

## Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

## Capitolul I. Semnale aleatoare

## I.1 Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notăție uzuală:  $X$ ,  $Y$  etc..
- ▶ Exemple:
  - ▶  $X$  = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - ▶  $V_{in}$  = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

- ▶ **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- ▶ **Spațiul realizărilor**  $\Omega$  = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a.
  - ▶ mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
  - ▶ V.a. se notează  $X$
  - ▶ Se poate obține o realizare  $X = 3$
  - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

## V.a. discrete și continue

- ▶ V.a. **discretă**: dacă  $\Omega$  este o mulțime discretă
  - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă  $\Omega$  este o mulțime compactă
  - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

# Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- ▶ Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- ▶ Exemple:
  - ▶ Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
  - ▶ Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor diferite*.
  - ▶ Valoarea este afectată de zgomot
  - ▶ Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

# Funcția masă de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. discretă  $A$
- ▶ **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*)  
= probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea egală cu  $x$

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- ▶ pe scurt, se mai numește **distribuția** variabilei  $A$
- ▶ Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă



# Calculul probabilității cu FMP

- Probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea  $v$

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^b w_A(x)$$

# Funcția de repartiție

- ▶ **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea mai mică sau egală cu  $x$

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este “în trepte”

# Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea  $v$

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v - 1)$$

- Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a - 1)$$

## Relația între FMP și FR

- ▶ FR este *suma cumulativă* (un fel de “integrală discretă”) a FMP

$$F_A(x) = \sum_{all\ t \leq x} w_A(t)$$

- ▶ Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

# Funcția densitate de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. **continuă**  $A$
- ▶ **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** = probabilitatea ca valoarea lui  $A$  să fie într-o vecinătate  $\epsilon$  mică în jurul lui  $x$ , totul supra  $\epsilon$
- ▶ Se notează  $w_A(x)$ , se mai numește **distribuția** variabilei  $A$
- ▶ Informal: FDP reprezintă probabilitatea ca valoarea lui  $A$  să fie **în jurul lui**  $x$

# Probabilitatea unei valori exacte

- ▶ Probabilitatea ca o v.a. continuă  $A$  să ia **exact** o valoare  $x$  este **zero**
  - ▶ pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
  - ▶ de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- ▶ De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii  $x$ , și nu exact egal cu  $x$

# Calculul probabilității cu FDP

- Probabilitatea ca  $A$  să aibă exact valoarea  $v$  este întotdeauna 0

$$P\{A = v\} = 0$$

- Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  = integrala FDP între  $a$  și  $b$ :

$$P\{a \leq A \leq b\} = \int_a^b w_A(x) dx$$

# Funcția de repartiție

- ▶ **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea mai mică sau egală cu  $x$

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Aceeași definiție ca și la v.a. discrete



# Calculul probabilității cu FR

- ▶ Probabilitatea ca valoarea lui  $A$  să fie între  $a$  și  $b$ :

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

- ▶ Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis
  - ▶  $[a, b]$  sau  $(a, b)$ , nu contează
  - ▶ de ce?

# Relația între FDP și FR

- ▶ FR este **integrala** FDP
- ▶ FDP este **derivata** FR

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x w_A(x) dx$$

$$\begin{aligned}w_A(x) &= \frac{dF_A(x)}{dx} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_A(x + \epsilon) - F_A(x - \epsilon)}{2\epsilon} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(A \in [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon}\end{aligned}$$

# Interpretare grafică

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie între  $a$  și  $b$  este **suprafața de sub FDP**
  - ▶ adică integrala de la  $a$  la  $b$
- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie exact egal cu o valoare este zero
  - ▶ aria de sub un punct este nulă

## V.a. discrete vs continue

### Comparație între v.a. discrete și continue

- ▶ FR  $F_A(x)$  are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- ▶ FDP/FMP  $w_A(x)$  este derivata FR
  - ▶ la v.a. continue:
    - ▶ este o derivată obișnuită
    - ▶ reprezintă probabilitatea de a fi “în jurul” valorii  $x$
  - ▶ la v.a. discrete:
    - ▶ un fel de “derivată discretă”
    - ▶ reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea  $x$

FR:

- ▶ FR este mereu pozitivă,  $F_A(x) \geq 0$
- ▶ FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- ▶ FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1

$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

FDP/FMP:

- ▶ PDF/PMF sunt mereu pozitive  $w_A(x) \geq 0$
- ▶ Integrala/suma pe întreg domeniul = 1

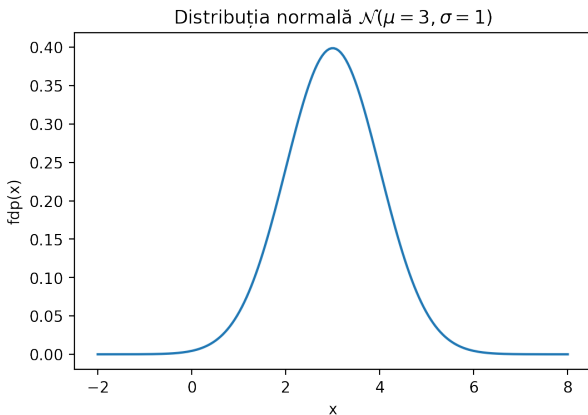
$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x) dx = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

# Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# Distribuția normală

- ▶ Are doi parametri:
  - ▶ **Media**  $\mu$  = “centrul” funcției
  - ▶ **Deviația standard**  $\sigma$  = “lățimea” funcției
    - ▶  $\sigma$  mic = funcție îngustă și înaltă
    - ▶  $\sigma$  mare = funcție largă și joasă
- ▶ Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala = 1)
- ▶ Extrem de des întâlnită în practică
- ▶ Orice valoare reală este posibilă ( $w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ )
- ▶ Se notează cu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

# Distribuția normală

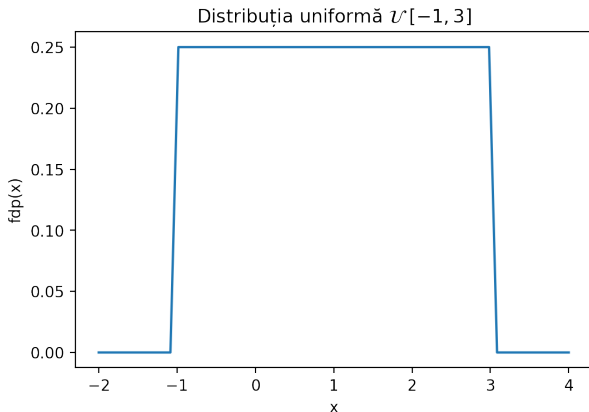
- ▶ Distribuția descrește pe măsură ce  $x$  se îndepărtează de centrul  $\mu$ 
  - ▶ Datorită termenului  $-(x - \mu)^2$  de la exponent
  - ▶ Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui  $\mu$  ( $x - \mu = 0$ )
  - ▶ Valorile apropiate de  $\mu$  sunt mai probabile, valorile mai depărtate de  $\mu$  sunt mai puțin probabile
- ▶ Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de  $\mu$ , cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de  $\mu$



# Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



# Distribuția uniformă

- ▶ Are doi parametri: limitele  $a$  și  $b$  ale intervalului
- ▶ “Înălțimea” funcției este  $\frac{1}{b-a}$  pentru normalizare
  - ▶ pentru ca integrala (aria) să fie 1
- ▶ Sunt posibile doar valori din intervalul  $[a, b]$ 
  - ▶ valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- ▶ Se notează cu  $\mathcal{U} [a, b]$

- ▶ Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

# Calculul probabilității pentru distribuția normală

- ▶ Cum calculăm  $\int_a^b$  dintr-o distribuție normală?
  - ▶ Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- ▶ Se folosește *the error function*:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- ▶ Funcția de repartiție a unei distribuții normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F_A(X) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$$

- ▶ Valorile funcției  $\operatorname{erf}()$  sunt tabelate / se calculează numeric
  - ▶ de ex. pe Google, căutați  $\operatorname{erf}(0.5)$
  - ▶ Alte valori folositoare:
    - ▶  $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$
    - ▶  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

# Exercițiu

Exercițiu:

- ▶ Fie  $A$  o v.a. cu distribuția  $\mathcal{N}(3, 2)$ . Calculați probabilitatea ca  $A \in [2, 4]$

## Suma unei constante cu o v.a.

- ▶ Fie o v.a.  $A$
- ▶ Ce reprezintă  $B = 5 + A$ ?

Răspuns:

- ▶  $B$  este tot o variabilă aleatoare
- ▶  $B$  are același tip de distribuție, dar “translată” cu 5 la dreapta

Exemplu:

- ▶  $A$  este o v.a. cu distribuție normală  $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- ▶ Care este distribuția variabilei  $B = 5 + A$ ?
- ▶ Răspuns:  $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

## V.a. ca funcții de alte v.a

- ▶ O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- ▶ Exemple: dacă  $A$  este o v.a. distribuită  $\mathcal{U} [0, 10]$ , atunci
  - ▶  $B = 5 + A$  este o altă v.a., distribuită  $\mathcal{U} [5, 15]$
  - ▶  $C = A^2$  este de asemenea o v.a.
  - ▶  $D = \cos(A)$  este de asemenea o v.a.
- ▶ Motivație: dacă  $A$  este aleatoare, și valorile  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sunt aleatoare
- ▶  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  nu sunt independente
  - ▶ O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

# Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Fie un sistem cu două v.a. continue  $A$  și  $B$
- ▶ Care este probabilitatea ca perechea  $(A, B)$  să aibă valoarea în jurul  $(x, y)$ ?
- ▶ Distribuția valorilor perechii  $(A, B)$  este descrisă de:
  - ▶ Densitatea de probabilitate comună  $w_{AB}(x, y)$
  - ▶ Funcția de repartiție comună  $F_{AB}(x, y)$



# Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB} \{A \leq x \cap B \leq y\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca perechea  $(A, B)$  să aibă valoarea într-o vecinătate a  $(x, y)$
- Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P \{A = x \cap B = y\}$$

# Variabile independente

- ▶ Două v.a.  $A$  și  $B$  sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- ▶ Pentru v.a. independente, probabilitatea ca  $A$  să fie în jurul lui  $x$  și  $B$  în jurul lui  $y$  este produsul celor două probabilități

$$w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)$$

- ▶ Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- ▶ Similar pentru mai mult de două v.a.

# Variabile independente

Exercițiu:

- ▶ Calculați probabilitatea ca trei v.a.  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  i.i.d.  $\mathcal{N}(-1, 1)$  să fie toate pozitive
  - ▶ **i.i.d** = “independente și identic distribuite”

## Multiple v.a. normale

- ▶ Fie un set de  $N$  v.a. normale  $(A_1, \dots, A_N)$ , cu medii diferite  $\mu_i$  dar aceeași deviație standard  $\sigma$
- ▶ Probabilitatea ca  $(A_1, \dots, A_N)$  să fie în jurul valorii  $(x_1, \dots, x_N)$  este

$$w_{A_1, \dots, A_N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2 + \dots + (x_N - \mu_N)^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Probabilitatea depinde de **distanța Euclidiană** dintre  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  și  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$

# Distanța Euclideană

- ▶ **Distanța Euclideană (geometrică)** între 2 vectori N-dimensional

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_N - v_N)^2}$$

- ▶ Unidimensional:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = |u - v|$

- ▶ 2D:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

- ▶ 3D:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$

- ▶ ...

- ▶ N-dimensional:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - v_i)^2}$

- ▶ ...

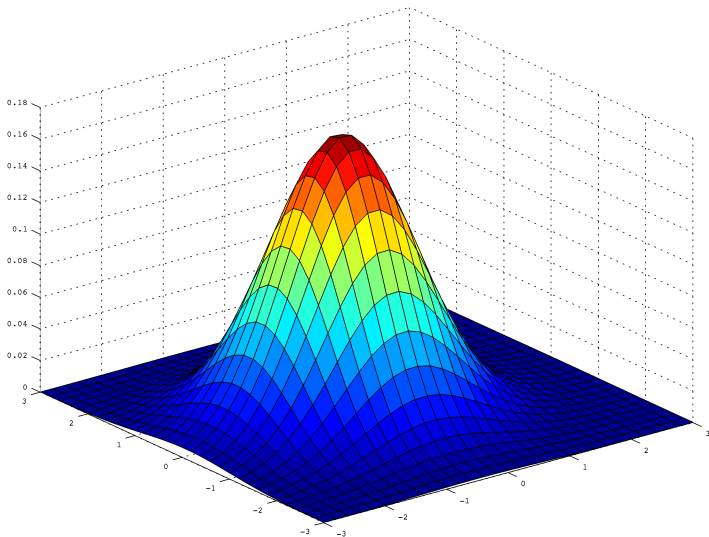
- ▶ Semnale continue:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - v(t))^2 dt}$

# Multiple v.a. normale

- ▶ Probabilitatea a  $N$  v.a. normale, independente, cu același  $\sigma$  dar diferite  $\mu_i$  depinde de **pătratul distanței Euclidiene față de vectorul medie**  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ 
  - ▶ Aproape de  $\mu$ : probabilitate mai mare
  - ▶ Depart de  $\mu$ : probabilitate redusă
  - ▶ Două puncte la aceeași distanță de  $\mu$  au aceeași probabilitate

# Distribuția normală 2D

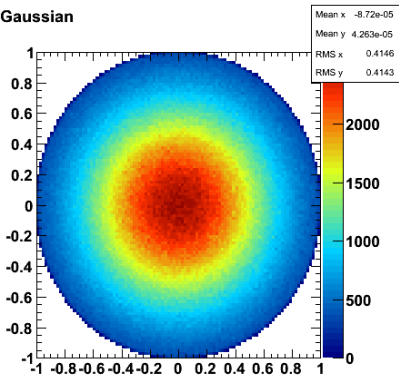
- Distribuția a 2 v.a. normale (distribuția normală 2D)



# Distribuția normală 2D - vedere de sus

- ▶ Vedere de sus
- ▶ Aici,  $\mu = (0, 0)$
- ▶ Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în cercuri concentrice (simetric)

2D-Gaussian





- ▶ V.a. sunt caracterizate prin medii statistice (“*momente*”)
- ▶ Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\bar{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\bar{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- ▶ (Exemplu: entropia  $H(X)$  = valoarea medie a informației)
- ▶ Notăție uzuală:  $\mu$

# Proprietățile valorii medii

- ▶ Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - ▶ pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară

- ▶ Liniaritate

$$E\{c_1A + c_2B\} = c_1E\{A\} + c_2E\{B\}$$

- ▶ Sau:

$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$

- ▶ Fără demonstrație

# Valoarea pătratică medie

- ▶ Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- ▶ Momentul de ordin 2
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

# Varianța

- ▶ Varianța = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- ▶ V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - ▶  $\sigma^2$  = mare: abateri mari față de medie
  - ▶  $\sigma^2$  = mic: valori concentrate în jurul mediei

# Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{\{A - \mu\}^2} \\ &= \overline{A^2 - 2 \cdot A \cdot \mu + \mu^2} \\ &= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\ &= \overline{A^2} - \mu^2\end{aligned}$$

# Suma variabilelor aleatoare

- ▶ Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- ▶ Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- ▶ Dacă  $C = A + B$ , atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

- ▶ Caz particular: dacă  $A$  și  $B$  sunt v.a. normale, cu  $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$  și  $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$ , atunci:
  - ▶  $C$  este tot o v.a. cu distribuție normală,  $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$ , având:
  - ▶ media = suma mediilor:  $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
  - ▶ varianța = suma varianțelor:  $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

## II.2 Procese aleatoare

# Procese aleatoare

- ▶ Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- ▶ Proces aleator **în timp discret**  $f[n]$  = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
  - ▶ ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- ▶ Proces aleator **în timp continuu**  $f(t)$  = o secvență de v.a. la orice moment de timp
  - ▶ ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- ▶ Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
  - ▶ ex.:  $f(t_0)$  = valoarea la momentul  $t_0$  este o v.a.



# Realizări ale proceselor aleatoare

- ▶ **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
  - ▶ ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; dar am fi putut măsura orice altă realizare
- ▶ Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
  - ▶ la fel ca atunci când considerăm o v.a.

# Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- ▶ Fiecare eșantion  $f(t_1)$  dintr-un proces aleator este o v.a.
  - ▶ descris de o **distribuție de ordin 1**
  - ▶ are FR  $F_1(x; t_1)$
  - ▶ are FDP / FMP  $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x; t_1)}{dx}$
  - ▶ distribuția depinde de momentul  $t_1$
- ▶ Un eșantion la alt moment  $t_2$  este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
  - ▶ altă FR  $F_1(x; t_2)$
  - ▶ altă FDP / FMP  $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x; t_2)}{dx}$
- ▶ Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- ▶ Indicele  $w_1$  arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții *de ordin 1*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

## Distribuții de ordin 2

- ▶ O pereche de v.a.  $f(t_1)$  și  $f(t_2)$  formează un sistem de 2 v.a.:
  - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
  - ▶ au FR comună  $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
  - ▶ au FDP / FMP comună  $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
  - ▶ distribuția depinde de momentele  $t_1$  și  $t_2$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

# Distribuții de ordin $n$

- ▶ Generalizare la  $n$  eșantioane ale unui p.a.
- ▶ Un set de  $n$  v.a.  $f(t_1), \dots, f(t_n)$  dintr-un proces aleator  $f(t)$ :
  - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin  $n$**
  - ▶ au FR comună  $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$
  - ▶ au FDP / FMP comună  $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
  - ▶ depind de momentele de timp  $t_1, t_2, \dots, t_n$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de  $n$  valori (distribuții *de ordin  $n$* )
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii statistice și temporale

Pentru procese continue:

1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

## 3. Varianța

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- Varianța se poate calcula pe baza celorlalte două:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2 - 2f(t_1)\mu(t_1) + \mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- Observații:

- aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul  $t_1$
- ele caracterizează doar eșantionul de la momentul  $t_1$
- la alt moment de timp  $t_2$ , v.a.  $f(t_2)$  este diferită, și valorile medii pot diferi

## 4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

## 5. The correlation function (for different random processes $f(t)$ and $g(t)$ )

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

### ► Observații:

- aceste funcții au valori diferite pentru diverse perechi de valori  $(t_1, t_2)$

# Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește  $\int$  cu  $\sum$ :

1.  $\overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$
2.  $\overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$
3.  $\sigma^2(t_1) = \overline{\{f[t_1] - \mu(t_1)\}^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1)$
4.  $R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$
5.  $R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$



# Medii temporale

- ▶ Dacă avem acces doar la o singură realizare  $f^{(k)}(t)$  a procesului?
- ▶ Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare  $f^{(k)}(t)$ , în timp**
- ▶ Pentru procese continue:

## 1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) dt$$

## 2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

## 3. Varianța temporală

$$\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

► Poate fi calculată ca:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

► Observație:

► aceste valori nu mai depind de timpul  $t$

## 4. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

## 5. Funcția de corelație temporală (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$ )

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

# Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește  $\int$  cu  $\sum$ ,  $T$  cu  $N$ , și se împarte la  $2N + 1$  în loc de  $2T$

$$1. \overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]$$

$$2. \overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t])^2$$

$$3. \sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}[t] - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$$

## 4. Autocorelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

## 5. Corelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

# Realizări de lungime finită

Dacă o realizare nu se întinde de la timpul  $-\infty$  la  $\infty$ , ci doar de la un  $t_{min}$  la  $t_{max}$ , se folosește  $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$  sau  $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$  pentru mediile temporale

- Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$$

# Medii statistice și temporale

- ▶ Mediile statistice sunt, de obicei, cele de interes
  - ▶ dar necesită cunoașterea distribuțiilor
- ▶ În practică, pentru semnale necunoscute, se poate măsura doar o singură realizare
  - ▶ putem calcula doar mediile temporale
- ▶ Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt identice (“*ergodicitate*”)

# Procese aleatoare staționare

- ▶ În general, mediile statistice depind de timp
  - ▶ pot fi diferite la alt moment de timp  $t_2$
- ▶ Proces aleator **staționar** = mediile statistice rămân aceleași la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- ▶ Echivalent: Distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

- ▶ Practic, mediile nu trebuie să mai depindă de timp  $t$



# Staționar în sens strict sau larg

- ▶ Proces aleator **staționar în sens strict**:
  - ▶ relația e valabilă pentru toți  $n$
- ▶ Proces aleator **staționar în sens larg**:
  - ▶ relația e valabilă doar pentru  $n = 1$  și  $n = 2$  (cele mai folosite)

# Consecințe ale staționarității

- Pentru  $n = 1$ :

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **aceleași** la orice moment de timp  $t$

$$\overline{f(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = \text{constant}, \forall t$$

## Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru  $n = 2$ :

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- ▶ Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp**  $\tau = t_2 - t_1$  dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$$

- ▶ Depinde doar de valoarea  $\tau =$  diferența de timp dintre cele două eșantioane

# Consecințe ale staționarității

- ▶ Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **staționare**:

- ▶ funcția depinde numai de  $\tau = t_2 - t_1$ , în loc de  $t_1$  și  $t_2$

- ▶ Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași

- ▶ Autocorelația temporală:

- ▶ pentru p.a. continue

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)f^{(k)}(t+\tau)dt \end{aligned}$$

- ▶ pentru p.a. discrete

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]f^{(k)}[t+\tau] \end{aligned}$$

- ▶ lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la

## Consecințe ale staționarității

- ▶ Idem pentru funcția de corelație dintre procese aleatoare diferite
- ▶ Depinde doar de **diferența de timp**  $\tau = t_2 - t_1$  dintre două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

- ▶ Definiția este similară cu formulele de la f. de autocorelație de pe slide-ul anterior

# Interpretarea autocorelației

- ▶  $R_{ff}(\tau)$  = media produsului a două eșantioane situate la distanță de  $\tau$ 
  - ▶ ne spune dacă eșantioanele variază în același sens sau nu
- ▶ Idem pentru corelație, doar că eșantioanele provin din p.a. diferite,  $f$  și  $g$
- ▶ Exemplu:
  - ▶  $R_{ff}(0.5) > 0$ : două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative  $\Rightarrow$  produsele sunt majoritar pozitive)
  - ▶  $R_{ff}(1) < 0$ : două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul e pozitiv, celălalt e negativ  $\Rightarrow$  produsele sunt majoritar negative)
  - ▶  $R_{ff}(2) = 0$ : două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt necorelate (produsele sunt în medie 0, deci la fel de multe pozitive cât negative)

# Procese aleatoare ergodice

- ▶ În practică, avem acces la o singură realizare
- ▶ Proces aleator **ergodic** = mediile temporale pe orice realizare sunt **identice** cu mediile statistice
- ▶ Ergodicitatea înseamnă:
  - ▶ Se pot calcule toate mediile pe baza unei singure realizări
    - ▶ dar realizarea trebuie să fie foarte lungă (lungimea  $\rightarrow \infty$ ) pentru valori precise
  - ▶ Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
    - ▶ o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

# Procese aleatoare ergodice

- ▶ Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
  - ▶ de ex. zgomote de tensiune
- ▶ Exemplu de proces ne-ergodic:
  - ▶ se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
  - ▶ o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul



### I.3 Proprietăți ale autocorelației

# Densitatea spectrală de putere

- ▶ Densitatea spectrală de putere (DSP)  $S_{ff}(\omega)$  reprezintă puterea procesului aleator la fiecare frecvență  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ )
- ▶ DSP descrie cum este distribuită puterea semnalului în frecvență
  - ▶ de ex. unele procese au mai multă putere la frecvențe joase, altele la frecvențe înalte
- ▶ Puterea în banda de frecvență  $[f_1, f_2]$  este  $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ Puterea totală a procesului aleator este  $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ DSP este o funcție măsurabilă practic
  - ▶ poate fi determinată experimental
  - ▶ este importantă în aplicații practice (ingineresti)

# Teorema Wiener-Hincin

Teoremă:

- **Densitatea spectrală de putere = transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Fără demonstrație
- Leagă două concepte de natură diferită
  - funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
  - DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

# Zgomot alb

- ▶ Zgomot alb = proces aleator cu funcția de autocorelație egală cu un Dirac

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

- ▶ este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
  - ▶ autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice  $\tau \neq 0$
  - ▶ oricare două eșantioane diferite ( $\tau \neq 0$ ) au corelație zero (necorelate)
    - ▶ valorile a două eșantioane nu au legătură între ele
- ▶ Densitatea spectrală de putere = transf. Fourier a unui Dirac = constantă  $\forall \omega$ 
  - ▶ putere constantă la toate frecvențele, până la  $f = \infty$
- ▶ Zgomotul alb poate avea orice distribuție (normală, uniformă etc.)
  - ▶ termenul “zgomot alb” nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate

# Zgomot alb de bandă limitată

- ▶ În practică, puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
  - ▶ pentru că puterea totală  $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff\omega}$  nu poate fi infinită
  - ▶ zgomot alb “*de bandă limitată*”
- ▶ În acest caz, autocorelația = aproximativ un Dirac, dar nu infinit de “subțire”
  - ▶ eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
  - ▶ de ex. din cauza unor mici capacități parazite

- ▶ **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
  - ▶ Zgomot alb, Gaussian, aditiv
  - ▶ tipul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- ▶ Înseamnă:
  - ▶ aditiv: zgomotul se adună cu semnalul original (de ex. nu se multiplică cu acesta)
  - ▶ gaussian: eșantioanele au distribuția normală
  - ▶ alb: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele

- ▶ Până aici s-a făcut în 2018-2019. Celelalte slide-uri din acest fișier nu se cer.

# Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

- Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = \text{const}$$

- Dem.: două eșantioane la un interval  $\infty$  sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

- Dem.: se pornește de la  $\overline{(f(t) - f(t + \tau))^2} \geq 0$
- Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși



# Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

- ▶ Dem.: Se pune  $\tau = 0$  în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la  $\infty$

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

- ▶ Dem.:  $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$ ,  $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

# Autocorelația unui proces aleator filtrat

- ▶ Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
  - ▶ fie în timp continuu: intrarea  $x(t)$ , sistemul  $H(s)$ , ieșirea  $y(t)$
  - ▶ fie în timp discret: intrarea  $x[n]$ , sistemul  $H(z)$ , ieșirea  $y[n]$
- ▶ Cum depinde autocorelația ieșirii  $y$  de cea a intrării  $x$ ?
- ▶ Se știe că  $y$  este convoluția lui  $x$  cu răspunsul la impuls  $h$

- Pentru un proces aleator în timp discret

$$\begin{aligned}R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n+\tau]} \\&= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n-k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2] \overline{x[n-k_1]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau-k_1+k_2]\end{aligned}$$

- Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

► Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

► Schimbare de variabilă  $\tau - k_1 + k_2 = u$

► rezultă  $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- ▶ DSP a lui  $y$  = DSP a lui  $x$  multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- ▶ Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

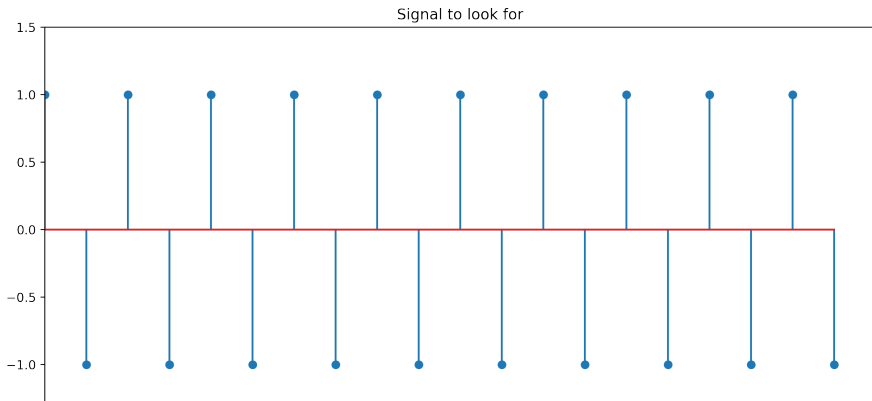
# Aplicații ale (auto)corelației

- ▶ Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- ▶ Corelația a două semnale = o măsură a **similarității** celor două semnale
  - ▶ Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celui alt
  - ▶ Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- ▶ Corelația poate fi utilizată pentru localizare
  - ▶ Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
  - ▶ Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
  - ▶ Valori mici atunci când nu se potrivesc

# Semnalul căutat

/home/ncleju/.local/bin/pweave:6: UserWarning: In Matplotlib individual lines on a stem plot will be added as a LineCollection instead of individual lines. This significantly improves the performance of a stem plot. To remove this warning and switch to new behaviour, set the "use\_line\_collection" keyword argument

```
from pweave.scripts import weave
```

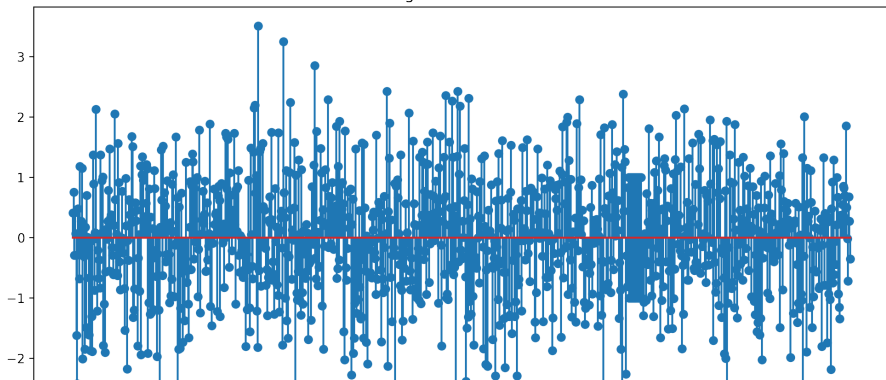


# Semnalul de dimensiuni mari

/home/ncleju/.local/bin/pweave:6: UserWarning: In Matplotlib individual lines on a stem plot will be added as a LineCollection instead of individual lines. This significantly improves the performance of a stem plot. To remove this warning and switch new behaviour, set the "use\_line\_collection" keyword argument

```
from pweave.scripts import weave
```

Signal to search in

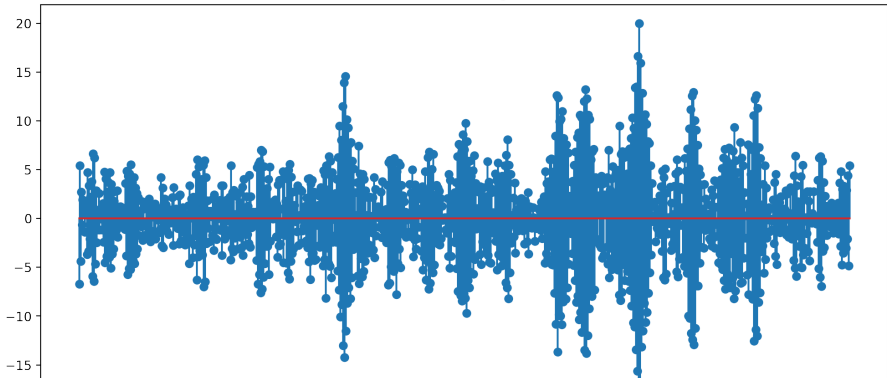




# Rezultatul corelației

```
/home/ncleju/.local/bin/pweave:6: UserWarning: In Matplotlib
individual lines on a stem plot will be added as a LineCollection
instead of individual lines. This significantly improves the
performance of a stem plot. To remove this warning and switch
new behaviour, set the "use_line_collection" keyword argument
from pweave.scripts import weave
```

Correlation signal



# Identificare de sistem

- Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemului

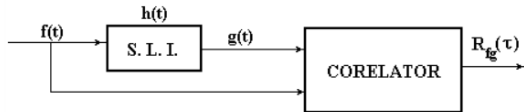


Figure 1: System identification setup

# Identificare de sistem

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \overline{f[n]g[n+\tau]} \\ &= f[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{f[n]f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_{ff}[\tau-k] \\ &= h[\tau] \star R_{ff}[\tau] \end{aligned}$$

- ▶ Dacă intrarea  $f$  este **zgomot alb** cu puterea  $A$ ,  $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$ , și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] \star R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] \star \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- ▶ Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut