# Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

# Capitolul III. Elemente de Teoria Estimării

# III.1 Introducere

# Ce înseamnă “estimare”?

- Un emițător transmite un semnal $s_\Theta(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** $\Theta$
- Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează

$$r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$$

- Vrem să **găsim** valoarea parametrului $\Theta$
  - pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - datele recepționate au zgomot $=>$ parametrul este “estimat”
- Valoarea găsită este $\hat{\Theta}$, **estimatul** lui $\Theta$
  - există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$

# Ce înseamnă "estimare"?

- Exemple:
  - Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + zgomot$, trebuie estimat $A$
  - Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi f t + \phi) + zgomot$, de estimat $\phi$
  - Exemple mai complicate:
    - De estimat/decis ce cuvânt este pronunțat într-un semnal vocal

# Estimare și Detecție/Decizie

- Fie următoarea problemă de estimare:

  Se recepționează un semnal $r(t) = A + zgomot$, estimați-l pe $A$
- La detecție: se alege între **două valori cunoscute** ale $A$:
  - de ex. $A$ poate fi 0 sau 5 (ipotezele $H_0$ și $H_1$)
- La estimare: $A$ poate fi oricât $=>$ se alege între **o infinitate de opțiuni** ale $A$
  - $A$ poate fi orice valoare din $\mathbb{R}$, în general

# Estimare și Detecție/Decizie

- Detecție = Estimare **restrânsă** doar la un set discret de opțiuni
- Estimare = Detecție cu un număr **infinit de opțiuni** posibile
- Metodele statistice sunt similare
  - În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este “detecție” sau “estimare”?)

# Semnalul recepționat

- Semnalul recepționat este $r(t) = s_{\Theta}(t) + zgomot$
  - este afectat de zgomot
  - depinde de parametrul necunoscut $\Theta$
- Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp $t_i$

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$$

- Eșantioanele depind de valoarea lui $\Theta$

# Semnalul recepționat

- Fiecare eșantion $r_i$ este o variabilă aleatoare ce depinde de $\Theta$ (și de zgomot)
  - Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de $\Theta$

$$w_i(r_i|\Theta)$$

- Întregul vector de eșantioane **r** este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de $\Theta$ (și de zgomot)
  - Are o distribuție N-dimensională ce depinde de $\Theta$
  - Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i|\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = w_1(r_1|\Theta) \cdot w_2(r_2|\Theta) \cdot ... \cdot w_N(r_N|\Theta)$$

# Tipuri de estimare

- Considerăm două tipuri de estimare:
  1. **Estimare de plauzibilitate maximă** (Maximum Likelihood Estimation, MLE): În afară de **r** nu se cunoaște nimic despre $\Theta$, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
  2. **Estimare Bayesiană**: În afară de **r** se mai cunoaște o distribuție *a priori* $w(\Theta)$ a lui $\Theta$, care indică ce valori ale lui $\Theta$ sunt mai probabile / mai puțin probabile

  - caz mai general decât primul

# II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

# Estimarea tip Maximum Likelihood

- Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă ("Maximum Likelihood", ML)
- Se definește **plauzibilitatea** unui valori $\Theta$, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$:

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\Theta|\mathbf{r})$$

- $L(\Theta|\mathbf{r})$ reprezintă funcția de plauzibilitate
- "Plauzibilitatea unei valori $\Theta$, date fiind măsurătorile $\mathbf{r}$ = = probabilitatea de a se fi generat $\mathbf{r}$ dacă valoarea parametrului ar fi fost $\Theta$"
- A se compara cu formula din Cap. 2, slide 20
  - e aceeași
  - aici "ghicim" pe $\Theta$, acolo "ghiceam" pe $H_i$

# Estimarea tip Maximum Likelihood

Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood, ML):

- Estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea, dat fiind valorile observate r**
  - i.e. valoarea care maximizează $L(\Theta|\mathbf{r})$, adică maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta)$

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

- Dacă $\Theta$ aparține doar unui anumit interval, se face maximizarea doar pe acel interval

# Notații matematice

- Notații matematice generale
  - $\arg\max_x f(x) =$ "valoarea $x$ are maximizează funcția f(x)"
  - $\max_x f(x) =$ "valoarea maximă a funcției f(x)"

# Estimare vs decizie Maximum Likelihood

- Estimarea ML este foarte similară cu decizia ML!
- Criteriul de decizie ML:
  - "se alege ipoteza cu plauzibilitate mai mare":

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- Estimare ML:
  - "se alege valoarea care maximizează plauzibilitatea"

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

# Găsirea maximului

- Cum se rezolvă problema de maximizare?
  - adică cum se găsește estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ care maximizează $L(\Theta|vecr)$
- Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta|\mathbf{r})}{d\Theta} = 0$$

- Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta|\mathbf{r})$ înainte de derivare (funcția "log-likelihood")

$$\frac{d\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right)}{d\Theta} = 0$$

# Procedura de găsire a estimatului

Procedura de găsire a estimatului ML:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta|\mathbf{r})$ sau a lui $\ln((L(\Theta|\mathbf{r}))$ să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ sau } \frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
    - întrucât derivata $= 0$ și pentru maxime și pentru minime
    - uneori sărim peste această etapă

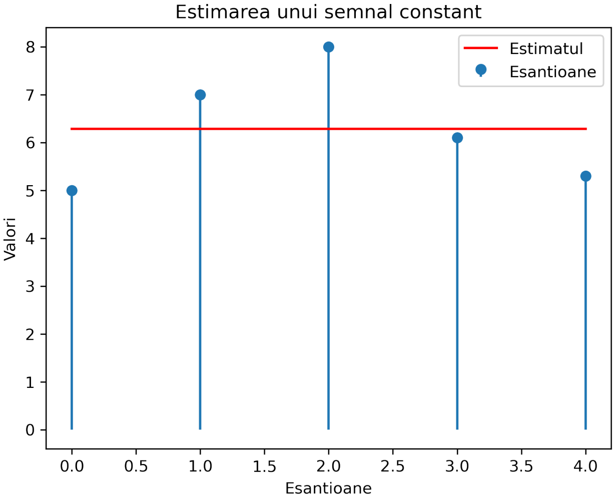
# Exemplu

- Estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian:

  Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru un semnal de valoare constantă $s_\Theta(t) = A$ din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + zgomot$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$.

- Soluție: la tablă
- Estimatul $\hat{A}_{ML}$ este chiar valoarea medie a eșantioanelor
  - (deloc surprinzător)

# Simulare numerică



# Aproximare a unei curbe

- Estimare = aproximare a unei curbe
  - se găsește cea mai bună potrivire a lui $s_\Theta(t)$ pri datele $\mathbf{r}$
- Din exemplul grafic anterior:
  - avem un set de date $\mathbf{r}$
  - se cunoaște forma semnalului = o dreaptă orizontală ($A$ constant)
  - se aproximează în mod optim dreapta prin setul de date

# Semnal oarecare în AWGN

- Fie semnalul original $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Eșantioanele $r_i$ sunt luate la momentele $t_i$
- Eșantioanele $r_i$ au distribuție normală, cu media $\mu = s_\Theta(t_i)$ și varianța $\sigma^2$
- Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilităților fiecărui eșantion $r_i$

$$
\begin{aligned}
L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Logaritmul plauzibilității ("log-likelihood") este

$$\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)}_{constant} - \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

- Termenul $\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2$ este **distanța** $d(\mathbf{r}, s_\Theta)$ **la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_\Theta) = \sqrt{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Estimarea ML se poate rescrie sub forma:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min_{\Theta} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{\Theta})^2$$

- Estimatul de plauzibilitate maximă (ML) $\hat{\Theta}_{ML}$ = valoarea care face $s_{\Theta}(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat r**
  - mai aproape = potrivire mai bună = mai probabil
  - cel mai aproape = cea mai bună potrivire = cel mai probabil = plauzibilitate maximă

# Semnal oarecare în AWGN

- Estimare ML în zgomot gaussian = **minimizarea distanței**
- Aveam aceeași interpretare și la decizia ML!
  - dar la decizie alegeam minimul din 2 opțiuni
  - aici alegem minimul dintre toate opțiunile posibile
- Relația e valabilă pentru orice fel de spații vectoriale
  - vectori cu N elemente, semnale continue, etc
  - doar se înlocuiește definiția distanței Euclidiene

# Semnal oarecare în AWGN

Procedura pentru estimarea tip ML în zgomot AWGN:

1. Se scrie expresia pentru pătratul distanței:
$$D = \left(d(\mathbf{r}, s_\Theta)\right)^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$
2. Vrem minimul, deci egalăm derivata cu 0:
$$\frac{dD}{d\Theta} = \sum 2(r_i - s_\Theta(t_i))(-\frac{ds_\Theta(t_i)}{d\Theta}) = 0$$
3. Se rezolvă și obținem valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este pozitivă, pentru a se verifica că punctul este un minim
    - uneori sărim peste această etapă

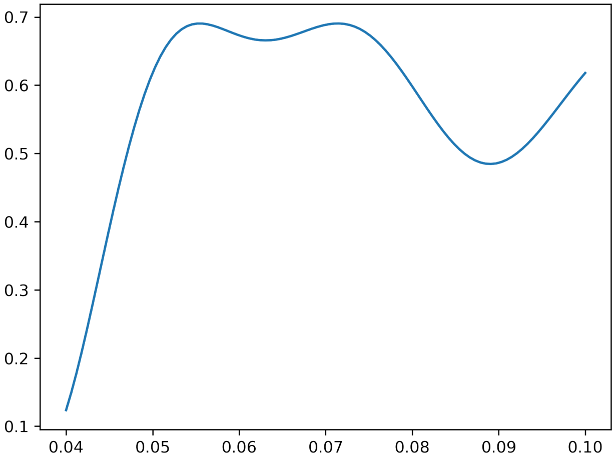
# Simulare numerică

Estimarea frecvenței $f$ a unui semnal sinusoidal

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența $f$ a unui semnal $s_\Theta(t) = cos(2\pi f t_i)$, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = cos(2\pi f t_i) + zgomot$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- Soluție: la tablă

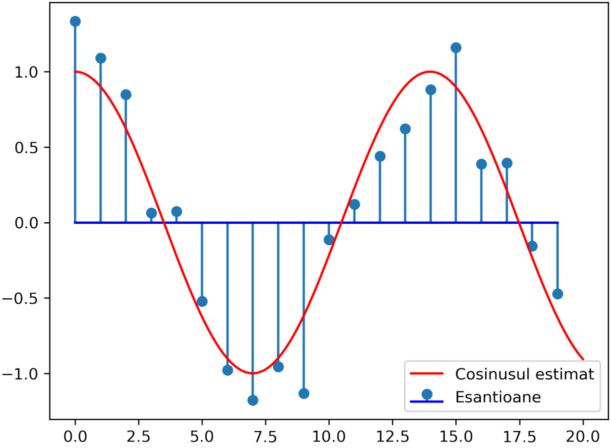
# Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este



# Simulare numerică

Frecventa originala = 0.070000, estimatul = 0.071515



# Estimarea paremetrilor unor distribuții

- Estimarea ML se poate folosi și pentru a estima parametrii unor distribuții
- Avem un set de valori $r_i$, pe care le modelăm ca fiind eșantioane dintr-o distribuție. Cum găsim parametrii acelei distribuții?
- Momentan, considerăm un singur parametru necunoscut

# Estimarea parametrilor distribuției normale

- Presupunem că $r_i$ sunt eșantioane dintr-o distribuție normală $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Distribuția are doi parametri: media $\mu$ și deviația standard $\sigma$
- Estimarea lui $\mu$:

  Este identică cu estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian cu media 0:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i$$

- Estimarea lui $\sigma^2$:

  Nu se poate formula ca estimarea unui semnal afectat, prin adunare, de zgomot gaussian, dar cu toate acestea se poate utiliza în continuare metoda ML:

$$\hat{\sigma}_{ML} = \arg\max_{\sigma} w(\mathbf{r}|\sigma)$$

# Estimarea parametrilor distribuției normale

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{ML} &= \arg\max_{\sigma} w(\mathbf{r}|\sigma) \\
&= \arg\max_{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum(r_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{ aplicăm } \ln() \text{ }) \\
&= \arg\max_{\sigma} \left(-N\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{\sum(r_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Derivăm și egalăm cu 0 pentru a obține minimul:

$$\begin{aligned}
-N\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} - \frac{\sum(r_i-\mu)^2}{2}(-2)\sigma^{-3} &= 0 \\
-\frac{N}{\sigma} + \frac{\sum(r_i-\mu)^2}{\sigma^3} &= 0 \\
\sigma^2 &= \frac{\sum(r_i-\mu)^2}{N}
\end{aligned}$$

# Estimarea parametrilor distribuției normale

- Estimarea parametrilor unei distribuții normale e similară cu definițiile mediei și varianței:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - \mu)^2}{N}}$$

- Notă: estimarea lui $\sigma_{ML}$ necesită valoarea lui $\mu$
  - Dacă $\mu$ este cunoscut, totul e în regulă
  - Dacă $\mu$ este necunoscut, se poate folosi $\hat{\mu}_{ML}$, dar atunci estimăm pe baza unei alte estimări, ceea ce e problematic (estimatorul este deplasat, vom vedea)

# Estimarea parametrilor distribuției uniforme

- Presupunem că $r_i$ sunt eșantioane dintr-o distribuție uniformă $\mathcal{U}[a, b]$
- Distribuția are doi parametri: limitele $a$ și $b$
- Estimarea lui $a$ și $b$:

$$\hat{a}_{ML} = \arg\max_{a} w(\mathbf{r}|a)$$
$$\hat{b}_{ML} = \arg\max_{b} w(\mathbf{r}|b)$$

  Prin raționament:

$$\hat{a}_{ML} = \min(r_i)$$
$$\hat{b}_{ML} = \max(r_i)$$

- Intervalul trebuie să cuprindă toate valorile (altfel, probabilitatea ar fi 0), dar nu trebuie să fie mai mare decât strict necesar (altfel, probabilitatea ar fi mai mică)

# Parametri multipli

- Dacă semnalul depinde de mai mulți parametri?
  - de ex. amplitudinea, frecvența și faza inițială a unui cosinus:

$$s_{\hat{}}(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Se va considera $\Theta$ ca fiind un vector:

$$\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, ...\Theta_M]$$

  - e.g. $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] = [A, f, \phi]$

# Parametri multipli

- Se rezolvă cu aceeași procedură, dar în loc de o singură derivată vom avea $M$ derivate
- Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_M} = 0 \end{cases}$$

  - uneori este dificil/imposibil

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Cum se estimează parametrii $\mathbf{\Theta}$ în cazuri complicate?
  - în aplicații reale, unde pot fi foarte mulți parametri ($\mathbf{\Theta}$ este vector)
- De obicei nu se pot găsi valorile optime prin formule directe
- Se îmbunătățesc valorile în mod iterativ cu algoritmi tip **coborâre după gradient** (Gradient Descent)
- Gradient Descent este o metodă generală d găsire a minimului (sau a maximului) unei funcții

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

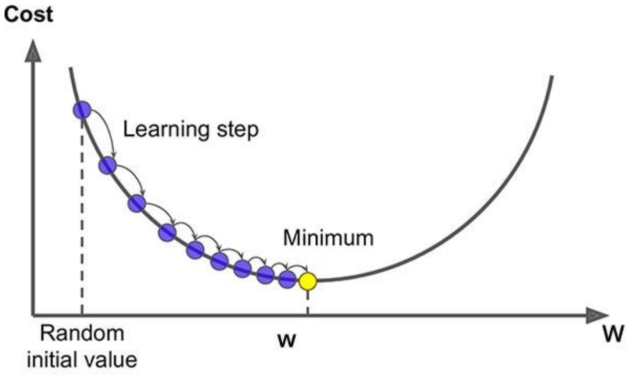



Figure 1: Coborâre după gradient[1]

[1]Imagine: Quick Guide to Gradient Descent and Its Variants, Sahdev Kansal, Towards Data Science, 2020

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

1. Se inițializează parametrii cu valori aleatoare $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$
2. Repetă la fiecare iterație $k$:
   2.1 Se calculează funcția $L(\boldsymbol{\Theta}^{(k)}|\mathbf{r})$
   2.2 Se calculează derivatele $\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$ pentru toți $\Theta_i$ ("**Gradient**")
   2.3 Se actualizează toate valorile $\Theta_i$ prin scăderea derivatei ("**Descent**"):

$$\Theta_i^{(k+1)} = \Theta_i^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$$

   - sau, sub formă vectorială:

$$\boldsymbol{\Theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Theta}^{k} - \mu \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Theta}^{(k)}}$$

3. Până la îndeplinirea unui criteriu de terminare (de ex. parametrii nu se mai modifică mult)

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- În fiecare punct, derivata ne spune în ce direcție să mergem
- Pentru găsirea minimului unei funcții, se scade derivata (coborâre după gradient)

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta^{(k)}}$$

- Pentru găsirea maximului unei funcții, se adună derivata (urcare după gradient)

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} + \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta^{(k)}}$$

- Parametrul $\mu$ se numește **rată de învățare** (learning rate) și se alege empiric, la o valoare mică
- Alte explicații la tablă
- Exemplu: regresia logistică cu valori 2D
  - exemplu la tablă

# Rețele Neurale

- Cel mai proeminent exemplu: **Rețele Neurale Artificiale** (a.k.a. "Rețele Neurale", "Deep Learning", etc.)
  - Pot fi văzute ca un exemplu de estimare ML
  - Se utilizează algoritmul *Gradient Descent* pentru găsirea parametrilor
  - Aplicații de vârf: recunoașterea de imagini, automated driving etc.
- Mai multe informații despre rețele neurale / machine learning:
  - căutați cursuri sau cărți online
  - IASI AI Meetup

# Deplasarea și varianța estimatorilor

- Cum caracterizăm calitatea unui estimator?
- Un estimator $\hat{\Theta}$ este **o variabilă aleatoare**
  - poate avea diverse valori, pentru că se calculează pe baza eșantioanelor recepționate, care depind de zgomot
  - exemplu: se repetă aceeași estimare pe calculatoare diferite $=>$ valori estimate ușor diferite
- Fiind o variabilă aleatoare, se pot defini:
  - valoarea medie a estimatorului: $E\left\{\hat{\Theta}\right\}$
  - varianța estimatorului: $E\left\{(\hat{\Theta} - E\left\{\hat{\Theta}\right\})^2\right\}$

# Deplasarea și varianța estimatorilor

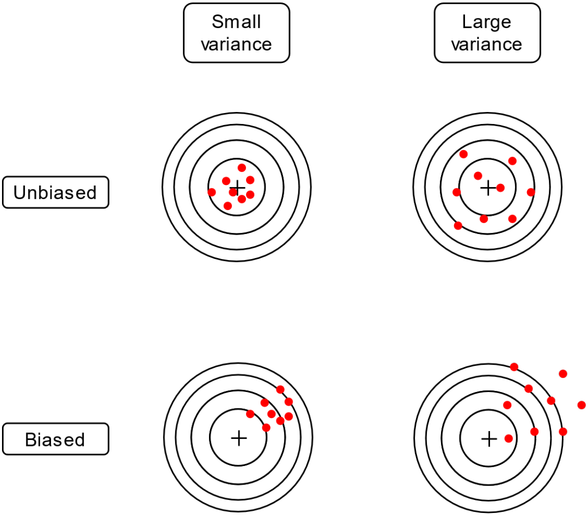



Figure 2: Deplasarea și varianța estimatorilor

# Deplasarea unui estimator

- **Deplasarea** ("bias") unui estimator = diferența dintre valoarea medie a estimatorului și valoarea adevărată $\Theta$

$$Deplasare = E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$$

- Estimator **nedeplasat** = valoarea medie a estimatorului este egală cu valoarea adevărată a parametrului $\Theta$

$$E\left\{\hat{\Theta}\right\} = \Theta$$

- Estimator **deplasat** = valoarea medie a estimatorului diferă de valoarea adevărată a parametrului $\Theta$
  - diferența $E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$ este **deplasarea** estimatorului

# Deplasarea unui estimator

- Exemplu: semnal constant A, zgomot Gaussian (cu media 0), estimatorul de plauzibilitate maximă este $\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_i r_i$

- Atunci:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{A}_{ML}\right\} &= \frac{1}{N} E\left\{\sum_i r_i\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left\{r_i\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left\{A + zgomot\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A \\ &= A \end{aligned}$$

- Acest estimator este nedeplasat

# Deplasarea unui estimator

- Exemplu: estimatorul varianței unei distribuții normale, când se folosește media estimată $\hat{\mu}_{ML}$:

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (r_i - \hat{\mu}_{ML})^2}{N}$$

- Acest estimator este **deplasat**:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{\sigma}^2_{ML}\right\} &= E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N} (r_i - \hat{\mu}_{ML})^2}{N}\right\} \\ &= \dots \\ &= \frac{N-1}{N}\sigma^2 \end{aligned}$$

  unde $\sigma^2$ este varianța reală a distribuției

- Demonstrație: *Wikipedia* sau "*Maximum Likelihood Estimator for Variance is Biased: Proof*", Dawen Liang, Carnegie Mellon University

# Estimatorul nedeplasat al varianței

- Estimatorul MLE al varianței este deplasat, și **subestimează** varianța reală a distribuției
- Pentru a obține un estimator nedeplasat al varianței, se folosește formula:
$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \hat{\mu}_{ML})^2$$
- Diferența: se împarte la $N-1$ în loc de $N$
- Justificare intuitivă: discuție la tablă, cazul cu 2 puncte; medie este la mijloc; varianța e minimizată, deci subestimează varianța reală

# Varianța unui estimator

- **Varianța** unui estimator măsoară “abaterile” estimatorului în jurul valorii medii
  - aceasta e definiția varianței $\sigma^2$ în general
- Dacă un estimator are **varianța** mare, valoarea estimată poate fi departe de cea reală, chiar daca estimatorul este nedeplasat
- De obicei se preferă estimatori cu **varianță mică**, tolerându-se o eventuală mică deplasare

# II.3 Estimare Bayesiană

# Estimare Bayesiană

- **Estimarea Bayesiană** ia în calcul termeni suplimentari pe lângă $w(\mathbf{r}|\Theta)$:
  - o distribuție *a priori* $w(\Theta)$
  - opțional, o funcție de cost
- Se obține echivalentul din estimare pentru criteriile de decizie MPE și MR

# Estimare Bayesiană

- Conceptual, estimarea Bayesiană constă în doi pași:
  1. Găsirea distribuției **posterioare** $w(\Theta|\mathbf{r})$
  2. Estimaea unei valori de pe distribuție, pe baza unei **funcții de cost**

# Estimare Bayesiană

- Se definește **distribuția *a posteriori*** a lui $\Theta$, date fiind observațiile $\mathbf{r}$, folosind **regula lui Bayes**:

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- Termenii:
  - $\Theta$ este parametrul necunoscut
  - $\mathbf{r}$ este vectorul de observații
  - $w(\Theta|\mathbf{r})$ este probabilitatea ca parametrul să aibă valoarea $\Theta$, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$;
  - $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este funcția de plauzibilitate
  - $w(\Theta)$ este distribuția **a priori** a lui $\Theta$
  - $w(\mathbf{r})$ este distribuția **a priori** a lui $\mathbf{r}$; se presupune a fi constantă

# Estimare Bayesiană

- La estimarea ML, avem doar termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$. Văzut ca o funcție de $\Theta$, acesta nu e o o distrubție a $\Theta$. E doar o mărime pe care vrem să o maximizăm.
- Estimarea Bayesiană folosește însă $w(\Theta|\mathbf{r})$, care **este** chiar distribuția valorilor posibile ale lui $\Theta$

# Regula lui Bayes

- Relația precedentă arată că, în general, estimarea lui $\Theta$ depinde de două lucruri:
    1. De vectorul observațiilor $\mathbf{r}$, prin termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$
    2. De informația "a priori" avută despre $\Theta$, prin termenul $w(\Theta)$
    - (termenul $w(\mathbf{r})$ se presupune constant)
- Numele este "estimare Bayesiană"
    - Thomas Bayes = matematician englez, a descoperit regula cu acest nume
    - Noțiunile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de "Bayesiane"

# Distribuția *a priori*

- Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui $\Theta$, $w(\Theta)$
  - știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
  - se numește distribuția *a priori*
- Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori*
  - estimatul va fi “tras” înspre valori mai probabile

# Estimatorul MAP

- Cunoaștem distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$. Care este valoarea estimată?
- Se poate alege valoarea care are probabilitate maximă
- Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

- Estimatorul MAP alege acea valoare $\Theta$ unde distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ este maximă
- Estimatorul MAP maximizează **produsul** dintre plauzibilitate și **distribuția *a priori*** $w(\Theta)$

# Estimatorul MAP

Exemplu: Imagine

# Relația dintre estimarea MAP și ML

- Estimatorul ML:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)$$
- Estimatorul MAP:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$
- Estimatorul ML este un caz particular de MAP pentru $w(\Theta)$ constant
  - $w(\Theta) =$ constant înseamnă că toate valorile lui $\Theta$ sunt *a priori* echiprobabile
  - i.e. nu avem extra informații despre valoarea lui $\Theta$

# Relația cu detecția semnalelor

- Criteriul probabilității minime de eroare: $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$
  - adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$este mai mare
- **Criteriul de decizie MPE**: se alege ipoteza care maximizează $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$
  - dintre cele două ipoteze $H_0$, $H_1$
- **Estimarea MAP**: se alege valoarea care maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$
  - dintre toate valorile posibile pentru $\Theta$
- Același principiu!

# Funcția de cost

- Vrem s găsim un echivalent și pentru criteriul MR
- Avem nevoie de un echivalent pentru costurile $C_{ij}$
- **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală $\Theta$

$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ = atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
  - erori $\epsilon$ mici au costuri mici
  - erori $\epsilon$ mari au costuri mari

# Funcția de cost

- Funcții de cost uzuale:
  - Pătratică:
$$C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$$
  - Uniformă:
$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$
  - Liniară:
$$C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$$
- De desenat la tablă

# Funcția de cost

- Funcția de cost $C(\epsilon)$ reprezintă echivalentul costurilor $C_{ij}$ de la detecție
  - la detecție aveam doar 4 valori: $C_{00}$, $C_{01}$, $C_{10}$, $C_{11}$
  - aici avem un cost pentru fiecare eroare posibilă $\epsilon$
- Funcția de cost dictează ce valoarea alegem din distribuția $w(\Theta|\mathbf{r})$

# Importanța funcției de cost

- Fie distribuția *a posteriori* următoare:

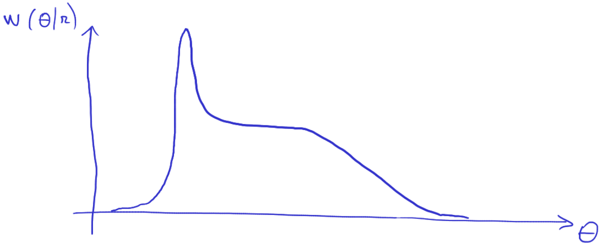



Figure 3: Asymmetrical posterior distribution

- Care este estimatorul MAP?
- Dar dacă avem funcția de cost următoare:
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $<$ valoarea reală $\Theta$, te costă 1000 \$
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $>$ valoarea reală $\Theta$, platești 1 \$
  - schimbăm valoarea estimată ? :)

# Importanța funcției de cost

- Funcția de cost este cea care impune alegerea unei anume valori $\hat{\Theta}$ de pe distribuția valorilor posibile
- Valoarea cea mai probabilă nu este întotdeauna cea mai bună
- Valoarea cea mai bună este cea care minimizează valoarea medie a costului

# Riscul Bayesian

- Distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ dă probabilitatea fiecărei valori $\hat{\Theta}$ de a fi cea corectă
- Alegerea unui estimat $\hat{\Theta}$ implică o anume eroare $\epsilon$
- Eroarea de estimare are un anumit cost $C(\epsilon)$
- **Riscul** $=$ valoarea medie a costului $= C(\epsilon) \times$ probabilitatea:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

# The Bayesian risk

- Alegem valoarea $\hat{\Theta}$ care **minimizează costul mediu** $R$

$$\hat{\Theta} = \arg\min_{\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- O obținem înlocuind $C(\epsilon)$ cu definiția sa, și derivând după $\hat{\Theta}$
  - Atenție: se derivează după $\hat{\Theta}$, nu $\Theta$!

# Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează $R$, deci derivăm

$$\frac{dR}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})}_{1} d\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM) ("Minimum Mean Squared Error, MMSE")**:

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

# Interpretare

- **Estimatorul EPMM**: estimatorul $\hat{\Theta}$ este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

  - EPMM = "Eroare Pătratică Medie Minimă"
  - valoarea medie = sumă (integrală) din fiecare $\Theta$ ori probabilitatea sa $w(\Theta|\mathbf{r})$
- Estimatprul EPMM se obține din distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$, considerând funcția de cost pătratică

# Estimatorul MAP

- Dacă funcția de cost este uniformă

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- Se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta \\ R &= 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta \end{aligned}$$

# Estimatorul MAP

- Pentru minimizarea $R$, trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- Pentru $E$ foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- **Estimatorul Maximum A Posteriori (MAP)** = valoarea $\hat{\Theta}$ care maximizează $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max \Theta w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

# Interpretare

- Estimatorul MAP: $\hat{\Theta}$ = valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta}$ = valoarea medie a distribuției *a posteriori*

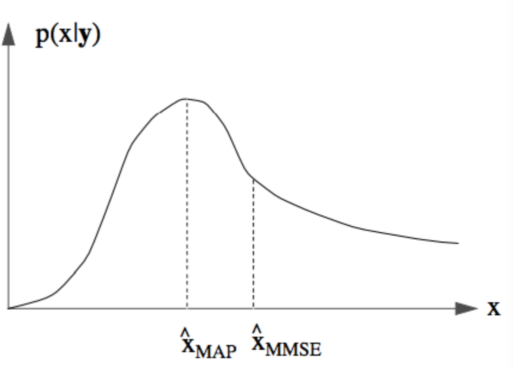



Figure 4: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

*[image from https://allenlu2007.wordpress.com]*

## Relația între estim. MAP and EPMM

- Estimatorul MAP = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost uniformă
  - ca le detecție: criteriul MPE = criteriul MR când costurile sunt la fel
- Estimatorul EPMM = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost pătratică
  - similar cu criteriul MR, dar la estimare

# Exerciţiu

Exerciţiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian acelaşi $\sigma$

- Vrem să estimam temperatura de astăzi din Sahara
- Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (termometru ieftin)
- Se ştie că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuţie Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$.
- Estimaţi valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP şi EPMM(MMSE)

# Exerciţiu

Exerciţiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian acelaşi $\sigma$

- Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exerciţiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian $\sigma$ diferit

- Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuţie Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$
  - cu varianţă diferită, $\sigma_2 \neq \sigma$

# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Fie semnalul original "curat" $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este Gaussian (AWGN) $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Ca în cazul estimării de plauzibilitate maximă, funcția de plauzibilitate este:

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

- Dar acum aceasta **se înmulțește cu** $w(\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Estimatorul MAP estimator este cel care maximizează produsul

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) w(\Theta)$$

- Logaritmând:

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}_{MAP} &= \arg\max \ln\left(w(\mathbf{r}|\Theta)\right) + \ln\left(w(\Theta)\right) \\
&= \arg\max -\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2} + \ln\left(w(\Theta)\right)
\end{aligned}$$

# Distribuție "a priori" Gaussiană

- Dacă distribuția "a priori" este de asemenea Gaussiană $\mathcal{N}(\mu_\Theta, \sigma_\Theta^2)$

$$\ln\left(w(\Theta)\right) = -\frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Estimatorul MAP devine

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Poate fi rescris

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_\Theta)^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_\Theta^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_\Theta)^2$$

# Interpretare

- Estimatorul MAP în zgomot Gaussian și cu distribuție "a priori" Gaussiană

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_\Theta)^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_\Theta^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_\Theta)^2$$

- $\hat{\Theta}_{MAP}$ este apropiat de valoarea medie $\mu_\Theta$ și de asemenea face ca semnalul adevărat să fie apropiat de eșantioanele recepționate $\mathbf{r}$
  - Exemplu: "caut locuință aproape de serviciu dar și aproape de Mall"
  - $\lambda$ controlează importanța relativă a celor doi termeni
- Cazuri particulare
  - $\sigma_\Theta$ foarte mic = distribuția "a priori" este foarte specifică (îngustă) = $\lambda$ mare = termenul al doilea este dominant = $\hat{\Theta}_{MAP}$ foarte apropiat de $\mu_\Theta$
  - $\sigma_\Theta$ foarte mare = distribuția "a priori" este foarte nespecifică = $\lambda$ mic = primul termen este dominant = $\hat{\Theta}_{MAP}$ apropiat de estimatorul de plauzibilitate maximă

# Aplicații

- În general, aplicațiile practice:
  - utilizează diverse tipuri de distribuții "a priori"
  - estimează **mai mulți parametri** (un vector de parametri)
- Aplicații
  - reducerea zgomotului din semnale
  - restaurarea semnalelor (parți lipsă din imagini, imagini *blurate* etc)
  - compresia semnalelor

# Aplicații practice

1. Urmărirea unui obiect ("single object tracking") prin filtrare Kalman

- urmărirea unui obiect prin măsurători succesive (e.g. din imagini succesive)
- la fiecare nouă măsurătoare avem două distribuții ale poziției:
  - cea dată de măsurătoare respectivă, $w(r|\Theta)$
  - cea prezisă pe baza poziției și vitezei de data trecută
  - ambele presupuse a fi Gaussiene, caracterizate doar prin medie și varianță
- cele două se combină prin regula lui Bayes => o distribuție mai precisă $w(\Theta|r)$, tot Gaussiană
- poziția exactă se estimează prin EPMM (media lui $w(\Theta|r)$
- $w(\Theta|r)$ prezice poziția de la momentul următor

# Single object tracking

# Single object tracking

# Aplicații practice

2. Constrained Least Squares (CLS) image restoration

- Avem o imagine $I$ afectată de erori (zgomot, pixeli lipsă, blurare)

$$I_{zg} = I_{true} + Z$$

- Estimăm imaginea originală prin:

$$\hat{I_{true}} = argmin_I \|I - I_{zg}\|_2 + \lambda \cdot \|HighPass\{I\}\|_2$$

- Exemple:
  - https://www.mathworks.com/help/images/deblurring-images-using-a-regularized-filter.html
  - https://demonstrations.wolfram.com/ImageRestorationForDegradedImages
  - Google it

# Constrained Least Squares (CLS) image restoration