Examen DEPI 2017-2018

Nr.2

Exerciții

1. Fie o variabilă aleatoare X cu distribuția din figură $w(x) = \begin{cases} h - \frac{h}{5}x, & x \in [0,5] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$
   a. (1p) Găsiți valoarea lui h
   b. (1p) Calculați probabilitatea ca X să fie între 0 și 3
   c. (1p) Calculați valoarea medie $\overline{X}$
   d. (2p) Găsiți expresia funcției de repartiție a lui x

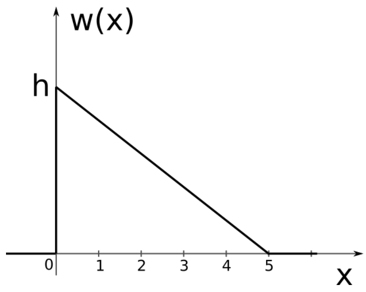
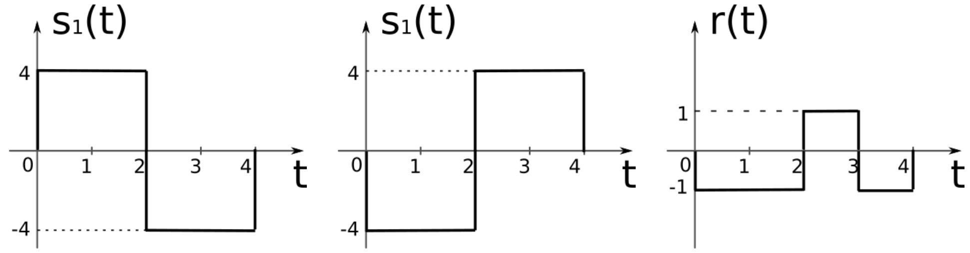


Figure 1: Distribuția w(x)

2. (6p) Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 (ipoteza H_0) sau 10 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 4)$. La recepție se ia un singur eșantion r. Decizia se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime.
   a. (2p) Scrieți expresiile funcțiilor de plauzibilitate $w(r|H_0)$ and $w(r|H_1)$ și reprezentați-le grafic;
   b. (1p) Dacă eșantionul este $r = 3$, care este decizia luată?
   c. (1p) Găsiți regiunile de decizie R_0 și R_1;
   d. (2p) Calculați probabilitatea alarmei false, dacă probabilitățile ipotezelor sunt $P(H_0) = \frac{3}{4}$ și $P(H_1) = \frac{1}{4}$.

3. (3p) Se transmite unul dintre semnale $s_0(t)$ sau $s_1(t)$, iar la recepție se recepționează $r(t)$. Semnalele sunt reprezentate mai jos. Știind că semnalele transmise sunt afectate de zgomot alb cu distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$, să se găsească decizia luată de receptor conform criteriului plauzibilității maxime, prin una dintre cele două metode:

i. fie prin metoda observării continue
ii. fie pe baza a 3 eșantioane luate la momentele $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.5$ și $t_2 = 3.5$



4. (5p) Se recepționează un semnal de forma $r(t) = \underbrace{2A + t}_{s(t)} + zgomot$, unde A este un parametru necunoscut. Zgomotul are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 9)$. La recepție se iau trei eșantioane, la momentele $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$, valorile fiind $r_1 = 3.1$, $r_2 = 3.8$, $r_3 = 5.1$. Estimați parametrul A folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

Formule cunoscute

- primitiva unei funcții Gaussiene: $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$

Teorie

1. (2p) Ce înseamnă că un proces aleator este **ergodic**?
2. (3p) Explicați legătura dintre autocorelația unui proces aleator staționar de la intrarea unui filtru și autocorelația procesului obținut la ieșirea filtrului.
3. (3p) Definiți criteriul de decizie Neymar-Pearson.
4. (3p) Demonstrați că ieșirea unui **filtru adaptat** discret, la momentul final al semnalului de intrare, este egală cu valoarea corelației (fără factorul $\frac{1}{N}$). Se cunoaște relația de convoluție: convoluția a două semnale $x[n]$ și $y[n]$ este $\sum_k x[k]y[n-k]$.
5. (5p) Demonstrați că funcția de cost pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$ conduce la formula estimatorului de Eroare Pătratică Medie Minimă (EPMM):

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|r) d\Theta.$$

   Punct de pornire: expresia riscului global este $R = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\mathbf{r}; \Theta) d\Theta d\mathbf{r}$
6. (2p) Estimarea de plauzibilitate maximă și estimarea Maximum A Posteriori: arătați că una dintre ele este un caz particular al celeilalte.

Notă: 40p total, 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h