Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

Variabile aleatoare

- **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - Prescurtat: v.a.
- Notație uzuală: X, Y etc..
- Exemple:
  - Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - Voltajul măsurat într-un punct dintr=un circuit
- Opusul = o valoare constantă (de ex. $\pi = 3.1415...$)

Realizări

- **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară rezultată în urma fenomenului aleator
- **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - = mulțimea tuturor realizărilor
- Exemplu: aruncarea unui zar
  - V.a. se notează X
  - Se poate obține o realizare $X = 3$
  - Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
  - Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
  - Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

V.a. continue

- Fie o v.a. continuă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
- Derivata funcției de repartiție este **funcția densitate de probabilitate (FDP)**
$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(t)dt$$

V.a. continue

- FDP este probabilitatea ca valoarea lui X să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x, raportat la ϵ

$$\begin{aligned} w(x) = \frac{dF(x)}{dx} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(X \in [x-\epsilon, x+\epsilon])}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Probabilitatea unei valori anume

- Probabilitatea ca v.a. continuă X să fie **exact** egală cu un x este **zero**
- O v.a. continuă are o infinitate de realizări posibile
- Probabilitatea unei valori anume este practic 0
- FDP este probabilitatea de a fi **într-o vecinătate mică în jurul** unei valori x

V.a. discrete

- Fie o v.a. discretă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
- Exemplu: FR pentru un zar
- Pentru v.a. discrete, FR este de tip "treaptă"

V.a. discrete

- Nu putem defini densitatea de probabilitate
  - pentru că derivata în punctele de discontinuitate nu e definită
- **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*): probabilitatea ca X să aibă valoarea egală cu x

$$w(x) = P\{X = x\}$$

$$F(x) = \sum_{toți \;\; t \leq x} w(t)$$

- Exemplu: FMP pentru un zar?

Probabilități și densități

- Calculul probabilității pe baza FDP (v.a. continuă):

$$P\left\{A \leq X \leq B\right\} = \int_A^B w(x) dx$$

- Calculul probabilității pe baza FMP (v.a. discretă):

$$P\left\{A \leq X \leq B\right\} = \sum_{x=A}^{B} w_X(x)$$

Interpretare grafică

- Probabilitatea ca X să fie între A și B este **suprafața de sub FDP**
  - adică integrala de la A la B
- Probabilitatea ca X să fie exact egal cu o valoare este zero
  - aria de sub un punct este nulă

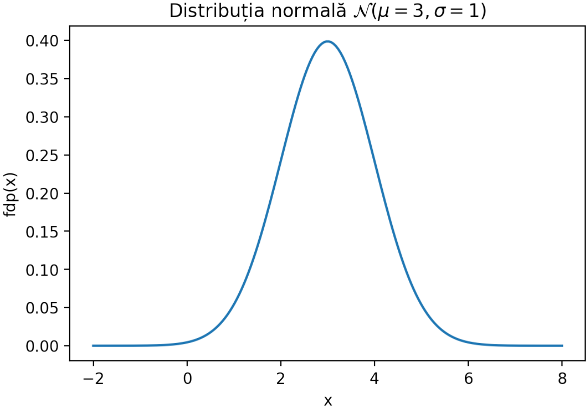
Proprietățile FR/FDP/FMP

- FR este o funcție crescătoare
- FR / FDP / FMP sunt întotdeauna ≥ 0
- $FR(-\infty) = 0$ și $FR(\infty) = 1$
- Integrala FDP / suma FMP $= 1$

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Distribuția normală

- Are doi parametri:
  - **Media** $\mu =$ "centrul" funcției
  - **Deviația standard** $\sigma =$ "lățimea" funcției
- Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala $= 1$)
- Extrem de des întâlnită în practică
- Orice valoare reală este posibilă ($w(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

Distribuția uniformă

- Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- "Înălțimea" funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
- Foarte simplă
- Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
- Se notează cu $\mathcal{U}\left[a, b\right]$

Alte distribuții

- Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

V.a. ca funcții de alte v.a

- O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- Exemple: dacă X este o v.a. distribuită $\mathcal{U}\left[0, 10\right]$, atunci
  - $Y = 5 + X$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U}\left[5, 15\right]$
  - $Z = X^2$ este de asemenea o v.a.
  - $T = cos(X)$ este de asemenea o v.a.
- Motivație: dacă X este aleatoare, și valorile Y, Z, T sunt aleatoare
- X, Y, Z, T nu sunt independente
  - O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Exerciţiu

Exerciţiu:

- Dacă X este o v.a. cu distribuţia $\mathcal{U}\ [0, \pi]$, calculaţi densitatea de probabilitate a v.a. Y definite ca

$$Y = cos(X)$$

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- Cum calculăm $\int_a^b$ dintr-o distribuție normală?
  - Nu se poate prin formule algebrice
- Se folosește *the error function*:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F(X) = \frac{1}{2}(1 + erf(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}))$$

- Valorile funcției *erf()* sunt tabelate / se calculează numeric
  - de ex. pe Google, căutați $erf(0.5)$
- Alte valori folositoare:
  - $erf(-\infty) = -1$
  - $erf(\infty) = 1$

Exerciţiu

Exerciţiu:

- Fie X o v.a. cu distribuţia $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculaţi probabilitatea ca $X \in [2, 4]$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Fie un sistem cu două v.a. continue X și Y
- Există funcția de repartiție comună:

$$F(x, y) = P\{X \leq x \cap Y \leq y\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca X și Y să se găsească într-o vecinătate a lui x și y, **simultan**
- Similar pentru v.a discrete: funcția masă de probabilitate comună

$$w(x, y) = P\{X = x \cap Y = y\}$$

Variabile independente

- Două v.a. X și Y sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- Pentru v.a. independente, probabilitatea ca $X = x$ și $Y = y$ este produsul celor două probabilități
- V.a. discrete:

$$w(x, y) = w(x) \cdot w(y)$$

$$P\{X = x \cap Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}$$

- Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare
- Idem pentru mai mult de două v.a.

Variabile independente

Exercițiu:

- Calculați probabilitatea ca trei v.a. X, Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(-1, 1)$ să fie toate pozitive
  - ***i.i.d*** $=$ "independente și identic distribuite"

Medii statistice

- V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("*momente*")
- Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{X} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{X} = E\{X\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

- (Exemplu: entropia H(X) = valoarea medie a informației)
- Notație uzuală: μ

Proprietățile valorii medii

- Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- Liniaritate
$$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$$
- Sau:
$$E\{aX\} = aE\{X\}, \forall a \in \mathbb{R}$$
$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$$
- Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- Momentul de ordin 2
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{X^2} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{X^2} = E\{X^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx$$

- Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Dispersia (varianța)

- Dispersia (varianța) $=$ valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{X - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w(x) dx$$

- V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{X - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w(x) dx$$

- Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - $\sigma^2 =$ mare: abateri mari față de medie
  - $\sigma^2 =$ mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și dispersie:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{\{X-\mu\}^2} \\ &= \overline{X^2 - 2 \cdot X \cdot \mu + \mu^2} \\ &= \overline{X^2} - 2\mu\overline{X} + \mu^2 \\ &= \overline{X^2} - \mu^2\end{aligned}$$

Suma variabilelor aleatoare

- Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- Dacă $Z = X + Y$

$$w(z) = w(x) \star w(y)$$

- Caz particular: dacă X și Y sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, atunci:
  - Z este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, având:
  - media = suma mediilor: $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$
  - dispersia = suma dispersiilor: $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

Procese aleatoare

- Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
  - ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ = o secvență de v.a. la orice moment de timp
  - ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
  - ex:. $f(t_0)$ = valoarea la momentul t_0 este o v.a.

Realizări ale proceselor aleatoare

- **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
  - ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; dar am fi putut măsura orice altă realizare
- Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
  - la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- Fiecare eșantion $f(t_1)$ ($f[n_1]$) dintr-un p.a. este o v.a.
  - cu FR $F_1(x;t_1)$
  - cu FDP / FMP $w_1(x;t_1) = \frac{dF_1(x;t_1)}{dx}$
- Eșantionul de la momentul t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
  - cu FR $F_1(x;t_2)$
  - cu FDP / FMP $w_2(x;t_2) = \frac{dF_1(x;t_2)}{dx}$
- Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții *de ordin 1*)
- Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2

- O pereche de v.a. $f(t_1)$ and $f(t_2)$ dintr-un proces aleator $f(t)$ au:
  - FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
  - FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin n

- Generalizare la n eșantioane ale unui p.a.
- Un set de n v.a. $f(t_1), ...f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$ au:
  - FR comună $F_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n)$
  - FDP / FMP comună $w_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, ...x_n; t_1, ...t_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$
- Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n valori (distribuții *de ordin n*)
- Similar pentru p.a. discrete

Hic sunt leones

Multiple random variables

- Consider a system with two random variables X and Y
- Joint cumulative distribution function:

$$F_{XY}(x_i, y_j) = P\left\{X \leq x_i \cap Y \leq y_i\right\}$$

- Joint probability density function:

$$w_{XY}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 P_{XY}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}$$

- The joint PDF gives the probability that the values of the two r.v. X and Y are in a **vicinity** of x_i and y_i simultaneously
- Similar definitions extend to the case of discrete random variables

Random process

- A **random process** = a sequence of random variables indexed in time
- **Discrete-time** random process $f[n]$ = a sequence of random variables