

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

I.1 Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
 - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
 - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notăție uzuală: X , Y etc..
- ▶ Exemple:
 - ▶ Numărul obținut prin aruncarea unui zar
 - ▶ Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit
- ▶ Opusul = o valoare constantă (de ex. $\pi = 3.1415\dots$)

- ▶ **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară rezultată în urma fenomenului aleator
- ▶ **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a.
 - ▶ = mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
 - ▶ V.a. se notează X
 - ▶ Se poate obține o realizare $X = 3$
 - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- ▶ V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
 - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
 - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

- ▶ Fie o v.a. continuă X
- ▶ **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

- ▶ Derivata funcției de repartiție este **funcția densitate de probabilitate (FDP)**

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(t)dt$$

- ▶ FDP este probabilitatea ca valoarea lui X să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x , raportat la ϵ

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon)}{2\epsilon} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(X \in [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon}\end{aligned}$$

Probabilitatea unei valori anume

- ▶ Probabilitatea ca v.a. continuă X să fie **exact** egală cu un x este **zero**
- ▶ O v.a. continuă are o infinitate de realizări posibile
- ▶ Probabilitatea unei valori anume este practic 0
- ▶ FDP este probabilitatea de a fi **într-o vecinătate mică în jurul** unei valori x

- ▶ Fie o v.a. discretă X
- ▶ **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este de tip “treaptă”

- ▶ Nu putem defini densitatea de probabilitate
 - ▶ pentru că derivata în punctele de discontinuitate nu e definită
- ▶ **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*): probabilitatea ca X să aibă valoarea egală cu x

$$w(x) = P\{X = x\}$$

$$F(x) = \sum_{\text{toți } t \leq x} w(t)$$

- ▶ Exemplu: FMP pentru un zar?

- Calculul probabilității pe baza FDP (v.a. continuă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \int_A^B w(x)dx$$

- Calculul probabilității pe baza FMP (v.a. discretă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \sum_{x=A}^B w_X(x)$$

- ▶ Probabilitatea ca X să fie între A și B este **suprafața de sub FDP**
 - ▶ adică integrala de la A la B
- ▶ Probabilitatea ca X să fie exact egal cu o valoare este zero
 - ▶ aria de sub un punct este nulă

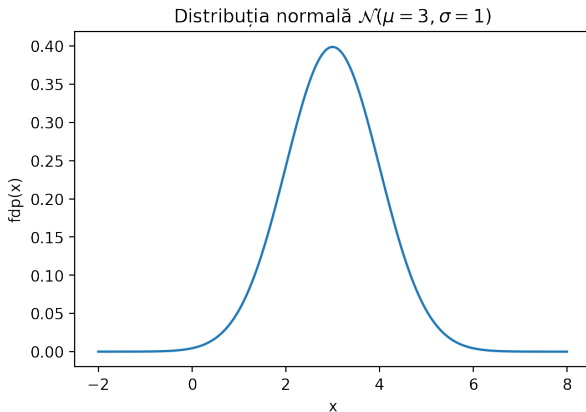
Proprietățile FR/FDP/FMP

- ▶ FR este o funcție crescătoare
- ▶ FR / FDP / FMP sunt întotdeauna ≥ 0
- ▶ $FR(-\infty) = 0$ și $FR(\infty) = 1$
- ▶ Integrala FDP / suma FMP = 1

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



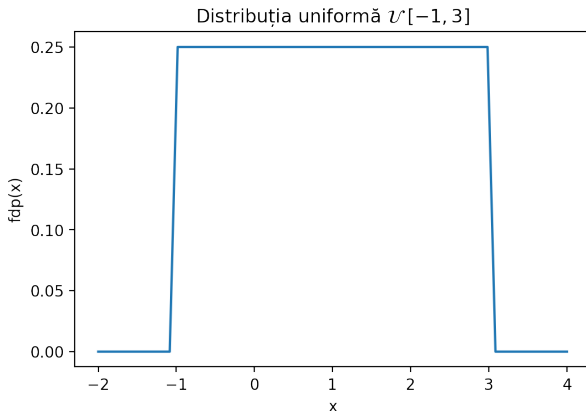
Distribuția normală

- ▶ Are doi parametri:
 - ▶ **Media** μ = “centrul” funcției
 - ▶ **Deviația standard** σ = “lățimea” funcției
- ▶ Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala = 1)
- ▶ Extrem de des întâlnită în practică
- ▶ Orice valoare reală este posibilă ($w(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- ▶ Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Distribuția uniformă

- ▶ Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- ▶ “Înălțimea” funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
- ▶ Foarte simplă
- ▶ Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
- ▶ Se notează cu $\mathcal{U} [a, b]$

- ▶ Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

V.a. ca funcții de alte v.a

- ▶ O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- ▶ Exemple: dacă X este o v.a. distribuită $\mathcal{U} [0, 10]$, atunci
 - ▶ $Y = 5 + X$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U} [5, 15]$
 - ▶ $Z = X^2$ este de asemenea o v.a.
 - ▶ $T = \cos(X)$ este de asemenea o v.a.
- ▶ Motivație: dacă X este aleatoare, și valorile Y , Z , T sunt aleatoare
- ▶ X , Y , Z , T nu sunt independente
 - ▶ O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Exercițiu:

- ▶ Dacă X este o v.a. cu distribuția $\mathcal{U} [0, \pi]$, calculați densitatea de probabilitate a v.a. Y definite ca

$$Y = \cos(X)$$

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- ▶ Cum calculăm \int_a^b dintr-o distribuție normală?
 - ▶ Nu se poate prin formule algebrice
- ▶ Se folosește *the error function*:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- ▶ Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F(X) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right)$$

- ▶ Valorile funcției $\operatorname{erf}()$ sunt tabelate / se calculează numeric
 - ▶ de ex. pe Google, căutați $\operatorname{erf}(0.5)$
- ▶ Alte valori folositoare:
 - ▶ $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$
 - ▶ $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

Exercițiu:

- Fie X o v.a. cu distribuția $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculați probabilitatea ca $X \in [2, 4]$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Fie un sistem cu două v.a. continue X și Y
- ▶ Există funcția de repartiție comună:

$$F(x, y) = P\{X \leq x \cap Y \leq y\}$$

- ▶ Densitatea de probabilitate comună:

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- ▶ FDP comună descrie probabilitatea ca X și Y să se găsească într-o vecinătate a lui x și y , **simultan**
- ▶ Similar pentru v.a discrete: funcția masă de probabilitate comună

$$w(x, y) = P\{X = x \cap Y = y\}$$

Variabile independente

- ▶ Două v.a. X și Y sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- ▶ Pentru v.a. independente, probabilitatea ca $X = x$ și $Y = y$ este produsul celor două probabilități

- ▶ V.a. discrete:

$$w(x, y) = w(x) \cdot w(y)$$

$$P\{X = x \cap Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}$$

- ▶ Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare
- ▶ Idem pentru mai mult de două v.a.

Variabile independente

Exercițiu:

- ▶ Calculați probabilitatea ca trei v.a. X , Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(-1, 1)$ să fie toate pozitive
 - ▶ **i.i.d** = “independente și identic distribuite”

- ▶ V.a. sunt caracterizate prin medii statistice (“*momente*”)
- ▶ Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\bar{X} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\bar{X} = E\{X\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w(x)$$

- ▶ (Exemplu: entropia $H(X)$ = valoarea medie a informației)
- ▶ Notăție uzuală: μ

Proprietățile valorii medii

- ▶ Calculul valorii medii este o operație **liniară**
 - ▶ pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară

- ▶ Liniaritate

$$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$$

- ▶ Sau:

$$E\{aX\} = aE\{X\}, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$$

- ▶ Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- ▶ Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- ▶ Momentul de ordin 2
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\overline{X^2} = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\overline{X^2} = E\{X^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x)$$

- ▶ Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Dispersia (varianța)

- ▶ Dispersia (varianța) = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- ▶ V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{X - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w(x) dx$$

- ▶ V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{X - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w(x)$$

- ▶ Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
 - ▶ σ^2 = mare: abateri mari față de medie
 - ▶ σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și dispersie:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{\{X - \mu\}^2} \\ &= \overline{X^2 - 2 \cdot X \cdot \mu + \mu^2} \\ &= \overline{X^2} - 2\mu\overline{X} + \mu^2 \\ &= \overline{X^2} - \mu^2\end{aligned}$$

Suma variabilelor aleatoare

- ▶ Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- ▶ Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- ▶ Dacă $Z = X + Y$

$$w(z) = w(x) \star w(y)$$

- ▶ Caz particular: dacă X și Y sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, atunci:
 - ▶ Z este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_Z, \sigma_Z^2)$, având:
 - ▶ media = suma mediilor: $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$
 - ▶ dispersia = suma dispersiilor: $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

II.2 Procese aleatoare

Procese aleatoare

- ▶ Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- ▶ Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
 - ▶ ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- ▶ Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ = o secvență de v.a. la orice moment de timp
 - ▶ ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- ▶ Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
 - ▶ ex.: $f(t_0)$ = valoarea la momentul t_0 este o v.a.

Realizări ale proceselor aleatoare

- ▶ **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
 - ▶ ex: un anumit semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; dar am fi putut măsura orice altă realizare
- ▶ Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
 - ▶ la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- ▶ Fiecare eșantion $f(t_1)$ ($f[n_1]$) dintr-un p.a. este o v.a.
 - ▶ cu FR $F_1(x; t_1)$
 - ▶ cu FDP / FMP $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x; t_1)}{dx}$
- ▶ Eșantionul de la momentul t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
 - ▶ cu FR $F_1(x; t_2)$
 - ▶ cu FDP / FMP $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x; t_2)}{dx}$
- ▶ Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții de ordin 1)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2

- ▶ O pereche de v.a. $f(t_1)$ and $f(t_2)$ dintr-un proces aleator $f(t)$ au:
 - ▶ FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
 - ▶ FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin n

- ▶ Generalizare la n eșantioane ale unui p.a.
- ▶ Un set de n v.a. $f(t_1), \dots, f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$ au:
 - ▶ FR comună $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$
 - ▶ FDP / FMP comună $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n valori (distribuții *de ordin n*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii statistice sau temporale (*momente*)

1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

3. Dispersia

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- Dispersia se poate calcula pe baza celorlalte două:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2 - 2f(t_1)\mu(t_1) + \mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- Observații:

- aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul t_1
- ele caracterizează doar eșantionul de la momentul t_1
- la alt moment de timp t_2 , v.a. $f(t_2)$ este diferită, și valorile medii pot diferi

4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. The correlation function (for different random processes $f(t)$ and $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

► Observații:

- aceste funcții au valori diferite pentru diverse perechi de valori (t_1, t_2)

Medii temporale

- ▶ Dacă avem acces doar la o singură realizare a procesului?
- ▶ Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare** $f^{(k)}(t)$, **în timp**

1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) dt$$

2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

3. Dispersia temporală

$$\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

- Poate fi calculată ca:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

- Observație:

- aceste valori nu mai depind de timpul t

4. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

5. Funcția de corelație temporală (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

Medii statistice și temporale

- ▶ Mediile statistice sunt, de obicei, cele de interes
- ▶ Dar, în practică, putem calcula doar mediile temporale
- ▶ Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt identice (“*ergodicitate*”)

Procese aleatoare staționare

- ▶ În general, mediile statistice depind de timp
 - ▶ pot fi diferite la alt moment de timp t_2
- ▶ Proces aleator **staționar** = mediile statistice rămân aceleași la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- ▶ Echivalent: Distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

- ▶ Practic, mediile nu trebuie să mai depindă de timp t

Staționar în sens strict sau larg

- ▶ Proces aleator **staționar în sens strict**:
 - ▶ relația e valabilă pentru toți n
- ▶ Proces aleator **staționar în sens larg**:
 - ▶ relația e valabilă doar pentru $n = 1$ și $n = 2$ (cele mai folosite)

Consecințe ale staționarității

- Pentru $n = 1$:

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- Valoarea medie, valoarea medie pătratică, dispersia unui eșantion sunt **aceleași** la orice moment de timp t

$$\overline{f(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = \text{constant}, \forall t$$

Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru $n = 2$:

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- ▶ Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre eșantioane, oriunde ar fi localizate

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$$

- ▶ Este valoarea medie a produsului dintre două eșantioane separate de un interval de timp τ
- ▶ Depinde doar de valoarea $\tau =$ diferența de timp dintre cele două eșantioane

Consecințe ale staționarității

- ▶ Idem pentru funcția de corelație dintre procese aleatoare diferite
- ▶ Depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

- ▶ Este valoarea medie a produsului dintre două eșantioane separate de un interval de timp τ

Procese aleatoare ergodice

- ▶ În practică, avem acces la o singură realizare
- ▶ Proces aleator **ergodic** = mediile temporale pe orice realizare sunt **identice** cu mediile statistice
- ▶ Se pot calcule toate mediile pe baza unei singure realizări
 - ▶ realizarea trebuie să fie foarte lungă (lungimea $\rightarrow \infty$) pentru valori precise
 - ▶ o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator
 - ▶ realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic

Procese aleatoare ergodice

- ▶ Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
 - ▶ de ex. zgomote de tensiune
- ▶ Exemplu de proces ne-ergodic:
 - ▶ se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
 - ▶ o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

I.3 Proprietăți ale autocorelației

Densitatea spectrală de putere

- ▶ Densitatea spectrală de putere (DSP) $S_{ff}(\omega)$ reprezintă puterea procesului aleator la fiecare frecvență f ($\omega = 2\pi f$)
- ▶ DSP descrie cum este distribuită puterea semnalului în frecvență
 - ▶ de ex. unele procese au mai multă putere la frecvențe joase, altele la frecvențe înalte
- ▶ Puterea în banda de frecvență $[f_1, f_2]$ este $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ Puterea totală a procesului aleator este $\int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ DSP este o funcție măsurabilă practic
 - ▶ poate fi determinată experimental
 - ▶ este importantă în aplicații practice (ingineresti)

Teorema Wiener-Hincin

Teoremă:

- **Densitatea spectrală de putere = transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Fără demonstrație
- Leagă două concepte de natură diferită
 - funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
 - DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

Zgomot alb

- ▶ Zgomot alb = proces aleator cu funcția de autocorelație egală cu o funcție Dirac

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

- ▶ Două eșantioane diferite ($\tau \neq 0$) au corelație zero (necorelate)
 - ▶ adică nu variază în mod similar
- ▶ Densitatea spectrală de putere = transf. Fourier a unui Dirac = constantă
 - ▶ putere constantă la toate frecvențele, până la $f = \infty$
- ▶ În practică, puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
 - ▶ zgomot alb “*de bandă limitată*”
 - ▶ eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
- ▶ Zgomotul alb poate avea diverse distribuții
 - ▶ normală, uniformă etc.

Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

- ▶ Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = \text{const}$$

- ▶ Dem.: două eșantioane la un interval ∞ sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

- ▶ Dem.: se pornește de la $\overline{(f(t) - f(t + \tau))^2} \geq 0$
- ▶ Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

- Dem.: Se pune $\tau = 0$ în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Dispersia = diferența între valoarea din 0 și cea de la ∞

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

- Dem.: $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$, $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

Autocorelația unui proces aleator filtrat

- ▶ Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
 - ▶ fie în timp continuu: intrarea $x(t)$, sistemul $H(s)$, ieșirea $y(t)$
 - ▶ fie în timp discret: intrarea $x[n]$, sistemul $H(z)$, ieșirea $y[n]$
- ▶ Cum depinde autocorelația ieșirii y de cea a intrării x ?
- ▶ Se știe că y este convoluția lui x cu răspunsul la impuls h

- Pentru un proces aleator în timp discret

$$\begin{aligned}R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n+\tau]} \\&= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n-k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2] \overline{x[n-k_1]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau-k_1+k_2]\end{aligned}$$

- Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

► Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

► Schimbare de variabilă $\tau - k_1 + k_2 = u$

► rezultă $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

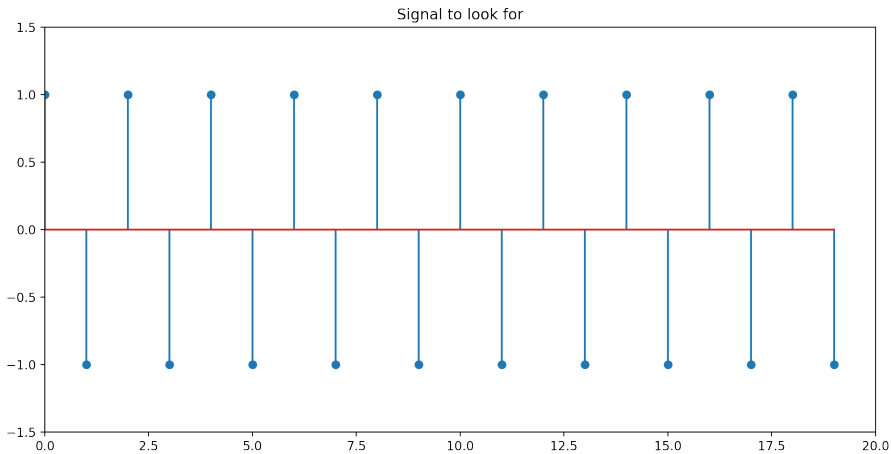
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- ▶ DSP a lui y = DSP a lui x multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- ▶ Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

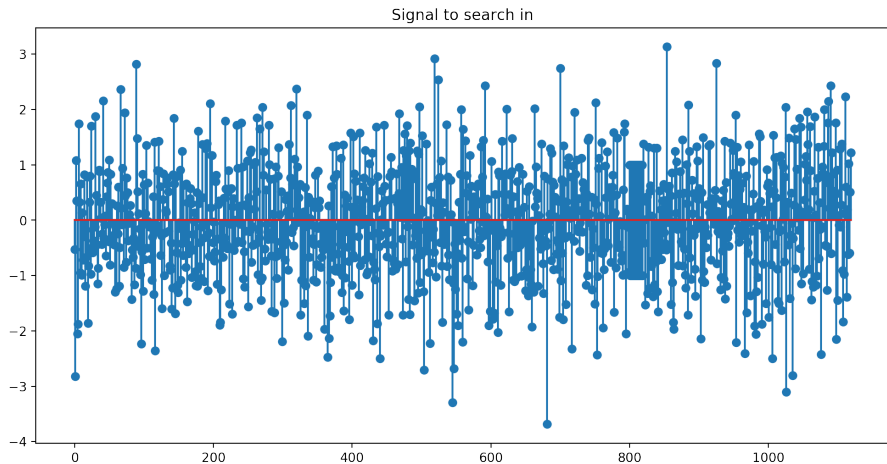
Aplicații ale (auto)corelației

- ▶ Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- ▶ Corelația a două semnale = o măsură a **similarității** celor două semnale
 - ▶ Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celui alt
 - ▶ Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- ▶ Corelația poate fi utilizată pentru localizare
 - ▶ Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
 - ▶ Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
 - ▶ Valori mici atunci când nu se potrivesc

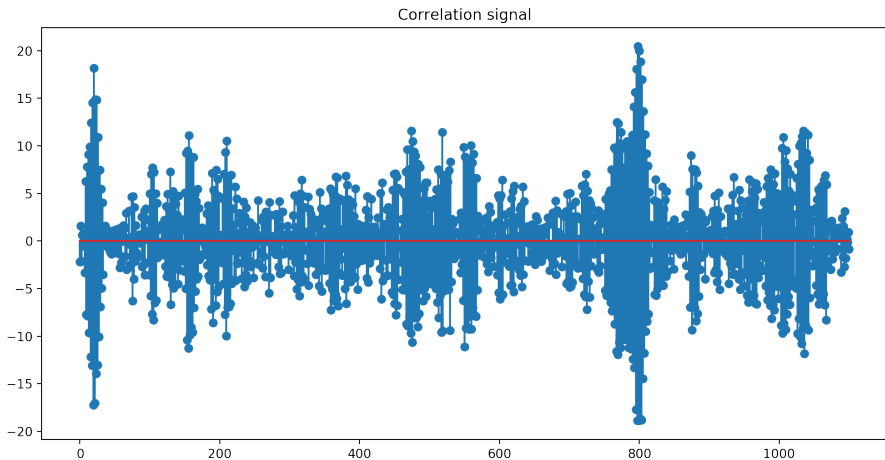
Semnalul căutat



Semnalul de dimensiuni mari



Rezultatul corelației



Identificare de sistem

- Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemului



Figure 1: System identification setup

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \overline{f[n]g[n+\tau]} \\ &= \overline{f[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{f[n]f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_{ff}[\tau-k] \\ &= h[\tau] \star R_{ff}[\tau] \end{aligned}$$

- ▶ Dacă intrarea f este **zgomot alb** cu puterea A , $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$, și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] \star R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] \star \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- ▶ Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut