процесса движения и фрагментации капель и кристаллов в проточной части компрессора и расчёт с помощью этой программы этих процессов.

### **Задачи**

Для достижения поставленной цели, были сформулированы и решены следующие задачи:

- 1) Изучение видов обледенения;
- 2) Изучение моделей движения и фрагментации капель и кристаллов в потоке и при ударе о стенку;
- 3) Разработка программы, позволяющей рассчитывать процессы движения и фрагментации частиц в процессе их движения по каналу сложной формы;
- 4) Расчёт движения частиц, фрагментации, а также их динамических и дисперсных характеристик в процессе взаимодействия с элементами двигателя;



## **1 Общие положения**

### **1.1 Виды обледенения**

Существует два существенно различающихся вида обледенения при полете на больших высотах [5]. Первый вид – это обледенение в условиях крупных переохлажденных капель. Второй – в условиях кристаллов льда и смеси фаз. Обледенение в условиях жидких переохлажденных капель происходит в основном на входных элементах двигателя, а обледенение в условиях ледяных кристаллов и смеси фаз происходит в основном в проточной части компрессора, так как для прилипания необходимо их подплавление (*Рисунок 2*). Рассмотрим первый вид поподробнее.

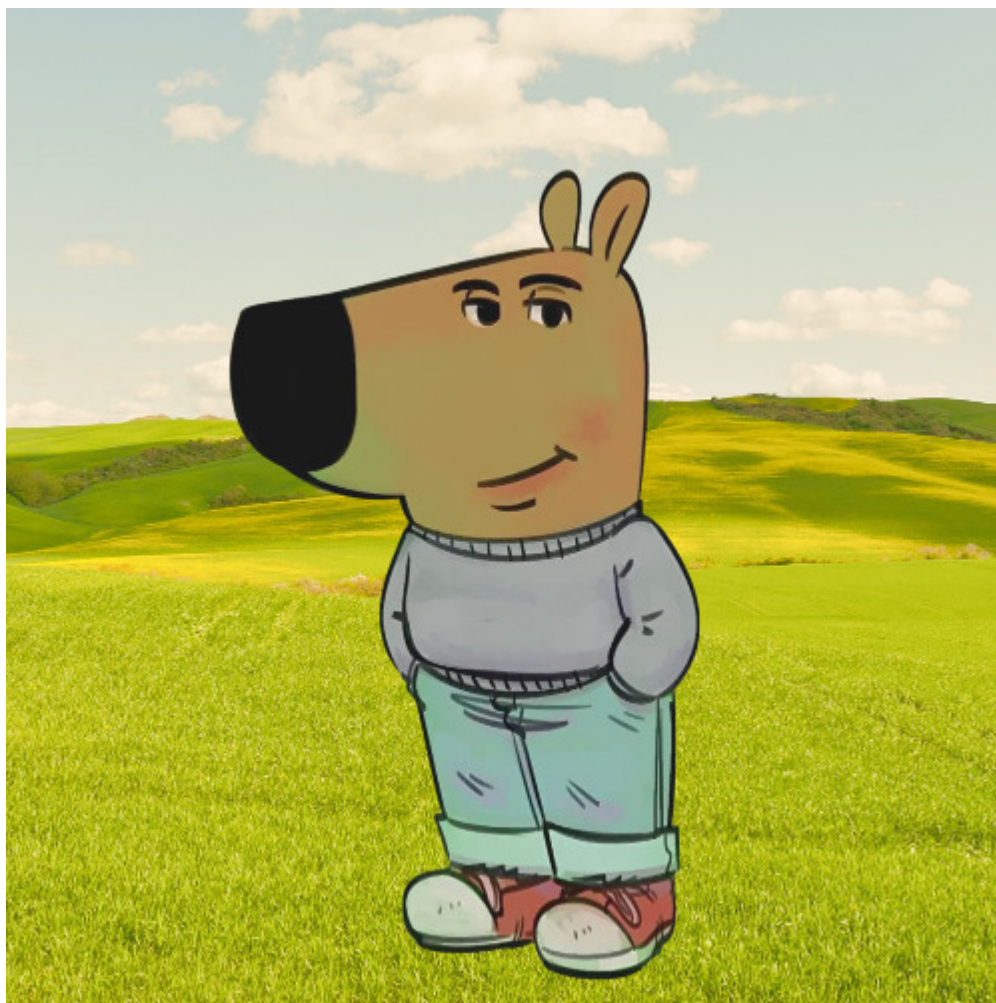


Рисунок 2 – Виды обледенения при воздействии на двигатель различных условий атмосферного облака.

## 1.2 Обледенение переохлажденными каплями

При температурах от  $0^{\circ}\text{C}$  до  $-30^{\circ}\text{C}$  в атмосфере присутствуют переохлаждённые капли воды, остающиеся в жидком состоянии несмотря на отрицательные температуры. Это вызвано тем, что у них нет центров кристаллизации для замерзания. Поэтому, попадая на входные элементы двигателя, они мгновенно замерзают, образуя ледяные наросты, представленные на *рисунке 3*. Этот процесс зависит от концентрации жидкой воды в набегающем потоке, распределения капель по размеру, аэродинамических условий и на-

личия или отсутствия обогрева поверхности, подвергающейся обледенению. Образовавшиеся ледяные наросты:

- 1) Изменяют эффективный профиль лопатки и аэродинамику потока внутри двигателя;
- 2) Снижают КПД двигателя;
- 3) Повышают риск механического разрушения деталей, при отрыве больших ледяных наростов.

Для защиты применяют противообледенительные системы, которые реализуют электрический обогрев или отбор горячего воздуха из камеры сгорания для обогрева поверхностей, подверженных обледенению, однако их эффективность ограничена интенсивностью облака и ресурсными возможностями двигателя.

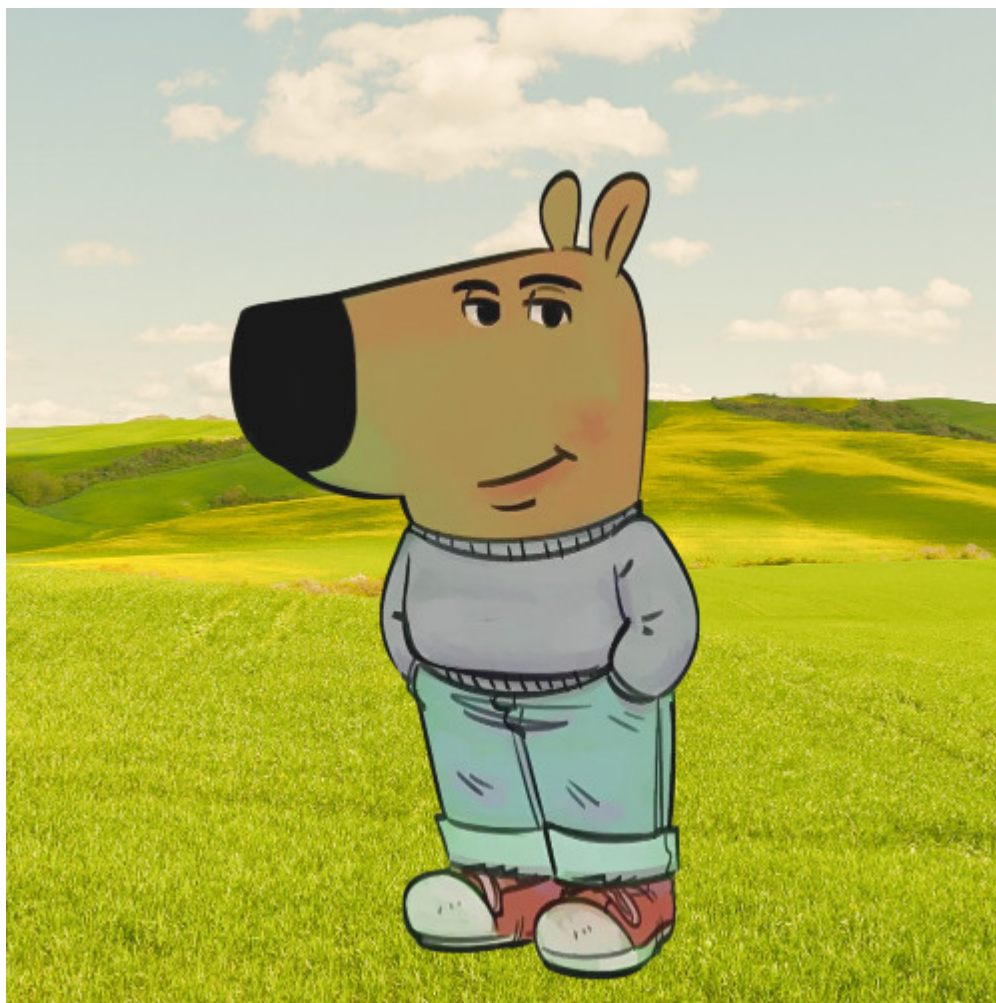
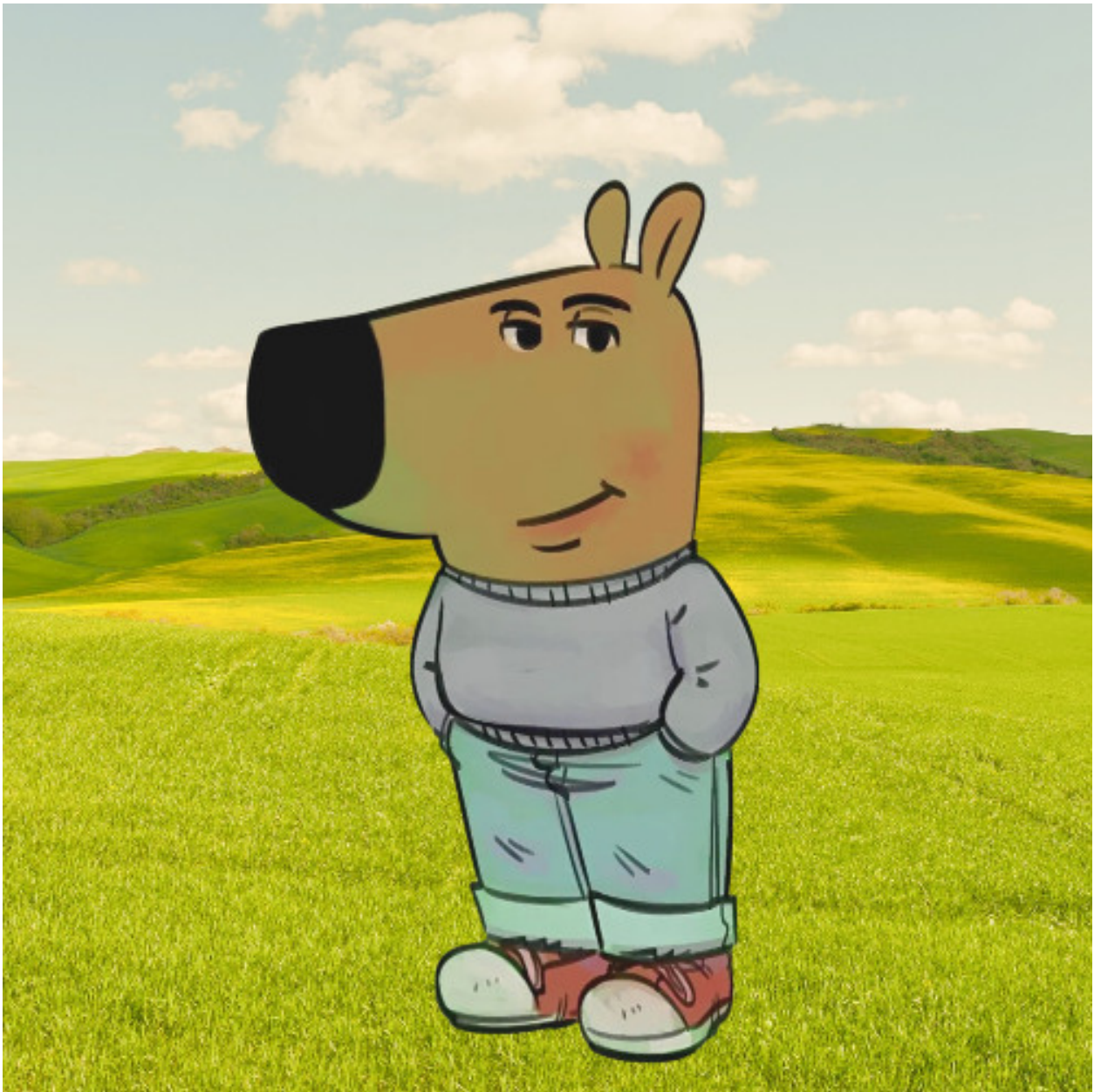


Рисунок 3 – Образование льда на элементах входа в двигатель.

