# Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

# Capitolul III. Elemente de Teoria Estimării

# III.1 Introducere

# Ce înseamnă “estimare”?

- Un emițător transmite un semnal $s_\Theta(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** $\Theta$
- Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează
$$r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$$
- Vrem să **găsim** valoarea parametrului $\Theta$
  - pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - datele recepționate au zgomot $=>$ parametrul este “estimat”
- Valoarea găsită este $\hat{\Theta}$, **estimatul** lui $\Theta$
  - există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$

# Ce înseamnă “estimare”?

- Exemple:
  - Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + zgomot$, trebuie estimat $A$
  - Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi f t + \phi) + zgomot$, de estimat $\phi$
  - Exemple mai complicate:
    - De estimat/decis ce cuvânt este pronunțat într-un semnal vocal

# Estimare și Detecție/Decizie

- Fie următoarea problemă de estimare:

  Se recepționează un semnal $r(t) = A + zgomot$, estimați-l pe $A$
- La detecție: se alege între **două valori cunoscute** ale $A$:
  - de ex. $A$ poate fi 0 sau 5 (ipotezele $H_0$ și $H_1$)
- La estimare: $A$ poate fi oricât $=>$ se alege între **o infinitate de opțiuni** ale $A$
  - $A$ poate fi orice valoare din $\mathbb{R}$, în general

# Estimare și Detecție/Decizie

- Detecție = Estimare **restrânsă** doar la un set discret de opțiuni
- Estimare = Detecție cu un număr **infinit de opțiuni** posibile
- Metodele statistice sunt similare
  - În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este "detecție" sau "estimare"?)

# Semnalul recepționat

- Semnalul recepționat este $r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$
  - este afectat de zgomot
  - depinde de parametrul necunoscut $\Theta$
- Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp $t_i$

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ... r_N]$$

- Eșantioanele depind de valoarea lui $\Theta$

# Semnalul recepționat

- Fiecare eșantion $r_i$ este o variabilă aleatoare ce depinde de $\Theta$ (și de zgomot)
    - Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de $\Theta$

$$w_i(r_i|\Theta)$$

- Întregul vector de eșantioane $\mathbf{r}$ este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de $\Theta$ (și de zgomot)
    - Are o distribuție N-dimensională ce depinde de $\Theta$
    - Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i|\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = w_1(r_1|\Theta) \cdot w_2(r_2|\Theta) \cdot ... \cdot w_N(r_N|\Theta)$$

# Tipuri de estimare

- Considerăm două tipuri de estimare:
  1. **Estimare de plauzibilitate maximă** (Maximum Likelihood Estimation, MLE): În afară de **r** nu se cunoaște nimic despre $\Theta$, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
  2. **Estimare Bayesiană**: În afară de **r** se mai cunoaște o distribuție *a priori* $w(\Theta)$ a lui $\Theta$, care indică ce valori ale lui $\Theta$ sunt mai probabile / mai puțin probabile
     - caz mai general decât primul

# II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

# Estimarea tip Maximum Likelihood

- Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă ("Maximum Likelihood", ML)
- Se definește **plauzibilitatea** unui valori $\Theta$, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$:

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\Theta|\mathbf{r})$$

- $L(\Theta|\mathbf{r})$ reprezintă funcția de plauzibilitate
- A se compara cu formula din Cap. 2, slide 20
  - e aceeași
  - aici "ghicim" pe $\Theta$, acolo "ghiceam" pe $H_i$

# Estimarea tip Maximum Likelihood

Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood, ML):

- Estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea, dat fiind valorile observate r**
  - i.e. valoarea care maximizează $L(\Theta|\mathbf{r})$, adică maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta)$

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

- Dacă $\Theta$ aparține doar unui anumit interval, se face maximizarea doar pe acel interval

# Notații matematice

- Notații matematice generale
  - $\arg\max_x f(x) =$ “valoarea $x$ are maximizează funcția f(x)”
  - $\max_x f(x) =$ “valoarea maximă a funcției f(x)”

# Estimare vs decizie Maximum Likelihood

- Estimarea ML este foarte similară cu decizia ML!
- Criteriul de decizie ML:
  - "se alege ipoteza cu plauzibilitate mai mare":

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- Estimare ML:
  - "se alege valoarea care maximizează plauzibilitatea"

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

# Găsirea maximului

- Cum se rezolvă problema de maximizare?
  - adică cum se găsește estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ care maximizează $L(\Theta|vecr)$
- Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta|\mathbf{r})}{d\Theta} = 0$$

- Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta|\mathbf{r})$ înainte de derivare (funcția "log-likelihood")

$$\frac{d\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right)}{d\Theta} = 0$$

# Procedura de găsire a estimatului

Procedura de găsire a estimatului ML:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta|\mathbf{r})$ sau a lui $\ln((L(\Theta|\mathbf{r}))$ să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ sau } \frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
    - întrucât derivata $= 0$ și pentru maxime și pentru minime
    - uneori sărim peste această etapă

# Exemple

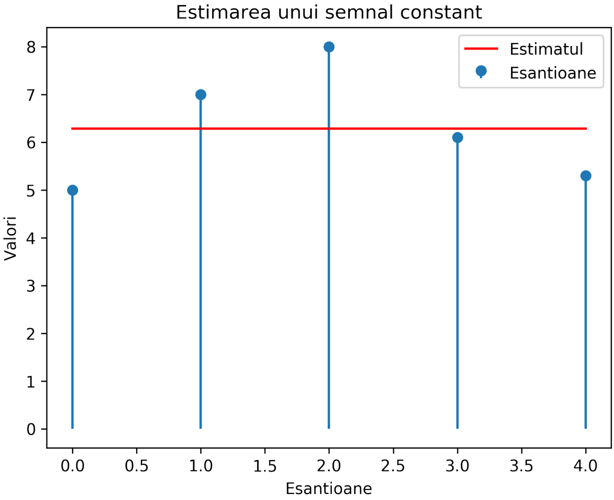
- Estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian:

  Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru un semnal de valoare constantă $s_\Theta(t) = A$ din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + zgomot$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$.

- Soluție: la tablă

- Estimatul $\hat{A}_{ML}$ este chiar valoarea medie a eșantioanelor
  - (deloc surprinzător)

# Simulare numerică



# Aproximare a unei curbe

- Estimare = aproximare a unei curbe
  - se găsește cea mai bună potrivire a lui $s_\Theta(t)$ pri datele $\mathbf{r}$
- Din exemplul grafic anterior:
  - avem un set de date $\mathbf{r}$
  - se cunoaște forma semnalului = o dreaptă orizontală ($A$ constant)
  - se aproximează în mod optim dreapta prin setul de date

# Semnal oarecare în AWGN

- Fie semnalul original $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Eșantioanele $r_i$ sunt luate la momentele $t_i$
- Eșantioanele $r_i$ au distribuție normală, cu media $\mu = s_\Theta(t_i)$ și varianța $\sigma^2$
- Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilităților fiecărui eșantion $r_i$

$$
\begin{aligned}
L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}} \\
&= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Logaritmul plauzibilității ("log-likelihood") este

$$\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)}_{constant} - \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

- Termenul $\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$ este **distanța** $d(\mathbf{r}, s_{\Theta})$ **la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_{\Theta}) = \sqrt{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_{\Theta}))^2 = \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Estimarea ML se poate rescrie sub forma:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min_{\Theta} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{\Theta})^2$$

- Estimatul de plauzibilitate maximă (ML) $\hat{\Theta}_{ML}$ = valoarea care face $s_{\Theta}(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat r**
  - mai aproape = potrivire mai bună = mai probabil
  - cel mai aproape = cea mai bună potrivire = cel mai probabil = plauzibilitate maximă

# Semnal oarecare în AWGN

- Estimare ML în zgomot gaussian = **minimizarea distanței**
- Aveam aceeași interpretare și la decizia ML!
  - dar la decizie alegeam minimul din 2 opțiuni
  - aici alegem minimul dintre toate opțiunile posibile
- Relația e valabilă pentru orice fel de spații vectoriale
  - vectori cu N elemente, semnale continue, etc
  - doar se înlocuiește definiția distanței Euclidiene

# Semnal oarecare în AWGN

Procedura pentru estimarea tip ML în zgomot AWGN:

1. Se scrie expresia pentru pătratul distanței:

$$D = (d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

2. Vrem minimul, deci egalăm derivata cu 0:

$$\frac{dD}{d\Theta} = \sum 2(r_i - s_\Theta(t_i))(-\frac{ds_\Theta(t_i)}{d\Theta}) = 0$$

3. Se rezolvă și obținem valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este pozitivă, pentru a se verifica că punctul este un minim
   - uneori sărim peste această etapă

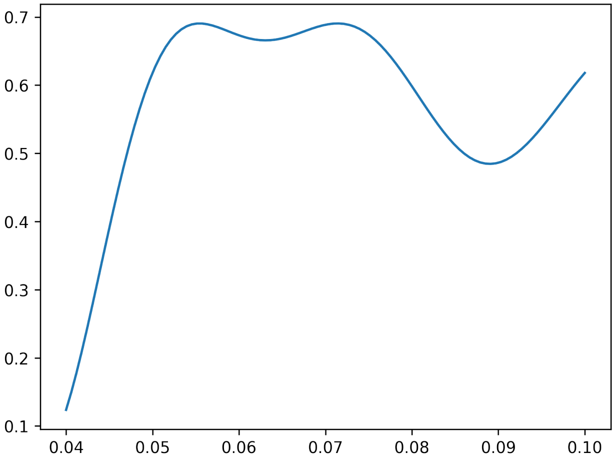
# Simulare numerică

Estimarea frecvenței $f$ a unui semnal sinusoidal

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența $f$ a unui semnal $s_\Theta(t) = cos(2\pi f t_i)$, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = cos(2\pi f t_i) + zgomot$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- Soluție: la tablă

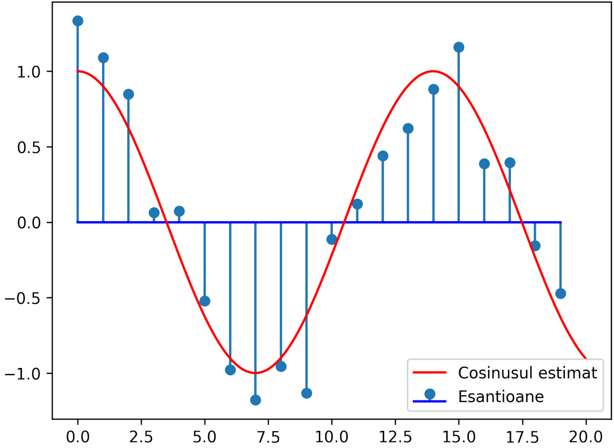
# Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este



# Simulare numerică

Frecventa originala = 0.070000, estimatul = 0.071515



# Parametri multipli

- Dacă semnalul depinde de mai mulți parametri?
  - de ex. amplitudinea, frecvența și faza inițială a unui cosinus:

$$s_{\hat{}}(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Se va considera $\Theta$ ca fiind un vector:

$$\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, ...\Theta_M]$$

  - e.g. $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] = [A, f, \phi]$

# Parametri multipli

- Se rezolvă cu aceeași procedură, dar în loc de o singură derivată vom avea $M$ derivate
- Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_M} = 0 \end{cases}$$

  - uneori este dificil/imposibil

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Cum se estimează parametrii $\boldsymbol{\Theta}$ în cazuri complicate?
  - în aplicații reale, unde pot fi foarte mulți parametri ($\boldsymbol{\Theta}$ este vector)
- De obicei nu se pot găsi valorile optime prin formule directe
- Se îmbunătățesc valorile în mod iterativ cu algoritmi tip **coborâre după gradient** (Gradient Descent)

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

1. Se inițializează parametrii cu valori aleatoare $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$
2. Repetă la fiecare iterație $k$:
   2.1 Se calculează funcția $L(\boldsymbol{\Theta}^{(k)}|\mathbf{r})$
   2.2 Se calculează derivatele $\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$ pentru toți $\Theta_i$ ("**Gradient**")
   2.3 Se actualizează toate valorile $\Theta_i$ prin scăderea derivatei ("**Descent**"):
   $$\Theta_i^{(k+1)} = \Theta_i^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$$
   - sau, sub formă vectorială:
   $$\boldsymbol{\Theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Theta}^{k} - \mu \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Theta}^{(k)}}$$
3. Până la îndeplinirea unui criteriu de terminare (de ex. parametrii nu se mai modifică mult)

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Explicații la tablă
- Exemplu: regresia logistică cu valori 2D
  - exemplu la tablă

# Rețele Neurale

- Cel mai proeminent exemplu: **Rețele Neurale Artificiale** (a.k.a. “Rețele Neurale”, “Deep Learning”, etc.)
  - Pot fi văzute ca un exemplu de estimare ML
  - Se utilizează algoritmul *Gradient Descent* pentru găsirea parametrilor
  - Aplicații de vârf: recunoașterea de imagini, automated driving etc.
- Mai multe informații despre rețele neurale / machine learning:
  - căutați cursuri sau cărți online
  - IASI AI Meetup

# II.3 Estimare Bayesiană

# Regula lui Bayes

- Se poate utiliza regula lui Bayes

$$L(\Theta) = w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- Termenii:
- $\Theta$ este parametrul necunoscut
- $\mathbf{r}$ este vectorul de observații
- $L(\Theta) = w(\Theta|\mathbf{r})$ este plauzibilitatea lui $\Theta$, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$;
- $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este probabilitatea lui $\mathbf{r}$ pentru un $\Theta$ dat, depinde de distribuția zgomotului
- $w(\Theta)$ este distribuția **a priori** a lui $\Theta$
- $w(\mathbf{r})$ este distribuția **a priori** a lui $\mathbf{r}$, se presupune a fi constantă

# Regula lui Bayes

- Relația precedentă arată că, în general, estimarea lui $\Theta$ depinde de două lucruri:
  1. De observațiile $r_i$, prin termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$
  2. De informația “a priori” avută despre $\Theta$, prin termenul $w(\Theta)$

(termenul $w(\mathbf{r})$ se presupune a fi constant, și nu joacă un rol important)

# Distribuția *a priori*

- Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui $\Theta$, $w(\Theta)$
  - știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
  - se numește distribuția *a priori*
- Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori*
  - estimatul va fi "tras" înspre valori mai probabile
- Cunoscută sub numele de "estimare Bayesiană"
  - Thomas Bayes = a descoperit regula lui Bayes
  - Chestiile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de "Bayesian"

# Funcția de cost

- **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală $\Theta$
$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
  - erori $\epsilon$ mici au costuri mici
  - erori $\epsilon$ mari au costuri mari

- Funcții de cost uzuale:
  - Pătratică: $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$
  - Uniformă: $C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$
  - Liniară: $C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$
  - (desenate la tablă)

# Riscul Bayesian

- Pentru fiecare pereche de valori $\mathbf{r}$ și $\Theta$, $w(\mathbf{r};\Theta)$ indică cât de probabilă este acea pereche de valori
- Prin multiplicare cu $C(\epsilon$ se obține costul pentru fiecare pereche $\mathbf{r}$ și $\Theta$

$$C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)$$

- Integrând după $\Theta$ se obține costul total pentru un anume $\mathbf{r}$ și toți $\Theta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)d\Theta$$

- Integrând mai de parte și după $\mathbf{r}$ se obține costul global pentru toți $\mathbf{r}$ și toți $\Theta$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)d\Theta d\mathbf{r}$$

# Minimizarea riscului

- Se dorește minimizarea riscului R (= a costului global)
- Regula lui Bayes: $w(\mathbf{r};\Theta) = w(\Theta|\mathbf{r})w(\mathbf{r})$
- Înlocuind în R, se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) w(\mathbf{r}) d\Theta d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{r}) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \right] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

- Cum $w(\mathbf{r}) \geq 0$, minimizarea integralei $I$ din interior asigură minimul lui $R$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vom înlocui $C(\epsilon)$ cu definiția sa și derivăm după $\hat{\Theta}$
  - Atenție: derivăm după $\hat{\Theta}$, nu $\Theta$!

# Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează $I$, deci derivăm

$$\frac{dI}{d\hat{\Theta}} = 2\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})}_{1} d\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM) ("Minimum Mean Squared Error, MMSE")**:

$$\hat{\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

# Interpretare

- $w(\Theta|\mathbf{r})$ este distribuția **a posteriori** a lui $\Theta$
  - este distribuția lui $\Theta$ **după** ce cunoaștem semnalul recepționat $\mathbf{r}$
  - distribuția *a priori* $w(\Theta)$ este cea de dinainte de a recepționa datele
- Estimatorul EPMM este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori*

# Estimatorul MAP

- Dacă funcția de cost este uniformă
$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$
- Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- Se obține

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \\ I &= 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \end{aligned}$$

# Estimatorul MAP

- Pentru minimizarea $I$, trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- Pentru $E$ foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta} = \arg\max w(\Theta|\mathbf{r})$$

- $\arg\max$ = "valoarea la care funcția este maximă"
  - $\max f(x)$ = valoarea maximă a unei funcții
  - $\arg\max f(x)$ = valoarea $x$ pentru care funcția atinge valoarea maximă

## Interpretare

- Estimatorul MAP: $\hat{\Theta}$ = valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta}$ = valoarea medie a distribuției *a posteriori*

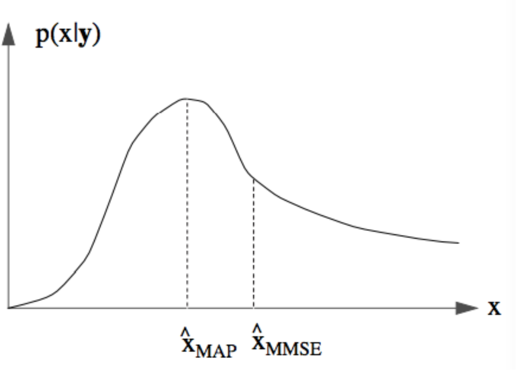



Figure 1: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

*[image from https://allenlu2007.wordpress.com]*

# Cum se găsește distribuția *a posteriori*

- Cum găsim distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$?
- Regula lui Bayes

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r};\Theta)}{w(\mathbf{r})} = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- Cum $w(\mathbf{r})$ e constant pentru un $\mathbf{r}$ dat, estimatorul MAP este

$$\hat{\Theta} = \arg\max w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) w(\Theta)$$

- Estimatorul MAP este valoarea care maximizează plauzibilitatea datelor recepționate, dar **multiplicate** cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- Estimatorul EPMM este valoarea medie a aceleiași funcții

# Relația cu estimatorul ML

- Estimatorul ML este $\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)$
- Estimatorul MAP = similar cu cel ML dar multiplicând în prealabil funcția cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- Dacă $w(\Theta)$ ar fi constant, estimatorul MAP se reduce la cel ML
    - $w(\Theta) =$ constant înseamnă că toate valorile $\Theta$ sunt la fel de posibile
    - adică nu avem nici o idee/preferință unde s-ar afla valoarea reală $\Theta$

# Relația cu detecția semnalelor

- Criteriul probabilității minime de eroare $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$
  - adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H) \cdot P(H)$ este mai mare
  - $w(r|H_1)$, $w(r|H_0)$ sunt plauzibilitățile semnalului recepționat
  - $P(H_1)$, $P(H_0)$ sunt probabilitățile *a priori* (inițiale) ale ipotezelor
- Estimatorul MAP = valoarea pentru care $w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$ e maxim
  - $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este plauzibilitatea semnalului recepționat
  - $w(\Theta)$ este distribuția *a priori*
- Același principiu, doar în contexte diferite:
  - la detecție, avem de ales doar între câteva opțiuni predefinite
  - la estimare, nu avem constrângeri => se alege valoarea care maximizează întreaga funcție

# Examen 2018-2019

- Până aici s-a făcut în 2018-2019. Celelalte slide-uri din acest fișier nu se cer.

# Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același $\sigma$

- Vrem să estimam temperatura de astăzi din Sahara
- Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (termometru ieftin)
- Se știe că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$.
- Estimați valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP și EPMM(MMSE)

# Exerciţiu

Exerciţiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian acelaşi $\sigma$

- Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exerciţiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian $\sigma$ diferit

- Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuţie Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$
  - cu varianţă diferită, $\sigma_2 \neq \sigma$

# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Fie semnalul original "curat" $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este Gaussian (AWGN) $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Ca în cazul estimării de plauzibilitate maximă, funcția de plauzibilitate este:

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

- Dar acum aceasta **se înmulțește cu** $w(\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- Estimatorul MAP estimator este cel care maximizează produsul

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) w(\Theta)$$

- Logaritmând:

$$\begin{aligned}
\hat{\Theta}_{MAP} &= \arg\max \ln\left(w(\mathbf{r}|\Theta)\right) + \ln\left(w(\Theta)\right) \\
&= \arg\max -\frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2} + \ln\left(w(\Theta)\right)
\end{aligned}$$

# Distribuție “a priori” Gaussiană

- Dacă distribuția “a priori” este de asemenea Gaussiană $\mathcal{N}(\mu_\Theta, \sigma_\Theta^2)$

$$\ln\left(w(\Theta)\right) = -\frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Estimatorul MAP devine

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(\Theta - \mu_\Theta)^2}{2\sigma_\Theta^2}$$

- Poate fi rescris

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_\Theta)^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_\Theta^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_\Theta)^2$$

# Interpretare

- Estimatorul MAP în zgomot Gaussian și cu distribuție “a priori” Gaussiană

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\min d(\mathbf{r}, s_{\Theta})^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\Theta}^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_{\Theta})^2$$

- $\hat{\Theta}_{MAP}$ este apropiat de valoarea medie $\mu_{\Theta}$ și de asemenea face ca semnalul adevărat să fie apropiat de eșantioanele recepționate $\mathbf{r}$
  - Exemplu: “caut locuință aproape de serviciu dar și aproape de Mall”
  - $\lambda$ controlează importanța relativă a celor doi termeni

- Cazuri particulare
  - $\sigma_{\Theta}$ foarte mic $=$ distribuția “a priori” este foarte specifică (îngustă) $=$ $\lambda$ mare $=$ termenul al doilea este dominant $=$ $\hat{\Theta}_{MAP}$ foarte apropiat de $\mu_{\Theta}$
  - $\sigma_{\Theta}$ foarte mare $=$ distribuția “a priori” este foarte nespecifică $=$ $\lambda$ mic $=$ primul termen este dominant $=$ $\hat{\Theta}_{MAP}$ apropiat de estimatorul de plauzibilitate maximă

# Aplicații

- În general, aplicațiile practice:
  - utilizează diverse tipuri de distribuții “a priori”
  - estimează **mai mulți parametri** (un vector de parametri)
- Aplicații
  - reducerea zgomotului din semnale
  - restaurarea semnalelor (parți lipsă din imagini, imagini *blurate* etc)
  - compresia semnalelor

# Estimatori nedeplasați

- Cum caracterizăm calitatea unui estimator?
  - Există diverse abordări
- Un estimator $\hat{\Theta}$ este **o variabilă aleatoare**
  - poate avea diverse valori, pentru că se calculează pe baza eșantioanelor recepționate, care depind de zgomot
  - exemplu: se repetă aceeași estimare pe calculatoare diferite => valori estimate ușor diferite
- Fiind o variabilă aleatoare, se pot defini:
  - valoarea medie a estimatorului: $E\left\{\hat{\Theta}\right\}$
  - varianța estimatorului: $E\left\{(\hat{\Theta} - \Theta)^2\right\}$

# Estimatori nedeplasați

- Estimator **nedeplasat** = valoarea medie a estimatorului este egală cu valoarea adevărată a parametrului $\Theta$

$$E\left\{\hat{\Theta}\right\} = \Theta$$

- Estimator **deplasat** = valoarea medie a estimatorului diferă de valoarea adevărată a parametrului $\Theta$
  - diferența $E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$ se numește **deplasarea** estimatorului

# Estimatori nedeplasați

- Exemplu: semnal constant A, zgomot Gaussian (cu media), estimatorul de plauzibilitate maximă este $\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_i r_i$
- Atunci:

$$
\begin{aligned}
E\left\{\hat{A}_{ML}\right\} &= \frac{1}{N} E\left\{\sum_i r_i\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left\{r_i\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left\{A + zgomot\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A \\
&= A
\end{aligned}
$$

- Acest estimator este nedeplasat

# Varianța unui estimator

- Dacă un estimator are **varianța** mare, valoarea estimată poate fi departe de cea reală
  - indiferent dacă estimatorul este nedeplasat sau nu
- De obicei se preferă estimatori de **varianță redusă**, tolerându-se o eventuală mică deplasare