

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
 - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrare
 - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notăție uzuală: X , Y etc..
- ▶ Exemple:
 - ▶ Numărul obținut prin aruncarea unui zar
 - ▶ Voltajul măsurat într-un punct dintr=un circuit
- ▶ Opusul = o valoare constantă (de ex. $\pi = 3.1415\dots$)

- ▶ **Realizare** a unei v.a. = o valoare particulară rezultată în urma fenomenului aleator
- ▶ **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a.
 - ▶ = mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
 - ▶ V.a. se notează X
 - ▶ Se poate obține o realizare $X = 3$
 - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

V.a. discrete și continue

- ▶ V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
 - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
 - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

- ▶ Fie o v.a. continuă X
- ▶ **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

- ▶ Derivata funcției de repartiție este **funcția densitate de probabilitate (FDP)**

$$w(x) = \frac{dF_X(x_i)}{dx_i}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(t) dt$$

- ▶ FDP este **probabilitatea ca valoarea lui X să fie într-o vecinătate mică în jurul lui x**

Probabilitatea unei valori anume

- ▶ Probabilitatea ca v.a. continuă X să fie **exact** egală cu un x este **zero**
- ▶ O v.a. continuă are o infinitate de realizări posibile
- ▶ Probabilitatea unei valori anume este practic 0
- ▶ FDP este probabilitatea de a fi **într-o vecinătate mică în jurul** unei valori x^{**}

- ▶ Fie o v.a. discretă X
- ▶ **Funcția de repartiție (FR)**: probabilitatea ca X să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este de tip “treaptă”

- ▶ Nu putem defini densitatea de probabilitate
 - ▶ pentru că derivata în punctele de discontinuitate nu e definită
- ▶ **Funcția masă de probabilitate** (FMP) (*probability mass function*): probabilitatea ca X să aibă valoarea egală cu x

$$w(x) = P\{X = x\}$$

$$F(x) = \sum_{\text{toți } t \leq x} w(t)$$

- ▶ Exemplu: FMP pentru un zar?

- Calculul probabilității pe baza FDP (v.a. continuă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \int_A^B w(x)dx$$

- Calculul probabilității pe baza FMP (v.a. discretă):

$$P\{A \leq X \leq B\} = \sum_{x=A}^B w_X(x)$$

- ▶ Probabilitatea ca X să fie între A și B este **suprafața de sub FDP**
 - ▶ adică integrala de la A la B
- ▶ Probabilitatea ca X să fie exact egal cu o valoare este zero
 - ▶ aria de sub un punct este nulă

Proprietățile FR/FDP/FMP

- ▶ FR este o funcție crescătoare
- ▶ FR / FDP / FMP sunt întotdeauna ≥ 0
- ▶ $FR(-\infty) = 0$ și $FR(\infty) = 1$
- ▶ Integrala FDP / suma FMP = 1

Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

```
-----  
Traceback (most recent call last)<ipython-input-1-61cf2ff980a  
<module>()  
      3 sigma = 2  
      4 x = np.linspace(mu-5*sigma,mu+5*sigma,200)  
----> 5 pdf =  
1/(sigma*math.sqrt(2*math.pi))*numpy.exp(-(x-mu)**2/(2*sigma*  
      6 plt.plot(x,pdf)  
      7 plt.xlabel('x')  
NameError: name 'numpy' is not defined
```

Distribuția uniformă

Multiple random variables

- ▶ Consider a system with two random variables X and Y
- ▶ Joint cumulative distribution function:

$$F_{XY}(x_i, y_j) = P\{X \leq x_i \cap Y \leq y_j\}$$

- ▶ Joint probability density function:

$$w_{XY}(x_i, y_j) = \frac{\partial^2 P_{XY}(x_i, y_j)}{\partial x \partial y}$$

- ▶ The joint PDF gives the probability that the values of the two r.v. X and Y are in a **vicinity** of x_i and y_i simultaneously
- ▶ Similar definitions extend to the case of discrete random variables

Random process

- ▶ A **random process** = a sequence of random variables indexed in time
- ▶ **Discrete time random process** $f[n]$ = a sequence of random variables