Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul III. Elemente de Teoria Estimării

III.1 Introducere

Ce înseamnă “estimare”?

- Un emițător transmite un semnal $s_\Theta(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** Θ
- Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează

$$\boxed{r(t)} = s_\Theta(t) + zgomot$$

- Vrem să **găsim** valoarea parametrului Θ
  - pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - datele recepționate au zgomot => parametrul este “estimat”
- Valoarea găsită este $\boxed{\hat{\Theta}}$, **estimatul** lui Θ
  - există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$

$A = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases},$

$S_\Theta(t) = A$

$A \in$

$= \cos(2\pi f t)$

$= A \cdot \cos(2\pi f t)$

$\begin{cases} s_0(t) = \cos(2\pi f_1 t) \\ s_1(t) = 0 \end{cases}$

$s_\Theta(t) = A \cdot \cos(2\pi f_1 t), \quad A = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

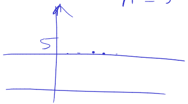
Ce înseamnă "estimare"?

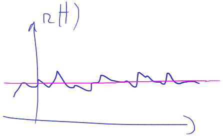
7.1 7.15 6.93 6.74 7.02

$\hat{A} =$

$s_\theta(t) = A$

$A = 5$





$\hat{A} = 4.9$

- Exemple:
  - $s_\theta(t)$
  - Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + zgomot$, trebuie estimat A
  - Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi f t + \phi) + zgomot$, de estimat ϕ
  - Exemple mai complicate:
    - De estimat/decis ce cuvânt este pronunțat într-un semnal vocal

$\varepsilon = \hat{A} - A = -0.1$

Estimare și Detecție/Decizie

$s(t) = A$, $\hat{A} = ?$

$s(t) = A$, $A = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$, $\hat{A} = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$?

- Fie următoarea problemă de estimare:

  Se recepționează un semnal $r(t) = \underbrace{A}_{s_0(t)} + zgomot$, estimați-l pe A
- La detecție: se alege între **două valori cunoscute** ale A:
  - de ex. A poate fi 0 sau 5 (ipotezele H_0 și H_1)
- La estimare: A poate fi oricât => se alege între **o infinitate de opțiuni** ale A
  - A poate fi orice valoare din $\mathbb{R}$, în general

Estimare și Detecție/Decizie

Decizie

- Detecție = Estimare **restrânsă** doar la un set discret de opțiuni
- Estimare = Detecție cu un număr **infinit de opțiuni** posibile
- Metodele statistice sunt similare
  - În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este "detecție" sau "estimare"?)

$s_0(t) = -1000000$

$s_1(t) = -999...99$

$s_2(t) = -999...98$

Semnalul recepționat

- Semnalul recepționat este $r(t) = s_{\Theta}(t) + \overset{w(x)}{zgomot}$
  - este afectat de zgomot
  - depinde de parametrul necunoscut Θ
- Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp t_i

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$$

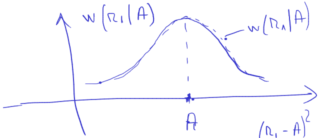
- Eșantioanele depind de valoarea lui Θ $\Rightarrow$ $\hat{\Theta}$

Semnalul recepționat

Exemplu:

$s_0(t) = A$

$r(t) = A +$ zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$



$w(r_1|A) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(r_1 - A)^2}{2\sigma^2}}$

- Fiecare eșantion r_i este o variabilă aleatoare ce depinde de Θ (și de zgomot)
  - Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de Θ

$$\boxed{w_i(r_i|\Theta)}$$

$w_i(r_i \mid \Theta) \sim w(r_i \mid H_0, H_1)$

- Întregul vector de eșantioane **r** este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de Θ (și de zgomot)
  - Are o distribuție N-dimensională ce depinde de Θ
  - Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i|\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = w_1(r_1|\Theta) \cdot w_2(r_2|\Theta) \cdot \ldots \cdot w_N(r_N|\Theta)$$

Tipuri de estimare

- Considerăm două tipuri de estimare:
  1. **Estimare de plauzibilitate maximă** (Maximum Likelihood Estimation, MLE): În afară de **r** nu se cunoaște nimic despre Θ, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
  2. **Estimare Bayesiană**: În afară de **r** se mai cunoaște o distribuție *a priori* $w(\Theta)$ a lui Θ, care indică ce valori ale lui Θ sunt mai probabile / mai puțin probabile
     - caz mai general decât primul

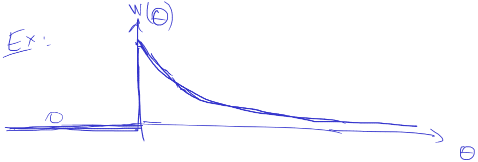
Estimare ML (Maximum Likelihood)

~ Detection M.L

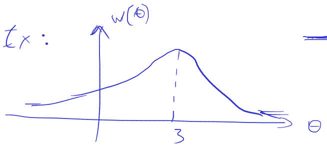
~ Detection M.P.E. $P(H_0)$ $P(H_1)$

M.R. C_{00} C_{10} C_{01} C_{11}

Ex:



Ex:



II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

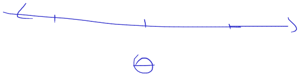
Estimarea tip Maximum Likelihood

- Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă ("Maximum Likelihood", ML)
- Se definește **plauzibilitatea** unei valori Θ, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$:

likelihood

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = \cancel{w(\Theta|\mathbf{r})} \quad w(r|\Theta) = \text{probabilitatea de a se fi generat } r \text{ dacă param. ar fi avut valoarea } \Theta$$

- $L(\Theta|\mathbf{r})$ reprezintă funcția de plauzibilitate
- A se compara cu formula din Cap. 2, slide 20
  - e aceeași
  - aici "ghicim" pe Θ, acolo "ghiceam" pe H_i



Estimarea tip Maximum Likelihood

$\hat{\Theta}_{ML}$

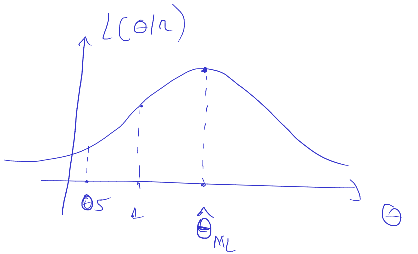
$L(\Theta|r) =$ o funcție de Θ

Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood, ML):

- Estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea, dat fiind valorile observate r**
  - i.e. valoarea care maximizează $L(\Theta|\mathbf{r})$, adică maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta)$

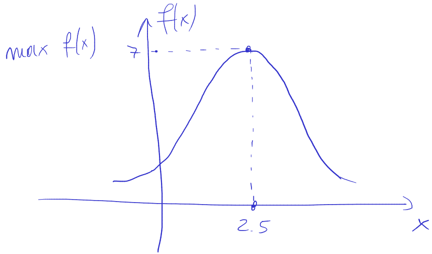
$$\boxed{\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)}$$

- Dacă Θ aparține doar unui anumit interval, se face maximizarea doar pe acel interval



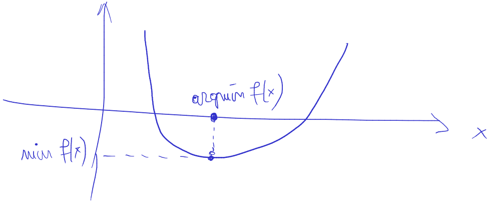
Notații matematice

- Notații matematice generale
  - $\arg\max_x f(x)$ = "valoarea x care maximizează funcția f(x)"
  - $\max_x f(x)$ = "valoarea maximă a funcției f(x)"



$2.5 = \arg\max f(x)$

$7 = \max f(x)$



Estimare vs decizie Maximum Likelihood

- Estimarea ML este foarte similară cu decizia ML!
- Criteriul de decizie ML:
  - "se alege ipoteza cu plauzibilitate mai mare":

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- Estimare ML:
  - "se alege valoarea care maximizează plauzibilitatea"

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

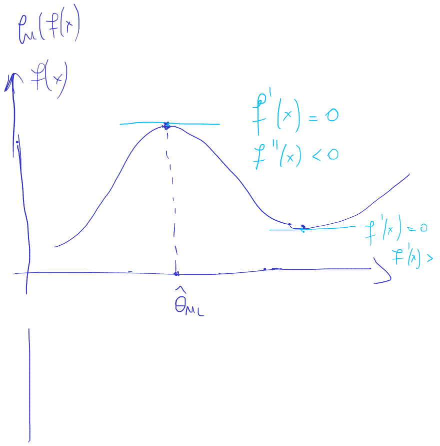
Găsirea maximului

- Cum se rezolvă problema de maximizare?
  - adică cum se găsește estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ care maximizează $L(\Theta|vecr)$
- Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta|\mathbf{r})}{d\Theta} = 0$$

- Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta|\mathbf{r})$ înainte de derivare (funcția "log-likelihood")

$$\frac{d \ln \left(L(\Theta|\mathbf{r})\right)}{d\Theta} = 0$$



$\operatorname{argmax} f(x) = \operatorname{argmax} \ln(f(x))$

Procedura de găsire a estimatului

Procedura de găsire a estimatului ML:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta|\mathbf{r})$ sau a lui $\ln((L(\Theta|\mathbf{r}))$ să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ sau } \frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
   - întrucât derivata $= 0$ și pentru maxime și pentru minime
   - uneori sărim peste această etapă

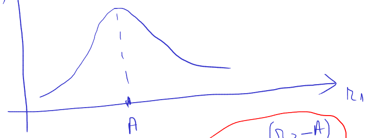
Exemple

$s_\Theta(t) = A$ $\quad r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$, $\quad \mathcal{N}(\mu=0, \sigma^2=1)$

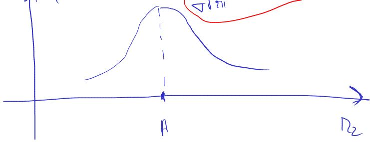
$$r = \begin{array}{ccccc} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ \end{array}$$
$$r = [5 \quad 7 \quad 8 \quad 6.1 \quad 5.3]$$

1) $L(\theta|r) = w(r|\theta) = w(r_1|\theta)\cdot w(r_2|\theta)\cdot w(r_3|\theta)\cdot w(r_4|\theta)\cdot w(r_5|\theta)$

$w(r_1|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(r_1-A)^2}{2\sigma^2}}$



$w(r_2|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(r_2-A)^2}{2\sigma^2}}$



⋮

de 5 ori

- Estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian:

  Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru un semnal de valoare constantă $s_\Theta(t) = A$ din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + zgomot$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2_{=1})$.

