

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introdurre

- ▶ Detecția semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
 - ▶ inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)
- ▶ Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
 - ▶ semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Schema bloc a detecției semnalelor

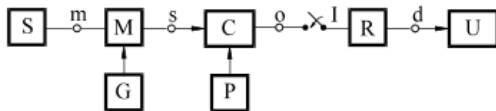


Figure 1: Signal detection model

► Conținut:

- Sursa de informație: generează mesaje a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
- Generator: generează semnalele diferite $s_1(t), \dots, s_n(t)$
- Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
- Canal: adaugă zgomot aleator
- Eșantionare: ia eșantioane din semnalul $s_n(t)$
- Receptor: **decide** ce mesaj a_n s-a fost recepționat
- Utilizator: primește mesajele recuperate

► Transmisie de date

- nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) = \text{constant } 0 \text{ sau } 5V$)
- modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
- modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu frecvențe diferite
- modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK

► Radar

- se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
- receptorul așteaptă posibilele reflecții ale semnalului emis și decide
 - nu este prezentă o reflecție -> nici un obiect
 - semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat

- ▶ Decizie între mai mult de două semnale
- ▶ Numărul de eşantioane (observații):
 - ▶ un singur eşantion
 - ▶ mai multe eşantioane
 - ▶ observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detectia semnalelor folosind 1 esantion

Detecția unui semnal cu 1 eșantion

- ▶ Cel mai simplu caz: detecția unui semnal afectat de zgomot, folosind un singur eșantion
 - ▶ două mesaje a_0 și a_1
 - ▶ mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - ▶ pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ peste semnal se suprapune zgomot aditiv, alb, $n(t)$
 - ▶ se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
 - ▶ eșantionarea preia un singur eșantion la timpul t_0 , $r(t_0)$
 - ▶ decizie: pe baza $r(t_0)$, care semnal a fost cel transmis?

- ▶ Există două **ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
 - ▶ H_1 : semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- ▶ Receptorul poate lua una din două **decizii**:
 - ▶ D_0 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

► Există 4 situații posibile:

1. **Rejecție corectă:** ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_0
 - Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$
2. **Alarmă falsă** (dectecție falsă): ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_1
 - Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$
3. **Pierdere** (rejecție falsă): ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_0
 - Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$
4. **Dectecție corectă:** ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_1
 - Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$

- ▶ Terminologia are la origine aplicații radar (prima aplicație a teoriei detecției)
 - ▶ un semnal se emite de către sursă
 - ▶ semnal recepționat = o posibilă reflecție din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
 - ▶ H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
 - ▶ H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
 - ▶ de aceea numele celor 4 scenarii sugerează “detecția unui obiect”

- ▶ În general se consideră zgomot **aditiv, alb, staționar**
 - ▶ aditiv = zgomotul se adună ci semnalul
 - ▶ alb = două eșantioane distincte sunt necorelate
 - ▶ staționar = are aceleași proprietăți statistice la orice moment de timp
- ▶ Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut
 - ▶ este o realizare a unui proces aleator
 - ▶ se cunoaște doar distribuția sa, nu și valorile particulare

Eșantionul preluat la recepție

- ▶ La recepție se primește semnalul $r(t) = s(t) + n(t)$
 - ▶ $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
 - ▶ $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- ▶ Valoarea eșantionului luat la momentul t_0 este $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$
 - ▶ $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
 - ▶ $n(t_0)$ este un eșantion din semnalul de zgomot

Eșantionul preluat la recepție

- ▶ Eșantionul $n(t_0)$ este o **variabilă aleatoare**
 - ▶ fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
 - ▶ presupunem o v.a. continuă , adică intervalul valorilor posibile e continuă
- ▶ $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$ = o constantă + o variabilă aleatoare
 - ▶ este de asemenea o variabilă aleatoare
 - ▶ $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $s_0(t_0)$, fie cu $s_1(t_0)$
- ▶ Care e distribuția lui $r(t_0)$?
 - ▶ o constantă + o v.a. = aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Funcții de plauzibilitate

- ▶ Fie distribuția zgomotului $w(x)$, cunoscută
 - ▶ aceasta este distribuția v.a. $n(t_0)$
- ▶ Distribuția lui $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0) = w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_0 , distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_1 , distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- ▶ Distribuțiile $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții condiționate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
 - ▶ “|” înseamnă “condiționat de”, “dat fiind”
 - ▶ adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
 - ▶ r reprezintă necunoscuta funcției

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- ▶ Cum se decide care ipoteză este adevărată, pe baza eșantionului observat $r = r(t_0)$?
- ▶ **Criteriul plauzibilității maxime**: se alege ipoteza care este **cea mai plauzibilă** a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$
 - ▶ se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
 - ▶ în engleză: Maximum Likelihood (ML)
- ▶ Criteriul ML exprimat la un **raport de plauzibilitate**:

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- ▶ criteriul este evaluat pentru eșantionul observat $r = r(t_0)$

Exemplu: zgomot gaussian

- ▶ Fie cazul în care zgomotul are distribuție normală
- ▶ La tablă:
 - ▶ schiță a celor două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - ▶ discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
 - ▶ discuție: care este pragul T pentru decizii

Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 - ▶ zgomot de tip AWGN
- ▶ Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r-s_0(r_0))^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$
- ▶ Pentru distribuția normală, e preferabil să aplicăm **logaritmul natural**
 - ▶ logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
 - ▶ dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$
- ▶ Valoarea **log-likelihood** al unei observații = logaritmul plauzibilității (likelihood)
 - ▶ de obicei se folosește logaritmul natural, dar poate fi în orice bază

Raportul “log-likelihood” în cazul ML

- ▶ Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$$

- ▶ Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} |r - s_1(t_0)|$$

- ▶ Notă: $|r - A|$ = distanța dintre r și A

- ▶ $|r|$ = distanța de la r la 0

- ▶ Așadar, se alege distanța minimă dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

Criteriul ML pentru zgomot gaussian

- ▶ Criteriul ML **pentru zgomot gaussian**: ipoteza se alege pe baza **cele mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$
 - ▶ principiul **cel mai apropiat vecin** ("*nearest neighbor*")
 - ▶ un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
 - ▶ un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** ("*minimum distance receiver*")

Etape pentru decizia pe baza ML

1. Se schițează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

Etape pentru decizia pe baza ML, zgomot gaussian

- ▶ Doar dacă zgomotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
 1. Se determină $s_0(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_0
 2. Se determină $s_1(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_1
 3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege cea mai apropiată valoare

Decizie pe bază de prag

- ▶ Alegerea valorii celei mai apropiate = identic cu compararea r cu un prag $T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$
 - ▶ i.e. dacă cele două valori sunt 0 și 5, decidem prin compararea lui r cu 2.5
- ▶ În general, pragul = punctul de intersecție al celor două distribuții condiționate

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$
1. Scrieți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
 2. Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
 3. Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
 4. Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1

Regiuni de decizie

- ▶ **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- ▶ Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- ▶ Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- ▶ Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- ▶ Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior
 - ▶ $R_0 = [-\infty, 2.5]$
 - ▶ $R_1 = [2.5, \infty]$

Funcția de plauzibilitate

- ▶ Să notăm în mod generic ipotezele cu H_i , și semnalele $s_i(t)$, unde i este 0 sau 1
- ▶ Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$
 - ▶ fie cea de la exemplul anterior:

$$w(r|H_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Care este variabila necunoscută în această expresie?
 - ▶ nu r , din moment ce acesta ni se dă în problemă
 - ▶ i este necunoscută

Terminologie: probabilitate și plauzibilitate

- ▶ În aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
 - ▶ dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ , σ , H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r , x) atunci funcția reprezintă densitatea de **probabilitate**
 - ▶ dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r , x), și necunoscuta o reprezintă un parametru statistic (de ex. μ , σ , i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**

Funcția de plauzibilitate

- ▶ În cazul detecției semnalelor, funcția $w(r|H_i) = f(i)$ este o funcție de plauzibilitate
 - ▶ necunoscuta este i
- ▶ Funcția este definită doar pentru $i = 0$ și $i = 1$
 - ▶ sau, în general, pentru $i =$ câte ipoteze are problema
- ▶ Criteriul ML = se alege i pentru care această funcție este maximă

$$\text{Decizia } D_i = \arg \max_i w(r|H_i)$$

- ▶ Notăție:
 - ▶ $\arg \max f(x)$ = argumentul x pentru care funcția $f(x)$ este maximă
 - ▶ $\max f(x)$ = valoarea maximă a funcției $f(x)$
 - ▶ a se vedea exemplul grafic la tablă
- ▶ Criteriul plauzibilității maxime înseamnă “se alege i care maximizează funcția de plauzibilitate $f(i) = w(r|H_i)$ ”

- ▶ Dacă zgomotul are altă distribuție?
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- ▶ Regiunile de decizie sunt date de puncte de intersecție ale distribuțiilor condiționate
 - ▶ Pot fi mai multe intersecții, în general, deci mai multe praguri

- ▶ Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1 ?
- ▶ Similar:
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat

- ▶ Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?
- ▶ Nu contează forma semnalelor
 - ▶ Tot ce contează sunt valorile celor două semnale la momentul de eșantionare t_0 :
 - ▶ $s_0(t_0)$
 - ▶ $s_1(t_0)$

- ▶ Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- ▶ Se extinde raționamentul la n ipoteze
 - ▶ Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots, s_{n-1}(t)$
 - ▶ Avem n valori diferite $s_0(t_0), \dots, s_{n-1}(t_0)$
 - ▶ Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
 - ▶ Pentru $r = r(t_0)$ dat, se alege valoarea maximă dintre cele n valori $w(r|H_i)$

- ▶ Dacă se iau mai multe eşantioane din semnale?
- ▶ Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

- Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare durează timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

4, 6.6, -5.2, 1.1, 0.3, -1.5, 7, -7, 4.4

Probabilități condiționate

- ▶ Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile
- ▶ Fie regiunile de decizie:
 - ▶ R_0 : dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
 - ▶ R_1 : dacă $r \in R_1$, decizia este D_1
- ▶ Probabilitatea condiționată a rejecției corecte
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0)dx$$

- ▶ Probabilitatea condiționată a alarmei false
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0)dx$$

Probabilități condiționate

- ▶ Probabilitatea condiționată de pierdere
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1) dx$$

- ▶ Probabilitatea condiționată a detecției corecte
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1) dx$$

- ▶ Relații între probabilitățile condiționate
 - ▶ suma rejecție corectă + alarmă falsă = 1
 - ▶ suma pierdere + detecție corectă = 1
 - ▶ De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

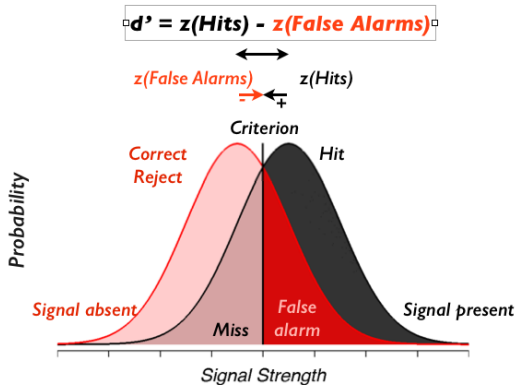


Figure 2: Probabilități condiționate

- Ignorați textul, contează zonele colorate
- [sursa: <http://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt>]*

Probabilitățile celor 4 rezultate

- ▶ Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze
- ▶ Nu includ și probabilitățile *ipotezelor înșelor*
 - ▶ adică, $P(H_0)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_0
 - ▶ $P(H_1)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_1
- ▶ Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$
 - ▶ $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **inițiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

Reamintire (TCI): regula lui Bayes

- ▶ Reamintire (TCI): regula lui Bayes

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- ▶ Interpretare

- ▶ Probabilitatea $P(A)$ este extrasă din $P(B|A)$
- ▶ $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, șansele ca A chiar să aibă loc
- ▶ Exemplu: $P(\text{gol} \mid \text{șut la poartă}) = \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriu?

- Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilității maxime, folosind un singur eșantion din semnal.
1. Calculați probabilitatea condiționată a alarmei false
 2. Calculați probabilitatea condiționată de pierdere
 3. Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ și $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculați probabilitatea rejecției corecte și a detecției corecte (nu cele condiționate)

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

- ▶ Criteriul ML compară distribuțiile **condiționate** ale eșantionului observat
 - ▶ condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- ▶ Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1
 - ▶ Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- ▶ Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1 , și vice-versa
 - ▶ pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
 - ▶ și de aceea vrem să “favorizăm”/“încurajăm” decizia D_0
- ▶ Avem nevoie de un criteriu mai general ...

Criteriul probabilității minime de eroare

- ▶ Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- ▶ Se urmărește **minimizarea probabilității totale de eroare** P_e
 - ▶ erori = alarme false și ratări
- ▶ Trebuie să găsim regiunile de decizie R_0 și R_1

Probabilitatea de eroare

- Probabilitatea unei alarme false

$$\begin{aligned}P(D_1 \cap H_0) &= P(D_1|H_0) \cdot P(H_0) \\&= \int_{R_1} w(r|H_0) dx \cdot P(H_0) \\&= (1 - \int_{R_0} w(r|H_0) dx) \cdot P(H_0)\end{aligned}$$

- Probabilitatea unei ratări

$$\begin{aligned}P(D_0 \cap H_1) &= P(D_0|H_1) \cdot P(H_1) \\&= \int_{R_0} w(r|H_1) dx \cdot P(H_1)\end{aligned}$$

- Suma lor este

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^T [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)] dx$$

Probabilitatea de eroare minimă

- ▶ Urmărim minimizarea P_e , adică să minimizăm integrala
- ▶ Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
 - ▶ integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- ▶ Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- ▶ Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1
- ▶ Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- ▶ Similar cu criteriul plauzibilității maxime, dar depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
 - ▶ Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- ▶ De asemenea bazat pe raportul de plauzibilitate, ca și primul criteriu

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

- Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-A)^2}{2\sigma^2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- Echivalent

$$2rA - A^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)}{2A}}_T$$

- ▶ Se compară eşantionul tot cu un prag T , dar valoarea acestuia este împinsă înspre ipoteza mai puțin probabilă
 - ▶ T depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Regiuni de decizie
 - ▶ $R_0 = (-\infty, T]$
 - ▶ $R_1 = [T, \infty)$
 - ▶ pot fi diferite pentru alte tipuri de zgomot

- O sursă de informație furnizează două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$. Mesajele se transmit prin semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1). Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r . Decizia se face prin compararea valorii r cu un prag T , astfel: dacă $r < T$ se decide că s-a transmis mesajul a_0 , altfel se decide mesajul a_1 .
1. Să se găsească valoarea pragului T conform criteriul probabilității minime de eroare
 2. Dar dacă semnalul 5 este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
 3. Calculați probabilitatea unei alarme false și a unei ratări

Criteriul riscului (costului) minim

- ▶ Dacă ne afectează mai mult un anumit tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte?
- ▶ Criteriul riscului (sau costului) minim: deciziile au un cost, se minimizează costul mediu
 - ▶ C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
 - ▶ C_{00} = costul unei rejecții corecte
 - ▶ C_{10} = costul unei alarme false
 - ▶ C_{01} = costul unei ratări
 - ▶ C_{11} = costul unei detecții corecte
- ▶ Definim **riscul** = costul mediu

$$R = C_{00}P(D_0 \cap H_0) + C_{10}P(D_1 \cap H_0) + C_{01}P(D_0 \cap H_1) + C_{11}P(D_1 \cap H_1)$$

- ▶ Criteriul riscului minim: **se minimizează riscul R**

- ▶ Demonstrație la tablă
 - ▶ se folosește regula lui Bayes
- ▶ Concluzie: regula de decizie este

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

- ▶ Similar cu primele două criterii, bazat tot pe **raportul de plauzibilitate**
- ▶ Atât probabilitățile cât și costurile pot împinge pragul T într-o parte sau alta
- ▶ Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, se reduce la criteriul probabilității de eroare minime
 - ▶ de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- ▶ Dacă zgomotul este gaussian (normal), se aplică logaritmul natural, ca la celelalte criterii
- ▶ Se obține valoarea pragului T :

$$-(r - A)^2 + r^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)}_C$$

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)}{2A}}_T$$

În zgomot gaussian

- ▶ În general, pentru un raport de plauzibilitate comparat cu K ,
 $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\gtrless} K$, pragul este

$$T = \frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln K}{2A}$$

Exemplu

- ▶ Exemplu la tablă: 0 / 5, zgomot alb $N(0, \sigma^2)$, un eșantion

Criteriul Neymar-Pearson

- ▶ Criteriul Neymar-Pearson: se maximizează probabilitatea de detecție ($P(D_1 \cap H_1)$) păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată ($P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda$)
- ▶ Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$

Exercițiu

- ▶ O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- ▶ Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție *triunghiulară* în intervalul $[-5, 5]$.
- ▶ Receptorul ia un singur eșantion r .
- ▶ Decizia se ia prin compararea r cu un prag T : dacă $r < T$ se decide că mesajul este a_0 , altfel este a_1 .
 1. Găsiți pragul T conform criteriului Neyman-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
 2. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Două nivele de semnal nenule

- ▶ Dacă semnalul $s_0(t)$ nu este 0, ci are o altă valoare constantă $s_0(t) = B$?
- ▶ Distribuția zgometului $w(r|H_0)$ va fi centrată pe B în loc de 0
- ▶ În rest, totul rămâne la fel
- ▶ Performanțele sunt determinate de diferența dintre cele două valori $(A - B)$
 - ▶ cazul $s_0 = 0, s_1 = A$ este identic cu cazul $s_0 = -\frac{A}{2}, s_1 = \frac{A}{2}$
- ▶ Valabil pentru toate criteriile de decizie

Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Semnal unipolar: o valoare este 0, cealaltă este nenulă
 - ▶ $s_0 = 0, s_1 = A$
- ▶ Semnal diferențial: două valori nenule cu semne contrare, aceeași valoare absolută
 - ▶ $s_0 = -\frac{A}{2}, s_1 = \frac{A}{2}$
- ▶ Care metodă este mai bună?

Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Cu aceeași diferență între nivele, performanțele deciziei sunt identice
- ▶ Dar puterea medie a semnalelor diferă
- ▶ Pentru semnale diferențiale: $P = \left(\pm \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$
- ▶ Pentru semnale unipolare: $P = P(H_0) \cdot 0 + P(H_1) (A)^2 = \frac{A^2}{2}$
 - ▶ presupunând probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Semnalul diferențial necesită putere la jumătate față de cel unipolar (mai bine)

Sumar: criterii de decizie

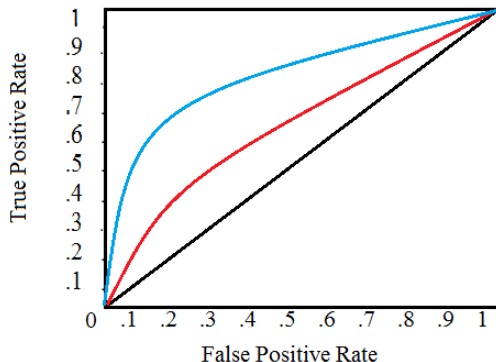
- ▶ Am văzut: decizie între două nivele constante, bazată pe 1 eşantion r
- ▶ Toate criteriile au la bază un test al raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K (pragul de plauzibilitate)
- ▶ În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni
 - ▶ regiunea R_0 : dacă r este aici, se decide D_0
 - ▶ regiunea R_1 : dacă r este aici, se decide D_1
 - ▶ de ex. $R_0 = (-\infty, \frac{A+B}{2}]$, $R_1 = (\frac{A+B}{2}, \infty)$ (pentru crit. plauz. max)
- ▶ Pentru zgomot gaussian, pragul este $T = \frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln K}{2A}$

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **“Caracteristica de operare a receptorului”** (“**Receiver Operating Characteristic**”, **ROC**)
- ▶ Reprezintă probabilitatea detecției corecte $P_d = P(D_1 \cap H_1)$ în funcție de probabilitatea alarmei false $P_{fa} = P(D_1 \cap H_0)$



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Există întotdeauna un **compromis** între P_d și P_{fa}
 - ▶ creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
 - ▶ pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- ▶ Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
- ▶ Cum să creștem performanțele unui receptor?
 - ▶ adică să creștem P_D menținând P_{fa} la aceeași valoare

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned} P_d &= P(D_1|H_1)P(H_1) \\ &= P(H_1) \int_T^\infty w(r|H_1) \\ &= P(H_1)(F(\infty) - F(T)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - A}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\ &= Q \left(\frac{T - A}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned}P_{fa} &= P(D_1|H_0)P(H_0) \\&= P(H_0) \int_T^\infty w(r|H_0) \\&= P(H_0)(F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T-0}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

- Rezultă că $\frac{T}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa})$
- Înlocuind în P_d se obține

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Raportul semnal zgomot

- ▶ **Raportul semnal zgomot (SNR)** = $\frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- ▶ Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie = $\overline{X^2}$
 - ▶ Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
 - ▶ Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- ▶ În cazul nostru, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \sqrt{\text{SNR}} \right)$$

- ▶ Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
 - ▶ Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- ▶ Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
 - ▶ SNR mare: performanță bună
 - ▶ SNR mic: performanță slabă

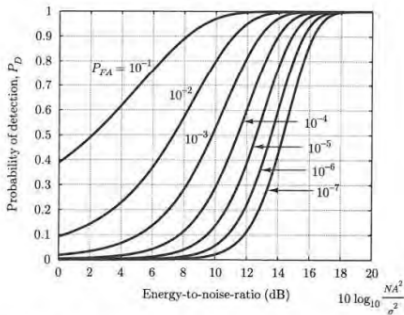


Figure 4: Performanțele detecției depind de SNR

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

Decizii între ipoteze statistice

- ▶ Teoria statistică a detecției este utilă și în alte contexte în afară de detecția unor semnale propriu-zise
 - ▶ oriunde avem de ales între două ipoteze
- ▶ Decizia se face între două distribuții de probabilitate
 - ▶ indiferent ce semnificație au cele două distribuții
- ▶ În cazul detecției unui semnal constant, se alege între două distribuții care **diferă doar prin valoarea medie**, în general
 - ▶ o distribuție are valoarea medie 0, cealaltă A
- ▶ Dar se poate face decizie între distribuții care diferă prin alt parametru
 - ▶ valoarea medie, sau
 - ▶ varianța, or
 - ▶ forma distribuției, etc

Decizii între ipoteze statistice

- ▶ Exemplu: Un eșantion cu valoarea $r = 2.5$ poate proveni dintr-o distribuție $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ (ipoteza H_0) sau dintr-o alta $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (ipoteza H_1). Care ipoteză se consideră adevărată?
 - ▶ Ceea ce diferă este varianța, nu valoarea medie
- ▶ Se pot folosi exact aceleași criterii
 - ▶ Se desenează cele două distribuții
 - ▶ Se calculează plauzibilitățile $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ for r
 - ▶ Se decide pe baza raportului de plauzibilitate, conform unui criteriu

II.3 Detectia unui semnal constant cu mai multe esantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal constant

- ▶ Presupunem că avem mai multe eșantioane, nu doar unul
- ▶ Eșantioanele formează **vectorul eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

- ▶ În ambele ipoteze, semnalul recepționat este un **proces aleator**
 - ▶ H_0 : proces aleator cu valoarea medie 0
 - ▶ H_1 : proces aleator cu valoarea medie A
- ▶ Dacă zgomotul este staționar și ergodic, semnalul recepționat este și el staționar și ergodic (semnalul = o constantă + zgomotul)
- ▶ Valorile vectorului \mathbf{r} sunt descrise de **distribuția de ordin N** a procesului aleator, $w_N(\mathbf{r}) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N)$
- ▶ Dacă zgomotul este alb, momentele de timp când se iau eșantioanele nu contează

Plauzibilitatea vectorului de eşantioane

- ▶ Se aplică **aceleaşi criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eşantion

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_0)}{w_N(\mathbf{r}|H_1)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Observații
 - ▶ \mathbf{r} este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eşantioanelor
 - ▶ ipotezele H_0 și H_1 sunt aceleaşi ca în cazul cu 1 eşantion
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_1
 - ▶ valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- ▶ Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
 - ▶ identic ca la 1 eşantion, doar că acum datele = mai multe eşantioane

Descompunere pe fiecare eșantion

- ▶ Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt **realizări independente ale aceleiași distribuții**
- ▶ În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot \dots \cdot w(r_N|H_j)$$

- ▶ Termenii $w(r_i|H_j)$ sunt plauzibilitățile fiecărui eșantion în parte
 - ▶ de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9] = \text{plauzibilitatea obținerii lui } 5.1 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.7 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.9$

Descompunere pe fiecare eşantion

- ▶ Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al unui vector de eşantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eşantion

Caz particulae: AWGN

- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise” = Zgomot alb, gaussian, aditiv
- ▶ În ipoteza H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ În ipoteza H_0 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

- ▶ Se pot găsi trei interpretări ale raportului de plauzibilitate

Interpretarea 1: media eșantioanelor

► Interpretarea 1: media eșantioanelor

$$\begin{aligned}\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \\ &= e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2 - \sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{\sum (r_i^2 - 2r_i A + A^2) - \sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{\sum (-2r_i A + A^2)}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{-2A \sum (r_i) + NA^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{-2A \frac{\sum (r_i)}{N} + A^2}{2 \frac{\sigma^2}{N}}}\end{aligned}$$

Media a N variabile aleatoare normale

- ▶ Fie $U_r =$ media aritmetică a eşantioanelor r_i

$$U_r = \frac{1}{N} \sum r_i$$

- ▶ Care este distribuția sa?

- ▶ Fie suma $S_r = \sum r_i$ a celor N eşantioane r_i

- ▶ Din cap.I: suma unor v.a. normale cu distribuția $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ este:
 - ▶ cu distribuție normală $\mathcal{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$, unde:
 - ▶ valoarea medie: $\mu_S = N \cdot \mu$
 - ▶ varianța: $\sigma_S^2 = N \cdot \sigma^2$

- ▶ Așadar $U_r = \frac{1}{N} S_r$, din proprietățile mediei se obține:

- ▶ U_r are distribuție normală, cu:
 - ▶ valoarea medie $= \frac{1}{N} \mu_S = \frac{1}{N} N \mu = \mu$
 - ▶ varianța $= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_S^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N \sigma_S^2 = \frac{1}{N} \sigma^2$

Media a N variabile aleatoare normale

- ▶ Media a N realizări ale unei distribuții normale are tot o distribuție normală, cu
 - ▶ aceeași valoare medie
 - ▶ varianța de N ori mai mică
- ▶ Dacă N este foarte mare, media aritmetică este un **estimator** foarte bun pentru valoarea medie a distribuției
 - ▶ distribuția sa devine foarte “îngustă” în jurul valorii medii

Interpretarea 1: media eșantioanelor

$$\begin{aligned}\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= e^{\frac{-2AU_r + A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}} \\ &= \frac{e^{\frac{U_r^2 - 2AU_r + A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\ &= \frac{e^{\frac{(U_r - A)^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\ &= \frac{w(U_r|H_1)}{w(U_r|H_0)}\end{aligned}$$

- Raportul de plauzibilitate a N eșantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eșantioanelor**

Interpretarea 1: media eşantioanelor

- ▶ Raportul de plauzibilitate a N eşantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eşantioanelor**
 - ▶ media are o varianță mai mică, $\frac{1}{N}\sigma^2$, deci este mai precisă
 - ▶ e ca și cum distribuția zgomotului devine de N ori mai îngustă (datorită medierii)
- ▶ Detecția unui semnal constant cu N eşantioane este similaru cu detecția cu un singur eşantion, doar că
 - ▶ se folosește valoarea medie a eşantioanelor r_i
 - ▶ distribuția sa este de N ori mai îngustă (varianța e de N ori mai mică)
- ▶ Când N crește, probabilitatea erorilor scade \Rightarrow performanțe îmbunătățite

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.
 1. Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
 2. Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?

Interpretarea 2: geometric

- ▶ Folositoare în special pentru criteriul plauzibilității maxime
- ▶ Raportul de plauzibilitate pentru vectorul \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless K$$

- ▶ La criteriul plauzibilității maxime se compară cu 1

$$\frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless 1$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless 1$$

$$-\sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i)^2 \frac{H_1}{H_0} \gtrless 0$$

$$\sum (r_i)^2 \frac{H_1}{H_0} \gtrless \sum (r_i - A)^2$$

Interpretarea 2: geometric

- ▶ $\sqrt{\sum (r_i)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$
- ▶ $\sqrt{\sum (r_i - A)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{A} = [A, A, \dots, A]$
- ▶ criteriul plauzibilității maxime alege **vectorul (punctul) semnalului cel mai apropiat** de vectorul (punctul) recepționat, într-un spațiu N-dimensional
 - ▶ receptorul se mai numește “receptor de distanță minimă”
 - ▶ aceeași interpretare ca în cazul 1-D
- ▶ Întrebare: care este interpretarea geometrică pentru celelalte criterii?

