Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Chapter III. Elemente de Teoria Estimării

II.1 Introducere

Ce înseamnă "estimare"?

- Un emițător transmite un semnal $s_\Theta(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** Θ
- Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează $r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$
- Vrem să **găsim** valoarea parametrului
  - pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - datele recepționate au zgomot => parametrul este "estimat"
- Valoarea găsită este $\hat{\Theta}$, **estimatul** lui Θ
  - există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$
- Exemple:
  - Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + zgomot$, trebuie estimat A
  - Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi f t + \phi) + zgomot$, de estimat ϕ
  - Semnal vocal înregistrat, de estimat/decis ce cuvânt este pronunțat

Estimare și Decizie

- Fie următoarea problemă de estimare: $r(t) = A + zgomot$, de estimat A
- La detecție se alege între **două valori cunoscute** ale A:
  - de ex. A poate fi 0 sau 5 (ipotezele H_0 și H_1)
- La estimare, A poate fi oricât $=>$ se alege între **o infinitate de opțiuni** ale A
  - A poate fi orice valoare din $\mathbb{R}$, în general

Estimare și Detecție

- Detecție = Estimare restrânsă doar la un set discret de opțiuni
- Estimare = Detecție cu un număr infinit de opțiuni posibile
- Metodele statistice sunt similare
  - În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este “detecție” sau “estimare”?)

Semnalul recepționat

- Semnalul recepționat este $r(t)$
  - este afectat de zgomot, și depinde de parametrul necunoscut Θ
- Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp t_i

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ... r_N]$$

- Fiecare eșantion r_i este o variabilă aleatoare ce depinde de Θ (și zgomot)
  - Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de Θ

$$w_i(r_i; \Theta)$$

- Întregul vector de eșantioane **r** este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de Θ (și de zgomot)
  - Are o distribuție N-dimensională ce depinde de Θ
  - Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i; \Theta)$

$$w(\mathbf{r}; \Theta) = w_1(r_1; \Theta) \cdot w_2(r_2; \Theta) \cdot ... \cdot w_N(r_N; \Theta)$$

Tipuri de estimare

- Considerăm estimarea lui Θ în două cazuri:

1. Nu cunoaștem alte informații despre parametru, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
   - Parametrul poate avea orice valoare din domeniul de existență, în mod echiprobabil
2. Se cunoaște o distribuție $w(\Theta)$ a lui Θ, care indică ce valori ale lui Θ sunt mai probabile / mai puțin probabile
   - este distribuția *a priori* ("cea cunoscută de dinainte")

II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

Definiția plauzibilității maxime

- Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă (“Maximum Likelihood”, ML)
- Distribuția vectorului recepționat, $w(\mathbf{r}; \Theta)$, reprezintă **funcția de plauzibilitate**
  - vectorul recepționat $\mathbf{r}$ este cunoscut, deci e o constantă
  - necunoscuta aici este Θ

$$L(\Theta) = w(\mathbf{r}; \Theta)$$

- Estimarea de plauzibilitate maximă: estimatul $\hat{\Theta}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea semnalului recepționat**
  - i.e. valoarea Θ care maximizează $w(\mathbf{r}; \Theta)$

$$\hat{\Theta} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}; \Theta)$$

- Dacă Θ aparține doar unui anumit domeniu, se face maximizarea doar asupra acelui domeniu.

Calculul maximului

- Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0$$

- Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta)$ înainte de derivare ("log-likelihood function")

$$\frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

Calculul maximului

Metoda:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta) = w(\mathbf{r};\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta)$ sau a lui $\ln((L(\Theta))$ să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ or } \frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

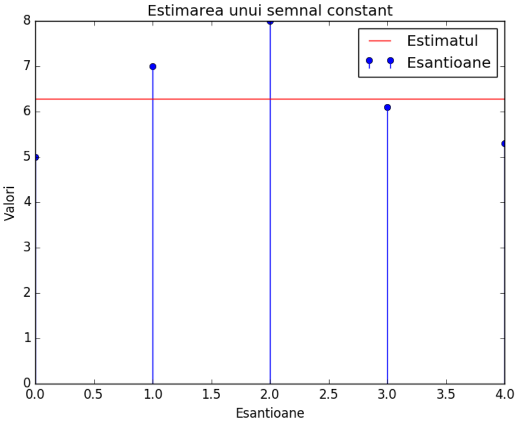
3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
    - întrucât derivata $= 0$ și pentru maxime și pentru minime

Exemple

Semnal constant în zgomot gaussian:

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru constanta A din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + \textit{noise}$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$.
- Soluție: la tablă
- Estimatul $\hat{A}$ este chiar valoarea medie a eșantioanelor (deloc surprinzător)

Simulare numerică



Semnal oarecare în AWGN

- Fie semnalul original "curat" $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Eșantioanele r_i sunt luate la momentele t_i
- Eșantioanele r_i au distribuție normală, cu media $s_\Theta(t_i)$ și varianța σ^2
- Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilității fiecărui eșantion r_i

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

- Logaritmul plauzibilității ("log-likelihood") este

$$\ln\left(L(\Theta)\right) = \underbrace{N \ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)}_{constant} - \frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta} = \arg\max_{\Theta} w(r;\Theta) = \arg\min \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

- Termenul $\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$ este **distanța $d(\mathbf{r}, s_\Theta)$ la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_\Theta) = \sqrt{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

- Estimatul de plauzibilitate maximă $\hat{\Theta}$ = valoarea care face $s_\Theta(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat r**
  - mai aproape = mai probabil
  - cel mai aproape = cel mai probabil = plauzibilitate maximă
- Pentru semnale continue? Similar, dar utilizând distanța între semnale continue

Semnal oarecare în AWGN

- Estimatul se găsește prin setarea derivatei la 0

$$\frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

înseamnă

$$\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2 \frac{ds_\Theta(t_i)}{d\Theta} = 0$$

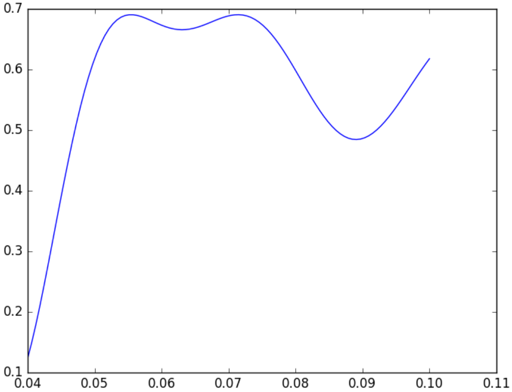
Simulare numerică

Estimarea frecvenței f a unui semnal sinusoidal

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența f a unui semnal cosinus, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = cos(2\pi f t_i) + zgomot$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- Soluție: la tablă

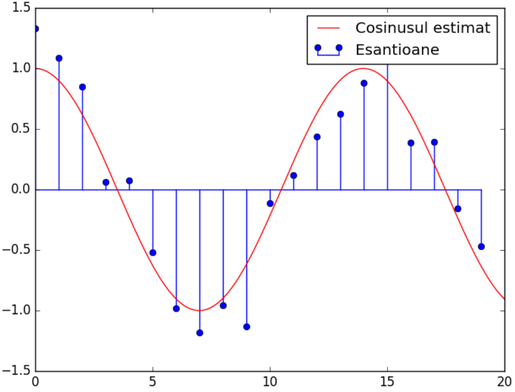
Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este



Simulare numerică

```
Frecventa originala = 0.070000, estimatul = 0.071515
```



Estimare ML și Detecție ML

- La estimarea ML, estimatul $\hat{\Theta}$ este valoarea care maximizează funcția de plauzibilitate
- La detecție ML, criteriul de decizie $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$ înseamnă "alege ipoteza pentru care funcția de plauzibilitate este mai mare"
- Același principiu, doar în contexte diferite:
  - la detecție, avem de ales doar între câteva opțiuni predefinite
  - la estimare nu mai avem constrângeri => se alege valoarea maximă a întregii funcții

II.3 Estimare Bayesiană

Distribuția *a priori*

- Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui Θ, $w(\Theta)$
  - știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
  - se numește distribuția *a priori*
- Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori*
  - estimatul va fi "tras" înspre valori mai probabile
- Cunoscută sub numele de "estimare Bayesiană"
  - Thomas Bayes = a descoperit regula lui Bayes
  - Chestiile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de "Bayesian"

Funcția de cost

- **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală Θ
$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$
- **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
  - erori ϵ mici au costuri mici
  - erori ϵ mari au costuri mari
- Funcții de cost uzuale:
  - Pătratică: $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$
  - Uniformă: $C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$
  - Liniară: $C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$
  - (desenate la tablă)

Riscul Bayesian

- Pentru fiecare pereche de valori $\mathbf{r}$ și Θ, $w(\mathbf{r};\Theta)$ indică cât de probabilă este acea pereche de valori
- Prin multiplicare cu $C(\epsilon$ se obține costul pentru fiecare pereche $\mathbf{r}$ și Θ

$$C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)$$

- Integrând după Θ se obține costul total pentru un anume $\mathbf{r}$ și toți Θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)d\Theta$$

- Integrând mai de parte și după $\mathbf{r}$ se obține costul global pentru toți $\mathbf{r}$ și toți Θ

$$R = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r};\Theta)d\Theta d\mathbf{r}$$

Minimizarea riscului

- Se dorește minimizarea riscului R (= a costului global)
- Regula lui Bayes: $w(\mathbf{r}; \Theta) = w(\Theta|\mathbf{r}) w(\mathbf{r})$
- Înlocuind în R, se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) w(\mathbf{r}) d\Theta d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{r}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \right] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

- Cum $w(\mathbf{r}) \geq 0$, minimizarea integralei I din interior asigură minimul lui R

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vom înlocui $C(\epsilon)$ cu definiția sa și derivăm după $\hat{\Theta}$
  - Atenție: derivăm după $\hat{\Theta}$, nu Θ!

Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează I, deci derivăm

$$\frac{dI}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})}_{1} d\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM)** **("Minimum Mean Squared Error, MMSE")**:

$$\hat{\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

Interpretare

- $w(\Theta|\mathbf{r})$ este distribuția **a posteriori** a lui Θ
  - este distribuția lui Θ **după** ce cunoaștem semnalul recepționat $\mathbf{r}$
  - distribuția *a priori* $w(\Theta)$ este cea de dinainte de a recepționa datele
- Estimatorul EPMM este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori*

Estimatorul MAP

- Dacă funcția de cost este uniformă
  $$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$
- Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- Se obține

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \\ I &= 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \end{aligned}$$

Estimatorul MAP

- Pentru minimizarea I, trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- Pentru E foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta} = \arg\max w(\Theta|\mathbf{r})$$

- $\arg\max$ = "valoarea la care funcția este maximă"
  - $\max f(x)$ = valoarea maximă a unei funcții
  - $\arg\max f(x)$ = valoarea x pentru care funcția atinge valoarea maximă

Interpretare

- Estimatorul MAP: $\hat{\Theta}$ = valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta}$ = valoarea medie a distribuției *a posteriori*

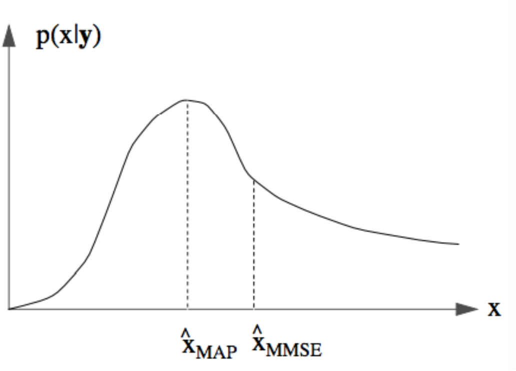


Figure 1: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

Cum se găsește distribuția *a posteriori*

- Cum găsim distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$?
- Regula lui Bayes

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r};\Theta)}{w(\mathbf{r})} = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- Cum $w(\mathbf{r})$ e constant pentru un $\mathbf{r}$ dat, estimatorul MAP este

$$\hat{\Theta} = \arg\max w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) w(\Theta)$$

- Estimatorul MAP este valoarea care maximizează plauzibilitatea datelor recepționate, dar **multiplicate** cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- Estimatorul EPMM este valoarea medie a aceleiași funcții

Relația cu estimatorul ML

- Estimatorul ML este $\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)$
- Estimatorul MAP = similar cu cel ML dar multiplicând în prealabil funcția cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- Dacă $w(\Theta)$ ar fi constant, estimatorul MAP se reduce la cel ML
    - $w(\Theta) =$ constant înseamnă că toate valorile Θ sunt la fel de posibile
    - adică nu avem nici o idee/preferință unde s-ar afla valoarea reală Θ

Relația cu detecția semnalelor

- Criteriul probabilității minime de eroare $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$
  - adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H) \cdot P(H)$ este mai mare
  - $w(r|H_1)$, $w(r|H_0)$ sunt plauzibilitățile semnalului recepționat
  - $P(H_1)$, $P(H_0)$ sunt probabilitățile *a priori* (inițiale) ale ipotezelor
- Estimatorul MAP = valoarea pentru care $w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$ e maxim
  - $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este plauzibilitatea semnalului recepționat
  - $w(\Theta)$ este distribuția *a priori*
- Același principiu, doar în contexte diferite:
  - la detecție, avem de ales doar între câteva opțiuni predefinite
  - la estimare, nu avem constrângeri => se alege valoarea care maximizează întreaga funcție

Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- Vrem să estimam temperatura de astăzi din Sahara
- Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (termometru ieftin)
- Se știe că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$.
- Estimați valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP și EPMM(MMSE)

Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian σ diferit

- Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$
  - cu varianță diferită, $\sigma_2 \neq \sigma$