

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

I.1 Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
 - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
 - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notăție uzuală: X , Y etc..
- ▶ Exemple:
 - ▶ X = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
 - ▶ V_{in} = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

- ▶ **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- ▶ **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a.
 - ▶ mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
 - ▶ V.a. se notează X
 - ▶ Se poate obține o realizare $X = 3$
 - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- ▶ V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
 - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
 - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- ▶ Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- ▶ Exemple:
 - ▶ Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
 - ▶ Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor diferite*.
 - ▶ Valoarea este afectată de zgomot
 - ▶ Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

Funcția masă de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. discretă A
- ▶ **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*)
= probabilitatea ca A să aibă valoarea egală cu x

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- ▶ pe scurt, se mai numește **distribuția** variabilei A
- ▶ Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă

Calculul probabilității cu FMP

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^b w_A(x)$$

Funcția de repartiție

- ▶ **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este “în trepte”

Calculul probabilității cu FR

- Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v - 1)$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a - 1)$$

Relația între FMP și FR

- ▶ FR este *suma cumulativă* (un fel de “integrală discretă”) a FMP

$$F_A(x) = \sum_{all\ t \leq x} w_A(t)$$

- ▶ Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

Funcția densitate de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. **continuă** A
- ▶ **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** = probabilitatea ca valoarea lui A să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x , totul supra ϵ
- ▶ Se notează $w_A(x)$, se mai numește **distribuția** variabilei A
- ▶ Informal: FDP reprezintă probabilitatea ca valoarea lui A să fie **în jurul lui x**

Probabilitatea unei valori exacte

- ▶ Probabilitatea ca o v.a. continuă A să ia **exact** o valoare x este **zero**
 - ▶ pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
 - ▶ de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- ▶ De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii x , și nu exact egal cu x

Calculul probabilității cu FDP

- Probabilitatea ca A să aibă exact valoarea v este întotdeauna 0

$$P\{A = v\} = 0$$

- Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b = integrala FDP între a și b :

$$P\{a \leq A \leq b\} = \int_a^b w_A(x) dx$$

Funcția de repartiție

- ▶ **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Aceeași definiție ca și la v.a. discrete

Calculul probabilității cu FR

- ▶ Probabilitatea ca valoarea lui A să fie între a și b :

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

- ▶ Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis
 - ▶ $[a, b]$ sau (a, b) , nu contează
 - ▶ de ce?

Relația între FDP și FR

- ▶ FR este **integrala** FDP
- ▶ FDP este **derivata** FR

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x w_A(x) dx$$

$$\begin{aligned}w_A(x) &= \frac{dF_A(x)}{dx} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_A(x + \epsilon) - F_A(x - \epsilon)}{2\epsilon} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(A \in [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon}\end{aligned}$$

Interpretare grafică

- ▶ Probabilitatea ca A să fie între a și b este **suprafața de sub FDP**
 - ▶ adică integrala de la a la b
- ▶ Probabilitatea ca A să fie exact egal cu o valoare este zero
 - ▶ aria de sub un punct este nulă

V.a. discrete vs continue

Comparație între v.a. discrete și continue

- ▶ FR $F_A(x)$ are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- ▶ FDP/FMP $w_A(x)$ este derivata FR
 - ▶ la v.a. continue:
 - ▶ este o derivată obișnuită
 - ▶ reprezintă probabilitatea de a fi “în jurul” valorii x
 - ▶ la v.a. discrete:
 - ▶ un fel de “derivată discretă”
 - ▶ reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea x

FR:

- ▶ FR este mereu pozitivă, $F_A(x) \geq 0$
- ▶ FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- ▶ FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1

$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

FDP/FMP:

- ▶ PDF/PMF sunt mereu pozitive $w_A(x) \geq 0$
- ▶ Integrala/suma pe întreg domeniul = 1

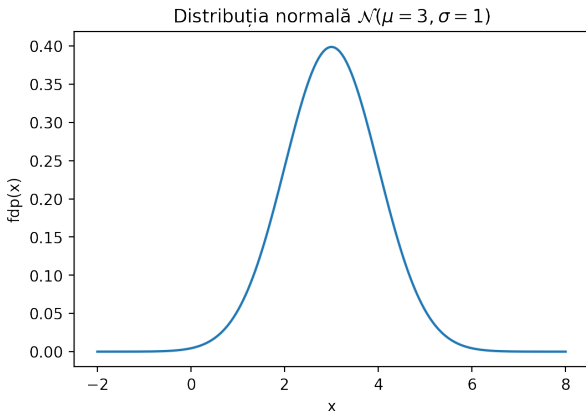
$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x) dx = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Distribuția normală

- ▶ Are doi parametri:
 - ▶ **Media** μ = “centrul” funcției
 - ▶ **Deviația standard** σ = “lățimea” funcției
 - ▶ σ mic = funcție îngustă și înaltă
 - ▶ σ mare = funcție largă și joasă
- ▶ Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala = 1)
- ▶ Extrem de des întâlnită în practică
- ▶ Orice valoare reală este posibilă ($w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- ▶ Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

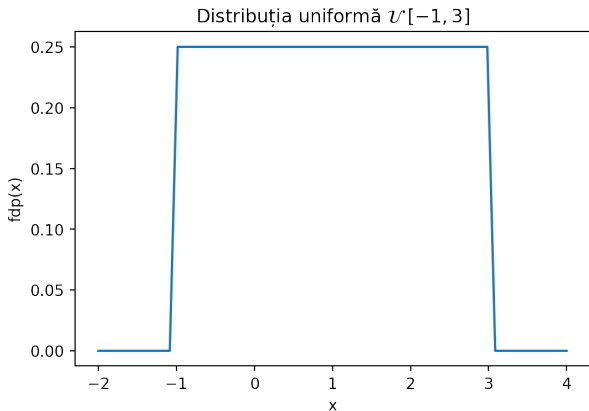
Distribuția normală

- ▶ Distribuția descrește pe măsură ce x se îndepărtează de centrul μ
 - ▶ Datorită termenului $-(x - \mu)^2$ de la exponent
 - ▶ Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui μ ($x - \mu = 0$)
 - ▶ Valorile apropiate de μ sunt mai probabile, valorile mai depărtate de μ sunt mai puțin probabile
- ▶ Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de μ , cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de μ

Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Distribuția uniformă

- ▶ Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- ▶ “Înălțimea” funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
 - ▶ pentru ca integrala (aria) să fie 1
- ▶ Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
 - ▶ valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- ▶ Se notează cu $\mathcal{U}[a, b]$

Alte distribuții

- ▶ Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- ▶ Cum calculăm \int_a^b dintr-o distribuție normală?
 - ▶ Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- ▶ Se folosește *the error function*:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- ▶ Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F_A(X) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right)$$

- ▶ Valorile funcției $\operatorname{erf}()$ sunt tabelate / se calculează numeric
 - ▶ de ex. pe Google, căutați $\operatorname{erf}(0.5)$
 - ▶ Alte valori folositoare:
 - ▶ $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$
 - ▶ $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

Exercițiu

Exercițiu:

- ▶ Fie A o v.a. cu distribuția $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculați probabilitatea ca $A \in [2, 4]$

Suma unei constante cu o v.a.

- ▶ Fie o v.a. A
- ▶ Ce reprezintă $B = 5 + A$?

Răspuns:

- ▶ B este tot o variabilă aleatoare
- ▶ B are același tip de distribuție, dar “translată” cu 5 la dreapta

Exemplu:

- ▶ A este o v.a. cu distribuție normală $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- ▶ Care este distribuția variabilei $B = 5 + A$?
- ▶ Răspuns: $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

V.a. ca funcții de alte v.a

- ▶ O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- ▶ Exemple: dacă A este o v.a. distribuită $\mathcal{U} [0, 10]$, atunci
 - ▶ $B = 5 + A$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U} [5, 15]$
 - ▶ $C = A^2$ este de asemenea o v.a.
 - ▶ $D = \cos(A)$ este de asemenea o v.a.
- ▶ Motivație: dacă A este aleatoare, și valorile B , C , D sunt aleatoare
- ▶ A , B , C , D nu sunt independente
 - ▶ O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Fie un sistem cu două v.a. continue A și B
- ▶ Care este probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea în jurul (x, y) ?
- ▶ Distribuția valorilor perechii (A, B) este descrisă de:
 - ▶ Densitatea de probabilitate comună $w_{AB}(x, y)$
 - ▶ Funcția de repartiție comună $F_{AB}(x, y)$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB} \{A \leq x \cap B \leq y\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea într-o vecinătate a (x, y)
- Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P \{A = x \cap B = y\}$$

Variabile independente

- ▶ Două v.a. A și B sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- ▶ Pentru v.a. independente, probabilitatea ca A să fie în jurul lui x și B în jurul lui y este produsul celor două probabilități

$$w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)$$

- ▶ Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- ▶ Similar pentru mai mult de două v.a.

Variabile independente

Exercițiu:

- ▶ Calculați probabilitatea ca trei v.a. X , Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(-1, 1)$ să fie toate pozitive
 - ▶ **i.i.d** = “independente și identic distribuite”

Multiple v.a. normale

- ▶ Fie un set de N v.a. normale (A_1, \dots, A_N) , cu medii diferite μ_i dar aceeași deviație standard σ
- ▶ Probabilitatea ca (A_1, \dots, A_N) să fie în jurul valorii (x_1, \dots, x_N) este

$$w_{A_1, \dots, A_N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{(x_1 - \mu_1)^2 + \dots + (x_N - \mu_N)^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Probabilitatea depinde de **distanța Euclidiană** dintre $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ și $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$

Distanța Euclideană

- ▶ **Distanța Euclideană (geometrică)** între 2 vectori N-dimensional

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_N - v_N)^2}$$

- ▶ Unidimensional: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = |u - v|$

- ▶ 2D: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

- ▶ 3D: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$

- ▶ ...

- ▶ N-dimensional: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - v_i)^2}$

- ▶ ...

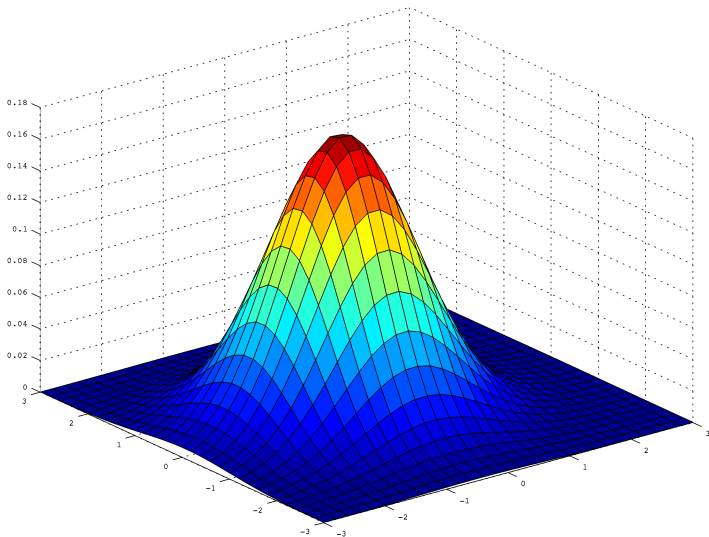
- ▶ Semnale continue: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t) - v(t))^2 dt}$

Multiple v.a. normale

- ▶ Probabilitatea a N v.a. normale, independente, cu același σ dar diferite μ_i depinde de **pătratul distanței Euclidiene față de vectorul medie** $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$
 - ▶ Aproape de μ : probabilitate mai mare
 - ▶ Departate de μ : probabilitate redusă
 - ▶ Două puncte la aceeași distanță de μ au aceeași probabilitate

Distribuția normală 2D

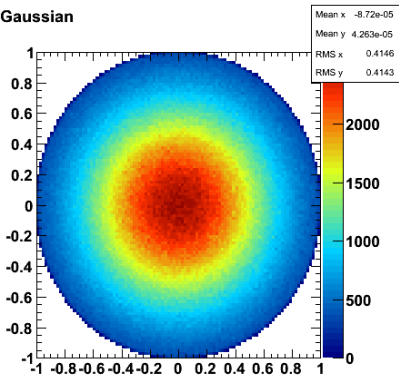
- Distribuția a 2 v.a. normale (distribuția normală 2D)



Distribuția normală 2D - vedere de sus

- ▶ Vedere de sus
- ▶ Aici, $\mu = (0, 0)$
- ▶ Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în cercuri concentrice (simetric)

2D-Gaussian



- ▶ V.a. sunt caracterizate prin medii statistice (“*momente*”)
- ▶ Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\bar{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\bar{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- ▶ (Exemplu: entropia $H(X)$ = valoarea medie a informației)
- ▶ Notăție uzuală: μ

Proprietățile valorii medii

- ▶ Calculul valorii medii este o operație **liniară**
 - ▶ pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară

- ▶ Liniaritate

$$E\{c_1A + c_2B\} = c_1E\{A\} + c_2E\{B\}$$

- ▶ Sau:

$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$

- ▶ Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- ▶ Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- ▶ Momentul de ordin 2
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Varianța

- ▶ Varianța = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- ▶ V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
 - ▶ σ^2 = mare: abateri mari față de medie
 - ▶ σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{\{A - \mu\}^2} \\ &= \overline{A^2 - 2 \cdot A \cdot \mu + \mu^2} \\ &= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\ &= \overline{A^2} - \mu^2\end{aligned}$$

Suma variabilelor aleatoare

- ▶ Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- ▶ Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- ▶ Dacă $C = A + B$, atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

- ▶ Caz particular: dacă A și B sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$, atunci:
 - ▶ C este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$, având:
 - ▶ media = suma mediilor: $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
 - ▶ varianța = suma varianțelor: $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

II.2 Procese aleatoare

Procese aleatoare

- ▶ Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- ▶ Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
 - ▶ ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- ▶ Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ = o secvență de v.a. la orice moment de timp
 - ▶ ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- ▶ Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
 - ▶ ex.: $f(t_0)$ = valoarea la momentul t_0 este o v.a.

Realizări ale proceselor aleatoare

- ▶ **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
 - ▶ ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; dar am fi putut măsura orice altă realizare
- ▶ Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
 - ▶ la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- ▶ Fiecare eșantion $f(t_1)$ dintr-un proces aleator este o v.a.
 - ▶ descris de o **distribuție de ordin 1**
 - ▶ are FR $F_1(x; t_1)$
 - ▶ are FDP / FMP $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x; t_1)}{dx}$
 - ▶ distribuția depinde de momentul t_1
- ▶ Un eșantion la alt moment t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
 - ▶ altă FR $F_1(x; t_2)$
 - ▶ altă FDP / FMP $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x; t_2)}{dx}$
- ▶ Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- ▶ Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții *de ordin 1*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2

- ▶ O pereche de v.a. $f(t_1)$ și $f(t_2)$ formează un sistem de 2 v.a.:
 - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
 - ▶ au FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
 - ▶ au FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
 - ▶ distribuția depinde de momentele t_1 și t_2
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții *de ordin 2*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin n

- ▶ Generalizare la n eșantioane ale unui p.a.
- ▶ Un set de n v.a. $f(t_1), \dots, f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$:
 - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin n**
 - ▶ au FR comună $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$
 - ▶ au FDP / FMP comună $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
 - ▶ depind de momentele de timp t_1, t_2, \dots, t_n
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n valori (distribuții *de ordin n*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii statistice și temporale

Pentru procese continue:

1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

3. Varianța

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- Varianța se poate calcula pe baza celorlalte două:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2 - 2f(t_1)\mu(t_1) + \mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- Observații:

- aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul t_1
- ele caracterizează doar eșantionul de la momentul t_1
- la alt moment de timp t_2 , v.a. $f(t_2)$ este diferită, și valorile medii pot diferi

4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. The correlation function (for different random processes $f(t)$ and $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

► Observații:

- aceste funcții au valori diferite pentru diverse perechi de valori (t_1, t_2)

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește \int cu \sum :

1. $\overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$
2. $\overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$
3. $\sigma^2(t_1) = \overline{\{f[t_1] - \mu(t_1)\}^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1)$
4. $R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$
5. $R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$

Medii temporale

- ▶ Dacă avem acces doar la o singură realizare $f^{(k)}(t)$ a procesului?
- ▶ Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare $f^{(k)}(t)$, în timp**
- ▶ Pentru procese continue:

1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) dt$$

2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

3. Varianța temporală

$$\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

► Poate fi calculată ca:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

► Observație:

► aceste valori nu mai depind de timpul t

Autocorelația temporală

4. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

5. Funcția de corelație temporală (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește \int cu \sum , T cu N , și se împarte la $2N + 1$ în loc de $2T$

$$1. \overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]$$

$$2. \overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t])^2$$

$$3. \sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}[t] - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$$

4. Autocorelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t]f^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

5. Corelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t]g^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

Realizări de lungime finită

Dacă o realizare nu se întinde de la timpul $-\infty$ la ∞ , ci doar de la un t_{min} la t_{max} , se folosește $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$ pentru mediile temporale

- Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$$

Medii statistice și temporale

- ▶ Mediile statistice sunt, de obicei, cele de interes
 - ▶ dar necesită cunoașterea distribuțiilor
- ▶ În practică, pentru semnale necunoscute, se poate măsura doar o singură realizare
 - ▶ putem calcula doar mediile temporale
- ▶ Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt identice (“*ergodicitate*”)

Procese aleatoare staționare

- ▶ În general, mediile statistice depind de timp
 - ▶ pot fi diferite la alt moment de timp t_2
- ▶ Proces aleator **staționar** = mediile statistice rămân aceleași la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- ▶ Echivalent: Distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

- ▶ Practic, mediile nu trebuie să mai depindă de timp t

Staționar în sens strict sau larg

- ▶ Proces aleator **staționar în sens strict**:
 - ▶ relația e valabilă pentru toți n
- ▶ Proces aleator **staționar în sens larg**:
 - ▶ relația e valabilă doar pentru $n = 1$ și $n = 2$ (cele mai folosite)

Consecințe ale staționarității

- Pentru $n = 1$:

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **aceleași** la orice moment de timp t

$$\overline{f(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = \text{constant}, \forall t$$

Consecințe ale staționarității

- ▶ Pentru $n = 2$:

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- ▶ Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$$

- ▶ Depinde doar de valoarea $\tau =$ diferența de timp dintre cele două eșantioane

Consecințe ale staționarității

- ▶ Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **staționare**:

- ▶ funcția depinde numai de $\tau = t_2 - t_1$, în loc de t_1 și t_2

- ▶ Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași

- ▶ Autocorelația temporală:

- ▶ pentru p.a. continue

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)f^{(k)}(t+\tau)dt \end{aligned}$$

- ▶ pentru p.a. discrete

$$\begin{aligned} R_{ff}(\tau) &= \overline{f(t)f(t+\tau)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]f^{(k)}[t+\tau] \end{aligned}$$

- ▶ lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la

Consecințe ale staționarității

- ▶ Idem pentru funcția de corelație dintre procese aleatoare diferite
- ▶ Depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

- ▶ Definiția este similară cu formulele de la f. de autocorelație de pe slide-ul anterior

Interpretarea autocorelației

- ▶ $R_{ff}(\tau)$ = media produsului a două eșantioane situate la distanță de τ
 - ▶ ne spune dacă eșantioanele variază în același sens sau nu
- ▶ Idem pentru corelație, doar că eșantioanele provin din p.a. diferite, f și g
- ▶ Exemplu:
 - ▶ $R_{ff}(0.5) > 0$: două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative \Rightarrow produsele sunt majoritar pozitive)
 - ▶ $R_{ff}(1) < 0$: două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul e pozitiv, celălalt e negativ \Rightarrow produsele sunt majoritar negative)
 - ▶ $R_{ff}(2) = 0$: două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt necorelate (produsele sunt în medie 0, deci la fel de multe pozitive cât negative)

Procese aleatoare ergodice

- ▶ În practică, avem acces la o singură realizare
- ▶ Proces aleator **ergodic** = mediile temporale pe orice realizare sunt **identice** cu mediile statistice
- ▶ Ergodicitatea înseamnă:
 - ▶ Se pot calcule toate mediile pe baza unei singure realizări
 - ▶ dar realizarea trebuie să fie foarte lungă (lungimea $\rightarrow \infty$) pentru valori precise
 - ▶ Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
 - ▶ o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

Procese aleatoare ergodice

- ▶ Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
 - ▶ de ex. zgomote de tensiune
- ▶ Exemplu de proces ne-ergodic:
 - ▶ se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
 - ▶ o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

I.3 Proprietăți ale autocorelației

Densitatea spectrală de putere

- ▶ Densitatea spectrală de putere (DSP) $S_{ff}(\omega)$ reprezintă puterea procesului aleator la fiecare frecvență f ($\omega = 2\pi f$)
- ▶ DSP descrie cum este distribuită puterea semnalului în frecvență
 - ▶ de ex. unele procese au mai multă putere la frecvențe joase, altele la frecvențe înalte
- ▶ Puterea în banda de frecvență $[f_1, f_2]$ este $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ Puterea totală a procesului aleator este $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ DSP este o funcție măsurabilă practic
 - ▶ poate fi determinată experimental
 - ▶ este importantă în aplicații practice (ingineresti)

Teorema Wiener-Hincin

Teoremă:

- **Densitatea spectrală de putere = transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Fără demonstrație
- Leagă două concepte de natură diferită
 - funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
 - DSP: o proprietate *fizică* (ține de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

Zgomot alb

- ▶ Zgomot alb = proces aleator cu funcția de autocorelație egală cu un Dirac

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

- ▶ este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
 - ▶ autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice $\tau \neq 0$
 - ▶ oricare două eșantioane diferite ($\tau \neq 0$) au corelație zero (necorelate)
 - ▶ valorile a două eșantioane nu au legătură între ele
- ▶ Densitatea spectrală de putere = transf. Fourier a unui Dirac = constantă $\forall \omega$
 - ▶ putere constantă la toate frecvențele, până la $f = \infty$
- ▶ Zgomotul alb poate avea orice distribuție (normală, uniformă etc.)
 - ▶ termenul “zgomot alb” nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate

Zgomot alb de bandă limitată

- ▶ În practică, puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
 - ▶ pentru că puterea totală $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff\omega}$ nu poate fi infinită
 - ▶ zgomot alb “*de bandă limitată*”
- ▶ În acest caz, autocorelația = aproximativ un Dirac, dar nu infinit de “subțire”
 - ▶ eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
 - ▶ de ex. din cauza unor mici capacități parazite

- ▶ **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
 - ▶ Zgomot alb, Gaussian, aditiv
 - ▶ tipul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- ▶ Înseamnă:
 - ▶ aditiv: zgomotul se adună cu semnalul original (de ex. nu se multiplică cu acesta)
 - ▶ gaussian: eșantioanele au distribuția normală
 - ▶ alb: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele

- ▶ Până aici s-a făcut în 2018-2019. Celelalte slide-uri din acest fișier nu se cer.

Proprietățile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

- Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = \text{const}$$

- Dem.: două eșantioane la un interval ∞ sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

- Dem.: se pornește de la $\overline{(f(t) - f(t + \tau))^2} \geq 0$
- Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

Proprietățile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

- ▶ Dem.: Se pune $\tau = 0$ în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la ∞

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

- ▶ Dem.: $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$, $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

Autocorelația unui proces aleator filtrat

- ▶ Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
 - ▶ fie în timp continuu: intrarea $x(t)$, sistemul $H(s)$, ieșirea $y(t)$
 - ▶ fie în timp discret: intrarea $x[n]$, sistemul $H(z)$, ieșirea $y[n]$
- ▶ Cum depinde autocorelația ieșirii y de cea a intrării x ?
- ▶ Se știe că y este convoluția lui x cu răspunsul la impuls h

- Pentru un proces aleator în timp discret

$$\begin{aligned}R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n+\tau]} \\&= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n-k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2] \overline{x[n-k_1]x[n+\tau-k_2]} \\&= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau-k_1+k_2]\end{aligned}$$

- Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau)e^{-j\omega\tau}$$

► Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

► Schimbare de variabilă $\tau - k_1 + k_2 = u$

► rezultă $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

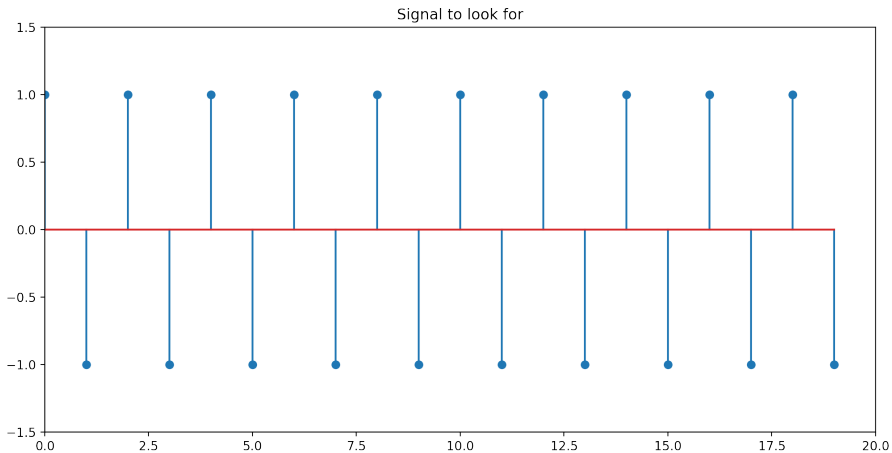
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- ▶ DSP a lui y = DSP a lui x multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- ▶ Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

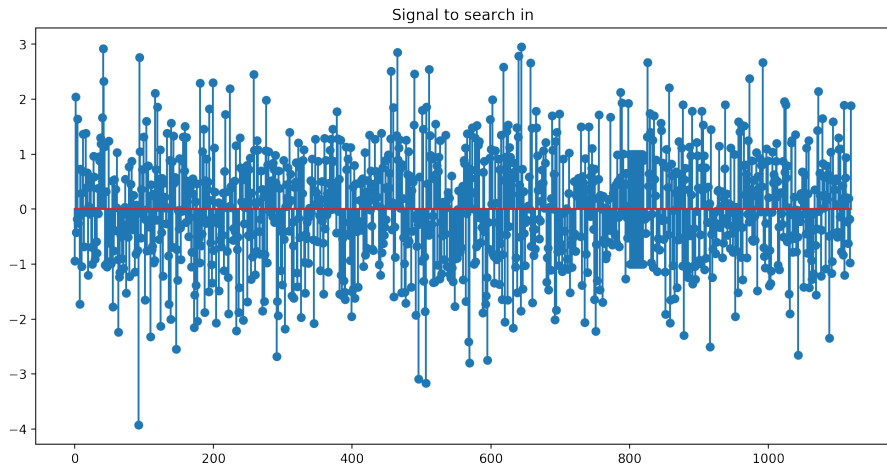
Aplicații ale (auto)corelației

- ▶ Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- ▶ Corelația a două semnale = o măsură a **similarității** celor două semnale
 - ▶ Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celui alt
 - ▶ Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- ▶ Corelația poate fi utilizată pentru localizare
 - ▶ Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
 - ▶ Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
 - ▶ Valori mici atunci când nu se potrivesc

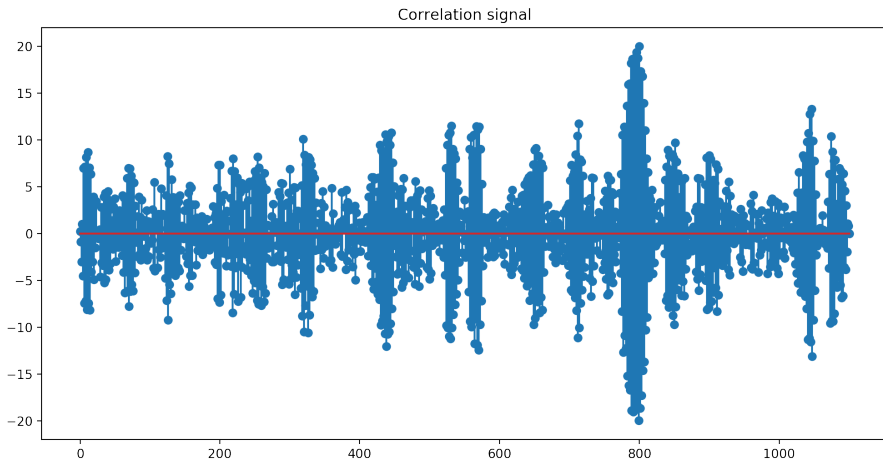
Semnalul căutat



Semnalul de dimensiuni mari



Rezultatul corelației



Identificare de sistem

- Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemului

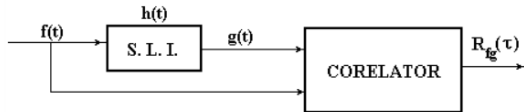


Figure 1: System identification setup

Identificare de sistem

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \overline{f[n]g[n+\tau]} \\ &= \overline{f[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \overline{f[n]f[n+\tau-k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_{ff}[\tau-k] \\ &= h[\tau] \star R_{ff}[\tau] \end{aligned}$$

- ▶ Dacă intrarea f este **zgomot alb** cu puterea A , $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$, și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] \star R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] \star \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- ▶ Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut