Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

I.1 Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

- **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - Prescurtat: v.a.
- Notație uzuală: X, Y etc..
- Exemple:
  - X = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - V_{in} = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

Realizări

- **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - mulțimea tuturor realizărilor
- Exemplu: aruncarea unui zar
  - V.a. se notează X
  - Se poate obține o realizare $X = 3$
  - Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
  - Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
  - Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- Exemple:
  - Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
  - Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor diferite*.
  - Valoarea este afectată de zgomot
  - Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

Funcția masă de probabilitate

- Fie o v.a. discretă A
- **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*) = probabilitatea ca A să aibă valoarea egală cu x

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- pe scurt, se mai numește **distribuția** variabilei A
- Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă

Calculul probabilității cu FMP

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^{b} w_A(x)$$

Funcția de repartiție

- **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- Pentru v.a. discrete, FR este "în trepte"

Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v-1)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a-1)$$

Relația între FMP și FR

- FR este *suma cumulativă* (un fel de “integrală discretă”) a FMP

$$F_A(x) = \sum_{all \quad t \leq x} w_A(t)$$

- Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

Funcția densitate de probabilitate

- Fie o v.a. **continuă** A
- **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** $=$ probabilitatea ca valoarea lui A să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x, totul supra ϵ
- Se notează $w_A(x)$, se mai numește **distribuția** variabilei A
- Informal: FDP reprezintă probabilitatea ca valoarea lui A să fie **în jurul lui** x

Probabilitatea unei valori exacte

- Probabilitatea ca o v.a. continuă A să ia **exact** o valoare x este **zero**
  - pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
  - de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii x, și nu exact egal cu x

Calculul probabilității cu FDP

- Probabilitatea ca A să aibă exact valoarea v este întotdeauna 0

$$P\left\{A = v\right\} = 0$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b = integrala FDP între a și b:

$$P\left\{a \leq A \leq b\right\} = \int_a^b w_A(x)dx$$

Funcția de repartiție

- **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\left\{A \leq x\right\}$$

- Aceeași definiție ca și la v.a. discrete

Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca valoarea lui A să fie între a și b:

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

- Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis
  - $[a, b]$ sau (a, b), nu contează
  - de ce?

Relația între FDP și FR

- FR este **integrala** FDP
- FDP este **derivata** FR

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^{x} w_A(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} w_A(x) &= \frac{\mathrm{d}F_A(x)}{\mathrm{d}x} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F_A(x+\epsilon) - F_A(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(A \in [x-\epsilon, x+\epsilon])}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Interpretare grafică

- Probabilitatea ca A să fie între a și b este **suprafața de sub FDP**
  - adică integrala de la a la b
- Probabilitatea ca A să fie exact egal cu o valoare este zero
  - aria de sub un punct este nulă

V.a. discrete vs continue

Comparație între v.a. discrete și continue

- FR $F_A(x)$ are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- FDP/FMP $w_A(x)$ este derivata FR
  - la v.a. continue:
    - este o derivată obișnuită
    - reprezintă probabilitatea de a fi "in jurul" valorii x
  - la v.a. discrete:
    - un fel de "derivată discretă"
    - reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea x

Proprietățile v.a

FR:

- FR este mereu pozitivă, $F_A(x) \geq 0$
- FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1

$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

FDP/FMP:

- PDF/PMF sunt mereu pozitive $w_A(x) \geq 0$
- Integrala/suma pe întreg domeniul $= 1$

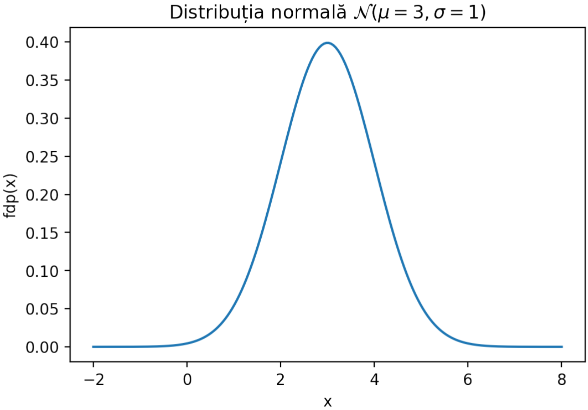
$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Distribuția normală

- Are doi parametri:
  - **Media** $\mu =$ “centrul” funcției
  - **Deviația standard** $\sigma =$ “lățimea” funcției
    - σ mic = funcție îngustă și înaltă
    - σ mare = funcție largă și joasă
- Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala $= 1$)
- Extrem de des întâlnită în practică
- Orice valoare reală este posibilă ($w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

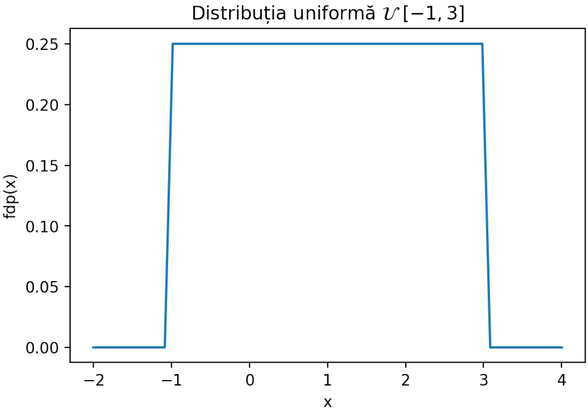
Distribuția normală

- Distribuția descrește pe măsură ce x se îndepărtează de centrul μ
  - Datorită termenului $-(x-\mu)^2$ de la exponent
  - Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui μ $(x - \mu = 0)$
  - Valorile apropiate de μ sunt mai probabile, valorile mai depărtate de μ sunt mai puțin probabile
- Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de μ, cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de μ

Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$



Distribuția uniformă

- Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- "Înălțimea" funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
  - pentru ca integrala (aria) să fie 1
- Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
  - valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- Se notează cu $\mathcal{U}\,[a, b]$

Alte distribuții

- Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- Cum calculăm $\int_a^b$ dintr-o distribuție normală?
  - Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- Se folosește *the error function*:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F_A(X) = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}))$$

- Valorile funcției *erf()* sunt tabelate / se calculează numeric
  - de ex. pe Google, căutați $erf(0.5)$
  - Alte valori folositoare:
    - $erf(-\infty) = -1$
    - $erf(\infty) = 1$

Exerciţiu

Exerciţiu:

- Fie A o v.a. cu distribuţia $\mathcal{N}(3,2)$. Calculaţi probabilitatea ca $A \in [2,4]$

Suma unei constante cu o v.a.

- Fie o v.a. A
- Ce reprezintă $B = 5 + A$?

Răspuns:

- B este tot o variabilă aleatoare
- B are același tip de distribuție, dar “translată” cu 5 la dreapta

Exemplu:

- A este o v.a. cu distribuție normală $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- Care este distribuția variabilei $B = 5 + A$?
- Răspuns: $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

V.a. ca funcții de alte v.a

- O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- Exemple: dacă A este o v.a. distribuită $\mathcal{U}\ [0, 10]$, atunci
  - $B = 5 + A$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U}\ [5, 15]$
  - $C = A^2$ este de asemenea o v.a.
  - $D = cos(A)$ este de asemenea o v.a.
- Motivație: dacă A este aleatoare, și valorile B, C, D sunt aleatoare
- A, B, C, D nu sunt independente
  - O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Fie un sistem cu două v.a. continue A și B
- Care este probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea în jurul (x, y)?
- Distribuția valorilor perechii (A, B) este descrisă de:
  - Densitatea de probabilitate comună $w_{AB}(x, y)$
  - Funcția de repartiție comună $F_{AB}(x, y)$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB}\left\{A \leq x \cap B \leq y\right\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea într-o vecinătate a (x, y)
- Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P\left\{A = x \cap B = y\right\}$$

Variabile independente

- Două v.a. A și B sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- Pentru v.a. independente, probabilitatea ca A să fie în jurul lui x și B în jurul lui y este produsul celor două probabilități

$$w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)$$

- Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- Similar pentru mai mult de două v.a.

Variabile independente

Exercițiu:

- Calculați probabilitatea ca trei v.a. X, Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(-1,1)$ să fie toate pozitive
  - ***i.i.d*** $=$ "independente și identic distribuite"

Multiple v.a. normale

- Fie un set de N v.a. normale $(A_1, ...A_N)$, cu medii diferite μ_i dar aceeași deviație standard σ
- Probabilitatea ca $(A_1, ...A_N)$ să fie în jurul valorii $(x_1, ...x_N)$ este

$$w_{A_1,...A_N}(x_1, ...x_N) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{\frac{(x_1-\mu_1)^2+...+(x_N-\mu_N)^2}{2\sigma^2}}$$

- Probabilitatea depinde de **distanța Euclideană** dintre $\mathbf{x} = (x_1, ...x_N)$ și $\mu = (\mu_1, ...\mu_N)$

Distanța Euclideană

- **Distanța Euclideană (geometrică)** între 2 vectori N-dimensionali

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + ... + (u_N - v_N)^2}$$

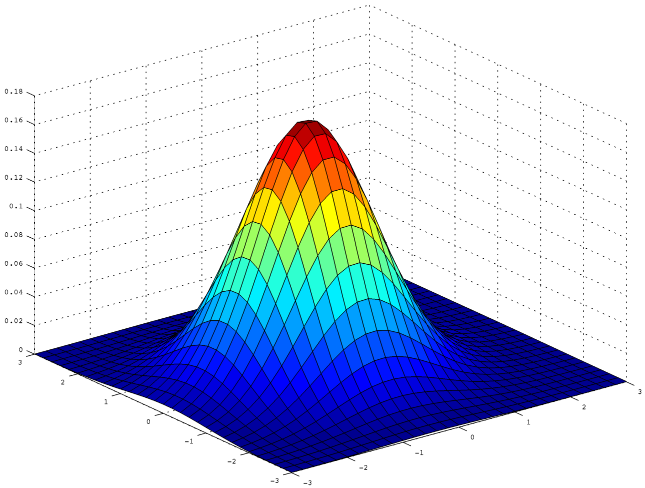
- Unidimensional: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = |u - v|$
- 2D: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$
- 3D: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$
- ...
- N-dimensional: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (u_i - v_i)^2}$
- ...
- Semnale continue: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - v(t))^2 dt}$

Multiple v.a. normale

- Probabilitatea a N v.a. normale, independente, cu același σ dar diferite μ_i depinde de **pătratul distanței Euclidiene față de vectorul medie** $\mu = (\mu_1, ...\mu_N)$
  - Aproape de μ: probabilitate mai mare
  - Departe de μ: probabilitate redusă
  - Două puncte la aceeași distanță de μ au aceeași probabilitate

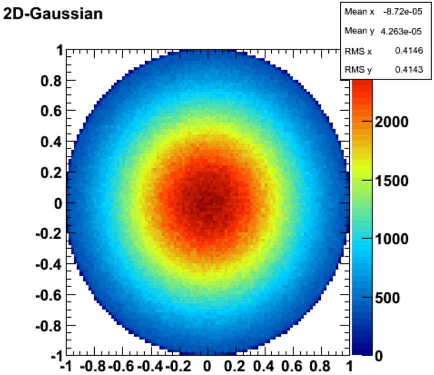
Distribuția normală 2D

- Distribuția a 2 v.a. normale (distribuția normală 2D)



Distribuția normală 2D - vedere de sus

- Vedere de sus
- Aici, $\mu = (0, 0)$
- Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în cercuri concentrice (simetric)



Medii statistice

- V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("*momente*")
- Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- (Exemplu: entropia H(X) = valoarea medie a informației)
- Notație uzuală: μ

Proprietățile valorii medii

- Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- Liniaritate
$$E\{c_1 A + c_2 B\} = c_1 E\{A\} + c_2 E\{B\}$$
- Sau:
$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$
$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$
- Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- Momentul de ordin 2
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

- Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Varianța

- Varianța = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A-\mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w_A(x) dx$$

- V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A-\mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w_A(x)$$

- Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - σ^2 = mare: abateri mari față de medie
  - σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \overline{\{A-\mu\}^2} \\
&= \overline{A^2 - 2 \cdot A \cdot \mu + \mu^2} \\
&= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\
&= \overline{A^2} - \mu^2
\end{aligned}
$$

Suma variabilelor aleatoare

- Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- Dacă $C = A + B$, atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

- Caz particular: dacă A și B sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$, atunci:
  - C este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$, având:
  - media = suma mediilor: $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
  - varianța = suma varianțelor: $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

II.2 Procese aleatoare

Procese aleatoare

- Un **proces aleator** $=$ o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ $=$ o secvență de v.a. la momente de timp discrete
  - ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ $=$ o secvență de v.a. la orice moment de timp
  - ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
  - ex:. $f(t_0)$ $=$ valoarea la momentul t_0 este o v.a.

Realizări ale proceselor aleatoare

- **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
  - ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; dar am fi putut măsura orice altă realizare
- Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
  - la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- Fiecare eșantion $f(t_1)$ dintr-un proces aleator este o v.a.
  - descris de o **distribuție de ordin 1**
  - are FR $F_1(x; t_1)$
  - are FDP / FMP $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x;t_1)}{dx}$
  - distribuția depinde de momentul t_1
- Un eșantion la alt moment t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
  - altă FR $F_1(x; t_2)$
  - altă FDP / FMP $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x;t_2)}{dx}$
- Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții *de ordin 1*)
- Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2

- O pereche de v.a. $f(t_1)$ și $f(t_2)$ formează un sistem de 2 v.a.:
  - sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
  - au FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
  - au FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
  - distribuția depinde de momentele t_1 și t_2
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin n

- Generalizare la n eșantioane ale unui p.a.
- Un set de n v.a. $f(t_1), ...f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$:
  - sunt descrise de o **distribuție de ordin n**
  - au FR comună $F_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n)$
  - au FDP / FMP comună $w_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1,...x_n;t_1,...t_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$
  - depind de momentele de timp $t_1, t_2, \ldots t_n$
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n valori (distribuții *de ordin n*)
- Similar pentru p.a. discrete

Medii statistice

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii statistice și temporale

Pentru procese continue:

1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

Medii statistice - varianța

3. Varianța

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1)^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- Varianța se poate calcula pe baza celorlalte două:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) =& \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ =& \overline{f(t_1)^2 - 2f(t_1)\mu(t_1) + \mu(t_1)^2} \\ =& \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- Observații:
  - aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul t_1
  - ele caracterizează doar eșantionul de la momentul t_1
  - la alt moment de timp t_2, v.a. $f(t_2)$ este diferită, și valorile medii pot diferi

4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. The correlation function (for different random processes $f(t)$ and $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

- Observații:
    - aceste funcții au valori diferite pentru diverse perechi de valori (t_1, t_2)

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește $\int$ cu $\sum$:

1. $\overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$
2. $\overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$
3. $\sigma^2(t_1) = \overline{\{f[t_1] - \mu(t_1)\}^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1)^2 \cdot w_1(x; t_1)$
4. $R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$
5. $R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$

Medii temporale

- Dacă avem acces doar la o singură realizare $f^{(k)}(t)$ a procesului?
- Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare $f^{(k)(t)}$, în timp**
- Pentru procese continue:

1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)dt$$

2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

Varianța temporală

3. Varianța temporală

$$\sigma^2 = \overline{\left\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\right\}^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

- Poate fi calculată ca:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

- Observație:
  - aceste valori nu mai depind de timpul t

Autocorelația temporală

4. Funcția de autocoreație temporală

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)}$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt$$

5. Funcția de corelație temporală (pentri două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)}$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt$$

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește $\int$ cu $\sum$, T cu N, și se împarte la $2N+1$ în loc de $2T$

1. $\overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t]$
2. $\overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} (f^{(k)}[t])^2$
3. $\sigma^2 = \overline{\left\{f^{(k)}[t] - \mu^{[k]}\right\}^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} (f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$

Procese aleatoare discrete

4. Autocorelația temporală:

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t]}$$
$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t]$$

5. Corelația temporală:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t]}$$
$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t]$$

Realizări de lungime finită

Dacă o realizare nu se întinde de la timpul $-\infty$ la ∞, ci doar de la un t_{min} la t_{max}, se folosește $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$ pentru mediile temporale

- Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită
$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$$

Medii statistice și temporale

- Mediile statistice sunt, de obicei, cele de interes
  - dar necesită cunoașterea distribuțiilor
- În practică, pentru semnale necunoscute, se poate măsura doar o singură realizare
  - putem calcula doar mediile temporale
- Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt identice ("*ergodicitate*")

Procese aleatoare staționare

- În general, mediile statistice depind de timp
  - pot fi diferite la alt moment de timp t_2
- Proces aleator **staționar** = mediile statistice rămân aceleași la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- Echivalent: Distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n) = w_n(x_1, ...x_n; t_1 + \tau, ...t_n + = tau)$$

- Practic, mediile nu trebuie să mai depindă de timp t

Staționar în sens strict sau larg

- Proces aleator **staționar în sens strict**:
  - relația e valabilă pentru toți n
- Proces aleator **staționar în sens larg**:
  - relația e valabilă doar pentru $n = 1$ și $n = 2$ (cele mai folosite)

Consecințe ale staționarității

- Pentru $n = 1$:

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **aceleași** la orice moment de timp t

$$\overline{f(t)} = constant, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = constant, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = constant, \forall t$$

Consecințe ale staționarității

- Pentru $n = 2$:

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)}$$

- Depinde doar de valoarea τ = diferența de timp dintre cele două eșantioane

Consecințe ale staționarității

- Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **staționare**:
  - funcția depinde numai de $\tau = t_2 - t_1$, în loc de t_1 și t_2
- Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași
- Autocorelația temporală:
  - pentru p.a. continue

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) f^{(k)}(t+\tau) dt \end{aligned}$$

  - pentru p.a. discrete

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t] f^{(k)}[t+\tau] \end{aligned}$$

  - lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la dispoziție, $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$

Consecințe ale staționarității

- Idem pentru funcția de corelație dintre procese aleatoare diferite
- Depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

- Definiția este similară cu formulele de la f. de autocorelație de pe slide-ul anterior

Interpretarea autocorelației

- $R_{ff}(\tau) =$ media produsului a două eșantioane situate la distanță de τ
  - ne spune dacă eșantioanele variază în același sens sau nu
- Idem pentru corelație, doar că eșantioanele provin din p.a. diferite, f și g
- Exemplu:
  - $R_{ff}(0.5) > 0$: două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative => produsele sunt majoritar pozitive)
  - $R_{ff}(1) < 0$: două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul e pozitiv, celălalt e negativ => produsele sunt majoritar negative)
  - $R_{ff}(2) = 0$: două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt necorelate (produsele sunt în medie 0, deci la fel de multe pozitive cât negative)

Procese aleatoare ergodice

- În practică, avem acces la o singură realizare
- Proces aleator **ergodic** = mediile temporale pe orice realizare sunt **identice** cu mediile statistice
- Ergodicitatea înseamnă:
  - Se pot calcule toate mediile pe baza unei singure realizări
    - dar realizarea trebuie să fie foarte lungă (lungimea $\to \infty$) pentru valori precise
  - Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
    - o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

Procese aleatoare ergodice

- Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
  - de ex. zgomote de tensiune
- Exemplu de proces ne-ergodic:
  - se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
  - o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

I.3 Proprietăți ale autocorelației

Densitatea spectrală de putere

- Densitatea spectrală de putere (DSP) $S_{ff}(\omega)$ reprezintă puterea procesului aleator la fiecare frecvență f ($\omega = 2\pi f$)
- DSP descrie cum este distribuită puterea semnalului în frecvență
  - de ex. unele procese au mai multă putere la frecvențe joase, altele la frecvențe înalte
- Puterea în banda de frecvență $[f_1, f_2]$ este $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- Puterea totală a procesului aleator este $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- DSP este o funcție măsurabilă practic
  - poate fi determinată experimental
  - este importantă în aplicații practice (inginerești)

Teorema Wiener-Hincin

Teoremă:

- **Densitatea spectrală de putere = transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Fără demonstrație
- Leagă două concepte de natură diferită
  - funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
  - DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

Zgomot alb

- Zgomot alb = proces aleator cu funcția de autocorelație egală cu un Dirac
$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$
  - este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
  - autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice $\tau \neq 0$
  - oricare două eșantioane diferite ($\tau \neq 0$) au corelație zero (necorelate)
    - valorile a două eșantioane nu au legătură între ele
- Densitatea spectrală de putere = transf. Fourier a unui Dirac = constantă $\forall \omega$
  - putere constantă la toate frecvențele, până la $f = \infty$
- Zgomotul alb poate avea orice distribuție (normală, uniformă etc.)
  - termenul "zgomot alb" nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate

Zgomot alb de bandă limitată

- În practică, puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
  - pentru că puterea totală $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff} \omega$ nu poate fi infinită
  - zgomot alb "*de bandă limitată*"
- În acest caz, autocorelația = aproximativ un Dirac, dar nu infinit de "subțire"
  - eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
  - de ex. din cauza unor mici capacități parazite

AWGN

- **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
  - Zgomot alb, Gaussian, aditiv
  - tipul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- Înseamnă:
  - aditiv: zgomotul se adună cu semnalul original (de ex. nu se multiplică cu acesta)
  - gaussian: eșantioanele au distribuția normală
  - alb: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele

Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară
$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$
   - Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție
2. La infinit, tinde la o valoare constantă
$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = const$$
   - Dem.: două eșantioane la un interval ∞ sunt necesar independente
3. Are valoarea maximă în 0
$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$
   - Dem.: se pornește de la $\overline{(f(t) - f(t+\tau))^2} \geq 0$
   - Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

   - Dem.: Se pune $\tau = 0$ în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la ∞

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

   - Dem.: $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$, $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

Autocorelația unui proces aleator filtrat

- Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
  - fie în timp continuu: intrarea $x(t)$, sistemul $H(s)$, ieșirea $y(t)$
  - fie în timp discret: intrarea $x[n]$, sistemul $H(z)$, ieșirea $y[n]$
- Cum depinde autocorelația ieșirii y de cea a intrării x?
- Se știe că y este convoluția lui x cu răspunsul la impuls h

Dezvoltare matematică

- Pentru un proces aleator în timp discret

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(\tau) =& \overline{y[n]y[n+\tau]} \\
=& \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n-k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n+\tau-k_2]} \\
=& \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]\overline{x[n-k_1]x[n+\tau-k_2]} \\
=& \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau-k_1+k_2]
\end{aligned}
$$

- Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

Dezvoltare matematică

- Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

- Schimbare de variabilă $\tau - k_1 + k_2 = u$
  - rezultă $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) = & \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ = & \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ = & S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H *^(\omega) \\ = & S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Rezultat

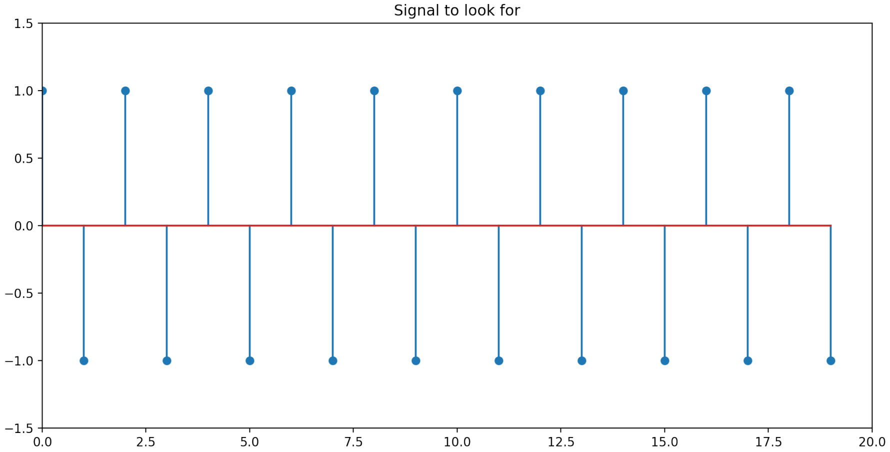
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- DSP a lui y = DSP a lui x multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

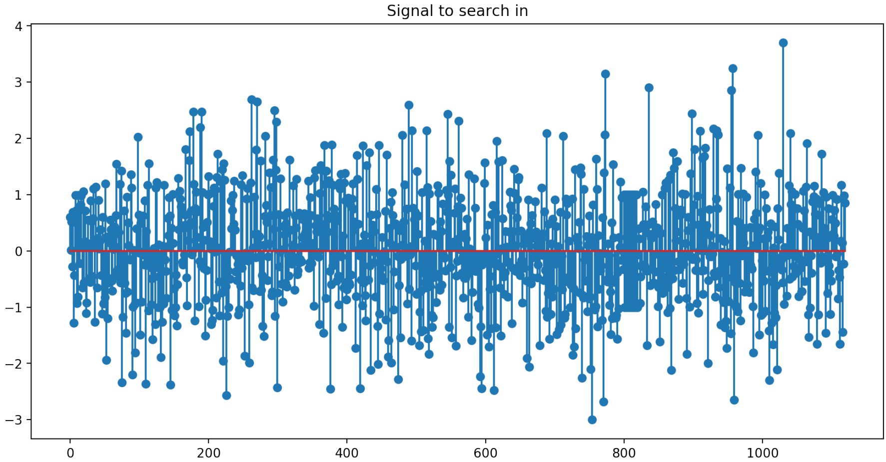
Aplicații ale (auto)corelației

- Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- Corelația a două semnale = o măsura a **similarității** celor două semnale
  - Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celuilalt
  - Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- Corelația poate fi utilizată pentru localizare
  - Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
  - Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
  - Valori mici atunci când nu se potrivesc

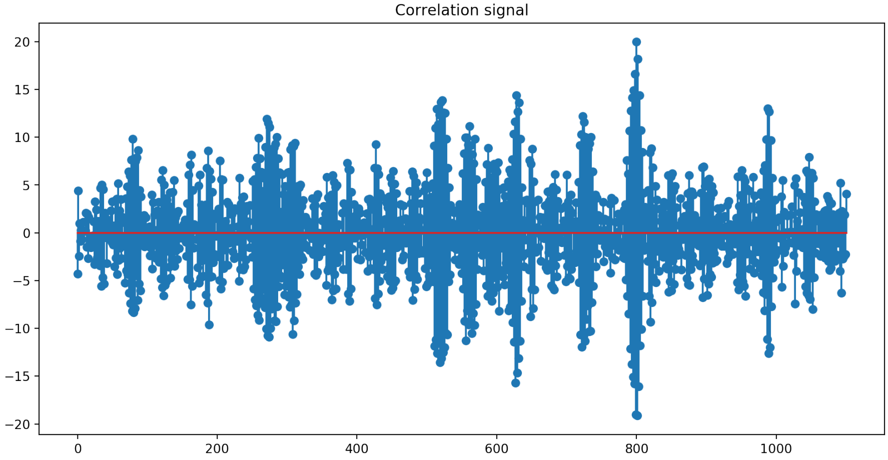
Semnalul căutat



Semnalul de dimensiuni mari



Rezultatul corelației



Identificare de sistem

- Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemlui

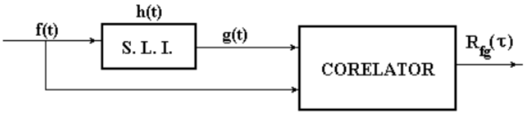


Figure 2: System identification setup

Identificare de sistem

$$
\begin{aligned}
R_{fg}(\tau) =& \overline{f[n]g[n+\tau]} \\
=& \overline{f[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] f[n+\tau-k]} \\
=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{f[n] f[n+\tau-k]} \\
=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_{ff}[\tau-k] \\
=& h[\tau] \star R_{ff}[\tau]
\end{aligned}
$$

- Dacă intrarea f este **zgomot alb** cu puterea A, $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$, și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] \star R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] \star \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut