Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introducere

Introducere

- Detecția semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
  - inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)
- Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
  - semnalele sunt afectate de zgomot
  - zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Schema bloc a detecției semnalelor

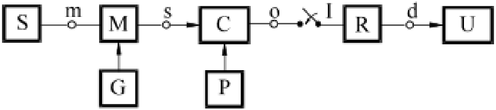


Figure 1: Signal detection model

- Conținut:
  - Sursa de informație: generează mesajele a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
  - Generator: generează semnalele diferite $s_1(t), \dots s_n(t)$
  - Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
  - Canal: adaugă zgomot aleator
  - Eșantionare: ia eșantioane din semnalul $s_n(t)$
  - Receptor: **decide** ce mesaj a_n s-a fost recepționat
  - Utilizator: primește mesajele recuperate

Scenarii practice

- Transmisie de date
  - nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) =$ constant 0 sau 5V)
  - modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) =$ cosinus cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
  - modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) =$ cosinus cu frecvențe diferite
  - modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK
- Radar
  - se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
  - receptorul așteaptă posibilele reflecții ale semnalului emis și decide
    - nu este prezentă o reflecție -> nici un obiect
    - semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat

Generalizări

- Decizie între mai mult de două semnale
- Numărul de eșantioane (observații):
  - un singur eșantion
  - mai multe eșantioane
  - observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detecția semnalelor folosind 1 eșantion

Detecția unui semnal cu 1 eșantion

- Cel mai simplu caz: detecția unui semnal afectat de zgomot, folosind un singur eșantion
  - două mesaje a_0 și a_1
  - mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
    - pentru a_0: se transmite $s(t) = s_0(t)$
    - pentru a_1: se transmite $s(t) = s_1(t)$
  - peste semnal se suprapune zgomot aditiv, alb, $n(t)$
  - se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
  - eșantionarea preia un singur eșantion la timpul t_0, $r(t_0)$
  - decizie: pe baza $r(t_0)$, care semnal a fost cel transmis?

Ipoteze și decizii

- Există două **ipoteze**:
  - H_0: semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
  - H_1: semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- Receptorul poate lua una din două **decizii**:
  - D_0: receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
  - D_1: receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

Rezultate posibile

- Există 4 situații posibile:
  1. **Rejecție corectă**: ipoteza corectă este H_0, decizia este D_0
     - Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$
  2. **Alarmă falsă** (detecție falsă): ipoteza corectă este H_0, decizia este D_1
     - Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$
  3. **Pierdere** (rejecție falsă): ipoteza corectă este H_1, decizia este D_0
     - Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$
  4. **Detecție corectă**: ipoteza corectă este H_1, decizia este D_1
     - Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$

Originea termenilor

- Terminologia are la origine aplicații radar (prima aplicație a teoriei detecției)
  - un semnal se emite de către sursă
  - semnal recepționat = o posibilă reflecție din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
  - H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
  - H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
  - de aceea numele celor 4 scenarii sugerează "detecția unui obiect"

Zgomotul

- În general se consideră zgomot **aditiv**, **alb**, **staționar**
  - aditiv = zgomotul se adună ci semnalul
  - alb = două eșantioane distincte sunt necorelate
  - staționar = are aceleași proprietăți statistice la orice moment de timp
- Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut
  - este o realizare a unui proces aleator
  - se cunoaște doar distribuția sa, nu și valorile particulare

Eșantionul preluat la recepție

- La recepție se primește semnalul $r(t) = s(t) + n(t)$
  - $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
  - $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- Valoarea eșantionului luat la momentul t_0 este $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$
  - $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
  - $n(t_0)$ este un eșantion din semnalul de zgomot

Eșantionul preluat la recepție

- Eșantionul $n(t_0)$ este o **variabilă aleatoare**
  - fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
  - presupunem o v.a. continuă , adică intervalul valorilor posibile e continuă
- $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0 =$ o constantă $+$ o variabilă aleatoare
  - este de asemenea o variabilă aleatoare
  - $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $s_0(t_0)$, fie cu $s_1(t_0)$
- Care e distribuția lui $r(t_0)$?
  - o constantă $+$ o v.a. $=$ aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Funcții de plauzibilitate

- Fie distribuția zgomotului $w(x)$, cunoscută
  - aceasta este distribuția v.a. $n(t_0)$
- Distribuția lui $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0) = w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- În ipoteza H_0, distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- În ipoteza H_1, distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- Distribuțiile $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții condiționate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
  - "|" înseamnă "condiționat de", "dat fiind"
  - adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
  - r reprezintă necunoscuta funcției

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- Cum se decide care ipoteză este adevărată, pe baza eșantionului observat $r = r(t_0)$?
- **Criteriul plauzibilității maxime**: se alege ipoteza care este **cea mai plauzibilă** a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$
  - se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
  - în engleză: Maximum Likelihood (ML)
- Criteriul ML exprimat la un **raport de plauzibilitate**:

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

  - criteriul este evaluat pentru eșantionul observat $r = r(t_0)$

Exemplu: zgomot gaussian

- Fie cazul în care zgomotul are distribuție normală
- La tablă:
  - schiță a celor două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
  - discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
  - discuție: care este pragul T pentru decizii

Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
  - zgomot de tip AWGN
- Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r-s_0(r_0))^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$
- Pentru distribuția normală, e preferabil să aplicăm **logaritmul natural**
  - logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
  - dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$
- Valoarea **log-likelihood** al unui observații = logaritmul plauzibilității (likelihood)
  - de obicei se folosește logaritmul natural, dar poate fi în orice bază

Raportul “log-likelihood” în cazul ML

- Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

- Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

- Notă: $|r - A|$ = distanța dintre r și A
  - $|r|$ = distanța de la r la 0
- Așadar, se alege distanța minimă dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

Criteriul ML pentru zgomot gaussian

- Criteriul ML **pentru zgomot gaussian**: ipoteza se alege pe baza **celei mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$
  - principiul **cel mai apropiat vecin** ("*nearest neighbor*")
  - un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
  - un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** ("*minimum distance receiver*")

Etape pentru decizia pe baza ML

1. Se schițează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

Etape pentru decizia pe baza ML, zgomot gaussian

- Doar dacă zgomotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
  1. Se determină $s_0(t_0) =$ valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_0
  2. Se determină $s_1(t_0) =$ valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_1
  3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege cea mai apropiată valoare

Decizie pe bază de prag

- Alegerea valorii celei mai apropiate = identic cu compararea r cu un prag $T = \frac{s_0(t_0)+s_1(t_0)}{2}$
  - i.e. dacă cele doup valori sunt 0 și 5, decidem prin compararea lui r cu 2.5
- În general, pragul = punctul de intersecție al celor două distribuții condiționate

Exerciții

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}\left(\mu = 0, \sigma^2 = 2\right)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$
  1. Scrieți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
  2. Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
  3. Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
  4. Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1

Regiuni de decizie

- **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior
  - $R_0 = [-\infty, 2.5]$
  - $R_1 = [2.5, \infty]$

Funcția de plauzibilitate

- Să notăm în mod generic ipotezele cu H_i, și semnalele $s_i(t)$, unde i este 0 sau 1
- Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$
  - fie cea de le exemplul anterior:

$$w(r|H_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- Care este variabila necunoscută în această expresie?
  - nu r, din moment ce acesta ni se dă în problemă
  - i este necunoscuta

Terminologie: probabilitate și plauzibilitate

- În aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
  - dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ, σ, H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r, x) atunci funcția reprezintă densitatea de **probabilitate**
  - dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r, x), și necunoscuta o reprezintă un parametru statistic (de ex. μ, σ, i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**
- Distincție subtilă între termenii "probabilitate" și "plauzibilitate"

Funcția de plauzibilitate

- În cazul detecției semnalelor, funcția $w(r|H_i) = f(i)$ este o funcție de plauzibilitate
  - necunoscuta este i
- Funcția este definită doar pentru $i = 0$ și $i = 1$
  - sau, în general, pentru $i =$ câte ipoteze are problema
- Criteriul ML = se alege i pentru care această funcție este maximă

$$Decizia \;\; D_i = \arg\max_i w(r|H_i)$$

  - Notație:
    - $\arg\max f(x)$ = argumentul x pentru care funcția $f(x)$ este maximă
    - $\max f(x)$ = valoarea maximă a funcției $f(x)$
    - a se vedea exemplul grafic la tablă
- Criteriul plauzibilității maxime înseamnă "se alege i care maximizează funcția de plauzibilitate $f(i) = w(r|H_i)$"

Generalizări

- Dacă zgomotul are altă distribuție?
  - Se schițează distribuțiile condiționate
  - Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
  - Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- Regiunile de decizie sunt date de punctețe de intersecție ale distribuțiilor condiționate
  - Pot fi mai multe intersectări, în general, deci mai multe praguri

Generalizări

- Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1?
- Similar:
  - Se schițează distribuțiile condiționate
  - Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
  - Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat

Generalizări

- Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?
- Nu contează forma semnalelor
  - Tot ce contează sunt valorile celor două semnale la momentul de eșantionare t_0:
    - $s_0(t_0)$
    - $s_1(t_0)$

Generalizări

- Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- Se extinde raționamentul la n ipoteze
  - Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots\ s_{n-1}(t)$
  - Avem n valori diferite $s_0(t_0), \dots\ s_{n-1}(t_0)$
  - Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
  - Pentru $r = r(t_0)$ dat, se alege valoarea maximă dintre cele n valori $w(r|H_i)$

Generalizări

- Dacă se iau mai multe eșantioane din semnale?
- Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

Exercițiu

- Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare este transmisă timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

$$4,\ 6.6,\ -5.2,\ 1.1,\ 0.3,\ -1.5,\ 7,\ -7,\ 4.4$$

Probabilități condiționate

- Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile
- Fie regiunile de decizie:
  - R_0: dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
  - R_1: daca $r \in R_1$, decizia este D_1
- Probabilitatea condiționată a rejecției corecte
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_0, calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0) dx$$

- Probabilitatea condiționată a alarmei false
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_1, calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0) dx$$

Probabilități condiționate

- Probabilitatea condiționată de pierdere
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_0, calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1)dx$$

- Probabilitatea condiționată a detecției corecte
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_1, calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1)dx$$

Probabilități condiționate

- Relații între probabilitățile condiționate
  - suma rejecție corectă + alarmă falsă = 1
  - suma pierdere + detecție corectă = 1
  - De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

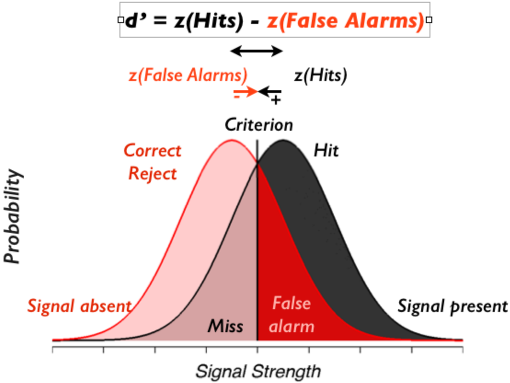


Figure 2: Probabilități condiționate

- Ignorați textul, contează zonele colorate
- [sursa: hhttp://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt]*

Probabilitățile celor 4 rezultate

- Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze
- Nu includ și probabilitățile *ipotezelor înselor*
  - adică, $P(H_0) =$ probabilitatea de a avea ipoteza H_0
  - $P(H_1) =$ probabilitatea de a avea ipoteza H_1
- Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$
  - $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **inițiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

Reamintire (TCI): regula lui Bayes

- Reamintire (TCI): regula lui Bayes

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- Interpretare
  - Probabilitatea $P(A)$ este extrasă din $P(B|A)$
  - $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, șansele ca A chiar să aibă loc
  - Exemplu: P(gol | șut la poartă) $= \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriu?
- La noi: $P(D_i \cap H_j) = P(D_i|H_j) \cdot P(H_j)$
  - pentru toți i și j (în toate cele 4 cazuri)

Exerciţiu

- Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}\left(\mu = 0, \sigma^2 = 2\right)$. Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilităţii maxime, folosind un singur eşantion din semnal.
  1. Calculaţi probabilitatea condiţionată a alarmei false
  2. Calculaţi probabilitatea condiţionată de pierdere
  3. Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ şi $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculaţi probabilitatea rejecţiei corecte şi a detecţiei corecte (nu cele condiţionate)

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

- Criteriul ML compară distribuțiile **condiționate** ale eșantionului observat
  - condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1
  - Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1, și vice-versa
  - pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
  - și de aceea vrem să "favorizăm"/"încurajăm" decizia D_0
- Avem nevoie de un criteriu mai general ...

Criteriul probabilității minime de eroare

- Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- Se urmărește **minimizarea probabilității totale de eroare** $P_e = P_{af} + P_p$
  - erori = alarmă falsă și pierdere
- Trebuie să găsim un nou criteriu
  - adică, alte regiuni de decizie R_0 și R_1

Probabilitatea de eroare

- Probabilitatea unei alarme false este:

$$\begin{aligned}P(D_1 \cap H_0) =& P(D_1|H_0) \cdot P(H_0)\\ =& \int_{R_1} w(r|H_0)dx \cdot P(H_0)\\ =& (1 - \int_{R_0} w(r|H_0)dx \cdot P(H_0)\end{aligned}$$

- Probabilitatea de pierdere este:

$$\begin{aligned}P(D_0 \cap H_1) =& P(D_0|H_1) \cdot P(H_1)\\ =& \int_{R_0} w(r|H_1)dx \cdot P(H_1)\end{aligned}$$

- Probabilitatea totală a erorilor (suma lor) este:

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^{T} [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)]dx$$

Probabilitatea de eroare minimă

- Urmărim minimizarea P_e, adică să minimizăm integrala
- Putem alege R_0 cum dorim, pentru acest scop
- Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
  - integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1
- Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Criteriul probabilității minime de eroare

- **Criteriul probabilității minime de eroare** (MPE):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

  - prescurtat MPE (Minimum Probability of Error)

Interpretare

- Criteriul MPE este o generalizare a criteriului ML, depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
  - se exprimă tot sub forma unui raport de plauzibilitate
- Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- Criteriul ML este un caz particular al MPE pentru for $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

- Echivalent

$$(r-s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r-s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - sau, dacă se desfac parantezele:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0)+s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0)-s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- La criteriul ML, se compară distanțele (la pătrat):

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2$$

- La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Interpretarea 2: valoarea de prag

- La criteriul ML, se compară r cu un prag T

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$$

- La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Exerciții

- Fie decizia între două semnale constante: $s_0(t) = -5$ și $s_1(t) = 5$. Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r.
  1. Să se găsească regiunile de decizie conform criteriului MPE
  2. Calculați probabilitatea alarmei false și probabilitatea de pierdere
  3. Repetați a) și b) dacă $s_1(t)$ este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?

Criteriul riscului minim

- Dacă ne afectează mai mult un anume tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte (pierderi)?
  - Criteriul MPE tratează toate erorile la fel
  - Ne trebuie un criteriu mai general
- Idee: se atribuie **un cost** fiecărui scenariu, apoi se minimizează costul mediu
- C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
  - C_{00} = costul unei rejecții corecte
  - C_{10} = costul unei alarme false
  - C_{01} = costul unei pierderi
  - C_{11} = costul unei detecții corecte
- Ideea de "costuri" și minimizarea costului mediu este general întâlnită
  - de ex. TCI: codare: "costul" unui mesaj este lungimea cuvântului de cod, vrem să minimizăm costul mediu, adică lungimea medie

Criteriul riscului minim

- Definim **riscul** = **media costurilor**

$$R = C_{00}P(D_0 \cap H_0) + C_{10}P(D_1 \cap H_0) + C_{01}P(D_0 \cap H_1) + C_{11}P(D_1 \cap H_1)$$

- Criteriul riscului minim: **se minimizează riscul R**
  - adică se minimizează costul mediu
  - se mai numește "criteriul costului minim"

Calcule

- Demonstrație la tablă
    - se folosește regula lui Bayes
- Concluzie: regula de decizie este

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

Criteriul riscului minim

Criteriul riscului minim (MR):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

* prescurtat MR (Minimum Risk)

Interpretare

- Criteriul MR este o generalizare a MPE (la rândul lui o generalizare a ML)
  - se exprimă tot printr-un raport de plauzibilitate
- Atât **probabilitățile** cât și **costurile** pot influența decizia în favoarea uneia sau alteia dintre ipoteze
- Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, MR se reduce la criteriul MPE
  - de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- Dacă zgomotul este gaussian (normal), la fel ca lal celelalte criterii, se aplică logaritmul natural
- Se obține:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

  - sau

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

  - termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

- La criteriul MR, pe lângă probabilități apar și costurile

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

Interpretarea 2: Valoarea de prag

- La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- La criteriul MR, pragul este influențat și de costuri

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

Influența costurilor

- Criteriul MR împinge decizia înspre **minimizarea scenariilor cu cost ridicat**
- Exemplu: din ecuații:
  - ce se întâmplă dacă costul C_{01} crește, iar celelalte rămân la fel?
  - ce se întâmplă dacă costul C_{10} crește, iar celelalte rămân la fel?
  - ce se întâmplă dacă ambele costuri C_{01} și C_{10} cresc, iar celelalte rămân la fel?

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

- Criteriile ML, MPE și MR au toate forma următoare

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

  - pentru ML: $K = 1$
  - pentru MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
  - pentru MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

În zgomot gaussian, criteriile se reduc la:

- Compararea pătratului distanțelor:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln(K)$$

- Compararea eșantionului r cu un prag T:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)}_{T}$$

Exerciţiu

- Un sistem *airbag* detectează un accident prin eşantionarea semnalului de la un senzor cu 2 valori posibile: $s_0(t) = 0$ (OK) sau $s_1(t) = 5$ (accident).
- Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.
- Se ia un singur eşantion din semnal.
- Costurile scenariilor sunt: $C_{00} = 0$, $C_{01} = 100$, $C_{10} = 10$, $C_{11} = -100$

  1. Găsiţi regiunile de decizie R_0 şi R_1.

Criteriul Neyman-Pearson

- Un criteriu mai general decât toate cele de până acum
- Criteriul Neyman-Pearson: se maximizează probabilitatea de detecție ($P(D_1 \cap H_1)$) păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată ($P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda$)
  - Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$
- Criteriile ML, MPE și MR sunt cazuri particulare ale Neyman-Pearson, pentru diverse valori ale λ.

Exercițiu

- O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție uniformă $U[-5, 5]$.
- Receptorul ia un singur eșantion r.

  1. Găsiți regiunile de decizie conform criteriului Neymar-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
  2. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Aplicație: Semnale diferențiale sau unipolare

- Aplicație: transmisie binară cu semnale constante (de ex. nivele constante de tensiune)
- Două modalități frecvent întâlnite:
  - Semnal unipolar: o valoare este 0, cealaltă este nenulă
    - $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = A$
  - Semnal diferențial: două valori nenule cu semne contrare, aceeași valoare absolută
    - $s_0(t) = -\frac{A}{2}$, $s_1(t) = \frac{A}{2}$
- Care metodă este mai bună?

Semnale diferențiale sau unipolare

- Pentru că există aceeași diferență între nivele, performanțele deciziei sunt identice
- Dar puterea medie a semnalelor diferă
- Pentru semnale diferențiale: $P = \left(\pm \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$
- Pentru semnale unipolare: $P = P(H_0) \cdot 0 + P(H_1)\,(A)^2 = \frac{A^2}{2}$
  - presupunând probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- Semnalul diferențial necesită putere la jumătate față de cel unipolar (mai bine)

Sumar: criterii de decizie

- Am văzut: decizie între două semnale, bazată pe 1 eșantion
- Toate criteriile au la bază raportul de plauzibilitate

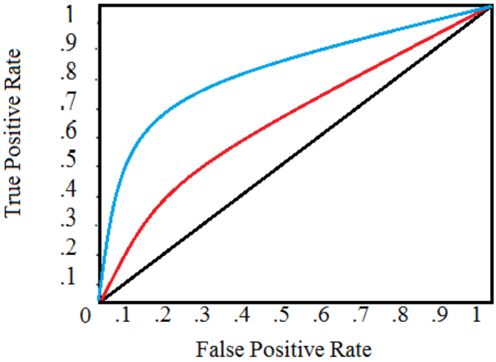
$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K
- În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni de decizie
  - regiunea R_0: dacă r este aici, se decide D_0
  - regiunea R_1: dacă r este aici, se decide D_1
- Pentru zgomot gaussian, granița între regiuni (valoarea de prag) este:

$$T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)$$

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **"Caracteristica de operare a receptorului"** (**"Receiver Operating Characteristic", ROC)**
- Reprezintă probabilitatea detecției corecte $P_d = P(D_1 \cap H_1)$ în funcție de probabilitatea alarmei false $P_{fa} = P(D_1 \cap H_0)$



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- Există întotdeauna un **compromis** între P_d și P_{fa}
  - creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
  - pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
- Cum să creștem performanțele unui receptor?
  - adică să creștem P_D menținând P_{fa} la aceeași valoare

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned} P_d =& P(D_1|H_1)P(H_1) \\ =& P(H_1)\int_T^\infty w(r|H_1) \\ =& P(H_1)(F(\infty) - F(T)) \\ =& \frac{1}{4}\left(1 - erf\left(\frac{T-A}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \\ =& Q\left(\frac{T-A}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned}
P_{fa} &= P(D_1|H_0)P(H_0) \\
&= P(H_0)\int_T^{\infty} w(r|H_0) \\
&= P(H_0)(F(\infty) - F(T)) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 - erf\left(\frac{T-0}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \\
&= Q\left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}$$

- Rezultă că $\frac{T}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}\left(P_{fa}\right)$
- Înlocuind în P_d se obține

$$P_d = Q\left(\underbrace{Q^{-1}\left(P_{fa}\right)}_{constant} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Raportul semnal zgomot

- **Raportul semnal zgomot (SNR)** $= \frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie $= \overline{X^2}$
  - Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
  - Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- În cazul nostru, SNR $= \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q\left(\underbrace{Q^{-1}\left(P_{fa}\right)}_{constant} - \sqrt{SNR}\right)$$

- Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
  - Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
  - SNR mare: performanță bună
  - SNR mic: performanță slabă

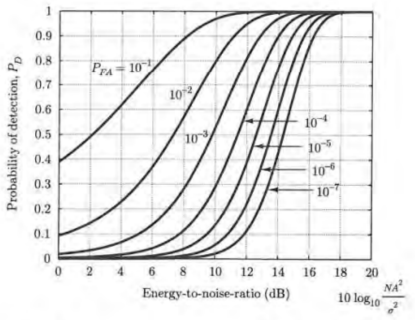


Figure 4: Performanțele detecției depind de SNR

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

Alte aplicații ale teoriei deciziei

- Se pot utiliza aceste criterii de decizie în alte aplicații?
  - nu pentru a decide între semnale, ci în alte scopuri
- Matematic, problema se pune sub forma următoare:
  - avem 2 (sau mai multe) distribuții posibile
  - avem 1 valoare observată
  - determinăm cea mai plauzibilă distribuție, pe baza valorii observate
- În acest caz particular, decidem între două semnale
- Dar acest model matematic se poate aplica și în alte contexte:
  - medicină: un semnal ECG indică o boală sau nu?
  - business: va cumpăra clientul un produs, sau nu?
  - De obicei se folosesc mai multe eșantioane, dar principiul matematic este același

Alte aplicații ale teoriei deciziei

Exemplu (pur imaginar):

- O persoană sănătoasă cu greutatea = X kg are concentrația de trombocite pe ml de sânge distribuită aproximativ $\mathcal{N}\left(\mu = 10 \cdot X, \sigma^2 = 20\right)$.
- O persoană suferind de boala B are o valoare mult mai scăzută, distribuită aproximativ $\mathcal{N}\left(100, \sigma^2 = 10\right)$.
- În urma analizelor de laborator, ai obținut valoarea $r = 255$. Greuatea ta este 70 kg.
- Decideți: sănătos sau nu?

II.3 Detecția unui semnal constant cu mai multe eșantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal constant

- Presupunem că avem mai multe eșantioane, nu doar unul
- Eșantioanele formează **vectorul eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ... r_N]$$

- În ambele ipoteze, semnalul recepționat este un **proces aleator**
  - H_0: proces aleator cu valoarea medie 0
  - H_1: proces aleator cu valoarea medie A
- Dacă zgomotul este staționar și ergodic, semnalul recepționat este și el staționar și ergodic (semnalul = o constantă + zgomotul)
- Valorile vectorului **r** sunt descrise de **distribuția de ordin** N a procesului aleator, $w_N(\mathbf{r}) = w_N(r_1, r_2, ... r_N)$
- Dacă zgomotul este alb, momentele de timp când se iau eșantioanele nu contează

Plauzibilitatea vectorului de eșantioane

- Se aplică **aceleași criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eșantion
$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_0)}{w_N(\mathbf{r}|H_1)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$
- Observații
  - $\mathbf{r}$ este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eșantioanelor
  - ipotezele H_0 și H_1 sunt aceleași ca în cazul cu 1 eșantion
  - $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului $\mathbf{r}$ în ipoteza H_0
  - $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului $\mathbf{r}$ în ipoteza H_1
  - valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
  - identic ca la 1 eșantion, doar că acum datele = mai multe eșantioane

Descompunere pe fiecare eșantion

- Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt **realizări independente ale aceleiași distribuții**
- În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs
$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot ... \cdot w(r_N|H_j)$$
- Termenii $w(r_i|H_j)$ sunt plauzibilitățile fiecărui eșantion în parte
    - de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9]$ = plauzibilitatea obținerii lui 5.1 $\times$ plauzibilitatea obținerii lui 4.7 $\times$ plauzibilitatea obținerii lui 4.9

Descompunere pe fiecare eșantion

- Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} ... \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Raportul de plauzibilitate al unui vector de eșantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eșantion

Caz particulae: AWGN

- AWGN = "Additive White Gaussian Noise" = Zgomot alb, gaussian, aditiv
- În ipoteza H_1: $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - A)^2}{2\sigma^2}}$
- În ipoteza H_0: $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$
- Raportul de plauzibilitate al vectorului $\mathbf{r}$

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum(r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

- Se pot găsi trei interpretări ale raportului de plauzibilitate

Interpretarea 1: media eșantioanelor

- Interpretarea 1: media eșantioanelor

$$
\begin{aligned}
\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= \frac{e^{-\frac{\sum(r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \\
&= e^{-\frac{\sum(r_i - A)^2 - \sum(r_i)^2}{2\sigma^2}} \\
&= e^{-\frac{\sum(r_i^2 - 2r_i A + A^2) - \sum(r_i)^2}{2\sigma^2}} \\
&= e^{-\frac{\sum(-2r_i A + A^2)}{2\sigma^2}} \\
&= e^{-\frac{-2A\sum(r_i) + NA^2}{2\sigma^2}} \\
&= e^{-\frac{-2A\frac{\sum(r_i)}{N} + A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}
\end{aligned}
$$

Media a N variabile aleatoare normale

- Fie U_r = media aritmetică a eșantioanelor r_i

$$U_r = \frac{1}{N} \sum r_i$$

- Care este distribuția sa?
- Fie suma $S_r = \sum r_i$ a celor N eșantioane r_i
  - Din cap.I: suma unor v.a. normale cu distribuția $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ este:
  - cu distribuție normală $\mathcal{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$, unde:
  - valoarea medie: $\mu_S = N \cdot \mu$
  - varianța: $\sigma_S^2 = N \cdot \sigma^2$
- Așadar $U_r = \frac{1}{N} S_r$, din proprietățile mediei se obține:
  - U_r are distribuție normală, cu:
  - valoarea medie $= \frac{1}{N} \mu_S = \frac{1}{N} N \mu = \mu$
  - varianța $= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_S^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N \sigma_S^2 = \frac{1}{N} \sigma^2$

Media a N variabile aleatoare normale

- Media a N realizări ale unei distribuții normale are tot o distribuție normală, cu
  - aceeași valoare medie
  - varianța de N ori mai mică
- Dacă N este foarte mare, media aritmetică este un **estimator** foarte bun pentru valoarea medie a distribuției
  - distribuția sa devine foarte "îngustă" în jurul valorii medii

Interpretarea 1: media eșantioanelor

$$\begin{aligned}
\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= e^{-\frac{-2AU_r + A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}} \\
&= \frac{e^{-\frac{U_r^2 - 2AU_r + A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{-\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\
&= \frac{e^{-\frac{(U_r - A)^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{-\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\
&= \frac{w(U_r|H_1)}{w(U_r|H_0)}
\end{aligned}$$

- Raportul de plauzibilitate a N eșantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eșantioanelor**

Interpretarea 1: media eșantioanelor

- Raportul de plauzibilitate a N eșantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eșantioanelor**
  - media are o varianță mai mică, $\frac{1}{N}\sigma^2$, deci este mai precisă
  - e ca și cum distribuția zgomotului devine de N ori mai îngustă (datorită medierii)
- Detecția unui semnal constant cu N eșantioane este similaru cu detecția cu un singur eșantion, doar că
  - se folosește valoarea medie a eșantioanelor r_i
  - distribuția sa este de N ori mai îngustă (varianța e de N ori mai mică)
- Când N crește, probabilitatea erorilor scade => performanțe îmbunătățite

Exercițiu

Exercițiu:

- Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.
    1. Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
    2. Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?

Interpretarea 2: geometric

- Folositoare în special pentru criteriul plauzibilității maxime
- Raportul de plauzibilitate pentru vectorul **r**

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum(r_i-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- La criteriul plauzibilității maxime se compară cu 1

$$\frac{e^{-\frac{\sum(r_i-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$e^{-\frac{\sum(r_i-A)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$-\sum(r_i-A)^2 + \sum(r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\sum(r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum(r_i-A)^2$$

Interpretarea 2: geometric

- $\sqrt{\sum(r_i)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctul $\mathbf{0} = [0, 0, ...0]$
- $\sqrt{\sum(r_i - A)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctul $\mathbf{A} = [A, A, ...A]$
- criteriul plauzibilității maxime alege **vectorul (punctul) semnalului cel mai apropiat** de vectorul (punctul) recepționat, într-un spațiu N-dimensional
  - receptorul se mai numește “receptor de distanță minimă”
  - aceeași interpretare ca în cazul 1-D
- Întrebare: care este interpretarea geometrică pentru celelalte criterii?

Exerciții

Exercițiu:

- Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4\}$.
    1. Care este decizia conform criteriului plauzibilității maxime? Utilizați interpretarea geometrică.

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Raportul de plauzibilitate al vectorului **r**

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2 \sum r_i A - NA^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i A \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{A^2}{2} + \frac{1}{N} \sigma^2 \ln K}_{L = const}$$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- **Valoarea de corelație** (sau "corelația") a două semnale x and y este

$$< x, y >= \frac{1}{N} \sum x[n]y[n]$$

- Este valoarea funcției de corelație în 0

$$< x, y >= R_{xy}[0] = \overline{x[n]y[n+0]}$$

- Pentru semnale continue

$$< x, y >= \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt$$

- $\frac{1}{N} \sum r_i A =< \mathbf{r}, \mathbf{A} >$ este corelația vectorului recepționat $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ cu vectorul **țintă** $\mathbf{A} = [A, A, ...A]$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Dacă valoarea de corelație a vectorului recepționat cu vectorul țintă $\mathbf{A} = [A, A, ...A]$ este mai mare decât un prag L, se decide că semnalul este detectat.
  - altfel, semnalul este rejectat
- Decizia este **similară cu detecția semnalului cu singur eșantion**, unde valoarea eșantionului este $< \mathbf{r}, \mathbf{A} >$

Corelația ca măsura a similarității semnalelor

- În domeniul prelucrărilor de semnal, corelația este o formă de a măsura **similaritatea** a două semnale
- Interpretare: verificăm dacă vectorul recepționat este suficient de similar cu semnalul constant A
  - Da: (corelație mare) $=>$ semnalul este detectat
  - Nu: (corelație mică) $=>$ nu este detectat

Generalizare: două valori nenule

- Generalizare: două valori nenule, B și A
  - în zgomot Gaussian
- Interpretarea 1: media eșantioanelor
  - se folosește tot media eșantioanelor, cele două distribuții sunt centrate pe B și A
- Interpretarea 2: geometric (crit. plauzib. maxime)
  - se alege minimul distanței dintre $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctele $\mathbf{B} = [B, B, ...]$ și $\mathbf{A} = [A, A, ...]$
- Interpretarea 3: corelația
  - se calculează $< \mathbf{r}, \mathbf{B} >$ and $< \mathbf{r}, \mathbf{A} >$, corelația lui $\mathbf{r}$ cu $\mathbf{B} = [B, B, ...]$ și cu $\mathbf{A} = [A, A, ...]$.
  - pe slide-ul următor

Detecția a două valori nenule folosind corelația

$$e^{-\frac{\sum(r_i-A)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sum(r_i-B)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum(r_i-A)^2+\sum(r_i-B)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i A - NA^2 - 2\sum r_i B + NB^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N}\sum r_i A - \frac{A^2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{N}\sum r_i B - \frac{B^2}{2} + \frac{1}{N}\sigma^2 \ln K$$

Detecția a două valori nenule folosind corelația

- Pentru criteriul plauzibilității maxime ($K = 1$):

$$< \mathbf{r}, \mathbf{A} > - \frac{< \mathbf{A}, \mathbf{A} >}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, \mathbf{B} > - \frac{< \mathbf{B}, \mathbf{B} >}{2}$$

- Dacă valorile sunt opuse, $B = -A$, se alege cea mai similară cu **r**:
  - corelația este o măsură a similarității

$$< \mathbf{r}, \mathbf{A} > \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, -\mathbf{A} >$$

- Alte criterii: termen adițional $\frac{1}{N}\sigma^2 \ln K$

Exerciții

Exerciții:

- Un semnal poate avea două valori, -4 (ipoteza H_0) sau 5 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia trei eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 2.2\}$.
    1. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime? Folosiți toate cele trei interpretări.

II.4 Detecția semnal oarecare cu mai multe eșantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal oarecare

- Dorim detecția unui semnal **oarecare (ne-constant)** $s(t)$
- Cele N eșantioane se iau la momentele de timp $\mathbf{t} = [t_1, t_2, ...t_N]$ și formează **vectorul eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$$

- Ce diferă față de cazul unui semnal constant?

Ipoteze

- În fiecare ipoteză, semnalul este un proces aleator
  - H_0: proces aleator cu medie 0
  - H_1: proces aleator cu media $s(t)$
- Eșantionul r_i, de la momentul t_i, poate fi:
  - $0 +$ zgomot, în ipoteza H_0
  - $s(t_i) +$ zgomot, în ipoteza H_1
- Întregul vector al eșantioanelor **r** poate fi
  - $0 +$ zgomot, , în ipoteza H_0
  - $s(t) +$ zgomot, în ipoteza H_1, pentru $t =$ timpii de eșantionare t_i
- Distribuția vectorului **r** este descrisă de o funcție $w_N(\mathbf{r})$

Plauzibilitatea vectorului eșantioanelor

- Se folosesc **aceleași criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate ca la semnale constante:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_0)}{w_N(\mathbf{r}|H_1)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Diferența este că semnalele "adevărate" sunt acum
  - [0, 0, ... 0] în ipoteza H_0
  - $[s(t_1), s(t_2), ...s(t_N)]$ în ipoteza H_1

Descompunere

- Distribuția vectorială $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot ... \cdot w(r_N|H_j)$$

- Toate criteriile de decizie bazate pe raportul de plauzibilitate se pot scrie ca

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} ... \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Raportul de plauzibilitate al unui singur eșantion r_i se calculează folosind cele două valori posibile ale semnalului, 0 și $s(t_i)$
  - la semnale constante, valorile erau 0 și A întotdeauna
  - acum sunt 0 și $s(t_i)$, în funcție de momentele de eșantionare t_i
  - momentele de eșantionare t_i trebuie alese astfel încât să maximizeze performanțele detecției

Caz particular: zgomot alb Gaussian ("AWGN")

- AWGN = "Additive White Gaussian Noise"
- In hypothesis H_1: $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}$
- In hypothesis H_0: $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$
- Raportul de plauzibilitate al vectorului $\mathbf{r}$

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

- Sunt posibile două interpretări

Interpretarea 1: valoarea medie

- Interpretarea 1: valoarea medie
- Nu mai este valabilă, întrucât valorile $s(t_i)$ nu mai sunt identice

Interpretarea 2: geometric

- Folositoare mai ales în cazul criteriului plauzibilității maxime
- Raportul de plauzibilitate pentru vectorul **r**

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Criteriul plauzibilității maxime: $K = 1$

$$\frac{e^{-\frac{\sum(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$e^{-\frac{\sum(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$-\sum(r_i - s(t_i))^2 + \sum(r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\sum(r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum(r_i - s(t_i))^2$$

Interpretarea 2: geometric

- $\sqrt{\sum(r_i)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctul $\mathbf{0} = [0, 0, ...0]$
- $\sqrt{\sum(r_i - s(t_i))^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctul $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = [s(t_1), s(t_2), ...s(t_N)]$
- Criteriul plauz. maxime alege **semnalul cel mai apropiat** de cel recepționat, într-un spațiu N-dimensional
  - se mai numește "receptor de distanță minimă"
  - aceeași interpretare ca în cazul 1-D
- Întrebare: interpretarea geometrică pentru celelalte criterii?

Exercițiu:

- Fie detecția unui semnal $s(t) = 3\sin(2\pi f t)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent (ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.
  1. Care sunt cele mai bune momente de eșantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
  2. Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauz. maxime? Utilizați interpretarea geometrică.
  3. Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detecția?

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Raportul de plauzibilitate pentru vectorul $\mathbf{r}$

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$e^{-\frac{\sum(r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum(r_i - s(t_i))^2 + \sum(r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i s(t_i) - \sum s(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N}\sum r_i s(t_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\sum s(t_i)^2}{N} + \frac{1}{N}\sigma^2 \ln K}_{L=const}$$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- $\frac{1}{N}\sum r_i s(t_i) =< \mathbf{r}, \mathbf{s}(\mathbf{t_i}) >$ reprezintă valoarea corelației (sau "corelația") eșantioanelor recepționate $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ cu eșantioanele **țintă** $\mathbf{s}(\mathbf{t_i}) = [s(t_1), s(t_2), ...s(t_N)]$
- Dacă corelația eșantioanelor recepționate **r** cu eșantioanele **țintă** $\mathbf{s}(\mathbf{t_i})$ este mai mare decât un prag L, se decide că semnalul este prezent.
  - Altfel, se decide că semnalul este absent
  - Corelația este o măsură a **similarității** a două semnale

Generalizare: două semnale oarecare

- Generalizare: se decide între **două semnale diferite** $s_0(t)$ și $s_1(t)$
  - în zgomot Gaussian
- Interpretarea 2: geometric
  - se alege distanța Euclidiană minimă dintre $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ și punctele $\mathbf{s_0(t)} = [s_0(t_1), s_0(t_2), ...]$ și $\mathbf{s_1(t)} = [s_1(t_1), s_1(t_2), ...]$
- Interpretarea 3: valoarea corelației
  - se calculează corelația $\mathbf{r}$ cu $\mathbf{s_0(t)} = [s_0(t_1), s_0(t_2), ...]$ și $\mathbf{s_1(t)} = [s_1(t_1), s_1(t_2), ...]$, $< \mathbf{r}, \mathbf{s_0} >$ and $< \mathbf{r}, \mathbf{s_1} >$.
  - pe slide-ul următor

Detecție între două semnale diferite folosind corelația

$$e^{-\frac{\sum(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum(r_i - s_1(t_i))^2 + \sum(r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i s_1(t_i) - \sum s_1(t_i)^2 - 2\sum r_i s_0(t_i) + \sum s_0(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N}\sum r_i s_1(t_i) - \sum s_1(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{N}\sum r_i s_0(t_i) - \sum s_0(t_i)^2 + \frac{1}{N}\sigma^2 \ln K$$

Detecție între două semnale diferite folosind corelația

- Criteriul plauz. maxime ($K = 1$):

$$< \mathbf{r}, \mathbf{s_1} > - \frac{< \mathbf{s_1}, \mathbf{s_1} >}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, \mathbf{s_0} > - \frac{< \mathbf{s_0}, \mathbf{s_0} >}{2}$$

- Dacă semnalele au aceeași energie: $\sum s_1(t_i)^2 = \sum s_0(t_i)^2$, atunci $< \mathbf{s_1}, \mathbf{s_1} > = < \mathbf{s_0}, \mathbf{s_0} >$, și alegem semnalul **cel mai asemănător cu r**:
  - corelația este o măsură a similarității a două semnale

$$< \mathbf{r}, \mathbf{s_1} > \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, \mathbf{s_0} >$$

- Exemple:
  - Modulație BPSK: $s_1 = A\cos(2\pi f t)$, $s_0 = -A\cos(2\pi f t)$
  - Modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A\cos(2\pi f t + n\frac{\pi}{4})$

Detecție pe baza corelației

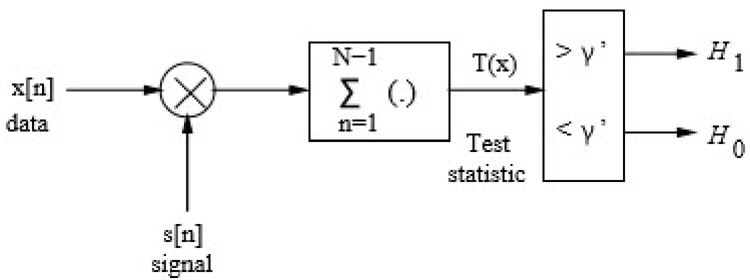


Figure 5: Detecția unui semnal folosind un corelator

[sursa: http://nptel.ac.in/courses/117103018/43]

Detecția a doua semnale

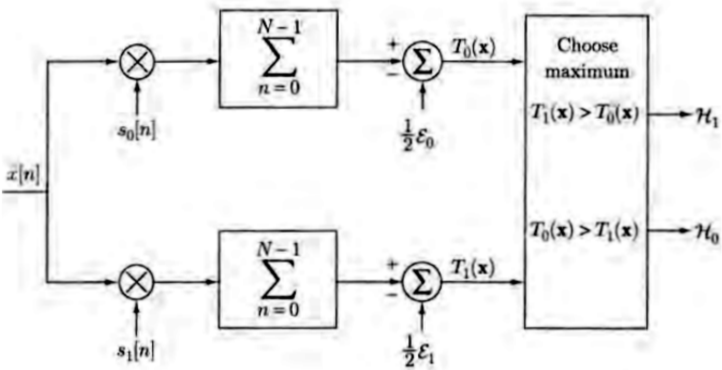


Figure 6: Decizie între două semnale diferite

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

Filtru adaptat

- Cum se calculează corelația a două semnale $r[n]$ și $s[n]$ de lungime N?

$$< r, s >= \frac{1}{N} \sum r_i s(t_i)$$

- Fie $h[n]$ semnalul $h[n]$ **oglindit**
  - începând tot de la momentul 0, semnal cauzal

$$h[n] = s[N-1-n]$$

- Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n-k] = \sum_k r[k]h[N-1-n+k]$$

- Rezultatul convoluției la finalul semnalului de intrare, $y[N-1]$ $(n = N-1)$, este chiar corelația
  - până la un factor de scalare $\frac{1}{N}$

$$y[N] = \sum_k r[k]s[k]$$

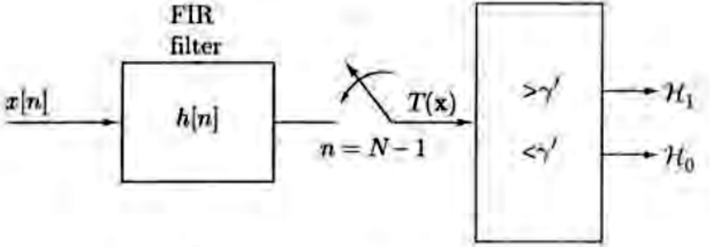
Filtru adaptat

- Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru a cărui răspuns la impuls = oglindirea lui** $s[n]$, luându-se eșantionul de la finalul semnalului de intrare
  - se obține valoarea corelației

$$h[n] = s[N-1-n]$$

- **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. “matched filter”)
  - filtrul este *adaptat* semnalului dorit

Filtru adaptat



$$h[n] = \begin{cases} s[N-1-n] & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Figure 7: Detecție folosind un filtru adaptat

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

II.5 Detecția unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- Observare continuă = fără eșantionare, se folosește **întreg semnalul continuu**
    - similar cazului cu N eșantioane, dar cu $N \to \infty$
- Semnalul recepționat este $r(t)$
- Semnalul țintă este $s(t)$
- Presupunem doar zgomot Gaussian
- Cum are loc detecția?

Detecția semnalelor continue

- Se extinde cazul precedent cu N eșantioane la cazul unui semnal continuu, $N \to \infty$
- Interpretarea 1: media eșantioanelor
  - Nu mai este valabilă, întrucât $s(t)$ nu este constant

Interpretarea 2: geometric

- Interpretarea 2: geometric
- Fiecare semnal $r(t)$, $s(t)$ sau 0 reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- Distanța între două semnale este:

$$d(r,s) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 \, dt}$$

- Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă
- Criteriul plauzibilității maxime:
  - se calculează distanța $d(r,s)$ între $r(t)$ și $s(t)$
  - se calculează distanța $d(r,0)$ între $r(t)$ și 0
  - se alege valoarea minimă

Interpretarea 3: corelația

- Corelația a două semnale continue $r(t)$ și $s(t)$ de lungime T

$$< \mathbf{r}, \mathbf{s} >= \frac{1}{T} \int_0^T r(t) \cdot s(t) dt$$

- Dacă corelația semnalului recepționat cu semnalul căutat $\mathbf{s(t_i)}$ este mai mare decât un prag L, se decide că semnalul este detectat.
  - Altfel, se decide că semnalul este absent
  - Corelația este o măsură a similarității a două semnale

Generalizări

- Detecția între **două semnale** $s_0(t)$ și $s_1(t)$
  - în zgomot Gaussian
- Interpretarea 2: geometric
  - se alege distanța Euclidiană minimă între punctul $\mathbf{r(t)}$ și punctele $\mathbf{s_0(t)}$ și $\mathbf{s_1(t)}$
    - folosind distanța dintre semnale definită mai sus
- Interpretarea 3: corelația
  - se calculează corelația lui $\mathbf{r(t)}$ cu $\mathbf{s_0(t)}$ și cu $\mathbf{s_1(t)}$.

Detecția între două semnale folosind corelația

- Criteriul plauz. maxime ($K = 1$):

$$< \mathbf{r}, \mathbf{s_1} > - \frac{< \mathbf{s_1}, \mathbf{s_1} >}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, \mathbf{s_0} > - \frac{< \mathbf{s_0}, \mathbf{s_0} >}{2}$$

- Dacă cele două semnale au energii egale: $\int s_1(t)^2 dt = \int s_0(t)^2 dt$, atunci $< \mathbf{s_1}, \mathbf{s_1} > = < \mathbf{s_0}, \mathbf{s_0} >$, așadar se alege **semnalul cel mai asemănător cu** $r(t)$:
  - Corelația este o măsură a similarității a două semnale

$$< \mathbf{r}, \mathbf{s_1} > \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} < \mathbf{r}, \mathbf{s_0} >$$

- Exemple
  - Modulația BPSK: $s_1 = A\cos(2\pi f t)$, $s_0 = -A\cos(2\pi f t)$
  - Modulația 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A\cos(2\pi f t + n\frac{\pi}{4})$

Filtru adaptat

- Corelația a două semnale se poate calcula cu un **filtru adaptat**
- **Filtru adaptat** = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu **oglindirea** semnalului căutat
  - filtrul este *adaptat* semnalului căutat
  - filtru continuu, cu răspuns la impuls continuu
- Pentru detecția unui semnal $s(t)$ se poate folosi un filtru adaptat, luând eșantionul de la ieșire în momentul final al semnalului de intrare
  - se obține chiar valoarea corelației