  $r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5$

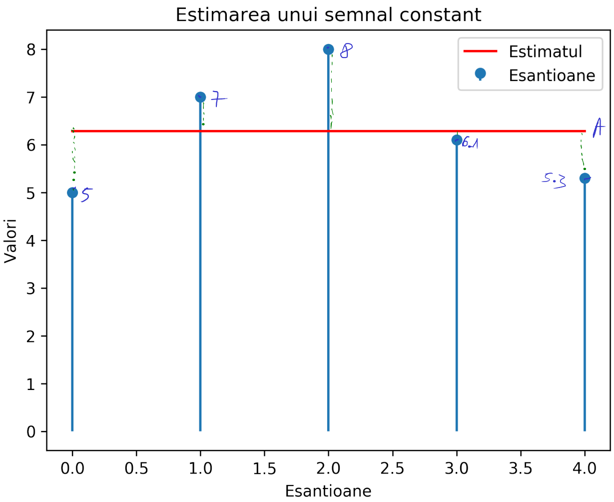
- Soluție: la tablă
- Estimatul $\hat{A}_{ML}$ este chiar valoarea medie a eșantioanelor
  - (deloc surprinzător)

$$\underset{A}{L(\theta|r)} = w(r|\theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^5 \cdot e^{-\frac{(r_1-A)^2+(r_2-A)^2+(r_3-A)^2+(r_4-A)^2+(r_5-A)^2}{2\sigma^2}}$$

$5 \quad 7 \quad 8 \quad 6.1 \quad 5.3$

$$\ln(L(\theta|r)) = \ln\left(\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^5\right) - \frac{(5-A)^2+(7-A)^2+(8-A)^2+(6.1-A)^2+(5.3-A)^2}{2\sigma^2}$$

Simulare numerică



$$\boxed{\frac{d}{dA}(5-A)^2 = 2(5-A)\cdot(-1)}$$

2) $\frac{d}{dA}\left(\ln L(\theta|x)\right) = 0 \iff$

$$= \cancel{\frac{1}{2\sigma^2}}\left(\cancel{2}(5-A)\cancel{(-1)} + \cancel{2}(7-A)\cancel{(-1)} + \cancel{2}(8-A)\cancel{(-1)} + \cancel{2}(6.1-A)\cancel{(-1)} + \cancel{2}(5.3-A)\cancel{(-1)}\right) = 0$$

$\iff$

$\iff \quad 5-A+7-A+8-A+6.1-A+5.3-A = 0$

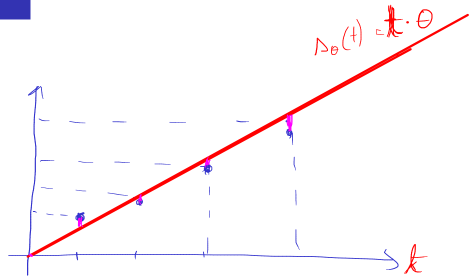
$\iff \quad 31.4 = 5A$

$$\Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{31.4}{5} = \frac{5+7+8+6.1+5.3}{5} = 6.28$$

Aproximare a unei curbe

curve fitting

- Estimare = aproximare a unei curbe
  - se găsește cea mai bună potrivire a lui $s_\Theta(t)$ ~~pri~~ cu datele **r**
- Din exemplul grafic anterior:
  - avem un set de date **r**
  - se cunoaște forma semnalului = o dreaptă orizontală (A constant)
  - se aproximează în mod optim dreapta prin setul de date



$$s_\theta(t) = \overset{?}{\theta} \cdot t$$

$$r_i = \underbrace{\theta \cdot t_i}_{s_\theta(t_i)} + \text{zgomot}$$

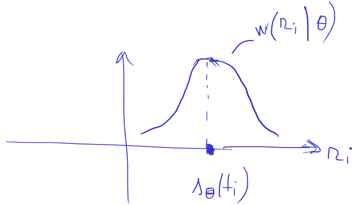
Semnal oarecare în AWGN (Additive White Gaussian Noise)

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(r_i - s_\theta(t_i))^2}{2\sigma^2}} =$$

- Fie semnalul original $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Eșantioanele r_i sunt luate la momentele t_i
- Eșantioanele r_i au distribuție normală, cu media $\mu = s_\Theta(t_i)$ și varianța σ^2
- Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilităților fiecărui eșantion r_i

$s_\theta(t)$ + zgomot

t_i: $r_i = s_\theta(t_i)$ + zgomot



$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Semnal oarecare în AWGN

- Logaritmul plauzibilității ("log-likelihood") este

$$\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{N}}_{constant} - \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

Vrem Θ care face funcția asta să fie maximă

Vrem termenul acesta cât mai mic!

$$d(r, s_\Theta)^2$$

$$r = [r_1 \quad r_2 \; \ldots \; r_N]$$

$$s_\Theta = [s_\Theta(t_1) \quad s_\Theta(t_2) \quad s_\Theta(t_N)]$$

Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului numărătorul

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) \overset{AWGN}{=} \arg\min_{\Theta} \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2 = \arg\min_{\Theta} d(r, s_\Theta)^2$$

- Termenul $\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$ este **distanța** $d(\mathbf{r}, s_\Theta)$ **la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_\Theta) = \sqrt{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

Semnal oarecare în AWGN

- Estimarea ML se poate rescrie sub forma:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min_{\Theta} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{\Theta})^2$$

- Estimatul de plauzibilitate maximă (ML) $\hat{\Theta}_{ML}$ = valoarea care face $s_{\Theta}(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat r**
  - mai aproape = potrivire mai bună = mai probabil
  - cel mai aproape = cea mai bună potrivire = cel mai probabil = plauzibilitate maximă

Semnal oarecare în AWGN

- Estimare ML în zgomot gaussian = **minimizarea distanței**
- Aveam aceeași interpretare și la decizia ML!
  - dar la decizie alegeam minimul din 2 opțiuni
  - aici alegem minimul dintre toate opțiunile posibile
- Relația e valabilă pentru orice fel de spații vectoriale
  - vectori cu N elemente, semnale continue, etc
  - doar se înlocuiește definiția distanței Euclidiene

Exemplu: problema de pe slide-ul 18 :

$$r = [5 \quad 7 \quad 8 \quad 6.1 \quad 5.3]$$

$$s_{\Theta} = [A \quad A \quad A \quad A \quad A]$$

$$D = d(r, s_\Theta)^2 = (A-5)^2 + (A-7)^2 + (A-8)^2 + (A-6.1)^2 + (A-5.3)^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial A} = \cancel{2}(A-5) + \cancel{2}(A-7) + \cancel{2}(A-8) + \cancel{2}(A-6.1) + \cancel{2}(A-5.3) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{A}_{ML} = \frac{5+7+8+6.1+5.3}{5} = 6.28$$

$$\hat{A}_{ML} = \frac{r_1 + r_2 + \dots r_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$$

medie aritmetică!

Semnal oarecare în AWGN

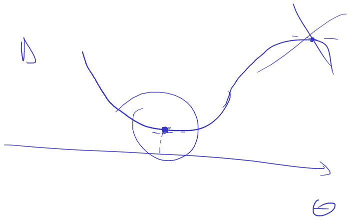
Procedura pentru estimarea tip ML în zgomot AWGN:

1. Se scrie expresia pentru pătratul distanței:

$$D = (d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

2. Vrem minimul, deci egalăm derivata cu 0:

$$\frac{dD}{d\Theta} = \sum 2(r_i - s_\Theta(t_i))(-\frac{ds_\Theta(t_i)}{d\Theta}) = 0$$



3. Se rezolvă și obținem valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este pozitivă, pentru a se verifica că punctul este un minim
   - uneori sărim peste această etapă

Simulare numerică

Estimarea frecvenței f a unui semnal sinusoidal

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența f a unui semnal $s_\Theta(t) = cos(2\pi f t_i)$, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = cos(2\pi f t_i) + zgomot$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- Soluție: la tablă

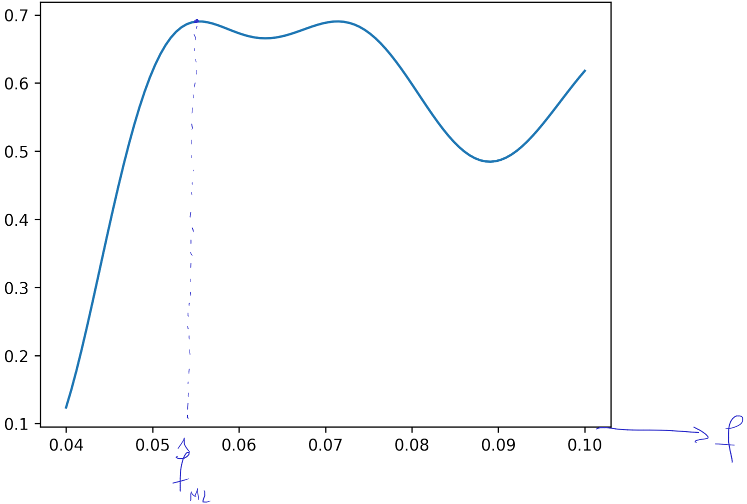
$r = \{r_1 \quad r_2 \dots \quad r_{10}\}$

$s_\theta = [cos(2\pi f t_1) \quad cos(2\pi f t_2) \quad cos(2\pi f t_{10})]$

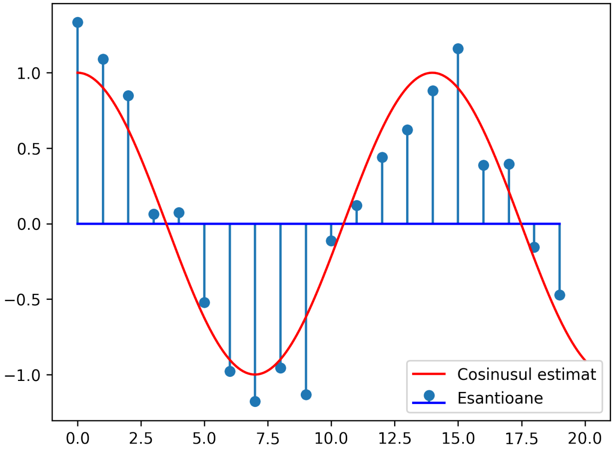
$D = d(r, s_\theta)^2$

Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este $L(\theta|n) = L(f|n) \quad (\theta = f)$



Simulare numerică



Parametri multipli

- Dacă semnalul depinde de mai mulți parametri?
  - de ex. amplitudinea, frecvența și faza inițială a unui cosinus:

$$s(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Se va considera Θ ca fiind un vector:

$\Theta = [A, f, \phi]$

$$\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, ...\Theta_M]$$

  - e.g. $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] = [A, f, \phi]$

Parametri multipli

Zgomot gaussian:

$$L = D = d(r, s_\theta)^2 = D(A, f, \varphi) \text{ depinde de mai multe necunoscute}$$

$\theta \leftarrow A, f, \varphi$

- Se rezolvă cu aceeași procedură, dar în loc de o singură derivată vom avea M derivate
- Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_M} = 0 \end{cases}$$

  - uneori este dificil/imposibil

$$r = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \dots]$$

$$s_\theta = [A\cos(2\pi f t_1 + \varphi) \quad A\cos(2\pi f t_2 + \varphi) \quad A\cos(2\pi f t_3 + \varphi) \quad A\cos(2\pi f t_4 + \varphi) \dots$$

$$D = d(r, s_\theta)^2 = (A\cos(2\pi f t_1 + \varphi) - r_1)^2 + \dots + (A\cos(2\pi f t_4 + \varphi) - r_4)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial f} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow A, f, \varphi = \dots$$

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Cum se estimează parametrii $\boldsymbol{\Theta}$ în cazuri complicate?
  - în aplicații reale, unde pot fi foarte mulți parametri ($\boldsymbol{\Theta}$ este vector)
- De obicei nu se pot găsi valorile optime prin formule directe
- Se îmbunătățesc valorile în mod iterativ cu algoritmi tip **coborâre după gradient** (Gradient Descent)

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

1. Se inițializează parametrii cu valori aleatoare $\mathbf{\Theta}^{(0)}$
2. Repetă la fiecare iterație k:
   2.1 Se calculează funcția $L(\mathbf{\Theta}^{(k)}|\mathbf{r})$
   2.2 Se calculează derivatele $\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$ pentru toți Θ_i ("**Gradient**")
   2.3 Se actualizează toate valorile Θ_i prin scăderea derivatei ("**Descent**"):

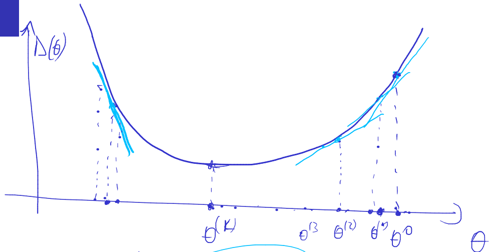
$$\underbrace{\Theta_i^{(k+1)}}_{\text{new value}} = \underbrace{\Theta_i^{(k)}}_{\text{old value}} - \underbrace{\mu}_{\text{pas}} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}}_{\text{derivata}}$$

0.0001

   - sau, sub formă vectorială:

$$\mathbf{\Theta}^{(k+1)} = \mathbf{\Theta}^{k} - \mu \frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Theta}^{(k)}}$$

3. Până la îndeplinirea unui criteriu de terminare (de ex. parametrii nu se mai modifică mult)



$$\frac{\partial D}{\partial \theta} = \text{complicat} = 0$$

$$\left.\frac{\partial D}{\partial \theta}\right|_{\theta^{(0)}} = \text{o valoare} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Explicații la tablă
- Exemplu: regresia logistică cu valori 2D
  - exemplu la tablă

Rețele Neurale

- Cel mai proeminent exemplu: **Rețele Neurale Artificiale** (a.k.a. "Rețele Neurale", "Deep Learning", etc.)
  - Pot fi văzute ca un exemplu de estimare ML
  - Se utilizează algoritmul *Gradient Descent* pentru găsirea parametrilor
  - Aplicații de vârf: recunoașterea de imagini, automated driving etc.
- Mai multe informații despre rețele neurale / machine learning:
  - căutați cursuri sau cărți online
  - IASI AI Meetup

Deplasarea și varianța estimatorilor

Exemplu: $r = [5 \quad 7 \quad 8 \quad 6.1 \quad 5.3]$

$\Delta_{\theta} = [A \quad A \quad A \quad A \quad A]$

$$\boxed{\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i}$$

- Cum caracterizăm calitatea unui estimator?
- Un estimator $\hat{\Theta}$ este **o variabilă aleatoare**
  - poate avea diverse valori, pentru că se calculează pe baza eșantioanelor recepționate, care depind de zgomot
  - exemplu: se repetă aceeași estimare pe calculatoare diferite => valori estimate ușor diferite
- Fiind o variabilă aleatoare, se pot defini:
  - valoarea medie a estimatorului: $E\left\{\hat{\Theta}\right\}$ = media valorilor estimate
  - varianța estimatorului: $E\left\{(\hat{\Theta} - \Theta)^2\right\}$

estimatorul nostru

$E\{\hat{\theta}\}$ = media estimatorilor

Deplasarea și varianța estimatorilor

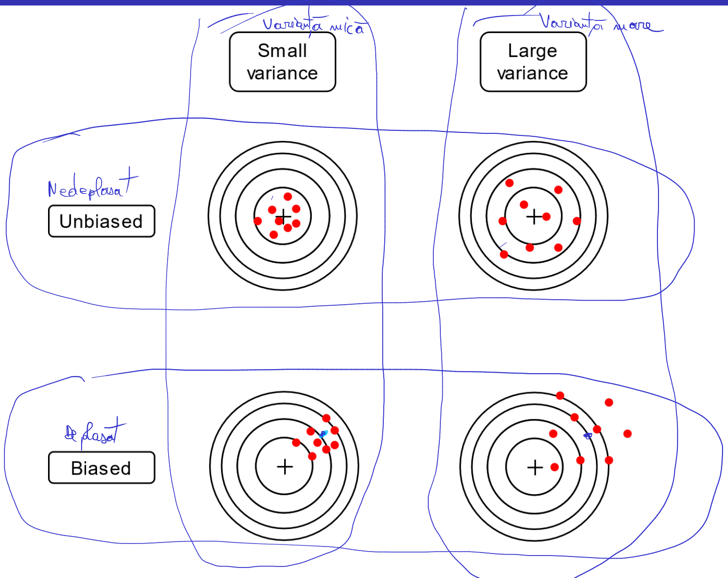


Figure 1: Deplasarea și varianța estimatorilor

Deplasarea unui estimator

- **Deplasarea** ("bias") unui estimator = diferența dintre valoarea medie a estimatorului și valoarea adevărată Θ

$$Deplasare = E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$$

- Estimator **nedeplasat** = valoarea medie a estimatorului este egală cu valoarea adevărată a parametrului Θ

$$E\left\{\hat{\Theta}\right\} = \Theta$$

- Estimator **deplasat** = valoarea medie a estimatorului diferă de valoarea adevărată a parametrului Θ
  - diferența $E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$ este **deplasarea** estimatorului

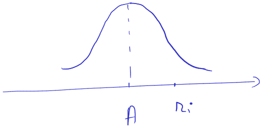
Deplasarea unui estimator

$E\{x+y\} = E\{x\} + E\{y\}$

$E\{a \cdot X\} = a \cdot E\{x\}$

- Exemplu: semnal constant A, zgomot Gaussian (cu media), $=0$ $\mathcal{N}(\mu=0, \sigma^2)$ $=1$
  estimatorul de plauzibilitate maximă este $\boxed{\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i}$

- Atunci:



$r_i = A + zgomot$

$$
\begin{aligned}
E\left\{\hat{A}_{ML}\right\} &= \frac{1}{N} E\left\{\sum_i r_i\right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\{r_i\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underbrace{E\{A + \overbrace{zgomot}^{\mathcal{N}(\mu=0,\sigma^2=1)}\}}_{= E\{A\} + \underbrace{E\{zgomot\}}_{=0}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A \\
&= A
\end{aligned}
$$

- Acest estimator este nedeplasat

Varianța unui estimator

$s_\theta(t) = A$

Exemplu:

$$\boxed{\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$\sigma^2_{\hat{A}} = ?$ Vrem să aflăm

$z = x + y$

$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ dacă x, y necorelate

$z = a \cdot x$

$\sigma_z^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2$

- **Varianța** unui estimator măsoară "abaterile" estimatorului în jurul valorii medii
  - aceasta e definiția varianței σ^2 în general
- Dacă un estimator are **varianța** mare, valoarea estimată poate fi departe de cea reală, chiar daca estimatorul este nedeplasat
- De obicei se preferă estimatori cu **varianță mică**, tolerându-se o eventuală mică deplasare

$$\sigma^2\{\hat{A}_{ML}\} = \sigma^2\left\{\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} x_i\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \sigma^2\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i\right\}$$

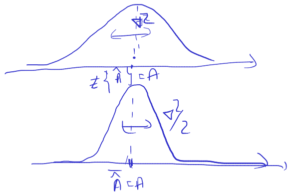
$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \sum \sigma^2\{x_i\}$$

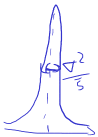
$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \sum \sigma^2\{A + zgomot\}$$

$$\underbrace{\sigma^2\{A\}}_{=0} + \sigma^2\{zgomot\} = \sigma^2$$

$$= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \sigma^2_{zgomot}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sigma^2_{zgomot}$$





$$\boxed{\sigma^2\{\hat{A}_{ML}\} = \frac{1}{N}\cdot\sigma^2_{zgomot}}$$

II.3 Estimare Bayesiană

Estimare Bayesiană

- **Estimarea Bayesiană** ia în calcul termeni suplimentari pe lângă $L(\theta|r) = w(\mathbf{r}|\Theta)$:
  - o distribuție *a priori* $w(\Theta)$
  - ~~opțional~~, o funcție de cost
- Se obține echivalentul din estimare pentru criteriile de decizie MPE și MR

Estimare Bayesiană

- Se definește **distribuția *a posteriori*** a lui Θ, dat fiind observațiile $\mathbf{r}$, folosind **regula lui Bayes**:

$$\boxed{w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{\cancel{w(\mathbf{r})} = ct = \text{nu ne interesează}}}$$

- Termenii:
  - Θ este parametrul necunoscut
  - $\mathbf{r}$ este vectorul de observații
  - $w(\Theta|\mathbf{r})$ este probabilitatea ca parametrul să aibă valoarea Θ, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$;
  - $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este funcția de plauzibilitate $= L(\Theta|r)$
  - $w(\Theta)$ este distribuția **a priori** a lui Θ
  - $w(\mathbf{r})$ este distribuția **a priori** a lui $\mathbf{r}$; se presupune a fi constantă

r = cunoscut $\Rightarrow$ $w(r)$ = un număr

M.L. : $L(\Theta|r) = w(r|\Theta)$

Contra : nu e o distribuție față de Θ

Bayes : $w(\Theta|r)$

Regula lui Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Exemplu

$P(NV|D) = 90\%$

$P(V|D) = 10\%$

$$P(D|NV) = \frac{P(NV|D) \cdot P(D)}{P(NV)}$$

$$P(D|V) = \frac{P(V|D) \cdot P(D)}{P(V)}$$

$$\frac{P(D|NV)}{P(D|V)} :$$

Regula lui Bayes

$w(\theta|r)$

- Relația precedentă arată că, în general, estimarea lui Θ depinde de două lucruri:
  1. De vectorul observațiilor $\mathbf{r}$, prin termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$
  2. De informația “a priori” avută despre Θ, prin termenul $w(\Theta)$
- Numele este “estimare Bayesiană”
  - Thomas Bayes = matematician englez, a descoperit regula cu acest nume
  - Noțiunile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de “Bayesiane”

$$\frac{P(D|NV)}{P(D|V)} = \frac{P(NV|D)\cdot \cancel{P(D)}}{P(NV)} \cdot \frac{P(V)}{P(V|D)\cdot \cancel{P(D)}}$$

$$\frac{P(D|NV)}{P(D|V)} = \frac{P(NV|D)}{P(V|D)} \cdot \frac{P(V)}{P(NV)}$$

$$\frac{P(D|NV)}{P(D|V)} = \frac{90\%}{10\%} \cdot \frac{30\%}{70\%}$$

$$\frac{P(D|NV)}{P(D|V)} = \frac{9}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{27}{7} \simeq 4$$

Distribuția *a priori*

- Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui Θ, $w(\Theta)$
  - știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
  - se numește distribuția *a priori*
- Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori* $w(\theta)$
  - estimatul va fi "tras" înspre valori mai probabile

Estimatorul MAP

- Cunoaștem distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$. Care este valoarea estimată?
- Se poate alege valoarea care are probabilitate maximă
- Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max \Theta w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

- Estimatorul MAP alege acea valoare Θ unde distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ este maximă
- Estimatorul MAP maximizează **produsul** dintre plauzibilitate și **distribuția *a priori*** $w(\Theta)$

Estimatorul MAP

Exemplu: Imagine

Relația dintre estimarea MAP și ML

- Estimatorul ML:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)$$
- Estimatorul MAP:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$
- Estimatorul ML este un caz particular de MAP pentru $w(\Theta)$ constant
  - $w(\Theta) =$ constant înseamnă că toate valorile lui Θ sunt *a priori* echiprobabile
  - i.e. nu avem extra informații despre valoarea lui Θ

Relația cu detecția semnalelor

- Criteriul probabilității minime de eroare: $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$
  - adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$este mai mare
- **Criteriul de decizie MPE**: se alege ipoteza care maximizează $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$
  - dintre cele două ipoteze H_0, H_1
- **Estimarea MAP**: se alege valoarea care maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$
  - dintre toate valorile posibile pentru Θ
- Același principiu!

Funcția de cost

- Vrem s găsim un echivalent și pentru criteriul MR
- Avem nevoie de un echivalent pentru costurile C_{ij}
- **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală Θ

$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ = atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
  - erori ϵ mici au costuri mici
  - erori ϵ mari au costuri mari

Funcția de cost

- Funcții de cost uzuale:
  - Pătratică:
$$C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$$
  - Uniformă:
$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$
  - Liniară:
$$C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$$
- De desenat la tablă

Funcția de cost

- Funcția de cost $C(\epsilon)$ reprezintă echivalentul costurilor C_{ij} de la detecție
  - la detecție aveam doar 4 valori: C_{00}, C_{01}, C_{10}, C_{11}
  - aici avem un cost pentru fiecare eroare posibilă ϵ
- Funcția de cost dictează ce valoarea alegem din distribuția $w(\Theta|\mathbf{r})$

IUmportanța funcției de cost

- Fie distribuția *a posteriori* următoare:

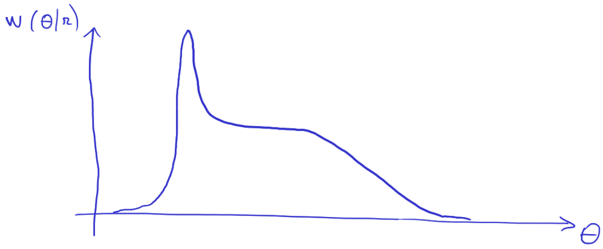


Figure 2: Unbalanced posterior distribution

- Care este estimatorul MAP?
- Dacă avem funcția de cost următoare:
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $<$ valoarea reală Θ, te costă 1000 \$
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $>$ valoarea reală Θ, platești 1 \$
  - schimbăm valoarea estimată ? :)

Riscul Bayesian

- Distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ dă probabilitatea fiecărei valori $\hat{\Theta}$ de a fi cea corectă
- Alegerea unui estimat $\hat{\Theta}$ implică o anume eroare ϵ
- Eroarea de estimare are un anumit cost $C(\epsilon)$
- **Riscul** = valoarea medie a costului = $C(\epsilon) \times$ probabilitatea:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

The Bayesian risk

- Alegem valoarea $\hat{\Theta}$ care **minimizează costul mediu** R

$$\hat{\Theta} = \arg\min_{\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- O obținem înlocuind $C(\epsilon)$ cu definiția sa, și derivând după $\hat{\Theta}$
  - Atenție: se derivează după $\hat{\Theta}$, nu Θ!

Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează R, deci derivăm

$$\frac{dR}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})\, d\Theta}_{1} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM)** **("Minimum Mean Squared Error, MMSE")**:

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

Interpretare

- **Estimatorul EPMM**: estimatorul $\hat{\Theta}$ este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

  - EPMM = "Eroare Pătratică Medie Minimă"
  - valoarea medie = sumă (integrală) din fiecare Θ ori probabilitatea sa $w(\Theta|\mathbf{r})$
- Estimatprul EPMM se obține din distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$, considerând funcția de cost pătratică

Estimatorul MAP

- Dacă funcția de cost este uniformă

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- Se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \\ R &= 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \end{aligned}$$

Estimatorul MAP

- Pentru minimizarea R, trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- Pentru E foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- **Estimatorul Maximum A Posteriori (MAP)** $=$ valoarea $\hat{\Theta}$ care maximizează $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max \Theta w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

Interpretare

- Estimatorul MAP: $\hat{\Theta}$ = valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta}$ = valoarea medie a distribuției *a posteriori*

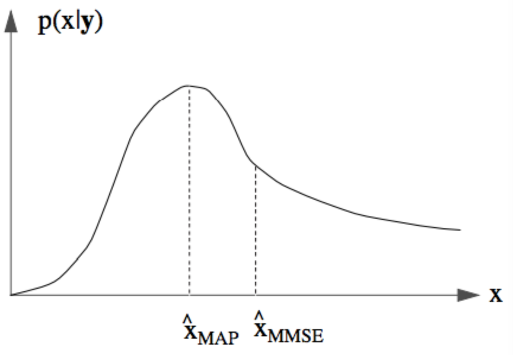


Figure 3: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

[image from https://allenlu2007.wordpress.com]

Relația între estim. MAP and EPMM

- Estimatorul MAP = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost uniformă
  - ca le detecție: criteriul MPE = criteriul MR când costurile sunt la fel
- Estimatorul MMSE = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost pătratică
  - similar cu criteriul MR, dar la estimare

Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- Vrem să estimam temperatura de astăzi din Sahara
- Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (termometru ieftin)
- Se știe că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$.
- Estimați valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP și EPMM(MMSE)

Exerciții

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian σ diferit

- Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$
  - cu varianță diferită, $\sigma_2 \neq \sigma$

Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Fie semnalul original "curat" $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este Gaussian (AWGN) $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Ca în cazul estimării de plauzibilitate maximă, funcția de plauzibilitate este:

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

- Dar acum aceasta **se înmulțește cu** $w(\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Estimatorul MAP estimator este cel care maximizează produsul

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$$

- Logaritmând:

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{MAP} &= \arg\max \ln\left(w(\mathbf{r}|\Theta)\right) + \ln\left(w(\Theta)\right) \\ &= \arg\max -\frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2} + \ln\left(w(\Theta)\right)\end{aligned}$$

Distribuție “a priori” Gaussiană

- Dacă distribuția “a priori” este de asemenea Gaussiană $\mathcal{N}(\mu_\Theta, \sigma_\Theta^2)$

$$\ln\left(w(\Theta)\right) = -\frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Estimatorul MAP devine

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Poate fi rescris

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_\Theta)^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_\Theta^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_\Theta)^2$$

Interpretare

- Estimatorul MAP în zgomot Gaussian și cu distribuție "a priori" Gaussiană

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_{\Theta})^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\Theta}^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_{\Theta})^2$$

- $\hat{\Theta}_{MAP}$ este apropiat de valoarea medie μ_{Θ} și de asemenea face ca semnalul adevărat să fie apropiat de eșantioanele recepționate $\mathbf{r}$
  - Exemplu: "caut locuință aproape de serviciu dar și aproape de Mall"
  - λ controlează importanța relativă a celor doi termeni
- Cazuri particulare
  - σ_{Θ} foarte mic = distribuția "a priori" este foarte specifică (îngustă) = λ mare = termenul al doilea este dominant = $\hat{\Theta}_{MAP}$ foarte apropiat de μ_{Θ}
  - σ_{Θ} foarte mare = distribuția "a priori" este foarte nespecifică = λ mic = primul termen este dominant = $\hat{\Theta}_{MAP}$ apropiat de estimatorul de plauzibilitate maximă

Aplicații

- În general, aplicațiile practice:
  - utilizează diverse tipuri de distribuții "a priori"
  - estimează **mai mulți parametri** (un vector de parametri)
- Aplicații
  - reducerea zgomotului din semnale
  - restaurarea semnalelor (parți lipsă din imagini, imagini *blurate* etc)
  - compresia semnalelor