

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Chapter III. Elemente de Teoria Estimării

II.1 Introdurre

Ce înseamnă “estimare”?

- ▶ Un emițător transmite un semnal $s_{\Theta}(t)$ care depinde de parametru **necunoscut** Θ
- ▶ Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează $r(t) = s_{\Theta}(t) + \text{zgomot}$
- ▶ Vrem să **găsim** valoarea parametrului
 - ▶ pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
 - ▶ datele recepționate au zgomot \Rightarrow parametrul este “estimat”
- ▶ Valoarea găsită este $\hat{\Theta}$, **estimatul** lui Θ
 - ▶ există întotdeauna eroare de estimare $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$
- ▶ Exemple:
 - ▶ Amplitudinea unui semnal constant: $r(t) = A + \text{zgomot}$, trebuie estimat A
 - ▶ Faza unui semnal sinusoidal: $r(t) = \cos(2\pi ft + \phi) + \text{zgomot}$, de estimat ϕ
 - ▶ Semnal vocal înregistrat, de estimat/decis ce cuvânt este pronunțat

- ▶ Fie următoarea problemă de estimare: $r(t) = A + z_{gomot}$, de estimat A
- ▶ La detecție se alege între **două valori cunoscute** ale A :
 - ▶ de ex. A poate fi 0 sau 5 (ipotezele H_0 și H_1)
- ▶ La estimare, A poate fi oricât \Rightarrow se alege între **o infinitate de opțiuni** ale A
 - ▶ A poate fi orice valoare din \mathbb{R} , în general

- ▶ Detecție = Estimare restrânsă doar la un set discret de opțiuni
- ▶ Estimare = Detecție cu un număr infinit de opțiuni posibile
- ▶ Metodele statistice sunt similare
 - ▶ În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
 - ▶ (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este “detecție” sau “estimare”?)

Semnalul recepționat

- ▶ Semnalul recepționat este $r(t)$
 - ▶ este afectat de zgomot, și depinde de parametrul necunoscut Θ
- ▶ Considerăm **N eșantioane** din $r(t)$, luate la momentele de timp t_i

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

- ▶ Fiecare eșantion r_i este o variabilă aleatoare ce depinde de Θ (și zgomot)
 - ▶ Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de Θ

$$w_i(r_i; \Theta)$$

- ▶ Întregul vector de eșantioane \mathbf{r} este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de Θ (și de zgomot)
 - ▶ Are o distribuție N-dimensională ce depinde de Θ
 - ▶ Egală cu produsul tuturor $w_i(r_i; \Theta)$

$$w(\mathbf{r}; \Theta) = w_1(r_1; \Theta) \cdot w_2(r_2; \Theta) \cdot \dots \cdot w_N(r_N; \Theta)$$

- ▶ Considerăm estimarea lui Θ în două cazuri:
 1. Nu cunoaștem alte informații despre parametru, decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex. $\Theta > 0$)
 - ▶ Parametrul poate avea orice valoare din domeniul de existență, în mod echiprobabil
 2. Se cunoaște o distribuție $w(\Theta)$ a lui Θ , care indică ce valori ale lui Θ sunt mai probabile / mai puțin probabile
 - ▶ este distribuția *a priori* (“cea cunoscută de dinainte”)

II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

Definiția plauzibilității maxime

- ▶ Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă (“Maximum Likelihood”, ML)
- ▶ Distribuția vectorului recepționat, $w(\mathbf{r}; \Theta)$, reprezintă **funcția de plauzibilitate**
 - ▶ vectorul recepționat \mathbf{r} este cunoscut, deci e o constantă
 - ▶ necunoscuta aici este Θ

$$L(\Theta) = w(\mathbf{r}; \Theta)$$

- ▶ Estimarea de plauzibilitate maximă: estimatul $\hat{\Theta}$ este **valoarea care maximizează plauzibilitatea semnalului recepționat**
 - ▶ i.e. valoarea Θ care maximizează $w(\mathbf{r}; \Theta)$

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} L(\Theta) = \arg \max_{\Theta} w(\mathbf{r}; \Theta)$$

- ▶ Dacă Θ aparține doar unui anumit domeniu, se face maximizarea doar asupra acelui domeniu.

- ▶ Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0$$

- ▶ Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției $L(\Theta)$ înainte de derivare (“log-likelihood function”)

$$\frac{d \ln (L(\Theta))}{d\Theta} = 0$$

Calculul maximului

Metoda:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta) = w(\mathbf{r}; \Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui $L(\Theta)$ sau a lui $\ln(L(\Theta))$ să fie 0

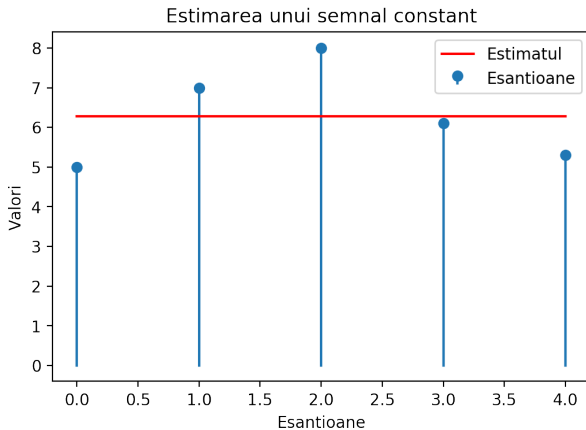
$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ or } \frac{d \ln(L(\Theta))}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea $\hat{\Theta}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul $\hat{\Theta}$ este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
 - întrucât derivata = 0 și pentru maxime și pentru minime

Semnal constant în zgomot gaussian:

- ▶ Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru constanta A din 5 măsurători afectate de zgomot $r_i = A + noise$, cu valori egale cu $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$.
- ▶ Soluție: la tablă
- ▶ Estimatul \hat{A} este chiar valoarea medie a eșantioanelor (deloc surprinzător)

Simulare numerică



Semnal oarecare în AWGN

- ▶ Fie semnalul original “curat” $s_{\Theta}(t)$
- ▶ Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- ▶ Eșantioanele r_i sunt luate la momentele t_i
- ▶ Eșantioanele r_i au distribuție normală, cu media $s_{\Theta}(t_i)$ și varianța σ^2
- ▶ Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilității fiecărui eșantion r_i

$$\begin{aligned} L(\Theta) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- ▶ Logaritmul plauzibilității (“log-likelihood”) este

$$\ln(L(\Theta)) = \underbrace{N \ln \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)}_{\text{constant}} - \frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

Semnal oarecare în AWGN

- ▶ Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta} = \arg \max_{\Theta} w(r; \Theta) = \arg \min \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

- ▶ Termenul $\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$ este **distanța $d(\mathbf{r}, s_{\Theta})$ la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_{\Theta}) = \sqrt{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_{\Theta}))^2 = \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

- ▶ Estimatul de plauzibilitate maximă $\hat{\Theta}$ = valoarea care face $s_{\Theta}(t_i)$ **cel mai apropiat de vectorul recepționat \mathbf{r}**
 - ▶ mai aproape = mai probabil
 - ▶ cel mai aproape = cel mai probabil = plauzibilitate maximă
- ▶ Pentru semnale continue? Similar, dar utilizând distanța între semnale continue

Semnal oarecare în AWGN

- ▶ Estimatul se găsește prin setarea derivatei la 0

$$\frac{d \ln (L(\Theta))}{d \Theta} = 0$$

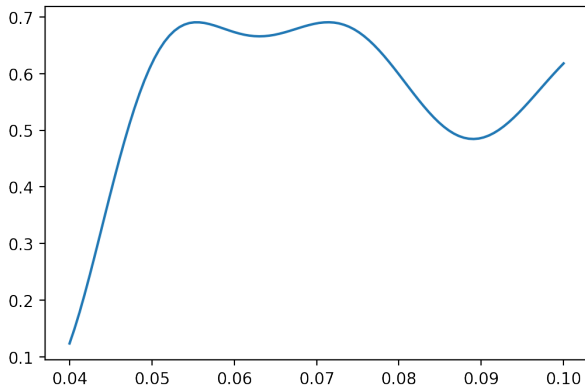
înseamnă

$$\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i)) \frac{ds_{\Theta}(t_i)}{d \Theta} = 0$$

Estimarea frecvenței f a unui semnal sinusoidal

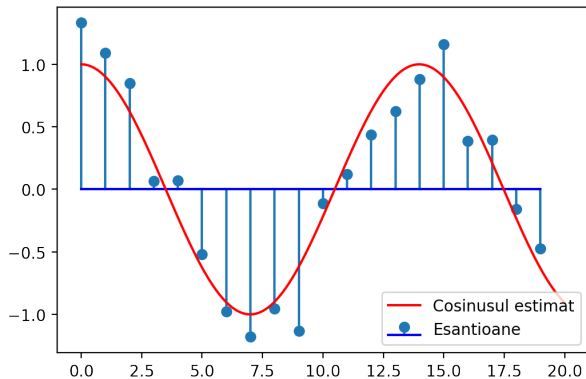
- ▶ Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența f a unui semnal cosinus, din 10 măsurători afectate de zgomot $r_i = \cos(2\pi f t_i) + \text{zgomot}$ de valori [...]. Zgomotul este AWGN $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$. Momentele de eșantionare sunt $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- ▶ Soluție: la tablă

Funcția de plauzibilitate este



Simulare numerică

Frecventa originala = 0.070000, estimatul = 0.071515



Estimare ML și Detecție ML

- ▶ La estimarea ML, estimatul $\hat{\Theta}$ este valoarea care maximizează funcția de plauzibilitate
- ▶ La detecție ML, criteriul de decizie $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$ înseamnă “alege ipoteza pentru care funcția de plauzibilitate este mai mare”
- ▶ Același principiu, doar în contexte diferite:
 - ▶ la detecție, avem de ales doar între câteva opțiuni predefinite
 - ▶ la estimare nu mai avem constrângeri \Rightarrow se alege valoarea maximă a întregii funcții

II.3 Estimare Bayesiană

Distribuția *a priori*

- ▶ Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui Θ , $w(\Theta)$
 - ▶ știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
 - ▶ se numește distribuția *a priori*
- ▶ Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori*
 - ▶ estimatul va fi “tras” înspre valori mai probabile
- ▶ Cunoscută sub numele de “estimare Bayesiană”
 - ▶ Thomas Bayes = a descoperit regula lui Bayes
 - ▶ Chestiile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de “Bayesian”

Funcția de cost

- ▶ **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul $\hat{\Theta}$ și valoarea reală Θ

$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- ▶ **Funcția de cost** $C(\epsilon)$ atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
 - ▶ când $\epsilon = 0$, costul $C(0) = 0$
 - ▶ erori ϵ mici au costuri mici
 - ▶ erori ϵ mari au costuri mari
- ▶ Funcții de cost uzuale:
 - ▶ Pătratică: $C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$
 - ▶ Uniformă: $C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$
 - ▶ Liniară: $C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$
 - ▶ (desenate la tablă)

- ▶ Pentru fiecare pereche de valori \mathbf{r} și Θ , $w(\mathbf{r}; \Theta)$ indică cât de probabilă este acea pereche de valori
- ▶ Prin multiplicare cu $C(\epsilon)$ se obține costul pentru fiecare pereche \mathbf{r} și Θ

$$C(\epsilon)w(\mathbf{r}; \Theta)$$

- ▶ Integrând după Θ se obține costul total pentru un anumit \mathbf{r} și toți Θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r}; \Theta)d\Theta$$

- ▶ Integrând mai de parte și după \mathbf{r} se obține costul global pentru toți \mathbf{r} și toți Θ

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon)w(\mathbf{r}; \Theta)d\Theta d\mathbf{r}$$

Minimizarea riscului

- ▶ Se dorește minimizarea riscului R (= a costului global)
- ▶ Regula lui Bayes: $w(\mathbf{r}; \Theta) = w(\Theta|\mathbf{r})w(\mathbf{r})$
- ▶ Înlocuind în R , se obține

$$\begin{aligned} R &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) w(\mathbf{r}) d\Theta d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\mathbf{r}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta \right] d\mathbf{r} \end{aligned}$$

- ▶ Cum $w(\mathbf{r}) \geq 0$, minimizarea integralei I din interior asigură minimumul lui R

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ Vom înlocui $C(\epsilon)$ cu definiția sa și derivăm după $\hat{\Theta}$
 - ▶ Atenție: derivăm după $\hat{\Theta}$, nu Θ !

Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- ▶ Când funcția de cost este pătratică $C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ Vrem $\hat{\Theta}$ care minimizează I , deci derivăm

$$\frac{dI}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- ▶ Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM)** (“**Minimum Mean Squared Error, MMSE**”):

$$\hat{\Theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ $w(\Theta|\mathbf{r})$ este distribuția **a posteriori** a lui Θ
 - ▶ este distribuția lui Θ **după** ce cunoaștem semnalul recepționat \mathbf{r}
 - ▶ distribuția *a priori* $w(\Theta)$ este cea de dinainte de a recepționa datele
- ▶ Estimatorul EPMM este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori*

Estimatorul MAP

- ▶ Dacă funcția de cost este uniformă

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- ▶ Știm că $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- ▶ Se obține

$$I = \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$$

$$I = 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$$

Estimatorul MAP

- ▶ Pentru minimizarea I , trebuie să maximizăm $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$, integrala din jurul punctului $\hat{\Theta}$
- ▶ Pentru E foarte mic, funcția $w(\Theta|\mathbf{r})$ este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- ▶ Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta} = \arg \max w(\Theta|\mathbf{r})$$

- ▶ $\arg \max$ = “valoarea la care funcția este maximă”
 - ▶ $\max f(x)$ = valoarea maximă a unei funcții
 - ▶ $\arg \max f(x)$ = valoarea x pentru care funcția atinge valoarea maximă

Interpretare

- ▶ Estimatorul MAP: $\hat{\Theta} =$ valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- ▶ Estimatorul EPMM: $\hat{\Theta} =$ valoarea medie a distribuției *a posteriori*

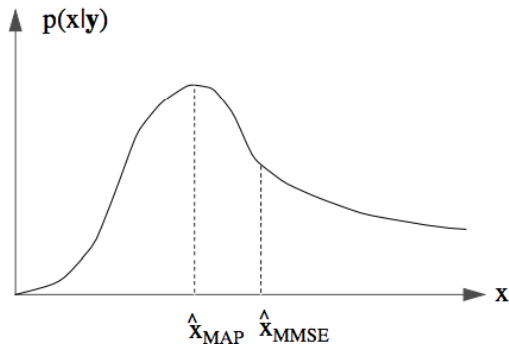


Figure 1: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

Cum se găsește distribuția *a posteriori*

- ▶ Cum găsim distribuția *a posteriori* $w(\Theta|\mathbf{r})$?
- ▶ Regula lui Bayes

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}; \Theta)}{w(\mathbf{r})} = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- ▶ Cum $w(\mathbf{r})$ e constant pentru un \mathbf{r} dat, estimatorul MAP este

$$\hat{\Theta} = \arg \max w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \max w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$$

- ▶ Estimatorul MAP este valoarea care maximizează plauzibilitatea datelor recepționate, dar **multiply** cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- ▶ Estimatorul EPMM este valoarea medie a aceleiași funcții

- ▶ Estimatorul ML este $\arg \max w(\mathbf{r}|\Theta)$
- ▶ Estimatorul MAP = similar cu cel ML dar multiplicând în prealabil funcția cu distribuția *a priori* $w(\Theta)$
- ▶ Dacă $w(\Theta)$ ar fi constant, estimatorul MAP se reduce la cel ML
 - ▶ $w(\Theta) = \text{constant}$ înseamnă că toate valorile Θ sunt la fel de posibile
 - ▶ adică nu avem nici o idee/preferință unde s-ar afla valoarea reală Θ

Relația cu detecția semnalelor

- ▶ Criteriul probabilității minime de eroare $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Se poate rescrie ca $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} w(r|H_0)P(H_0)$
 - ▶ adică se alege ipoteza pentru care $w(r|H) \cdot P(H)$ este mai mare
 - ▶ $w(r|H_1)$, $w(r|H_0)$ sunt plauzibilitățile semnalului recepționat
 - ▶ $P(H_1)$, $P(H_0)$ sunt probabilitățile *a priori* (inițiale) ale ipotezelor
- ▶ Estimatorul MAP = valoarea pentru care $w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$ e maxim
 - ▶ $w(\mathbf{r}|\Theta)$ este plauzibilitatea semnalului recepționat
 - ▶ $w(\Theta)$ este distribuția *a priori*
- ▶ Același principiu, doar în contexte diferite:
 - ▶ la detecție, avem de ales doar între câteva opțiuni predefinite
 - ▶ la estimare, nu avem constrângeri \Rightarrow se alege valoarea care maximizează întreaga funcție

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- ▶ Vrem să estimăm temperatura de astăzi din Sahara
- ▶ Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (termometru ieftin)
- ▶ Se știe că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$.
- ▶ Estimați valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP și EPMM(MMSE)

Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același σ

- ▶ Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian σ diferit

- ▶ Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$
 - ▶ cu varianță diferită, $\sigma_2 \neq \sigma$