Examen DEPI 2018-2019

Nr.2

Exerciții (18p)

1. Fie o variabilă aleatoare continuă A având distribuția normală $\mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$.
   a. (1p) Reprezentați grafic distribuția (inclusiv înălțimea funcției)
   b. (1p) Calculați probabilitatea ca A să fie între 0 și 2
   c. (2p) Scrieți expresia și reprezentați grafic distribuția variabilei aleatoare $B = A - 3$.
   d. (1p) Calculați valoarea medie pătratică $\overline{A^2}$ (*Indicație*: se poate calcula pe baza valorilor μ și σ^2 cunoscute)

2. Fie detecția unui semnal constant care poate avea două valori posibile, $s_0 = -3$ (ipoteza H_0) sau $s_1 = 5$ (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 5)$. Probabilitățile celor două ipoteze sunt $P(H_0) = 1/5$ și $P(H_1) = 4/5$. La recepție se ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2$.
   a. (2p) Reprezentați grafic funcțiile de plauzibilitate $w(r|H_0)$ and $w(r|H_1)$ și scrieți-le expresia matematică;
   b. (1p) Care este decizia luată, conform criteriului Plauzibilității Maxime?
   c. (3p) Calculați probabilitatea de pierdere, dacă se folosește criteriului Plauzibilității Maxime;
   d. (2p) Care este decizia luată folosind criteriul Probabilității Minime de Eroare?

3. Fie detecția unui semnal $s(t) = 3\sin(\frac{\pi}{2}t)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent ($s(t) = 0$, ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 3)$. La recepție se iau 3 eșantioane la momentele de timp $t_0 = 1$, $t_1 = 2$ și $t_2 = 3$, cu valorile $r_0 = -1$, $r_1 = -0.5$ și $r_2 = 0.5$.
   a. (2p) Care este decizia luată, conform criteriului Plauzibilității Maxime?

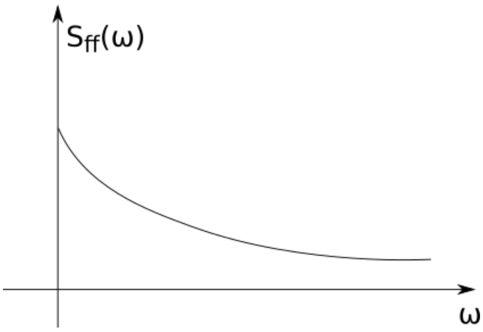
4. (3p) Fie un semnal recepționat de forma $r(t) = \underbrace{A \cdot t - 1}_{s(t)} + zgomot$. Zgomotul este de tip Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 4)$. La recepție se iau trei eșantioane, la momentele $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$, valorile obținute fiind $r_1 = 2.8$, $r_2 = 6.9$, $r_3 = 11$. Estimați parametrul A folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

Se cunoaște:

- $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$

Teorie (14p)

1. (2p) Ce înseamnă că un proces aleator este **ergodic**?
2. (2p) Un proces aleator are densitatea spectrală de putere ca în figură. Este acesta un zgomot alb? Justificați.



3. (2p) Dacă zgomotul care afectează un semnal se înjumătățește, cum se modifică raportul Semnal-Zgomot (SNR) (justificați în cuvinte):
   a. SNR crește
   b. SNR scade
   c. SNR rămâne constant
4. (4p) Criteriul probabilității minime de eroare: demonstrați că minimizarea probabilității de eroare conduce la expresia

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(H_0)}{p(H_1)}$$

5. (2p) Explicați legătura dintre **estimarea** de plauzibilitate maximă și **detecția** semnalelor pe baza criteriului plauzibilității maxime.
6. (2p) Scrieți expresiile de definiție ale următorilor estimatori: estimatorul de plauzibilitate maximă, estimatorul de eroare pătratică medie minimă (EPMM) și estimatorul Maximum A Posteriori (MAP)

Notă: 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h