Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

Variabile aleatoare

- **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - Prescurtat: v.a.
- Notație uzuală: X, Y etc..
- Exemple:
  - Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - Voltajul măsurat într-un punct dintr=un circuit
- Opusul = o valoare constantă (de ex. $\pi = 3.1415...$)

Realizări

- **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară rezultată în urma fenomenului aleator
- **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - = mulțimea tuturor realizărilor
- Exemplu: aruncarea unui zar
  - V.a. se notează X
  - Se poate obține o realizare $X = 3$
  - Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
  - Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
  - Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

V.a. continue

- Fie o v.a. continuă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
- Derivata funcției de repartiție este **funcția densitate de probabilitate (FDP)**
$$w(x) = \frac{dF_X(x_i}{dx_i}$$
$$F(x) = \int_{-infty}^{x} w(t)dt$$
- FDP este **probabilitatea ca valoarea lui X să fie într-o vecinătate mică în jurul lui x**

Probabilitatea unei valori anume

- Probabilitatea ca v.a. continuă X să fie **exact** egală cu un x este **zero**
- O v.a. continuă are o infinitate de realizări posibile
- Probabilitatea unei valori anume este practic 0
- FDP este probabilitatea de a fi **într-o vecinătate mică în jurul** unei valori x**

V.a. discrete

- Fie o v.a. discretă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
- Exemplu: FR pentru un zar
- Pentru v.a. discrete, FR este de tip "treaptă"

V.a. discrete

- Nu putem defini densitatea de probabilitate
  - pentru că derivata în punctele de discontinuitate nu e definită
- **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*): probabilitatea ca X să aibă valoarea egală cu x

$$w(x) = P\{X = x\}$$

$$F(x) = \sum_{toți \;\; t \leq x} w(t)$$

- Exemplu: FMP pentru un zar?

Probabilități și densități

- Calculul probabilității pe baza FDP (v.a. continuă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \int_A^B w(x)dx$$

- Calculul probabilității pe baza FMP (v.a. discretă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \sum_{x=A}^{B} w_X(x)$$

Interpretare grafică

- Probabilitatea ca X să fie între A și B este **suprafața de sub FDP**
  - adică integrala de la A la B
- Probabilitatea ca X să fie exact egal cu o valoare este zero
  - aria de sub un punct este nulă

Proprietățile FR/FDP/FMP

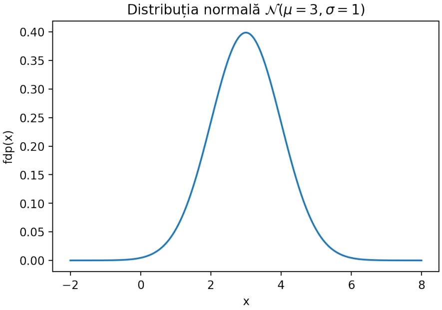
- FR este o funcție crescătoare
- FR / FDP / FMP sunt întotdeauna ≥ 0
- $FR(-\infty) = 0$ și $FR(\infty) = 1$
- Integrala FDP / suma FMP $= 1$

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

<matplotlib.text.Text at 0x7f4b6ca68198>



Distribuția uniformă

Multiple random variables

- Consider a system with two random variables X and Y
- Joint cumulative distribution function:

$$F_{XY}(x_i, y_j) = P\left\{X \leq x_i \cap Y \leq y_i\right\}$$

- Joint probability density function:

$$w_{XY}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 P_{XY}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}$$

- The joint PDF gives the probability that the values of the two r.v. X and Y are in a **vicinity** of x_i and y_i simultaneously
- Similar definitions extend to the case of discrete random variables

Random process

- A **random process** = a sequence of random variables indexed in time
- **Discrete time** random process $f[n]$ = a sequence of random variables