

## Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

# Capitolul I. Semnale aleatoare

## I.1 Variabile aleatoare

# Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrarе
  - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notație uzuală:  $X$ ,  $Y$  etc..
- ▶ Exemple:
  - ▶  $X$  = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - ▶  $V_{in}$  = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

## Realizări ale unei variabile aleatoare

- ▶ **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- ▶ **Spațiul realizărilor**  $\Omega$  = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - ▶ mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
  - ▶ V.a. se notează  $X$
  - ▶ Se poate obține o realizare  $X = 3$
  - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

# Aruncarea unei monede

- ▶ Variabila aleatoare  $X$  = "față obținută la aruncarea unei monede"

<i>Random Variable</i>	<i>Possible Values</i>	<i>Random Events</i>
$X = \{$	<b>0</b>	
	<b>1</b>	

(sursa imaginii: <https://www.mathsisfun.com/data/random-variables.html>)

## V.a. discrete și continue

- ▶ V.a. **discretă**: dacă  $\Omega$  este o mulțime discretă
  - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă  $\Omega$  este o mulțime compactă
  - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

# Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- ▶ Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- ▶ Exemple:
  - ▶ Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
  - ▶ Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor* diferențiate.
  - ▶ Valoarea este afectată de zgomot
  - ▶ Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

## Funcția masă de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. discretă  $A$
- ▶ **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*)  
= probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea egală cu  $x$

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- ▶ pe scurt, se mai numește **distribuția** variabilei A
- ▶ Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă

# Calculul probabilității cu FMP

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea  $v$

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^b w_A(x)$$

## Functia de repartitie

- ▶ **Functia de repartitie (FR)** = probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea mai mică sau egală cu  $x$

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este "în trepte"

## Calculul probabilității cu FR

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea  $v$

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v - 1)$$

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a - 1)$$

## Relația între FMP și FR

- FR este *suma cumulativă* (un fel de "integrală discretă") a FMP

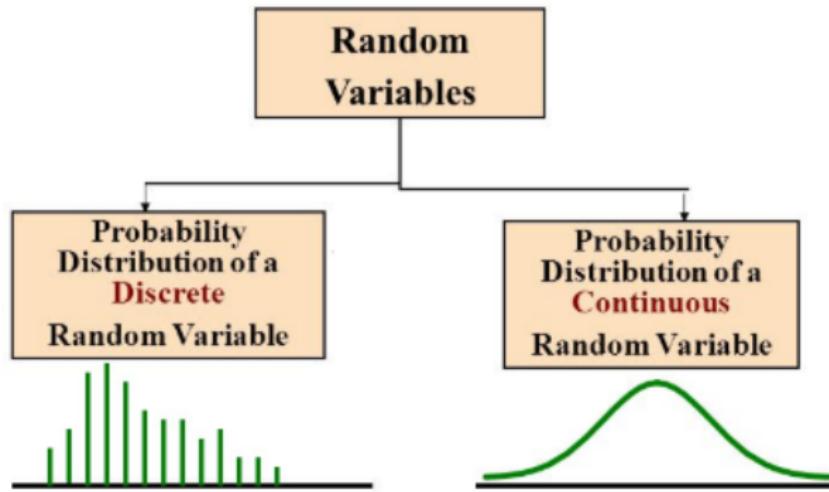
$$F_A(x) = \sum_{t=-\infty}^{t=x} w_A(t)$$

- Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

## Funcția densitate de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. **continuă**  $A$
- ▶ **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** = probabilitatea ca valoarea lui  $A$  să fie într-o vecinătate  $\epsilon$  mică în jurul lui  $x$ , totul supra  $\epsilon$
- ▶ Se notează  $w_A(x)$ , se mai numește **distribuția** variabilei  $A$
- ▶ Informal: FDP reprezintă probabilitatea ca valoarea lui  $A$  să fie **în jurul lui**  $x$

# Variabile aleatoare discrete și continue



(sursa imaginii: "Probability Distributions: Discrete and Continuous", Seema Singh, <https://towardsdatascience.com/probability-distributions-discrete-and-continuous-7a94ede66dc0>)

## Probabilitatea unei valori exacte

- ▶ Probabilitatea ca o v.a. continuă  $A$  să ia **exact** o valoare  $x$  este **zero**
  - ▶ pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
  - ▶ de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- ▶ De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii  $x$ , și nu exact egal cu  $x$

## Calculul probabilității cu FDP

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să aibă exact valoarea  $v$  este întotdeauna 0

$$P\{A = v\} = 0$$

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie între valorile  $a$  și  $b$  = integrala FDP între  $a$  și  $b$ :

$$P\{a \leq A \leq b\} = \int_a^b w_A(x)dx$$

## Functia de repartitie

- ▶ **Functia de repartitie (FR)** = probabilitatea ca  $A$  să aibă valoarea mai mică sau egală cu  $x$

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Aceeași definiție ca și la v.a. discrete

## Calculul probabilității cu FR

- ▶ Probabilitatea ca valoarea lui A să fie între  $a$  și  $b$ :

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

- ▶ Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis
  - ▶  $[a, b]$  sau  $(a, b)$ , nu contează
  - ▶ de ce?

# Relația între FDP și FR

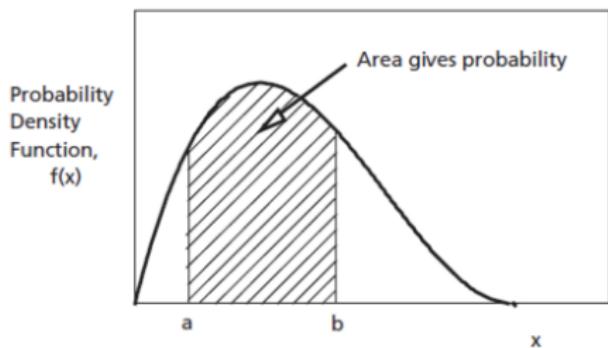
- ▶ FR este **integrala** FDP
- ▶ FDP este **derivata** FR

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x w_A(x) dx$$

$$\begin{aligned}w_A(x) &= \frac{dF_A(x)}{dx} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_A(x + \epsilon) - F_A(x - \epsilon)}{2\epsilon} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(A \in [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon}\end{aligned}$$

# Interpretare grafică

- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie între  $a$  și  $b$  este **suprafața de sub FDP**
  - ▶ adică integrala de la  $a$  la  $b$
- ▶ Probabilitatea ca  $A$  să fie exact egal cu o valoare este zero
  - ▶ aria de sub un punct este nulă



(sursa: "[https://intellipaat.com/blog/tutorial/statistics-and-probability-tutorial/probability-distributions-of-continuous-variables/\\*](https://intellipaat.com/blog/tutorial/statistics-and-probability-tutorial/probability-distributions-of-continuous-variables/*)")

## V.a. discrete vs continue

### Comparatie intre v.a. discrete si continue

- ▶ FR  $F_A(x)$  are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- ▶ FDP/FMP  $w_A(x)$  este derivata FR
  - ▶ la v.a. continue:
    - ▶ este o derivată obișnuită
    - ▶ reprezintă probabilitatea de a fi "in jurul" valorii  $x$
  - ▶ la v.a. discrete:
    - ▶ un fel de "derivată discretă"
    - ▶ reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea  $x$

## Proprietățile v.a

FR:

- ▶ FR este mereu pozitivă,  $F_A(x) \geq 0$
- ▶ FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- ▶ FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1

$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

FDP/FMP:

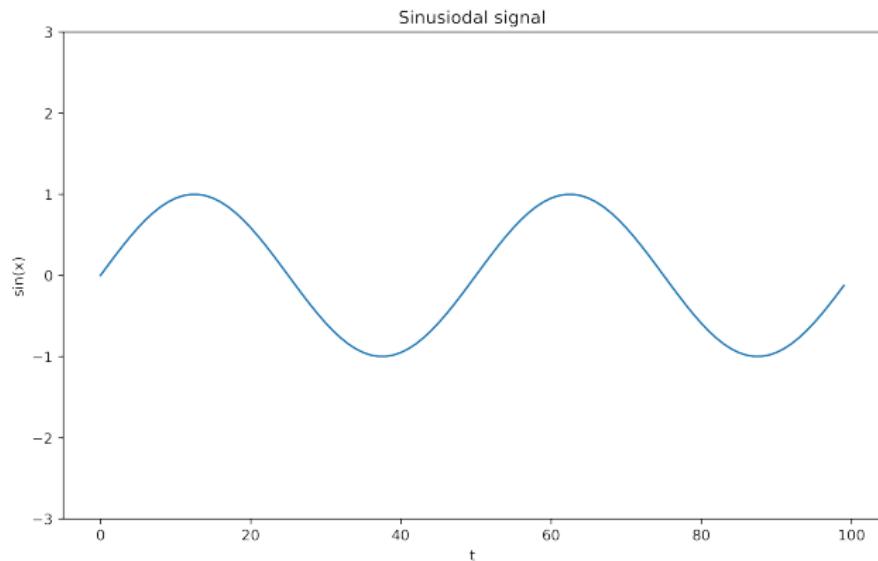
- ▶ PDF/PMF sunt mereu pozitive  $w_A(x) \geq 0$
- ▶ Integrala/suma pe întreg domeniul = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x) dx = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

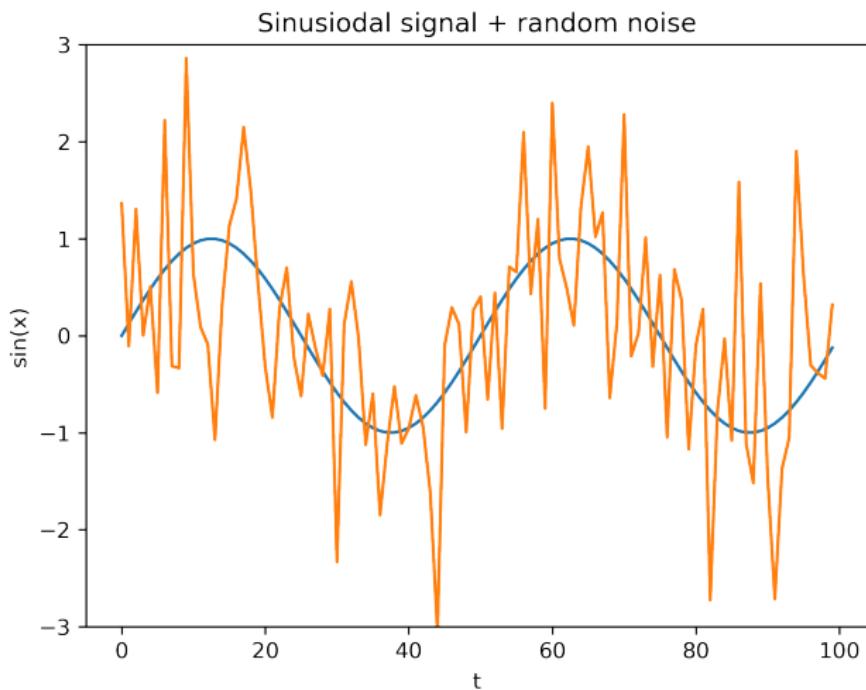
# Diferite distribuții

## ► Semnal sinusoidal



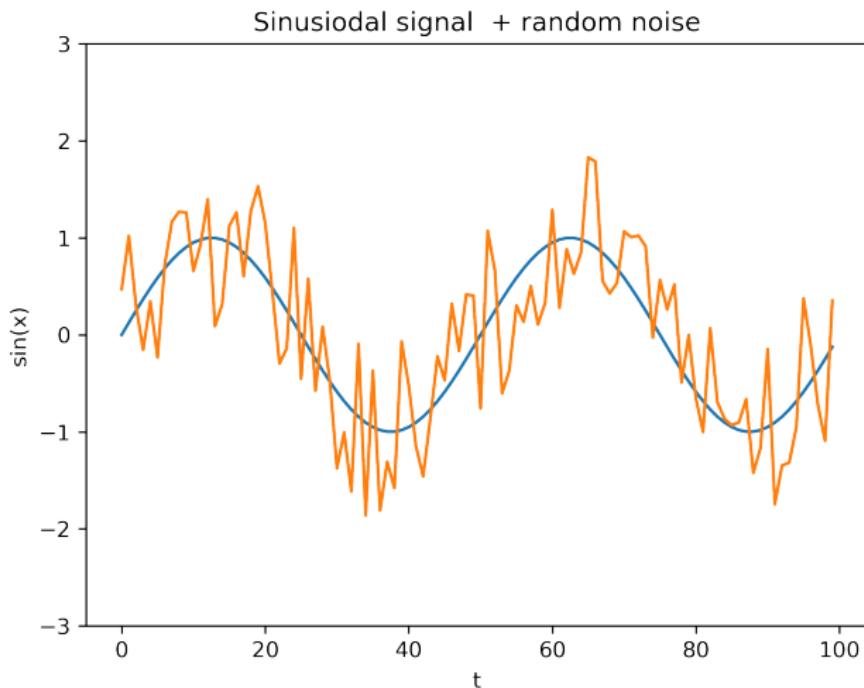
# Diferite distribuții

- ▶ Sinus + zgomot (normal,  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ )



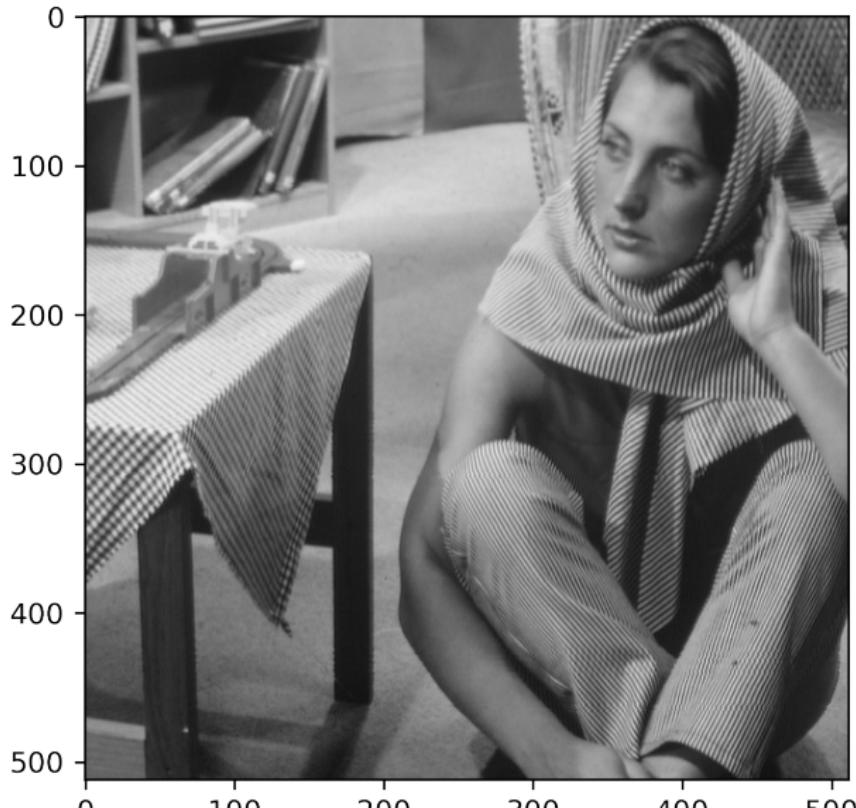
# Diferite distribuții

- ▶ Sinus + zgomot (uniform  $\mathcal{U}[-1, 1]$ )
- ▶ Ce diferă? Tipul distribuției



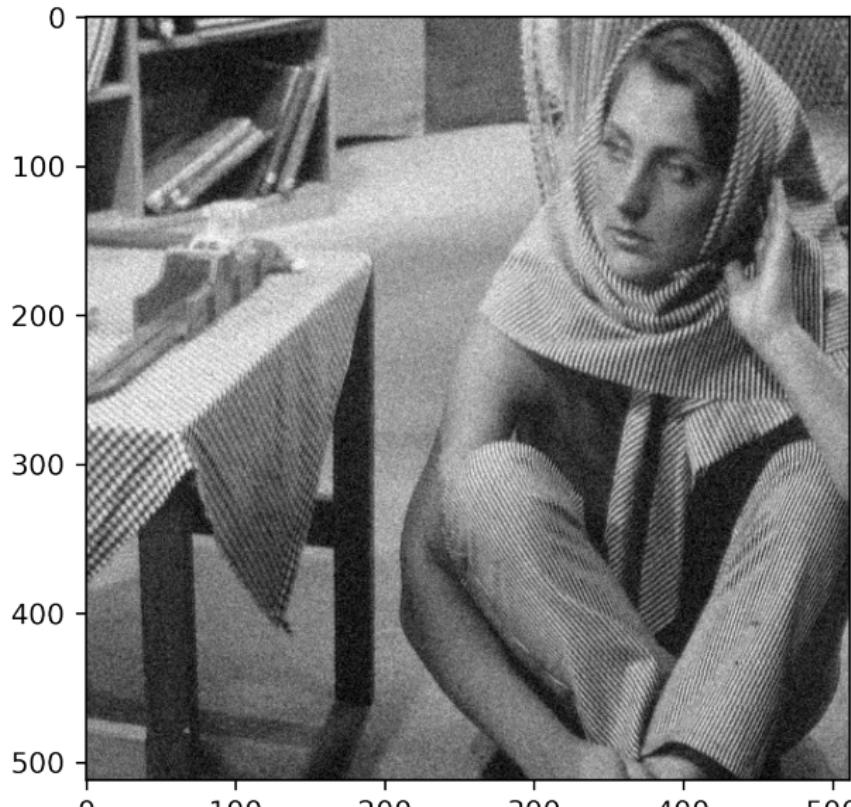
# Diferite distribuții

- ▶ Imagine originală



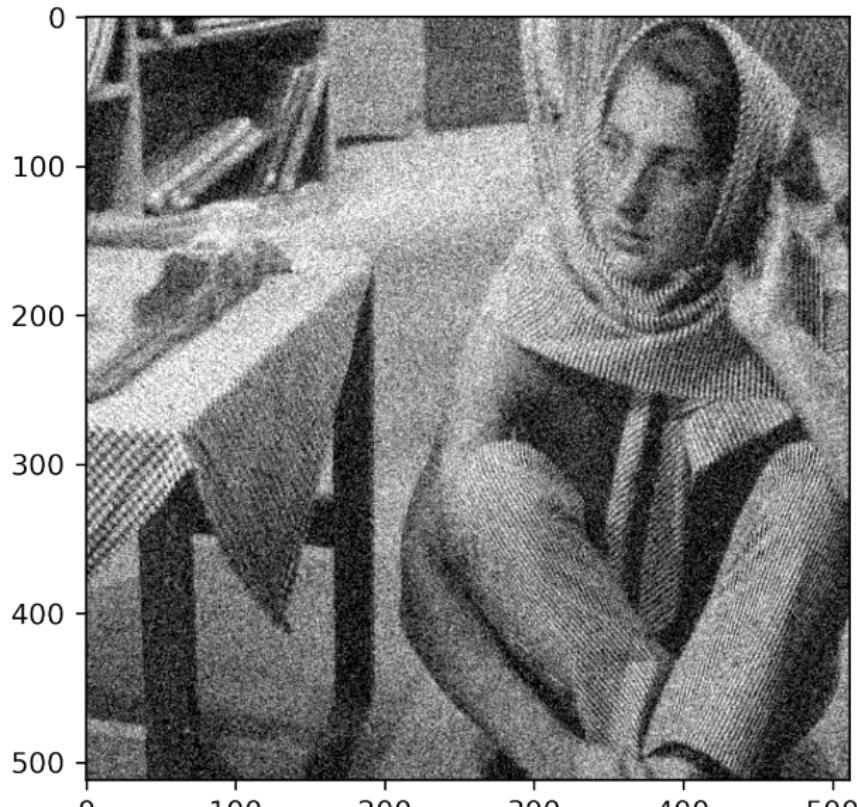
## Diferite distribuții

- ▶ Imagine + zgomot (normal,  $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ )



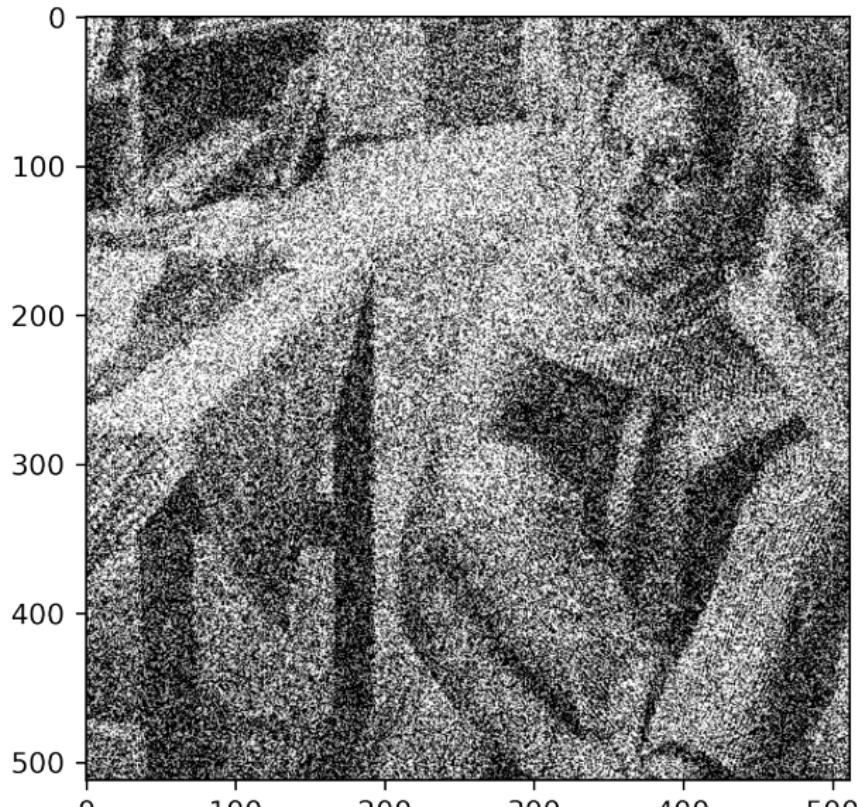
## Diferite distribuții

- ▶ Imagine + zgomot mai mare (normal,  $\mu = 0, \sigma^2 = 10$ )



## Diferite distribuții

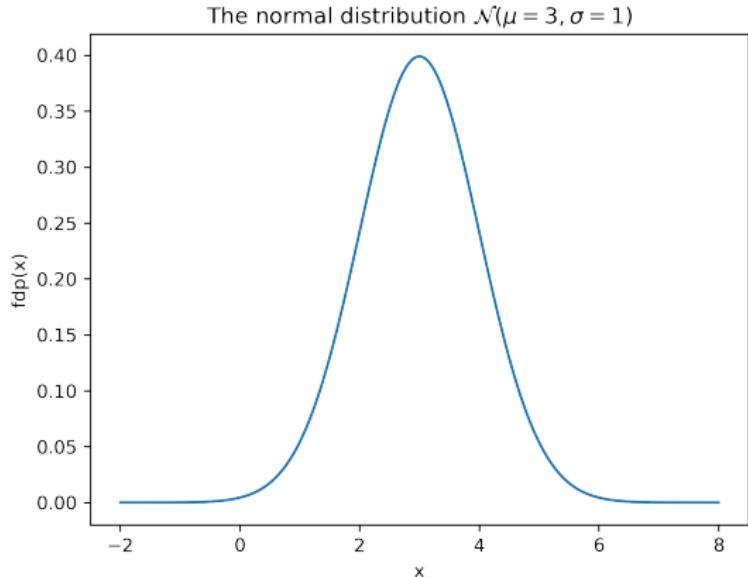
- ▶ Imagine + zgomot (uniform,  $\mathcal{U}[-5, 5]$ )



# Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



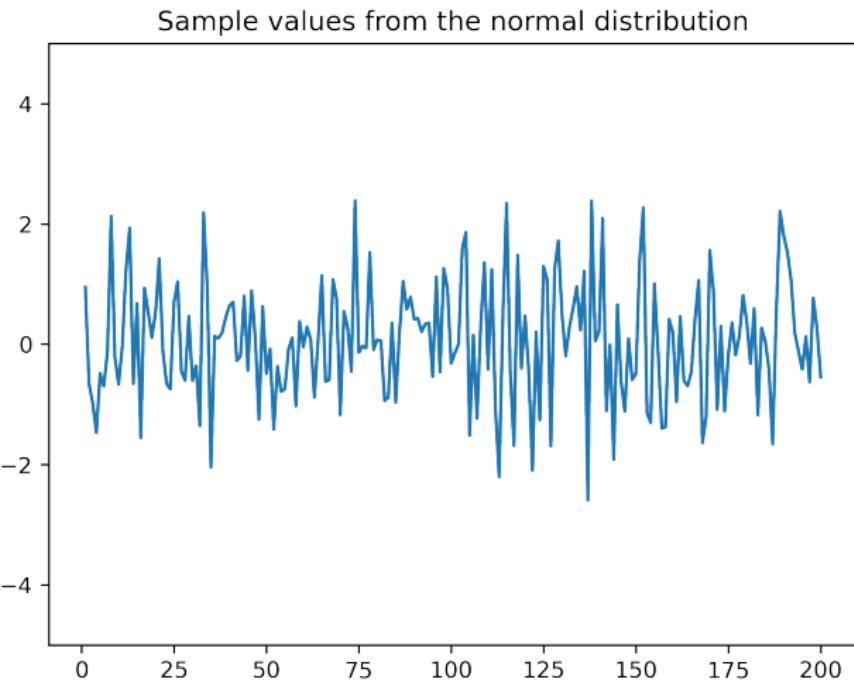
# Distribuția normală

- ▶ Are doi parametri:
  - ▶ **Media**  $\mu$  = "centrul" funcției
  - ▶ **Deviatia standard**  $\sigma$  = "lățimea" funcției
    - ▶  $\sigma$  mic = funcție îngustă și înaltă
    - ▶  $\sigma$  mare = funcție largă și joasă
- ▶ Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala = 1)
- ▶ Extrem de des întâlnită în practică
- ▶ Orice valoare reală este posibilă ( $w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ )
- ▶ Se notează cu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

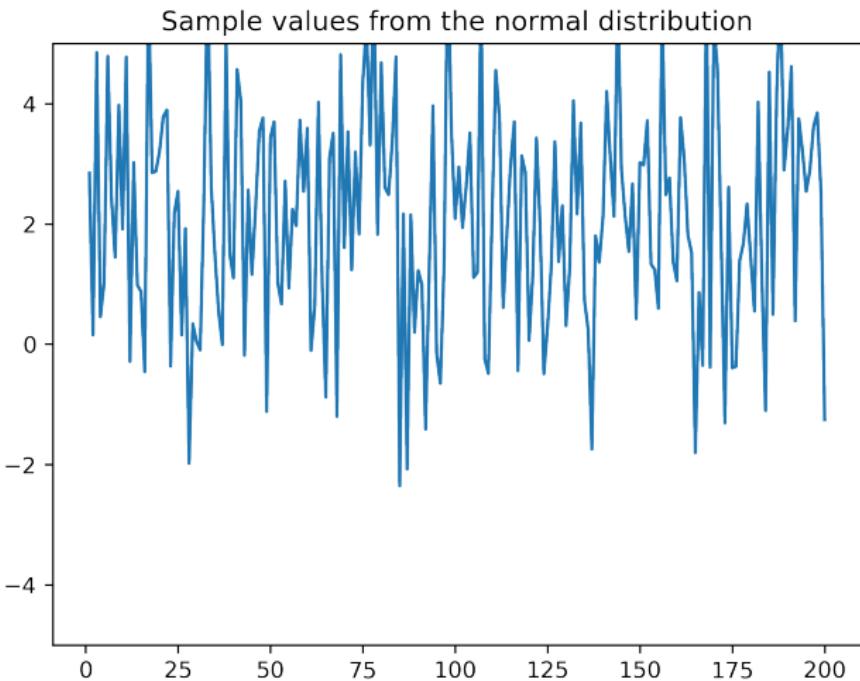
## Distribuția normală

- ▶ Distribuția descrește pe măsură ce  $x$  se îndepărtează de centrul  $\mu$ 
  - ▶ Datorită termenului  $-(x - \mu)^2$  de la exponent
  - ▶ Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui  $\mu$  ( $x - \mu = 0$ )
  - ▶ Valorile apropiate de  $\mu$  sunt mai probabile, valorile mai depărtate de  $\mu$  sunt mai puțin probabile
- ▶ Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de  $\mu$ , cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de  $\mu$

Exemple de valori generate cu distribuția normală ( $\mu=0$ ,  $\sigma^2=1$ )



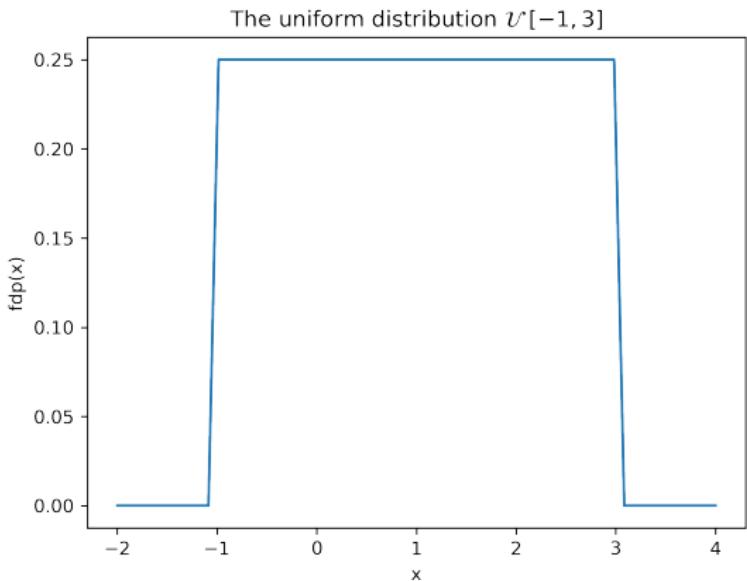
Exemple de valori generate cu distribuția normală ( $\mu=2$ ,  $\sigma^2=4$ )



# Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$



# Distribuția uniformă

- ▶ Are doi parametri: limitele  $a$  și  $b$  ale intervalului
- ▶ "Înălțimea" funcției este  $\frac{1}{b-a}$  pentru normalizare
  - ▶ pentru ca integrala (aria) să fie 1
- ▶ Sunt posibile doar valori din intervalul  $[a, b]$ 
  - ▶ valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- ▶ Se notează cu  $\mathcal{U}[a, b]$

## Alte distribuții

- ▶ Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

# Calculul probabilității pentru distribuția normală

- ▶ Cum calculăm  $\int_a^b$  dintr-o distribuție normală?
  - ▶ Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- ▶ Se folosește *the error function*:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- ▶ Funcția de repartiție a unei distribuții normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F_A(X) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$$

- ▶ Valorile funcției  $\operatorname{erf}()$  sunt tabelate / se calculează numeric
  - ▶ de ex. pe Google, căutați  $\operatorname{erf}(0.5)$
  - ▶ Alte valori folosite:
    - ▶  $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$
    - ▶  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

## Exercițiu

Exercițiu:

- ▶ Fie  $A$  o v.a. cu distribuția  $\mathcal{N}(3, 2)$ . Calculați probabilitatea ca  $A \in [2, 4]$

## Suma unei constante cu o v.a.

- ▶ Fie o v.a.  $A$
- ▶ Ce reprezintă  $B = 5 + A$ ?

Răspuns:

- ▶  $B$  este tot o variabilă aleatoare
- ▶  $B$  are același tip de distribuție, dar "translată" cu 5 la dreapta

Exemplu:

- ▶  $A$  este o v.a. cu distribuție normală  $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- ▶ Care este distribuția variabilei  $B = 5 + A$ ?
- ▶ Răspuns:  $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

## V.a. ca funcții de alte v.a

- ▶ O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- ▶ Exemple: dacă  $A$  este o v.a. distribuită  $\mathcal{U}[0, 10]$ , atunci
  - ▶  $B = 5 + A$  este o altă v.a., distribuită  $\mathcal{U}[5, 15]$
  - ▶  $C = A^2$  este de asemenea o v.a.
  - ▶  $D = \cos(A)$  este de asemenea o v.a.
- ▶ Motivatie: dacă  $A$  este aleatoare, și valorile  $B, C, D$  sunt aleatoare
- ▶  $A, B, C, D$  nu sunt independente
  - ▶ O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

## Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Fie un sistem cu două v.a. continue  $A$  și  $B$
- ▶ Care este probabilitatea ca perechea  $(A, B)$  să aibă valoarea în jurul  $(x, y)$ ?
- ▶ Distribuția valorilor perechii  $(A, B)$  este descrisă de:
  - ▶ Densitatea de probabilitate comună  $w_{AB}(x, y)$
  - ▶ Funcția de repartiție comună  $F_{AB}(x, y)$

## Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB} \{A \leq x \cap B \leq y\}$$

- ▶ Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- ▶ FDP comună descrie probabilitatea ca perechea  $(A, B)$  să aibă valoarea într-o vecinătate a  $(x, y)$
- ▶ Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P \{A = x \cap B = y\}$$

## Variabile independente

- ▶ Două v.a.  $A$  și  $B$  sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- ▶ Pentru v.a. independente, probabilitatea ca  $A$  să fie în jurul lui  $x$  și  $B$  în jurul lui  $y$  este produsul celor două probabilități

$$w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)$$

- ▶ Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- ▶ Similar pentru mai mult de două v.a.

# Variabile independente

Exercițiu:

- ▶ Calculați probabilitatea ca trei v.a.  $X$ ,  $Y$  și  $Z$  i.i.d.  $\mathcal{N}(-1, 1)$  să fie toate pozitive
  - ▶ **i.i.d** = "independente și identic distribuite"

## Multiple v.a. normale

- ▶ Fie un set de  $N$  v.a. normale  $(A_1, \dots, A_N)$ , cu medii diferite  $\mu_i$  dar aceeași deviație standard  $\sigma$
- ▶ Probabilitatea ca  $(A_1, \dots, A_N)$  să fie în jurul valorii  $(x_1, \dots, x_N)$  este

$$w_{A_1, \dots, A_N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{\frac{(x_1 - \mu_1)^2 + \dots + (x_N - \mu_N)^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Probabilitatea depinde de **distanța Euclideană** dintre  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  și  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$

## Distanța Euclideană

- Distanța Euclideană (geometrică) între 2 vectori N-dimensionali

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_N - v_N)^2}$$

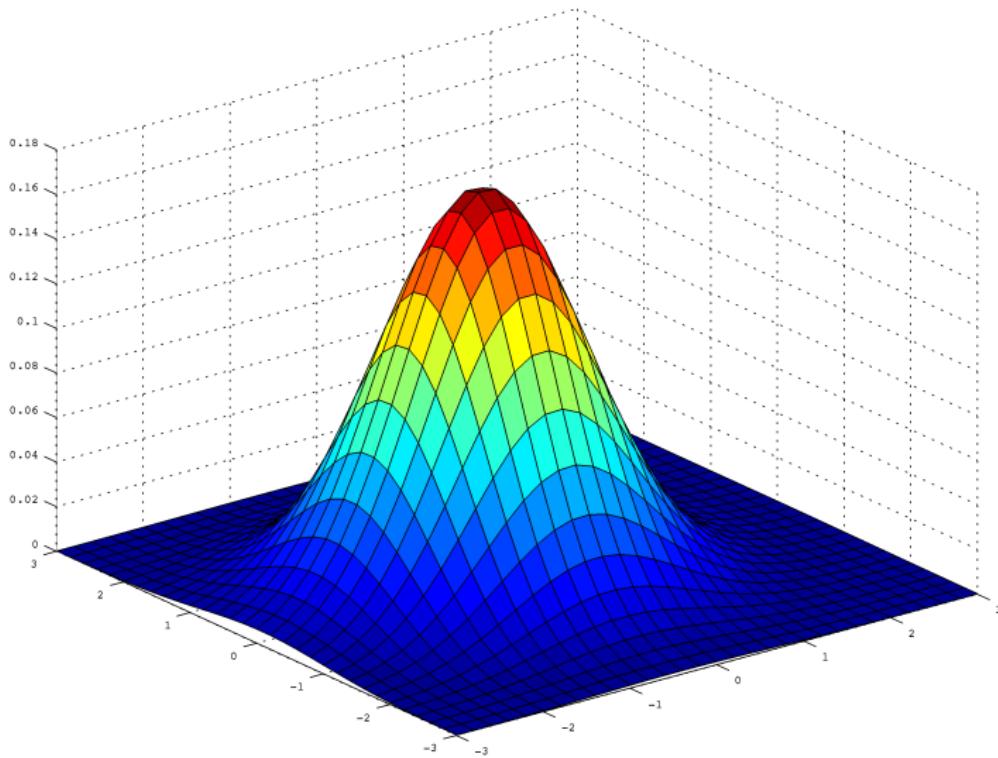
- Unidimensional:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = |u - v|$
- 2D:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$
- 3D:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$
- ...
- N-dimensional:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - v_i)^2}$
- ...
- Semnale continue:  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - v(t))^2 dt}$

## Multiple v.a. normale

- ▶ Probabilitatea a  $N$  v.a. normale, independente, cu același  $\sigma$  dar diferite  $\mu$ ; depinde de **pătratul distanței Euclidiene față de vectorul medie**  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ 
  - ▶ Aproape de  $\mu$ : probabilitate mai mare
  - ▶ De departe de  $\mu$ : probabilitate redusă
  - ▶ Două puncte la aceeași distanță de  $\mu$  au aceeași probabilitate

# Distribuția normală 2D

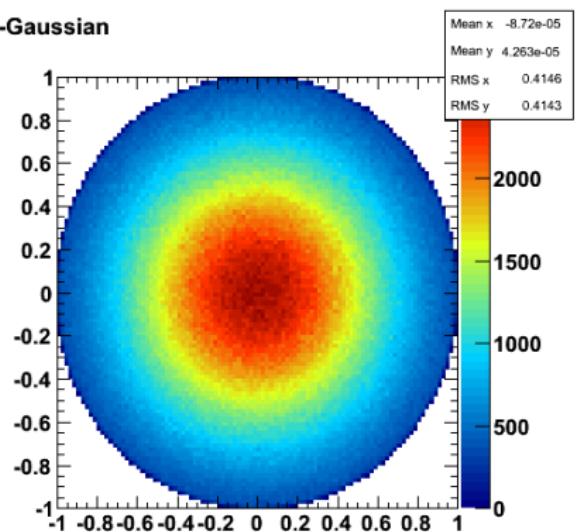
- ▶ Distribuția a 2 v.a. normale (distribuția normală 2D)



# Distribuția normală 2D - vedere de sus

- ▶ Vedere de sus
- ▶ Aici,  $\mu = (0, 0)$
- ▶ Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în cercuri concentrice (simetric)

2D-Gaussian



## Medii statistice

- ▶ V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("momente")
- ▶ **Valoarea medie** (momentul de ordin 1)
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\bar{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\bar{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- ▶ (Exemplu: entropia  $H(X)$  = valoarea medie a informației)
- ▶ Notație ușuală:  $\mu$

## Ce înseamnă, practic, valoarea medie

- ▶ Ce înseamnă, practic, valoarea medie a unei variabile aleatoare?
  - ▶ Dacă avem  $N \rightarrow \infty$  valori aleatoare conform distribuției respective, valoarea medie = media tuturor acestor valori;
  - ▶ Dacă trebuie să prezicem valoarea unei variabile aleatoare  $X$ , și plătim un cost proporțional cu pătratul erorii pe care o facem,  $(u - X)^2$ , valoarea medie  $\mu$  este cea mai bună alegere, întrucât minimizează costul global:

$$\mu = \arg \min_u \int_{-\infty}^{\infty} (u - x)^2 \cdot w(x) dx$$

- ▶ Demonstrație: la tablă: derivare, derivata = 0

## Ce înseamna valoarea medie

- ▶ Valorile care au probabilitate ridicată "trag" valoarea medie înspre ele
- ▶ Pentru distribuții cu formă simetrică (de ex. distribuția normală),  
valoarea medie = valoarea centrală a funcției
  - ▶ Demonstrație: ambele laturi ale funcției "trag" valoare medie înspre ele  
în mod egal, valoarea medie rămâne la mijloc
- ▶ Pentru distribuția normală,  $\bar{X} = \mu$
- ▶ Pentru distribuția uniformă  $\mathcal{U}[a, b]$ ,  $\bar{X} = \frac{a+b}{2}$  (mijlocul intervalului)

# Proprietățile valorii medii

- ▶ Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - ▶ pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- ▶ Pentru două variabile aleatoare A și B (independente):
- ▶ Liniaritate

$$E\{c_1A + c_2B\} = c_1E\{A\} + c_2E\{B\}$$

- ▶ Sau:

$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$

- ▶ Fără demonstrație

## Valoarea pătratică medie

- ▶ Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- ▶ Momentul de ordin 2
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

# Varianță

- ▶ Varianța = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- ▶ V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - ▶  $\sigma^2$  = mare: abateri mari față de medie
  - ▶  $\sigma^2$  = mic: valori concentrate în jurul mediei

## Legătura între cele trei mărimi

- ▶ Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{(A - \mu)^2} \\&= \overline{A^2 - 2 \cdot A \cdot \mu + \mu^2} \\&= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\&= \overline{A^2} - \mu^2\end{aligned}$$

## Suma variabilelor aleatoare

- ▶ Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- ▶ Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- ▶ Dacă  $C = A + B$ , atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

- ▶ Caz particular: dacă  $A$  și  $B$  sunt v.a. normale, cu  $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$  și  $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$ , atunci:
  - ▶  $C$  este tot o v.a. cu distribuție normală,  $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$ , având:
  - ▶ media = suma mediilor:  $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
  - ▶ varianța = suma varianțelor:  $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

## II.2 Procese aleatoare

# Procese aleatoare

- ▶ Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- ▶ Proces aleator **în timp discret**  $f[n]$  = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
  - ▶ ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- ▶ Proces aleator **în timp continuu**  $f(t)$  = o secvență de v.a. la orice moment de timp
  - ▶ ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- ▶ Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
  - ▶ ex.:  $f(t_0)$  = valoarea la momentul  $t_0$  este o v.a.

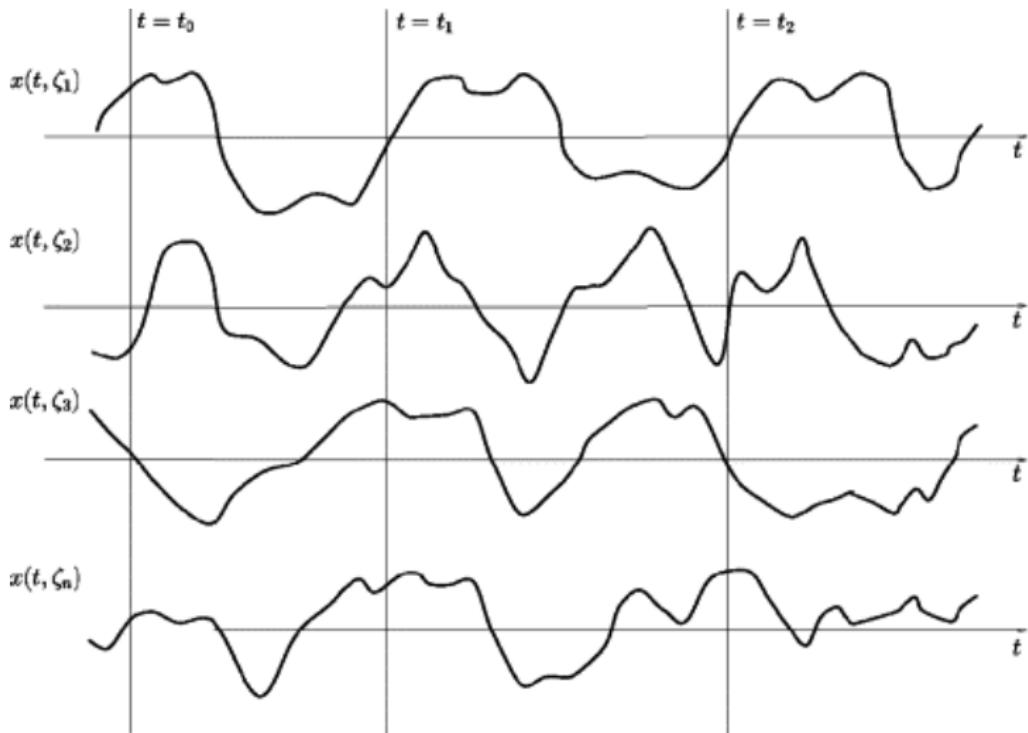
## Realizări ale proceselor aleatoare

- ▶ **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
  - ▶ ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; am obținut o anume realizare, dar am fi putut obține orice altă realizare
- ▶ Notația uzuală:  $f^{(k)}[n]$  sau  $f^{(k)}(t)$ 
  - ▶  $k$  indică realizarea particulară care se consideră
  - ▶  $t$  sau  $n$  este timpul
- ▶ Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
  - ▶ la fel ca atunci când considerăm o v.a.

## Proces aleator = un fenomen 2-D

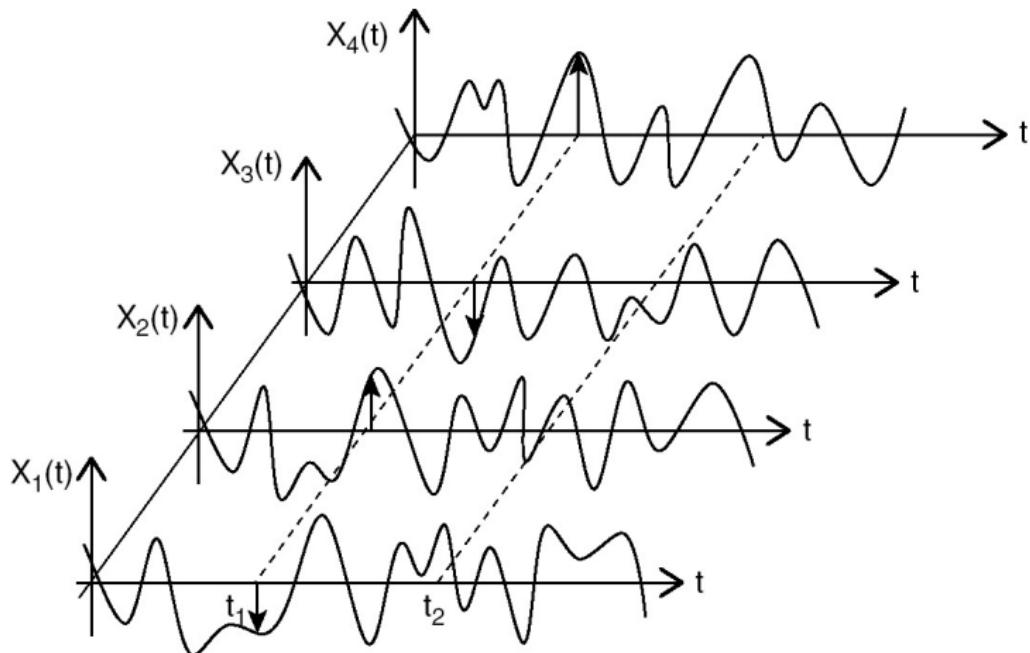
- ▶ Un proces aleator trebuie vizualizat în două dimensiuni:
  - ▶  $f^{(k)}[n]$  sau  $f^{(k)}(t)$  depind de două variabile:
    - ▶  $k$  = realizarea
    - ▶  $t$  sau  $n$  = timpul

# Proces aleator = un fenomen 2-D



- ▶ sursa: "Information-Based Inversion and Processing with Applications"  
Edited by Tadeusz J. Ulrych, Mauricio D. Sacchi, Volume 36,

## Proces aleator = un fenomen 2-D



- ▶ sursa: Razdolsky, L. (2014). Random Processes. In Probability-Based Structural Fire Load (pp. 89-136). Cambridge: Cambridge University Press

## Proces aleator = un fenomen 2-D

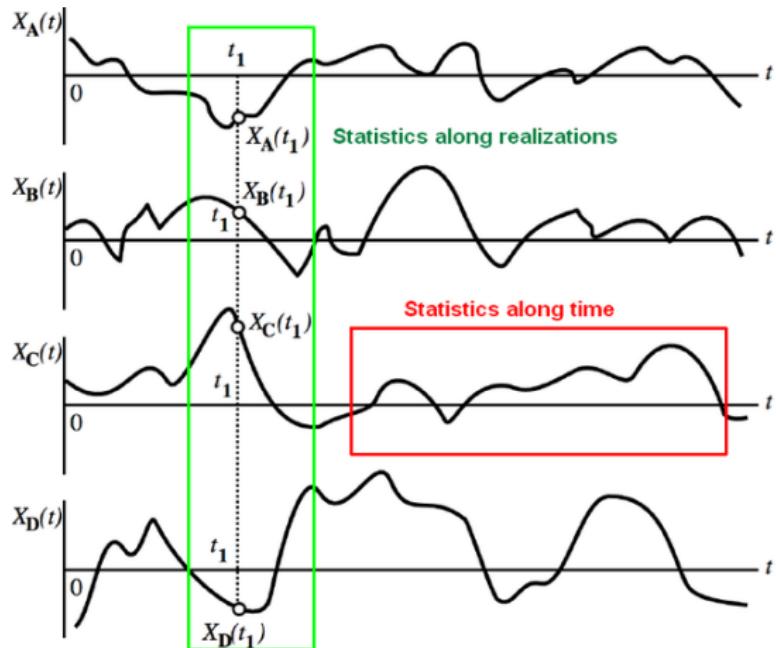


- ▶ sursa: <https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process>

## Două feluri de valori medii

- ▶ Procesele aleatoare au două tipuri de valori medii:
  - ▶ Valori medii **statistice** = calculate la un timp  $t$  sau  $n$  fixat, de-a lungul tuturor realizărilor posibile
  - ▶ Valori medii **temporale** = calculate pentru o realizare  $k$  fixată, de-a lungul timpului

## Două feluri de valori medii



- sursa: <https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process>

## Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- ▶ Fiecare eșantion  $f(t_1)$  dintr-un proces aleator este o v.a.
  - ▶ descris de o **distribuție de ordin 1**
  - ▶ are FR  $F_1(x; t_1)$
  - ▶ are FDP / FMP  $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x; t_1)}{dx}$
  - ▶ distribuția depinde de momentul  $t_1$
- ▶ Un eșantion la alt moment  $t_2$  este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
  - ▶ altă FR  $F_1(x; t_2)$
  - ▶ altă FDP / FMP  $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x; t_2)}{dx}$
- ▶ Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- ▶ Indicele  $w_1$  arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții de ordin 1-)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

## Distribuții de ordin 2

- ▶ O pereche de v.a.  $f(t_1)$  și  $f(t_2)$  formează un sistem de 2 v.a.:
  - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
  - ▶ au FR comună  $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
  - ▶ au FDP / FMP comună  $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
  - ▶ distribuția depinde de momentele  $t_1$  și  $t_2$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții de ordin 2)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

## Distribuții de ordin n

- ▶ Generalizare la un grup de  $n$  eșantioane dintr-un p.a.
- ▶ Un set de  $n$  v.a.  $f(t_1), \dots, f(t_n)$  dintr-un proces aleator  $f(t)$ :
  - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin n**
  - ▶ au FR comună  $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$
  - ▶ au FDP / FMP comună  $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
  - ▶ depind de momentele de timp  $t_1, t_2, \dots, t_n$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de  $n$  eșantioane (*distribuții de ordin n*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

# Medii statistice

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii **statistice** și **temporale**

Pentru procese continue:

## 1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

## 2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

## 3. Varianță

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- ▶ Legătura între aceste trei mărimi:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2} - 2\overline{f(t_1)\mu(t_1)} + \overline{\mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- ▶ Observații:

- ▶ aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul  $t_1$
- ▶ ele caracterizează doar eșantionul de la momentul  $t_1$
- ▶ la alt moment de timp  $t_2$ , v.a.  $f(t_2)$  este diferită, și valorile medii pot dифeiri

# Medii statistice - autocorelația

Medii statistice care caracterizează **o pereche** de eșantioane:

## 4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

## 5. Funcția de corelație (pentru două procese aleatoare diferite $f(t)$ și $g(t)$ )

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

- ▶ Observații:
  - ▶ aceste funcții pot fi diferențiate pentru perechi de valori luate la momente diferențiate ( $t_1, t_2$ )

## Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește  $\int$  cu  $\sum$ , și notația  $f(t)$  cu  $f[t]$ :

$$1. \overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$$

$$2. \overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$$

$$3. \sigma^2(t_1) = \overline{(f[t_1] - \mu(t_1))^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1)$$

$$4. R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$5. R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$$

## Medii temporale

- ▶ Dacă avem acces doar la o singură realizare  $f^{(k)}(t)$  a procesului?
- ▶ Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare  $f^{(k)}(t)$ , de-a lungul timpului**

# Medii temporale

**Medii temporale** pentru procese aleatoare continue:

## 1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) dt$$

## 2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

# Varianța temporală

## 3. Varianța temporală

$$\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

- ▶ Relația dintre cele trei mărimi:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

- ▶ Observație:
  - ▶ aceste valori nu mai depind de timpul  $t$

# Autocorelația temporală

## 4. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

## 5. Funcția de corelație temporală (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$ )

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

## Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește  $\int$  cu  $\sum$ ,  $T$  cu  $N$ , și se împarte la  $2N + 1$  în loc de  $2T$

$$1. \overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]$$

$$2. \overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t])^2$$

$$3. \sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}[t] - \mu^{[k]}\}^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$$

# Procese aleatoare discrete

## 4. Autocorelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

## 5. Corelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

## Realizări de lungime finită

- ▶ E posibil să avem o realizare de **lungime finită** (de ex. un vector cu 1000 de eșantioane dintr-o realizare a unui p.a.)
- ▶ Cum calculăm mediile temporale?
- ▶ Se fac sumele/integralele de la  $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$  sau  $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$  în loc de la  $-\infty$  la  $\infty$
- ▶ Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$$

## Medii statistice și temporale

- ▶ Mediile statistice sunt, de obicei, cele de dorit
  - ▶ dar necesită cunoașterea distribuțiilor  $w(x)$ , care în practică sunt rareori cunoscute
- ▶ În practică, de obicei avem acces doar la o singură realizare, obținută printr-o măsurătoare
  - ▶ deci putem calcula doar mediile temporale pe acea realizare
- ▶ Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt **identice** ("ergodicitate")

## Procese aleatoare staționare

- ▶ Până acum, am considerat că mediile statistice depind de timp
  - ▶ pot fi diferite pentru un eșantion de la  $t_1$  și de la  $t_2$
- ▶ Proces aleator **staționar** = dacă mediile statistice rămân aceleasi la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- ▶ Altfel spus: distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

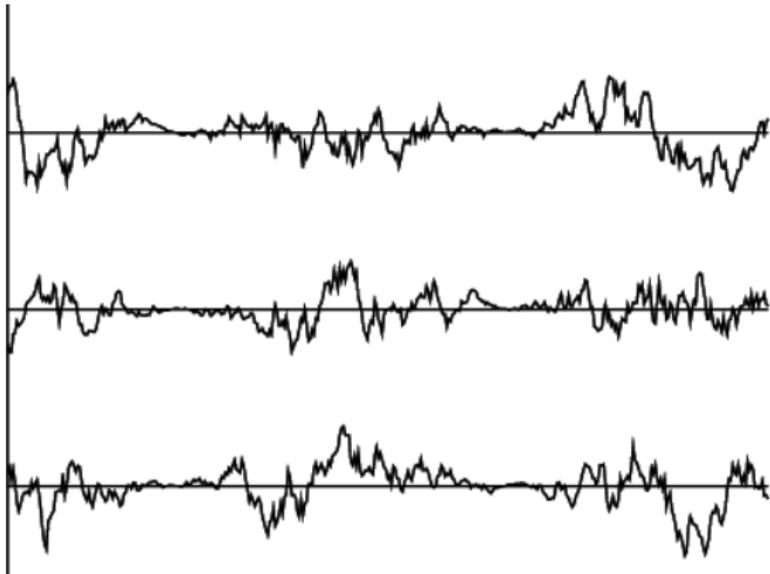
- ▶ Practic, pentru a fi staționar trebuie ca **toate mediile statistice să nu mai depindă de timp  $t$**

## Staționar în sens strict sau larg

- ▶ Proces aleator **staționar în sens strict**:
  - ▶ relația e valabilă pentru distribuțiile de orice ordin  $n$
  - ▶ valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța, autocorelația și **toate celelalte** statistici de ordin superior nu depind de originea timpului  $t$
- ▶ Proces aleator **staționar în sens larg**:
  - ▶ relația e valabilă doar pentru distribuțiile de ordin  $n = 1$  și  $n = 2$  (distribuțiile unui singur eșantion, sau a două eșantioane)
  - ▶ **doar** valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța și autocorelația nu depind de originea timpului  $t$ , dar statisticile de ordin superior pot depinde

## Procese aleatoare staționare

- ▶ Este procesul aleator schițat mai jos staționar sau nu?



- ▶ sursa: SEX, LIES & STATISTICS, Ned Wright,  
<http://www.astro.ucla.edu/~wright/statistics/>

## Procese aleatoare staționare

- ▶ Răspuns: ne-staționar
- ▶ Se observă că varianța nu este aceeași la toate momentele de timp

## Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru distribuții ale unui singur eșantion (de ordin  $n = 1$ ):

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- ▶ Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **identice la orice moment de timp  $t$**

$$\overline{f(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = \text{constant}, \forall t$$

## Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru distribuții ale unor perechi de eșantioane (de ordin  $n = 2$ ):

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- ▶ Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp**  
 $\tau = t_2 - t_1$  dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$$

- ▶ Depinde doar de valoarea  $\tau = t_2 - t_1 =$  diferența de timp dintre cele două eșantioane

# Consecințe ale staționarității

Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **staționare**:

- ▶ Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași
- ▶ Autocorelația temporală:
  - ▶ pentru p.a. continue

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)f^{(k)}(t+\tau) dt$$

- ▶ pentru p.a. discrete

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]f^{(k)}[t+\tau]$$

- ▶ lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la dispoziție,  $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$  sau  $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$

## Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru funcția de **corelație**, definiția este similară cu cea de la autocorelație de mai sus
- ▶ Corelația depinde doar de **diferența de timp**  $\tau = t_2 - t_1$  dintre cele două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

## Interpretarea autocorelației

- ▶  $R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$  = **media produsului a două eşantioane situate la distanță de  $\tau$** 
  - ▶ ne spune dacă eşantioanele variază la fel sau nu
- ▶ Idem pentru corelație, doar că eşantioanele provin din p.a. diferite,  $f$  și  $g$

## Interpretarea autocorelației

- ▶ Exemple:
  - ▶  $R_{ff}(0.5) > 0$ : două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative => produsele sunt majoritar pozitive)
    - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre celălaltă
  - ▶  $R_{ff}(1) < 0$ : două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul este pozitiv, celălalt este negativ => produsele sunt majoritar negative)
    - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre celălaltă
  - ▶  $R_{ff}(2) = 0$ : două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt **necorelate** (produsele sunt în medie 0, deci cele două eșantioane au la fel de multe șanse de a fi de același semn sau cu semne contrare)
    - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, **nu** se mai poate "ghici" ceva despre celălaltă

## Procese aleatoare ergodice

- ▶ În practică, avem acces la o singură realizare
- ▶ Proces aleator **ergodic** = dacă mediile temporale pe orice realizare sunt **identice cu mediile statistice**
- ▶ Ergodicitatea înseamnă:
  - ▶ Se pot calcula toate mediile pe baza unei singure realizări (oricare)
    - ▶ dar realizarea respectivă trebuie să fie foarte lungă (lungimea  $\rightarrow \infty$ ) pentru valori precise
  - ▶ Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
    - ▶ o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

## Procese aleatoare ergodice

- ▶ Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
  - ▶ de ex. zgomote de tensiune
- ▶ Exemplu de proces aleator **ne-ergodic**:
  - ▶ se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
    - ▶ o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

# Procese aleatoare ergodice

```
int getRandomNumber()
{
    return 4; // chosen by fair dice roll.
               // guaranteed to be random.
}
```

- ▶ XKCD 221 (link aici: <https://xkcd.com/221/>)
- ▶ Se consideră toate numerele care s-ar fi putut obține în loc de 4 (1,2,3,5 sau 6)
- ▶ Care e problema aici?
  - ▶ proces aleator staționar sau ne-staționar?
  - ▶ proces aleator ergodic sau ne-ergodic?

### I.3 Proprietăți ale autocorelației

## Densitatea spectrală de putere

- ▶ **Densitatea spectrală de putere** (DSP)  $S_{ff}(\omega)$  reprezintă puterea procesului aleator la fiecare frecvență  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ )
- ▶ DSP descrie cum este distribuită puterea semnalului în frecvență
  - ▶ de ex. unele procese au mai multă putere la frecvențe joase, altele la frecvențe înalte
- ▶ Puterea în banda de frecvență  $[f_1, f_2]$  este  $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ Puterea totală a procesului aleator este  $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ DSP este o funcție măsurabilă practic
  - ▶ poate fi determinată experimental
  - ▶ este importantă în aplicații practice (ingineresci)

# Teorema Wiener-Hincin

## Teorema Wiener-Hincin:

- ▶ Densitatea spectrală de putere = **transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- ▶ Fără demonstrație, prea complicat
- ▶ Leagă două concepte de natură diferită
  - ▶ funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
  - ▶ DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

## Zgomot alb

- ▶ **Zgomot alb** = un proces aleator cu **funcția de autocorelație egală cu un Dirac**

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

- ▶ este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
- ▶ autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice  $\tau \neq 0$
- ▶ oricare două eșantioane diferite ( $\tau \neq 0$ ) au corelație zero (necorelate)
  - ▶ valorile a două eșantioane distincte nu au legătură între ele

## Zgomot alb

- ▶ **Densitatea spectrală de putere** = transf. Fourier a unui Dirac = **constantă**  $\forall \omega$

$$S_{ff}(\omega) = \text{constant}, \forall \omega$$

- ▶ putere constantă pentru toate frecvențele, până la  $f = \infty$
- ▶ Zgomotul alb poate avea **orice distribuție** (normală, uniformă etc.)
  - ▶ termenul "zgomot alb" nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate

## Zgomot alb de bandă limitată

- ▶ În lumea reală, pentru orice semnal puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
  - ▶ pentru că puterea totală  $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}\omega$  nu poate fi infinită
  - ▶ se numește zgomot alb **de bandă limitată**
- ▶ În acest caz, autocorelația = aproximativ un Dirac, dar nu chiar infinit de "subtire"
  - ▶ eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
  - ▶ de ex. din cauza unor mici capacități parazite

- ▶ **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
  - ▶ Zgomot alb, Gaussian, aditiv
  - ▶ tipul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- ▶ Înseamnă:
  - ▶ **aditiv**: zgomotul se adună peste semnalul original (adică de ex. nu se multiplică cu acesta)
  - ▶ **gaussian**: eșantioanele au distribuția normală
  - ▶ **alb**: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele

# Examen 2020-2021

- ▶ Până aici s-a făcut în 2020-2021. Celealte slide-uri din acest fișier nu se cer.

# Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

► Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = const$$

► Dem.: două eșantioane la un interval  $\infty$  sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

► Dem.: se pornește de la  $\overline{(f(t) - f(t + \tau))^2} \geq 0$

► Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

# Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

- ▶ Dem.: Se pune  $\tau = 0$  în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la  $\infty$

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

- ▶ Dem.:  $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$ ,  $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

## Autocorelația unui proces aleator filtrat

- ▶ Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
  - ▶ fie în timp continuu: intrarea  $x(t)$ , sistemul  $H(s)$ , ieșirea  $y(t)$
  - ▶ fie în timp discret: intrarea  $x[n]$ , sistemul  $H(z)$ , ieșirea  $y[n]$
- ▶ Cum depinde autocorelația ieșirii  $y$  de cea a intrării  $x$ ?
- ▶ Se știe că  $y$  este convoluția lui  $x$  cu răspunsul la impuls  $h$

# Dezvoltare matematică

- ▶ Pentru un proces aleator în timp discret

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n + \tau]} \\ &= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n - k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n + \tau - k_2]} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2] \overline{x[n - k_1]x[n + \tau - k_2]} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2] \end{aligned}$$

- ▶ Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

# Dezvoltare matematică

- Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

- Schimbare de variabilă  $\tau - k_1 + k_2 = u$

- rezultă  $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

## Rezultat

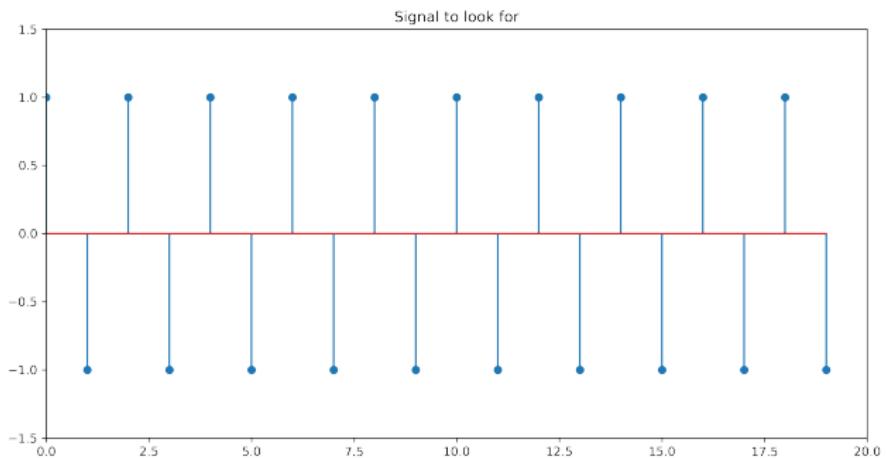
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- ▶ DSP a lui  $y$  = DSP a lui  $x$  multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- ▶ Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

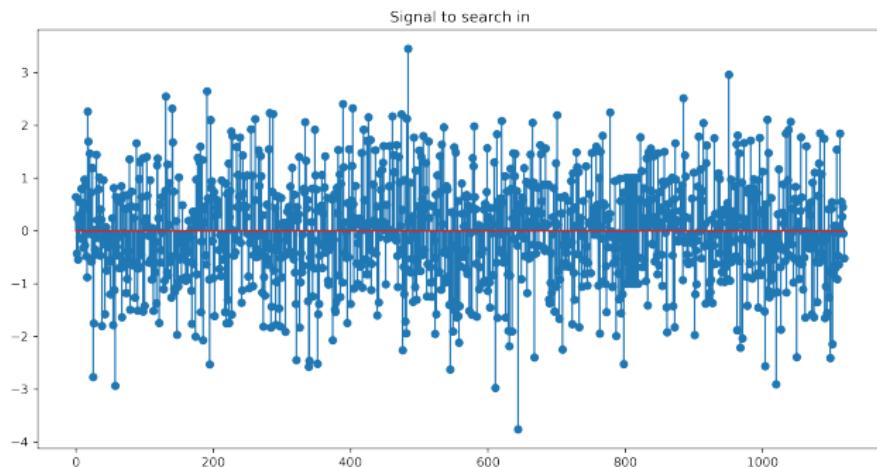
## Aplicații ale (auto)corelației

- ▶ Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- ▶ Corelația a două semnale = o măsura a **similarității** celor două semnale
  - ▶ Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celuilalt
  - ▶ Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- ▶ Corelația poate fi utilizată pentru localizare
  - ▶ Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
  - ▶ Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
  - ▶ Valori mici atunci când nu se potrivesc

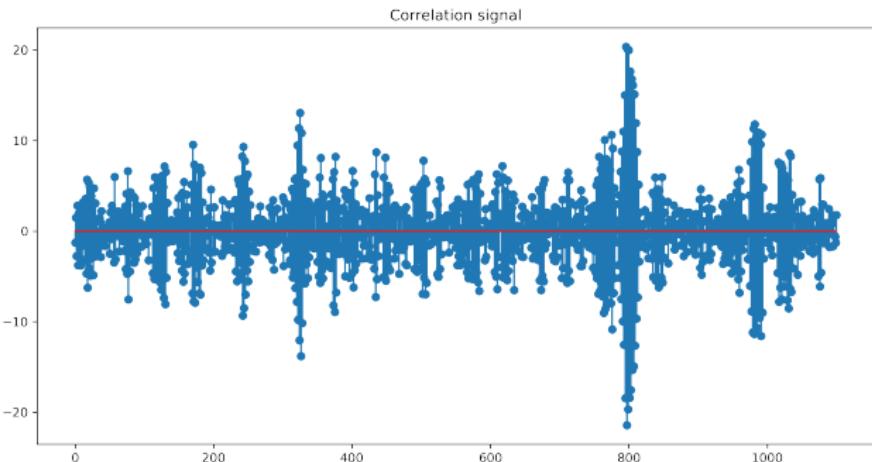
# Semnalul căutat



# Semnalul de dimensiuni mari



# Rezultatul corelației



# Identificare de sistem

- ▶ Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- ▶ Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemului

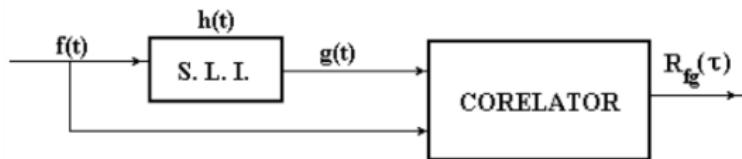


Figure 1: System identification setup

## Identificare de sistem

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \overline{f[n]g[n + \tau]} \\ &= f[n] \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]f[n + \tau - k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{f[n]f[n + \tau - k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]R_{ff}[\tau - k] \\ &= h[\tau] * R_{ff}[\tau] \end{aligned}$$

- Dacă intrarea  $f$  este **zgomot alb** cu puterea  $A$ ,  $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$ , și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] * R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] * \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut