Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

Variabile aleatoare

- **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
  - Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
  - Prescurtat: v.a.
- Notație uzuală: X, Y etc..
- Exemple:
  - Numărul obținut prin aruncarea unui zar
  - Voltajul măsurat într-un punct dintr=un circuit
- Opusul = o valoare constantă (de ex. $\pi = 3.1415...$)

Realizări

- **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară rezultată în urma fenomenului aleator
- **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
  - = mulțimea tuturor realizărilor
- Exemplu: aruncarea unui zar
  - V.a. se notează X
  - Se poate obține o realizare $X = 3$
  - Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
  - Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
  - Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

V.a. continue

- Fie o v.a. continuă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\left\{X \leq x\right\}$$
- Derivata funcției de repartiție este **funcția densitate de probabilitate (FDP)**
$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(t)dt$$

V.a. continue

- FDP este probabilitatea ca valoarea lui X să fie într-o vecinătate ϵ mică în jurul lui x, raportat la ϵ

$$\begin{aligned} w(x) = \frac{dF(x)}{dx} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{P(X \in [x-\epsilon, x+\epsilon])}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Probabilitatea unei valori anume

- Probabilitatea ca v.a. continuă X să fie **exact** egală cu un x este **zero**
- O v.a. continuă are o infinitate de realizări posibile
- Probabilitatea unei valori anume este practic 0
- FDP este probabilitatea de a fi **într-o vecinătate mică în jurul** unei valori x

V.a. discrete

- Fie o v.a. discretă X
- **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$
- Exemplu: FR pentru un zar
- Pentru v.a. discrete, FR este de tip "treaptă"

V.a. discrete

- Nu putem defini densitatea de probabilitate
  - pentru că derivata în punctele de discontinuitate nu e definită
- **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*): probabilitatea ca X să aibă valoarea egală cu x

$$w(x) = P\{X = x\}$$

$$F(x) = \sum_{toți \quad t \leq x} w(t)$$

- Exemplu: FMP pentru un zar?

Probabilități și densități

- Calculul probabilității pe baza FDP (v.a. continuă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \int_A^B w(x)dx$$

- Calculul probabilității pe baza FMP (v.a. discretă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \sum_{x=A}^{B} w_X(x)$$

Interpretare grafică

- Probabilitatea ca X să fie între A și B este **suprafața de sub FDP**
  - adică integrala de la A la B
- Probabilitatea ca X să fie exact egal cu o valoare este zero
  - aria de sub un punct este nulă

Proprietățile FR/FDP/FMP

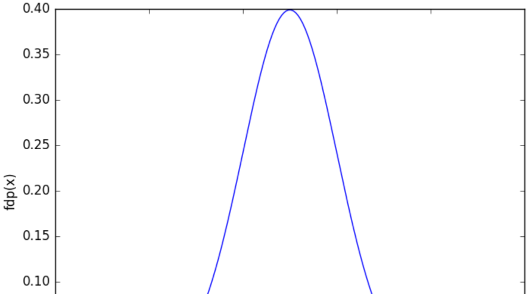
- FR este o funcție crescătoare
- FR / FDP / FMP sunt întotdeauna ≥ 0
- $FR(-\infty) = 0$ și $FR(\infty) = 1$
- Integrala FDP / suma FMP $= 1$

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

```
<type 'exceptions.UnicodeDecodeError'>
'ascii' codec can't decode byte 0xc8 in position 8: ordinal
range(128)
```



Distribuția normală

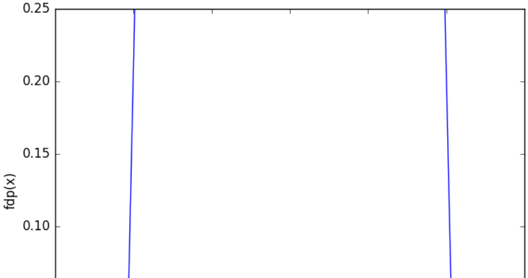
- Are doi parametri:
  - **Media** $\mu =$ "centrul" funcției
  - **Deviația standard** $\sigma =$ cât de "lată" este funcția
- Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala $= 1$)
- Extrem de des întâlnită în practică
- Orice valoare reală este posibilă ($w(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Distribuția uniformă

- Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

```
<type 'exceptions.UnicodeDecodeError'>
'ascii' codec can't decode byte 0xc8 in position 8: ordinal n
range(128)
```



Distribuția uniformă

- Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- "Înălțimea" funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
- Foarte simplă
- Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
- Se notează cu $\mathcal{U}\,[a, b]$

V.a. ca funcții de alte v.a

- O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- Exemple: dacă X este o v.a. distribuită $\mathcal{U}\,[0, 10]$, atunci
  - $Y = 5 + X$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U}\,[5, 15]$
  - $Z = X^2$ este de asemenea o v.a.
  - $T = cos(X)$ este de asemenea o v.a.
- Motivație: dacă X este aleatoare, și valorile Y, Z, T sunt aleatoare
- X, Y, Z, T nu sunt independente
  - O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- Fie un sistem cu două v.a. continue X și Y
- Există funcția de repartiție comună:

$$F(x, y) = P\left\{X \leq x \cap Y \leq y\right\}$$

- Densitatea de probabilitate comună:

$$w(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- FDP comună descrie probabilitatea ca X și Y să se găsească într-o vecinătate a lui x și y, simultan
- Similar pentru v.a discrete: funcția masă de probabilitate comună

$$w(x, y) = P\left\{X = x \cap Y = y\right\}$$

Variabile independente

- Două v.a. X și Y sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- Pentru v.a. independente, probabilitatea ca $X = x$ și $Y = y$ este produsul celor două probabilități
- V.a. discrete:

$$w(x, y) = w(x) \cdot w(y)$$

$$P\{X = x \cap Y = y\} = P\{X = x\} \cdot P\{Y = y\}$$

- Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare
- Idem pentru mai mult de două v.a.

Medii statistice

- V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("*momente*")
- Valoarea medie (momentul de ordin 1)
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{X} = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{X} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w(x) dx$$

- (Exemplu: entropia H(X) = valoarea medie a informației)
- Notație uzuală: μ

Proprietățile valorii medii

- Calculul valorii medii este o operație **liniară**
  - pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- Liniaritate
$$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}$$
- Sau:
$$E\{aX\} = aE\{X\}, \forall a \in \mathbb{R}$$
$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}$$
- Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- Momentul de ordin 2
- Pentru v.a. continue:

$$\overline{X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx$$

- Pentru v.a. discrete:

$$\overline{X^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx$$

- Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Dispersia (varianța)

- Dispersia (varianța) = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{X-\mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w(x) dx$$

- V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{X-\mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot w(x) dx$$

- Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
  - σ^2 = mare: abateri mari față de medie
  - σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- Legătura între medie, valoarea pătratică medie și dispersie:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \overline{\{X - \mu\}^2} \\
&= \overline{X^2 - 2 \cdot X \cdot \mu + \mu^2} \\
&= \overline{X^2} - 2\mu\overline{X} + \mu^2 \\
&= \overline{X^2} - \mu^2
\end{aligned}
$$

Hic sunt leones

Multiple random variables

- Consider a system with two random variables X and Y
- Joint cumulative distribution function:

$$F_{XY}(x_i, y_j) = P\left\{X \leq x_i \cap Y \leq y_i\right\}$$

- Joint probability density function:

$$w_{XY}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 P_{XY}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}$$

- The joint PDF gives the probability that the values of the two r.v. X and Y are in a **vicinity** of x_i and y_i simultaneously
- Similar definitions extend to the case of discrete random variables

Random process

- A **random process** = a sequence of random variables indexed in time
- **Discrete-time** random process $f[n]$ = a sequence of random variables