Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul III. Elemente de Teoria Estimării

III.1 Introducere

Ce înseamnă “estimare”?

- Un emițător transmite un semnal $s_\Theta(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** Θ
- Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează

$$r(t) = s_\Theta(t) + zgomot$$

- Vrem să **găsim** valoarea parametrului Θ
  - pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - datele recepționate au zgomot $=>$ parametrul este “estimat”
- Valoarea găsită este $\hat{\Theta}$, **estimatul** lui Θ
  - există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$

Ce înseamnă "estimare"?

- Exemple:
  - Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + zgomot$, trebuie estimat A
  - Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi f t + \phi) + zgomot$, de estimat ϕ
  - Exemple mai complicate:
    - De estimat/decis ce cuvânt este pronunțat într-un semnal vocal

Estimare și Detecție/Decizie

- Fie următoarea problemă de estimare:

  Se recepționează un semnal $r(t) = A + zgomot$, estimați-l pe A
- La detecție: se alege între **două valori cunoscute** ale A:
  - de ex. A poate fi 0 sau 5 (ipotezele H_0 și H_1)
- La estimare: A poate fi oricât $=>$ se alege între **o infinitate de opțiuni** ale A
  - A poate fi orice valoare din $\mathbb{R}$, în general

Estimare și Detecție/Decizie

- Detecție = Estimare **restrânsă** doar la un set discret de opțiuni
- Estimare = Detecție cu un număr **infinit de opțiuni** posibile
- Metodele statistice sunt similare
  - În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este "detecție" sau "estimare"?)

Semnalul recepționat

- Semnalul recepționat este $r(t) = s_{\Theta}(t) + zgomot$
  - este afectat de zgomot
  - depinde de parametrul necunoscut Θ
- Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp t_i

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$$

- Eșantioanele depind de valoarea lui Θ

Semnalul recepționat

- Fiecare eșantion r_i este o variabilă aleatoare ce depinde de Θ (și de zgomot)
  - Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de Θ

$$w_i(r_i|\Theta)$$

- Întregul vector de eșantioane $\mathbf{r}$ este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de Θ (și de zgomot)
  - Are o distribuție N-dimensională ce depinde de Θ
  - Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i|\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = w_1(r_1|\Theta) \cdot w_2(r_2|\Theta) \cdot ... \cdot w_N(r_N|\Theta)$$

Tipuri de estimare

- Considerăm două tipuri de estimare:
    1. **Estimare de plauzibilitate maximă** (Maximum Likelihood Estimation, MLE): În afară de **r** nu se cunoaște nimic despre Θ, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
    2. **Estimare Bayesiană**: În afară de **r** se mai cunoaște o distribuție *a priori* $w(\Theta)$ a lui Θ, care indică ce valori ale lui Θ sunt mai probabile / mai puțin probabile

  - caz mai general decât primul

II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

Estimarea tip Maximum Likelihood

- Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă ("Maximum Likelihood", ML)
- Se definește **plauzibilitatea** unui valori Θ, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$:
$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\Theta|\mathbf{r})$$
- $L(\Theta|\mathbf{r})$ reprezintă funcția de plauzibilitate
- "Plauzibilitatea unei valori Θ, date fiind măsurătorile $\mathbf{r}$ = = probabilitatea de a se fi generat $\mathbf{r}$ dacă valoarea parametrului ar fi fost Θ"
- A se compara cu formula din Cap. 2, slide 20
  - e aceeași
  - aici "ghicim" pe Θ, acolo "ghiceam" pe H_i

Estimarea tip Maximum Likelihood

Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood, ML):

- Estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea, dat fiind valorile observate r**
  - i.e. valoarea care maximizează $L(\Theta|\mathbf{r})$, adică maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta)$

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

- Dacă Θ aparține doar unui anumit interval, se face maximizarea doar pe acel interval

Notații matematice

- Notații matematice generale
  - $\arg\max_x f(x) =$ "valoarea x are maximizează funcția f(x)"
  - $\max_x f(x) =$ "valoarea maximă a funcției f(x)"

Estimare vs decizie Maximum Likelihood

- Estimarea ML este foarte similară cu decizia ML!
- Criteriul de decizie ML:
  - "se alege ipoteza cu plauzibilitate mai mare":

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \overset{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} 1$$

- Estimare ML:
  - "se alege valoarea care maximizează plauzibilitatea"

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

Găsirea maximului

- Cum se rezolvă problema de maximizare?
  - adică cum se găsește estimatul $\hat{\Theta}_{ML}$ care maximizează $L(\Theta|vecr)$
- Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta|\mathbf{r})}{d\Theta} = 0$$

- Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta|\mathbf{r})$ înainte de derivare (funcția "log-likelihood")

$$\frac{d\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right)}{d\Theta} = 0$$

Procedura de găsire a estimatului

Procedura de găsire a estimatului ML:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta|\mathbf{r})$ sau a lui $\ln((L(\Theta|\mathbf{r}))$ să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ sau } \frac{d\ln\left(L(\Theta)\right)}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
    - întrucât derivata $= 0$ și pentru maxime și pentru minime
    - uneori sărim peste această etapă

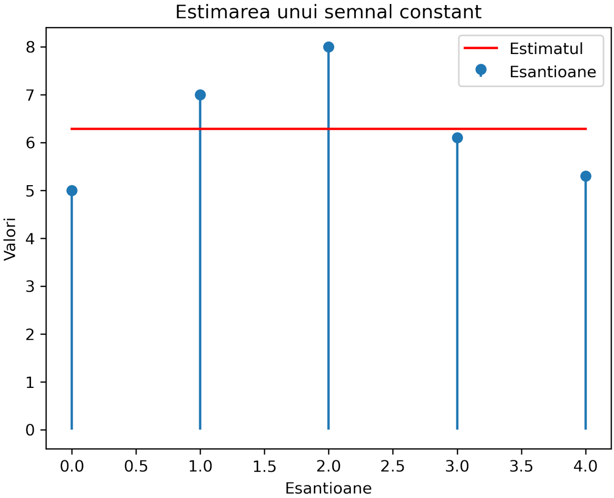
Exemplu

- Estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian:

  Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru un semnal de valoare constantă $s_\Theta(t) = A$ din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + zgomot$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$.

- Soluție: la tablă
- Estimatul $\hat{A}_{ML}$ este chiar valoarea medie a eșantioanelor
  - (deloc surprinzător)

Simulare numerică



Aproximare a unei curbe

- Estimare $=$ aproximare a unei curbe
  - se găsește cea mai bună potrivire a lui $s_\Theta(t)$ pri datele $\mathbf{r}$
- Din exemplul grafic anterior:
  - avem un set de date $\mathbf{r}$
  - se cunoaște forma semnalului $=$ o dreaptă orizontală (A constant)
  - se aproximează în mod optim dreapta prin setul de date

Semnal oarecare în AWGN

- Fie semnalul original $s_\Theta(t)$
- Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- Eșantioanele r_i sunt luate la momentele t_i
- Eșantioanele r_i au distribuție normală, cu media $\mu = s_\Theta(t_i)$ și varianța σ^2
- Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilităților fiecărui eșantion r_i

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Semnal oarecare în AWGN

- Logaritmul plauzibilității ("log-likelihood") este

$$\ln\left(L(\Theta|\mathbf{r})\right) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)}_{constant} - \frac{\sum(r_i - s_\Theta(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

- Termenul $\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$ este **distanța** $d(\mathbf{r}, s_\Theta)$ **la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_\Theta) = \sqrt{\sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_\Theta))^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

Semnal oarecare în AWGN

- Estimarea ML se poate rescrie sub forma:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg\max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\min_{\Theta} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_\Theta)^2$$

- Estimatul de plauzibilitate maximă (ML) $\hat{\Theta}_{ML}$ = valoarea care face $s_\Theta(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat r**
  - mai aproape = potrivire mai bună = mai probabil
  - cel mai aproape = cea mai bună potrivire = cel mai probabil = plauzibilitate maximă

Semnal oarecare în AWGN

- Estimare ML în zgomot gaussian = **minimizarea distanței**
- Aveam aceeași interpretare și la decizia ML!
  - dar la decizie alegeam minimul din 2 opțiuni
  - aici alegem minimul dintre toate opțiunile posibile
- Relația e valabilă pentru orice fel de spații vectoriale
  - vectori cu N elemente, semnale continue, etc
  - doar se înlocuiește definiția distanței Euclidiene

Semnal oarecare în AWGN

Procedura pentru estimarea tip ML în zgomot AWGN:

1. Se scrie expresia pentru pătratul distanței:

$$D = \left(d(\mathbf{r}, s_\Theta)\right)^2 = \sum (r_i - s_\Theta(t_i))^2$$

2. Vrem minimul, deci egalăm derivata cu 0:

$$\frac{dD}{d\Theta} = \sum 2(r_i - s_\Theta(t_i))\left(-\frac{ds_\Theta(t_i)}{d\Theta}\right) = 0$$

3. Se rezolvă și obținem valoarea $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}_{ML}$ este pozitivă, pentru a se verifica că punctul este un minim
   - uneori sărim peste această etapă

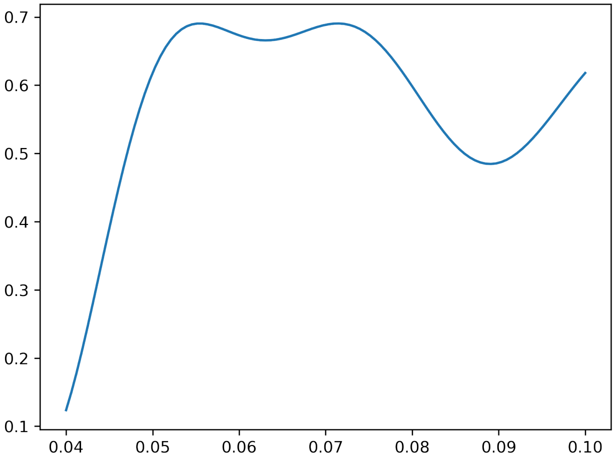
Simulare numerică

Estimarea frecvenței f a unui semnal sinusoidal

- Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența f a unui semnal $s_\Theta(t) = cos(2\pi f t_i)$, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = cos(2\pi f t_i) + zgomot$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- Soluție: la tablă

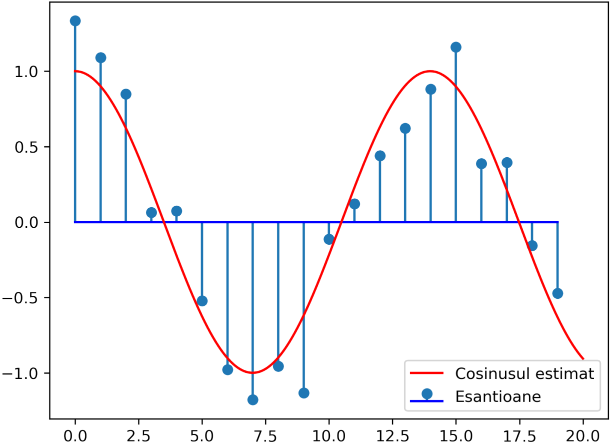
Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este



Simulare numerică

Frecventa originala $= 0.070000$, estimatul $= 0.071515$



Estimarea parametrilor unor distribuții

- Estimarea ML se poate folosi și pentru a estima parametrii unor distribuții
- Avem un set de valori r_i, pe care le modelăm ca fiind eșantioane dintr-o distribuție. Cum găsim parametrii acelei distribuții?
- Momentan, considerăm un singur parametru necunoscut

Estimarea parametrilor distribuției normale

- Presupunem că r_i sunt eșantioane dintr-o distribuție normală $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- Distribuția are doi parametri: media μ și deviația standard σ
- Estimarea lui μ:

  Este identică cu estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian cu media 0:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i$$

- Estimarea lui σ^2:

  Nu se poate formula ca estimarea unui semnal afectat, prin adunare, de zgomot gaussian, dar cu toate acestea se poate utiliza în continuare metoda ML:

$$\hat{\sigma}_{ML} = \arg\max_{\sigma} w(\mathbf{r}|\sigma)$$

Estimarea parametrilor distribuției normale

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{ML} &= \arg\max_{\sigma} w(\mathbf{r}|\sigma) \\
&= \arg\max_{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{ aplicăm } \ln() \text{ }) \\
&= \arg\max_{\sigma} \left(-N \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{\sum (r_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}$$

Derivăm și egalăm cu 0 pentru a obține minimul:

$$\begin{aligned}
-N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} - \frac{\sum (r_i - \mu)^2}{2}(-2)\sigma^{-3} &= 0 \\
-\frac{N}{\sigma} + \frac{\sum (r_i - \mu)^2}{\sigma^3} &= 0 \\
\sigma^2 &= \frac{\sum (r_i - \mu)^2}{N}
\end{aligned}$$

Estimarea parametrilor distribuției normale

- Estimarea parametrilor unei distribuții normale e similară cu definițiile mediei și varianței:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - \mu)^2}{N}}$$

- Notă: estimarea lui σ_{ML} necesită valoarea lui μ
  - Dacă μ este cunoscut, totul e în regulă
  - Dacă μ este necunoscut, se poate folosi $\hat{\mu}_{ML}$, dar atunci estimăm pe baza unei alte estimări, ceea ce e problematic (estimatorul este deplasat, vom vedea)

Estimarea parametrilor distribuției uniforme

- Presupunem că r_i sunt eșantioane dintr-o distribuție uniformă $\mathcal{U}[a, b]$
- Distribuția are doi parametri: limitele a și b
- Estimarea lui a și b:

$$\hat{a}_{ML} = \arg\max_a w(\mathbf{r}|a)$$
$$\hat{b}_{ML} = \arg\max_b w(\mathbf{r}|b)$$

  Prin raționament:

$$\hat{a}_{ML} = \min(r_i)$$
$$\hat{b}_{ML} = \max(r_i)$$

- Intervalul trebuie să cuprindă toate valorile (altfel, probabilitatea ar fi 0), dar nu trebuie să fie mai mare decât strict necesar (altfel, probabilitatea ar fi mai mică)

Parametri multipli

- Dacă semnalul depinde de mai mulți parametri?
  - de ex. amplitudinea, frecvența și faza inițială a unui cosinus:

$$s_{\hat{}}(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Se va considera Θ ca fiind un vector:

$$\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, ...\Theta_M]$$

  - e.g. $\boldsymbol{\Theta} = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] = [A, f, \phi]$

Parametri multipli

- Se rezolvă cu aceeași procedură, dar în loc de o singură derivată vom avea M derivate
- Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_M} = 0 \end{cases}$$

  - uneori este dificil/imposibil

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- Cum se estimează parametrii $\mathbf{\Theta}$ în cazuri complicate?
  - în aplicații reale, unde pot fi foarte mulți parametri ($\mathbf{\Theta}$ este vector)
- De obicei nu se pot găsi valorile optime prin formule directe
- Se îmbunătățesc valorile în mod iterativ cu algoritmi tip **coborâre după gradient** (Gradient Descent)
- Gradient Descent este o metodă generală de găsire a minimului (sau a maximului) unei funcții

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

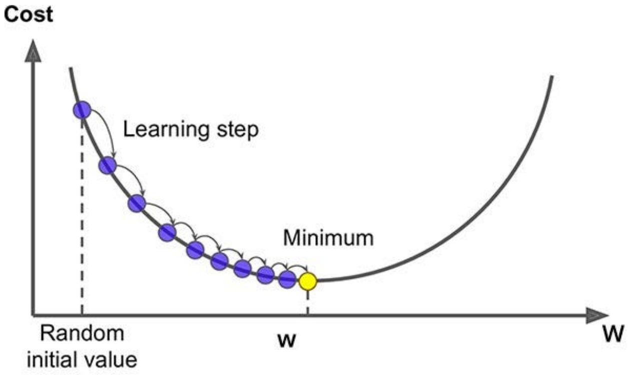


Figure 1: Coborâre după gradient[1]

[1]Imagine: Quick Guide to Gradient Descent and Its Variants, Sahdev Kansal, Towards Data Science, 2020

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

1. Se inițializează parametrii cu valori aleatoare $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$
2. Repetă la fiecare iterație k:
   2.1 Se calculează funcția $L(\boldsymbol{\Theta}^{(k)}|\mathbf{r})$
   2.2 Se calculează derivatele $\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$ pentru toți Θ_i ("**Gradient**")
   2.3 Se actualizează toate valorile Θ_i prin scăderea derivatei ("**Descent**"):
   $$\Theta_i^{(k+1)} = \Theta_i^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$$
      - sau, sub formă vectorială:
      $$\boldsymbol{\Theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Theta}^{k} - \mu \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\Theta}^{(k)}}$$
3. Până la îndeplinirea unui criteriu de terminare (de ex. parametrii nu se mai modifică mult)

Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- În fiecare punct, derivata ne spune în ce direcție să mergem
- Pentru găsirea minimului unei funcții, se scade derivata (coborâre după gradient)
$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta^{(k)}}$$
- Pentru găsirea maximului unei funcții, se adună derivata (urcare după gradient)
$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} + \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta^{(k)}}$$
- Parametrul μ se numește **rată de învățare** (learning rate) și se alege empiric, la o valoare mică
- GD depinde de valoarea inițială, și poate ajunge la minimul local, nu global
- Alte explicații la tablă
- Exemplu practic: regresia logistică cu valori 2D

Rețele Neurale

- Cel mai proeminent exemplu: **Rețele Neurale Artificiale** (a.k.a. “Rețele Neurale”, “Deep Learning”, etc.)
  - Pot fi văzute ca un exemplu de estimare ML
  - Se utilizează algoritmul *Gradient Descent* pentru găsirea parametrilor
  - Aplicații de vârf: recunoașterea de imagini, automated driving etc.
- Mai multe informații despre rețele neurale / machine learning:
  - căutați cursuri sau cărți online
  - IASI AI Meetup

Deplasarea și varianța estimatorilor

- Cum caracterizăm calitatea unui estimator?
- Un estimator $\hat{\Theta}$ este **o variabilă aleatoare**
  - poate avea diverse valori, pentru că se calculează pe baza eșantioanelor recepționate, care depind de zgomot
  - exemplu: se repetă aceeași estimare pe calculatoare diferite => valori estimate ușor diferite
- Fiind o variabilă aleatoare, se pot defini:
  - valoarea medie a estimatorului: $E\left\{\hat{\Theta}\right\}$
  - varianța estimatorului: $E\left\{(\hat{\Theta} - E\left\{\hat{\Theta}\right\})^2\right\}$

Deplasarea și varianța estimatorilor

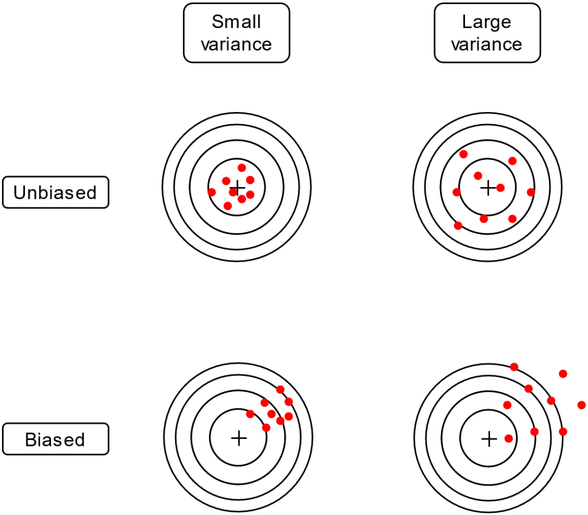


Figure 2: Deplasarea și varianța estimatorilor

Deplasarea unui estimator

- **Deplasarea** ("bias") unui estimator = diferența dintre valoarea medie a estimatorului și valoarea adevărată Θ

$$Deplasare = E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$$

- Estimator **nedeplasat** = valoarea medie a estimatorului este egală cu valoarea adevărată a parametrului Θ

$$E\left\{\hat{\Theta}\right\} = \Theta$$

- Estimator **deplasat** = valoarea medie a estimatorului diferă de valoarea adevărată a parametrului Θ
  - diferența $E\left\{\hat{\Theta}\right\} - \Theta$ este **deplasarea** estimatorului

Deplasarea unui estimator

- Exemplu: semnal constant A, zgomot Gaussian (cu media 0), estimatorul de plauzibilitate maximă este $\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_i r_i$
- Atunci:

$$\begin{aligned}
E\left\{\hat{A}_{ML}\right\} &= \frac{1}{N} E\left\{\sum_i r_i\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left\{r_i\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left\{A + zgomot\right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A \\
&= A
\end{aligned}$$

- Acest estimator este nedeplasat

Deplasarea unui estimator

- Exemplu: estimatorul varianței unei distribuții normale, când se folosește media estimată $\hat{\mu}_{ML}$:

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - \hat{\mu}_{ML})^2}{N}$$

- Acest estimator este **deplasat**:

$$\begin{aligned} E\left\{\hat{\sigma}^2_{ML}\right\} &= E\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - \hat{\mu}_{ML})^2}{N}\right\} \\ &= \dots \\ &= \frac{N-1}{N}\sigma^2 \end{aligned}$$

unde σ^2 este varianța reală a distribuției

- Demonstrație: *Wikipedia* sau "*Maximum Likelihood Estimator for Variance is Biased: Proof*", Dawen Liang, Carnegie Mellon University

Estimatorul nedeplasat al varianței

- Estimatorul ML al varianței este deplasat, și **subestimează** varianța reală a distribuției cu un factor (N-1)/N
- Pentru a obține un estimator nedeplasat al varianței, se folosește formula:

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_i - \hat{\mu}_{ML})^2$$

- Diferența: se împarte la $N-1$ în loc de N
- Justificare intuitivă: discuție la tablă, cazul cu 2 puncte; media este la mijloc; varianța e minimizată, deci subestimează varianța reală

Varianța unui estimator

- **Varianța** unui estimator măsoară “abaterile” estimatorului în jurul valorii medii
  - aceasta e definiția varianței σ^2 în general
- Dacă un estimator are **varianța** mare, valoarea estimată poate fi departe de cea reală, chiar daca estimatorul este nedeplasat
- De obicei se preferă estimatori cu **varianță mică**, tolerându-se o eventuală mică deplasare

II.3 Estimare Bayesiană

Estimare Bayesiană

- **Estimarea Bayesiană** ia în calcul termeni suplimentari pe lângă $w(\mathbf{r}|\Theta)$:
  - o distribuție *a priori* $w(\Theta)$
  - opțional, o funcție de cost
- Se obține echivalentul din estimare pentru criteriile de decizie MPE și MR

Estimare Bayesiană

- Conceptual, estimarea Bayesiană constă în doi pași:
  1. Găsirea distribuției **posterioare** $w(\Theta|\mathbf{r})$
  2. Estimarea unei valori din această distribuție, pe baza unei **funcții de cost**

Estimare Bayesiană

- Se definește **distribuția *a posteriori*** a lui Θ, date fiind observațiile $\mathbf{r}$, folosind **regula lui Bayes**:

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- Termenii:
  - Θ este parametrul necunoscut
  - $\mathbf{r}$ este vectorul de observații
  - $w(\Theta|\mathbf{r})$ este probabilitatea ca parametrul să aibă valoarea Θ, dat fiind vectorul de observații $\mathbf{r}$;
  - $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este funcția de plauzibilitate
  - $w(\Theta)$ este distribuția **a priori** a lui Θ
  - $w(\mathbf{r})$ este o constantă (distribuția **a priori** a lui $\mathbf{r}$); singurul său rol este să normalizeze expresia, astfel încât integrala lui $w(\Theta|\mathbf{r})$ să fie 1, așa cum stă bine unei distribuții de probabilitate

Estimare Bayesiană

Comentarii:

- La estimarea ML, avem doar termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$. Acesta este o funcție de Θ, dar nu e chiar distribuția de probabilitate lui Θ. E doar o mărime pe care vrem să o maximizăm.
- Estimarea Bayesiană folosește însă chiar distribuția de probabilitate a lui Θ, $w(\Theta|\mathbf{r})$, calculată cu regula lui Bayes, care ne spune riguros șansele ca Θ să aibă o anumită valoare sau alta.

Regula lui Bayes

- Relația precedentă arată că, în general, estimarea lui Θ depinde de două lucruri:
  1. De vectorul observațiilor $\mathbf{r}$, prin termenul $w(\mathbf{r}|\Theta)$
  2. De informația "a priori" avută despre Θ, prin termenul $w(\Theta)$

  - (numitorul $w(\mathbf{r})$ se presupune constant și are doar rol de normalizare)
- Distribuția a priori $w(\Theta)$ reflectă cunoștințele noastre anterioare despre parametrul Θ, înainte de a avea observațiile $\mathbf{r}$.
- Distribuția a posteriori $w(\Theta|\mathbf{r})$ reflectă cunoștințele noastre după ce avem și observațiile $\mathbf{r}$.
- Numele este "estimare Bayesiană"
  - Thomas Bayes = matematician englez, a descoperit regula cu acest nume
  - Noțiunile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de "Bayesiene"

Distribuția *a priori*

- Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui Θ, $w(\Theta)$
  - adică, știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta, sau un anume interval interzis etc.
  - se numește distribuția *a priori*, adică “de dinainte de a avea observațiile”
- Care este efectul ei? Estimarea va fi “trasă” puțin înspre valorile preferate de distribuția *a priori*
  - de exemplu, dacă distribuția *a priori* este concentrată în jurul unei valori, estimarea va fi mai probabil să cadă în jurul acelei valori
- Dacă nu avem informații *a priori*, putem folosi o distribuție uniformă, adică $w(\Theta) = \text{constant}$

Estimatorul MAP

- Cunoaștem distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$. Care este valoarea estimată?
- Se poate alege valoarea care are probabilitate maximă
- Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

- Estimatorul MAP alege acea valoare Θ unde distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ este maximă
- Estimatorul MAP maximizează **produsul** dintre plauzibilitate și **distribuția *a priori*** $w(\Theta)$

Estimatorul MAP

Exemplu: Imagine

Relația dintre estimarea MAP și ML

- Estimatorul ML:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta)$$
- Estimatorul MAP:
$$\arg\max w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$
- Estimatorul ML este un caz particular de MAP pentru $w(\Theta)$ constant
  - $w(\Theta) =$ constant înseamnă că toate valorile lui Θ sunt *a priori* echiprobabile
  - i.e. nu avem extra informații despre valoarea lui Θ

Relația cu detecția semnalelor

- Criteriul probabilității minime de eroare: $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$
  - adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$este mai mare
- **Criteriul de decizie MPE**: se alege ipoteza care maximizează $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$
  - dintre cele două ipoteze H_0, H_1
- **Estimarea MAP**: se alege valoarea care maximizează $w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$
  - dintre toate valorile posibile pentru Θ
- Același principiu!

Funcția de cost

- Vrem s găsim un echivalent și pentru criteriul MR
- Avem nevoie de un echivalent pentru costurile C_{ij}
- **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală Θ

$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ = atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
  - erori ϵ mici au costuri mici
  - erori ϵ mari au costuri mari

Funcția de cost

- Funcții de cost uzuale:
  - Pătratică:
$$C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$$
  - Uniformă:
$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$
  - Liniară:
$$C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$$
- De desenat la tablă

Funcția de cost

- Funcția de cost $C(\epsilon)$ reprezintă echivalentul costurilor C_{ij} de la detecție
  - la detecție aveam doar 4 valori: C_{00}, C_{01}, C_{10}, C_{11}
  - aici avem un cost pentru fiecare eroare posibilă ϵ
- Funcția de cost dictează ce valoarea alegem din distribuția $w(\Theta|\mathbf{r})$

Importanța funcției de cost

- Fie distribuția *a posteriori* următoare:

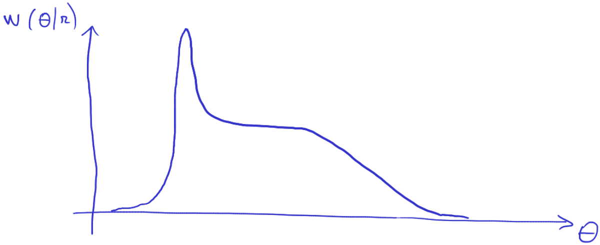


Figure 3: Asymmetrical posterior distribution

- Care este estimatorul MAP?
- Dar dacă avem funcția de cost următoare:
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $<$ valoarea reală Θ, te costă 1000 dolari
  - dacă estimarea $\hat{\Theta}$ este $>$ valoarea reală Θ, platești 1 dolar
  - schimbăm valoarea estimată ? :)

Importanța funcției de cost

- Funcția de cost este cea care impune alegerea unei anume valori estimate $\hat{\Theta}$ de pe distribuția valorilor posibile
- Valoarea cea mai probabilă nu este întotdeauna cea mai bună!
- Valoarea cea mai bună este cea care minimizează costul (adică, valoarea medie ("expected value") a costului, întrucât acesta poate fi unoeri mai mic, alteori mai mare)

Riscul Bayesian

- Distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$ dă probabilitatea fiecărei valori Θ de a fi cea corectă
- Alegerea unui estimat $\hat{\Theta}$ implică o anume eroare ϵ
- Eroarea de estimare are un anumit cost $C(\epsilon) = C(\hat{\Theta} - \Theta)$
- **Riscul** $=$ costul mediu în raport cu toate valorile posibile ale $\Theta =$ integrala din $C(\epsilon) \times$ probabilitatea:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} C(\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

The Bayesian risk

- Alegem valoarea $\hat{\Theta}$ care **minimizează costul mediu** R

$$\hat{\Theta} = \arg\min_{\hat{\Theta}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- O obținem înlocuind $C(\epsilon) = C(\hat{\Theta} - \Theta)$ cu definiția sa, și derivând după $\hat{\Theta}$
  - Atenție: se derivează după $\hat{\Theta}$, nu Θ!

Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = \left(\hat{\Theta} - \Theta\right)^2$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează R, deci derivăm

$$\frac{dR}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})}_{1} d\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM) ("Minimum Mean Squared Error, MMSE")**:

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

Interpretare

- **Estimatorul EPMM**: estimatorul $\hat{\Theta}$ este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

  - EPMM = "Eroare Pătratică Medie Minimă"
  - valoarea medie = sumă (integrală) din fiecare Θ ori probabilitatea sa $w(\Theta|\mathbf{r})$
- Estimatprul EPMM se obține din distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$, considerând funcția de cost pătratică

Estimatorul MAP

- Dacă funcția de cost este uniformă

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- Se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \\ R &= 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \end{aligned}$$

Estimatorul MAP

- Pentru minimizarea R, trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- Pentru E foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- **Estimatorul Maximum A Posteriori (MAP)** = valoarea $\hat{\Theta}$ care maximizează $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg\max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg\max \Theta w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

Interpretare

- Estimatorul MAP: $\hat{\Theta}$ = valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta}$ = valoarea medie a distribuției *a posteriori*

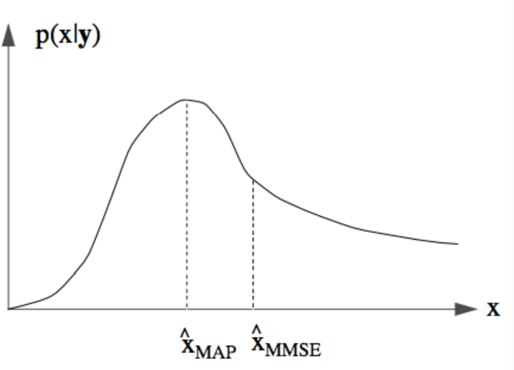


Figure 4: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

[image from https://allenlu2007.wordpress.com]

Relația între estim. MAP and EPMM

- Estimatorul MAP = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost uniformă
  - ca le detecție: criteriul MPE = criteriul MR când costurile sunt la fel
- Estimatorul EPMM = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost pătratică
  - similar cu criteriul MR, dar la estimare

Aplicații practice

1. Filtru Kalman: estimarea poziției unui obiect în mișcare

- Se cunosc poziția și viteza inițiale ale obiectului
- Se fac măsurători succesive ale poziției obiectului
- Se estimează poziția obiectului la fiecare măsurătoare nouă

La fiecare măsuratoare nouă, avem două distribuții ale poziției:

- cea dată de măsurătoare respectivă, $w(r|\Theta)$ ("likelihood")
- cea **prezisă** pe baza poziției și vitezei de data trecută, $w(\Theta)$ ("prior")
- ambele presupuse a fi Gaussiene, caracterizate doar prin medie și varianță

Cele două se combină prin regula lui Bayes => o distribuție mai precisă $w(\Theta|r)$, tot Gaussiană - poziția exactă se estimează prin EPMM (media lui $w(\Theta|r)$ - $w(\Theta|r)$ prezice poziția de la momentul următor

Filtru Kalman pentru estimarea poziției unui obiect în mișcare

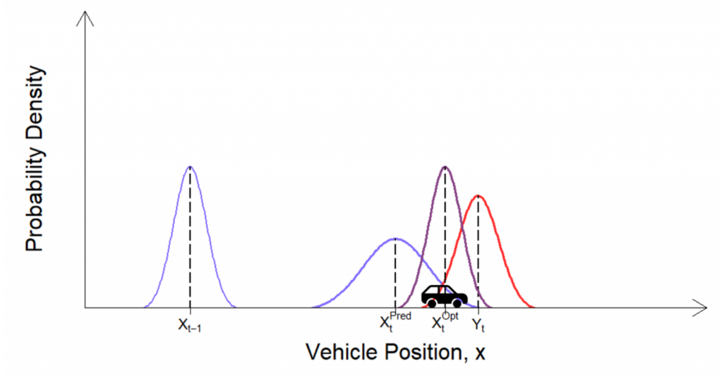


Figure 5: Estimarea poziției cu filtru Kalman [2]

[2] Image source: https://www.lancaster.ac.uk/stor-i-student-sites/jack-trainer/how-nasa-used-the-kalman-filter-in-the-apollo-program/

Filtru Kalman pentru estimarea poziției unui obiect în mișcare

- Predicția poziției obiectului la pasul următor necesită cunoașterea vitezei
- În exemplul anterior, viteza este constantă (sau cu o cunoscută)
- În general, filtrele Kalman estimează și viteza unui obiect în mișcare, doar pe baza pozițiilor măsurate

Filtru Kalman pentru estimarea poziției unui obiect în mișcare

Filtru Kalman pentru estimarea poziției și vitezei simultan (de-a lungul unei singure axe)

- Se estimează simultan poziția și viteza, adică starea $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$
- Se lucrează cu distribuții Gaussiene 2D (poziție, viteză) (mișcarea este pe o singură axă)

Etape:

1. La pasul k, se cunoaște distribuția stării s^k, adică:
2. Se prezice distribuția stării la pasul $k+1$ ("prior distribution")
3. Se face o măsurătoare a poziției z^{k+1} ("likelihood")
4. Se calculează noua distribuție a stării ("posterior distibution"), pe baza regulii lui Bayes, înmulțindu-le
5. Media acestei distribuții este estimatul stării (poziției și vitezei) la pasul $k+1$ (estimare EPMM)

Filtru Kalman pentru estimarea poziției unui obiect în mișcare

Ilustrare:

1. https://www.bzarg.com/p/how-a-kalman-filter-works-in-pictures/
2. https://towardsdatascience.com/what-i-was-missing-while-using-the-kalman-filter-for-object-tracking-8e4c29f6b795

Aplicație:

- Netezirea traiectoriilor: proiect TrafAlert