При обледенении жидкими переохлаждёнными каплями выделяют два типа: изморозь (*рисунок 4а*) и глазурный лёд (*рисунок 4б*) [5].



а)

б)

Рисунок 4 – Схемы обледенения в условиях жидких переохлаждённых капель на аэродинамических поверхностях, а) изморозь и б) глазурный лёд.

Изморозь, или rime ice, формируется, когда мелкие переохлаждённые капли мгновенно замерзают при ударе о поверхность. Такой лед выглядит молочно, имеет плотную структуру и относительно округлую форму. Глазурный лёд, или glaze ice, возникает, когда более крупные капли не замерзают



мгновенно при взаимодействии с поверхностью. Часть жидкости растекается по поверхности, образуя водяную пленку, которая затем замерзает, часто с образованием роговидных наростов. Эти процессы негативно влияют на аэродинамику и эффективность работы двигателя, поэтому важно понимать их механизмы для разработки эффективных мер защиты.

### **1.3 Обледенение ледяными кристаллами и смесью фаз**

Второй вид обледенения возникает при попадании двигателя в атмосферные облака, содержащие кристаллы льда или смесь фаз. Ледяные кристаллы проникают в проточную часть компрессора двигателя и в процессе движения частично подплавляются, что обеспечивает возможность их прилипания к элементам проточной части компрессора. Интенсивное выпадение кристаллов на теплую поверхность приводит к ее постепенному охлаждению до нуля градусов Цельсия, после чего начинается процесс льдообразования. Механизмы формирования обледенения в условиях кристаллов значительно сложнее, чем в случае переохлажденных капель и зависят от концентрации и степени подплавления кристаллов, интенсивности обогрева поверхности, газодинамических характеристик потока, размера частиц, влажности и геометрии проточной части. Процесс льдообразования определяется не только термодинамическими процессами, но и эрозией поверхности льда.

Процесс обледенения в условиях ледяных кристаллов и смеси фаз сопровождается формированием конусообразных ледяных наростов, что приводит к существенно иным формам льда, показанным на *рисунке 5*.

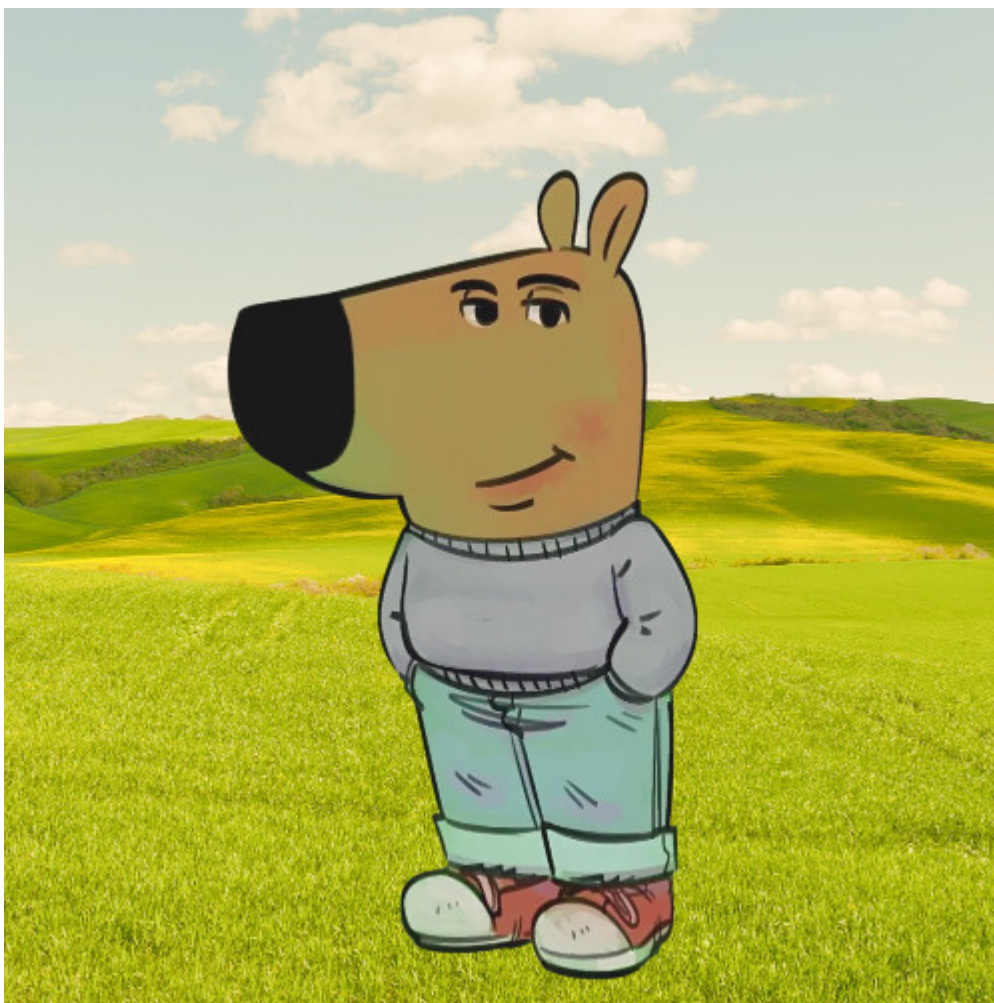


Рисунок 5 – Рост льда на цилиндрической модели (красная линия – поверхность цилиндра) при различной степени подплавления кристаллов.

При низком коэффициенте подплавления, т.е. отношению воды в жидкой фазе ко всей воде, кристаллы льда, попадая на поверхность, просто отскакивают, а при высоком – избыток жидкости смывает нарастающий лёд, оставляя поверхность недостаточно охлаждённой для нарастания льда. Исследования показывают, что существует оптимальный диапазон коэффициента подплавления примерно в пределах 5–25%, где нарастание льда достигает пика (*рисунок 6*) [5].

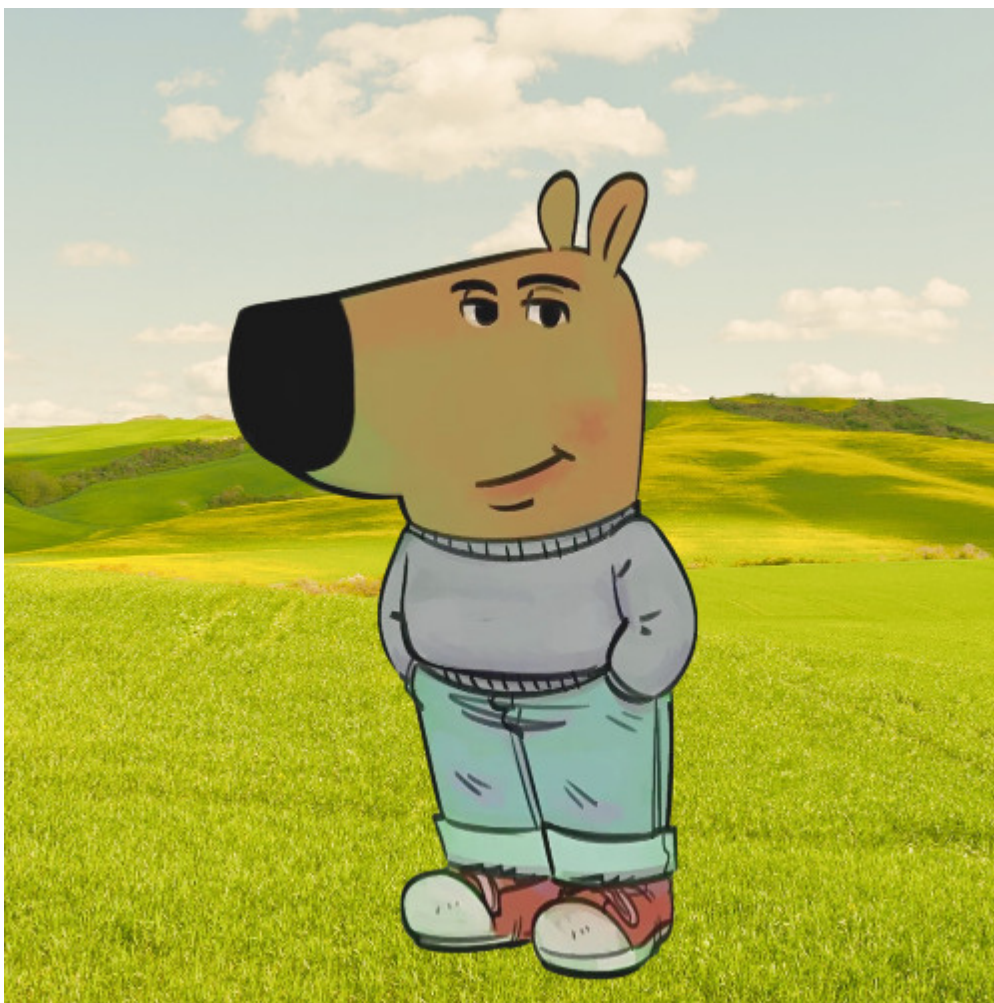


Рисунок 6 – Гипотетическая степень обледенения в условиях ледяных кристаллов в зависимости от степени таяния, указывающая на период наибольшего нарастания в диапазоне 10-25%.

#### **1.4 Постановка задачи**

Для расчёта необходимо моделировать движение трёхфазной среды, включающей воздух, переохлаждённые капли и ледяные кристаллы. При этом учитываются аэродинамика потока, изменения в дисперсном составе частиц по мере движения, а также их взаимодействие с поверхностями двигателя.

Задача: Расчёт процессов обледенения двигателей

Для расчета обледенения необходимо знать начальные условия которые



включают в себя:

- 1) Аэродинамические поля воздушного потока внутри проточной части;
- 2) Фрагментация капель и кристаллов в процессе их дробления при движении по проточной части компрессора;

Задача данного исследования:

- 1) Разработка модели распада капель как при движении в потоке, так и дроблении в процессе взаимодействия со стенкой;
- 2) Разработка модели дробления кристаллов в процессе их механического взаимодействия с элементами проточной части компрессора.;

## 2 Многофазная модель процесса

### 2.1 Математическая модель движения несущей фазы

Для задания движения несущей фазы, то есть воздуха внутри двигателя, используются уравнения Навье-Стокса. Уравнение неразрывности для газа записывается в форме [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}_r) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{V}_r$  — относительная скорость газа во вращающейся системе координат.

Уравнение импульса запишется в виде [7]:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}_r}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}_r \mathbf{V}_r) = \nabla \sigma_r^{ij} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.2)$$

где  $\sigma_r^{ij}$  — тензор напряжений, определяемый соотношением [7]:

$$\sigma_r^{ij} = -\delta^{ij} p_a + \mu_a \left[ \delta^{jk} \nabla_k v^i + \delta^{ik} \nabla_k v^j - \frac{2}{3} \delta^{ij} \nabla_k v^k \right] = -\delta^{ij} p_a + \tau^{ij}, \quad (2.3)$$

где  $\tau^{ij}$  — тензор касательных напряжений [7]:

$$\tau^{ij} = \mu_a \left[ \delta^{jk} \nabla_k v^i + \delta^{ik} \nabla_k v^j - \frac{2}{3} \delta^{ij} \nabla_k v^k \right], \quad (2.4)$$

$p_a$  — статическое давление воздуха,  $\mu_a$  — динамическая вязкость воздуха, определяемая по эмпирическому закону Сазерленда [7]:

$$\frac{\mu_a}{\mu_\infty} = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{T_\infty + 110}{T + 110} \right), \quad (2.5)$$

где  $T$  — статическая температура воздуха,  $T_\infty = 288$  К и  $\mu_\infty = 17,9 \cdot 10^{-6}$  Па·с.

Вектор силы  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  в уравнении (2.2) состоит из Кориолисовой и центробежной сил [7]:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{co}} + \mathbf{F}_{\text{ce}} = -2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{V}_r) - \rho\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (2.6)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения, а  $r$  — расстояние от оси вращения.

## 2.2 Математическая модель движения частиц в потоке

Движение капель и кристаллов льда описывается уравнениями неразрывности и импульса в следующей форме [1]:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla(\alpha \mathbf{V}_d) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \alpha \mathbf{V}_d}{\partial t} + \nabla[\alpha \mathbf{V}_d \times \mathbf{V}_d] = \frac{C_d Re_d}{24K} (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_d) + \alpha \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_d}\right) \frac{1}{Fr^2} + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.8)$$

где  $\alpha$  — концентрация частиц, где  $\mathbf{V}_d$  — вектор скорости частицы,  $Re_d$  — число Рейнольдса частицы,  $K$  — инерционный параметр,  $C_d$  — коэффициент сопротивления частицы в потоке,  $\mathbf{V}_a$  — вектор скорости воздуха,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  — вектор внешней силы. Число Рейнольдса рассчитывается следующим образом [4]:

$$Re_d = \frac{\rho_a d |\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_d|}{\mu_a}, \quad (2.9)$$

где  $\rho_a$  — плотность воздуха,  $d$  — диаметр частицы. Для инерционного параметра справедлива формула [6]:

$$K = \frac{\rho_d d^2 V_{a,\infty}}{18 L_\infty \mu_a}, \quad (2.10)$$

где  $\rho_d$  — плотность частицы,  $V_{a,\infty}$  — характерная скорость воздуха,  $L_\infty$  — характерный размер задачи. В зависимости от числа Рейнольдса у частиц будет разный коэффициент сопротивления:

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re_d} (1 + 0.166 Re_d^{0.33}), & \text{если } Re_d < 350 \\ 0.178 Re_d^{0.217}, & \text{если } Re_d \geq 350 \end{cases} \quad (2.11)$$

Число Фруда, входящее в уравнение (2.8) рассчитывается следующим образом [7]:

$$Fr = \frac{V_{a,\infty}}{\sqrt{L_\infty g_\infty}}, \quad (2.12)$$

При рассмотрении движения частиц в упрощенном случае, при подходе Лагранжа, в котором в отличие от Эйлера подхода, все уравнения записываются для каждой частицы по отдельности, получим упрощенное уравнение импульса [1]:

$$\frac{d\mathbf{V}_d}{dt} = \frac{C_d Re_d}{24K} (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_d) + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (2.13)$$

В дальнейшем будет использоваться именно это уравнение для моделирования движения кристаллов и капель в потоке.

### 2.3 Модель разрушения капель в потоке

Капли могут испытывать колебательные деформации, которые приводят к разрушению, вызванному ускорением, под действием аэродинамических сил. Изменение диаметра капли в процессе её разрушения определяется следующим дифференциальным уравнением в частных производных [1]:

$$\frac{dd}{dt} = \frac{d_{stab} - d_0}{T}, \quad (2.14)$$

где  $d_{stab}$  — стабильный диаметр капли,  $d_0$  — начальный диаметр капли,  $T$  — безразмерное время разрыва капли. Для капель выделяют пять различных механизмов разрушения, характеризующихся первоначальным состоянием капли. Безразмерное время распада  $T$  определяется следующим образом [1]:

$$T = \begin{cases} 6(We - 12)^{-0.25}, & 12 \leq We < 18 \\ 2.45(We - 12)^{0.25}, & 18 \leq We < 45 \\ 14.1(We - 12)^{-0.25}, & 45 \leq We < 350 \\ 0.766(We - 12)^{0.25}, & 350 \leq We < 2700 \\ 5500, & We \geq 2700 \end{cases} \quad (2.15)$$

Число Вебера, входящее в (2.15) определяется по формуле [1]:

$$We = \frac{\rho_a |\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_d|^2 d}{\sigma_d}, \quad (2.16)$$

где  $\sigma_d$  — коэффициент поверхностного натяжения капли. Максимальный устойчивый диаметр капли при прекращении всех процессов распада определяется с помощью критического числа Вебера [1]:

$$We_{crit} = 12 \Rightarrow d_{stab} = \frac{12\sigma_d}{\rho_a |\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_d|^2}, \quad (2.17)$$

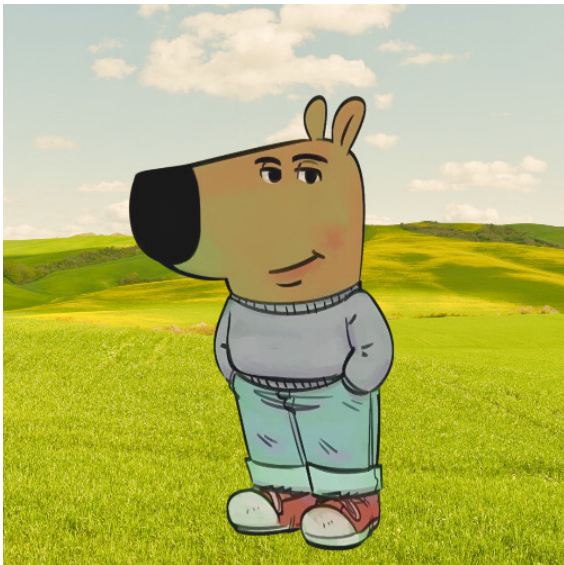
## 2.4 Модель взаимодействия частиц со стенкой

### 2.4.1 Модель взаимодействия капель со стенкой

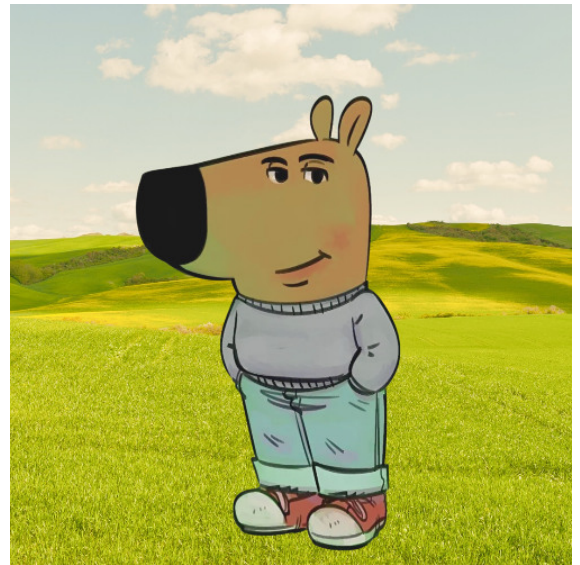
При полете в канале капли и кристаллы могут взаимодействовать со стенками этого канала. Модель взаимодействия капли с твёрдой стенкой зависит от её скоростных и теплофизических параметров. У капель выделяют четыре различных режима представленных на *рисунке 7* и основанных на безразмерном нормальном к стенке числе Вебера [4]:

$$We_n = \frac{\rho_a \mathbf{V}_{d,n}^2 d}{\sigma_d}, \quad (2.18)$$

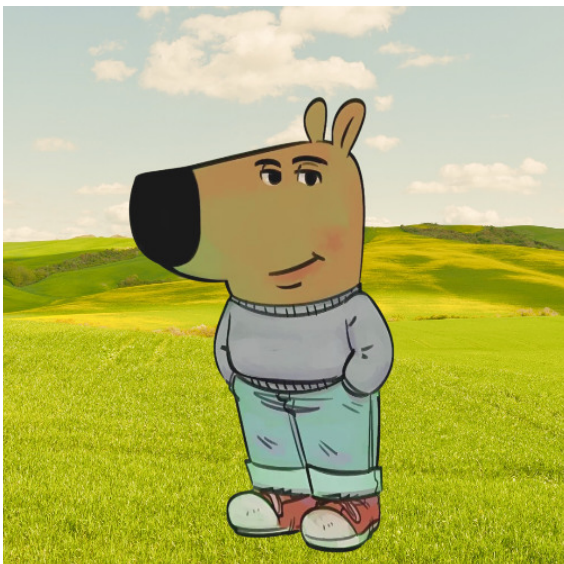
где  $\mathbf{V}_{d,n}$  — нормальная к поверхности скорость капли.



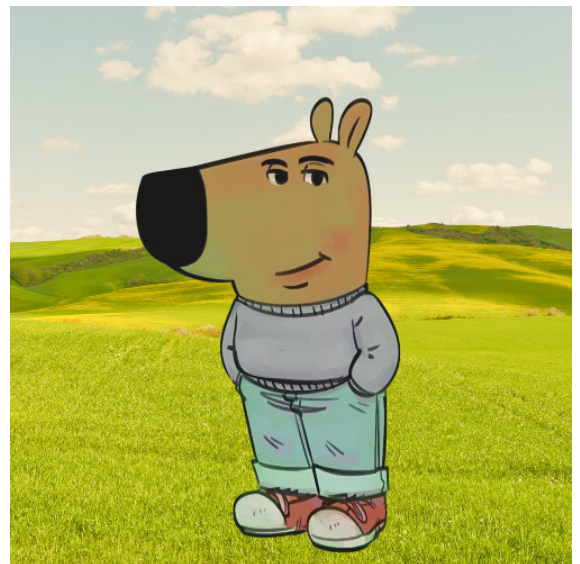
(a) Прилипание



(b) Отскок



(c) Растекание



(d) Разбрызгивание

Рисунок 7 - Варианты взаимодействия капли с твёрдой поверхностью

На основании различных диапазонов чисел Вебера определены основные режимы взаимодействия капли с поверхностью [4], они приведены в *таблице 1*:

Таблица 1 - Режимы взаимодействия капли с поверхностью

Режимы взаимодействия	Характерные числа Вебера	Результирующая скорость	Изменение диаметра и количества капель
Прилипание капли к поверхности	$We \leq 2$	Скорость зануляется	Исключается из потока
Отскок капли	$2 < We \leq 10$	Упругий отскок [4]	Не меняется
Растекание капли по поверхности	$10 < We \leq 1320La^{-0.183}$	Скорость зануляется	Исключается из потока
Реализуется разбрызгивание	$We > 1320La^{-0.183}$	Вычисляется по модели Трухильо [4]	Количество и размер капель вычисляется по модели Трухильо [4]

где число Лапласа вычисляется следующим образом:

$$La = \frac{\sigma_d \rho_d d}{\mu_d^2}, \quad (2.19)$$

$\mu_d$  — динамическая вязкость воды. Далее рассмотрим модель Трухильо для расчета изменения параметров взаимодействующих капель с поверхностью.

#### 2.4.2 Модель Трухильо

Модель Трухильо [4] применяется для расчета изменения дисперсных характеристик потока, а именно изменения скоростей капель, их диаметров и количества при взаимодействии со стенкой. Рассмотрим как меняются параметры потока для всех четырех возможных случаев взаимодействия с поверхностью. Начнем с прилипания капли к поверхности.

Случай 1. Прилипание капли к поверхности

При прилипании капли к поверхности ее скорость зануляется, диаметр не меняется, а сама капля исключается из потока и не участвует в дальнейшем процессе льдообразования.

Случай 2. Отскок капли от поверхности и поступление во внешний поток

При отскоке капли от поверхности она поступает во внешний поток и ее параметры (указаны на *рисунке 8*) меняются по модели Трухильо. Скорость меняется согласно соотношениям [1]:

$$f_{u,t} = \frac{u_{t,s}}{u_{t,0}} = 0.85 + 0.0025\theta_0 \quad (2.20)$$

$$f_{u,n} = \frac{u_{n,s}}{u_{n,0}} = - \left[ 0.993 - 0.0307 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + 0.0272 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)^2 - 0.0086 \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right)^3 \right], \quad (2.21)$$

$$\theta_0 = \arctan \left( \frac{u_{t,0}}{u_{n,0}} \right)$$

где  $u_{t,s}$  — тангенциальная составляющая отскочившей капли,  $u_{t,0}$  — тангенциальная составляющая падающей капли,  $\theta_0$  — угол между нормалью к поверхности и вектором падающей капли,  $u_{n,s}$  — нормальная составляющая отскочившей капли,  $u_{n,0}$  — нормальная составляющая падающей капли. Размер капли при отскоке не меняется.

Случай 3. Растекание капли по поверхности.

При растекании по поверхности капля исключается из потока и изменение ее параметров аналогично случаю прилипания.

Случай 4. Разбрызгивание капли.

Средняя скорость вторичных капель определяется с использованием эмпирической модели Трухильо следующим образом [1]:

$$\frac{u_{t,s}}{u_{t,0}} = 0.85 + 0.0025\theta_0 \quad (2.22)$$

$$\frac{u_{n,s}}{u_{n,0}} = -(0.12 + 0.002\theta_0) \quad (2.23)$$



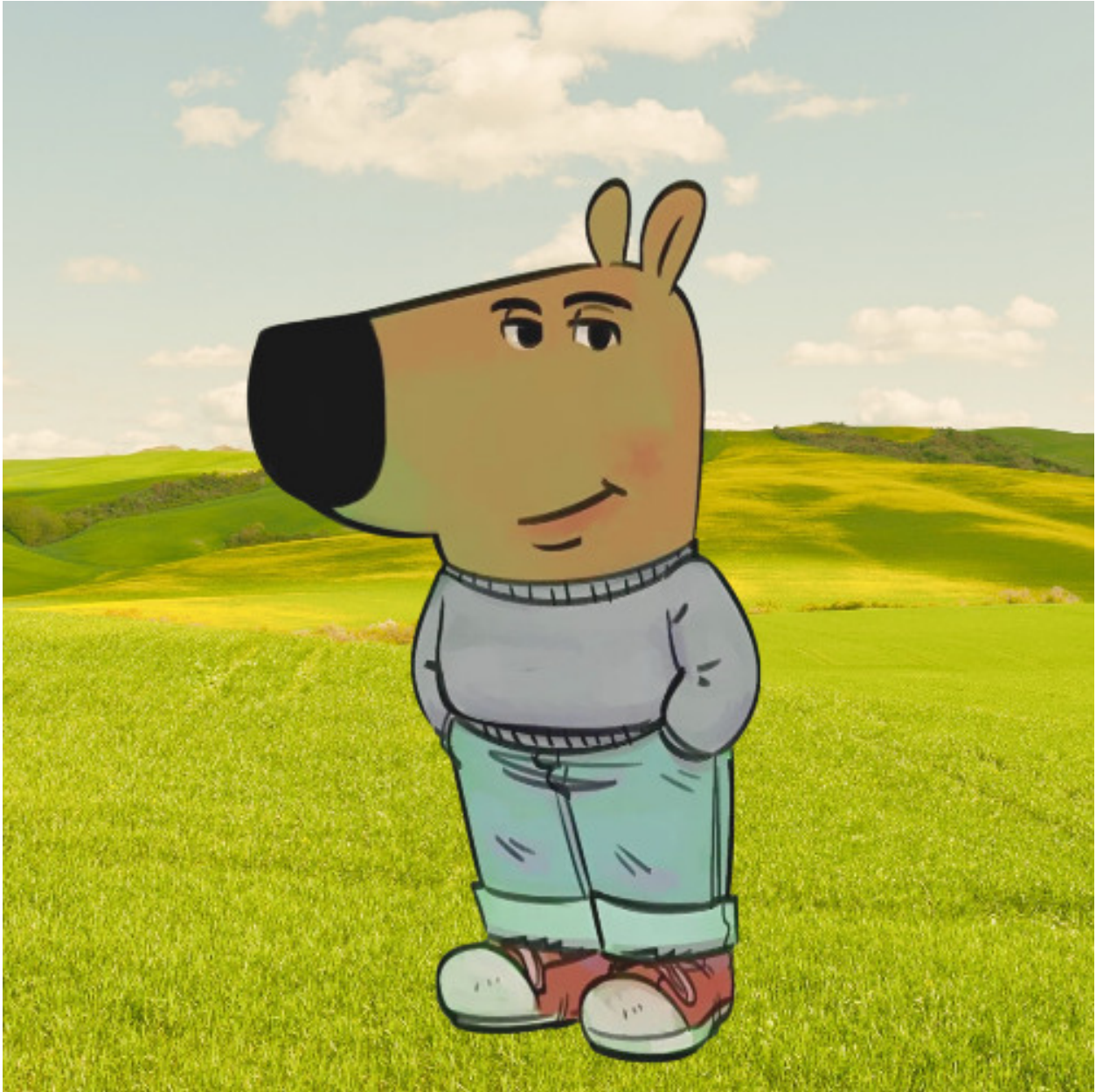


Рисунок 8 – Соответствующие параметры модели [1].

При разбрызгивании из одной капли получается множество вторичных капель, количество которых определяется соотношением [4]:

$$N = \frac{1}{22} \left\{ 0.0437 \left[ K \left( \frac{|u_d|}{u_{d,n}} \right)^2 - K_{crit} \right] - 44.92 \right\} \quad (2.24)$$

где  $K$  — параметр разбрызгивания Ярина и Вейсса, который считается сле-

дующим образом [4]:

$$K = \frac{3}{2} \left( \frac{LWC}{\rho_d} \right)^{-\frac{3}{8}} \left( Oh^{-\frac{2}{5}} We_n \right)^{\frac{5}{16}} \quad (2.25)$$

в который входит  $LWC$  — содержание жидкой воды в атмосфере [4], которое измеряется в граммах на метр кубический,  $Oh$  — критерий подобия Оне-зорге, характеризующий отношение сил вязкости к силам поверхностного натяжения и инерции [4]:

$$Oh = \frac{\mu_a}{\sqrt{\rho_a \sigma_d d}} \quad (2.26)$$

Параметр разбрызгивания увеличивается с увеличением диаметра, что делает разбрызгивание более вероятным для крупных переохлажденных капель, чем для обычных капель. При превышении величины параметра критического значения происходит разбрызгивание капли. Величина критического значения параметра Ярина и Вейсса [4]:

$$K_{crit} = 17 \quad (2.27)$$

Учет массы капель, разбрызгивающихся при ударе о поверхность аэродинамического профиля, выполняется с применением эмпирической модели разбрызгивания Трухильо, которая использует понятие коэффициента потери массы  $\varphi$ . Уравнение было откалибровано для условий крупных переохлажденных капель. Количество массы разбрызганной воды получено из измерений Ярина и Вейсса и приведено в виде отношения объемов вторичных капель к падающим каплям [4]:

$$\varphi(K) = \frac{m_s}{m_0} = \frac{3.8}{\sqrt{K}} (1 - \exp\{-0.85(K - K_{crit})\}) \quad (2.28)$$

где  $m_s$  — масса разбрызганной воды,  $m_0$  — масса падающей воды. Для  $\varphi(K)$  зависимость от  $K$  показана на рисунке 9 [4].

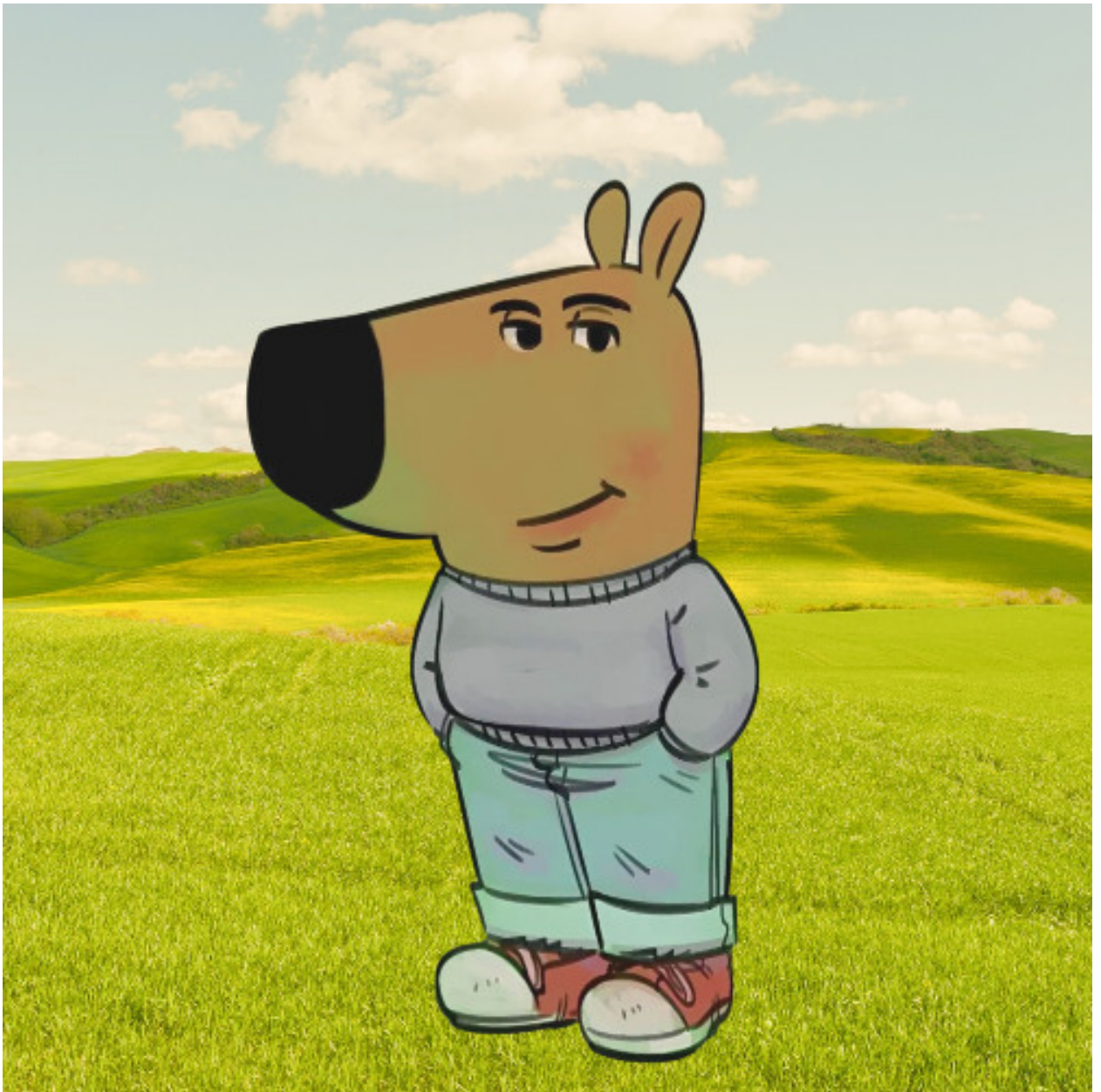


Рисунок 9 – Коэффициент потери массы.

Зная количество вторичных капель и величину потери массы, средний диаметр вторичных капель может быть рассчитан по формуле [4]:

$$d_s = \left( \frac{\varphi}{N} \right)^{\frac{1}{3}} d \quad (2.29)$$

### 2.4.3 Модель взаимодействия кристаллов со стенкой

Модель взаимодействия кристалла с твёрдой поверхностью основана на использовании безразмерного числа Видора, которое показывает соотношение между внутренней энергией кристалла при воздействии на поверхность и его поверхностной энергией [3]:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho_p d_p u_{p,n}^2}{12e_\sigma}, \quad (2.30)$$

где  $\rho_p$  и  $d_p$  — плотность и диаметр кристалла соответственно,  $e_\sigma$  — поверхностная энергия кристалла. Для неё справедлива формула:

$$e_\sigma = e_{\sigma_0} \exp \left[ \frac{Q_s}{R} \left( \frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \quad (2.31)$$

где  $e_{\sigma_0} = 0,12 \text{ Дж/м}^2$  — начальная поверхностная энергия кристалла,  $Q_s = 48,2 \text{ кДж/моль}$  — энергия активации,  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$  — универсальная газовая постоянная,  $T_p$  — температура кристалла, а  $T_0 = 253 \text{ К}$ .

На основании различных диапазонов чисел Видора выделяют три основных режима взаимодействия кристалла с поверхностью [3], они приведены в *таблице 2*:

Таблица 2 - Режимы взаимодействия кристалла с поверхностью

Режимы взаимодействия	Характерные числа Видора	Результирующая скорость	Изменение диаметра и количества кристаллов
Упругий отскок кристалла	$\mathcal{L} \leq 0,5$	Меняется как для упругого отскока	Не меняется
Неупругий отскок кристалла	$0,5 < \mathcal{L} \leq 90$	Расчет по модели MUSIC-haic [3]	Не меняется
Фрагментация кристалла	$\mathcal{L} > 90$	Расчет по модели MUSIC-haic [3]	Расчет по модели MUSIC-haic [3]

#### 2.4.4 Модель MUSIC-haic

Взаимодействие кристалла льда со стенкой представляет собой сложный процесс. Основными параметрами, влияющими на результаты и динамику, являются размер и скорость. Рассмотрим все три возможных варианта поподробнее.

##### Случай 1. Упругий отскок кристалла

При упругом отскоке кристалла от стенки его скорость меняется как для упругого оскока, то есть нормальная составляющая к поверхности меняет направление, не меняя величины, а тангенциальная составляющая сохраняется. Размер кристалла при этом не меняется.

##### Случай 2. Неупругий отскок кристалла

Для неупругого отскока кристалла так же как и для упругого размер не меняется. Скорость изменяется по модели MUSIC-haic согласно соотношению [3]:

$$\mathbf{v}_{p,s} = \xi_t(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{p,n}) - \xi_{nn}\mathbf{v}_{p,n}, \quad (2.32)$$

где  $\mathbf{v}_{p,s}$  — вектор скорости кристалла после отскока от поверхности,  $\mathbf{v}_p$  — вектор скорости перед ударом,  $\mathbf{v}_{p,n}$  — вектор нормальной к стенке скорости перед ударом,  $\xi_t = 1$  — коэффициент восстановления тангенциальной компоненты скорости,  $\xi_{nn}$  — коэффициент восстановления нормальной компоненты скорости, который вычисляется с помощью соотношения [3]:

$$\xi_{nn} = \left( \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}} \right)^{\frac{1}{3}}, \mathcal{L}_1 = 0.5 \quad (2.33)$$

##### Случай 3. Фрагментация кристалла

Средняя скорость фрагментированных кристаллов определяется с помощью модели MUSIC-haic следующим образом [3]:

$$\mathbf{v}_{p,s} = \xi_t(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_{p,n}) - v_{p,n}(\xi_{nt}\mathbf{t} + \xi_{nn}\mathbf{n}), \quad (2.34)$$

где  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  — тангенциальный и нормальный к поверхности единичные вектора соответственно,  $\xi_{nt}$  — коэффициент восстановления, описывающий тангенциальную составляющую скорости, вызванную нормальной входящей составляющей скорости. Он вычисляется по формуле:

$$\xi_{nt} = k \frac{1}{v_{p,n}} \int_{r_{p,min}}^{r_{p,max}} \frac{\gamma - 1}{r_{p,max}^{\gamma-1} - r_{p,min}^{\gamma-1}} r_f^{-\gamma} \int_0^{r_p - r_f} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{4}{3}(r_p - r_f)^3} k \dot{\varepsilon} (r_p + r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (2.35)$$

после взятия интеграла получается:

$$\xi_{nt} = k \frac{3}{32} \pi v_{p,n}^{-\frac{1}{2}} \rho_p^{-\frac{1}{4}} Y_c^{\frac{1}{4}} \left[ 1 - \frac{1}{r_p} \frac{r_{p,max}^{2-\gamma} - r_{p,min}^{2-\gamma}}{r_{p,max}^{1-\gamma} - r_{p,min}^{1-\gamma}} \right], \quad (2.36)$$

где параметр  $k \approx 0,909$  используется для приведения модели в соответствие с имеющимися экспериментальными данными,  $\rho_p$  — плотность льда,  $r_p$  — радиус налетающего кристалла, а  $r_{p,max}$  и  $r_{p,min}$  — радиусы самого маленького и самого большого фрагментированного кристалла соответственно,  $\gamma = 2,73$ .

Что касается предела текучести при сжатии  $Y_c$ , то экспериментальные данные свидетельствуют о том, что он зависит от скорости деформации и от температуры. В качестве зависимости от скорости деформации используется полиномиальная подгонка. Температурная зависимость квазистатического предела текучести льда при сжатии описывается экспериментальными данными для которых простая линейная подгонка дает удовлетворительную точность. Полученная формула гласит [8]:

$$Y_c(T, \dot{\varepsilon}) = Y_{c,0} f_{y_c}(\dot{\varepsilon}) g_{y_c}(T), \quad (2.37)$$

где контрольное значение квазистатического предела текучести при сжатии

$Y_{c,0} = 5,2 \cdot 10^6$  Па, а для  $f_{y_c}(\dot{\epsilon})$  и  $g_{y_c}(T)$  справедливы соотношения [8]:

$$f_{y_c}(\dot{\epsilon}) = \exp \left( 3.596 \cdot 10^{-4} \ln^3 \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) - 7.47 \cdot 10^{-3} \ln^2 \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) + 1.118 \cdot 10^{-1} \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) + 1.062 \right) \quad (2.38)$$

$$g_{y_c}(T) = -28.7 \left( \frac{T}{T_{c,0}} \right) + 30.21, \quad (2.39)$$

где  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации кристалла, а  $\dot{\epsilon}_0$  — параметр нормализации скорости деформации,  $T_{c,0} = 273$  К. Оценка скорости деформации [8]:

$$\dot{\epsilon} \sim v_{n,0}^{\frac{1}{2}} d_p^{-1} \rho_p^{-\frac{1}{4}} Y_c^{\frac{1}{4}} \quad (2.40)$$

Как видно из уравнения (2.40) для того чтобы посчитать  $\dot{\epsilon}$  необходимо знать  $Y_c$ , но для  $Y_c$  в свою очередь нужно знание  $\dot{\epsilon}$ . Проблема решается просто: сначала для расчета  $\dot{\epsilon}$  по формуле (2.40) вместо  $Y_c$  подставляется  $Y_{c,0}$ , а затем уже по формуле (2.37) вычисляется  $Y_c$ . Таким образом происходит итеративная процедура до тех пор пока не достигнется желаемая точность. Для  $\dot{\epsilon}_0$  справедливо соотношение [8]:

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{1}{6} P_{s,0}^3 c^{-3} \rho_p^{-2} G_c^{-1}, \quad (2.41)$$

где  $P_{s,0} = 10^6$  Па — постоянное исходное растягивающее давление,  $c$  — скорость звука и  $G_c$  — энергия на единицу площади, необходимая для создания новой поверхности разлома. Скорость звука в кристалле льда вычисляется как:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_p}}, \quad (2.42)$$

где  $E = 10,5 \cdot 10^9$  Па — модуль Юнга.

$$G_c = G_{c,0} \exp \left( \frac{Q_s}{RT} - \frac{Q_s}{RT_0} \right), \quad (2.43)$$

где  $G_{c,0} = 0,12$  Дж/м<sup>2</sup>.

Рассмотрим дальше какие получаются диаметры фрагментированных кристаллов. Для этого сначала считается максимальный диаметр фрагментированного кристалла [3]:

$$d_{p,max} = C_f s_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^\alpha, \quad (2.44)$$

где  $C_f = 42,824$ ,  $\alpha = -0,885$  [8],  $s_0$  — параметр нормализации для размера фрагмента, который вычисляется согласно соотношению [8]:

$$s_0 = 12EG_c P_{s,0}^{-2} \quad (2.45)$$

Затем считается минимальный диаметр фрагментированного кристалла:

$$d_{p,min} = 0.015 d_{p,max} \quad (2.46)$$

Теперь зная размер самого маленького и самого больших фрагментов льда строится распределение кристаллов по размерам [9]:

$$Q(s) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{s}{s_c} \right)^{k_s} \right], \quad (2.47)$$

где  $s_c = 0,75$ ,  $k_s = 5,8$ ,  $s = d/d_{p,max}$ .  $Q(s)$  рассчитывается путем суммирования массы всех фрагментов, размеры которых меньше заданного размера  $s$ . Размер фрагмента оценивается как диаметр сферы с одинаковой массой, значения нормируются на диаметр образца. На *рисунке 10* [9] можно видеть экспериментальные распределения по размерам, полученные для разных скоростей соударения кристаллов со стенкой. Зеленой пунктирной линией показана аппроксимация формулой (2.47). При увеличении скорости соударения кривая распределения смещается влево, то есть уменьшается максимальный диаметр получившихся осколков.



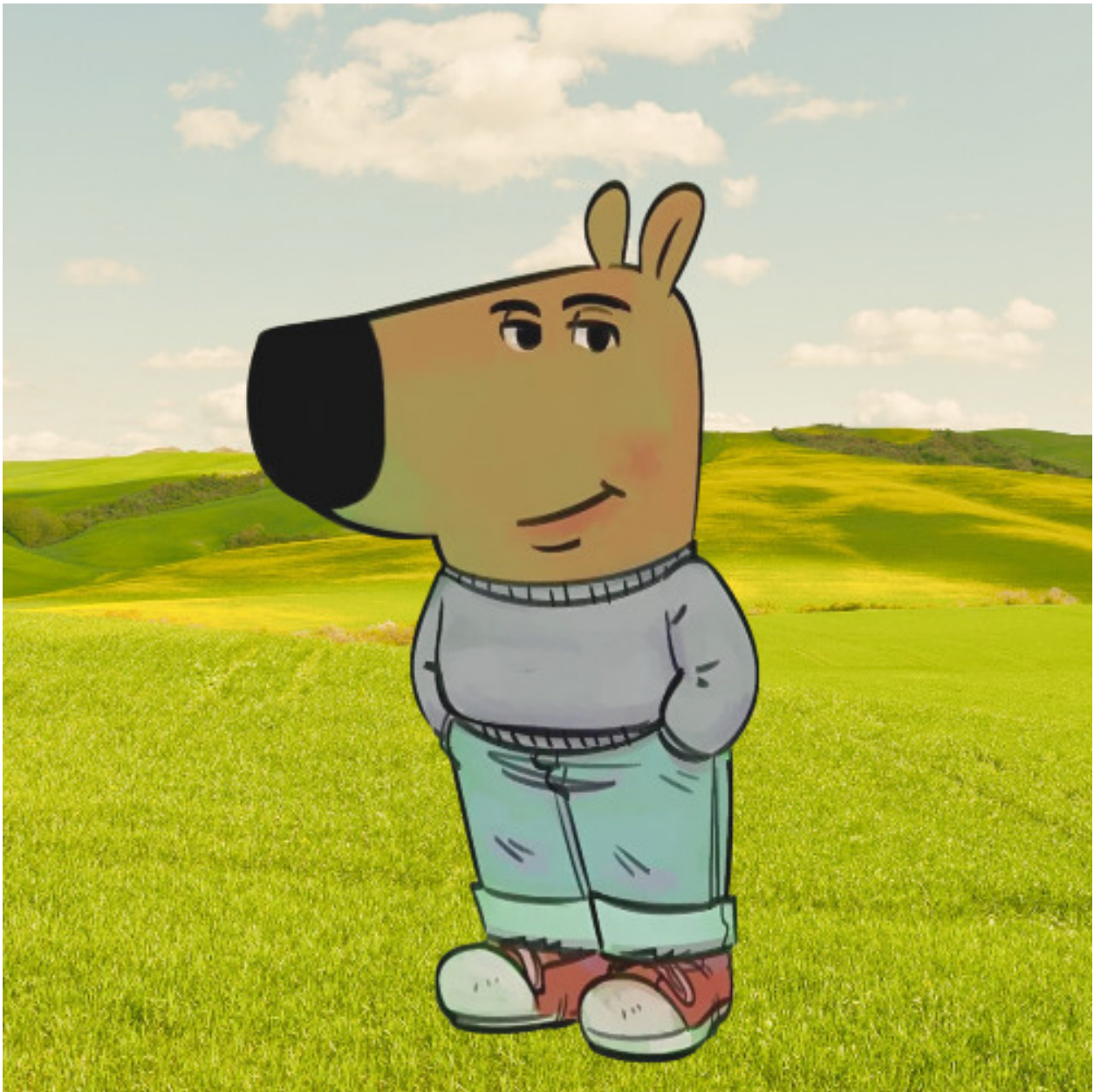


Рисунок 10 – Распределение фрагментов по размерам.

### **3 Особенности программы**

В данной работе капли и кристаллы моделируются отдельно двумя программами. Хотя для них выполняются одни и те же уравнения движения, но их поведение при взаимодействии с поверхностью в корне отличается как видно из моделей описанных выше. Капля описывается как жидкая частица, её форма и размер меняются непрерывно под действием капиллярных и инерционных сил (числа Вебера и Рейнольдса) в процессе полета, поэтому в алгоритме учитывается постепенное приближение к «стабильному» диаметру. Кристалл, напротив, рассматривается как твёрдое тело с фиксированным начальным диаметром, у которого при ударе в первую очередь включаются механизмы упругого и неупругого отскоков или фрагментации, основанного на безразмерном числе Видора и критериях прочности таких как модуль Юнга, энергия образования новой поверхности. Здесь не наблюдается плавного изменения диаметра в полёте, а изменение размеров происходит только при фрагментации в момент столкновения.

#### **3.1 Моделирование капель**

Рассмотрим ключевые особенности реализации программы моделирования движения и взаимодействия жидкой капли со стенкой в потоке воздуха. Программа написана на языке Python и использует библиотеки `pumpy`, `math` и `matplotlib`. Ниже рассмотрены следующие аспекты:

1. Структура кода и объектно-ориентированный подход
2. Алгоритм расчёта динамики капли
3. Обработка столкновения со стенкой

## 4. Хранение данных и визуализация

### 1. Структура кода и объектно-ориентированный подход

Капля реализована в виде класса Drop, который хранит текущее положение  $(x, y)$ , скорости  $(v_x, v_y)$ , диаметр  $d$ , внешнюю силу  $F_{ext}$  и параметры среды такие как плотность воздуха  $\rho_a$ , вязкость  $\mu_a$  и скорость воздуха  $v_a$ . В этом классе реализованы функции для моделирования движения капли и ее взаимодействия с поверхностями.

### 2. Алгоритм расчёта динамики капли

Сначала считается число Рейнольдса капли по формуле (2.9), затем по формуле (2.11) считается коэффициент сопротивления капли. Обновление скорости капли строится по дробной схеме в подходе Лагранжа, поэтому формула (2.8) упрощается до (2.13):

$$\mathbf{v}_{i+1} = \frac{\mathbf{v}_i + \frac{3}{8} \frac{C_d \rho_a}{\rho_d r_d} v_a \Delta t + \mathbf{F}_{ext} \Delta t}{1 + \frac{3}{8} \frac{C_d \rho_a}{\rho_d r_d} \Delta t}, \quad (3.1)$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени,  $\mathbf{v}_i$  — вектор скорости на  $i$ -ом шаге, а  $\mathbf{v}_{i+1}$  — на  $i+1$ -ом.

### 3. Обработка столкновения со стенкой

В данной реализации программы стенка задается вертикальной линией с  $x = x_{wall}$ ,  $y \in [y_{bottom}, y_{top}]$ , хотя стенку можно задавать любой. При моделировании на каждом шаге проверяется условие  $x_i \geq x_{wall}$ , если это условие выполняется, то капля столкнулась со стенкой и по нормальному числу Вебера (2.18) считается по модели Трухильо [4] вариант взаимодействия.

### 4. Хранение данных и визуализация

В классе Drop есть массив для хранения всех данных связанных с каплей и несущей фазой. В нем хранится 12 переменных  $t_i, x_i, y_i, v_{x,i}, v_{y,i}, d_i, We_i, Re_i, d_{stab,i}, We_{n,i}$ , где  $\Delta v_i$  — модуль разности скоростей капли и воздуха. В качестве визуализации поведения капли строятся графики  $d(t), x(t), We(t), Re(t), d_{stab}(t), \Delta v(t), v$

для упрощения анализа поведения капли. В дополнение к этому производится анимация поведения капли на которой в динамике видно поведение капли.

### 3.2 Моделирование кристаллов

Ниже рассмотрены следующие особенности программы для расчета взаимодействия кристаллов:

1. Объектно-ориентированная структура
2. Число Видора и критерии взаимодействия со стенкой
3. Сопротивление воздуха и обновление скоростей
4. Хранение данных и визуализация

#### 1. Объектно-ориентированная структура

Кристалл представлен классом `Crystal`, в котором хранится текущее положение  $(x, y)$ , скорость  $(v_x, v_y)$ , диаметр  $d$ , внешняя сила  $F_{ext}$ , температура кристалла и параметры прочности, такие как энергия активации и поверхностная энергия.

#### 2. Число Видора и критерии взаимодействия со стенкой

На каждом шаге для кристалла вычисляется безразмерное число Видора и проверяется так же как и для капли условие столкновения со стенкой. В зависимости от числа Видора происходит один из трех возможных случаев взаимодействия со стенкой согласно модели MUSIC-haic [3].

#### 3. Сопротивление воздуха и обновление скоростей

Для участков полета, где кристалл не взаимодействует со стенкой, считается число Рейнольдса  $Re$  и коэффициент сопротивления  $C_d$  так же, как и для капли. Обновление скорости происходит по той же формуле, что и для капли.

#### 4. Хранение данных и визуализация

Для кристаллов так же, как и для капель создан массив для хранения всей информации связанной с ним. В нем хранится 10 величин таких как  $t_i, x_i, y_i, v_{x,i}, v_{y,i}, Re_i, \Delta v_i, v_{a,i}, \mathcal{L}_i, d_i$ . Для визуализации поведения кристалла строятся графики для  $x(t), \mathcal{L}(t), Re(t), \Delta v(t), v_a(t), v_x(t), v_y(t)$ . Анимация траектории кристалла: красная вертикальная линия  $x = x_{wall}$ , которая обозначает стенку. Точка движется и отражается (или фрагментируется) в зависимости от условий. При фрагментации дополнительно выводится график распределения фрагментов по размерам (2.47).

## 4 Результаты расчета по программе

В этой главе приводятся итоги моделирования взаимодействия жидких капель и твёрдых кристаллов со стенкой при специально подобранных начальных условиях. Цель — продемонстрировать четыре возможных сценария взаимодействия для капель и три — для кристаллов. Начнем с выбора начальных условий для капель. Все четыре капли моделируются из начальной точки  $(0, 0)$  с разными скоростями, диаметрами, силами, действующими на них вертикально вниз и скоростями воздуха, которые меняются по линейному закону. Стенка находится на расстоянии 10 м от старта капель, с параметрами приведенными в *Таблице 3*.

Таблица 3 — Начальные условия моделирования и результат взаимодействия капель со стенкой

№ режима	Начальная скорость, м/с	Радиус, мкм	Скорость воздуха, м/с	Внешняя сила	Результат взаимодействия
1	10	20	20–50	50	Прилипание
2	100	30	120–150	50	Растекание
3	50	30	120–150	60	Отскок
4	120	1000	120–150	150	Разбрызгивание

Для кристаллов ситуация аналогична каплям, только для них есть всего три различных варианта взаимодействия с поверхностью. Для кристаллов стенка находится на расстоянии 5 м от их старта из нулевой точки и параметры приведены в *Таблице 4*.

Таблица 4 — Начальные условия моделирования и результат взаимодействия кристаллов со стенкой

№ режима	Начальная скорость, м/с	Радиус, мкм	Скорость воздуха, м/с	Внешняя сила	Результат взаимодействия
1	20	50	40–60	50	Упругий отскок
2	50	100	120–150	100	Неупругий отскок
3	200	1000	300–400	1000	Фрагментация

Изменение диаметра капель приведено на *рисунке 11*. Как видно из рисунка для режимов прилипания, растекания и отскока размер капель не меняется на протяжении всего полета. Для режима фрагментации можно увидеть заметное изменение диаметра при взаимодействии со стенкой и в дальнейшем разрушение в потоке (режим 4 на *рисунке 11*). Согласно соотношению (2.24) получилось шесть вторичных капель.

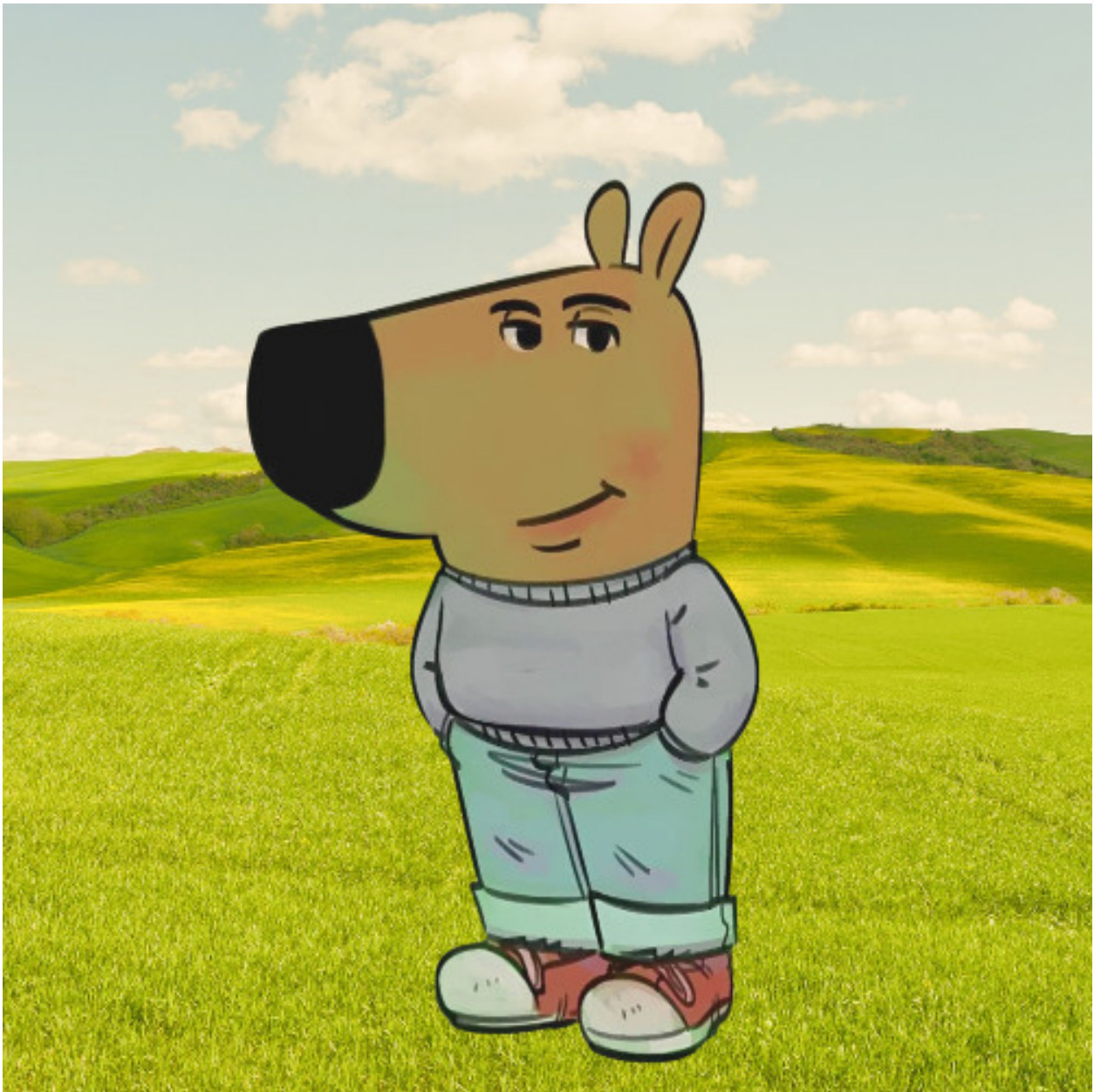


Рисунок 11 – Результаты моделирования изменения диаметров капель при взаимодействии со стенкой.

Если посмотреть на поведение диаметров кристаллов, то оно приведено на *рисунке 12*. Как видно из рисунка диаметры кристаллов не меняются в процессе полета, а меняется только у кристалла в режиме фрагментации (3 режим на *рисунке 12*).



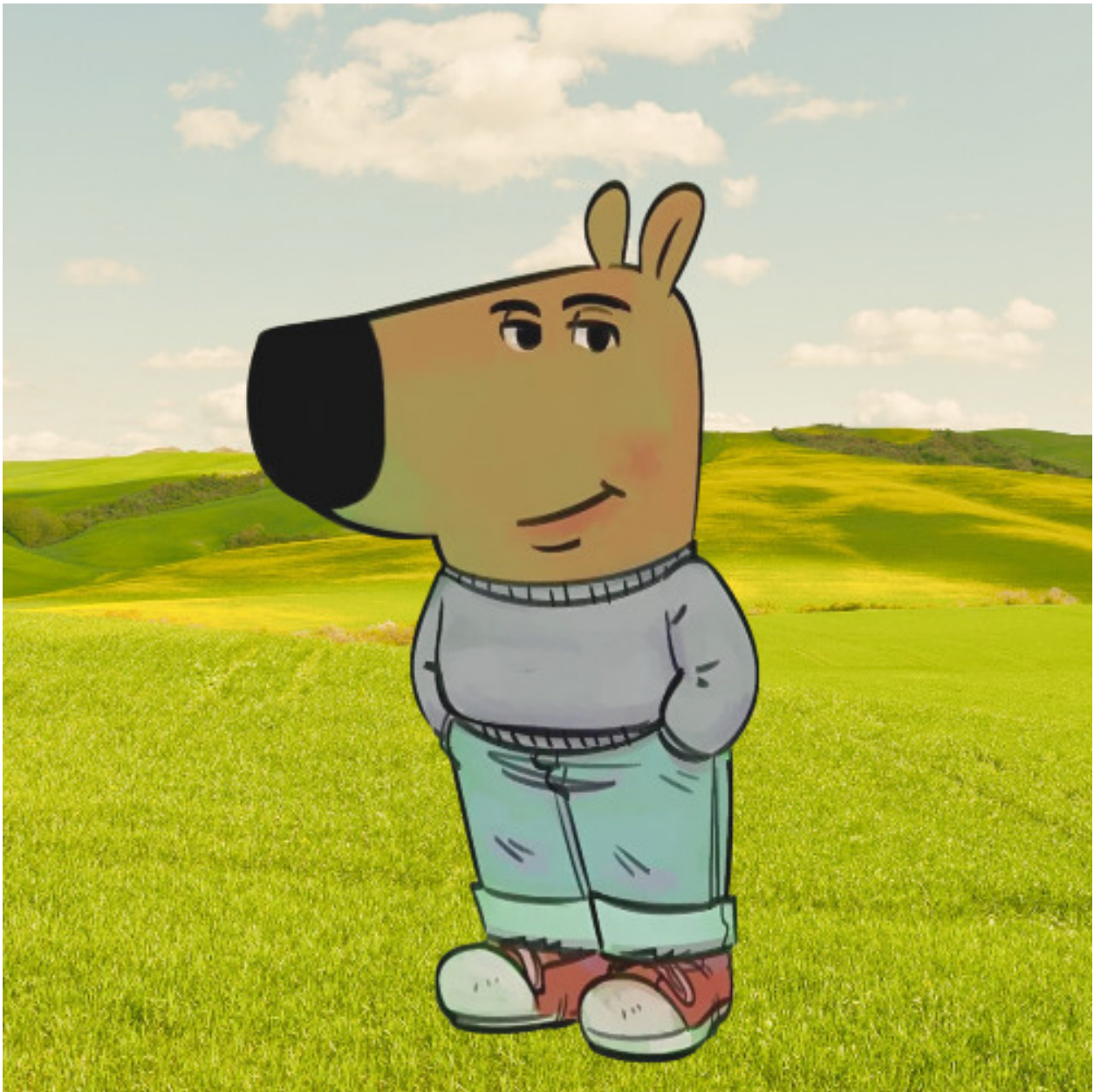


Рисунок 12 – Результаты моделирования изменения диаметров кристаллов при взаимодействии со стенкой.

