Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introducere

Introducere

- Detecția semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
  - inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)
- Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
  - semnalele sunt afectate de zgomot
  - zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Contextul problemei de decizie

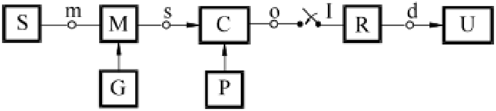


Figure 1: Schema bloc a unui sistem de comunicație

- Schema bloc a unui sistem de comunicație:
  - Sursa de informație: generează mesajele a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
  - Generator: generează semnalele diferite $s_1(t), \dots s_n(t)$
  - Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
  - Canal: adaugă zgomot aleator
  - Eșantionare: ia eșantioane din semnalul $s_n(t)$
  - Receptor: **decide** ce mesaj a_n s-a fost recepționat
  - Utilizator: primește mesajele recuperate

Formularea problemei

- Două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
  - pentru a_0: se transmite $s(t) = s_0(t)$
  - pentru a_1: se transmite $s(t) = s_1(t)$
- Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- Se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- **Problema deciziei**: pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?

Scenarii practice

- Transmisie de date cu diverse modulații binare:
  - nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) =$ constant 0 sau 5V)
  - modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) =$ cosinus cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
  - modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) =$ cosinus cu frecvențe diferite
  - modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK
  - la recepție se primește un semnal afectat de zgomot, **se decide** dacă s-a primit 0 sau 1

Scenarii practice

- Detecții radar
  - se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
  - receptorul așteaptă posibilele reflecții ale semnalului emis și **decide**
    - nu este prezentă o reflecție -> nici un obiect
    - semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat

Generalizări

- Decizie între mai mult de două semnale
- Numărul de eșantioane (observații):
  - un singur eșantion
  - mai multe eșantioane
  - observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detecția semnalelor folosind 1 eșantion

Formularea problemei

- Două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
  - pentru a_0: se transmite $s(t) = s_0(t)$
  - pentru a_1: se transmite $s(t) = s_1(t)$
- Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- Se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- **Problema deciziei**: pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?

Detecția unui semnal cu 1 eșantion

- Două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
  - pentru a_0: se transmite $s(t) = s_0(t)$
  - pentru a_1: se transmite $s(t) = s_1(t)$
- Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- Se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- **Decizie**: pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?
- Cel mai simplu scenariu: la recepție **se ia un singur eșantion** la momentul t_0, $r = r(t_0)$, și se decide pe baza sa

Ipoteze și decizii

- Există **două ipoteze**:
  - H_0: semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
  - H_1: semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- Receptorul poate lua una din **două decizii**:
  - D_0: receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
  - D_1: receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

Rezultate posibile

- Există 4 situații posibile:
  1. **Rejecție corectă**: ipoteza corectă este H_0, decizia este D_0
     - Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$
     - "**True Negative**"
  2. **Alarmă falsă**: ipoteza corectă este H_0, decizia este D_1
     - Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$
     - "**False Positive**"
  3. **Pierdere**: ipoteza corectă este H_1, decizia este D_0
     - Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$
     - "**False Negative**"
  4. **Detecție corectă**: ipoteza corectă este H_1, decizia este D_1
     - Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$
     - "**True Positive**"

Originea termenilor

- Terminologia are la origine aplicații radar:
  - un semnal se emite de către sursă
  - semnal recepționat = o posibilă reflecție din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
  - H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
  - H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
  - de aici numele "alarmă falsa", "pierdere" etc.

Zgomotul

- În general se consideră zgomot **aditiv**, **alb**, **staționar**
    - aditiv = zgomotul se adună cu semnalul
    - alb = eșantioane distincte sunt necorelate
    - staționar = are aceleași proprietăți statistice la orice moment de timp
- Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut
    - este o realizare a unui proces aleator
    - se cunoaște doar distribuția sa, nu și valorile particulare

Eșantionul preluat la recepție

- La recepție se primește semnalul $r(t) = s(t) + n(t)$
  - $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
  - $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- Valoarea eșantionului luat la momentul t_0 este $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$
  - $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
  - $n(t_0)$ este un eșantion din semnalul de zgomot

Eșantionul preluat la recepție

- Eșantionul $n(t_0)$ este o **variabilă aleatoare**
  - fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
  - v.a. continuă , intervalul valorilor posibile e continuu
- $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0) =$ o constantă $+$ o variabilă aleatoare
  - este de asemenea o variabilă aleatoare
  - $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $s_0(t_0)$, fie cu $s_1(t_0)$
- Care e distribuția lui $r(t_0)$?
  - o constantă $+$ o v.a. $=$ aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Funcții de plauzibilitate

- Fie distribuția zgomotului cunoscută, $w(x)$
- Distribuția lui r este $w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- În ipoteza H_0, distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- În ipoteza H_1, distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții condiționate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
    - "$|$" înseamnă "condiționat de", "dat fiind"
    - adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
    - r reprezintă necunoscuta funcției

Funcții de plauzibilitate

Exemplu:

- Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Care e distribuția unui eșantion r, în ambele ipoteze?

Problema deciziei

Decizie pe baza celor două distribuții:

- Avem două distribuții posibile (câte una în fiecare ipoteză)
- Avem un eșantion $r = r(t_0)$, care poate proveni din oricare distribuție
- Care ipoteză **decidem** a fi adevărată?

Plauzibilitatea unui parametru

- În general, **plauzibilitatea** (**likelihood**) unui parametru P pe baza unor **observații** O = densitatea de probabilitate a lui O, dacă parametrul are valoarea P:

$$L(P|O) = w(O|P)$$

- În cazul nostru:
  - parametrul necunoscut = care ipoteză H este cea adevărată
  - observațiile = eșantionul r
- **Plauzibilitatea unei ipoteze H** pe baza **observației** r este:

$$L(H_0|r) = w(r|H_0)$$

$$L(H_1|r) = w(r|H_1)$$

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- **Criteriul plauzibilității maxime** ("Maximum Likelihood"): se alege ipoteza cu **cea mai mare plauzibilitate** de a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$
  - "alegem ipoteza cea mai plauzibilă"
  - "se alege ipoteza cu plauzibilitatea mai mare"

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- Se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
- Se compară **raportul de plauzibilitate** cu 1

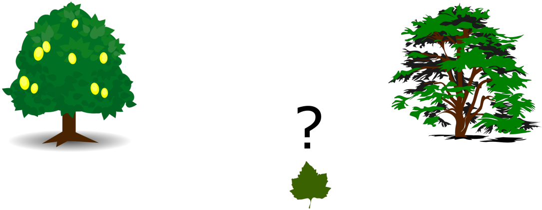
Exemplu: zgomot gaussian

Exemplu (continuare):

- Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.
- Care e decizia luată cu criteriul ML, pentru un eșantion $r = 1.6$?
- La tablă:
  - schiță a celor două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
  - discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
  - discuție: care este pragul T pentru decizii

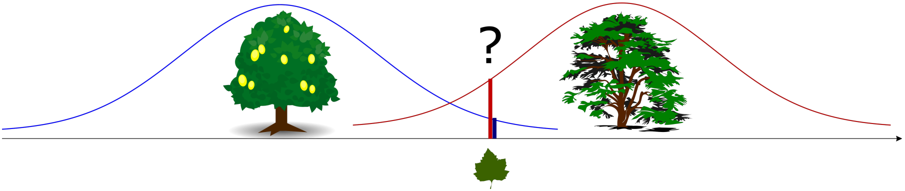
Exemplu: Frunze

Din care copac a căzut frunza?