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4\}$.
 1. Care este decizia conform criteriului plauzibilității maxime? Utilizați interpretarea geometrică.

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i A - NA^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i A \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{A^2}{2} + \frac{1}{N}\sigma^2 \ln K}_{L=const}$$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- ▶ **Valoarea de corelație** (sau “corelația”) a două semnale x and y este

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum x[n]y[n]$$

- ▶ Este valoarea funcției de corelație în 0

$$\langle x, y \rangle = R_{xy}[0] = \overline{x[n]y[n+0]}$$

- ▶ Pentru semnale continue

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt$$

- ▶ $\frac{1}{N} \sum r_i A = \langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle$ este corelația vectorului recepționat $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu vectorul **țintă** $\mathbf{A} = [A, A, \dots, A]$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- ▶ Dacă valoarea de corelație a vectorului recepționat cu vectorul țintă $\mathbf{A} = [A, A, \dots A]$ este mai mare decât un prag L , se decide că semnalul este detectat.
 - ▶ altfel, semnalul este rejectat
- ▶ Decizia este **similară cu detecția semnalului cu singur eșantion**, unde valoarea eșantionului este $\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle$

Corelația ca măsura a similarității semnalelor

- ▶ În domeniul prelucrărilor de semnal, corelația este o formă de a măsura **similaritatea** a două semnale
- ▶ Interpretare: verificăm dacă vectorul recepționat este suficient de similar cu semnalul constant A
 - ▶ Da: (corelație mare) \Rightarrow semnalul este detectat
 - ▶ Nu: (corelație mică) \Rightarrow nu este detectat

Generalizare: două valori nenule

- ▶ Generalizare: două valori nenule, B și A
 - ▶ în zgomot Gaussian
- ▶ Interpretarea 1: media eșantioanelor
 - ▶ se folosește tot media eșantioanelor, cele două distribuții sunt centrate pe B și A
- ▶ Interpretarea 2: geometric (crit. plauzib. maxime)
 - ▶ se alege minimul distanței dintre $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctele $\mathbf{B} = [B, B, \dots]$ și $\mathbf{A} = [A, A, \dots]$
- ▶ Interpretarea 3: corelația
 - ▶ se calculează $\langle \mathbf{r}, \mathbf{B} \rangle$ and $\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle$, corelația lui \mathbf{r} cu $\mathbf{B} = [B, B, \dots]$ și cu $\mathbf{A} = [A, A, \dots]$.
 - ▶ pe slide-ul următor

Detecția a două valori nenule folosind corelația

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i - B)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$- \sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i - B)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2 \sum r_i A - NA^2 - 2 \sum r_i B + NB^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i A - \frac{A^2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{N} \sum r_i B - \frac{B^2}{2} + \frac{1}{N} \sigma^2 \ln K$$

Detecția a două valori nenule folosind corelația

- ▶ Pentru criteriul plauzibilității maxime ($K = 1$):

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle - \frac{\langle \mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{B} \rangle - \frac{\langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle}{2}$$

- ▶ Dacă valorile sunt opuse, $B = -A$, se alege cea mai similară cu \mathbf{r} :
 - ▶ corelația este o măsură a similarității

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, -\mathbf{A} \rangle$$

- ▶ Alte criterii: termen adițional $\frac{1}{N}\sigma^2 \ln K$

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, -4 (ipoteza H_0) sau 5 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia trei eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 2.2\}$.
 1. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime? Folosiți toate cele trei interpretări.

II.4 Detectia semnal oarecare cu mai multe esantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal oarecare

- ▶ Dorim detecția unui semnal **oarecare (ne-constant)** $s(t)$
- ▶ Cele N eșantioane se iau la momentele de timp $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_N]$ și formează **vectorul eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

- ▶ Ce diferă față de cazul unui semnal constant?

- ▶ În fiecare ipoteză, semnalul este un proces aleator
 - ▶ H_0 : proces aleator cu medie 0
 - ▶ H_1 : proces aleator cu media $s(t)$
- ▶ Eșantionul r_i , de la momentul t_i , poate fi:
 - ▶ $0 + \text{zgomot}$, în ipoteza H_0
 - ▶ $s(t_i) + \text{zgomot}$, în ipoteza H_1
- ▶ Întregul vector al eșantioanelor \mathbf{r} poate fi
 - ▶ $0 + \text{zgomot}$, , în ipoteza H_0
 - ▶ $s(t) + \text{zgomot}$, în ipoteza H_1 , pentru $t =$ timpii de eșantionare t_i
- ▶ Distribuția vectorului \mathbf{r} este descrisă de o funcție $w_N(\mathbf{r})$

Plauzibilitatea vectorului eşantioanelor

- ▶ Se folosesc **aceleaşi criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate ca la semnale constante:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_0)}{w_N(\mathbf{r}|H_1)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Diferenţa este că semnalele “adevărate” sunt acum
 - ▶ $[0, 0, \dots, 0]$ în ipoteza H_0
 - ▶ $[s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_N)]$ în ipoteza H_1

- ▶ Distribuția vectorială $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot \dots \cdot w(r_N|H_j)$$

- ▶ Toate criteriile de decizie bazate pe raportul de plauzibilitate se pot scrie ca

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \dots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al unui singur eșantion r_i se calculează folosind cele două valori posibile ale semnalului, 0 și $s(t_i)$
 - ▶ la semnale constante, valorile erau 0 și A întotdeauna
 - ▶ acum sunt 0 și $s(t_i)$, în funcție de momentele de eșantionare t_i
 - ▶ momentele de eșantionare t_i trebuie alese astfel încât să maximizeze performanțele detecției

Caz particular: zgomot alb Gaussian (“AWGN”)

- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise”

- ▶ In hypothesis H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-s(t_i))^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ In hypothesis H_0 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i-s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

- ▶ Sunt posibile două interpretări

Interpretarea 1: valoarea medie

- ▶ Interpretarea 1: valoarea medie
- ▶ Nu mai este valabilă, întrucât valorile $s(t_i)$ nu mai sunt identice

Interpretarea 2: geometric

- ▶ Folositoare mai ales în cazul criteriului plauzibilității maxime
- ▶ Raportul de plauzibilitate pentru vectorul \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} K$$

- ▶ Criteriul plauzibilității maxime: $K = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1 \\ & e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1 \\ & -\sum (r_i - s(t_i))^2 + \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0 \\ & \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sum (r_i - s(t_i))^2 \end{aligned}$$

Interpretarea 2: geometric

- ▶ $\sqrt{\sum (r_i)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$
- ▶ $\sqrt{\sum (r_i - s(t_i))^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = [s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_N)]$
- ▶ Criteriul plauz. maxime alege **semnalul cel mai apropiat** de cel recepționat, într-un spațiu N-dimensional
 - ▶ se mai numește “receptor de distanță minimă”
 - ▶ aceeași interpretare ca în cazul 1-D
- ▶ Întrebare: interpretarea geometrică pentru celelalte criterii?

Exercițiu:

- ▶ Fie detecția unui semnal $s(t) = 3 \sin(2\pi ft)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent (ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.
 1. Care sunt cele mai bune momente de eșantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
 2. Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauz. maxime? Utilizați interpretarea geometrică.
 3. Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detecția?

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Raportul de plauzibilitate pentru vectorul \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - s(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum (r_i - s(t_i))^2 + \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i s(t_i) - \sum s(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i s(t_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\sum s(t_i)^2}{N} + \frac{1}{N} \sigma^2 \ln K}_{L=const}$$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- ▶ $\frac{1}{N} \sum r_i s(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}(\mathbf{t}_i) \rangle$ reprezintă valoarea corelației (sau “corelația”) eșantioanelor recepționate $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu eșantioanele **țintă** $\mathbf{s}(\mathbf{t}_i) = [s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_N)]$
- ▶ Dacă corelația eșantioanelor recepționate \mathbf{r} cu eșantioanele **țintă** $\mathbf{s}(\mathbf{t}_i)$ este mai mare decât un prag L , se decide că semnalul este prezent.
 - ▶ Altfel, se decide că semnalul este absent
 - ▶ Corelația este o măsură a **similarității** a două semnale

Generalizare: două semnale oarecare

- ▶ Generalizare: se decide între **două semnale diferite** $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - ▶ în zgomot Gaussian
- ▶ Interpretarea 2: geometric
 - ▶ se alege distanța Euclidiană minimă dintre $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctele $\mathbf{s}_0(\mathbf{t}) = [s_0(t_1), s_0(t_2), \dots]$ și $\mathbf{s}_1(\mathbf{t}) = [s_1(t_1), s_1(t_2), \dots]$
- ▶ Interpretarea 3: valoarea corelației
 - ▶ se calculează corelația \mathbf{r} cu $\mathbf{s}_0(\mathbf{t}) = [s_0(t_1), s_0(t_2), \dots]$ și $\mathbf{s}_1(\mathbf{t}) = [s_1(t_1), s_1(t_2), \dots]$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle$ and $\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle$.
 - ▶ pe slide-ul următor

Detecție între două semnale diferite folosind corelația

$$e^{-\frac{\sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$- \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + \sum (r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2 \sum r_i s_1(t_i) - \sum s_1(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_0(t_i) + \sum s_0(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i s_1(t_i) - \sum s_1(t_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{N} \sum r_i s_0(t_i) - \sum s_0(t_i)^2 + \frac{1}{N} \sigma^2 \ln K$$

Detecție între două semnale diferite folosind corelația

- Criteriul plauz. maxime ($K = 1$):

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{\langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle}{2}$$

- Dacă semnalele au aceeași energie: $\sum s_1(t_i)^2 = \sum s_0(t_i)^2$, atunci $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle = \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle$, și alegem semnalul **cel mai asemănător cu \mathbf{r}** :

- corelația este o măsură a similarității a două semnale

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle$$

- Exemple:

- Modulație BPSK: $s_1 = A \cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A \cos(2\pi ft)$
 - Modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A \cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$

Detectie pe baza corelației

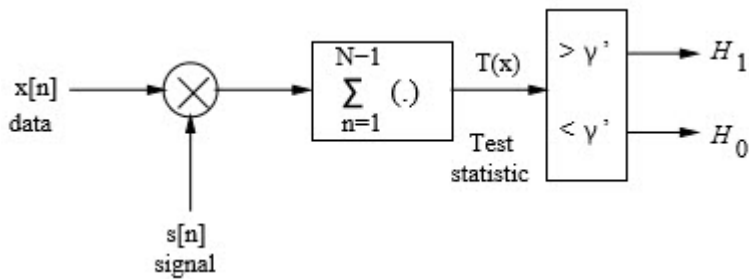


Figure 5: Detectia unui semnal folosind un corelator

[sursa: <http://nptel.ac.in/courses/117103018/43>]

Detecția a doua semnale

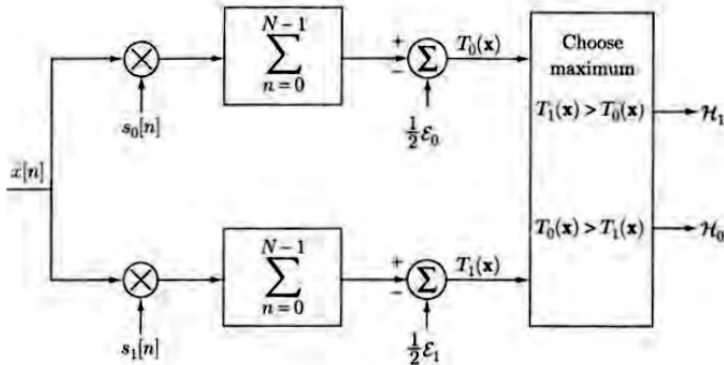


Figure 6: Decizie între două semnale diferite

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

Filtru adaptat

- ▶ Cum se calculează corelația a două semnale $r[n]$ și $s[n]$ de lungime N ?

$$\langle r, s \rangle = \frac{1}{N} \sum r_i s(t_i)$$

- ▶ Fie $h[n]$ semnalul $h[n]$ **oglindit**

- ▶ începând tot de la momentul 0, semnal cauzal

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n - k] = \sum_k r[k]h[N - 1 - n + k]$$

- ▶ Rezultatul convoluției la finalul semnalului de intrare, $y[N - 1]$ ($n = N - 1$), este chiar corelația
 - ▶ până la un factor de scalare $\frac{1}{N}$

$$y[N] = \sum_k r[k]s[k]$$

- ▶ Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru a cărui răspuns la impuls = oglindirea lui $s[n]$** , luându-se eșantionul de la finalul semnalului de intrare
 - ▶ se obține valoarea corelației

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. “matched filter”)
 - ▶ filtrul este *adaptat* semnalului dorit

Filtru adaptat

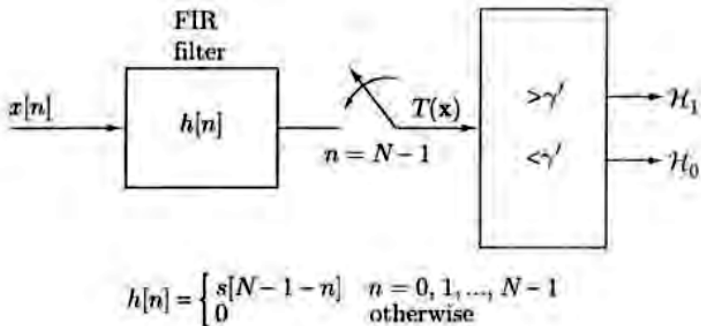


Figure 7: Detecție folosind un filtru adaptat

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

11.5 Detectia unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- ▶ Observare continuă = fără eșantionare, se folosește **întreg semnalul continuu**
 - ▶ similar cazului cu N eșantioane, dar cu $N \rightarrow \infty$
- ▶ Semnalul recepționat este $r(t)$
- ▶ Semnalul țintă este $s(t)$
- ▶ Presupunem doar zgomot Gaussian
- ▶ Cum are loc detecția?

Detectia semnalelor continue

- ▶ Se extinde cazul precedent cu N eşantioane la cazul unui semnal continuu, $N \rightarrow \infty$
- ▶ Interpretarea 1: media eşantioanelor
 - ▶ Nu mai este valabilă, întrucât $s(t)$ nu este constant

Interpretarea 2: geometric

- ▶ Interpretarea 2: geometric
- ▶ Fiecare semnal $r(t)$, $s(t)$ sau 0 reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- ▶ Distanța între două semnale este:

$$d(r, s) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 dt}$$

- ▶ Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă
- ▶ Criteriul plauzibilității maxime:
 - ▶ se calculează distanța $d(r, s)$ între $r(t)$ și $s(t)$
 - ▶ se calculează distanța $d(r, 0)$ între $r(t)$ și 0
 - ▶ se alege valoarea minimă

Interpretarea 3: corelația

- ▶ Corelația a două semnale continue $r(t)$ și $s(t)$ de lungime T

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) \cdot s(t) dt$$

- ▶ Dacă corelația semnalului recepționat cu semnalul căutat $\mathbf{s}(\mathbf{t}_i)$ este mai mare decât un prag L , se decide că semnalul este detectat.
 - ▶ Altfel, se decide că semnalul este absent
 - ▶ Corelația este o măsură a similarității a două semnale

- ▶ Detecția între **două semnale** $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - ▶ în zgomot Gaussian
- ▶ Interpretarea 2: geometric
 - ▶ se alege distanța Euclidiană minimă între punctul $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ și punctele $\mathbf{s}_0(\mathbf{t})$ și $\mathbf{s}_1(\mathbf{t})$
 - ▶ folosind distanța dintre semnale definită mai sus
- ▶ Interpretarea 3: corelația
 - ▶ se calculează corelația lui $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ cu $\mathbf{s}_0(\mathbf{t})$ și cu $\mathbf{s}_1(\mathbf{t})$.

Detecția între două semnale folosind corelația

- Criteriul plauz. maxime ($K = 1$):

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{\langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle}{2}$$

- Dacă cele două semnale au energii egale: $\int s_1(t)^2 dt = \int s_0(t)^2 dt$, atunci $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle = \langle \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0 \rangle$, aşadar se alege **semnalul cel mai asemănător cu $r(t)$** :

- Corelația este o măsură a similarității a două semnale

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle$$

- Exemple

- Modulația BPSK: $s_1 = A \cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A \cos(2\pi ft)$
 - Modulația 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A \cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$

Filtru adaptat

- ▶ Corelația a două semnale se poate calcula cu un **filtru adaptat**
- ▶ **Filtru adaptat** = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu **oglundirea** semnalului căutat
 - ▶ filtrul este *adaptat* semnalului căutat
 - ▶ filtru continuu, cu răspuns la impuls continuu
- ▶ Pentru detecția unui semnal $s(t)$ se poate folosi un filtru adaptat, luând eșantionul de la ieșire în momentul final al semnalului de intrare
 - ▶ se obține chiar valoarea corelației