Теперь рассмотрим результаты моделирования движения этих капель и кристаллов и изменения их скоростей. Для капель траектория движения показана на *рисунке 13*, а изменение скоростей на *рисунке 14*.

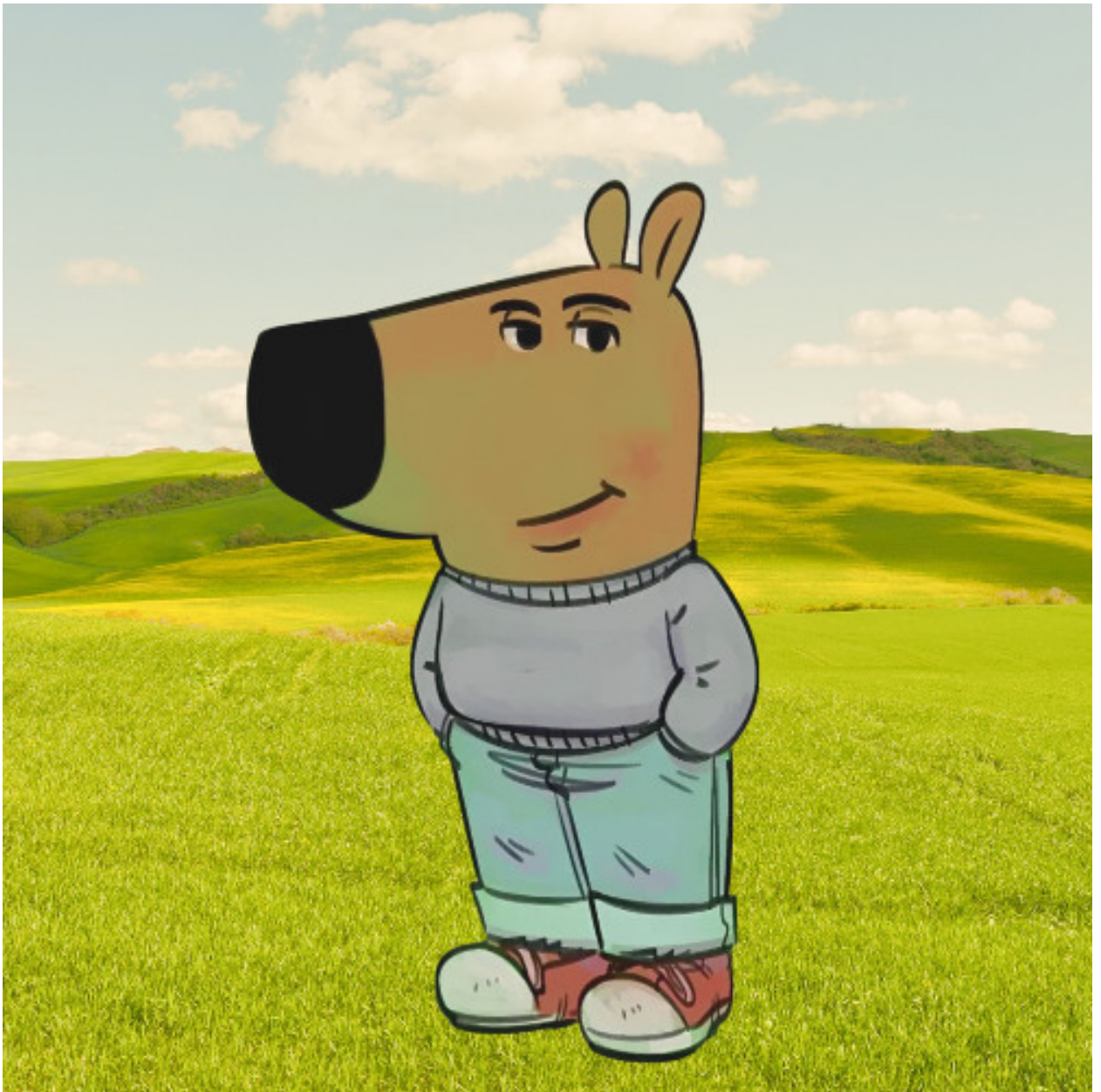


Рисунок 13 – Траектории капель при взаимодействии со стенкой.



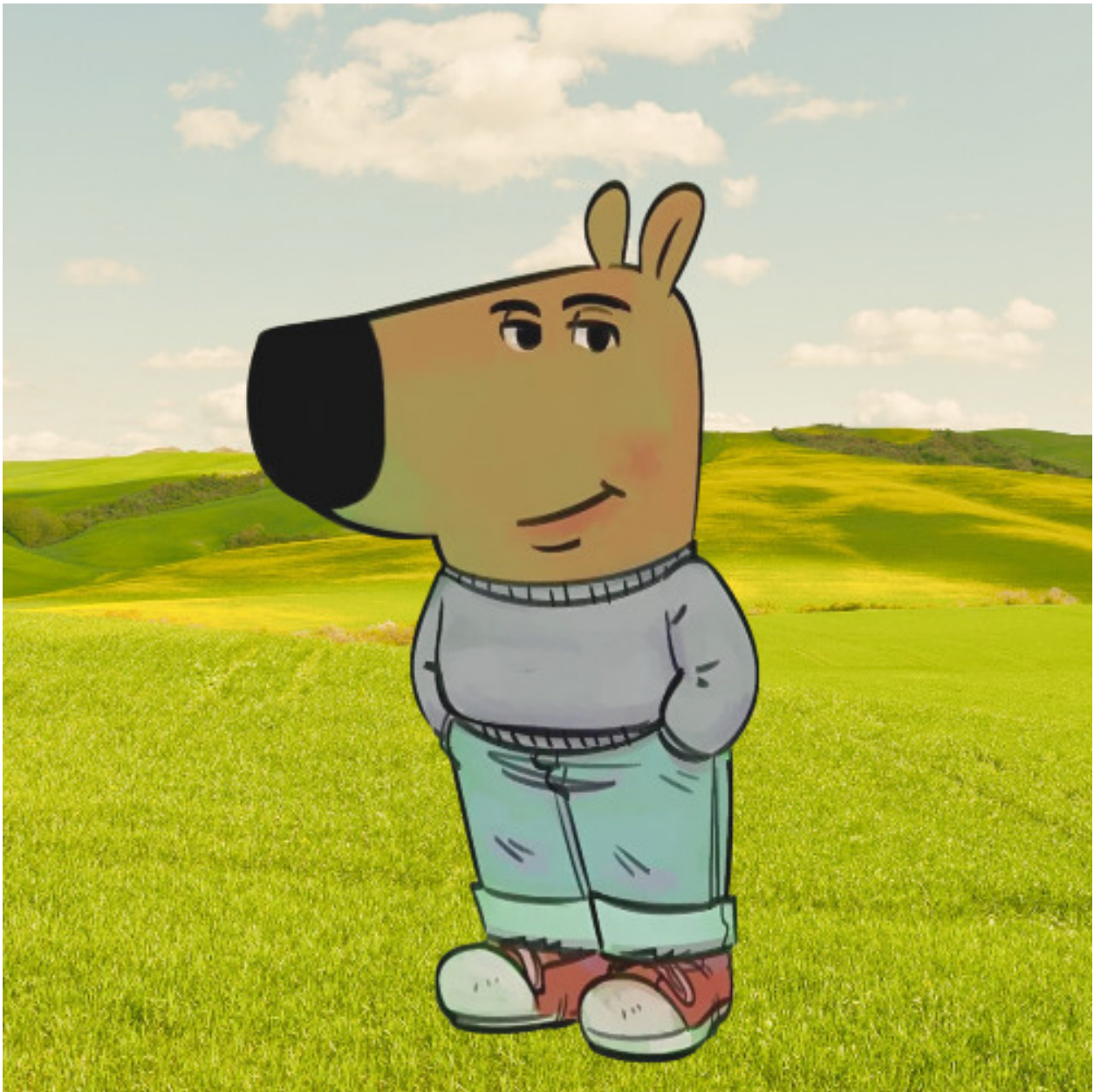


Рисунок 14 – Изменение скоростей капель при взаимодействии со стенкой.

Для первых двух режимов прилипания и растекания скорость зануляется при взаимодействии со стенкой, а для отскока и фрагментации наблюдается отскок с уменьшением модуля скорости из-за воздуха идущего слева направо и дальнейший разгон по потоку. Рассмотрим теперь поведение траекторий кристаллов (*Рисунок 15*) и изменение их скоростей (*Рисунок 16*).

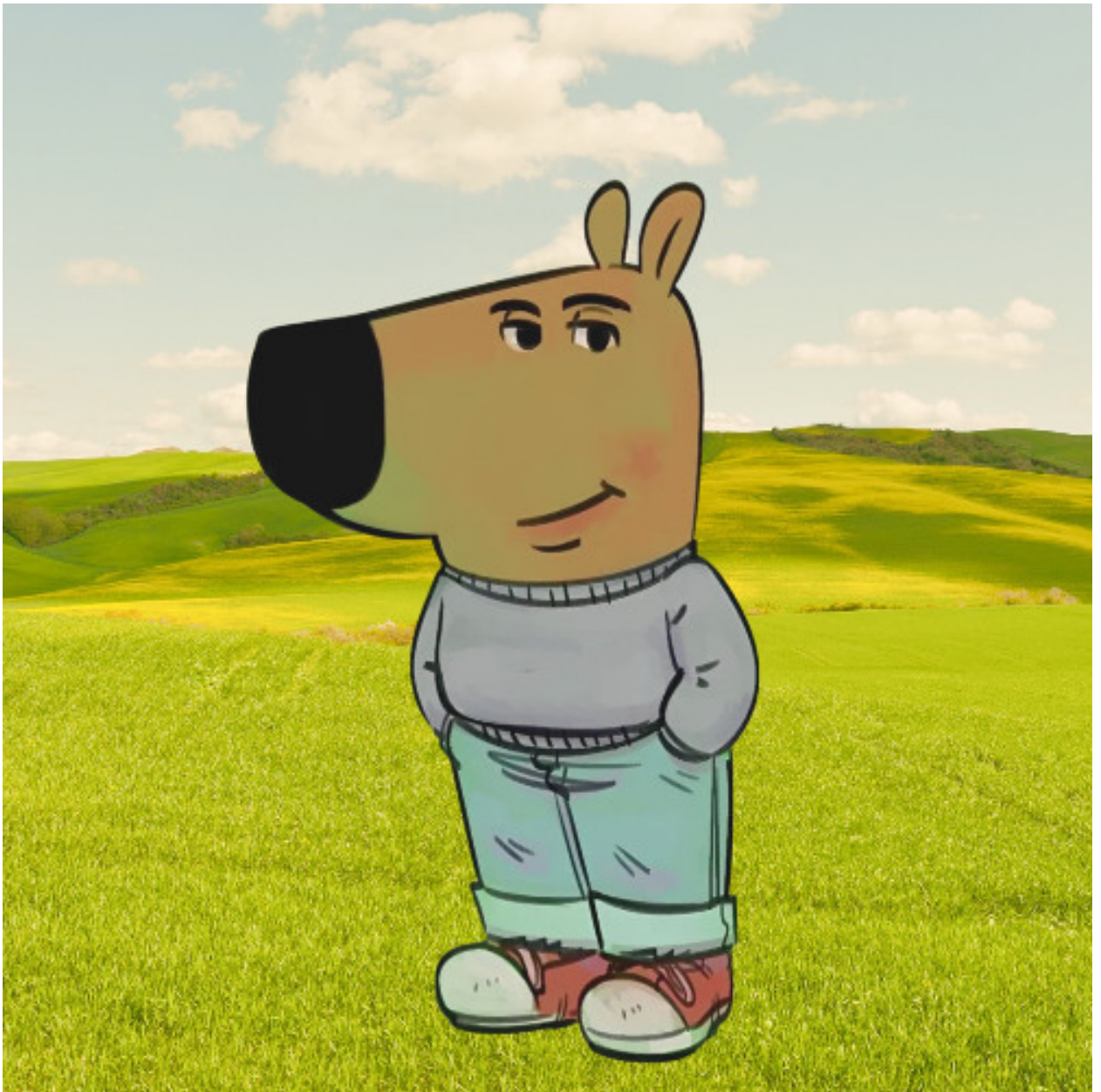


Рисунок 15 – Траектории кристаллов при взаимодействии со стенкой.



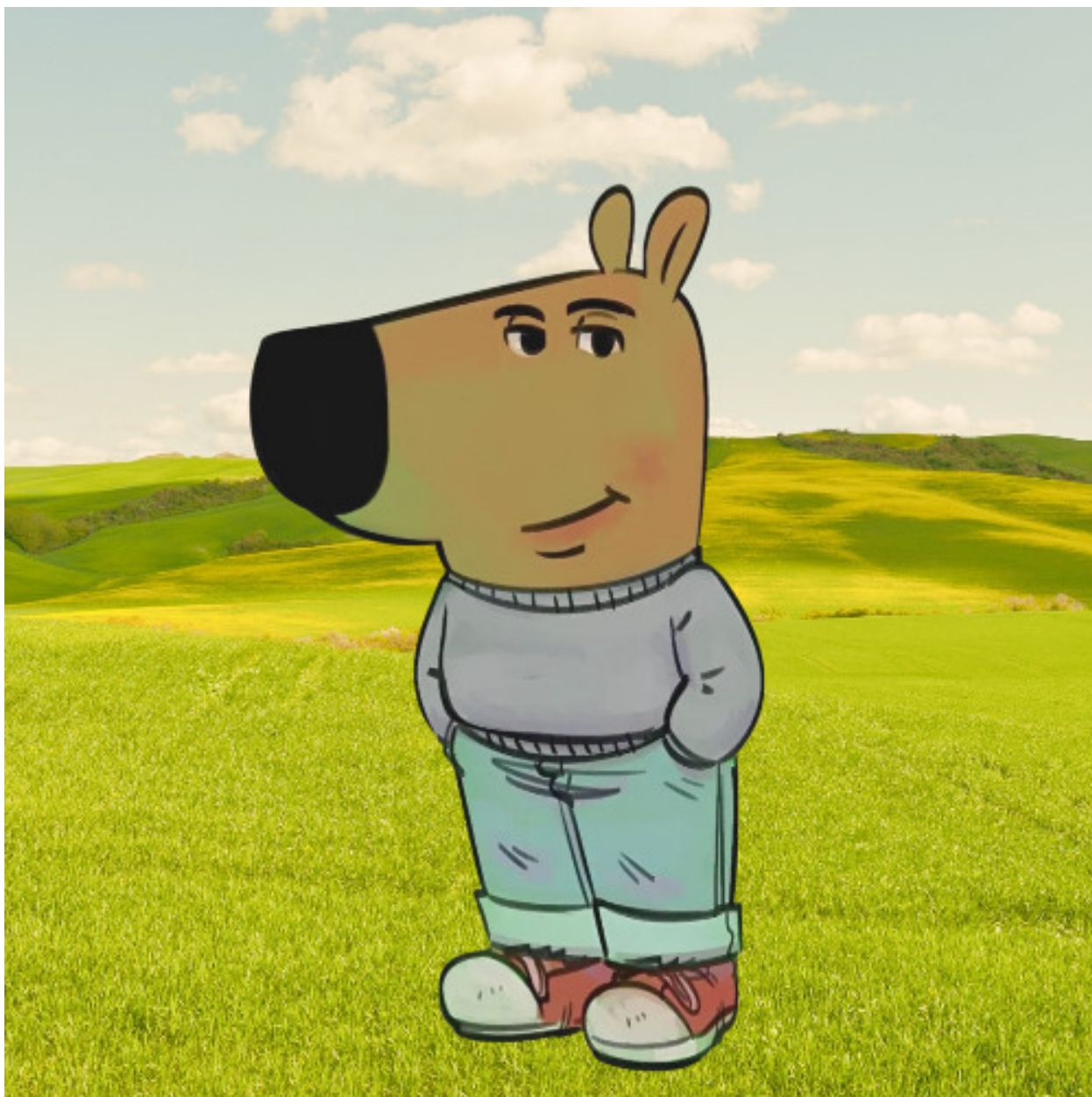


Рисунок 16 – Изменение скоростей кристаллов при взаимодействии со стенкой.

Для кристалла в режиме 3 происходит фрагментация на несколько кристаллов с меньшими диаметрами, для которых можно построить распределение согласно формуле (2.47). Максимальный диаметр фрагментированного кристалла получился равен 786 мкм при начальном диаметре 2000 мкм. Распределение показано на *Рисунке 17*.

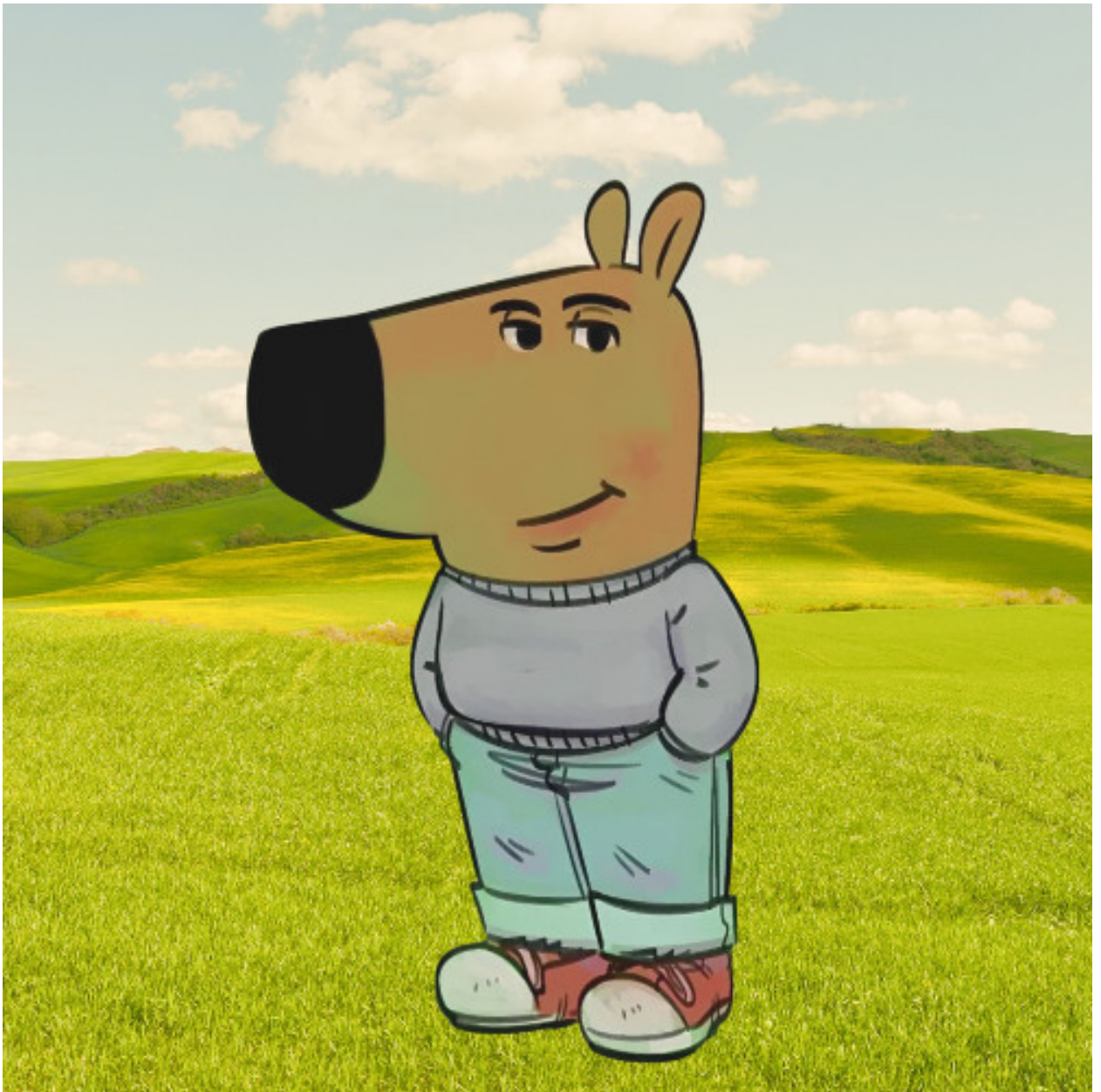


Рисунок 17 – Распределение фрагментированных кристаллов по диаметрам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### 1. Разработка и верификация моделей

В ходе проделанной работы были созданы два программных кода — для жидкой капли и для твёрдого кристалла — в которых реализованы физические алгоритмы движения в потоке, с учётом вязкости, внешних сил и взаимодействия со стенкой. Для капли учтены капиллярные и инерционные силы (числа Вебера и Рейнольдса), для кристалла — упругие, пластические и хрупкие механизмы (число Видора, модуль Юнга, энергия поверхности). Обе программы корректно отражают процессы, протекающие в трехфазном потоке при его движении по каналу сложной формы.

### 2. Демонстрация всех сценариев взаимодействия

Для капель показаны четыре чётко различимых поведения при ударе о поверхность:

1. прилипание,
2. растекание,
3. неупругий отскок,
4. разбрызгивание.

В дополнение к этому показано изменение диаметра капли в процессе полета из-за действия аэродинамических сил.

Для кристаллов продемонстрировано три режима:

1. упругий отскок,
2. неупругий отскок,

### 3. разрушение (фрагментация).

Переходы между этими режимами управляются безразмерными числами ( $We$  для капли и  $\mathcal{L}$  для кристалла), что подтверждено серией численных экспериментов.

### 3. Анализ влияния параметров

Увеличение начальной скорости или размера частицы ведёт к росту безразмерных чисел и переходу к более жёстким режимам (прилипание  $\rightarrow$  отскок  $\rightarrow$  фрагментация).

Линейный профиль скорости воздуха и наличие внешней силы позволяют моделировать различные условия (падение под углом, сдвиг из-за силы).

### 4. Перспективы развития

1. Расширение моделей за счёт учёта фазовых переходов частиц в процессе движения;
2. Изменение подхода с моделирования каждой отдельной частицы на моделирование поля течения в целом, то есть переход от лагранжева подхода к эйлеровому;
3. Добавление более сложных законов изменения скорости воздуха с учётом модели описанной в *разделе 2.1*.

В целом проделанная работа продемонстрировала, что предложенный подход сочетает простоту реализации и достаточную физическую достоверность, позволяя исследовать широкий диапазон сценариев взаимодействия частиц с твёрдыми поверхностями. Полученные результаты корректно отражают процессы, протекающие в трехфазном потоке при его движении по каналу сложной формы.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) Honsek R., Habashi W.G., Aub'е M.S. Eulerian Modeling of In-Flight Icing Due to Supercooled Large Droplets // Journal of Aircraft 2008. V. 45. № 4
- 2) Pilch M., Erdman C.A. Use of Breakup Time Data and Velocity History Data to Predict the Maximum Size of Stable Fragments for Acceleration-Induced Breakup of a Liquid Drop // International Journal of Multiphase Flow. 1987. V. 13. № 6. P. 741.
- 3) Soubri'е T., Senoner J.-M., Villedieu P., Neuteboom M.O. Ice Crystal Trajectory Simulations in the ICE-MACR Compressor rig: Fragmentation and Melting Dynamics // 2022.
- 4) Hospers J., Hoeijmakers H. Numerical Simulation of SLD Ice Accretions // SAE Technical Paper. 2011.
- 5) Tetteh E., Loth E., Neuteboom M.O., Fisher J. In-Flight Gas Turbine Engine Icing: Review // AIAA Journal. 2022.
- 6) Bourgault Y., Habashi W.G., Dompierre J., Baruzzi G. S. A Finite Method Study of Eulerian Droplets Impingement Models // International Journal for Numerical Methods in Fluids 1999. V. 29. № 4
- 7) ANSYS FENSAP-ICE User Manual // 2018.
- 8) Senoner J.M., Trontin P., Reitter L.M., Karpen N., Schremb M., Vargas M., Villedieu P. Ice particle impact on solid walls: Size modeling of reemitted fragments // International Journal of Impact Engineering 169. 2022.
- 9) Carmona H.A., Wittel F.K., Kun F., Herrmann H.J. Fragmentation processes in impact of spheres // Physical Review E 77. 2008