

Examen DEPI 2019-2020

Nr.3

Exerciții (17p)

1. Fie o variabilă aleatoare continuă A având distribuția normală $\mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 9)$.
 - a. (1p) Reprezentați grafic distribuția (calculați și specificați pe grafic valoarea medie și înălțimea funcției)
 - b. (1p) Calculați probabilitatea ca A să fie între 0 și 3
 - c. (1p) Găsiți o distribuție uniformă a cărei varianță să fie egală cu cea a lui A (alegeți limitele), și reprezentați-o
 - d. (1p) Arătați că, pentru orice distribuție normală, probabilitatea ca A să fie între $\mu - 3\sigma$ și $\mu + 3\sigma$ este întotdeauna aceeași, indiferent de valoarea lui μ și σ (e mereu 99.7%)
2. Fie problema deciziei între un semnal $s_0(t) = -4$ (ipoteza H_0) sau $s_1(t) = \cos(\pi t)$ (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$. La recepție se ia un singur eșantion, la momentul $t_0 = 1$, și se obține valoarea $r_0 = -1.5$. Cele două ipoteze au probabilitățile $P(H_0) = \frac{3}{4}$ și $P(H_1) = \frac{1}{4}$.
 - a. (1p) Reprezentați grafic cele două distribuții condiționate, $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - b. (1p) Determinați regiunile de decizie, conform criteriului probabilității minime de eroare
 - c. (2p) Calculați probabilitatea de pierdere, pentru criteriul plauzibilității maxime
 - d. (1p) Care ar trebui să fie regiunile de decizie pentru ca probabilitatea detecției corecte să fie egală cu $\frac{1}{2}$?
3. Fie detecția unui semnal care poate fi de forma $s_1(t) = \sin(\pi t)$ (ipoteza H_1) sau $s_0(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$ (ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 3)$. La recepție se iau 3 eșantioane la momentele de timp $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$, și se obțin valorile $r_0 = 0.4$, $r_1 = -0.3$ și $r_3 = 0.6$.
 - a. (2p) Care este decizia luată, conform criteriului Plauzibilității Maxime?
 - b. (2p) Dacă ar trebui să păstrăm doar unul dintre momentele de eșantionare, pe care ar fi cel mai indicat să îl păstrăm, t_0 , t_1 sau t_2 ? Justificați.
4. (4p) Se recepționează un semnal de forma $r(t) = \underbrace{A \cdot t^2}_{s_{\Theta}(t)} + \text{zgomot}$, unde A este un parametru necunoscut. Zgomotul are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 9)$. La recepție se iau trei eșantioane, la momentele $t_0 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, valorile fiind $r_0 = 0.3$, $r_1 = 8.2$, $r_2 = 19$. Estimați parametrul A folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

Teorie (18p)

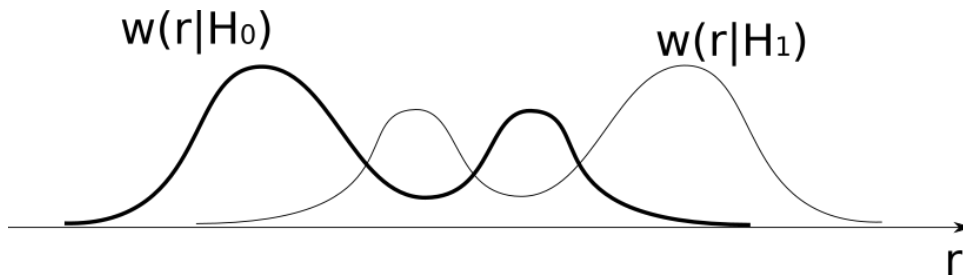
1. (3p) Fia A o variabilă aleatoare cu distribuția $w_A(r)$. Fie o nouă variabilă aleatoare B , definită ca $B = A + 4$. Ce se poate spune despre A și B :
 - a. Au A și B aceeași valoare medie?

- b. Au A și B aceeași varianță?
- c. Au A și B aceeași valoare pătratică medie?

Justificați.

(*Hint*: luați un exemplu, de ex. $w_A(r)$ o distribuție uniformă, sau distribuție normală).

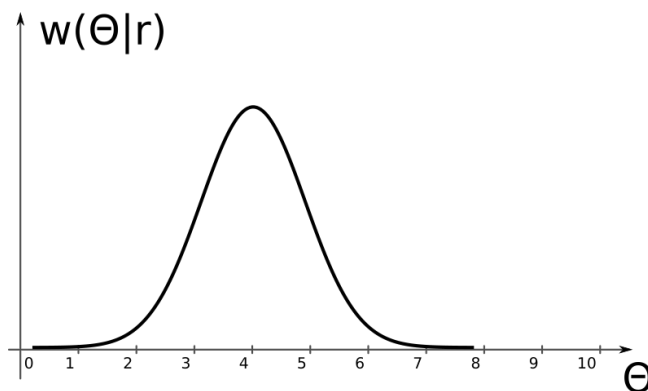
2. (2p) Ce este un *zgomot alb*?
3. (2p) Hașurați probabilitatea condiționată de **deteție corectă** în cazul ipotezei H_1 , pentru criteriul Plauzibilității Maxime, pentru cele două funcții de plauzibilitate de mai jos. Explicați în cuvinte ce ați colorat.



4. (2p) Fie cazul detecției unui semnal constant în care probabilitățile celor două ipoteze sunt $P(H_0) = \frac{3}{4}$ și $P(H_1) = \frac{1}{4}$. Dacă costurile $C_{00} = C_{11} = 0$, găsiți valorile costurilor C_{01} și C_{10} astfel încât criteriul riscului minim să devină **identic** cu criteriul plauzibilității maxime. Justificați.
5. (3p) Demonstrați că ieșirea unui **filtru adaptat**, la momentul final al semnalului de intrare, este egală cu produsul scalar al semnalelor. Se cunoaște relația de convoluție: convoluția a două semnale $x[n]$ și $y[n]$ este:

$$x[n] * y[n] = \sum_k x[k]y[n - k]$$

6. (2p) Care este legătura între estimarea de plauzibilitate maximă și estimarea Maximum A Posteriori? Arătați că una dintre ele este un caz particular al celeilalte.
7. (2p) Distribuția **a posteriori** a unui parametru necunoscut Θ este funcția Gaussiană de mai jos.



Notă: 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h