Exemplu: Frunze

Alegem copacul cu **plauzibilitatea maximă**:



Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
  - zgomot de tip AWGN
- Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r - s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r - s_0(r_0))^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$
- Pentru distribuția normală, aplicăm **logaritmul natural**
  - logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
  - dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$

Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

- Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

- Notă: $|r - A|$ = **distanța** dintre r și A
  - $|r|$ = distanța de la r la 0
- Așadar, se alege **distanța minimă** dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

Criteriul ML pentru zgomot gaussian

- Criteriul ML **pentru zgomot gaussian**: ipoteza se alege pe baza **celei mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$
  - principiul **cel mai apropiat vecin** (“*nearest neighbor*”)
  - un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
  - un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** (“*minimum distance receiver*”)

Etape pentru decizia pe baza ML

1. Se schițează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

Etape pentru decizia pe baza ML, zgomot gaussian

- Doar dacă zgomotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
  1. Se determină $s_0(t_0) =$ valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_0
  2. Se determină $s_1(t_0) =$ valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_1
  3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege **cea mai apropiată** valoare

Decizie pe bază de prag

- Alegerea valorii celei mai apropiate = același lucru cu **compararea** r **cu un prag** $T = \frac{s_0(t_0)+s_1(t_0)}{2}$
  - i.e. dacă cele două valori sunt 0 și 5, luăm o decizie prin compararea lui r cu 2.5
- La **criteriul ML** , pragul = **punctul de intersecție** al celor două distribuții condiționate

Exerciții

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}\left(\mu = 0, \sigma^2 = 2\right)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$

  a. Scrieți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
  b. Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
  c. Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
  d. Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1

Regiuni de decizie

- **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior
  - $R_0 = [-\infty, 2.5]$
  - $R_1 = [2.5, \infty]$

Plauzibilitate vs probabilitate

- Există o distincție subtilă între termenii "probabilitate" și "plauzibilitate"
- Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$ de la exemplul anterior:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- Care este necunoscuta în această expresie?
  - în general, r
  - dar în cazul deciziei nosatre este i, iar r este cunoscut

Terminologie: probabilitate și plauzibilitate

- Pentru aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
  - dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ, σ, H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r, x) atunci funcția o interpretăm ca densitatea de **probabilitate**
  - dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r, x), și necunoscuta este un parametru statistic (de ex. μ, σ, i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**

Generalizări

- Dacă zgomotul are altă distribuție?
  - Se schițează distribuțiile condiționate
  - Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
  - Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- Regiunile de decizie sunt date de **punctele de intersecție** ale distribuțiilor condiționate
  - Pot fi mai multe intersectări, în general, deci mai multe praguri

Generalizări

- Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1?
- Similar:
  - Se schițează distribuțiile condiționate
  - Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
  - Criteriul ML = se alege **cea mai înaltă funcție** $w(r|H_i)$ în punctul r dat

Generalizări

- Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?
- **Nu contează forma** semnalelor
- Tot ce contează sunt **valorile celor două semnale la momentul de eșantionare** t_0:
  - $s_0(t_0)$
  - $s_1(t_0)$

Generalizări

- Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- Se extinde raționamentul la n ipoteze
  - Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots \; s_{n-1}(t)$
  - Avem n valori diferite $s_0(t_0), \dots \; s_{n-1}(t_0)$
  - Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
  - Se alege distribuția $w(r|H_i)$ **cea mai înaltă** pentru $r = r(t_0)$ dat

Generalizări

- Dacă se iau mai multe eșantioane din semnale?
- Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

Detecții succesive

- Într-o comunicație binară, fiecare detecție/decizie produce valoarea unui bit (mesaj)
- Se repetă o altă detecție separată pentru bitul (mesajul) următor, și tot așa

Exerciţiu

- Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare este transmisă timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuţie normală. Receptorul ia un singur eşantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilităţii maxime, decideţi ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primeşte eşantioanele următoare:

$$4,\ 6.6,\ -5.2,\ 1.1,\ 0.3,\ -1.5,\ 7,\ -7,\ 4.4$$

Probabilități condiționate

- Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile
- Fie regiunile de decizie:
  - R_0: dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
  - R_1: daca $r \in R_1$, decizia este D_1
- Probabilitatea condiționată a rejecției corecte
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_0, calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0)dx$$

- Probabilitatea condiționată a alarmei false
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_1, calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0)dx$$

Probabilități condiționate

- Probabilitatea condiționată de pierdere
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_0, calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1)dx$$

- Probabilitatea condiționată a detecției corecte
  - $=$ probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
  - $=$ probabilitatea ca r să fie în R_1, calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1)dx$$

Probabilități condiționate

- Relații între probabilitățile condiționate
  - suma $P(D_0|H_0) + P(D_1|H_0) = 1$ (rejecție corectă + alarmă falsă)
  - suma $P(D_0|H_1) + P(D_1|H_1) = 1$ (pierdere + detecție corectă)
  - De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

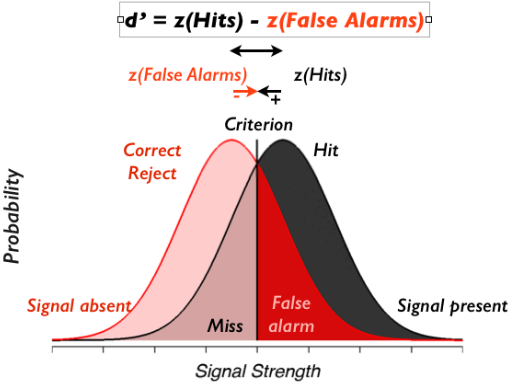


Figure 2: Probabilități condiționate

- Ignorați textul, contează zonele colorate
- [sursa: hhttp://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt]*

Optimalitatea criteriului ML

Teoremă:

Criteriul ML **minimizează probabilitatea totală de eroare condiționată** $P(D_1|H_0) + P(D_0|H_1)$

Demonstrație:

Informal: de pe figura precedentă, dacă pragul T se deplasează fie la dreapta fie la stânga, suma celor două arii hașurate (probabilități) pentru alarmă falsă + pierdere crește

TODO: demonstrație riguroasă

Probabilitățile celor 4 rezultate

- Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze
- Nu includ și probabilitățile **ipotezelor înselor**
  - adică, $P(H_0) =$ probabilitatea de a avea ipoteza H_0
  - $P(H_1) =$ probabilitatea de a avea ipoteza H_1
- Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$
  - $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **inițiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

Reamintire (TCI): regula lui Bayes

- Reamintire (TCI): **regula lui Bayes**

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- Interpretare:
  - Probabilitatea $P(A)$ este extrasă afară din din $P(B|A)$
  - $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, șansele ca A chiar să aibă loc
  - Exemplu: P(gol | șut la poartă) $= \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriu?
- La noi:

$$P(D_i \cap H_j) = P(D_i|H_j) \cdot P(H_j)$$

  - pentru toți i și j (în toate cele 4 cazuri)

Exerciţiu

- Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}\left(\mu = 0, \sigma^2 = 2\right)$. Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilităţii maxime, folosind un singur eşantion din semnal.

  a. Calculaţi probabilitatea condiţionată a alarmei false
  b. Calculaţi probabilitatea condiţionată de pierdere
  c. Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ şi $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculaţi probabilitatea rejecţiei corecte şi a detecţiei corecte (nu cele condiţionate)

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

- Criteriul ML compară distribuțiile **condiționate** ale eșantionului observat
  - condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 **ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1**
  - Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1, și vice-versa
  - pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
  - și de aceea vrem să "favorizăm"/"încurajăm" decizia D_0
- Avem nevoie de un criteriu mai general ...

Exemplu: Terenuri de fotbal

TODO

Criteriul probabilității minime de eroare

- Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- **Criteriul probabilității minime de eroare** (MPE):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$\frac{P(H_1) \cdot w(r|H_1)}{P(H_0) \cdot w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- prescurtat MPE (Minimum Probability of Error)

Criteriul probabilității minime de eroare

Teoremă:

Criteriul MPE **minimizează probabilitatea totală de eroare**:

$$P_e = P_{af} + P_p = P(D_1 \cap H_0) + P(D_0 \cap H_1)$$

- nu probabilitățile condiționate, ci cele care includ $P(H_i)$

Criteriul probabilității minime de eroare

Demonstrație:

- Probabilitatea unei alarme false este:

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap H_0) =& P(D_1|H_0) \cdot P(H_0) \\ =& \int_{R_1} w(r|H_0)dx \cdot P(H_0) \\ =& (1 - \int_{R_0} w(r|H_0)dx \cdot P(H_0) \end{aligned}$$

- Probabilitatea de pierdere este:

$$\begin{aligned} P(D_0 \cap H_1) =& P(D_0|H_1) \cdot P(H_1) \\ =& \int_{R_0} w(r|H_1)dx \cdot P(H_1) \end{aligned}$$

- Probabilitatea totală a erorilor (suma lor) este:

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^{T} [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)]dx$$

Probabilitatea de eroare minimă

- Urmărim minimizarea P_e, adică să minimizăm integrala
- Putem alege R_0 cum dorim, pentru acest scop
- Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
  - integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1

Probabilitatea de eroare minimă

- Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Interpretare

- Criteriul MPE este o generalizare a criteriului ML, depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
  - se exprimă tot sub forma unui raport de plauzibilitate
- Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- Criteriul ML este un caz particular al MPE pentru for $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

- Echivalent

$$(r-s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r-s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - sau, dacă se desfac parantezele:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0)+s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0)-s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- La criteriul ML, se compară distanțele (la pătrat):

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2$$

- La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Interpretarea 2: valoarea de prag

- La criteriul ML, se compară r cu un prag T

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$$

- La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Exerciții

- Fie decizia între două semnale constante: $s_0(t) = -5$ și $s_1(t) = 5$. Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r.
  a. Să se găsească regiunile de decizie conform criteriului MPE
  b. Calculați probabilitatea alarmei false și probabilitatea de pierdere
  c. Repetați a) și b) dacă $s_1(t)$ este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?

Criteriul riscului minim

- Dacă ne afectează mai mult un anume tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte (pierderi)?
  - Criteriul MPE tratează toate erorile la fel
  - Ne trebuie un criteriu mai general
- Idee: se atribuie **un cost** fiecărui scenariu, apoi se minimizează costul mediu
- C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
  - C_{00} = costul unei rejecții corecte
  - C_{10} = costul unei alarme false
  - C_{01} = costul unei pierderi
  - C_{11} = costul unei detecții corecte
- Ideea de "costuri" și minimizarea costului mediu este general întâlnită
  - de ex. TCI: codare: "costul" unui mesaj este lungimea cuvântului de cod, vrem să minimizăm costul mediu, adică lungimea medie

Criteriul riscului minim

- Definim **riscul** = **media costurilor**

$$R = C_{00}P(D_0 \cap H_0) + C_{10}P(D_1 \cap H_0) + C_{01}P(D_0 \cap H_1) + C_{11}P(D_1 \cap H_1)$$

- Criteriul riscului minim: **se minimizează riscul R**
  - adică se minimizează costul mediu
  - se mai numește “criteriul costului minim”

Calcule

- Demonstrație la tablă
  - se folosește regula lui Bayes
- Concluzie: regula de decizie este

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

Criteriul riscului minim

Criteriul riscului minim (MR):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

- prescurtat MR (Minimum Risk)

Interpretare

- Criteriul MR este o generalizare a MPE (la rândul lui o generalizare a ML)
  - se exprimă tot printr-un raport de plauzibilitate
- Atât **probabilitățile** cât și **costurile** pot influența decizia în favoarea uneia sau alteia dintre ipoteze
- Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, MR se reduce la criteriul MPE
  - de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- Dacă zgomotul este gaussian (normal), la fel ca lal celelalte criterii, se aplică logaritmul natural
- Se obține:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

  - sau

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- La criteriul MR, pe lângă probabilități apar și costurile

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

Interpretarea 2: Valoarea de prag

- La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

  - în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- La criteriul MR, pragul este influențat și de costuri

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln\left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}\right)$$

Influența costurilor

- Criteriul MR împinge decizia înspre **minimizarea scenariilor cu cost ridicat**
- Exemplu: din ecuații:
  - ce se întâmplă dacă costul C_{01} crește, iar celelalte rămân la fel?
  - ce se întâmplă dacă costul C_{10} crește, iar celelalte rămân la fel?
  - ce se întâmplă dacă ambele costuri C_{01} și C_{10} cresc, iar celelalte rămân la fel?

Pariul lui Pascal

Raționamentul filozofului și matematicianului Blaise Pascal (1623–1662):

> *Dumnezeu există sau nu. Rațiunea nu poate decide între cele două alternative.*
> *Tu trebuie să pariezi (nu este opțional).*
> *În cazul în care câștigi, câștigi totul; dacă pierzi, nu pierzi nimic.*
> *Pariază fără ezitare că El există. Ai de câștigat o infinitate de vieți fericite, împotriva unui număr finit de șanse de a pierde.*[1]

- Un exemplu filozofic de utilizare a criteriului riscului minim

[1] sursa textului: Wikipedia

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

- Criteriile ML, MPE și MR au toate forma următoare

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

  - pentru ML: $K = 1$
  - pentru MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
  - pentru MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00}) p(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(H_1)}$

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

În zgomot gaussian, criteriile se reduc la:

- Compararea pătratului distanțelor:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln(K)$$

- Compararea eșantionului r cu un prag T:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)}_{T}$$

Exercițiu

- Un sistem *airbag* detectează un accident prin eșantionarea semnalului de la un senzor cu 2 valori posibile: $s_0(t) = 0$ (OK) sau $s_1(t) = 5$ (accident).
- Semnalul este afectat de zgomot gaussian$\mathcal{N}$ $(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.
- Se ia un singur eșantion din semnal.
- Costurile scenariilor sunt: $C_{00} = 0$, $C_{01} = 100$, $C_{10} = 10$, $C_{11} = -100$
    a. Găsiți regiunile de decizie R_0 și R_1.

Criteriul Neyman-Pearson

- Un criteriu mai general decât toate cele de până acum
- Criteriul Neyman-Pearson: se maximizează probabilitatea de detecție $(P(D_1 \cap H_1))$ păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată $(P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda)$
  - Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$
- Criteriile ML, MPE și MR sunt cazuri particulare ale Neyman-Pearson, pentru diverse valori ale λ.

Exercițiu

- O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție uniformă $U[-5, 5]$.
- Receptorul ia un singur eșantion r.
  a. Găsiți regiunile de decizie conform criteriului Neymar-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
  b. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Sumar: criterii de decizie

- Am văzut: decizie între două semnale, bazată pe 1 eșantion
- Toate criteriile au la bază raportul de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K
- În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni de decizie
  - regiunea R_0: dacă r este aici, se decide D_0
  - regiunea R_1: dacă r este aici, se decide D_1
- Pentru zgomot gaussian, granița între regiuni (valoarea de prag) este:

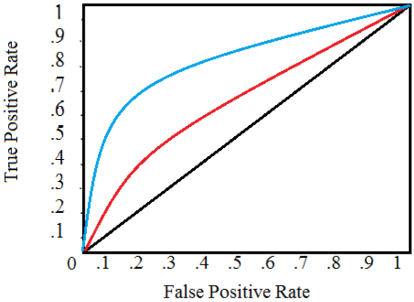
$$T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)$$

Compararea a două probleme de decizie

- Fie o problemă de decize cu $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = 10$, și zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$
- Fie o altă problemă de decizie cu $s_0(t) = 10$, $s_1(t) = 16$, and noise $\mathcal{U}[-8, 8]$
- Care e mai ușoară? Cum să le comparăm
- Cum se evaluează performanțele rezultatelor într-o problemă de decizie?
  - Trebuie să comparăm probabilitățile "bune" (P_{cd}, P_{cr}) și cele "rele" (P_{fa}, P_m)

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **"Caracteristica de operare a receptorului"** (**"Receiver Operating Characteristic", ROC)**
- Reprezintă probabilitatea $P_{dc} = P(D_1|H_1)$ în funcție de probabilitatea $P_{af} = P(D_1|H_0)$
  - pentru diferite praguri T
  - fiecare T corespunde unui punct de pe grafic



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

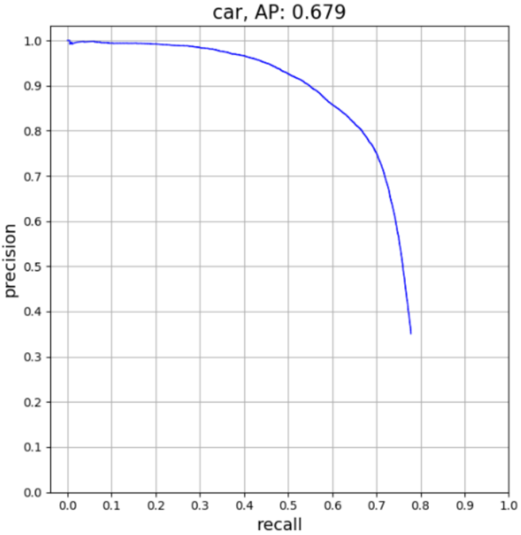
- Există întotdeauna un **compromis** între P_d (bun) și $P_{fa}(r\breve{a}u)$
  - creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
  - pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
  - dar întotdeauna e vorba de un compromis
- O măsură a performanței globale este **Area Under the Curve** (AUC)
  - indiferent de alegerea unui prag sau a altuia
- Două situații diferite (două semnale diferite, algoritmi etc) se pot compara prin afișarea ROC si compararea AUC-urilor asociate

Caracteristica Precision vs Recall

- Un grafic similar este cel de **Precision vs Recall**
- **Precision** $= \frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_1 \cap H_0)}$
  - $=$ True Positives / (True Positives $+$ False Positives)
- **Recall** $= \frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_0 \cap H_1)} = P(D_1 | H_1)$
  - $=$ True Positives / (True Positives $+$ False Negatives)

Caracteristica Precision vs Recall

Exemplu de grafic Precision vs Recall dintr-o aplicație practică



Caracteristica Precision vs Recall

Aplicația pentru care este obținut graficul precedent:

Raport Semnal-Zgomot

- Cum putem îmbunătăți performanțele de detecție?
  - i.e. creșterea P_d pentru același P_{af}
  - independent de alegerea unui prag sau a altuia
- Două soluții:
  - Creșterea diferenței dintre $s_0(t)$ și $s_1(t)$ (se crește **puterea semnalului**)
  - Scăderea zgomotului (se scade **puterea zgomotului**)
  - i.e. se crește **raportul Semnal-Zgomot**

Examen 2020-2021

- Următoarele trei slide-uri nu se cer pentru examenul 2020-2021 (până la Raportul semnal zgomot).

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
  - Sau, echivalent, considerăm doar probabilități condiționate
- Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned} P_d =& P(D_1|H_1) \\ =& \int_T^\infty w(r|H_1) \\ =& (F(\infty) - F(T)) \\ =& \frac{1}{2}\left(1 - erf\left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \\ =& Q\left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Probabilitatea alarmei false este

$$
\begin{aligned}
P_{fa} =& P(D_1|H_0) \\
=& \int_T^\infty w(r|H_0) \\
=& (F(\infty) - F(T)) \\
=& \frac{1}{2}\left(1 - erf\left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right) \\
=& Q\left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

- Rezultă $\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}\left(P_{fa}\right)$,
- Și: $\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}\left(P_{fa}\right) + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Înlocuind în P_d, obținem:

$$P_d = Q\left(\underbrace{Q^{-1}\left(P_{fa}\right)}_{constant} + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

- Fie un scenariu simplu:
  - $s_0(t_0) = 0$
  - $s_1(t_0) = A = constant$
- Obținem:

$$P_d = Q\left(\underbrace{Q^{-1}\left(P_{fa}\right)}_{constant} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Raportul semnal zgomot

- **Raportul semnal zgomot (SNR)** $= \frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie $= \overline{X^2}$
  - Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
  - Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- În cazul nostru, SNR $= \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q\left(\underbrace{Q^{-1}\left(P_{fa}\right)}_{constant} - \sqrt{SNR}\right)$$

- Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
  - Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
  - SNR mare: performanță bună
  - SNR mic: performanță slabă

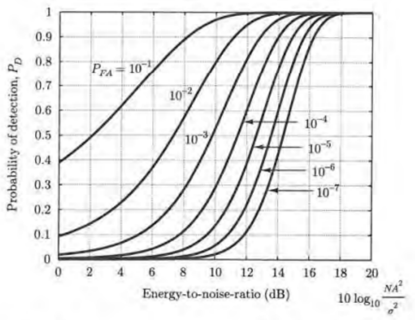


Figure 6: Performanțele detecției depind de SNR

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

Alte aplicații ale teoriei deciziei

- Se pot utiliza aceste criterii de decizie în alte aplicații?
  - nu pentru a decide între semnale, ci în alte scopuri
- Matematic, problema se pune sub forma următoare:
  - avem 2 (sau mai multe) distribuții posibile
  - avem 1 valoare observată
  - determinăm cea mai plauzibilă distribuție, pe baza valorii observate
- În acest caz particular, decidem între două semnale
- Dar acest model matematic se poate aplica și în alte contexte:
  - medicină: un semnal ECG indică o boală sau nu?
  - business: va cumpăra clientul un produs, sau nu?
  - De obicei se folosesc mai multe eșantioane, dar principiul matematic este același

Alte aplicații ale teoriei deciziei

Exemplu (pur imaginar):

- O persoană sănătoasă cu greutatea = X kg are concentrația de trombocite pe ml de sânge distribuită aproximativ $\mathcal{N}\left(\mu = 10 \cdot X, \sigma^2 = 20\right)$.
- O persoană suferind de boala B are o valoare mult mai scăzută, distribuită aproximativ $\mathcal{N}\left(100, \sigma^2 = 10\right)$.
- În urma analizelor de laborator, ai obținut valoarea $r = 255$. Greuatea ta este 70 kg.
- Decideți: sănătos sau nu?

II.3 Detecția semnalelor cu mai multe eșantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- Contextul rămâne același:
  - Se transmite un semnal $s(t)$
  - Există **două ipoteze**:
    - H_0: semnalul original este $s(t) = s_0(t)$
    - H_1: semnalul original este $s(t) = s_1(t)$
  - Receptorul poate lua **două decizii**:
    - D_0: se decide că semnalul a fost $s(t) = s_0(t)$
    - D_1: se decide că semnalul a fost $s(t) = s_1(t)$
  - Există 4 scenarii posibile

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- Contextul rămâne același:
  - Semnalele sunt afectate de zgomot (necunoscut)
  - Se recepționează un semnal $r(t) = s(t) + n(t)$
- Se iau N eșantioane din $r(t)$, nu doar 1
  - Fiecare eșantion $r_i = r(t_i)$ se ia la momentul t_i
- Eșantioanele formează **vectorul de eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, ... r_N]$$

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- Fiecare eșantion r_i este o **variabilă aleatoare**
  - $r(t_i) = s(t_i) + n(t_i) =$ constantă $+$ o v.a.
- Vectorul $\mathbf{r}$ reprezintă un set de N v.a. dintr-un proces aleator
- Considerând întreg vectorul $\mathbf{r}$, valorile vectorului $\mathbf{r}$ sunt descrise de **distribuții de ordin** N
- În ipoteza H_0:

$$w_N(\mathbf{r}|H_0) = w_N(r_1, r_2, ...r_N|H_0)$$

- În ipoteza H_1:

$$w_N(\mathbf{r}|H_1) = w_N(r_1, r_2, ...r_N|H_1)$$

Plauzibilitatea vectorului de eșantioane

- Se aplică **aceleași criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eșantion
$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$
- Observații
  - $\mathbf{r}$ este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eșantioanelor
  - $w_N(\mathbf{r}|H_0) =$ plauzibilitatea vectorului $\mathbf{r}$ în ipoteza H_0
  - $w_N(\mathbf{r}|H_1) =$ plauzibilitatea vectorului $\mathbf{r}$ în ipoteza H_1
  - valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
  - identic ca la 1 eșantion, doar că acum datele = mai multe eșantioane

Descompunere

- Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt independente
- În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot ... \cdot w(r_N|H_j)$$

  - de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9]$ = plauzibilitatea obținerii lui 5.1 $\times$ plauzibilitatea obținerii lui 4.7 $\times$ plauzibilitatea obținerii lui 4.9
- Funcțiile $w(r_i|H_i)$ sunt distribuțiile condiționate ale fiecărui eșantion
  - de care am mai văzut deja

Descompunere

- Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Raportul de plauzibilitate al unui vector de eșantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eșantion
- **Se înmulțesc** rapoartele de plauzibilitate ale fiecărui eșantion în parte, și se aplică criteriile asupra rezultatului final

Criterii de decizie

- Toate criteriile de decizie pot fi scrise astfel:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \dots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Valoarea lui K se alege ca pentru 1 eșantion:
  - criteriul ML: $K = 1$
  - criteriul MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
  - criteriul MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Caz particular: AWGN

- AWGN = "Additive White Gaussian Noise" = Zgomot alb, gaussian, aditiv
- În ipoteza H_1: $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$
- În ipoteza H_0: $w(r_i|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$
- Raportul de plauzibilitate al vectorului **r**

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2 - \sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Criterii de decizie pentru AWGN

- Raportul de plauzibilitate global se compară cu K:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = e^{\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2 - \sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Se aplică logaritmul natural, obținându-se:

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 1: distanța geometrică

- Sumele reprezintă **distanța geometrică** la pătrat:

$$\sum (r_i - s_1(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s_1}(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_1(t))^2$$

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s_0}(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_0(t))^2$$

  - distanța între vectorul observat $\mathbf{r}$ și semnalele originale $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$
  - vectori cu N eșantioane => distanța între vectori de dimensiune N
- Totul se reduce la a compara distanțele

Interpretarea 1: distanța geometrică

- Criteriul Maximum Likelihood:
  - $K = 1$, $\ln(K) = 0$
  - se alege **distanța minimă** între **r** și vectorii $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$)
  - de unde și numele "receptor de distanță minimă"
- Criteriul Minimum Probability of Error:
  - $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
  - Apare un termen suplimentar, în favoarea ipotezei mai probabile
- Criteriul Minimum Risk:
  - $K = \frac{(C_{10} - C_{00}) p(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(H_1)}$
  - Termenul suplimentar depinde și de probabilități, și de costuri

Exerciţiu

Exerciţiu:

- Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eşantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.

    a. Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilităţii maxime?
    b. Ce decizie se ia conform criteriului probabilităţii minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ şi $P(H_1) = 1/3$?
    c. Ce decizie se ia conform criteriului roscului minim. dacă $P(H_0) = 2/3$ şi $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?

Alt exercițiu:

- Fie detecția unui semnal $s(t) = 3\sin(2\pi f t)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent ($s_0(t) = 0$, ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.
  a. Care sunt cele mai bune momente de eșantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
  b. Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime?â
  c. Dacă se folosește criteriul probabilității minime de eroare, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
  d. Dacă se folosește criteriul riscului minim, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?
  e. Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detecția?

Interpretarea 2: produs scalar

- Dacă se descompun parantezele:

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Se obține:

$$\sum (r_i)^2 + \sum s_0(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_0(t_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum (r_i)^2 + \\ + \sum s_1(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_1(t_i) + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Echivalent cu:

$$\sum r_i s_1(t_i) - \frac{\sum (s_1(t_i))^2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum r_i s_0(t_i) - \frac{\sum (s_0(t_i))^2}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- Algebră: **produsului scalar** al vectorilor **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

- $\sum r_i s_1(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s_1(t)} \rangle$ este produsul scalar al vectorului $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ cu $\mathbf{s_1(t_i)} = [s_1(t_1), s_1(t_2), ...s_1(t_N)]$
- $\sum r_i s_0(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s_0(t)} \rangle$ este produsul scalar al vectorului $\mathbf{r} = [r_1, r_2, ...r_N]$ cu $\mathbf{s_0(t_i)} = [s_0(t_1), s_0(t_2), ...s_0(t_N)]$
- $\sum (s_1(t_i))^2 = \sum s_1(t_i) \cdot s_1(t_i) = \langle \mathbf{s_1(t)}, \mathbf{s_1(t)} \rangle = E_1$ este **energia** vectorului $s_1(t)$
- $\sum (s_0(t_i))^2 = \sum s_0(t_i) \cdot s_0(t_i) = \langle \mathbf{s_0(t)}, \mathbf{s_0(t)} \rangle = E_0$ este **energia** vectorului $s_0(t)$

Interpretarea 2: produs scalar

- Decizia se poate rescris sub forma:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_1} \rangle - \frac{E_1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s_0} \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- Interpretare: **comparăm produsele scalare**
  - se scad energiile semnalelor, pentru o comparație corectă
  - există de asemenea termenul care depinde de criteriul ales

Interpretarea 2: produs scalar

- Caz particular:
  - Dacă cele două semnale au energii egale: $E_1 = \sum s_1(t_i)^2 = E_0 = \sum s_0(t_i)^2$
  - Exemple:
    - modulație BPSK: $s_1 = A\cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A\cos(2\pi ft)$
    - modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A\cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$
  - Atunci formula se simplifică:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_1} \rangle \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s_0} \rangle + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- În domeniul prelucrărilor de semnale, produsul scalar măsoară **similitudinea** a două semnale
- Interpretare: verificăm dacă vectorul eșantioanelor **r** este **mai asemănător** cu $s_1(t)$ sau cu $s_0(t)$
  - Se alege cel mai similar cu **r**
  - Se scad și energiile semnalelor (necesar d.p.d.v. matematic)
- **Produsul scalar** a doi vectori **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

Implementare cu circuite de corelare

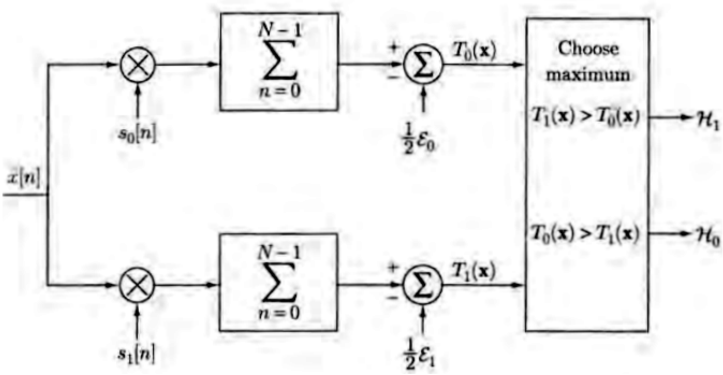


Figure 7: Decizie între două semnale

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

Exemplu: BPSK

- Demodulare BPSK:

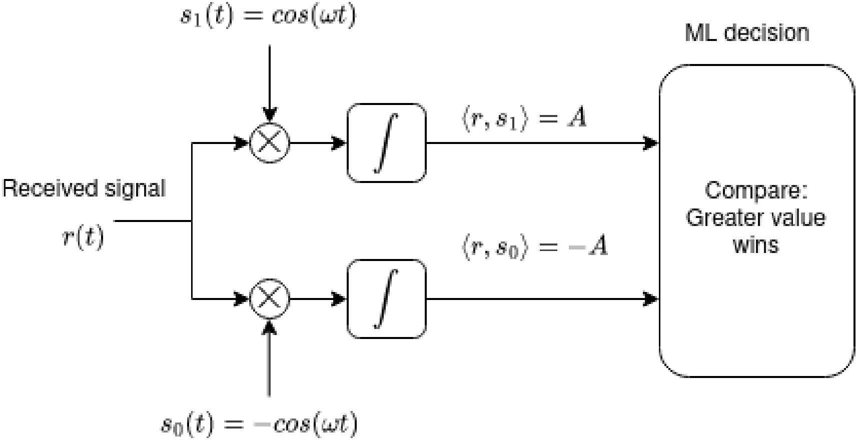


Figure 8: Decizie BPSK: implementare directă

Exemplu: BPSK

- Demodulare BPSK:

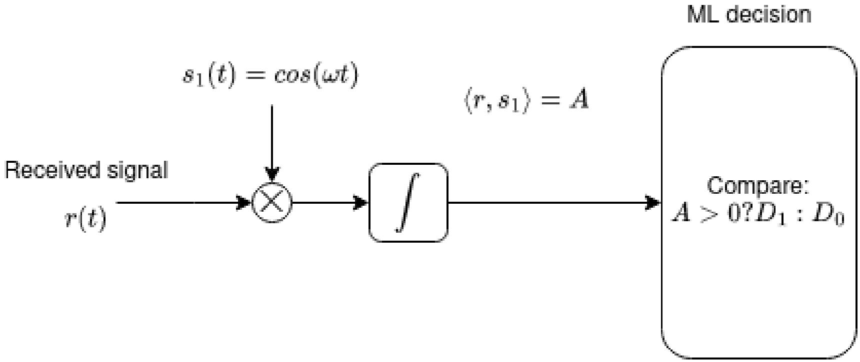


Figure 9: Decizie BPSK: implementare mai eficientă

Filtru adaptat

- Cum se calculează produsul scalar a două semnale $r[n]$ și $s[n]$ de lungime N?
$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \sum r_i s(t_i)$$
- Fie $h[n]$ semnalul $h[n]$ **oglindit**
  - începe la momentul 0, durează până la momentul $N-1$, dar este oglindit
$$h[n] = s[N-1-n]$$
- Exemplu:
  - dacă $s[n] = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 5, 6]$
  - atunci $h[n] = s[N-1-n] = [\underset{\uparrow}{6}, 5, 4, 3, 2, 1]$

Filtru adaptat

- Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n-k] = \sum_k r[k]h[N-1-n+k]$$

- Rezultatul convoluției, la finalul semnalului de intrare, $y[N-1]$ ($n = N-1$), este chiar produsul scalar:

$$y[N-1] = \sum_k r[k]s[k]$$

Filtru adaptat

- Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru a cărui răspuns la impuls = oglindirea lui** $s[n]$, luându-se eșantionul de la finalul semnalului de intrare

$$h[n] = s[N-1-n]$$

  - se obține valoarea produsului scalar
- **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. "matched filter")
  - filtrul este *adaptat* semnalului dorit

Detecția semnalelor cu filtre adaptate

- Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t_i)$
- Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_0(t_i)$
- Se eșantionează ieșirile la momentul final $n = N - 1$
  - se obțin valorile produselor scalare
- Se folosește regula de decizie cu produse scalare

Detecția semnalelor cu filtre adaptate

- Dacă $s_0(t) = 0$, avem nevoie doar de un singur filtru adaptat pentru $s_1(t)$, și se compară rezultatul cu un prag

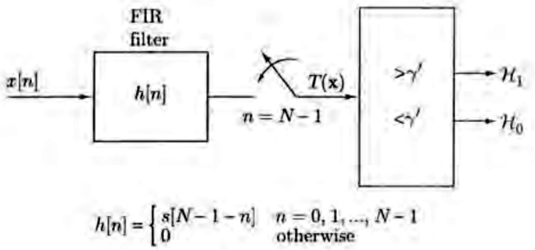


Figure 10: Detecție folosind un filtru adaptat

[sursa: Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay]

II.4 Detecția unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- Observare continuă = fără eșantionare, se folosește **întreg semnalul continuu**
  - similar cazului cu N eșantioane, dar cu $N \to \infty$
- Semnalele originale sunt $s_0(t)$ si $s_1(t)$
- Semnalele sunt afectate de zgomot
  - Presupunem **doar zgomot Gaussian**, pentru simplitate
- Semnalul recepționat este $r(t)$

Spațiu Euclidean

- Se extinde cazul precedent cu N eșantioane la cazul unui semnal continuu, $N \to \infty$
- Fiecare semnal $r(t)$, $s_1(t)$ și $s_0(t)$ reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- **Distanța** între două semnale este:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 \, dt}$$

- **Produsul scalar** între două semnale:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \int r(t)s(t)dt$$

- Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă

Decizie în cazul AWGN: distanțe

- În cazul AWGN este aceeași regula de decizie:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s_0})^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} d(\mathbf{r}, \mathbf{s_1})^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Distanța = se calculează cu formula precedentă, cu integrală
- Aceleași criterii de decizie:
  - Criteriul Maximum Likelihood: $K = 1$, $\ln(K) = 0$
    - se alege **distanța minimă**
  - Criteriul Minimum Probability of Error: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
  - Criteriul Minimum Risk: $K = \frac{(C_{10} - C_{00}) p(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) p(H_1)}$

Decizie în cazul AWGN: produse scalare

- În cazul AWGN este aceeași regulă de decizie:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s_1} \rangle - \frac{E_1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s_0} \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- Produsul scalar = formula precedentă, cu integrală
- Toate interpretările rămân identice
  - se schimbă doar **tipul de semnal** cu care lucrăm

Filtru adaptat

- Produsul scalar a două semnale se poate calcula cu un **filtru adaptat**
- **Filtru adaptat** = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu **oglindirea** semnalului căutat
  - dacă semnalul original $s(t)$ are lungimea T
  - atunci $h(t) = s(T - t)$
  - filtrul este analogic, răspunsul la impuls este continuu
- Ieșirea unui filtru adaptat la momentul $t = T$ este egală cu produsul scalar al intrării $r(t)$ cu $s(t)$

Detecția semnalelor cu filtre adaptate

- Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t)$
- Se folosește un alt filtru adaptat la semnalul $s_0(t)$
- Se eșantionează ieșirile filtrelor la sfârșitul semnalelor, $t = T$
  - se obțin valorile produselor scalare
- Se utilizează regula de decizie cu produse scalare

Spații vectoriale Euclidiene

- Recapitulare: Spații vectoriale Euclidiene
- Spațiu vectorial
  - suma a două elemente = rămâne în același spațiu
  - multiplicarea cu o constantă = rămâne în același spațiu
  - există operații aritmetice de bază: sumă, multiplicare cu o constantă
  - Exemple
    - 1D = o dreaptă
    - 2D = un plan
    - 3D = spațiu tridimensional
    - N-D = ...
    - ∞-D = ..

Spații vectoriale Euclidiene

- Operația fundamentală: **produsul scalar**
  - pentru semnale discrete

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$$

  - pentru semnale continue

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)$$

- Norma (lungimea) unui vector = radical(produsul scalar cu sine însuși)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- Distanța între doi vectori = norma diferenței dintre ei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Spații vectoriale Euclidiene

- Energia unui semnal = norma la pătrat

$$E_x = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- Unghiul dintre doi vectori

$$cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

  - are valoare între -1 și 1
  - dacă $\langle x, y \rangle = 0$, vectorii sunt **ortogonali** (perpendiculari)

Spații vectoriale Euclidiene

- Bonus: transformata Fourier = produs scalar cu $e^{j\omega t}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int x(t) e^{-j\omega t}$$

  - pentru semnale complexe, al doilea termen se conjugă, de aceea este $-j$ în loc de j

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i^*$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)^*$$

- Identic pentru semnale discrete

Spații vectoriale Euclidiene

- Concluzie: definirea algoritmilor în mod generic, pe bază de produse scalare / distanțe / norme, este extrem de folositoare!
  - se aplică automat tuturor spațiilor vectoriale
  - un singur algoritm, utilizări pentru multiple tipuri de semnale

II.5 Detecția semnalelor cu distribuții necunoscute

Distribuții necunoscute

- Până acum, se cunoștea dpdv. matematic statistica tuturor datelor:
  - Se cunoșteau semnalele:
    - $s_0(t) = ...$
    - $s_1(t) = ...$
  - Se cunoștea zgomotul
    - gaussian, uniform, etc.
  - Se cunoșteau distribuțiile condiționate:
    - $w(r|H_0) = ...$
    - $w(r|H_1) = ...$
- În aplicații reale, lucrurile pot fi mai complicate

Exemplu

- Dacă semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ nu există / nu se cunosc?
- Exemplu: recunoașterea feței unei persoane
  - Identificarea persoanei A sau B bazată pe o imagine a feței
  - Avem:
    - 100 imagini ale persoanei A, în condiții diverse
    - 100 imagini ale persoanei B, în condiții diverse

Eșantioane vs distribuții

- Să comparăm recunoașterea fețelor cu detecția semnalelor
- Aspecte comune:
  - două ipoteze H_0 (persoana A) și H_1 (persoana B)
  - un vector de eșantioane $\mathbf{r}$ = imaginea pe baza căreia se face decizia
  - se pot lua două decizii
  - 4 scenarii: rejecție corectă, alarmă falsă, pierdere, detecție corectă
- Ce diferă? Nu există formule matematice
  - nu există semnalele "originale" $s_0(t) = ...$ și $s_1(t)$...
  - (fețele persoanelor A și B nu pot fi exprimate matematic ca semnale)
  - în schimb, avem multe exemple din fiecare distribuție
    - 100 imagini ale lui A = exemple ale $\mathbf{r}$ în ipoteza H_0
    - 100 imagini ale lui B = exemple ale $\mathbf{r}$ în ipoteza H_1

Terminologie

- Terminologia folosită în domeniul **învățării automate** (*machine learning*):
  - Acest tip de problemă = problemă de **clasificare** a semnalelor
    - se dă un vector de date, găsiți-i clasa
  - **Clase de semnal** = categoriile posibile ale semnalelor (ipotezele H_i, persoanele A/B etc)
  - **Set de antrenare** = un set de semnale cunoscute inițial
    - de ex. 100 de imagini ale fiecărei persoane
    - setul de date va fi folosit în procesul de decizie

Eșantioane și distribuții

- Setul de antrenare conține informațiile pe care le-ar conține distribuțiile condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
  - $w(r|H_0)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_0
  - $w(r|H_1)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_1
  - setul de antrenare exprimă același lucru, nu prin formule, dar prin multe exemple
- Cum se face clasificarea în aceste condiții?

Algoritmul k-NN

Algoritmul *k-Nearest Neighbours* (k-NN)

- Intrare:
  - set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_N$, din L clase posibile de semnal $C_1 \dots C_L$
  - clasele vectorilor de antrenare sunt cunoscute
  - vector de test $\mathbf{r}$ care trebuie clasificat
  - parametrul k

1. Se calculează distanța între $\mathbf{r}$ și fiecare vector de antrenare $\mathbf{x}_i$
   - se poate utiliza distanța Euclidiană, aceeași utilizată pentru detecția semnalelor din secțiunile precedente
2. Se aleg cei mai apropiați k vectori de $\mathbf{r}$ (cei k *"nearest neighbours"*)
3. Se determină clasa lui $\mathbf{r}$ = clasa majoritară între cei k cei mai apropiați vecini

- Ieșire: clasa vectorului $\mathbf{r}$

Algoritmul k-NN

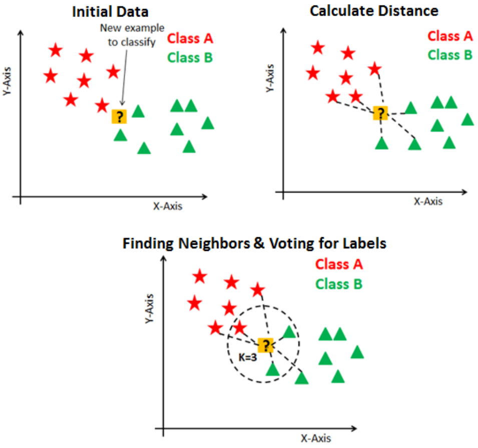


Figure 11: Algoritmul k-NN ilustrat [1]

[1] sursa: "KNN Classification using Scikit-learn", Avinash Navlani,

https://www.datacamp.com/community/tutorials/k-nearest-neighbor-classification-scikit-learn

Algoritmul k-NN și decizia ML

- Dacă setul de antrenare este foarte mare, algoritmul k-NN devine simular cu decizia pe baza criteriului ML
- Numărul de vectori situați într-o vecinătate a unui punct r este proporțional cu $w(r|H_i)$
- Mai mulți vecini din clasa A decât din clasa B $\Leftrightarrow w(r|H_A) > w(r|H_B)$

Algoritmul k-NN și decizia ML

- Exemplu: frunze și copaci :) de povestit

Exercițiu

1. Fie următorul set de antrenare, compus din 5 vectori din clasa A și alți 5 vectori din clasa B:
   - Clasa A:

   $$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   - Clasa B:

   $$\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_9 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \; \mathbf{v}_{10} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   Determinați clasa vectorului $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ utilizând algoritmul k-NN, cu $k = 1$, $k = 3$, $k = 5$, $k = 7$ and $k = 9$

Discuție

- k-NN este un algoritm de învățare supervizată
  - se cunosc clasele vectorilor din setul de antrenare
- Efectul lui k: netezirea frontierei de decizie:
  - k mic: frontieră foarte cotită / "șifonată" / cu multe coturi
  - k mare: frontieră mai netedă
- Cum se găsește o valoare optimă pentru k?

Cross-validation

- Cum se găsește o valoare optimă pentru k?
  - prin încercări ("băbește")
- "**Cross-validation**" = folosirea unui mic set de test pentru a verifica care valoare a parametrului e mai bună
  - acest set de date se numește set de "**cross-validare**"
  - se impune $k = 1$, se testează cu setul de "*cross-validare*" câți vectori sunt clasificați corect
  - se repetă pentru $k = 2, 3, ... max$
  - se alege valoarea lui k cu care s-au obținut rezultatele cele mai bune

Evaluarea algoritmilor

- Cum se evaluează performanța algoritmului k-NN?
  - Se folosește un set de date de testare, și se calculează procentajul vectorilor clasificați corect
- Setul de date pentru evaluarea finală trebuie să fie diferit de setul de "*cross-validare*"
  - pentru evaluarea finală se folosesc date pe care algoritmul nu le-a mai utilizat niciodată
- Cum se împarte setul de date disponibile?

Seturi de date

- Presupunem că avem în total 200 imagini tip fețe, 100 imagini ale persoanei A și 100 ale lui B
- Setul de date total se împarte în:
  - Set de antrenare
    - vectorii care vor fi utilizați de algoritm
    - cel mai numeros, aprox. 60% din datele totale
    - de ex. 60 imagini ale persoanei A și 60 ale lui B
  - Set de *cross-validare*
    - utilizat pentru a testa algoritmul în vederea alegerii parametrilor optimi (k)
    - mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui of A și 20 ale lui B)
  - Set de testare
    - utilizat pentru evaluarea finală a algoritmului, cu valorile parametrilor fixate
    - mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui of A și 20 ale lui B)

Algoritmul *k-Means*

- k-Means: un algoritm pentru ***clusterizarea*** datelor
  - identificarea grupurilor de date apropiate între ele
- Un exemplu de algoritm de învățare nesupervizată
  - "învățare nesupervizată" = nu se cunosc clasele semnalelor din setul de antrenare

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means*

- Intrare:
  - set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_N$
  - numărul de clase C
- Inițializare: centroizii C iau valori aleatoare

$$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{ valori aleatoare}$$

- Repetă
  1. Clasificare: se clasifică fiecare vector $\mathbf{x}$ pe baza celui mai apropiat centroid:
  $$classx = \arg\min_i d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i), \forall \mathbf{x}$$
  2. Actualizare: se actualizează centroizii $\mathbf{c}_i$ = media vectorilor $\mathbf{x}$ din clasa i
  $$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{ media vectorilor } \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \text{ din clasa } i$$
- Ieșire: centroizii $\mathbf{c}_i$, clasele tuturor vectorilor de intrare $\mathbf{x}_n$

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means* explicat video:

- Urmăriți video-ul următor, de la 6:28 to 7:08

  https: //www.youtube.com/watch?v=4b5d3muPQmA

- Urmăriți video-ul următor, de la 3:05 la final

  https: //www.youtube.com/watch?v=IuRb3y8qKX4

Algoritmul *k-Means*

- Algoritmul *k-Means* poate să nu conveargă spre niște grupuri adecvate de date
  - rezultatele depind de inițializarea aleatoare a centroizilor
  - se rulează de mai multe ori, se alege cel mai bun rezultat
  - există metode de inițializare optimizate (*k-Means*++)

Exercițiu

1. Fie datele următoare:

$$\{\mathbf{v_n}\} = [1.3, -0.1, 0.5, 4.7, 5.1, 5.8, 0.4, 4.8, -0.7, 4.9]$$

Utilizați algoritmul k-Means pentru a găsi doi centroizi $\mathbf{c}_1$ și $\mathbf{c}_2$, pornind de la valorile aleatoare $\mathbf{c}_1 = -0.5$ și $\mathbf{c}_2 = 0.9$. Realizați 5 iterații ale algoritmului.