

Examen DEPI 2024-02-09 Nr1

Exerciții

1. (5p) Fie variabilă aleatoare continuă X cu distribuția uniformă $\mathcal{U}[-2, 2]$.
 - a. (1p) Reprezentați grafic distribuția și calculați înălțimea sa;
 - b. (1p) Calculați probabilitatea ca X să fie $X > 0$;
 - c. (1p) Calculați valoarea medie pătratică $\overline{X^2}$;
 - d. (2p) Fie o altă variabilă aleatoare Y , tot cu distribuție uniformă, cu aceeași valoare medie ca X , dar cu varianța de 2 ori mai mică decât varianța lui X . Care este distribuția lui Y ?

2. (4p) Fie cazul detecției unui semnal constant $s(t)$ cu două valori posibile, $s_0(t) = -2$ (ipoteza H_0) sau $s_1(t) = 2$ (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot **uniform** cu distribuția $\mathcal{U}[-3, 3]$.

Probabilitățile celor două ipoteze sunt $P(H_0) = 1/5$, $P(H_1) = 4/5$.

La recepție se ia un singur eșantion r_0 .

- a. (1p) Schițați cele două distribuții condiționate, $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$, și scrieți expresiile lor matematice;
 - b. (1p) Găsiți regiunile de decizie pentru criteriul Probabilității Minime de Eroare (Minimum Probability of Error);
 - c. (2p) Calculați probabilitățile (necondiționate) de rejecție corectă și de detecție corectă, pentru același criteriu.
3. (3p) Fie detecția unui semnal care poate fi $s_0(t) = \cos(\pi t)$ (ipoteza H_0) sau $s_1(t) = -\cos(\pi t)$ (ipoteza H_1).

Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 5)$.

Receptorul ia 3 eșantioane la momentele de timp $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ și $t_2 = 2$, cu valorile $r_1 = -0.3$, $r_2 = 0.9$, și $r_3 = -0.7$.

Probabilitățile celor două ipoteze sunt $P(H_0) = 1/4$, $P(H_1) = 3/4$.

Costurile celor patru scenarii sunt $C_{00} = 0$, $C_{01} = 5$, $C_{10} = 25$, $C_{11} = 0$.

- a. (1p) Care este decizia luată cu criteriul Riscului Minim (Minimum Risk)?
 - b. (1p) Găsiți valorile $P(H_0)$, $P(H_1)$ pentru care criteriul Minimum Risk este identic cu criteriul Maximum Likelihood.

- c. (1p) Dacă s-ar mai lua un al patrulea eșantion pentru decizie, care ar fi cel mai nepotrivit moment de eșantionare?
4. (3p) Fie semnalul recepționat $r(t) = \underbrace{2At + 1}_{s(\Theta)} + zgomot$, unde A este un parametru necunoscut. Semnalul este eșantionat la momentele de timp $t_i = [0; 2; 4]$, iar valorile sunt $r_i = [0.2; 9.2; 16.8]$. Zgomotul are distribuție gaussiană $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$.
- Estimați parametrul necunoscut A folosind estimarea de Plauzibilitate Maximă (Maximum Likelihood).
-

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)^2 + 2\sigma^2 \ln K \quad K = \begin{cases} 1, & ML \\ \frac{P(H_0)}{P(H_1)}, & MPE \\ \frac{P(H_0)(C_{10}-C_{00})}{P(H_1)(C_{01}-C_{11})}, & MR \end{cases}$$

Teorie

- (2p) Fie X o variabilă aleatoare obținută prin rularea unei zar cu 10 fețe (de la 1 la 10). Reprezentați funcția de repartiție a lui X .
- (2p) Ce înseamnă că un proces aleator este ergodic?
- (4p) Demonstrați că criteriul Probabilității Minime de Eroare (MPE) minimizează probabilitatea totală de eroare.
- (2p) Ce este un “filtru adaptat”? Explicați cum este folosit, și în ce scop.
- (2p) Care este legătura între estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood) și estimarea Maximum A Posteriori? Arătați că una dintre ele este un caz particular al celeilalte.
- (3p) Explicați ce rol joacă funcția de cost în estimarea Bayesiană, și scrieți expresiile funcțiilor de cost utilizate în estimarea Maximum A Posteriori (MAP) și estimarea de Eroare Pătratică Medie Minimă.

Notă: Obțineți 30p pentru nota 10. 3p sunt acordate din oficiu. Timp disponibil: 2h