

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introducere

- ▶ Detectia semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
 - ▶ inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)
- ▶ Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
 - ▶ semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Contextul problemei de decizie

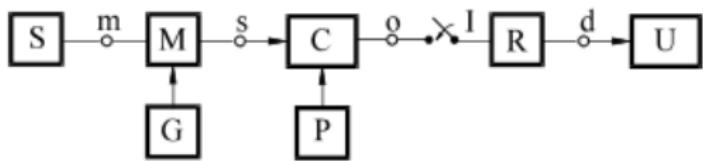


Figure 1: Schema bloc a unui sistem de comunicatie

► Schema bloc a unui sistem de comunicatie:

- Sursa de informatie: genereaza mesajele a_n cu probabilitatile $p(a_n)$
- Generator: genereaza semnalele diferite $s_1(t), \dots, s_n(t)$
- Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
- Canal: adaugă zgomot aleator
- Eșantionare: ia eșantioane din semnalul ~~$s_n(t)$~~ receptionat
- Receptor: decide ce mesaj a_n s-a fost receptionat
- Utilizator: primește mesajele recuperate

0 1 0 0 1 0 1 + 1

0 : 0 V = $N_0(t)$

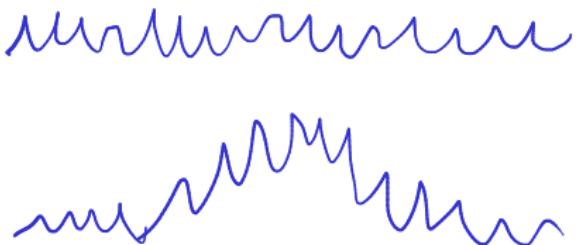
1 : 5 V = $N_1(t)$



0, 1 logic

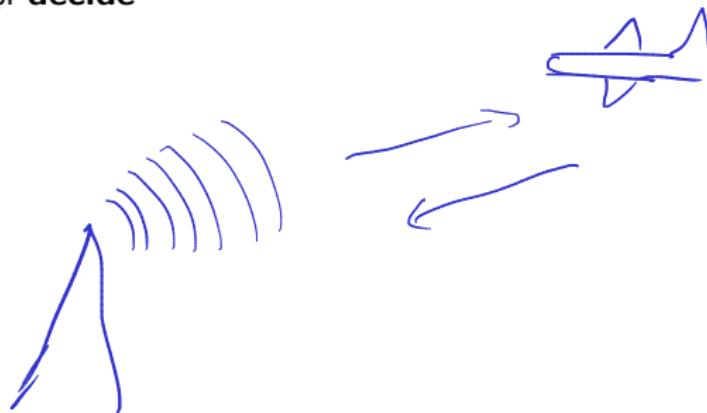
1, 5 V \Rightarrow 0 logic

- ▶ Transmisie de date cu diverse modulații binare:
 - ▶ nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) = \text{constant } 0 \text{ sau } 5V$)
 - ▶ modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite}$
 - ▶ modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus cu frecvențe diferite}$
 - ▶ modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK
 - ▶ la recepție se primește semnalul cu zgomot, se decide dacă s-a primit 0 sau 1



► Detectii radar

- ▶ se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
- ▶ receptorul aşteaptă posibilele reflectii ale semnalului emis și **decide**
 - ▶ nu este prezentă o reflectie -> nici un obiect
 - ▶ semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat



- ▶ Decizie între mai mult de două semnale
- ▶ Numărul de eșantioane (observații):
 - ▶ un singur eșantion
 - ▶ mai multe eșantioane
 - ▶ observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detectia semnalelor folosind 1 esantion

Detectia unui semnal cu 1 esantion

- Cel mai simplu caz: detectia (decizia) folosind un singur esantion

- două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$

- pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
- pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$

- peste semnal se suprapune zgomotul $\underline{n(t)}$
- se receptionează un semnal cu zgomot, $\underline{r(t)} = \underline{s(t)} + \underline{n(t)}$
- la receptie: se preia un singur esantion la timpul t_0 , $r = r(t_0)$
- **decizie**: pe baza $r(t_0)$, care semnal a fost cel transmis?

$$0 \text{ logic} \rightarrow \Delta_0(t) = 0 \vee$$

$$1 \text{ logic} \rightarrow \Delta_1(t) = 5 \vee$$

$$\underline{r} = \underline{r}(t_0)$$

$$r = 1.3 V \Rightarrow 0$$

$$r = 4.2 V \Rightarrow 1$$

- ▶ Există **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
 - ▶ H_1 : semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- ▶ Receptorul poate lua una din **două decizii**:
 - ▶ D_0 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

Rezultate posibile

- Există 4 situații posibile:

$H_0(f)$

$H_0(t)$

1. **Rejecție corectă**: ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_0

- Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$
- "True Negative"

$H_0(t)$

$H_1(t)$

2. **Alarmă falsă**: ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_1

- Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$
- "False Positive"

3. **Pierdere**: ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_0

- Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$
- "False Negative"

Erori

"Miss"

4. **Detectie corectă**: ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_1

- Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$
- "True Positive"

$$P(D_0 \cap H_0) = P_r$$

$$P(D_1 \cap H_0) = P_{af}$$

$$P(D_0 \cap H_1) = P_p$$

$$P(D_1 \cap H_1) = P_d$$

- ▶ Terminologia are la origine aplicații radar:
 - ▶ un semnal se emite de către sursă
 - ▶ semnal recepționat = o posibilă reflectie din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
 - ▶ H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
 - ▶ H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
 - ▶ de aici numele “alarmă falsă”, “pierdere” etc.

- ▶ În general se consideră zgomot **aditiv, alb, staționar**
 - ▶ aditiv = zgomotul se adună cu semnalul
 - ▶ alb = eșantioane distincte sunt necorelate
 - ▶ staționar = are aceleasi proprietăți statistice la orice moment de timp
- ▶ Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut
 - ▶ este o realizare a unei procese aleator
 - ▶ se cunoaște doar distribuția sa, nu și valorile particulare

- ▶ La recepție se primește semnalul $\underline{r(t)} = s(t) + n(t)$
 - ▶ $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
 - ▶ $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- ▶ Valoarea eşantionului luat la momentul t_0 este $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$
 - ▶ $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
 - ▶ $n(t_0)$ este un eşantion din semnalul de zgomot

- ▶ Eșantionul $n(t_0)$ este o variabilă aleatoare
 - ▶ fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
 - ▶ v.a. continuă , intervalul valorilor posibile e continuu
- ▶ $r(t_0) = \underline{s(t_0)} + n(t_0) = \text{o constantă} + \text{o variabilă aleatoare}$
 - ▶ este de asemenea o variabilă aleatoare
 - ▶ $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $\underline{s_0(t_0)}$, fie cu $\underline{s_1(t_0)}$
- ▶ Care e distribuția lui $r(t_0)$?
 - ▶ o constantă + o v.a. = aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Functii de plauzibilitate

- ▶ Fie distribuția zgomotului cunoscută, $w(x)$
- ▶ Distribuția lui r este $w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_0 , distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_1 , distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- ▶ $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții condiționate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
 - ▶ “|” înseamnă “conditionat de”, “dat fiind”
 - ▶ adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
 - ▶ r reprezintă necunoscuta funcției

Functii de plauzibilitate

$$H_0:$$

$$\underbrace{s(t) + z}_{\text{zgomot}}$$

$$r(t) = s(t) + z_{\text{gomet}}$$

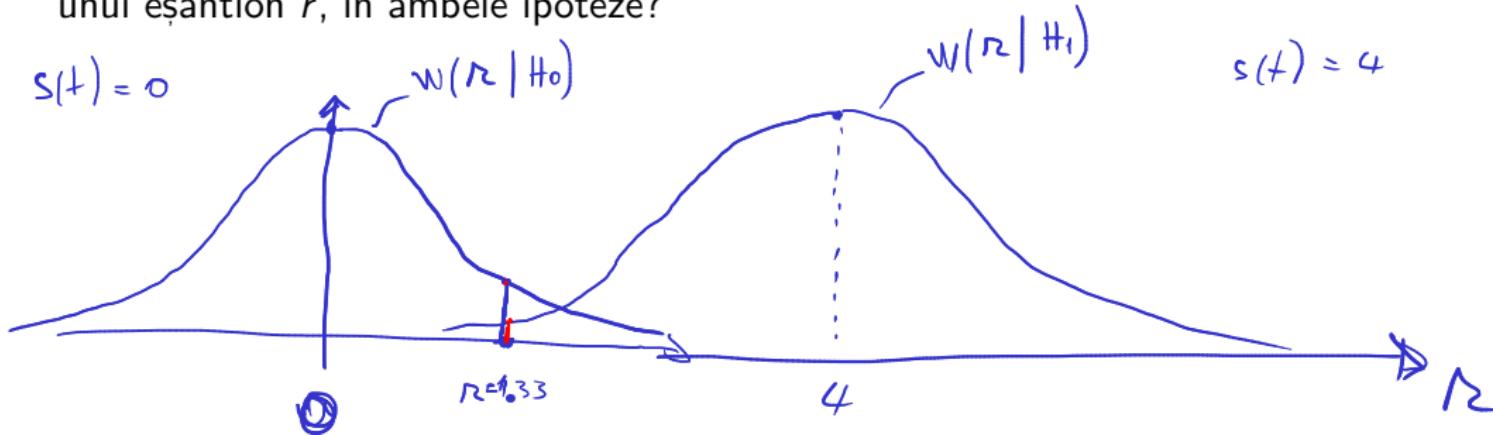
$$H_0: r = 0 + z_{\text{gomet}}$$

$$H_1: r = 4 + z_{\text{gomet}}$$

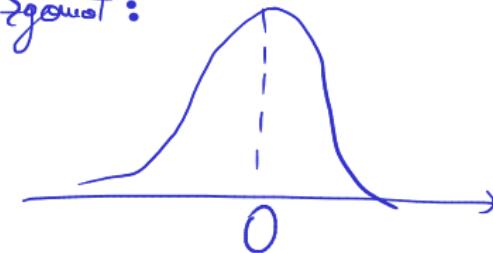
Exemplu:

$$\mathcal{N}_0(\cdot) \quad \mathcal{N}_1(\cdot)$$

- Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Care e distribuția unui eșantion r , în ambele ipoteze?



zgomot:



Decizie pe baza celor două distribuții:

- ▶ Avem două distribuții posibile (câte una în fiecare ipoteză)
- ▶ Avem un eşantion $r = r(t_0)$, care poate proveni din oricare distribuție
- ▶ Care ipoteză **decidem** a fi adevărată?

$$N = 1,33$$

- ▶ În general, **plauzibilitatea (likelihood)** unui parametru P pe baza unor **observații** O = densitatea de probabilitate a lui O , dacă parametrul are valoarea P :

$$L(P|O) = w(O|P)$$

- ▶ În cazul nostru:
 - ▶ parametrul necunoscut = care ipoteză H este cea adevărată
 - ▶ observațiile = eșantionul r
- ▶ **Plauzibilitatea unei ipoteze H pe baza observației r este:**
 - $L(H_0|r) = w(r|H_0)$
 - $L(H_1|r) = w(r|H_1)$

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

ML

- ▶ **Criteriul plauzibilității maxime** ("Maximum Likelihood"): se alege ipoteza cu **cea mai mare plauzibilitate** de a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$

- ▶ "alegem ipoteza cea mai plauzibilă"
- ▶ "se alege ipoteza cu plauzibilitatea mai mare"

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} 1 \quad \equiv$$

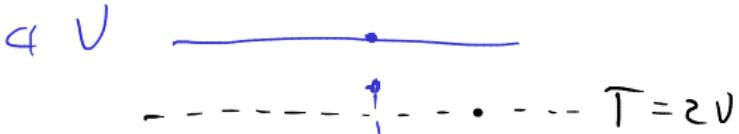


Δ_{01}

- ▶ Se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
- ▶ Se compară raportul de plauzibilitate cu 1

$$\begin{aligned} & (\succeq) \text{Dacă } \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \geq 1 \Rightarrow H_1 \\ & (\supseteq) \text{Dacă } \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} < 1 \Rightarrow H_0 \end{aligned}$$

Exemplu: zgomot gaussian



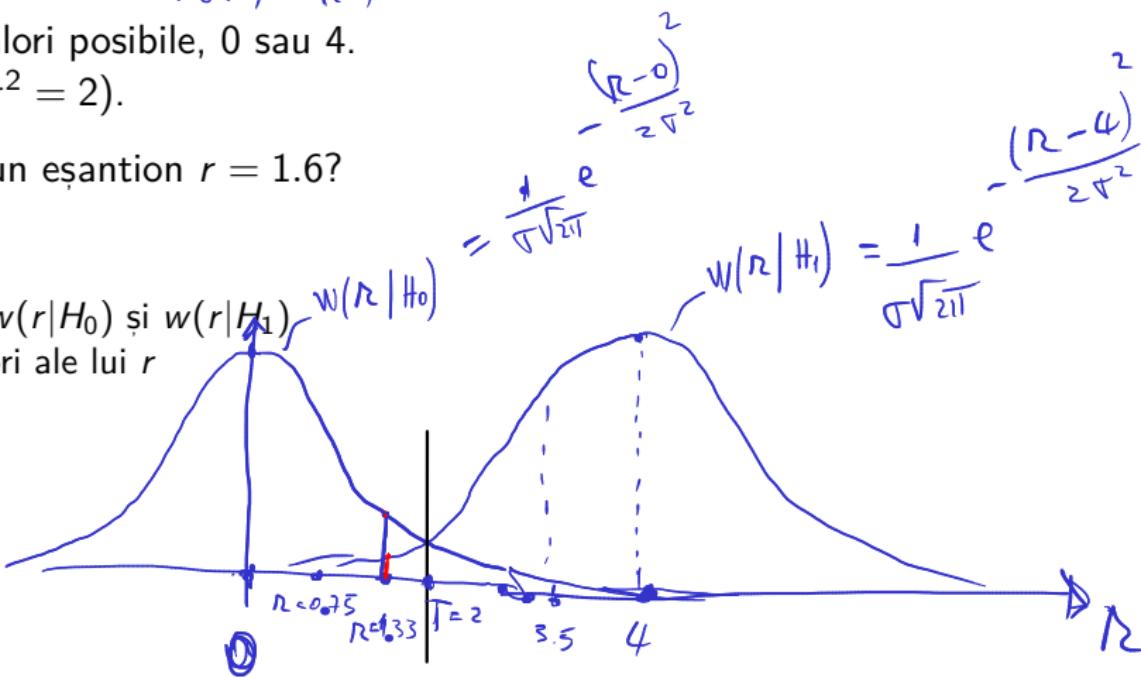
Exemplu (continuare):

- ▶ Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.

- ▶ Care e decizia luată cu criteriul ML, pentru un eşantion $r = 1.6$?

- ▶ La tablă:

- ▶ schită a celor două distribuții conditionate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
- ▶ discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
- ▶ discuție: care este pragul T pentru decizii



Exemplu: Frunze

Din care copac a căzut frunza?



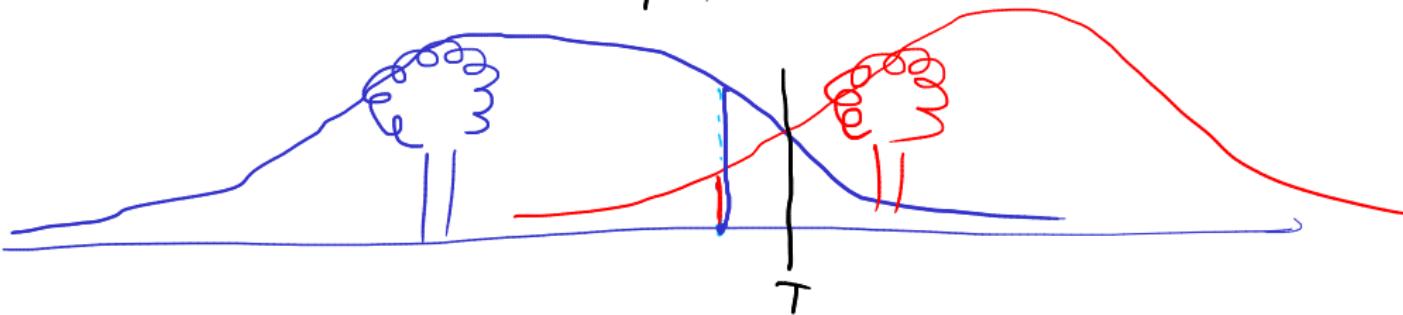
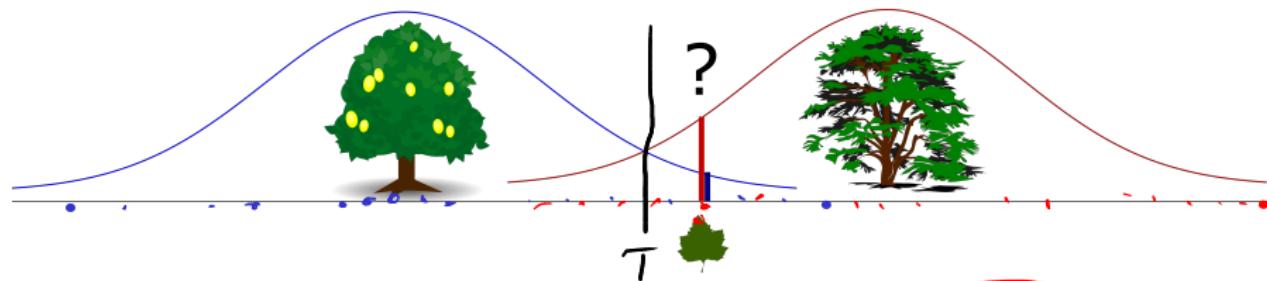
?



Exemplu: Frunze

Vânt
↗

Alegem copacul cu **plauzibilitatea maximă**:



Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

- ▶ zgomot de tip AWGN

- ▶ Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless 1$

- ▶ Pentru distribuția normală, e preferabil să aplicăm **logaritmul natural**
 - ▶ logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
 - ▶ dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$

$$\frac{(R - \Delta_1(t_0))^2}{2\sigma^2} - \frac{(R - \Delta_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \geq 1$$

~~$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e⁻~~ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e⁻ $\frac{(R - \Delta_0(t_0))^2}{2\sigma^2}$ $H_1 \geq H_0$

$$-\frac{R - \Delta_1(t_0)}{2\sigma^2} + \frac{(R - \Delta_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \geq 1$$

$e^{\frac{(R - \Delta_1(t_0))^2}{2\sigma^2} - \frac{(R - \Delta_0(t_0))^2}{2\sigma^2}} \geq 1$

$\frac{(R - \Delta_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(R - \Delta_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \geq 0$ $H_1 \geq H_0$

Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} 0$$

$$(r - \Delta_0)^2 \geq (r - \Delta_1)^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

- ▶ Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

$$\underbrace{|r - \Delta_0|}_{\text{distanța } (r, \Delta_0)} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \underbrace{|r - \Delta_1|}_{\text{distanța } (r, \Delta_1)}$$

- ▶ Notă: $|r - A| = \text{distanța}$ dintre r și A

- ▶ $|r| = \text{distanța de la } r \text{ la } 0$

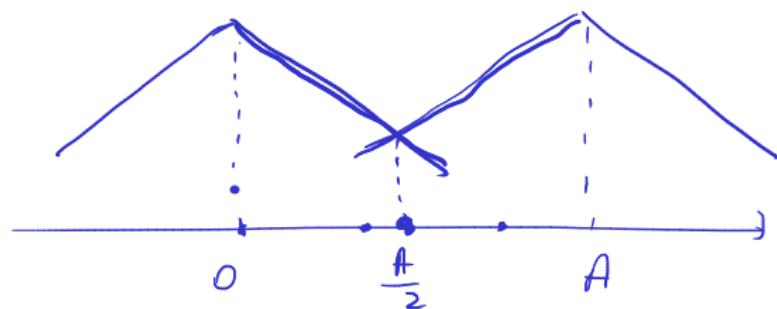
- ▶ Așadar, se alege distanță minimă dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

Criteriul ML pentru zgomot gaussian

- ▶ Criteriul ML pentru zgomot gaussian: ipoteza se alege pe baza **celei mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$

- ▶ principiul **cel mai apropiat vecin** ("nearest neighbor")
- ▶ un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
- ▶ un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** ("minimum distance receiver")

B_0 B_1 A_1
• - .
0 3.5 5



Etape pentru decizia pe baza ML

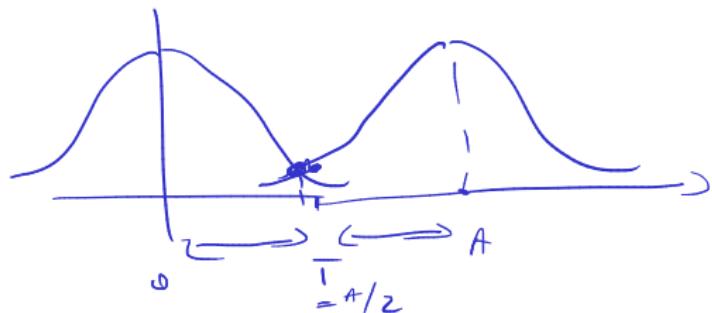
1. Se schitează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

- ▶ Doar dacă zgomotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
 1. Se determină $s_0(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_0
 2. Se determină $s_1(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_1
 3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege **cea mai apropiată** valoare

Decizie pe bază de prag

$$R > T \Rightarrow \text{Decizie } D_1$$
$$R < T \Rightarrow \text{Decizie } D_0$$

- ▶ Alegerea valorii celei mai apropiate = același lucru cu **compararea r cu un prag $T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$**
 - ▶ i.e. dacă cele două valori sunt 0 și 5, luăm o decizie prin compararea lui r cu 2.5
- ▶ La **criteriul ML**, pragul = punctul de intersecție al celor două distribuții condiționate



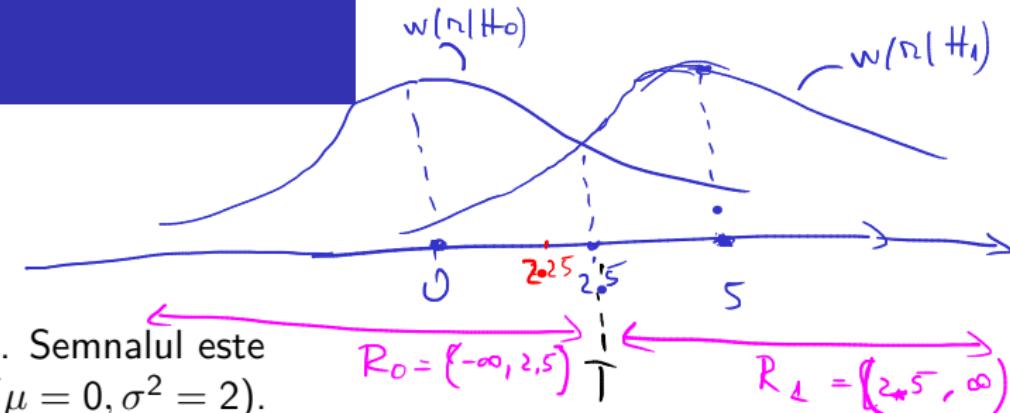
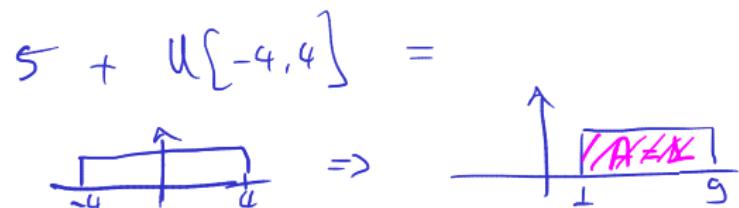
Exercițiu

$$w(r|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(r-5)^2}{4}}$$

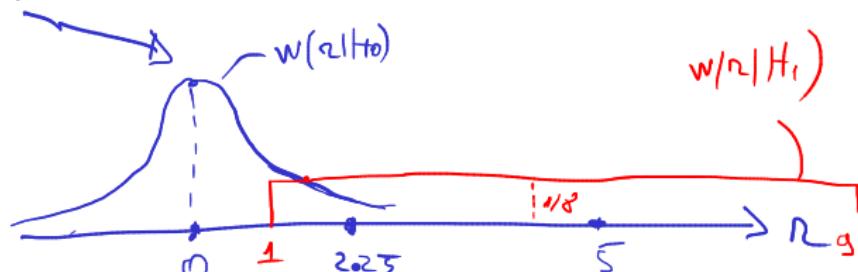
$$w(r|H_0) = \text{_____} \quad // \quad *$$

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$

- Scriți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
- Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
- Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $U[-4, 4]$?
- Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1



$$R < 2.25 \Rightarrow D_0$$



$$w(r|H_1)|_{r=2.25} = 1/8$$

$$w(r|H_0)|_{r=2.25} =$$

- ▶ **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- ▶ Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- ▶ Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- ▶ Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- ▶ Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior
 - ▶ $R_0 = [-\infty, 2.5]$
 - ▶ $R_1 = [2.5, \infty]$

Plauzibilitate vs probabilitate

- ▶ Distincție subtilă între termenii “probabilitate” și “plauzibilitate”
- ▶ Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$ de la exemplul anterior:

$$\text{probabilitate } w(r | H_i) \Downarrow \\ \text{plauzibilitate } L(H_i | r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

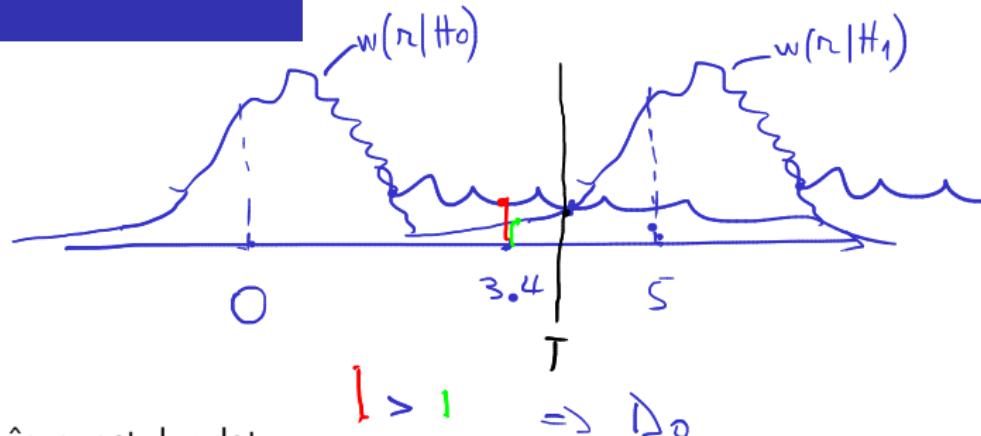
$s_o(t_0)$ } $s_i(t_0)$
 $s_i(t_0)$

- ▶ Care este necunoscută în această expresie?
 - ▶ În general, r
 - ▶ dar în cazul deciziei noastre este i , iar r este cunoscut

- ▶ Pentru aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
 - ▶ dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ , σ , H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r , x) atunci funcția o interpretăm ca densitatea de **probabilitate**
 - ▶ dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r , x), și necunoscuta este un parametru statistic (de ex. μ , σ , i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**

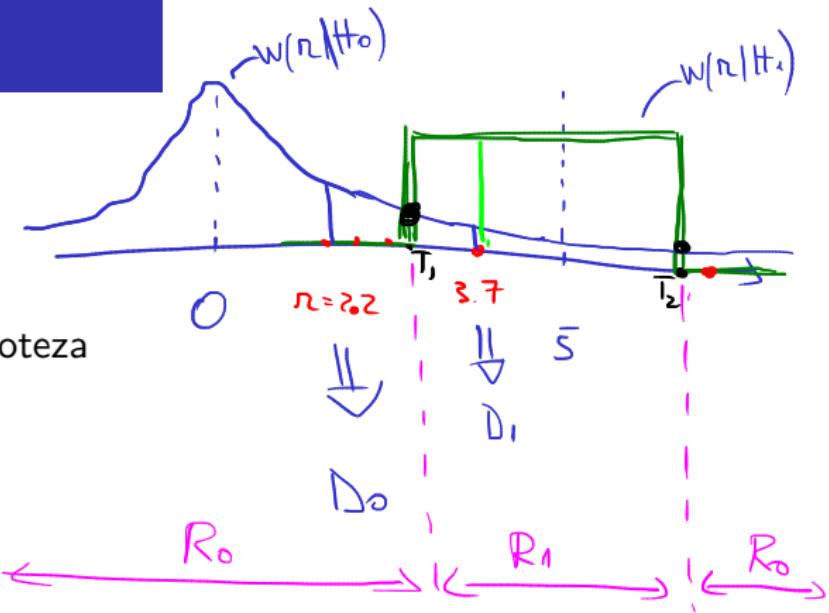
Generalizări

- ▶ Dacă zgomotul are altă distribuție?
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluatează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- ▶ Regiunile de decizie sunt date de punctele de intersecție ale distribuțiilor condiționate
 - ▶ Pot fi mai multe intersectări, în general, deci mai multe praguri

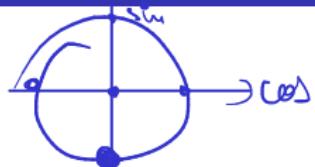


Generalizări

- ▶ Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1 ?
- ▶ Similar:
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluatează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege **cea mai înaltă funcție** $w(r|H_i)$ în punctul r dat



Generalizări



$$H_0: \Delta_0(t) = \cos(2\pi t)$$

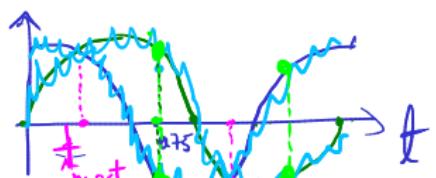
$$H_1: \Delta_1(t) = \sin(2\pi t)$$

- Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?

Nu contează forma semnalelor

Tot ce contează sunt **valorile celor două semnale la momentul de eșantionare t_0** :

- $s_0(t_0)$
- $s_1(t_0)$



Tura zgomot:

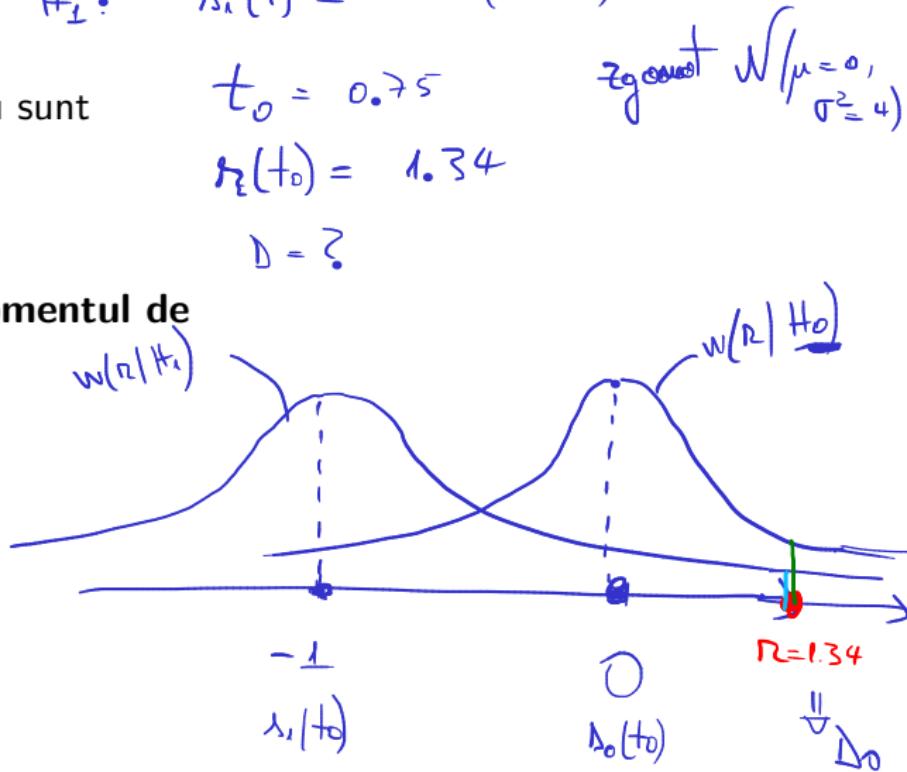
$$H_0: \Delta_0(0.75) = \cos(2\pi \cdot 0.75) = 0$$

$$H_1: \Delta_1(0.75) = \sin(2\pi \cdot 0.75) = -1$$

$$t_0 = 0.75$$

$$\eta(t_0) = 1.34$$

$$D = ?$$

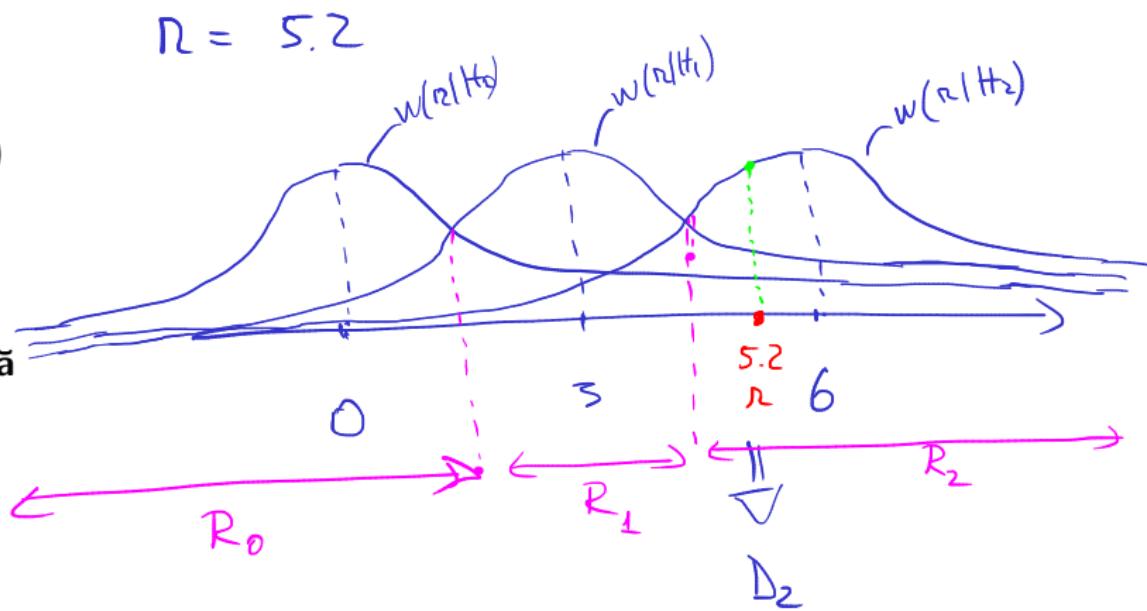


Generalizări

$$\Delta_0 = 0, \Delta_1 = 3, \Delta_2 = 6$$

- Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- Se extinde raționamentul la n ipoteze

- Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots, s_{n-1}(t)$
- Avem n valori diferite $s_0(t_0), \dots, s_{n-1}(t_0)$
- Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
- Se alege distribuția $w(r|H_i)$ cea mai înaltă pentru $r = r(t_0)$ dat



- ▶ Dacă se iau mai multe eșantioane din semnale?
- ▶ Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

Multiple separate detection

- ▶ Într-un proces de comunicație, fiecare detectie/decizie produce valoarea unui bit (mesaj)
- ▶ Se repetă o altă detectie separată pentru bitul (mesajul) următor, și tot așa

- Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare este transmisă timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

4.1

4, 6.6, -5.2, 1.1, 0.3, -1.5, 7, -7, 4.4

Decizii :

\Rightarrow 6 6 -6 2 2 -2 6 -6 6

Probabilități condiționate

$$| H_0 \quad | H_1$$

- Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile

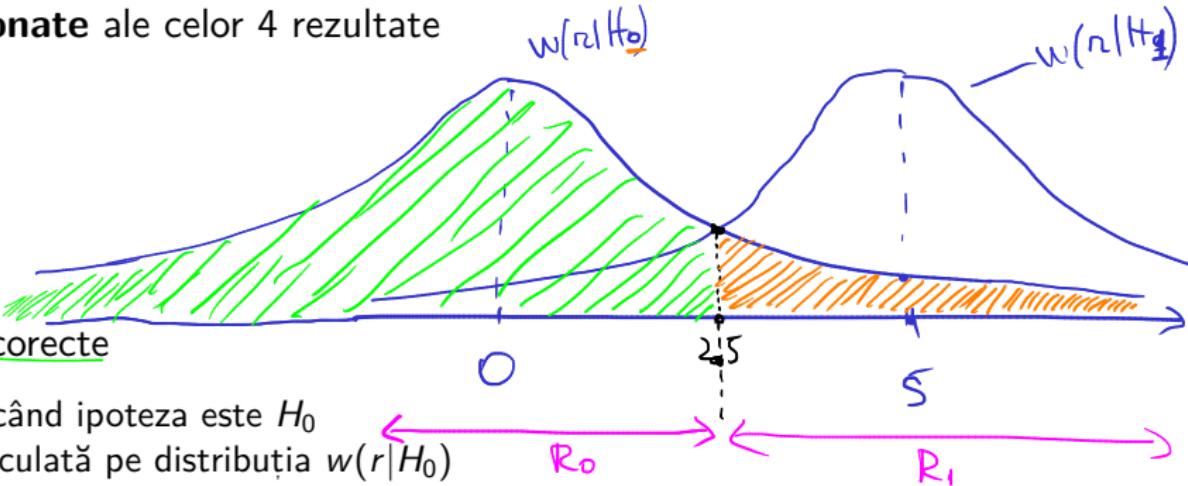
- Fie regiunile de decizie:

- R_0 : dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
- R_1 : dacă $r \in R_1$, decizia este D_1

- Probabilitatea condiționată a rejecției corecte

- = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
- = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0) dr$$



$$\int_{-\infty}^{z_0} w(r|H_0) dr = P(D_0 | H_0)$$

- Probabilitatea condiționată a alarmei false

- = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
- = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0) dr$$

$$\int_{z_0}^{\infty} w(r|H_0) dr = P(D_1 | H_0)$$

$$= P(r > z_0 | H_0)$$

Probabilități condiționate

▶ Probabilitatea condiționată de pierdere

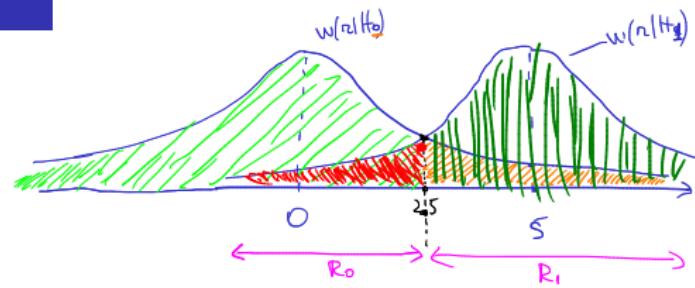
- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1) dx$$

▶ Probabilitatea condiționată a detecției corecte

- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1) dx$$



$$P(D_0 | H_1) = \int_{R_0}^{2.5} w(r|H_1) dr$$

$$P(D_1 | H_1) = \int_{2.5}^{\infty} w(r|H_1) dr$$

- ▶ Relații între probabilitățile condiționate
 - ▶ suma $P(D_0|H_0) + P(D_1|H_0) = 1$ (rejecție corectă + alarmă falsă)
 - ▶ suma $P(D_0|H_1) + P(D_1|H_1) = 1$ (pierdere + detectie corectă)
 - ▶ De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

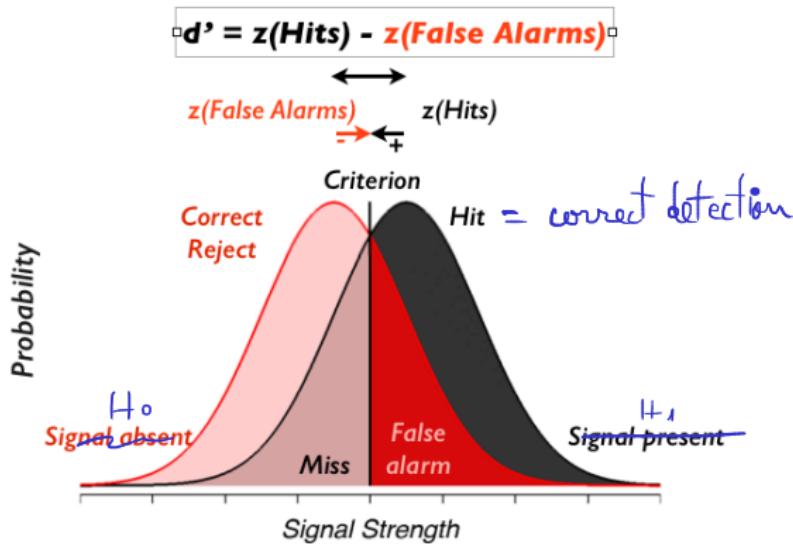


Figure 2: Probabilități condiționate

- ▶ Ignorați textul, contează zonele colorate
- ▶ [sursa: <http://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt>]*

- ▶ Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze
- ▶ Nu includ și probabilitățile **ipotezelor înselor**
 - ▶ adică, $P(H_0)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_0
 - ▶ $P(H_1)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_1
- ▶ Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$
 - ▶ $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **înțiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

Reamintire (TCI): regula lui Bayes

► Reamintire (TCI): regula lui Bayes

$$P(A \cap B) = \boxed{P(B|A)} \cdot P(A)$$

A și B

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

► Interpretare:

- ▶ Probabilitatea $P(A)$ este extrasă afară din din $P(B|A)$
- ▶ $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, şansele ca A chiar să aibă loc
- ▶ Exemplu: $P(\text{gol} | \text{sunt la poartă}) = \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriv?

► La noi:

$$P(D_i \cap H_j) = \boxed{P(D_i|H_j)} \cdot P(H_j)$$

dacă

- ▶ pentru toți i și j (în toate cele 4 cazuri)

Exercițiu

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$w(n|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5.

Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.

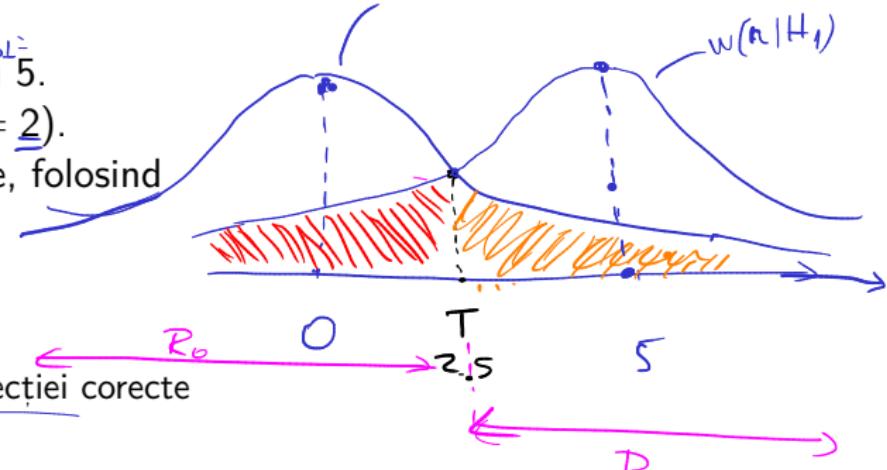
Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilității maxime, folosind un singur eșantion din semnal.

- Calculați probabilitatea condiționată a alarmei false
- Calculați probabilitatea condiționată de pierdere
- Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ și $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculați probabilitatea rejecției corecte și a detectiei corecte (nu cele condiționate)

$$P(D_0 | H_0) = \underbrace{P(D_0 | H_0)}_{\text{ce mai înainte}} \cdot \underbrace{P(H_0)}_{1/3}$$

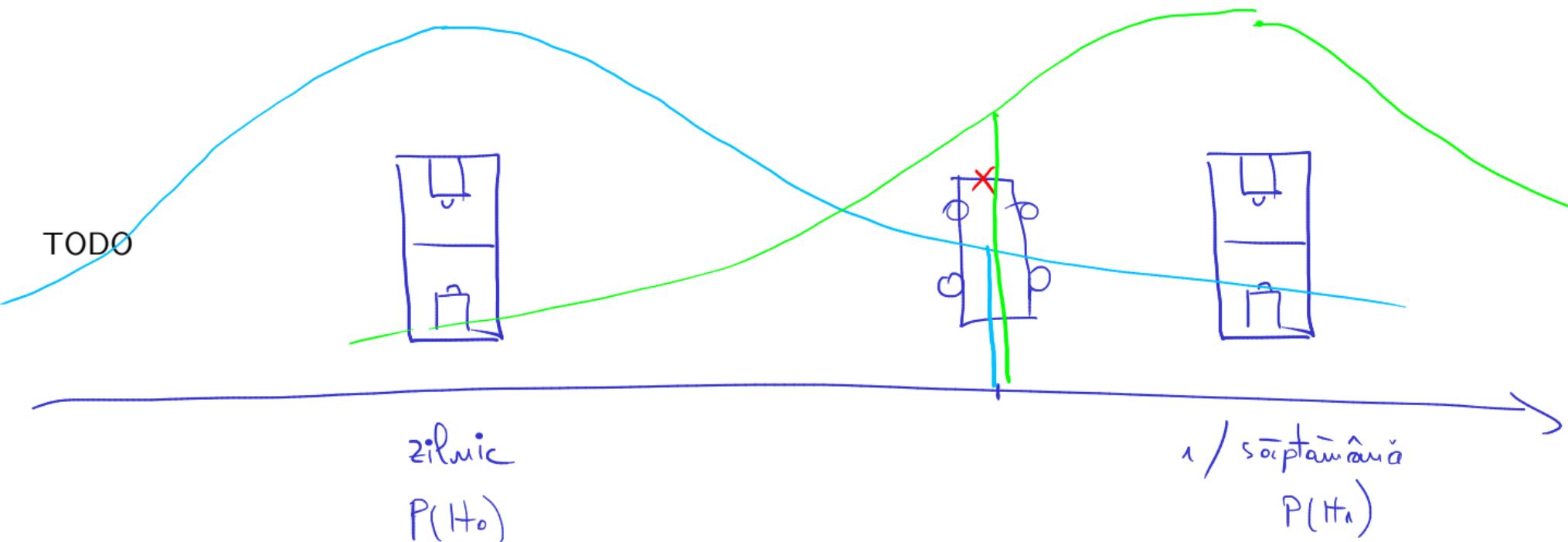
$$\text{a) } P(D_1 | H_0) = \int_{2.5}^{\infty} w(n|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{2.5}^{\infty} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$\text{b) } P(D_0 | H_1) = \int_{-\infty}^{2.5} w(n|H_0) = F(2.5) = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{2.5-\mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{2.5-0}{\sigma\sqrt{2}} \right)$$



- ▶ Criteriul ML compară distribuțiile **condiționate** ale eșantionului observat
 - ▶ condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- ▶ Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 **ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1**
 - ▶ Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- ▶ Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1 , și vice-versa
 - ▶ pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
 - ▶ și de aceea vrem să “favorizăm”/“încurajăm” decizia D_0
- ▶ Avem nevoie de un criteriu mai general . . .

Exemplu: Terenuri de fotbal



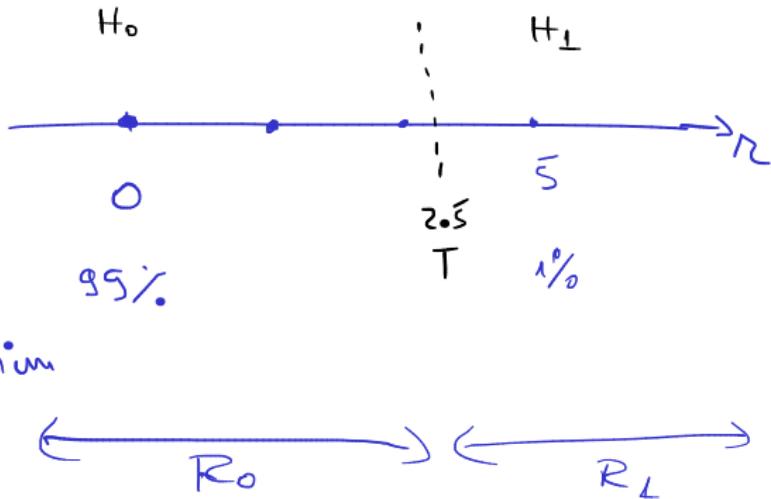
Criteriul probabilității minime de eroare

MPE PME

- ▶ Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- ▶ Se urmărește **minimizarea probabilității totale de eroare**

$$P_e = P_{af} + P_p = \underline{P(D_a \cap H_0)} + \underline{P(D_p \cap H_1)} = \text{vremu minim}$$

- ▶ erori = alarmă falsă și pierdere
- ▶ Trebuie să găsim un nou criteriu
 - ▶ adică, alte regiuni de decizie R_0 și $\underline{R_1}$



Probabilitatea de eroare

- ▶ Probabilitatea unei alarme false este:

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap H_0) &= P(\underline{D_1|H_0}) \cdot P(\underline{H_0}) \\ &= \int_{R_1} w(r|H_0) dx \cdot P(\underline{H_0}) \\ &= \left(1 - \int_{R_0} w(r|H_0) dx\right) \cdot P(\underline{H_0}) \end{aligned}$$

$$\int_{R_0} w(r|H_0) + \int_{R_1} w(r|H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(r|H_0) = 1$$

- ▶ Probabilitatea de pierdere este:

$$\begin{aligned} P(\underline{D_0 \cap H_1}) &= P(\underline{D_0|H_1}) \cdot P(\underline{H_1}) \\ &= \int_{R_0} w(r|H_1) dx \cdot P(\underline{H_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_0 &= [-\infty, \dots, T] \\ R_1 &= [T, \dots, \infty] \end{aligned}$$

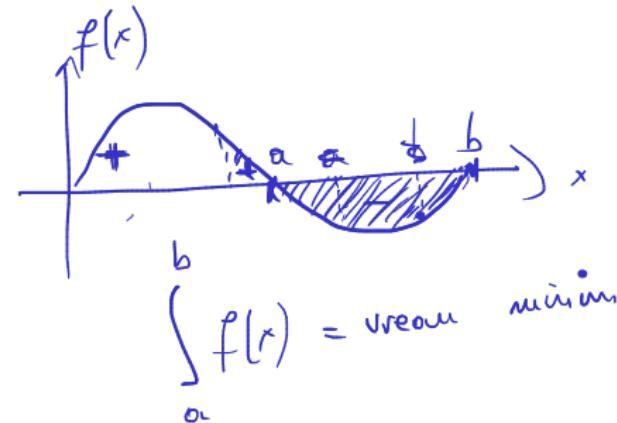
- ▶ Probabilitatea totală a erorilor (suma lor) este:

$$P_e = \underbrace{P(H_0)}_{R_0} + \int_{-\infty}^T [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)] dx = \text{vrem minim}$$

Probabilitatea de eroare minimă

- ▶ Urmărim minimizarea P_e , adică să minimizăm integrala
- ▶ Putem alege R_0 cum dorim, pentru acest scop
- ▶ Pentru a minimiza integrala, se alege $\underline{R_0}$ astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
 - ▶ integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- ▶ Așadar, când $\underline{w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0}$ avem $\underline{r \in R_0}$, adică decizia $\underline{D_0}$
- ▶ Invers, dacă $\underline{w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0}$ avem $\underline{r \in R_1}$, adică decizia $\underline{D_1}$
- ▶ Astfel

$$\underbrace{w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)}_{\substack{\stackrel{H_1}{\geqslant} \\ \stackrel{H_0}{\geqslant}}} \stackrel{H_1}{\geqslant} 0$$
$$\left[\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\geqslant} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right]$$



Criteriul probabilității minime de eroare

$$M.L. \doteq \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\geq} \stackrel{H_0}{1}$$

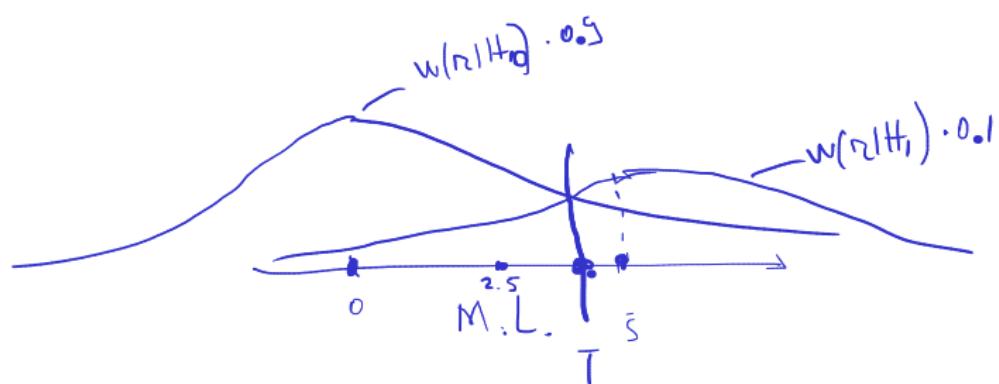
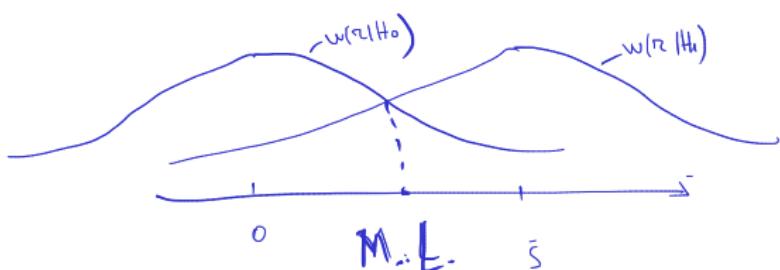
► Criteriul probabilității minime de eroare (MPE):

$$\left[\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\geq} \stackrel{H_0}{P(H_0)} \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{w(r|H_1) \cdot P(H_1)}{w(r|H_0) \cdot P(H_0)} \stackrel{H_1}{\geq} \stackrel{H_0}{1}$$

$$P(H_0) = 0.9 \\ P(H_1) = 0.1$$

► prescurtat MPE (Minimum Probability of Error)



Interpretare

- ▶ Criteriul MPE este o generalizare a criteriului ML, depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
 - ▶ se exprimă tot sub forma unui raport de plauzibilitate
- ▶ Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- ▶ Criteriul ML este un caz particular al MPE pentru for $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

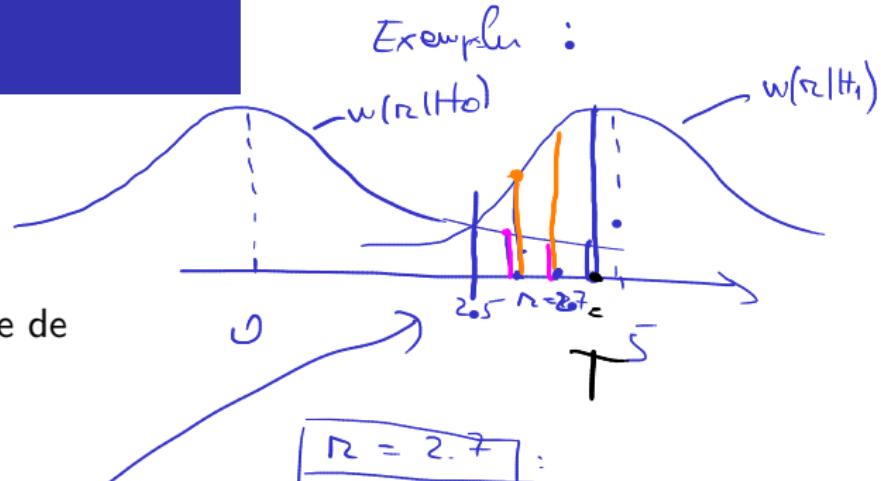
portofoliu = $\frac{w(n | H_1)}{w(n | H_0)}$

≈ 2

H_1

H_0

$$\frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 9$$



M.L. : D_1

M.P.E. :

$$\begin{cases} P(H_0) = 9/10 \\ P(H_1) = 1/10 \end{cases}$$

Decizie ?

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- ▶ Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad w(r|H_0) = e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = e^{\frac{-(r-s_1(t_0))^2 + (r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

| ~~ln 1~~

- ▶ Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lesssim} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \quad | \cdot 2\sigma^2$$

- ▶ Echivalent

$$(r-s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lesssim} (r-s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ sau, dacă se desfac parantezele:

$$r \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\gtrless} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul ML, se compară distanțele (la pătrat):

$$|r - s_0(t_0)|$$

$$|r - s_0(t_0)| \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2$$

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

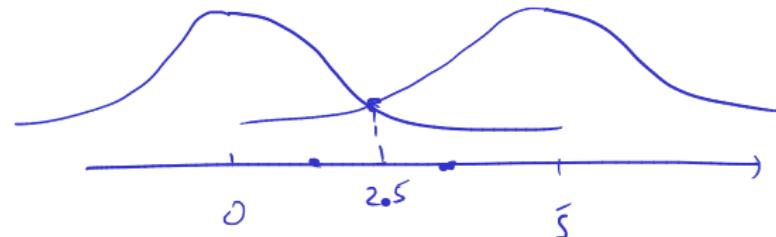
$$\underbrace{(r - s_0(t_0))^2}_{d(r, s_0(t_0))} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \underbrace{(r - s_1(t_0))^2}_{d(r, s_1(t_0))} + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Interpretarea 2: valoarea de prag

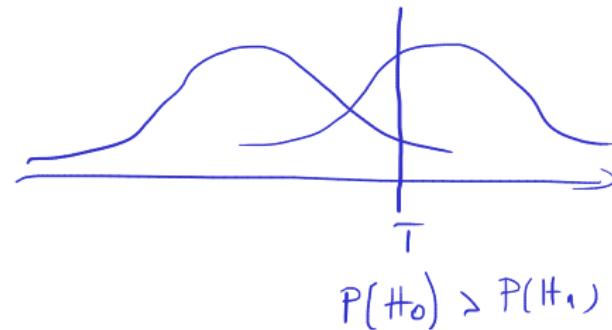
- ▶ La criteriul ML, se compară r cu un prag T

$$r \stackrel{H_1}{\gtrless} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}}_{T} \stackrel{H_0}{\lessgtr}$$



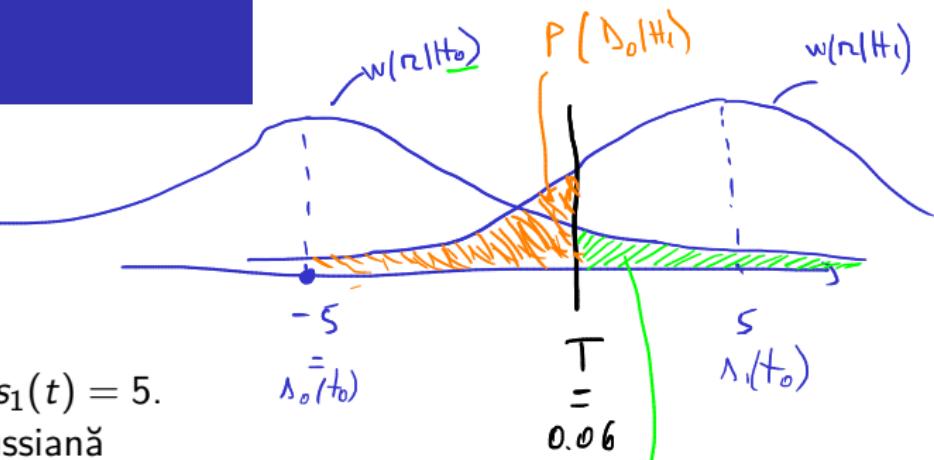
- ▶ La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \stackrel{H_1}{\gtrless} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}}_{T} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$



- ▶ În funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Exerciții



$$\underline{P(H_0)} = 4/5; \quad \underline{P(H_1)} = 1/5$$

► Fie decizia între două semnale constante: $s_0(t) = -5$ și $s_1(t) = 5$.

Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană

$\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r .

- a. Să se găsească regiunile de decizie conform criteriului MPE
- b. Calculați probabilitatea alarmei false și probabilitatea de pierdere
- c. Repetați a) și b) dacă $s_1(t)$ este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?

$$a) \quad T = -\frac{-5 + 5}{2} + \frac{1}{5 - (-5)} \cdot \ln \left(\frac{4/5}{1/5} \right) = 0 + \frac{1}{10} \cdot \ln 4 = 0.06$$

$$R_0 \in (-\infty, 0.06] \quad | \quad R_1 = (0.06, \infty)$$

(oler pe slide-ul precedent)

$$b) \quad P_{\text{af}} = P(D_1 \cap H_0) = P(D_1 | H_0) \cdot P(H_0) = \dots$$

$$P(D_1 | H_0) = \int_{-\infty}^{0.06} w(r | H_0) dr = F(\infty) - F(0.06) = 1 - \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{0.06 + 5}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

Criteriul riscului minim

- ▶ Dacă ne afectează mai mult un anume tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte (pierderi)?
 - ▶ Criteriul MPE tratează toate erorile la fel
 - ▶ Ne trebuie un criteriu mai general
- ▶ Idee: se atribuie **un cost** fiecărui scenariu, apoi se minimizează costul mediu
- ▶ C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
 - ▶ C_{00} = costul unei rejecții corecte
 - ▶ C_{10} = costul unei alarme false
 - ▶ C_{01} = costul unei pierderi
 - ▶ C_{11} = costul unei detecții corecte
- ▶ Ideea de “costuri” și minimizarea costului mediu este general întâlnită
 - ▶ de ex. TCI: codare: “costul” unui mesaj este lungimea cuvântului de cod, vrem să minimizăm costul mediu, adică lungimea medie

Criteriul riscului minim

$$\downarrow P(D_1 \cap H_1) = P(D_1 | H_1) \cdot P(H_1) = P(H_1) \cdot \left(1 - \int_{R_0} w(r | H_1) dr\right)$$

$$\Rightarrow R = \int_{R_0} C_{00} P(H_0) w(r | H_0) dr + C_{10} P(H_0) - \int_{R_0} C_{10} P(H_0) w(r | H_0) dr + \int_{R_0} C_{01} P(H_1) w(r | H_1) dr + C_{11} P(H_1) - \int_{R_0} C_{11} P(H_1) w(r | H_1) dr$$

► Definim riscul = media costurilor

$$R = \underline{C_{00}P(D_0 \cap H_0)} + \underline{C_{10}P(D_1 \cap H_0)} + \underline{C_{01}P(D_0 \cap H_1)} + \underline{C_{11}P(D_1 \cap H_1)}$$

► Criteriul riscului minim: se minimizează riscul R

► adică se minimizează costul mediu

► se mai numește "criteriul costului minim"

$$P(D_0 \cap H_0) = P(D_0 | H_0) \cdot P(H_0) = P(H_0) \cdot \int_{R_0} w(r | H_0) dr$$

$$P(D_1 \cap H_0) = P(D_1 | H_0) \cdot P(H_0) = P(H_0) \cdot \int_{R_1} w(r | H_0) dr = P(H_0) \cdot \left(1 - \int_{R_0} w(r | H_0) dr\right)$$

$$\downarrow P(D_0 \cap H_1) = P(D_0 | H_1) \cdot P(H_1) = P(H_1) \cdot \int_{R_0} w(r | H_1) dr$$

Calcule

$$R = C_{10} P(H_0) + C_{11} P(H_1) + \int \left[(C_{01} - C_{11}) P(H_1) w(r|H_1) - (C_{10} - C_{00}) P(H_0) w(r|H_0) \right] dr = \text{minimum}$$

R_0

- Demonstrație la tablă
 - se folosește regula lui Bayes
- Concluzie: regula de decizie este

$$R_0 : (C_{01} - C_{11}) P(H_1) w(r|H_1) - (C_{10} - C_{00}) P(H_0) w(r|H_0) < 0$$

$$\left[\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11})P(H_1)} \right]$$

\Leftrightarrow

$$\frac{w(r|H_1) \cdot P(H_1) \cdot (C_{01} - C_{11})}{w(r|H_0) \cdot P(H_0) \cdot (C_{10} - C_{00})} \stackrel{\substack{H_1 \\ H_0}}{\gtrless} 1$$

Criteriul riscului minim (MR):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

- prescurtat MR (Minimum Risk)

- ▶ Criteriul MR este o generalizare a MPE (la rândul lui o generalizare a ML)
 - ▶ se exprimă tot printr-un raport de plauzibilitate
- ▶ Atât **probabilitățile** cât și **costurile** pot influența decizia în favoarea uneia sau alteia dintre ipoteze
- ▶ Caz particular: dacă $(C_{10} - C_{00}) = (C_{01} - C_{11})$ MR se reduce la criteriul MPE
 - ▶ de ex.: dacă $\underline{C_{00}} = \underline{C_{11}} = 0$ și $\underline{C_{10}} = \underline{C_{01}}$

$\hat{\ln}$ zgomot gaussian

$$w(r|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - \mu_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - \mu_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

$f_{H_1}(r)$

- Dacă zgomotul este gaussian (normal), la fel ca la celelalte criterii, se aplică logaritmul natural

- Se obține:

→ $(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$

- sau

→ $r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pe lângă probabilități apar și costurile

→
$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

$\underbrace{}_2$ $\underbrace{}_2$

$d(r, s_0(t_0))$ $d(r, s_1(t_0))$

Interpretarea 2: Valoarea de prag

- ▶ La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

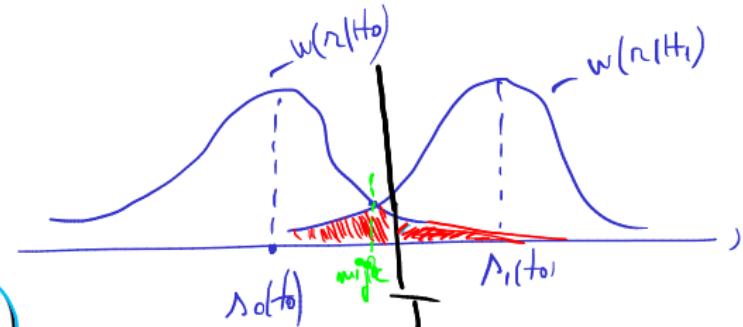
- ▶ În funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pragul este influențat și de costuri

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

mijloc T_{ML}

> 1

> 0



probabil

- ▶ Criteriul MR împinge decizia înspre **minimizarea scenariilor cu cost ridicat**
- ▶ Exemplu: din ecuații:
 - ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{01} crește, iar celealte rămân la fel?
 - ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{10} crește, iar celealte rămân la fel?
 - ▶ ce se întâmplă dacă ambele costuri C_{01} și C_{10} cresc, iar celealte rămân la fel?

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

- ▶ Criteriile ML, MPE și MR au toate forma următoare

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ pentru ML: $K = 1$
- ▶ pentru MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ pentru MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

În zgomot gaussian, criteriile se reduc la:

- Compararea pătratului distanțelor:

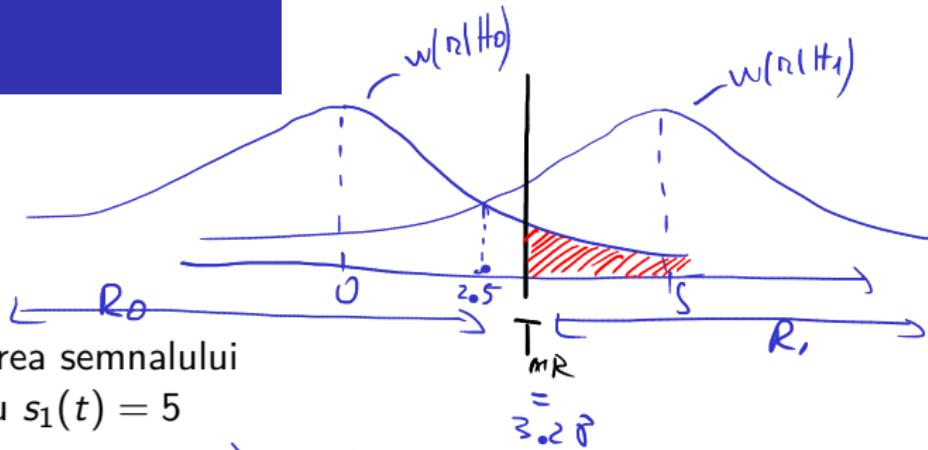
$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \underbrace{(r - s_0(t_0))^2}_{d(r, \Delta_0)^2} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \underbrace{(r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln(K)}_{d(r, \Delta_1)^2}$$

- Compararea eșantionului r cu un prag T :

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)}_T$$



Exercițiu



- Un sistem *airbag* detectează un accident prin eșantionarea semnalului de la un senzor cu 2 valori posibile: $s_0(t) = 0$ (OK) sau $s_1(t) = 5$ (accident).

► Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.

► Se ia un singur eșantion din semnal.

► Costurile scenariilor sunt: $C_{00} = 0$, $C_{01} = 100$, $C_{10} = 10$, $C_{11} = -100$

- Găsiți regiunile de decizie R_0 și R_1 .

b). $P(D_1 | H_0) = ?$

$$T_{MR} = \frac{0 + 5}{2} + \frac{1}{5 - 0} \cdot \ln \left(\frac{(10 - 0) \cdot 0.999}{(100 + 100) \cdot 0.001} \right) = 3.28 \Rightarrow$$

b). $w(r|H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} w(r|H_0) dr = F(\infty) - F(3.28) = \dots$

$$R_0 = (-\infty, 3.28)$$

$$R_1 = (3.28, \infty)$$

Criteriul Neyman-Pearson

- ▶ Un criteriu mai general decât toate cele de până acum
- ▶ Criteriul Neyman-Pearson: se maximizează probabilitatea de detectie corectă
 $(P(D_1 \cap H_1))$ păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată
 $(P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda)$ \Rightarrow se deduce pragul
 - ▶ Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$
- ▶ Criteriile ML, MPE și MR sunt cazuri particulare ale Neyman-Pearson, pentru diverse valori ale λ .

Exercițiu

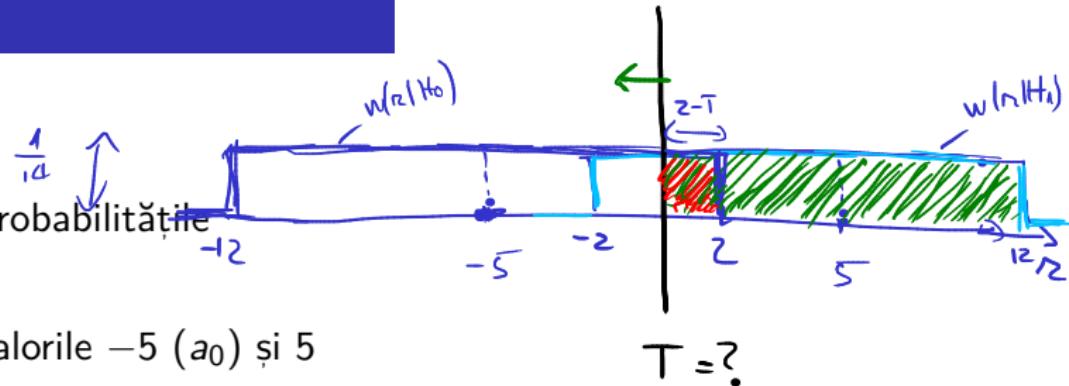
- O sursă de informație produce două mesaje cu probabilități $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție uniformă $U[-7, 7]$.
- Receptorul ia un singur eșantion r .

a. Găsiți regiunile de decizie conform criteriului Neyman-Pearson, pentru $P(D_1 \cap H_1) = P_{fa} \leq 10^{-2}$

b. Care este probabilitatea de detectie corectă?

$$\text{||||} = (2-T) \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow 2-T = \frac{42}{2} \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cdot 10^{-2} = T \Rightarrow T = 1.79$$



$$P(D_1 \cap H_1) = \underbrace{P(D_1 | H_1)}_{\text{||||}} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{1/3}$$

$$P(D_1 \cap H_0) = \underbrace{P(D_1 | H_0)}_{\text{----}} \cdot \underbrace{P(H_0)}_{2/3} \leq b^2$$

$$P(D_1 | H_0) \leq \frac{3}{2} \cdot 10^{-2}$$

Aplicație: Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Aplicație: transmisie binară cu semnale constante (de ex. nivele constante de tensiune)
- ▶ Două modalități frecvent întâlnite:
 - ▶ Semnal unipolar: o valoare este 0, cealaltă este nenulă
 - ▶ $s_0(t) = 0, s_1(t) = A$
 - ▶ Semnal diferențial: două valori nenele cu semne contrare, aceeași valoare absolută
 - ▶ $s_0(t) = -\frac{A}{2}, s_1(t) = \frac{A}{2}$
- ▶ Care metodă este mai bună?

Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Pentru că există aceeași diferență între nivele, performanțele deciziei sunt identice
- ▶ Dar puterea medie a semnalelor diferă
- ▶ Pentru semnale diferențiale: $P = \left(\pm \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$
- ▶ Pentru semnale unipolare: $P = P(H_0) \cdot 0 + P(H_1)(A)^2 = \frac{A^2}{2}$
 - ▶ presupunând probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Semnalul diferențial necesită putere la jumătate față de cel unipolar (mai bine)

Sumar: criterii de decizie

- ▶ Am văzut: decizie între două semnale, bazată pe 1 eșantion
- ▶ Toate criteriile au la bază raportul de plauzibilitate

$$\left. \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \right|_{H_1} \gtrless K$$

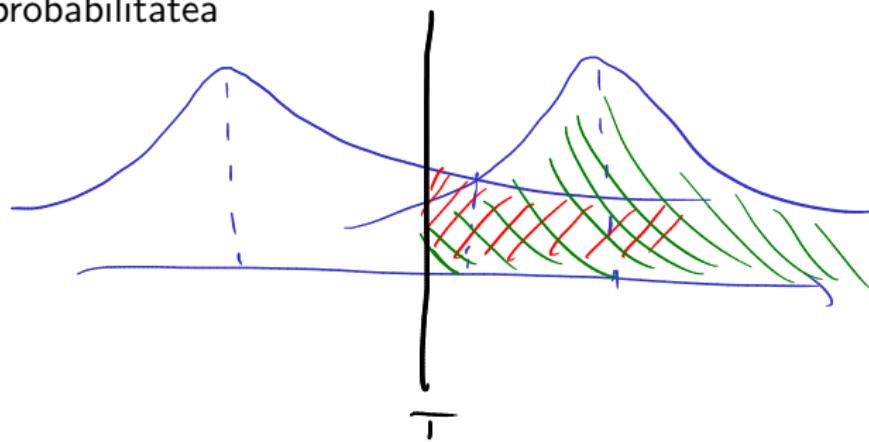
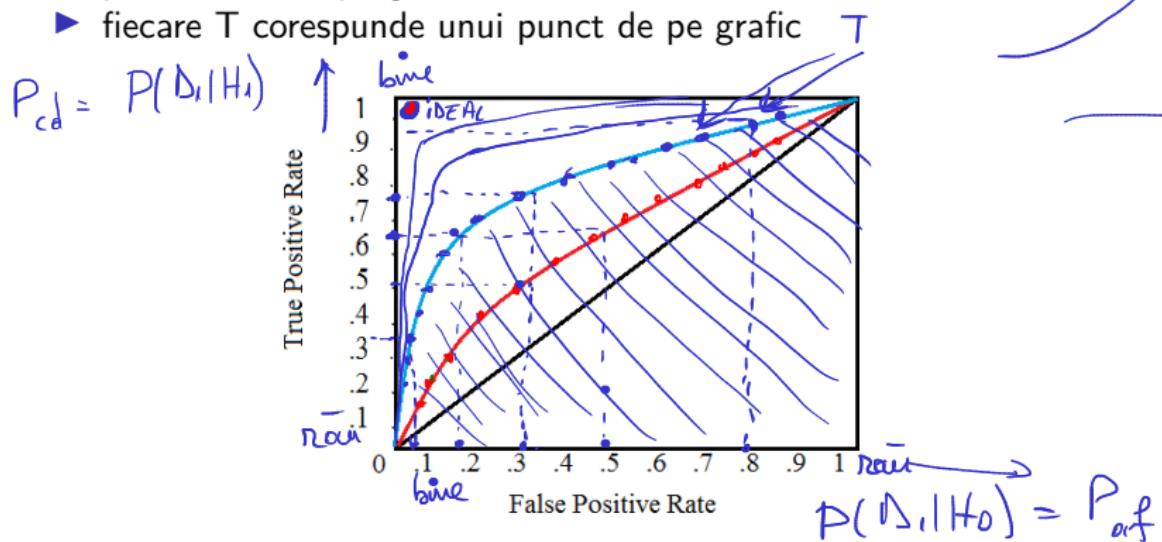
și • Neyman Pearson

- ▶ Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K
- ▶ În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni de decizie
 - ▶ regiunea R_0 : dacă r este aici, se decide D_0
 - ▶ regiunea R_1 : dacă r este aici, se decide D_1
- ▶ Pentru zgomot gaussian, granița între regiuni (valoarea de prag) este:

$$T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)$$

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **“Caracteristica de operare a receptorului”** (“**Receiver Operating Characteristic**”, **ROC**)
- ▶ Reprezintă probabilitatea $P_{cd} = P(D_1|H_1)$ în funcție de probabilitatea $P_{af} = P(D_1|H_0)$
 - ▶ pentru diferite praguri T
 - ▶ fiecare T corespunde unui punct de pe grafic



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Există întotdeauna un **compromis** între P_d (bun) și $P_{fa}(rău)$
 - ▶ creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
 - ▶ pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- ▶ Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
 - ▶ dar întotdeauna e vorba de un compromis
- ▶ O măsură a performanței globale este **Area Under the Curve (AUC)**
 - ▶ indiferent de alegerea unui prag sau a altuia

Caracteristica Precision vs Recall

- ▶ Un grafic similar este cel de **Precision vs Recall**

- ▶ **Precision** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_1 \cap H_0)}$

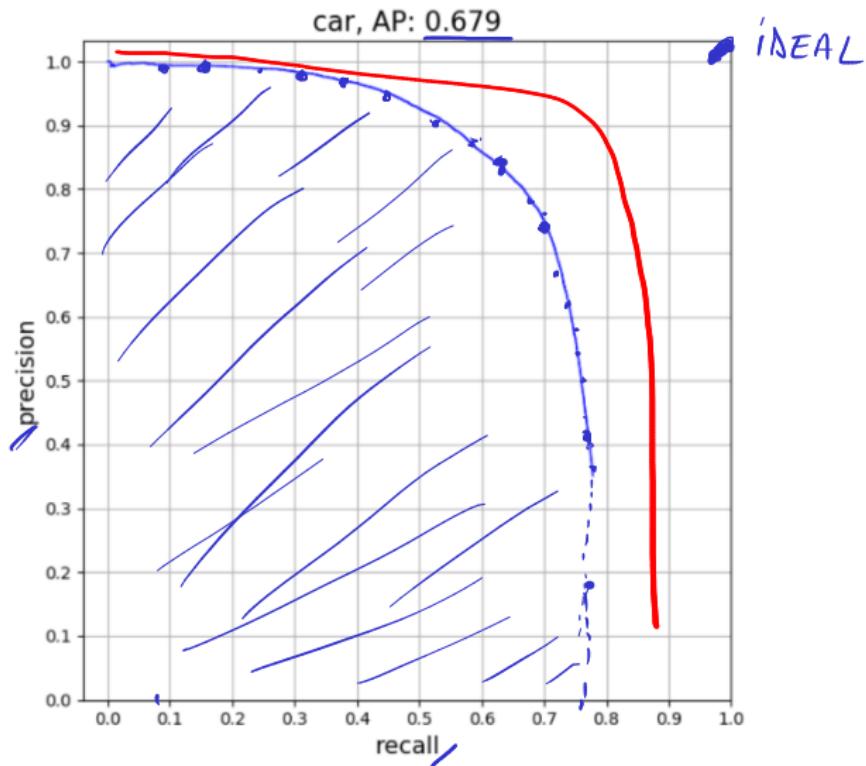
- ▶ = True Positives / (True Positives + False Positives)

- ▶ **Recall** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_0 \cap H_1)} = P(D_1 | H_1)$

- ▶ = True Positives / (True Positives + False Negatives)

Caracteristica Precision vs Recall

Exemplu de grafic Precision vs Recall dintr-o aplicație practică



Caracteristica Precision vs Recall

Aplicația pentru care este obținut graficul precedent:



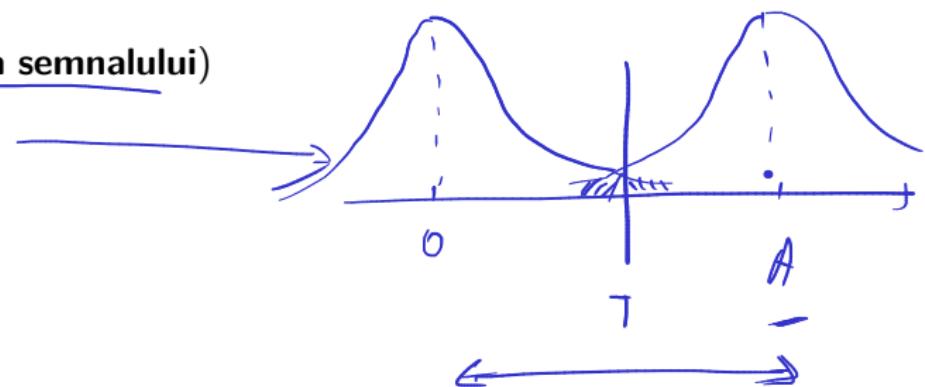
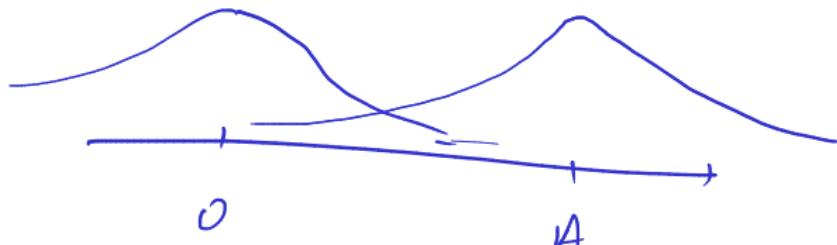
Raport Semnal-Zgomot

- ▶ Cum putem îmbunătăți performanțele de detecție?

- ▶ i.e. creșterea P_d pentru același P_{af}
- ▶ independent de alegerea unui prag sau a altuia

- ▶ Două soluții:

- ▶ Creșterea diferenței dintre $s_0(t)$ și $s_1(t)$ (se crește puterea semnalului)
- ▶ Scăderea zgromotului (se scade puterea zgromotului)
- ▶ i.e. se crește raportul Semnal-Zgomot



- ▶ Următoarele trei slide-uri nu se cer pentru examenul 2020-2021 (până la Raportul semnal zgromot).

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
 - ▶ Sau, echivalent, considerăm doar probabilități condiționate
- ▶ Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned}P_d &= P(D_1|H_1) \\&= \int_T^{\infty} w(r|H_1) \\&= (F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned}P_{fa} &= P(D_1|H_0) \\&= \int_T^{\infty} w(r|H_0) \\&= (F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

- ▶ Rezultă $\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa})$,
- ▶ Și: $\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa}) + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Înlocuind în P_d , obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- Fie un scenariu simplu:

- $s_0(t_0) = 0$
- $s_1(t_0) = A = \text{constant}$

- Obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

SNR

Raportul semnal zgomot

Signal to Noise Ratio

- ▶ **Raportul semnal zgomot (SNR)** = $\frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- ▶ Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie = $\overline{X^2}$
 - ▶ Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
 - ▶ Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- ▶ În cazul nostru, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \sqrt{\text{SNR}} \right)$$

- ▶ Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
 - ▶ Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- ▶ Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
 - ▶ SNR mare: performanță bună
 - ▶ SNR mic: performanță slabă

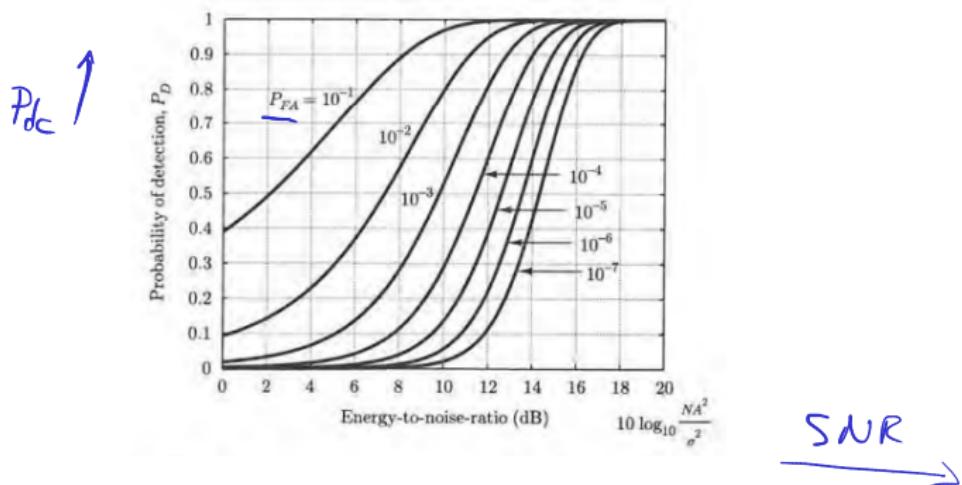
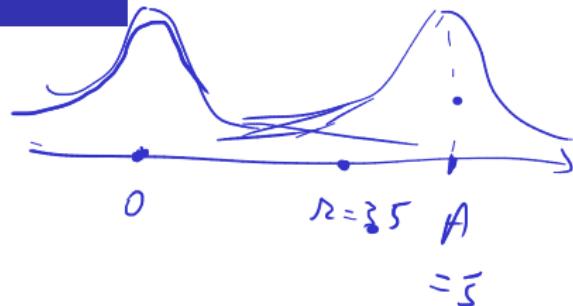


Figure 6: Performanțele detectiei depend de SNR

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

Alte aplicații ale teoriei deciziei

- ▶ Se pot utiliza aceste criterii de decizie în alte aplicații?
 - ▶ nu pentru a decide între semnale, ci în alte scopuri
- ▶ Matematic, problema se pune sub forma următoare:
 - ▶ avem 2 (sau mai multe) distribuții posibile
 - ▶ avem 1 valoare observată
 - ▶ determinăm cea mai plauzibilă distribuție, pe baza valorii observate
- ▶ În acest caz particular, decidem între două semnale
- ▶ Dar acest model matematic se poate aplica și în alte contexte:
 - ▶ medicină: un semnal ECG indică o boală sau nu?
 - ▶ business: va cumpăra clientul un produs, sau nu?
 - ▶ De obicei se folosesc mai multe eșantioane, dar principiul matematic este același



Exemplu (pur imaginar):

- ▶ O persoană sănătoasă cu greutatea $= X$ kg are concentrația de trombocite pe ml de sânge distribuită aproximativ $\mathcal{N}(\mu = 10 \cdot X, \sigma^2 = 20)$.
- ▶ O persoană suferind de boala B are o valoare mult mai scăzută, distribuită aproximativ $\mathcal{N}(100, \sigma^2 = 10)$.
- ▶ În urma analizelor de laborator, ai obținut valoarea $r = 255$. Greuata ta este 70 kg.
- ▶ Decideți: sănătos sau nu?

II.3 Detectia semnalelor cu mai multe esantioane

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Se transmite un semnal $s(t)$
 - ▶ Există **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul original este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ H_1 : semnalul original este $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ Receptorul poate lua **două decizii**:
 - ▶ D_0 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ Există 4 scenarii posibile

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot (necunoscut)
 - ▶ Se recepționează un semnal $\underline{r(t)} = \underline{s(t)} + \underline{n(t)}$
- ▶ Se iau N eșantioane din $r(t)$, nu doar 1
 - ▶ Fiecare eșantion $\underline{r_i} = \underline{r(t_i)}$ se ia la momentul t_i
- ▶ Eșantioanele formează **vectorul de eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

↑
bold = vector

- ▶ Fiecare eșantion r_i este o **variabilă aleatoare**
 - ▶ $r(t_i) = \underline{s(t_i)} + \underline{n(t_i)} = \text{constantă} + \text{o v.a.}$
- ▶ Vectorul \mathbf{r} reprezintă un set de N v.a. dintr-un proces aleator
- ▶ Considerând întreg vectorul \mathbf{r} , valorile vectorului \mathbf{r} sunt descrise de distribuții de ordin N
- ▶ În ipoteza H_0 :

$$w_N(\mathbf{r}|H_0) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N | H_0)$$

[r]

- ▶ În ipoteza H_1 :

$$w_N(\mathbf{r}|H_1) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N | H_1)$$

{ r }

- ▶ Se aplică **aceleași criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eșantion

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K \quad K = \begin{cases} 1, & \text{ML.} \\ \frac{P(H_0)}{P(H_1)}, & \text{MPE.} \\ \frac{(C_{10} - C_{00})P(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) \cdot P(H_1)}, & \text{MR.} \end{cases}$$

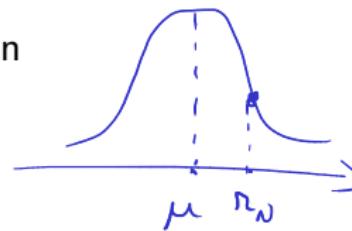
▶ Observații

- ▶ \mathbf{r} este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eșantioanelor
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_1
 - ▶ valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
-
- ▶ Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
 - ▶ identic ca la 1 eșantion, doar că acum datele = mai multe eșantioane

Descompunere

- ▶ Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt independente
- ▶ În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot \dots \cdot w(r_N|H_j)$$



- ▶ de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9] =$ plauzibilitatea obținerii lui 5.1 \times plauzibilitatea obținerii lui 4.7 \times plauzibilitatea obținerii lui 4.9
- ▶ Funcțiile $w(r_i|H_i)$ sunt distribuțiile condiționate ale fiecărui eșantion
 - ▶ de care am mai văzut deja

- ▶ Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \left| \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \right|_{H_0}^{H_1} \geq K$$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al unui vector de eșantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eșantion
- ▶ **Se înmulțesc** rapoartele de plauzibilitate ale fiecărui eșantion în parte, și se aplică criteriile asupra rezultatului final

- ▶ Toate criteriile de decizie pot fi scrise astfel:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ Valoarea lui K se alege ca pentru 1 eșantion:

- ▶ criteriul ML: $K = 1$
- ▶ criteriul MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ criteriul MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Caz particular: AWGN

- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise” = Zgomot alb, gaussian, aditiv

- ▶ În ipoteza H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ În ipoteza H_0 : $w(r_i|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\sum \frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\sum \frac{(r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2 - \sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Criterii de decizie pentru AWGN

- Raportul de plauzibilitate global se compară cu K :

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = e^{\frac{\sum(r_i - s_0(t_i))^2 - \sum(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} K$$

| ln()

- Se aplică logaritmul natural, obținându-se:



$$\boxed{\sum_i (r_i - s_0(t_i))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \sum_i (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)}$$

$d(r, s_0)^2$

$d(r, s_1)^2$

termen
suplimentare dep. de K

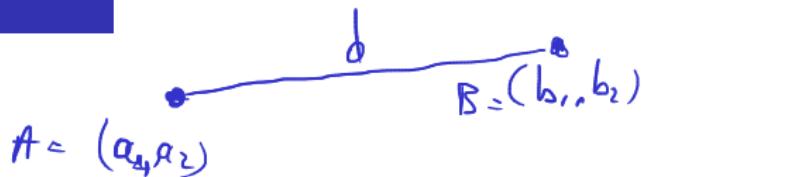
Interpretarea 1: distanță geometrică

- ▶ Sumele reprezintă **distanță geometrică** la pătrat:

$$\sum (r_i - s_1(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_1(t))^2$$

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_0(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_0(t))^2$$

- ▶ distanță între vectorul observat \mathbf{r} și semnalele originale $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$
- ▶ vectori cu N eșantioane \Rightarrow distanță între vectori de dimensiune N
- ▶ Totul se reduce la a compara distanțele



$$A = (a_1, a_2)$$

$$B = (b_1, b_2)$$

$$d = d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$B = (b_1, b_2, b_3)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Interpretarea 1: distanță geometrică

- ▶ Criteriul Maximum Likelihood:

- ▶ $K = 1, \ln(K) = 0$
- ▶ se alege **distanța minimă** între \mathbf{r} și vectorii $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$)
- ▶ de unde și numele “receptor de distanță minimă”

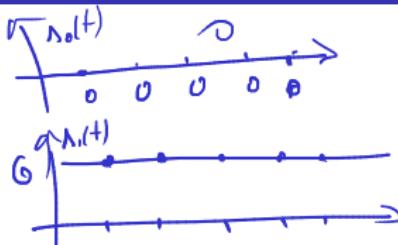
- ▶ Criteriul Minimum Probability of Error:

- ▶ $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Apare un termen suplimentar, în favoarea ipotezei mai probabile

- ▶ Criteriul Minimum Risk:

- ▶ $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$
- ▶ Termenul suplimentar depinde și de probabilități, și de costuri

Exercițiu



Exercițiu:

- Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1).

Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $[1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8]$.

- Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
- Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
- Ce decizie se ia conform criteriului roscului minim. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?

$$d(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}_0)^2 = (1.1 - 0)^2 + (4.4 - 0)^2 + 3.7^2 + 4.1^2 + 3.8^2 = 65.51$$

$$d(\mathbf{r}_0, \mathbf{A}_1)^2 = (1.1 - 6)^2 + (4.4 - 6)^2 + (3.7 - 6)^2 + (4.1 - 6)^2 + (3.8 - 6)^2 = 40.3$$

$$\rightarrow \mathbf{r}_0 = [1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8]$$

$$\rightarrow \mathbf{A}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{A}_1 = [6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6]$$

$$\frac{2\sqrt{2} \ln(2)}{0}$$

$$\rightarrow 2 \cdot 1 \cdot \ln 2 = 1.38$$

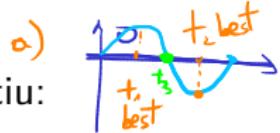
$$\rightarrow \dots$$

a) $65.51 > 40.3$ \textcircled{H}_1
 \textcircled{D}_L

b) $65.51 > 40.3 + 1.38$ \textcircled{H}_1

c) $65.51 \geq 40.3 + \dots$ \textcircled{H}_0

Alt exercițiu



Alt exercițiu:

$$\Delta_0 = 0$$

$$\Delta_1(t) \quad f = 1$$



- ▶ Fie detectia unui semnal $s(t) = 3 \sin(2\pi ft)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent ($s_0(t) = 0$, ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.

- Care sunt cele mai bune momente de esantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
- Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime?
- Dacă se folosește criteriul probabilității minime de eroare, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
- Dacă se folosește criteriul riscului minim, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?
- Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detectia?

b).

$$\rightarrow R = \begin{bmatrix} 1.1 & , & 4.4 \end{bmatrix}$$

$$t_1 = \frac{0.125}{f} \quad t_2 = \frac{0.625}{f}$$

$$\rightarrow \Delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta_1 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1(t_1) = 3 \cdot \sin \left(2\pi f \cdot \frac{0.125}{f} \right) = \frac{3 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

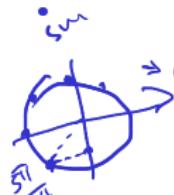
$$\Delta_1(t_2) = 3 \cdot \sin \left(2\pi f \cdot \frac{0.625}{f} \right) =$$

$$= 3 \cdot \sin \left(1.25\pi \right)$$

$$= 3 \cdot \sin \left(10 \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{d} \left(\frac{\Delta_1 \Delta_0}{\Delta_1 + \Delta_0} \right)^2 =$$



Interpretarea 2: produs scalar

- Dacă se descompun parantezele:

$$\sum_{H_0} (r_i - s_0(t_i))^2 \stackrel{H_1}{\gtrless} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Se obține:

$$\begin{aligned} \cancel{\sum (r_i)^2} + \sum s_0(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_0(t_i) &\stackrel{H_1}{\gtrless} \cancel{\sum (r_i)^2} + \\ &+ \sum s_1(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_1(t_i) + 2\sigma^2 \ln(K) \end{aligned}$$

$$\sum_i r_i \cdot s_1(t_i)$$

- Echivalent cu:

$$\boxed{\sum_i r_i s_1(t_i) - \frac{\sum (s_1(t_i))^2}{2} \stackrel{H_1}{\gtrless} \sum_i r_i s_0(t_i) - \frac{\sum (s_0(t_i))^2}{2} + \sigma^2 \ln(K)}$$

Interpretarea 2: produs scalar

- Algebră: produsul scalar al vectorilor **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

scrie

$\langle a, b \rangle$

- $\sum r_i s_1(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului
 $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu $\mathbf{s}_1(\mathbf{t}_i) = [s_1(t_1), s_1(t_2), \dots, s_1(t_N)]$
- $\sum r_i s_0(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului
 $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu $\mathbf{s}_0(\mathbf{t}_i) = [s_0(t_1), s_0(t_2), \dots, s_0(t_N)]$
- $\sum (s_1(t_i))^2 = \sum s_1(t_i) \cdot s_1(t_i) = \langle \mathbf{s}_1(\mathbf{t}), \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle = E_1$ este energia
vectorului $s_1(t)$
- $\sum (s_0(t_i))^2 = \sum s_0(t_i) \cdot s_0(t_i) = \langle \mathbf{s}_0(\mathbf{t}), \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle = E_0$ este energia
vectorului $s_0(t)$

Interpretarea 2: produs scalar

2 geometrii gaussiane

- Decizia se poate rescrise sub forma:

$$\underbrace{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2}}_{H_1} \gtrless \underbrace{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2}}_{H_0} + \underbrace{\sigma^2 \ln(K)}_{\text{termen suplimentar}}$$

- Interpretare: **comparăm produsele scalare**

- se scad energiile semnalelor, pentru o comparație corectă
- există de asemenea termenul care depinde de criteriul ales

► Caz particular:

- Dacă cele două semnale au energii egale:

$$E_1 = \sum s_1(t_i)^2 = E_0 = \sum s_0(t_i)^2$$

- Exemple:

- modulație BPSK: $s_1 = A \cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A \cos(2\pi ft)$
- modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A \cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$

- Atunci formula se simplifică:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle + \sigma^2 \ln(K)$$

- ▶ În domeniul prelucrărilor de semnale, produsul scalar măsoară **similitudinea** a două semnale
- ▶ Interpretare: verificăm dacă vectorul eșantioanelor **r** este **mai asemănător** cu $s_1(t)$ sau cu $s_0(t)$
 - ▶ Se alege cel mai similar cu **r**
 - ▶ Se scad și energiile semnalelor (necesar d.p.d.v. matematic)
- ▶ **Produsul scalar** a doi vectori **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

Implementare cu circuite de corelare

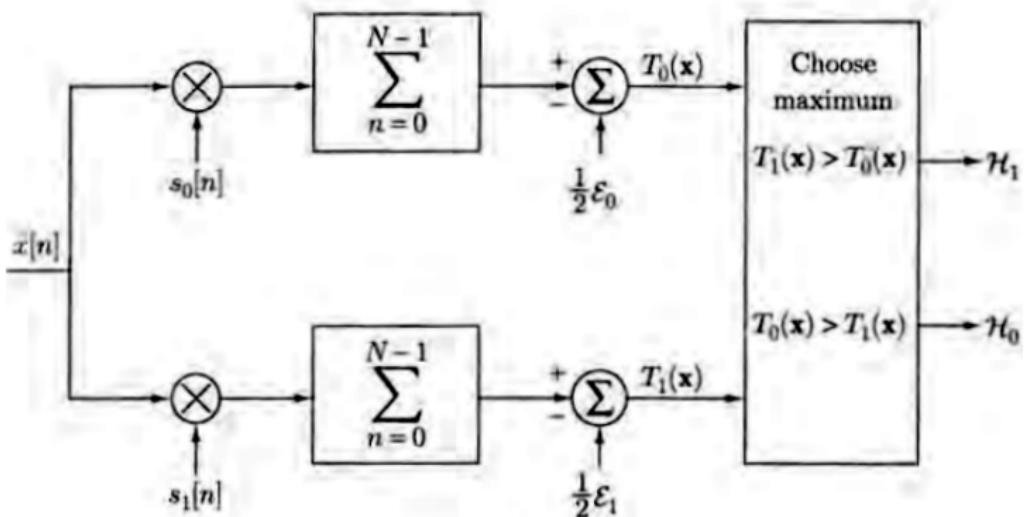


Figure 7: Decizie între două semnale

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

- ▶ Cum se calculează produsul scalar a două semnale $r[n]$ și $s[n]$ de lungime N ?

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \sum r_i s(t_i)$$

- ▶ Fie $h[n]$ semnalul $h[n]$ **oglindit**

- ▶ Începe la momentul 0, durează până la momentul $N - 1$, dar este oglindit

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ Exemplu:

- ▶ dacă $s[n] = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$
- ▶ atunci $h[n] = s[N - 1 - n] = [6, 5, 4, 3, 2, 1]$

- ▶ Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n - k] = \sum_k r[k]h[N - 1 - n + k]$$

- ▶ Rezultatul convoluției, la finalul semnalului de intrare, $y[N - 1]$ ($n = N - 1$), este chiar produsul scalar:

$$y[N - 1] = \sum_k r[k]s[k]$$

- ▶ Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru a cărui răspuns la impuls = oglindirea lui** $s[n]$, luându-se eşantionul de la finalul semnalului de intrare

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ se obține valoarea produsului scalar
- ▶ **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. “matched filter”)
 - ▶ filtrul este *adaptat* semnalului dorit

- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t_i)$
- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_0(t_i)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile la momentul final $n = N - 1$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se folosește regula de decizie cu produse scalare

Detectia semnalelor cu filtre adaptate

- Dacă $s_0(t) = 0$, avem nevoie doar de un singur filtru adaptat pentru $s_1(t)$, și se compară rezultatul cu un prag

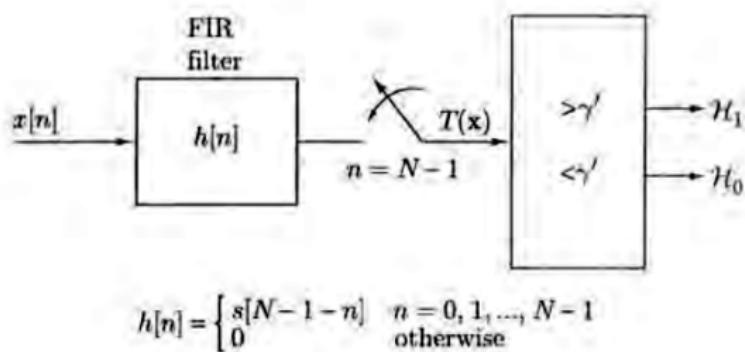


Figure 8: Detectie folosind un filtru adaptat

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

II.4 Detectia unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- ▶ Observare continuă = fără eşantionare, se foloseşte **întreg semnalul continuu**
 - ▶ similar cazului cu N eşantioane, dar cu $N \rightarrow \infty$
- ▶ Semnalele originale sunt $s_0(t)$ și $s_1(t)$
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ Presupunem **doar zgomot Gaussian**, pentru simplitate
- ▶ Semnalul recepționat este $r(t)$

- ▶ Se extinde cazul precedent cu N eșantioane la cazul unui semnal continuu, $N \rightarrow \infty$
- ▶ Fiecare semnal $r(t)$, $s_1(t)$ și $s_0(t)$ reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- ▶ **Distanța** între două semnale este:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 dt}$$

- ▶ **Produsul scalar** între două semnale:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \int r(t)s(t)dt$$

- ▶ Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă

- În cazul AWGN este aceeași regula de decizie:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0)^2 \stackrel{H_1}{\gtrless} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Distanță = se calculează cu formula precedentă, cu integrală
- Aceleași criterii de decizie:
 - Criteriul Maximum Likelihood: $K = 1, \ln(K) = 0$
 - se alege **distanța minimă**
 - Criteriul Minimum Probability of Error: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
 - Criteriul Minimum Risk: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

- În cazul AWGN este aceeași regulă de decizie:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \stackrel{H_1}{\geq} \stackrel{H_0}{\leq} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- Produsul scalar = formula precedentă, cu integrală
- Toate interpretările rămân identice
 - se schimbă doar **tipul de semnal** cu care lucrăm

- ▶ Produsul scalar a două semnale se poate calcula cu un **filtru adaptat**
- ▶ **Filtru adaptat** = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu **oglindirea** semnalului căutat
 - ▶ dacă semnalul original $s(t)$ are lungimea T
 - ▶ atunci $h(t) = s(T - t)$
 - ▶ filtrul este analogic, răspunsul la impuls este continuu
- ▶ Ieșirea unui filtru adaptat la momentul $t = T$ este egală cu produsul scalar al intrării $r(t)$ cu $s(t)$

- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t)$
- ▶ Se folosește un alt filtru adaptat la semnalul $s_0(t)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile filtrelor la sfârșitul semnalelor, $t = T$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se utilizează regula de decizie cu produse scalare

- ▶ Recapitulare: Spații vectoriale Euclidiene
- ▶ Spațiu vectorial
 - ▶ suma a două elemente = rămâne în același spațiu
 - ▶ multiplicarea cu o constantă = rămâne în același spațiu
 - ▶ există operații aritmetice de bază: sumă, multiplicare cu o constantă
 - ▶ Exemple
 - ▶ 1D = o dreaptă
 - ▶ 2D = un plan
 - ▶ 3D = spațiu tridimensional
 - ▶ N-D = ...
 - ▶ ∞ -D = ..

- ▶ Operația fundamentală: **produsul scalar**

- ▶ pentru semnale discrete

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$$

- ▶ pentru semnale continue

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)$$

- ▶ Norma (lungimea) unui vector = radical(produsul scalar cu sine însuși)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- ▶ Distanța între doi vectori = norma diferenței dintre ei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- ▶ Energia unui semnal = normă la pătrat

$$E_x = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- ▶ Unghiul dintre doi vectori

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

- ▶ are valoare între -1 și 1
- ▶ dacă $\langle x, y \rangle = 0$, vectorii sunt **ortogonali** (perpendiculari)

- ▶ Bonus: transformata Fourier = produs scalar cu $e^{j\omega t}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int x(t) e^{-j\omega t}$$

- ▶ pentru semnale complexe, al doilea termen se conjugă, de aceea este $-j$ în loc de j

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i^*$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)^*$$

- ▶ Identic pentru semnale discrete

- ▶ Concluzie: definirea algoritmilor în mod generic, pe bază de produse scalare / distanțe / norme, este extrem de folositoare!
 - ▶ se aplică automat tuturor spațiilor vectoriale
 - ▶ un singur algoritm, utilizări pentru multiple tipuri de semnale

II.5 Detectia semnalelor cu distributii necunoscute

- ▶ Până acum, se cunoștea dpdv. matematic statistica tuturor datelor:
 - ▶ Se cunoșteau semnalele:
 - ▶ $s_0(t) = \dots$
 - ▶ $s_1(t) = \dots$
 - ▶ Se cunoștea zgomotul
 - ▶ gaussian, uniform, etc.
 - ▶ Se cunoșteau distribuțiile condiționate:
 - ▶ $w(r|H_0) = \dots$
 - ▶ $w(r|H_1) = \dots$
- ▶ În aplicații reale, lucrurile pot fi mai complicate

Exemplu

- ▶ Dacă semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ nu există / nu se cunosc?
- ▶ Exemplu: recunoașterea feței unei persoane
 - ▶ Identificarea persoanei A sau B bazată pe o imagine a feței
 - ▶ Avem:
 - ▶ 100 imagini ale persoanei A, în condiții diverse
 - ▶ 100 imagini ale persoanei B, în condiții diverse

- ▶ Să comparăm recunoașterea fetelor cu detectia semnalelor
- ▶ Aspecte comune:
 - ▶ două ipoteze H_0 (persoana A) și H_1 (persoana B)
 - ▶ un vector de eșantioane \mathbf{r} = imaginea pe baza căreia se face decizia
 - ▶ se pot lua două decizii
 - ▶ 4 scenarii: rejecție corectă, alarmă falsă, pierdere, detectie corectă
- ▶ Ce diferă? Nu există formule matematice
 - ▶ nu există semnalele "originale" $s_0(t) = \dots$ și $s_1(t) = \dots$
 - ▶ (fetele persoanelor A și B nu pot fi exprimate matematic ca semnale)
 - ▶ În schimb, avem multe exemple din fiecare distribuție
 - ▶ 100 imagini ale lui A = exemple ale \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ 100 imagini ale lui B = exemple ale \mathbf{r} în ipoteza H_1

- ▶ Terminologia folosită în domeniul **învățării automate** (*machine learning*):
 - ▶ Acest tip de problemă = problemă de **clasificare** a semnalelor
 - ▶ se dă un vector de date, găsiți-i clasa
 - ▶ **Clase de semnal** = categoriile posibile ale semnalelor (ipotezele H_i , persoanele A/B etc)
 - ▶ **Set de antrenare** = un set de semnale cunoscute inițial
 - ▶ de ex. 100 de imagini ale fiecărei persoane
 - ▶ setul de date va fi folosit în procesul de decizie

- ▶ Setul de antrenare conține informațiile pe care le-ar conține distribuțiile condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - ▶ $w(r|H_0)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_0
 - ▶ $w(r|H_1)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_1
 - ▶ setul de antrenare exprimă același lucru, nu prin formule, dar prin multe exemple
- ▶ Cum se face clasificarea în aceste condiții?

Algoritmul *k-Nearest Neighbours* (k-NN)

► Intrare:

- set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$, din L clase posibile de semnal
 $C_1 \dots C_L$
- clasele vectorilor de antrenare sunt cunoscute
- vector de test \mathbf{r} care trebuie clasificat
- parametrul k

1. Se calculează distanța între \mathbf{r} și fiecare vector de antrenare \mathbf{x}_i
 - se poate utiliza distanța Euclidiană, aceeași utilizată pentru detectia semnalelor din secțiunile precedente
 2. Se aleg cei mai apropiati k vectori de \mathbf{r} (cei k "nearest neighbours")
 3. Se determină clasa lui \mathbf{r} = clasa majoritară între cei k cei mai apropiati vecini
- Ieșire: clasa vectorului \mathbf{r}

Algoritmul k-NN

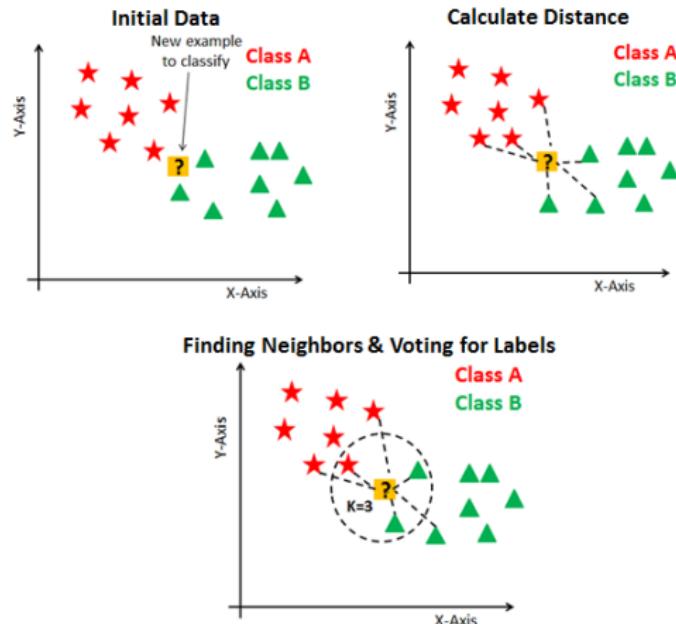


Figure 9: Algoritmul k-NN ilustrat [1]

[1] sursa: "KNN Classification using Scikit-learn", Avinash Navlani,

<https://www.datacamp.com/community/tutorials/k-nearest-neighbor-classification-scikit-learn>

- ▶ Dacă setul de antrenare este foarte mare, algoritmul k-NN devine similar cu decizia pe baza criteriului ML
- ▶ Numărul de vectori situați într-o vecinătate a unui punct r este proporțional cu $w(r|H_i)$
- ▶ Mai mulți vecini din clasa A decât din clasa B $\Leftrightarrow w(r|H_A) > w(r|H_B)$

- ▶ Exemplu: frunze și copaci :) de povestit

Exercițiu

1. Fie următorul set de antrenare, compus din 5 vectori din clasa A și alți 5 vectori din clasa B:

► Clasa A:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

► Clasa B:

$$\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_9 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{10} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determinați clasa vectorului $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ utilizând algoritmul k-NN, cu $k = 1, k = 3, k = 5, k = 7$ and $k = 9$

- ▶ k-NN este un algoritm de învățare supervizată
 - ▶ se cunosc clasele vectorilor din setul de antrenare
- ▶ Efectul lui k : netezirea frontierei de decizie:
 - ▶ k mic: frontieră foarte cotită / "șifonată" / cu multe coturi
 - ▶ k mare: frontieră mai netedă
- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?

- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?
 - ▶ prin încercări ("băbește")
- ▶ "**Cross-validation**" = folosirea unui mic set de test pentru a verifica care valoare a parametrului e mai bună
 - ▶ acest set de date se numește set de "**cross-validare**"
 - ▶ se impune $k = 1$, se testează cu setul de "*cross-validare*" câți vectori sunt clasificați corect
 - ▶ se repetă pentru $k = 2, 3, \dots, max$
 - ▶ se alege valoarea lui k cu care s-au obținut rezultatele cele mai bune

- ▶ Cum se evaluatează performanța algoritmului k-NN?
 - ▶ Se folosește un set de date de testare, și se calculează procentajul vectorilor clasificați corect
- ▶ Setul de date pentru evaluarea finală trebuie să fie diferit de setul de “*cross-validation*”
 - ▶ pentru evaluarea finală se folosesc date pe care algoritmul nu le-a mai utilizat niciodată
- ▶ Cum se împarte setul de date disponibile?

- ▶ Presupunem că avem în total 200 imagini tip fețe, 100 imagini ale persoanei A și 100 ale lui B
- ▶ Setul de date total se împarte în:
 - ▶ Set de antrenare
 - ▶ vectorii care vor fi utilizati de algoritm
 - ▶ cel mai numeros, aprox. 60% din datele totale
 - ▶ de ex. 60 imagini ale persoanei A și 60 ale lui B
 - ▶ Set de *cross-validation*
 - ▶ utilizat pentru a testa algoritmul în vederea alegerii parametrilor optimi (k)
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui A și 20 ale lui B)
 - ▶ Set de testare
 - ▶ utilizat pentru evaluarea finală a algoritmului, cu valorile parametrilor fixate
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui A și 20 ale lui B)

- ▶ k-Means: un algoritm pentru **clusterizarea** datelor
 - ▶ identificarea grupurilor de date apropriate între ele
- ▶ Un exemplu de algoritm de învățare nesupervizată
 - ▶ “învățare nesupervizată” = nu se cunosc clasele semnalelor din setul de antrenare

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means*

- ▶ Intrare:
 - ▶ set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$
 - ▶ numărul de clase C
- ▶ Inițializare: centroizii C iau valori aleatoare

$$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{valori aleatoare}$$

- ▶ Repetă
 1. Clasificare: se clasifică fiecare vector \mathbf{x} pe baza celui mai apropiat centroid:
$$\text{class}x = \arg \min_i d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i), \forall \mathbf{x}$$
 2. Actualizare: se actualizează centroizii $\mathbf{c}_i = \text{media vectorilor } \mathbf{x} \text{ din clasa } i$

$$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{media vectorilor } \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \text{ din clasa } i$$

- ▶ Ieșire: centroizii \mathbf{c}_i , clasele tuturor vectorilor de intrare \mathbf{x}_n

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means* explicitat video:

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 6:28 to 7:08

<https://www.youtube.com/watch?v=4b5d3muPQmA>

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 3:05 la final

<https://www.youtube.com/watch?v=luRb3y8qKX4>

Algoritmul *k-Means*

- ▶ Algoritmul *k-Means* poate să nu conveargă spre niște grupuri adecvate de date
 - ▶ rezultatele depind de inițializarea aleatoare a centroizilor
 - ▶ se rulează de mai multe ori, se alege cel mai bun rezultat
 - ▶ există metode de inițializare optimizate (*k-Means++*)

Exercițiu

1. Fie datele următoare:

$$\{\mathbf{v}_n\} = [1.3, -0.1, 0.5, 4.7, 5.1, 5.8, 0.4, 4.8, -0.7, 4.9]$$

Utilizați algoritmul k-Means pentru a găsi doi centroizi \mathbf{c}_1 și \mathbf{c}_2 , pornind de la valorile aleatoare $\mathbf{c}_1 = -0.5$ și $\mathbf{c}_2 = 0.9$. Realizați 5 iterații ale algoritmului.