

# Examen DEPI 2017-2018

## Nr.1

### Exerciții

1. Fie o variabilă aleatoare  $X$  cu distribuția din figură  $w(x) = \begin{cases} \frac{h}{4}x, & x \in [0, 4] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$
- (1p) Găsiți valoarea lui  $h$
  - (1p) Calculați probabilitatea ca  $X$  să fie între 1 și 3
  - (1p) Calculați valoarea medie  $\bar{X}$
  - (2p) Găsiți expresia funcției de repartiție a lui  $x$

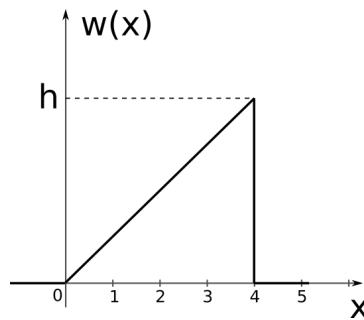
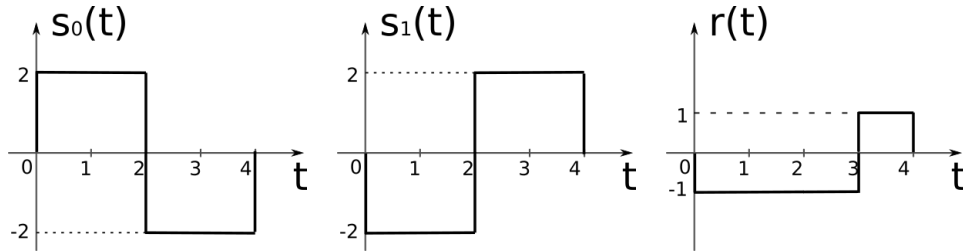


Figure 1: Distribuția  $w(x)$

2. Un semnal constant poate avea două valori posibile,  $-3$  (ipoteza  $H_0$ ) sau  $5$  (ipoteza  $H_1$ ). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 4)$ . La recepție se ia un singur eșantion  $r$ . Decizia se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime.
- (2p) Scrieți expresiile funcțiilor de plauzibilitate  $w(r|H_0)$  and  $w(r|H_1)$  și reprezentați-le grafic;
  - (1p) Dacă eșantionul este  $r = 3$ , care este decizia luată?
  - (1p) Găsiți regiunile de decizie  $R_0$  și  $R_1$ ;
  - (2p) Calculați probabilitatea de pierdere, dacă probabilitățile ipotezelor sunt  $P(H_0) = \frac{3}{4}$  și  $P(H_1) = \frac{1}{4}$ .
3. (3p) Se transmite unul dintre semnale  $s_0(t)$  sau  $s_1(t)$ , iar la recepție se recepționează  $r(t)$ . Semnalele sunt reprezentate mai jos. Știind că semnalele transmise sunt afectate de zgomot alb cu distribuție Gaussiană  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ , să se găsească decizia luată de receptor conform criteriului plauzibilității maxime, prin una dintre cele două metode:

- i. fie prin metoda observării continue
- ii. fie pe baza a 3 eșantioane luate la momentele  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1.5$  și  $t_3 = 3.5$



4. (5p) Se recepționează un semnal de forma  $r(t) = \underbrace{A + t^2}_{s_{\Theta}(t)} + z_{gomot}$ , unde  $A$  este un parametru necunoscut. Zgomotul are distribuție Gaussiană  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 9)$ . La recepție se iau trei eșantioane, la momentele  $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ , valorile fiind  $r_1 = 3.1, r_2 = 6.1, r_3 = 10.8$ . Estimați parametrul  $A$  folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

## Formule cunoscute

- primitiva unei funcții Gaussiene:  $F(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right)$

## Teorie

- (3p) Ce înseamnă un proces aleator **staționar în sens strict** și **în sens larg**?
- (3p) Enunțați teorema Wiener-Hincin (în cuvinte + expresie matematică).
- (3p) Definiți criteriul de decizie Neyman-Pearson.
- (2p) Ce este un **filtru adaptat**? Explicați cum este folosit, și în ce scop.
- (5p) Demonstrați că funcția de cost pătratică  $C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$  conduce la formula estimatorului de Eroare Pătratică Medie Minimă (EPMM):

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|r) d\Theta.$$

Punct de pornire: expresia riscului global este  $R = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\mathbf{r}; \Theta) d\Theta d\mathbf{r}$

- (2p) Estimarea de plauzibilitate maximă și estimarea Maximum A Posteriori: arătați că una dintre ele este un caz particular al celeilalte.

**Notă:** 40p total, 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h