Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

I.1 Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

Fie X = zar

- **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - Prescurtat: v.a.

$X =$

- Notație uzuală: X, Y etc..
- Exemple:
  - X = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - V_{in} = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

5.0012 V
4.9988 V
4.999995 V

Realizări ale unei variabile aleatoare

$X = 4$

$X = 3$

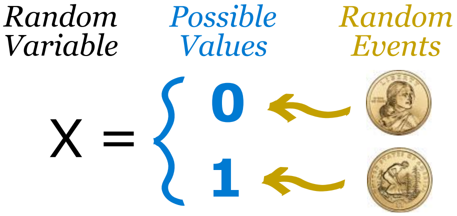
- **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - mulțimea tuturor realizărilor
- Exemplu: aruncarea unui zar
  - V.a. se notează X
  - Se poate obține o realizare $X = 3$
  - Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\Omega = (4.9V, 5.1V)$

Aruncarea unei monede

- Variabila aleatoare $X =$ "fața obținută la atuncarea unei monede"



(sursa imaginii: *https://www.mathsisfun.com/data/random-variables.html*)

V.a. discrete și continue

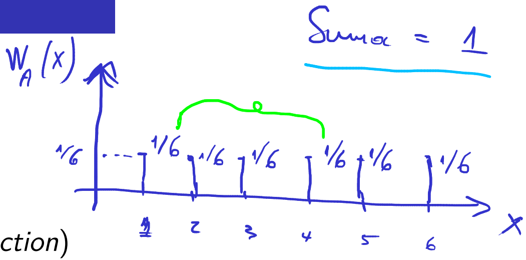
- V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
  - Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
  - Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

$Y = (4.9, 5.1)$

Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- Exemple:
  - Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
  - Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor diferite*.
  - Valoarea este afectată de zgomot
  - Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

Funcția masă de probabilitate



- Fie o v.a. discretă A
- **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*) = probabilitatea ca A să aibă valoarea egală cu x

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- pe scurt, se mai numește **distribuția** variabilei A
- Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă

Calculul probabilității cu FMP

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^{b} w_A(x)$$

$P(\underset{a}{2} \leq A \leq \underset{b}{4}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

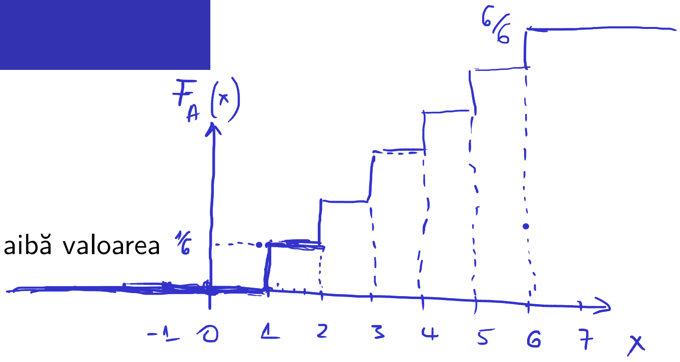
$= \sum_{x=a}^{b} w_A(x)$

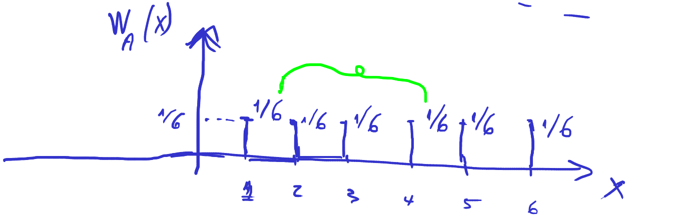
Funcția de repartiție

- **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- Pentru v.a. discrete, FR este "în trepte"





Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v-1)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a-1)$$

$P(2 \leq A \leq 4) =$

$= F(4) - F(1)$

$P(A \leq 4) \quad - \quad P(A \leq 1)$

$P(A = 5) = F(5) - F(4)$

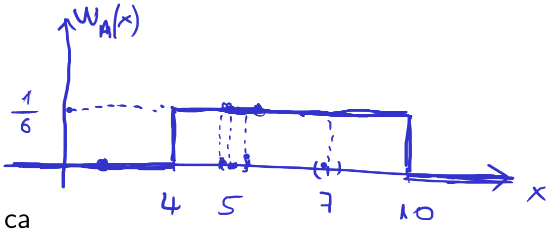
Relația între FMP și FR

- FR este *suma cumulativă* (un fel de "integrală discretă") a FMP

$$F_A(x) = \sum_{t=-\infty}^{t=x} w_A(t)$$

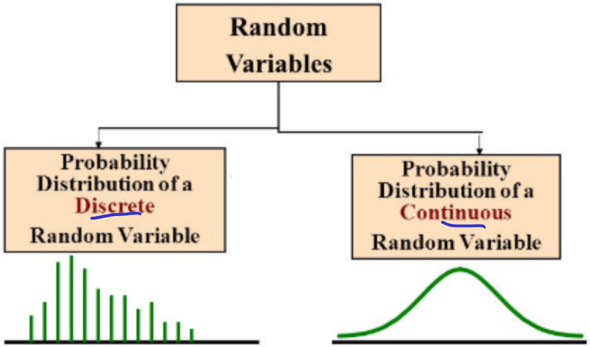
- Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

Funcția densitate de probabilitate



- Fie o v.a. **continuă** A
- **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** = probabilitatea ca valoarea lui A să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x, totul supra ϵ
- Se notează $w_A(x)$, se mai numește **distribuția** variabilei A
- Informal: FDP reprezintă probabilitatea ca valoarea lui A să fie **în jurul lui** x

Variabile aleatoare discrete și continue



(sursa imaginii: "Probability Distributions: Discrete and Continuous", Seema Singh, *https://towardsdatascience.com/probability-distributions-discrete-and-continuous-7a94ede66dc0*)

Probabilitatea unei valori exacte

- Probabilitatea ca o v.a. continuă A să ia **exact** o valoare x este **zero**
  - pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
  - de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii x, și nu exact egal cu x

Calculul probabilității cu FDP

- Probabilitatea ca A să aibă exact valoarea v este întotdeauna 0

$$P\left\{A = v\right\} = 0$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b = integrala FDP între a și b:

$$P\left\{a \leq A \leq b\right\} = \int_a^b w_A(x)dx$$

Discret $\longleftrightarrow$ Continuu

$$\sum_a^b \longleftrightarrow \int_a^b$$

Funcția de repartiție

- **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- Aceeași definiție ca și la v.a. discrete

Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca valoarea lui A să fie între a și b:

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

$P(A \leq b) - P(A \leq a)$

$P(2 \leq A \leq 4) =$

$= F(4) - F(2)$

$P(A \leq 4) - P(A \leq 2)$

- Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis
  - $[a, b]$ sau (a, b), nu contează
  - de ce?

Relația între FDP și FR

- FR este **integrala** FDP
- FDP este **derivata** FR

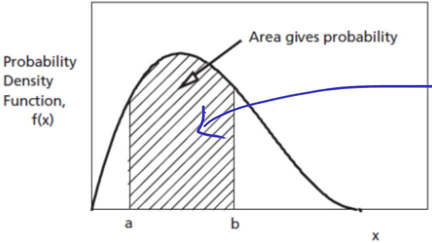
$$F_A(x) = \int_{-\infty}^{x} w_A(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} w_A(x) &= \frac{\mathrm{d}F_A(x)}{\mathrm{d}x} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F_A(x+\epsilon) - F_A(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(A \in [x-\epsilon, x+\epsilon])}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Interpretare grafică

- Probabilitatea ca A să fie între a și b este **suprafața de sub FDP**
  - adică integrala de la a la b
- Probabilitatea ca A să fie exact egal cu o valoare este zero
  - aria de sub un punct este nulă

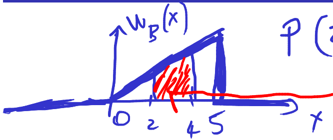
$$P(a \le A \le b) = \int_a^b w_A(x)\,dx$$



$$P(a \le A \le b)$$

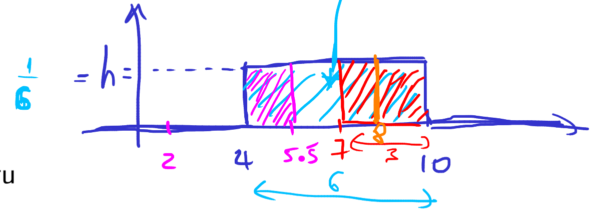
(sursa: "https://intellipaat.com/blog/tutorial/statistics-and-probability-tutorial/probability-distributions-of-continuous-variables/*)

V.a. discrete vs continue



$P(2 \le B \le 4) = \text{Aria}$

Aria totală = 1



Comparație între v.a. discrete și continue

- FR $F_A(x)$ are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- FDP/FMP $w_A(x)$ este derivata FR
  - la v.a. continue:
    - este o derivată obișnuită
    - reprezintă probabilitatea de a fi "in jurul" valorii x
  - la v.a. discrete:
    - un fel de "derivată discretă"
    - reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea x

$$P(4 \le A \le 10) = 1 = \int_4^{10} w_A(x)\,dx$$

$$P(7 \le A \le 10) = \int_7^{10} w_A(x)\,dx$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

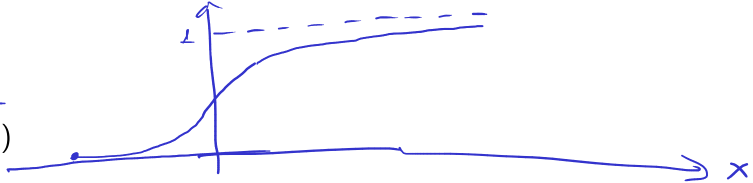
$$P(2 \le A \le 5.5) = 1.5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1.5}{6}$$

$$P(A=8) = P(8 \le A \le 8) = 0$$

Proprietățile v.a

FR: (F. Repartiție)

- FR este mereu pozitivă, $F_A(x) \geq 0$ ≤ 1
- FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1



$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

$F(x) = P(A \leq x)$

FDP/FMP: (distribuții)

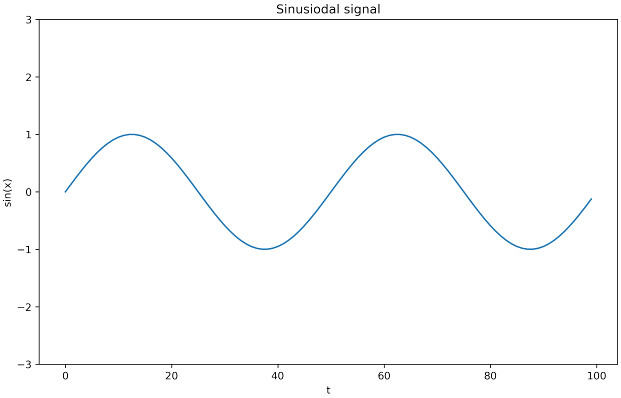
- PDF/PMF sunt mereu pozitive $w_A(x) \geq 0$ ≤ 1
- Integrala/suma pe întreg domeniul $= 1$

Aria totală $=$
$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x)\mathrm{d}x = 1$$

〃
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

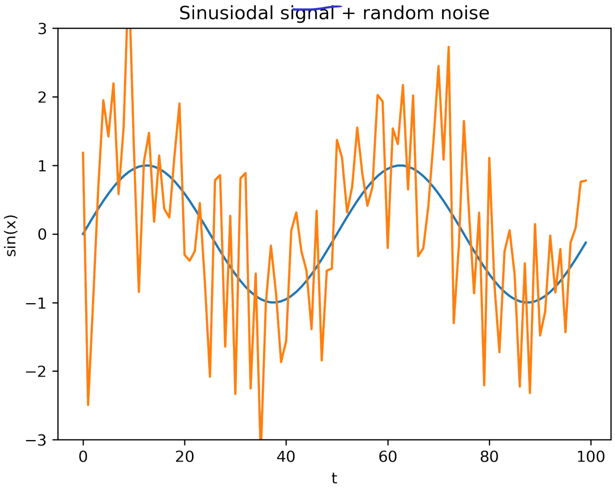
Diferite distribuții

- Semnal sinusoidal



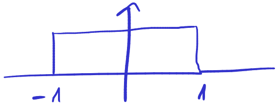
Diferite distribuții

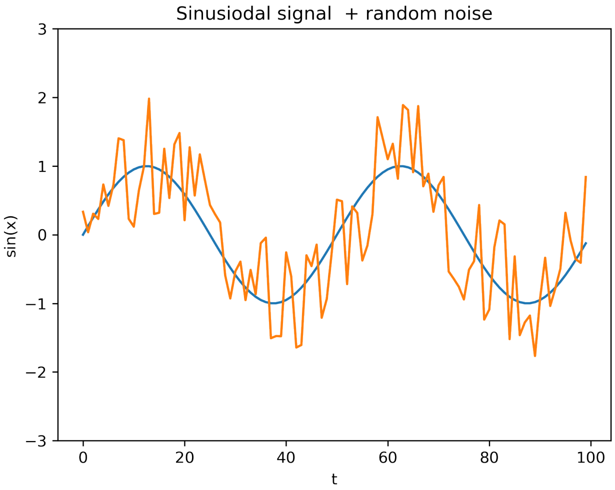
- Sinus + zgomot (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)



Diferite distribuții

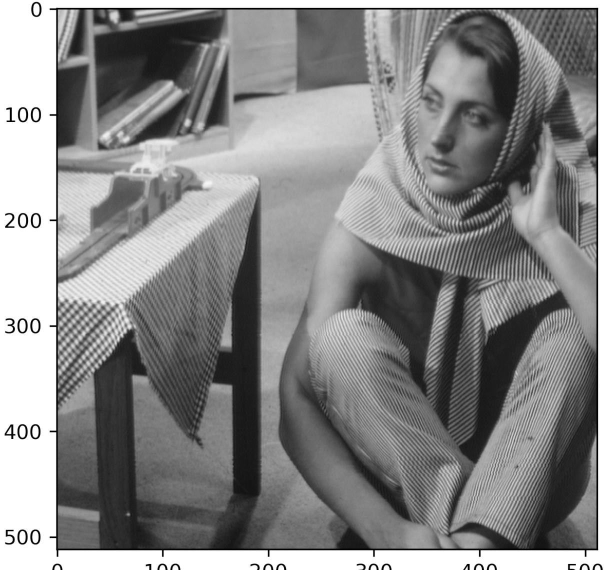
- Sinus + zgomot (uniform $\mathcal{U}[-1, 1]$)
- Ce diferă? Tipul distribuției





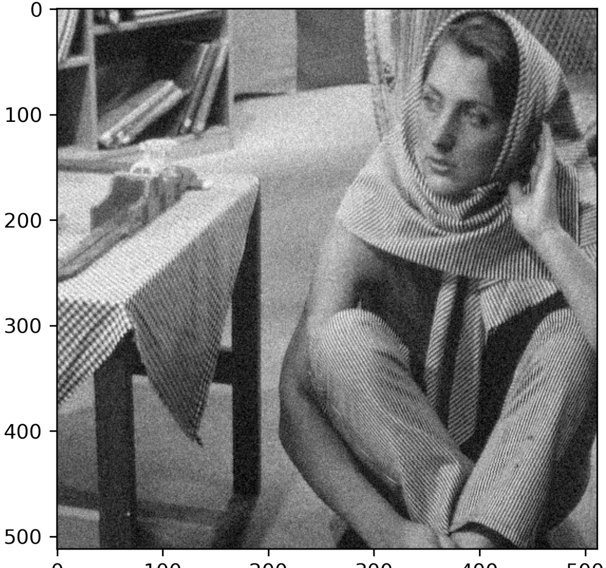
Diferite distribuții

- Imagine originală



Diferite distribuții

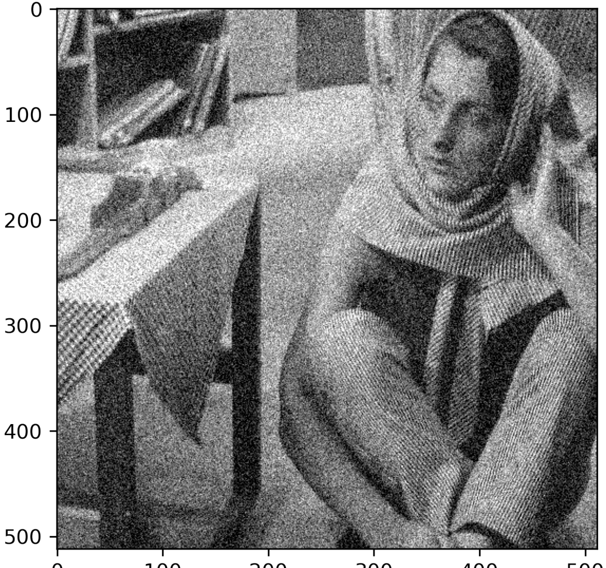
- Imagine + zgomot (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

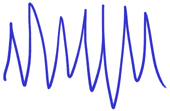


pixel + v.a

Diferite distribuții

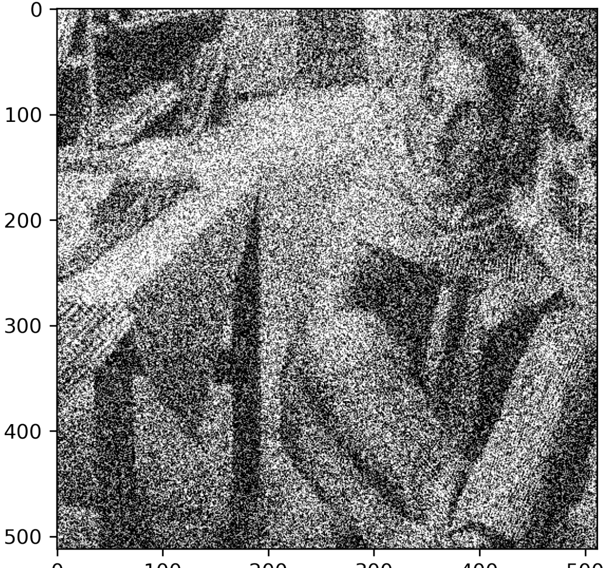
- Imagine + zgomot mai mare (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 10$)





Diferite distribuții

- Imagine + zgomot (uniform, $\mathcal{U}[-5, 5]$)



Distribuția normală „gaussiană"

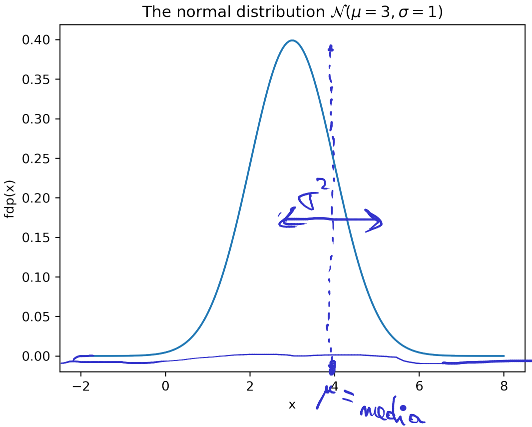
- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ = medie

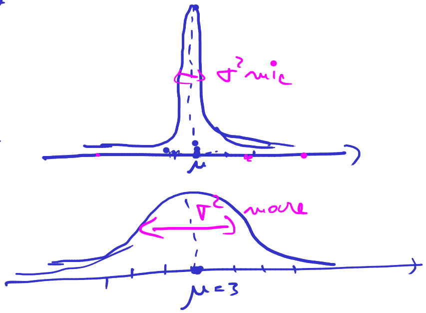
σ = deviație standard

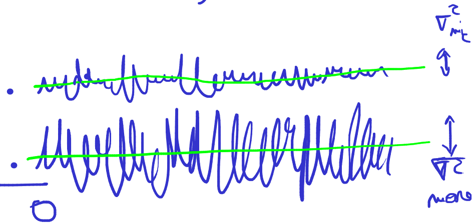
σ^2 = varianță



σ = mic

σ = mare





Distribuția normală

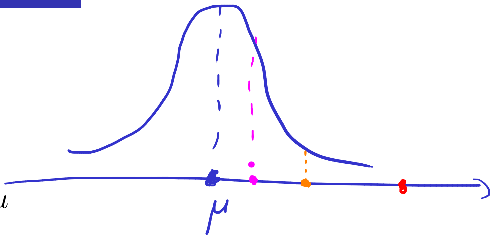
$\sigma^2 =$ "variantă"

- Are doi parametri:
  - **Media** $\mu =$ "centrul" funcției
  - **Deviația standard** $\sigma =$ "lățimea" funcției
    - σ mic $=$ funcție îngustă și înaltă
    - σ mare $=$ funcție largă și joasă
- Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala $= 1$)
- Extrem de des întâlnită în practică
- Orice valoare reală este posibilă ($w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 5)$

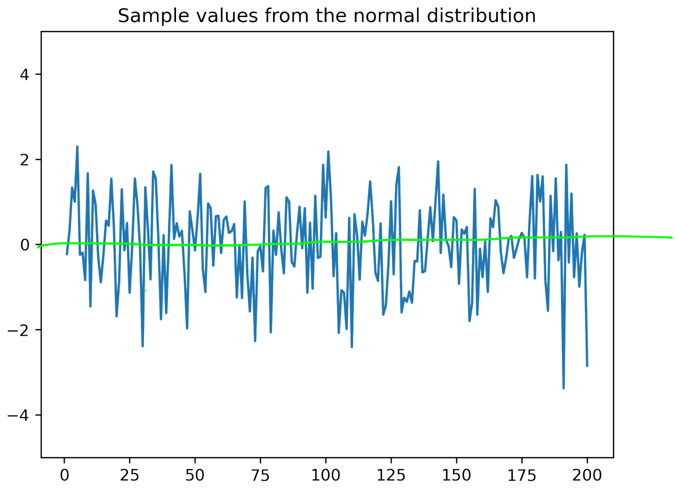
Distribuția normală

- Distribuția descrește pe măsură ce x se îndepărtează de centrul μ
  - Datorită termenului $-(x-\mu)^2$ de la exponent
  - Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui μ $(x-\mu=0)$
  - Valorile apropiate de μ sunt mai probabile, valorile mai depărtate de μ sunt mai puțin probabile
- Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de μ, cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de μ

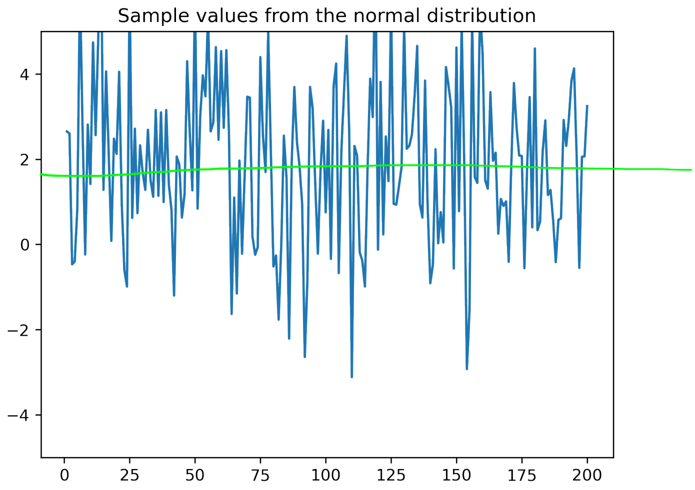


$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemple de valori generate cu distribuția normală (mu=0, sigma^2=1)



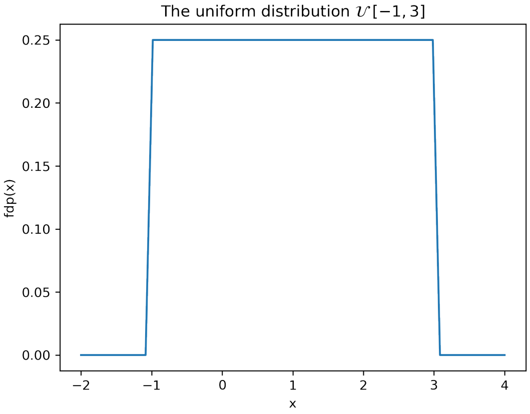
Exemple de valori generate cu distribuția normală (mu=2, sigma^2=4)

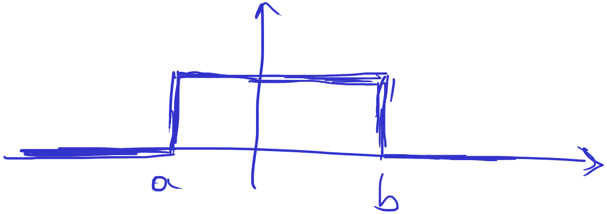


Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

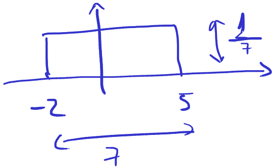
$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$





Distribuția uniformă

- Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- "Înălțimea" funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
  - pentru ca integrala (aria) să fie 1
- Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
  - valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- Se notează cu $\mathcal{U}\,[a, b]$



Alte distribuții

- Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- Cum calculăm $\int_a^b$ dintr-o distribuție normală?
  - Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- Se folosește *the error function*:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

= funcție standard

- Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{F_A(X) = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}))}$$

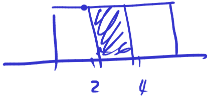
- Valorile funcției *erf()* sunt tabelate / se calculează numeric
  - de ex. pe Google, căutați $erf(0.5)$
  - Alte valori folositoare:
    - $erf(-\infty) = -1$
    - $erf(\infty) = 1$

$\Leftrightarrow$ $F_A(-\infty) = 0$

$F_A(\infty) = 1$

Exercițiu

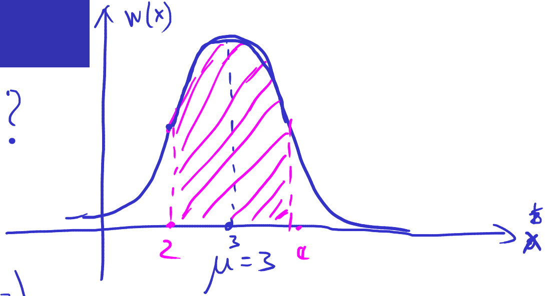
simplu :



$$P(2 \le A \le 4) = ?$$

$$= \int_2^4 w(x)\,dx$$

$$= F(4) - F(2)$$



Exercițiu:

- Fie A o v.a. cu distribuția $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculați probabilitatea ca $A \in [2, 4]$

$\mu \quad \sigma^2$

$$P(2 \le A \le 4) = \int_2^4 w_A(x)\,dx = F_A(4) - F_A(2)$$

$$F_A(4) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{4-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right) = 0.76$$

$$F_A(2) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{2-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right) = 0.24$$

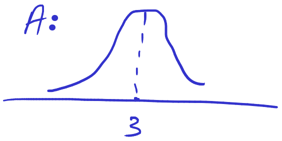
$$\Rightarrow P(2 \le A \le 4) = 0.52$$

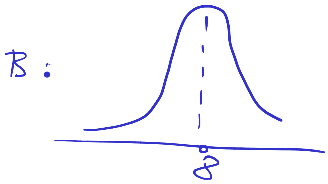
$$P(-\infty \le A \le 4) = \int_{-\infty}^4 w(x) = F(4) - F(-\infty)$$

$$F(4) = 0.76$$

$$F(-\infty) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(-\infty)) = 0$$

Suma unei constante cu o v.a.





- Fie o v.a. A
- Ce reprezintă $B = 5 + A$?

Răspuns:

- B este tot o variabilă aleatoare
- B are același tip de distribuție, dar "translată" cu 5 la dreapta

Exemplu:

- A este o v.a. cu distribuție normală $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- Care este distribuția variabilei $B = 5 + A$?
- Răspuns: $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

V.a. ca funcții de alte v.a

- O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- Exemple: dacă A este o v.a. distribuită $\mathcal{U}\ [0, 10]$, atunci
  - $B = 5 + A$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U}\ [5, 15]$
  - $C = A^2$ este de asemenea o v.a.
  - $D = cos(A)$ este de asemenea o v.a.

  altă distribuție
- Motivație: dacă A este aleatoare, și valorile B, C, D sunt aleatoare
- A, B, C, D nu sunt independente
  - O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Fie un sistem cu două v.a. continue A și B
- Care este probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea în jurul (x, y)?
- Distribuția valorilor perechii (A, B) este descrisă de:
  - Densitatea de probabilitate comună $w_{AB}(x, y)$
  - Funcția de repartiție comună $F_{AB}(x, y)$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB}\left\{A \leq x \cap B \leq y\right\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea într-o vecinătate a (x, y)
- Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P\left\{A = x \cap B = y\right\}$$

Variabile independente

- Două v.a. A și B sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- Pentru v.a. independente, probabilitatea ca A să fie în jurul lui x și B în jurul lui y este produsul celor două probabilități

$$\boxed{w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)}$$

- Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- Similar pentru mai mult de două v.a.

$$P\left((zar1, zar2) = (6,6)\right) = \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(zar1 = 6) \cdot P(zar2 = 6)$$

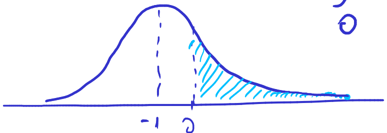
Variabile independente

$$P\left((X,Y,Z) \geq 0 \text{ simultan}\right) \overset{\text{indep.}}{=} \underbrace{P(X \geq 0)}_{0.16} \cdot \underbrace{P(Y \geq 0)}_{0.16} \cdot \underbrace{P(Z \geq 0)}_{0.16} = 0.16^3$$

Exercițiu:

- Calculați probabilitatea ca trei v.a. X, Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(\overset{\mu}{-1}, \overset{\sigma^2=1}{1})$ să fie toate pozitive simultan
  - ***i.i.d*** = "independente și identic distribuite"

$$P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} w(x)\,dx = \underbrace{F(\infty)}_{1} - \underbrace{F(0)}_{\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{0+1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \ldots 0.84} = 0.16$$



Multiple v.a. normale

- Fie un set de N v.a. normale $(A_1, \ldots A_N)$, cu medii diferite μ_i dar aceeași deviație standard σ
- Probabilitatea ca $(A_1, \ldots A_N)$ să fie în jurul valorii $(x_1, \ldots x_N)$ este

$$\boxed{w_{A_1,\ldots A_N}(x_1, \ldots x_N) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{\frac{(x_1-\mu_1)^2+\ldots+(x_N-\mu_N)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$d(x, \mu)^2 = (x_1-\mu_1)^2 + \ldots + (x_N-\mu_N)^2$$

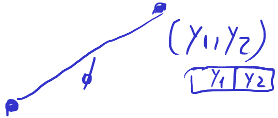
- Probabilitatea depinde de **distanța Euclideană** dintre $\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_N)$ și $\mu = (\mu_1, \ldots \mu_N)$

Distanța Euclideană

- **Distanța Euclideană (geometrică)** între 2 vectori N-dimensionali

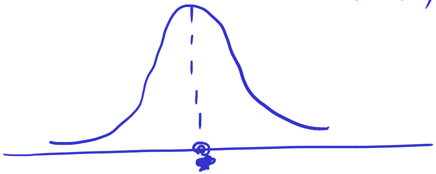
$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + \ldots + (u_N-v_N)^2}$$

- Unidimensional: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = |u-v|$
- 2D: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2}$
- 3D: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + (u_3-v_3)^2}$
- ...
- N-dimensional: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(u_i-v_i)^2}$
- ...
- Semnale continue: $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(u(t)-v(t))^2 dt}$



$(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$

$d = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

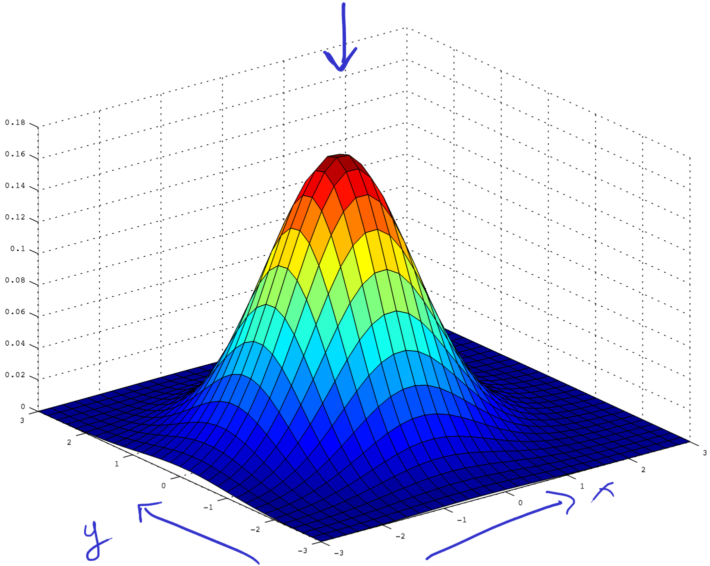


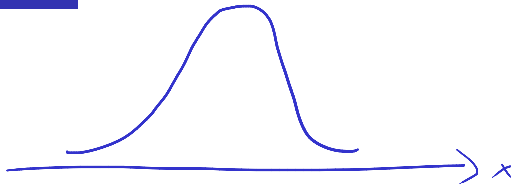
Multiple v.a. normale

- Probabilitatea a N v.a. normale, independente, cu același σ dar diferite μ_i depinde de **pătratul distanței Euclidiene față de vectorul medie** $\mu = (\mu_1, ...\mu_N)$
  - Aproape de μ: probabilitate mai mare
  - Departe de μ: probabilitate redusă
  - Două puncte la aceeași distanță de μ au aceeași probabilitate

Distribuția normală 2D

- Distribuția a 2 v.a. normale (distribuția normală 2D)

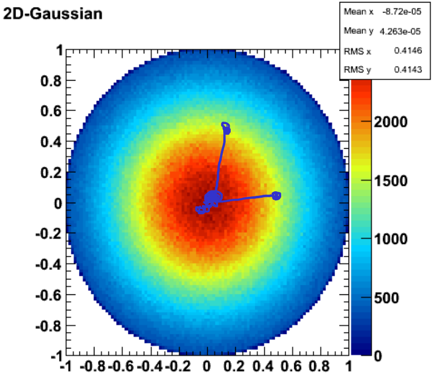


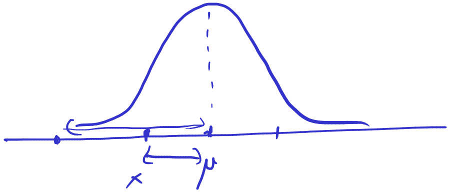


$(A,B) = (x,y)$

Distribuția normală 2D - vedere de sus

- Vedere de sus
- Aici, $\mu = (0, 0)$
- Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în cercuri concentrice (simetric)





Medii statistice

- V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("*momente*")
- **Valoarea medie** (momentul de ordin 1)
- Pentru v.a. continue:

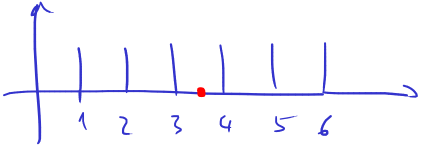
$$\overline{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\rightarrow \quad \overline{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- (Exemplu: entropia H(X) = valoarea medie a informației)
- Notație uzuală: μ

$$\mu_A = \overline{A} = E\{A\} =$$



Ex: $\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) = \sum_{1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} =$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} +$$

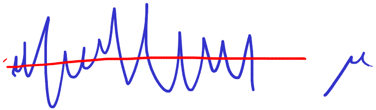
$$+ 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

Ce înseamna valoarea medie

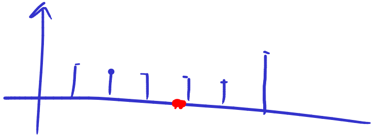
- Ce înseamnă, practic, valoarea medie a unei variabile aleatoare?
  - Dacă avem $N \to \infty$ valori aleatoare conform distribuției respective, valoarea medie = media tuturor acestor valori;
  - Dacă trebuie să prezicem valoarea unei variabile aleatoare X, și plătim un cost proporțional cu pătratul erorii pe care o facem, $(u - X)^2$, valoarea medie μ este cea mai bună alegere, întrucât minimizează costul global:

$$\mu = \arg\min_u \int_{-\infty}^{\infty} (u - x)^2 \cdot w(x) dx$$

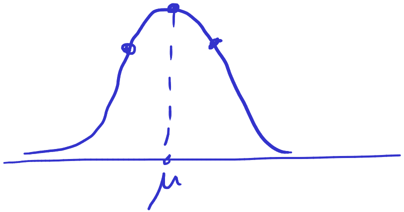
  - Demonstrație: la tablă: derivare, derivata = 0



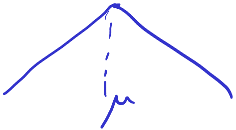
Ce înseamna valoarea medie

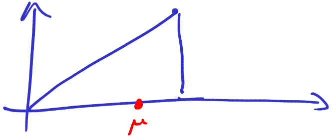


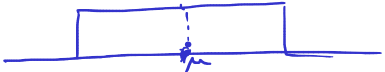
- Valorile care au probabilitate ridicată "trag" valoarea medie înspre ele
- Pentru distribuții cu formă simetrică (de ex. distribuția normală), valoarea medie = valoarea centrală a funcției
  - Demonstrație: ambele laturi ale funcției "trag" valoare medie înspre ele în mod egal, valoarea medie rămâne la mijloc



- Pentru distribuția normală, $\boxed{\overline{X} = \mu}$
- Pentru distribuția uniformă $\mathcal{U}[a, b]$, $\overline{X} = \frac{a+b}{2}$ (mijlocul intervalului)







Proprietățile valorii medii

- Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- Pentru două variabile aleatoare A și B (independente):
- Liniaritate

$$E\{\underbrace{c_1 A + c_2 B}\} = c_1 E\{A\} + c_2 E\{B\}$$

- Sau:

$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$

- Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- Momentul de ordin 2
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

Zar: $\sum_{1}^{6} x^2 \cdot w(x) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + \frac{16}{4} \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \ldots$

- Interpretare: media pătratelor = ~~energia~~ medie a unui semnal

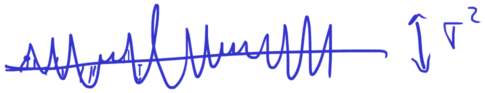
puterea

Varianța

- Varianța = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A-\mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w_A(x)dx$$

$$(x-\mu)^2$$



- V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A-\mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w_A(x)$$

Zar: $\mu = 3.5$

$$\sigma^2 = (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

- Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - σ^2 = mare: abateri mari față de medie
  - σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \overline{(A-\mu)^2} \\
&= \overline{A^2 - 2\cdot A\cdot\mu + \mu^2} \\
&= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\
&= \overline{A^2} - \mu^2
\end{aligned}
$$

var.

μ

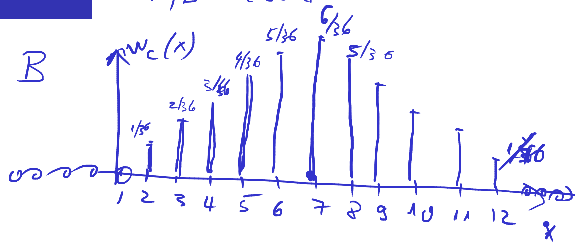
v.p.m. $-(\text{media})^2$

$$\sigma^2 = \overline{A^2} - \mu^2$$

Suma variabilelor aleatoare

$\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\} * \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\}$ $\quad C = A + B$

1...6 1...6
A, B = zaruri



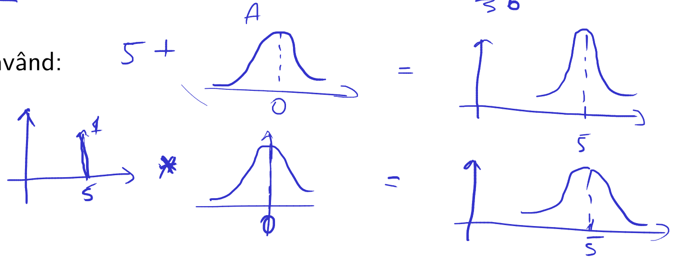
- Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- Dacă $C = A + B$, atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

$P(A+B=2) = \frac{1}{36}$

$P(A+B=3) = \frac{2}{36}$

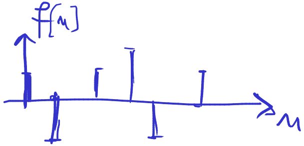
- Caz particular: dacă A și B sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$, atunci:
  - C este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$, având:
  - media = suma mediilor: $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
  - varianța = suma varianțelor: $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

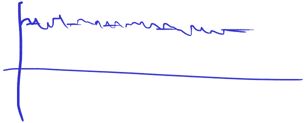


II.2 Procese aleatoare

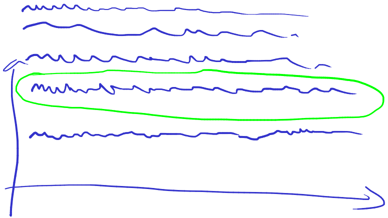
Procese aleatoare

- Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
  - ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ = o secvență de v.a. la orice moment de timp
  - ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
  - ex:. $f(t_0)$ = valoarea la momentul t_0 este o v.a.





Realizări ale proceselor aleatoare

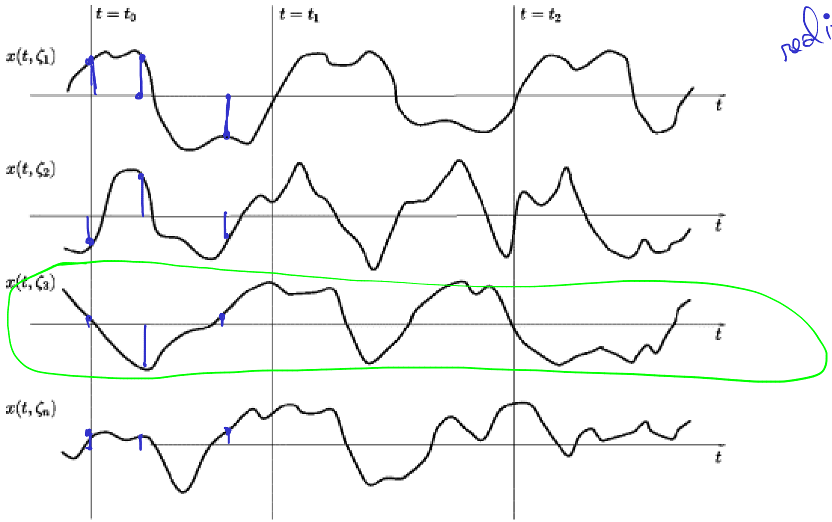


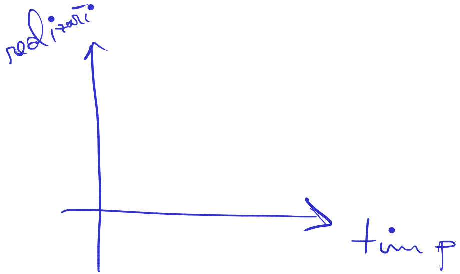
- **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
  - ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; am obținut o anume realizare, dar am fi putut obține orice altă realizare
- Notația uzuală: $f^{(k)}[n]$ sau $f^{(k)}(t)$ realizare particulare
  - k indică realizarea particulară care se consideră
  - t sau n este timpul
- Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
  - la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Proces aleator = un fenomen 2-D

- Un proces aleator trebuie vizualizat în două dimensiuni:
  - $f^{(k)}[n]$ sau $f^{(k)}(t)$ depind de două variabile:
    - k = realizarea
    - t sau n = timpul

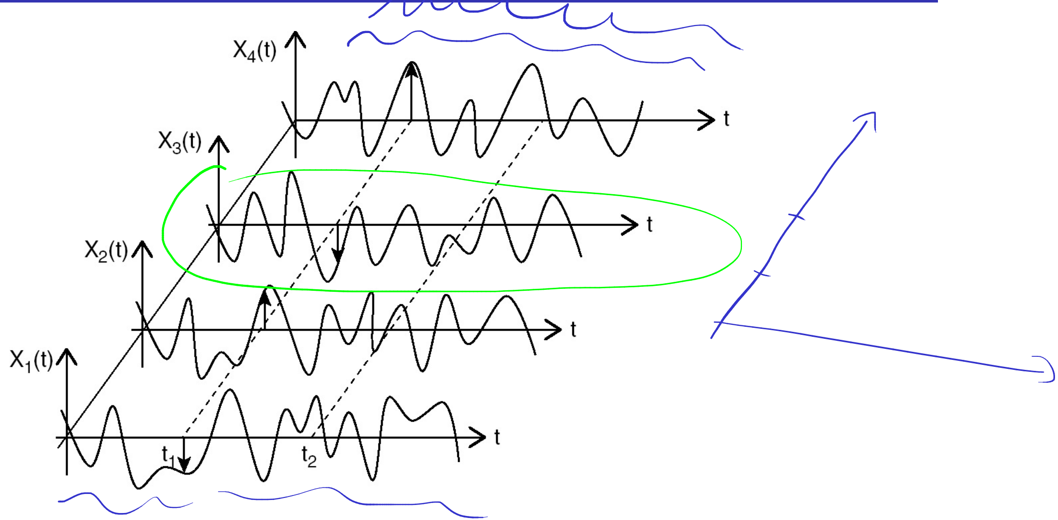
Proces aleator = un fenomen 2-D





- sursa: "Information-Based Inversion and Processing with Applications" Edited by Tadeusz J. Ulrych, Mauricio D. Sacchi, Volume 36,

Proces aleator = un fenomen 2-D



- sursa: Razdolsky, L. (2014). Random Processes. In Probability-Based Structural Fire Load (pp. 89-136). Cambridge: Cambridge University Press

Proces aleator = un fenomen 2-D

realiz.1 real.2 r.3

realizări

t

t_1

t_2

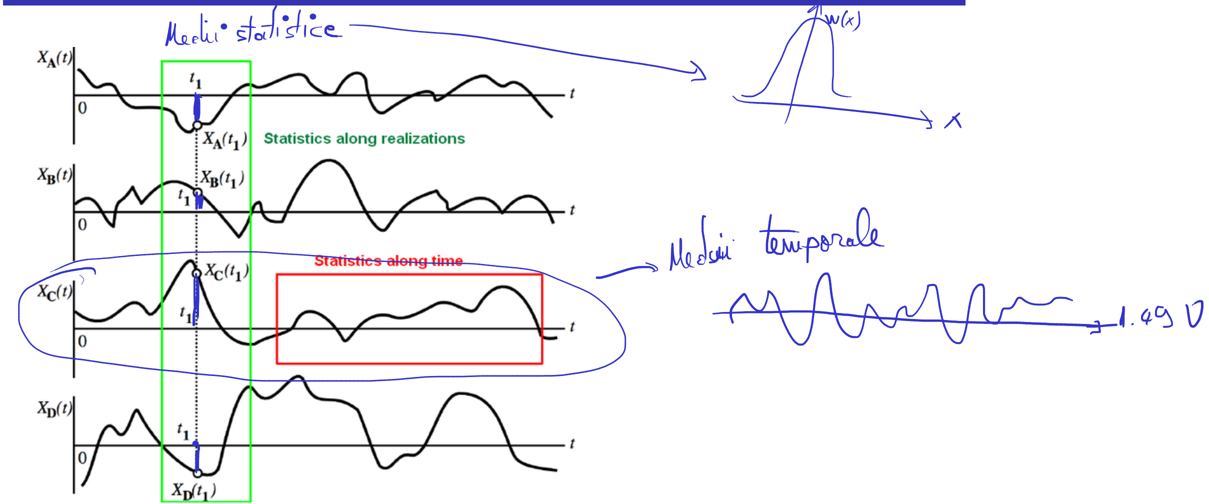
timp

- sursa: https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process

Două feluri de valori medii

- Procesele aleatoare au două tipuri de valori medii:
  - Valori medii **statistice** = calculate la un timp t sau n fixat, de-a lungul tuturor realizărilor posibile
  - Valori medii **temporale** = calculate pentru o realizare k fixată, de-a lungul timpului

Două feluri de valori medii

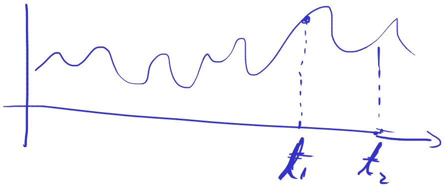


- sursa: https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

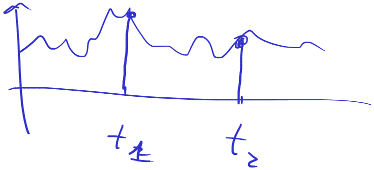
- Fiecare eșantion $\boxed{f(t_1)}$ dintr-un proces aleator este o v.a.
  - descris de o **distribuție de ordin 1**
  - are FR $F_1(x;t_1)$
  - are FDP / FMP $w_1(x;t_1) = \frac{dF_1(x;t_1)}{dx}$
  - distribuția depinde de momentul t_1

$w_1(x;t_1)$ $w_1(x;t_2)$



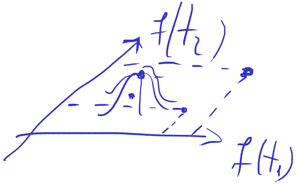
- Un eșantion la alt moment t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
  - altă FR $F_1(x;t_2)$
  - altă FDP / FMP $w_2(x;t_2) = \frac{dF_1(x;t_2)}{dx}$
- Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții de ordin 1-)
- Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2



- O pereche de v.a. $f(t_1)$ și $f(t_2)$ formează un sistem de 2 v.a.:
  - sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
  - au FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
  - au FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
  - distribuția depinde de momentele t_1 și t_2
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- Similar pentru p.a. discrete

$(f(t_1), f(t_2))$



Distribuții de ordin n

- Generalizare la un grup de n eșantioane dintr-un p.a.
- Un set de n v.a. $f(t_1), ...f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$:
  - sunt descrise de o **distribuție de ordin n**
  - au FR comună $F_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n)$
  - au FDP / FMP comună $w_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1,...x_n;t_1,...t_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$
  - depind de momentele de timp t_1, t_2, ... t_n
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n eșantioane (distribuții *de ordin* n)
- Similar pentru p.a. discrete

Medii statistice

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii **statistice** și **temporale**

Pentru procese continue:

1. **Valoarea medie**

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \underbrace{w_1(x; t_1)}_{\text{legea de distribuție}} dx$$

A

2. **Valoarea pătratică medie**

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

Medii statistice - varianța

3. **Varianța**

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1)^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- Legătura între aceste trei mărimi:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2 - 2f(t_1)\mu(t_1) + \mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- Observații:
  - aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul t_1
  - ele caracterizează doar eșantionul de la momentul t_1
  - la alt moment de timp t_2, v.a. $f(t_2)$ este diferită, și valorile medii pot diferi

Medii statistice - autocorelația

Medii statistice care caracterizează **o pereche** de eșantioane:

4. **Funcția de autocorelație**

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. **Funcția de corelație** (pentru două procese aleatoare diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

- Observații:
  - aceste funcții pot fi diferite pentru perechi de valori luate la momente diferite (t_1, t_2)

Procese aleatoare discrete

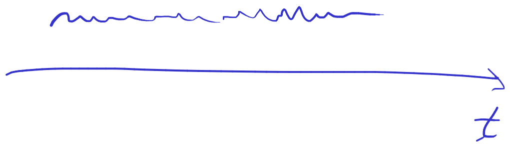
legea de distribuție

Pentru ~~**procese aleatoare discrete**~~, se înlocuiește $\int$ cu $\sum$, și notația $f(t)$ cu $f[t]$:

$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}}$ $\sum_{-\infty}^{\infty}$

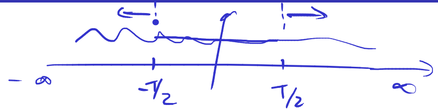
1. $\overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$
2. $\overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$
3. $\sigma^2(t_1) = \overline{\{f[t_1] - \mu(t_1)\}^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1)^2 \cdot w_1(x; t_1)$
4. $R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$
5. $R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$

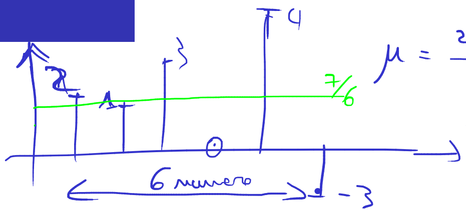
Medii temporale



- Dacă avem acces doar la o singură realizare $f^{(k)}(t)$ a procesului?
- Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare** $f^{(k)(t)}$**, de-a lungul timpului**

$$\left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)}{2\cdot\infty}\right)$$





$$\mu = \frac{2+1+3+0+4-3}{6} = \frac{7}{6} = \frac{\sum \text{toate}}{\text{câte sunt}}$$

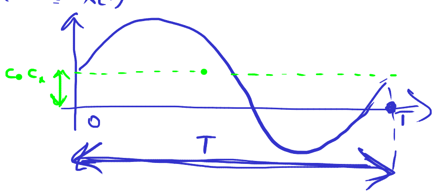
Medii temporale pentru procese aleatoare continue:

1. **Valoarea medie temporală**

realiz $f^{(k)}$ pe care o avem

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)dt$$

$f^{(k)}(t) = x(t)$

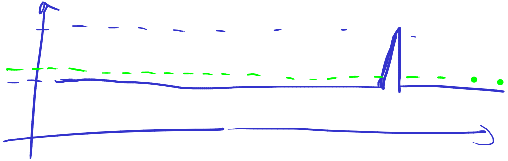


$$\frac{\int_0^T x(t)}{T} = \frac{\int \text{tot semnalul}}{\text{lung. interv.}}$$

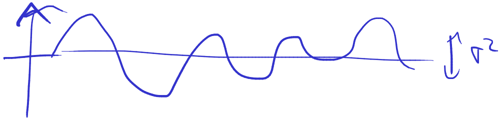
2. **Valoarea medie pătratică temporală**

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

media lui $[f^{(k)}(t)]^2$



Varianța temporală



3. **Varianța temporală**

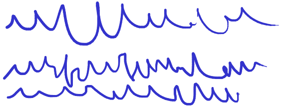
$$\sigma^2_{(k)} = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \underbrace{\mu^{(k)}}_{c.c.})^2 dt$$

- Relația dintre cele trei mărimi:

$$\sigma^2_{(k)} = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

- Observație:
  - aceste valori nu mai depind de timpul t , ci de realiz. (k)

~~1.49V~~



$\to \mu = 1.49$ V

$\to \mu = 1.495$ V

$\to \mu = 1.51$ V

4. **Funcția de autocoreație temporală**

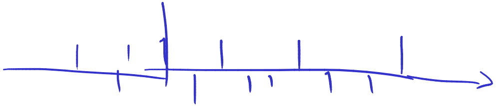
$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t) f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t) f^{(k)}(t_2 + t) dt \end{aligned}$$

5. **Funcția de corelație temporală** (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t) g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t) g^{(k)}(t_2 + t) dt \end{aligned}$$

Procese aleatoare discrete

$$\cancel{\frac{\sum_{-\infty}^{\infty} x[n]}{2\cdot\infty}}$$



Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește $\int$ cu $\sum$, T cu N, și se împarte la $2N+1$ în loc de $2T$

1. $\overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N\to\infty} \overbrace{\frac{1}{2N+1}\sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t]}^{\text{m. aritm.}}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\sum_{-N}^{N} x[n]}{2N+1}$
2. $\overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{t=-N}^{N}(f^{(k)}[t])^2$
3. $\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}[t] - \mu^{[k]}\}^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{t=-N}^{N}(f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$

Procese aleatoare discrete

4. Autocorelația temporală:

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t]}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t]$$

5. Corelația temporală:

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t]}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t]$$

Realizări de lungime finită

- E posibil să avem o realizare de **lungime finită** (de ex. un vector cu 1000 de eșantioane dintr-o realizare a unui p.a.)
- Cum calculăm mediile temporale?
- Se fac sumele/integralele de la $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$ în loc de la $-\infty$ la ∞
- Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\} \longrightarrow \mu = \frac{1 - 1 + 2 - 2 + \dots}{10} =$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\Sigma}{2N}$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-\mu)^2 + (-1-\mu)^2 + (2-\mu)^2 + (-2-\mu)^2}{10}$$

Medii statistice și temporale

- Mediile statistice sunt, de obicei, cele de dorit
  - dar necesită cunoașterea distribuțiilor $w(x)$, care în practică sunt rareori cunoscute
- În practică, de obicei avem acces doar la o singură realizare, obținută printr-o măsurătoare
  - deci putem calcula doar mediile temporale pe acea realizare
- Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt **identice** ("ergodicitate")

Procese aleatoare staționare

- Până acum, am considerat că mediile statistice depind de timp
  - pot fi diferite pentru un eșantion de la t_1 și de la t_2
- Proces aleator **staționar** = dacă mediile statistice rămân aceleași la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- Altfel spus: distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n) = w_n(x_1, ...x_n; t_1 + \tau, ...t_n + = tau)$$

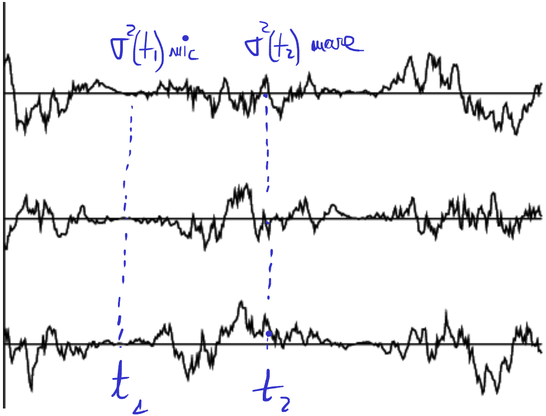
- Practic, pentru a fi staționar trebuie ca **toate mediile statistice să nu mai depindă de timp** t

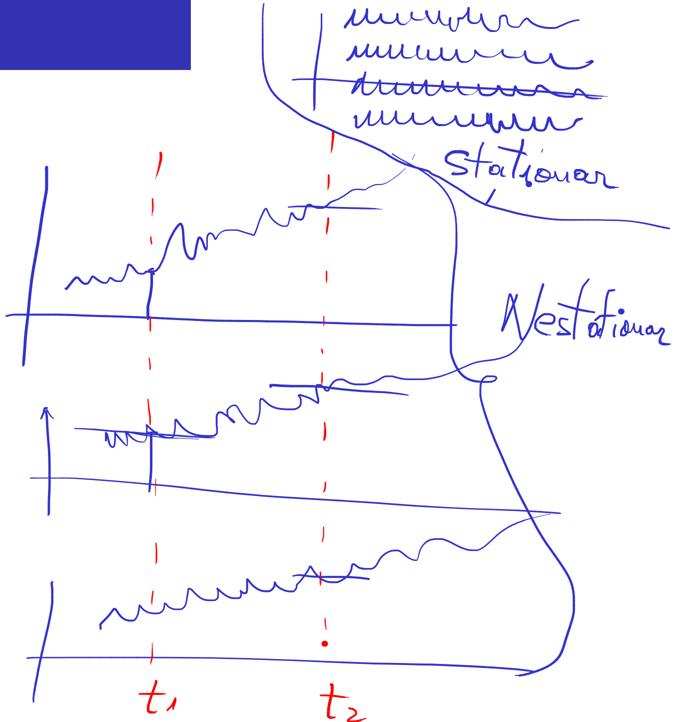
Staționar în sens strict sau larg

- Proces aleator **staționar în sens strict**:
  - relația e valabilă pentru distribuțiile de orice ordin n
  - valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța, autocorelația **și toate celelalte** statistici de ordin superior nu depind de originea timpului t
- Proces aleator **staționar în sens larg**:
  - relația e valabilă doar pentru distribuțiile de ordin $n = 1$ și $n = 2$ (distribuțiile unui singur eșantion, sau a două eșantioane)
  - **doar** valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța și autocorelația nu depind de originea timpului t, dar statisticile de ordin superior pot depinde

Procese aleatoare staționare

- Este procesul aleator schițat mai jos staționar sau nu?





- sursa: SEX, LIES & STATISTICS, Ned Wright, http://www.astro.ucla.edu/~wright/statistics/

Procese aleatoare staționare

- Răspuns: ne-stationar
- Se observă că varianța nu este aceeași la toate momentele de timp

Consecințe ale staționarității

- Pentru distribuții ale unui singur eșantion (de ordin $n = 1$):

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **identice la orice moment de timp** t

$$\overline{f(t)} = constant, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = constant, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = constant, \forall t$$

~~la~~ la orice t

Consecințe ale staționarității

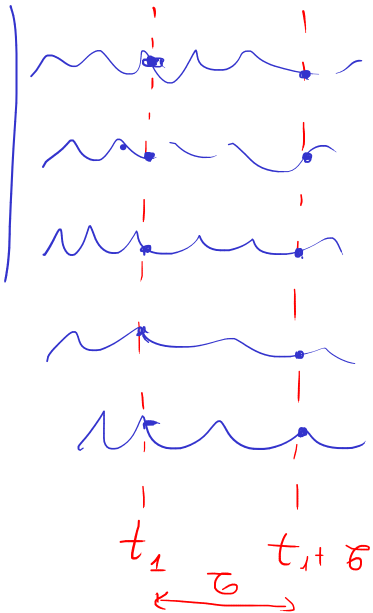
- Pentru distribuții ale unor perechi de eșantioane (de ordin $n = 2$):

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp** $\boxed{\tau = t_2 - t_1}$ dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = \boxed{R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)}}$$

- Depinde doar de valoarea $\tau = t_2 - t_1$ = diferența de timp dintre cele două eșantioane



Consecințe ale staționarității

Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **staționare**:

?

- Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași ?
- Autocorelația temporală:
  - pentru p.a. continue

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)f^{(k)}(t+\tau)dt$$

  - pentru p.a. discrete

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^{N} f^{(k)}[t]f^{(k)}[t+\tau]$$

  - lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la dispoziție, $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$

?

$t_1, t_2 \longrightarrow 0, \tau$

$\underbrace{t_1, t_2}_{\tau} \qquad \underbrace{0, \tau}_{\tau}$

Consecințe ale staționarității

- Pentru funcția de **corelație**, definiția este similară cu cea de la autocorelație de mai sus
- Corelația depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre cele două eșantioane

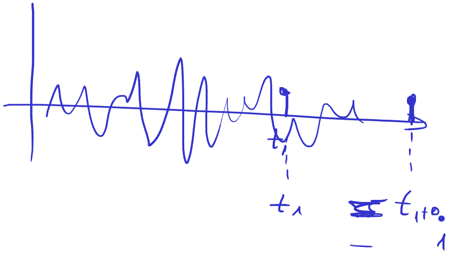
$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t+\tau)}$$

Interpretarea autocorelației

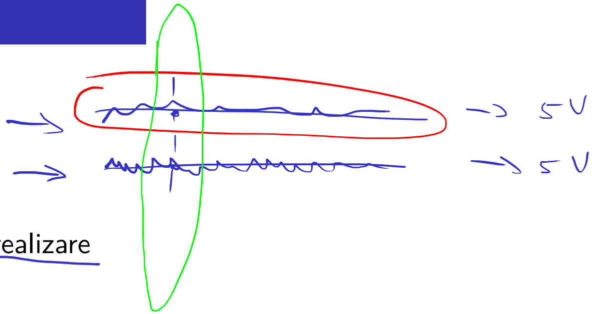
- $R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)}$ = **media produsului a două eșantioane situate la distanță de** τ
  - ne spune dacă eșantioanele variază la fel sau nu
- Idem pentru corelație, doar că eșantioanele provin din p.a. diferite, f și g

Interpretarea autocorelației

- Exemple:
  - $R_{ff}(\overset{\tau}{0.5}) > 0$: două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative => produsele sunt majoritar pozitive)
    - dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre cealaltă
  - $R_{ff}(\overset{\tau}{1}) < 0$: două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul e pozitiv, celălalt e negativ => produsele sunt majoritar negative)
    - dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre cealaltă
  - $R_{ff}(\overset{\tau}{2}) = 0$: două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt **necorelate** (produsele sunt în medie 0, deci cele două eșantioane au la fel de multe șanse de a fi de același semn sau cu semne contrare)
    - dacă se cunoaște una dintre ele, **nu** se mai poate "ghici" ceva despre cealaltă



Procese aleatoare ergodice

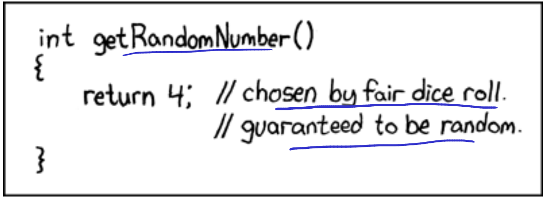


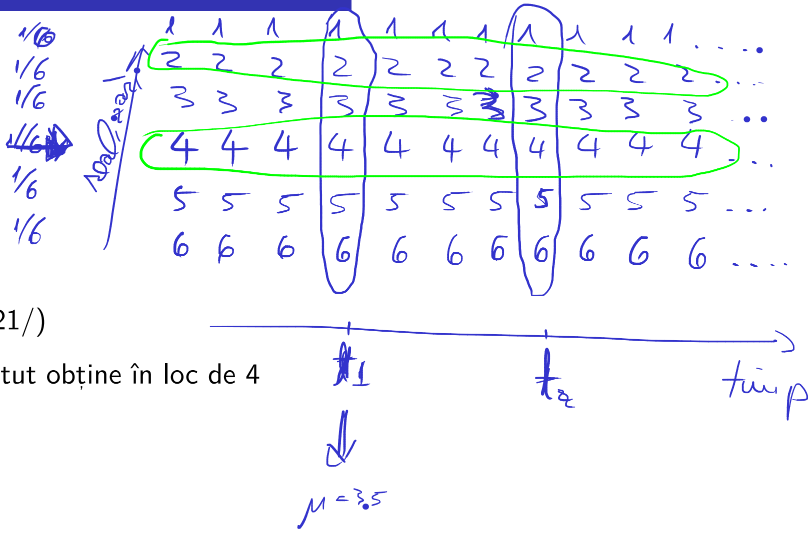
- În practică, avem acces la o singură realizare
- Proces aleator **ergodic** = dacă mediile temporale pe orice realizare sunt **identice cu mediile statistice**
- Ergodicitatea înseamnă:
  - Se pot calcula toate mediile pe baza unei singure realizări (oricare)
    - dar realizarea respectivă trebuie să fie foarte lungă (lungimea $\to \infty$) pentru valori precise
  - Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
    - o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

Procese aleatoare ergodice

- Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
  - de ex. zgomote de tensiune
- Exemplu de proces aleator **ne-ergodic**:
  - se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
    - o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

Procese aleatoare ergodice





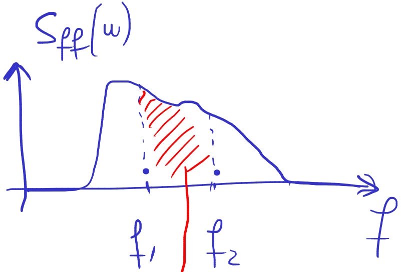
- XKCD 221 (link aici: https://xkcd.com/221/)
- Se consideră toate numerele care s-ar fi putut obține în loc de 4 (1,2,3,5 sau 6)
- Care e problema aici?
  - proces aleator staționar sau ne-staționar?
  - proces aleator ergodic sau ne-ergodic?

I.3 Proprietăți ale autocorelației

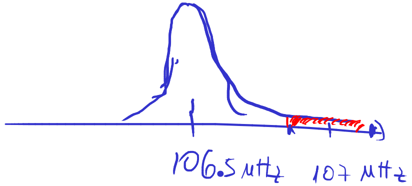
Densitatea spectrală de putere

- **Densitatea spectrală de putere** (DSP) $S_{ff}(\omega)$ reprezintă puterea unui semnal în funcție de frecvență (f sau $\omega = 2\pi f$)
- Pentru un semnal **determinist** (ne-aleator), este dată de modulul transf. Fourier la pătrat:

$$S_{ff}(\omega) = |F(\omega)|^2$$



- Puterea în banda de frecvență $[f_1, f_2]$ este $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- Puterea totală a procesului aleator este $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- DSP este o funcție măsurabilă practic:
  - poate fi determinată experimental
  - este importantă în aplicații practice (inginerești)

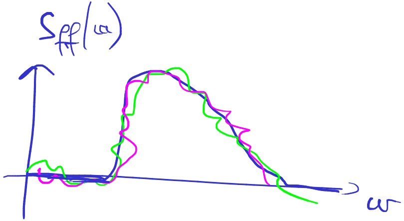


Densitatea spectrală de putere

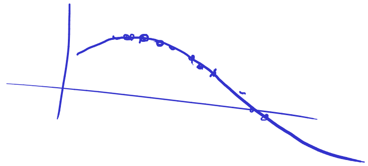
- Ce reprezintă DSP pentru un proces aleator?
  - nu mai avem un singur semnal, cu o infinitate de realizări posibile
  - fiecare realizare are o transformată Fourier proprie, diferită
  - DSP fiind diferită pentru fiecare realizare în parte, este, ea însăși, un proces aleator

$|F(\omega)|^2$

- **DSP a unui proces aleator** = media DSP pentru toate realizările posibile
- Are aceeași utilitate și semnificație ca în cazul unui semnal determinist, doar că **în medie** în raport cu toate realizările posibile
  - pentru o realizare particulară, DSP poate varia în jurul DSP medii



Teorema Wiener-Hincin



Teorema Wiener-Hincin:

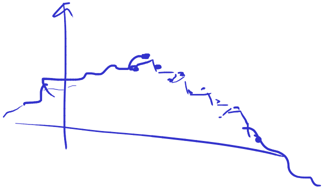
- Densitatea spectrală de putere = **transformata Fourier a funcției de autocorelație**

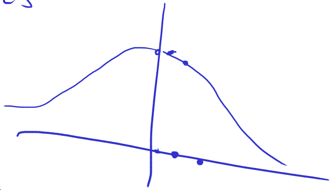
$$\underbrace{S_{ff}(\omega)}_{\text{DSP}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{R_{ff}(\tau)}_{\text{f. autocorr}} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

T.F.

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

T.F invers





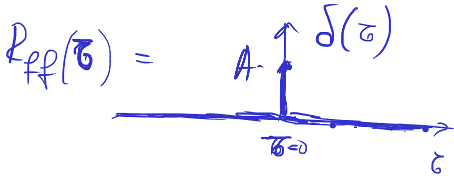
- Fără demonstrație
- Leagă două concepte de natură diferită
  - Funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
  - DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

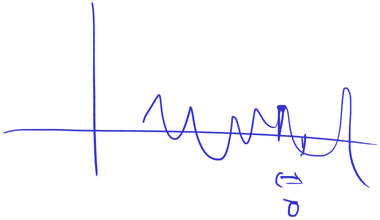
Zgomot alb

- **Zgomot alb** = un proces aleator cu **funcția de autocorelație egală cu un Dirac**

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

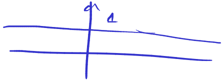
  - este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
  - autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice $\tau \neq 0$
  - oricare două eșantioane diferite ($\tau \neq 0$) au corelație zero (necorelate)
    - valorile a două eșantioane distincte nu au legătură între ele





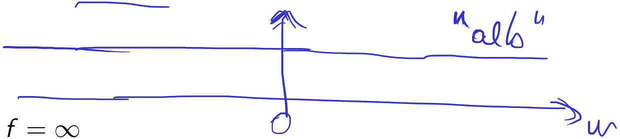
Zgomot alb

$A \cdot \delta(t) \xleftrightarrow{F} 1 \cdot A$



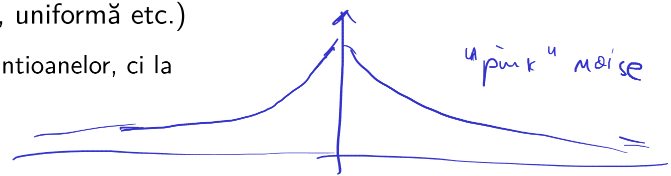
- **Densitatea spectrală de putere** = transf. Fourier a unui Dirac = **constantă** $\forall \omega$

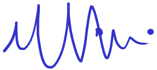
$$S_{ff}(\omega) = constant, \forall \omega$$



  - putere constantă pentru toate frecvențele, până la $f = \infty$

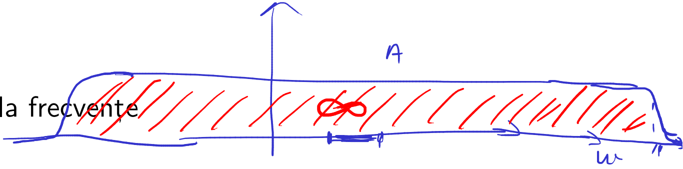
- Zgomotul alb poate avea **orice distribuție** (normală, uniformă etc.)
  - termenul "zgomot alb" nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate



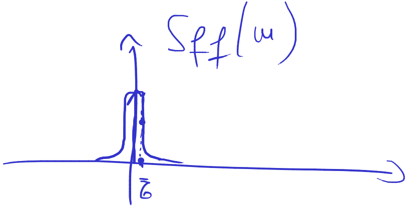


Zgomot alb de bandă limitată

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) = \infty$$



- În lumea reală, pentru orice semnal puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
  - pentru că puterea totală $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}\omega$ nu poate fi infinită
  - se numește zgomot alb **de bandă limitată**
- În acest caz, autocorelația = **aproximativ** un Dirac, dar nu chiar infinit de "subțire"
  - eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
  - de ex. din cauza unor mici capacități parazite



AWGN

- **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
  - Zgomot alb, Gaussian, aditiv
  - tipul/modelul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- Înseamnă:
  - **zgomot**: este un proces aleator (fiecare eșantion este aleator, fiecare realizare este diferită)
  - **gaussian**: eșantioanele au distribuția normală

  - **alb**: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele
  - **aditiv**: zgomotul se adună peste semnalul original (adică de ex. nu se multiplică cu acesta)

Examen 2020-2021

- Până aici s-a făcut în 2020-2021. Celelalte slide-uri din acest fișier nu se cer.

URAAA!

Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

   - Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = const$$

   - Dem.: două eșantioane la un interval ∞ sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

   - Dem.: se pornește de la $\overline{(f(t) - f(t+\tau))^2} \geq 0$
   - Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

   - Dem.: Se pune $\tau = 0$ în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la ∞

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

   - Dem.: $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$, $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

Autocorelația unui proces aleator filtrat

- Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
  - fie în timp continuu: intrarea $x(t)$, sistemul $H(s)$, ieșirea $y(t)$
  - fie în timp discret: intrarea $x[n]$, sistemul $H(z)$, ieșirea $y[n]$
- Cum depinde autocorelația ieșirii y de cea a intrării x?
- Se știe că y este convoluția lui x cu răspunsul la impuls h

Dezvoltare matematică

- Pentru un proces aleator în timp discret

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n+\tau]} \\
&= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n-k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n+\tau-k_2]} \\
&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]\overline{x[n-k_1]x[n+\tau-k_2]} \\
&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau-k_1+k_2]
\end{aligned}
$$

- Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$
S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}
$$

Dezvoltare matematică

- Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

- Schimbare de variabilă $\tau - k_1 + k_2 = u$
  - rezultă $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned}
S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\
&= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\
&= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H*^(\omega) \\
&= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2
\end{aligned}$$

Rezultat

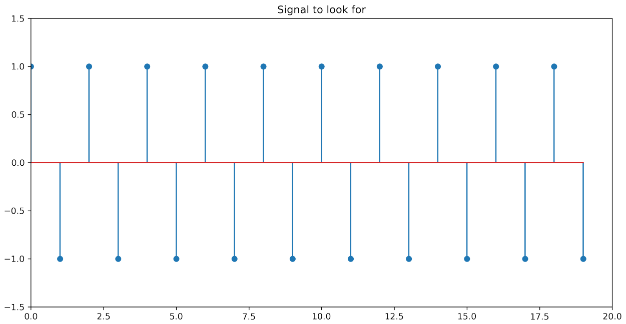
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- DSP a lui y = DSP a lui x multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

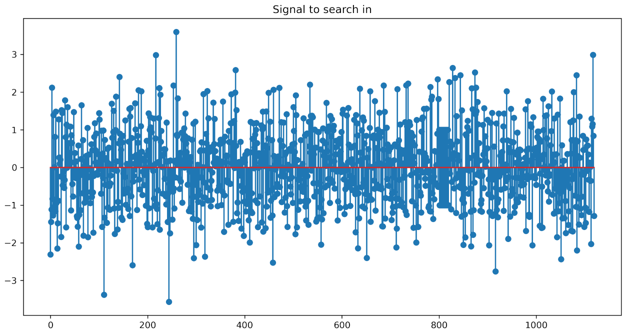
Aplicații ale (auto)corelației

- Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- Corelația a două semnale = o măsura a **similarității** celor două semnale
  - Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celuilalt
  - Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- Corelația poate fi utilizată pentru localizare
  - Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
  - Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
  - Valori mici atunci când nu se potrivesc

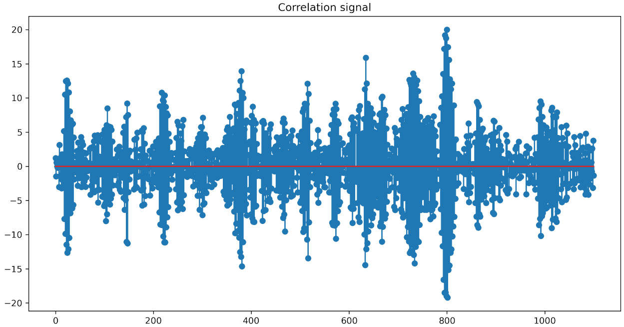
Semnalul căutat



Semnalul de dimensiuni mari



Rezultatul corelației



Identificare de sistem

- Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemlui

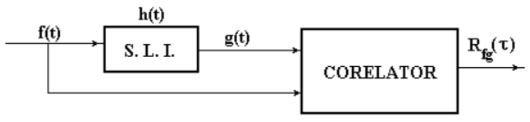


Figure 1: System identification setup

Identificare de sistem

$$
\begin{aligned}
R_{fg}(\tau) =& \overline{f[n]g[n+\tau]} \\
=& \overline{f[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]f[n+\tau-k]} \\
=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{f[n]f[n+\tau-k]} \\
=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]R_{ff}[\tau-k] \\
=& h[\tau] \star R_{ff}[\tau]
\end{aligned}
$$

- Dacă intrarea f este **zgomot alb** cu puterea A, $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$, și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] \star R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] \star \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut