

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul I. Semnale aleatoare

I.1 Variabile aleatoare

Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare** = o variabilă care denumește o valoare produsă printr-un fenomen aleator
 - ▶ Practic, reprezintă *un nume* atașat unei valori arbitrarе
 - ▶ Prescurtat: v.a.
- ▶ Notație uzuală: X , Y etc..
- ▶ Exemple:
 - ▶ X = Numărul obținut prin aruncarea unui zar
 - ▶ V_{in} = Voltajul măsurat într-un punct dintr-un circuit

Realizări ale unei variabile aleatoare

- ▶ O **realizare** a unei v.a. = o valoare particulară posibilă
- ▶ **Spațiul realizărilor** Ω = mulțimea valorilor posibile ale unei v.a
 - ▶ mulțimea tuturor realizărilor
- ▶ Exemplu: aruncarea unui zar
 - ▶ V.a. se notează X
 - ▶ Se poate obține o realizare $X = 3$
 - ▶ Dar s-ar fi putut obține orice valoare din spațiul realizărilor

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- ▶ V.a. **discretă**: dacă Ω este o mulțime discretă
 - ▶ Exemplu: Numărul obținut prin aruncarea unui zar
- ▶ V.a. **continuă**: dacă Ω este o mulțime compactă
 - ▶ Exemplu: Valoarea tensiunii măsurate într-un punct

Aruncarea unei monede

- ▶ Variabila aleatoare X = "față obținută la aruncarea unei monede"

<i>Random Variable</i>	<i>Possible Values</i>	<i>Random Events</i>
$X = \{$	0 1	

(sursa imaginii: <https://www.mathsisfun.com/data/random-variables.html>)

Unde se întâlnesc variabile aleatoare?

- ▶ Variabilele aleatoare modelează semnale de **zgomot**
- ▶ Exemple:
 - ▶ Se măsoară tensiunea într-un punct dintr-un circuit
 - ▶ Dacă se măsoară de mai multe ori, se obțin valori *ușor* diferențiate.
 - ▶ Valoarea este afectată de zgomot
 - ▶ Valoarea tensiunii este o *variabilă aleatoare*

Funcția masă de probabilitate

- ▶ Fie o v.a. discretă A
- ▶ **Funcția masă de probabilitate (FMP)** (*probability mass function*) = probabilitatea ca A să aibă valoarea egală cu x

$$w_A(x) = P\{A = x\}$$

- ▶ Se mai numește **distribuția** variabilei A
- ▶ Exemplu: FMP pentru valoarea unui zar, grafic pe tablă
- ▶ Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = w_A(v)$$

- ▶ Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = \sum_{x=a}^b w_A(x)$$

Funcția de repartiție

- ▶ **Functia de repartitie (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ Exemplu: FR pentru un zar, grafic la tablă
- ▶ Pentru v.a. discrete, FR este “în trepte”
- ▶ Probabilitatea ca A să aibă valoarea v

$$P\{A = v\} = F_A(v) - F_A(v - 1)$$

- ▶ Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b (inclusiv):

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a - 1)$$

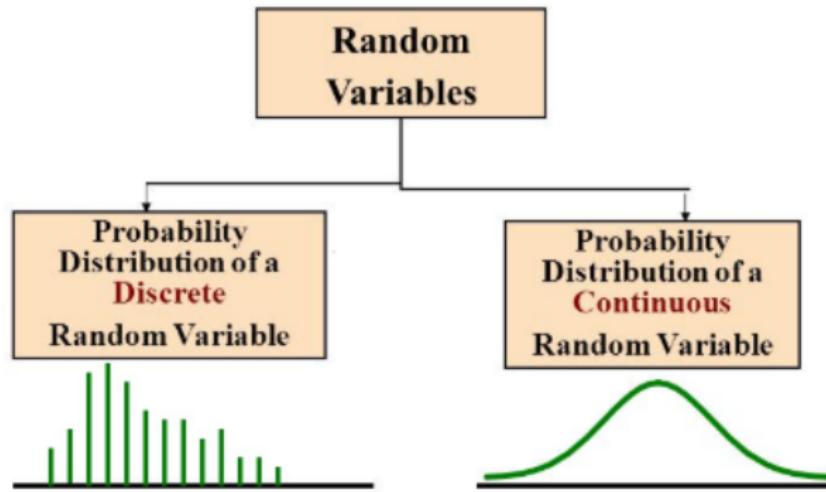
Relația între FMP și FR

- FR este *suma cumulativă* (un fel de “integrală discretă”) a FMP

$$F_A(x) = \sum_{t=-\infty}^{t=x} w_A(t)$$

- Exemplu pentru zar: grafic, la tablă

Variabile aleatoare discrete și continue



(sursa imaginii: “Probability Distributions: Discrete and Continuous”, Seema Singh, <https://towardsdatascience.com/probability-distributions-discrete-and-continuous-7a94ede66dc0>)

Funcția de repartiție

- ▶ Fie o v.a. **continuă** A
- ▶ **Funcția de repartiție (FR)** = probabilitatea ca A să aibă valoarea mai mică sau egală cu x

$$F_A(x) = P\{A \leq x\}$$

- ▶ **Funcția densitate de probabilitate (FDP)** (sau **distribuția** lui A) este derivata funcției de repartiție:

$$w_A(x) = \frac{dF_A(x)}{dx}$$

- ▶ Informal: densitatea de probabilitate $w_A(x)$ este proporțională cu probabilitatea ca valoarea lui A să fie **în jurul lui** unei x

Probabilitatea unei valori exacte

- ▶ Probabilitatea ca o v.a. continuă A să ia **exact** o valoare x este **zero**
 - ▶ pentru că există o infinitate de valori posibile (v.a. continuă)
 - ▶ de aceea nu se poate defini o funcție masă de probabilitate ca la v.a. discrete
- ▶ De aceea FDP reprezintă probabilitatea de a fi **într-o vecinătate** a valorii x , și nu exact egal cu x

Calculul probabilității cu FDP și FR

- ▶ Probabilitatea ca A să aibă exact valoarea v este întotdeauna 0

$$P\{A = v\} = 0$$

- ▶ Probabilitatea ca A să fie între valorile a și b = integrala FDP între a și b :

$$P\{a \leq A \leq b\} = \int_a^b w_A(x)dx$$

- ▶ Probabilitatea ca valoarea lui A să fie între a și b :

$$P\{a \leq A \leq b\} = F_A(b) - F_A(a)$$

- ▶ Nu contează dacă intervalul este deschis sau închis

- ▶ $[a, b]$ sau (a, b) , nu contează
 - ▶ de ce?

Relația între FDP și FR

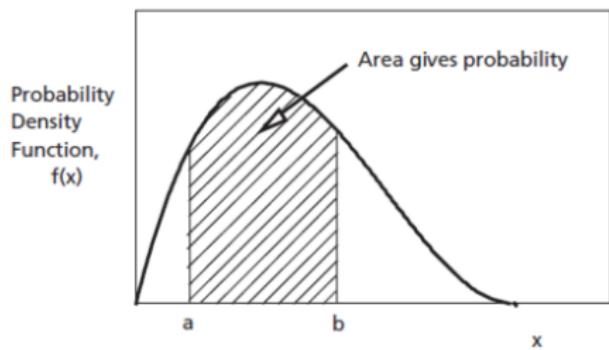
- ▶ FR este **integrala** FDP
- ▶ FDP este **derivata** FR

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x w_A(x) dx$$

$$\begin{aligned}w_A(x) &= \frac{dF_A(x)}{dx} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_A(x + \epsilon) - F_A(x - \epsilon)}{2\epsilon} \\&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(A \in [x - \epsilon, x + \epsilon])}{2\epsilon}\end{aligned}$$

Interpretare grafică

- ▶ Probabilitatea ca A să fie între a și b este **suprafața de sub FDP**
 - ▶ adică integrala de la a la b
- ▶ Probabilitatea ca A să fie exact egal cu o valoare este zero
 - ▶ aria de sub un punct este nulă



(sursa: "https://intellipaat.com/blog/tutorial/statistics-and-probability-tutorial/probability-distributions-of-continuous-variables/*")

V.a. discrete vs continue

Comparatie intre v.a. discrete si continue

- ▶ FR $F_A(x)$ are aceeași definiție, înseamnă același lucru
- ▶ FDP/FMP $w_A(x)$ este derivata FR
 - ▶ la v.a. continue:
 - ▶ este o derivată obișnuită
 - ▶ reprezintă probabilitatea de a fi "in jurul" valorii x
 - ▶ la v.a. discrete:
 - ▶ un fel de "derivată discretă"
 - ▶ reprezintă probabilitatea de a avea exact valoarea x

Proprietățile v.a

FR:

- ▶ FR este mereu pozitivă, $F_A(x) \geq 0$
- ▶ FR este monoton crescătoare (nu descrește)
- ▶ FR pornește din 0 și ajunge la valoarea 1

$$F_A(-\infty) = 0 \quad F_A(\infty) = 1$$

FDP/FMP:

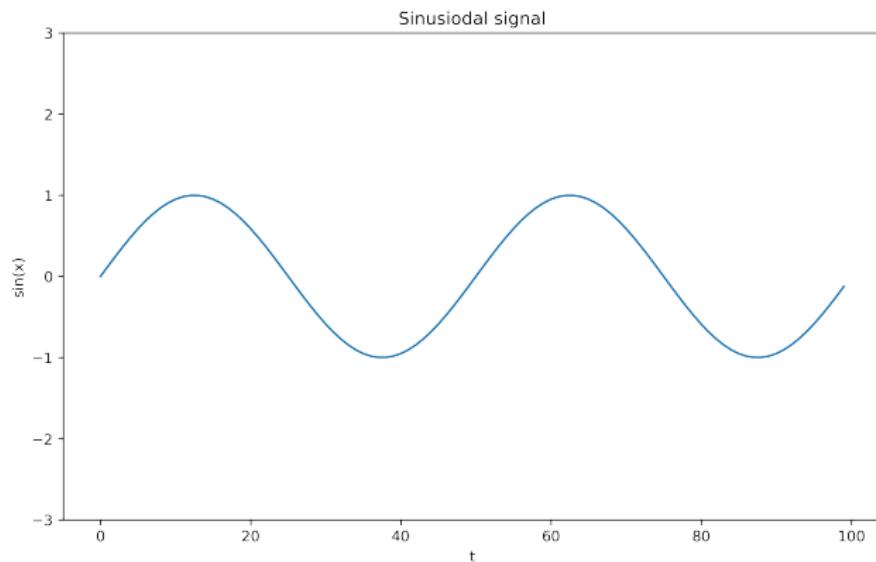
- ▶ PDF/PMF sunt mereu pozitive $w_A(x) \geq 0$
- ▶ Integrala/suma pe întreg domeniul = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_A(x) dx = 1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} w_A(x) = 1$$

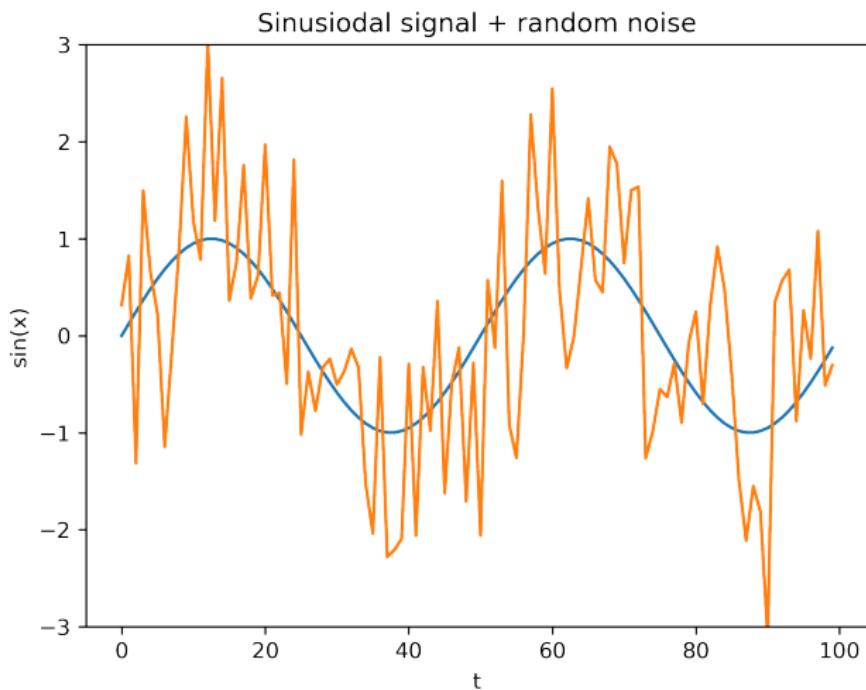
Diferite distribuții

► Semnal sinusoidal



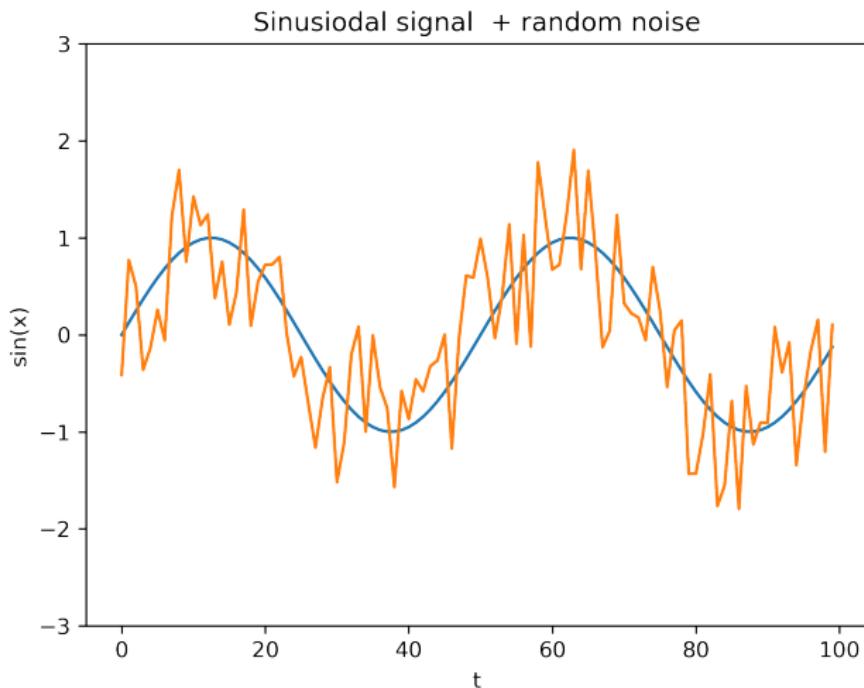
Diferite distribuții

- ▶ Sinus + zgomot (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)



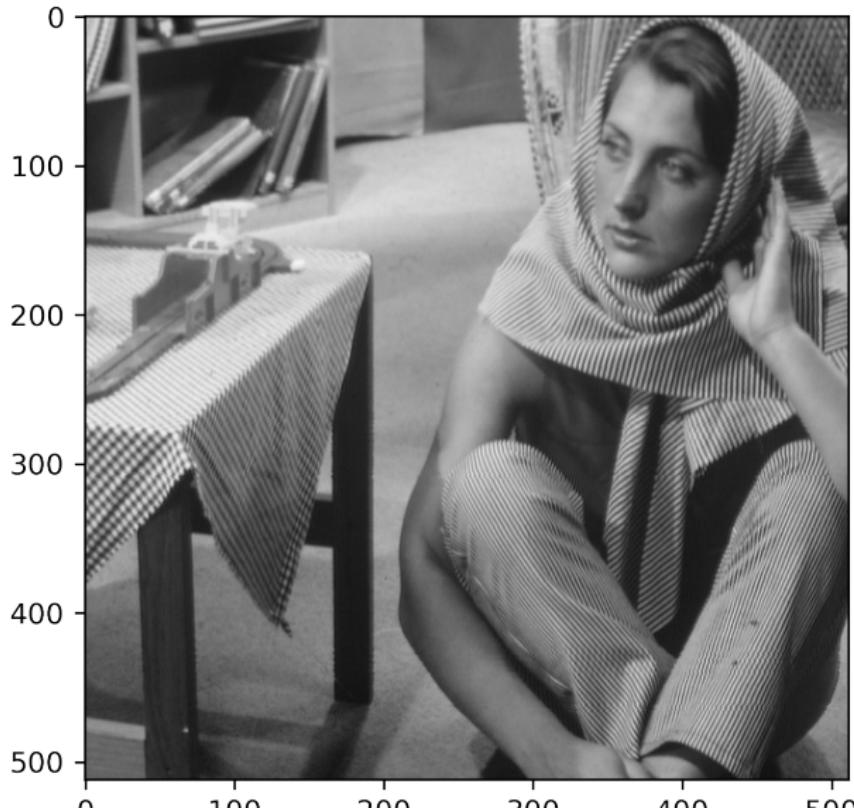
Diferite distribuții

- ▶ Sinus + zgomot (uniform $\mathcal{U}[-1, 1]$)
- ▶ Ce diferă? Tipul distribuției



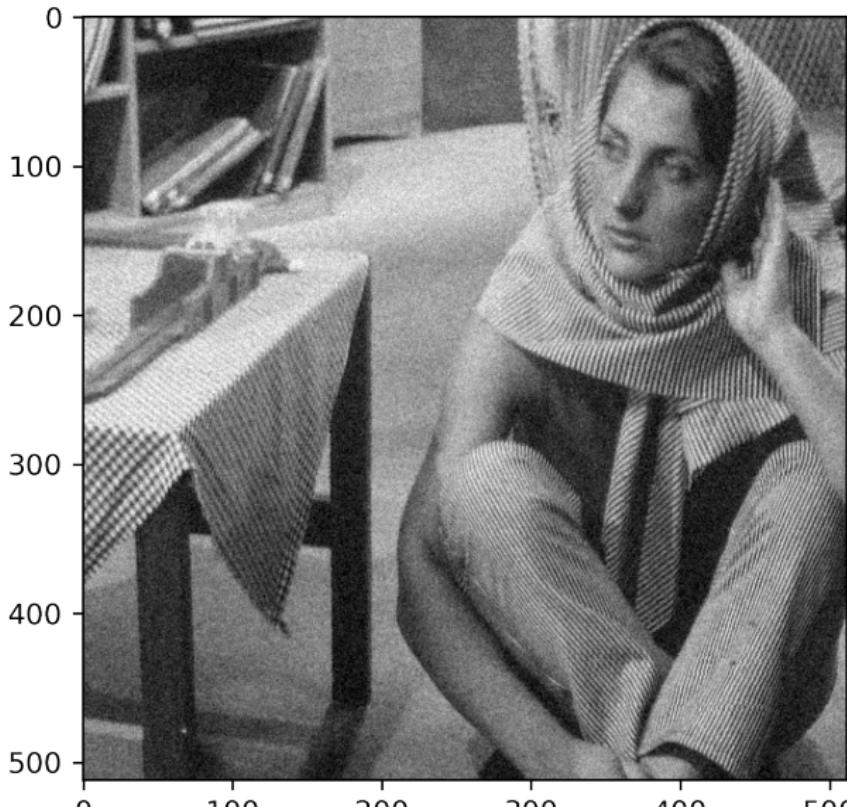
Diferite distribuții

- ▶ Imagine originală



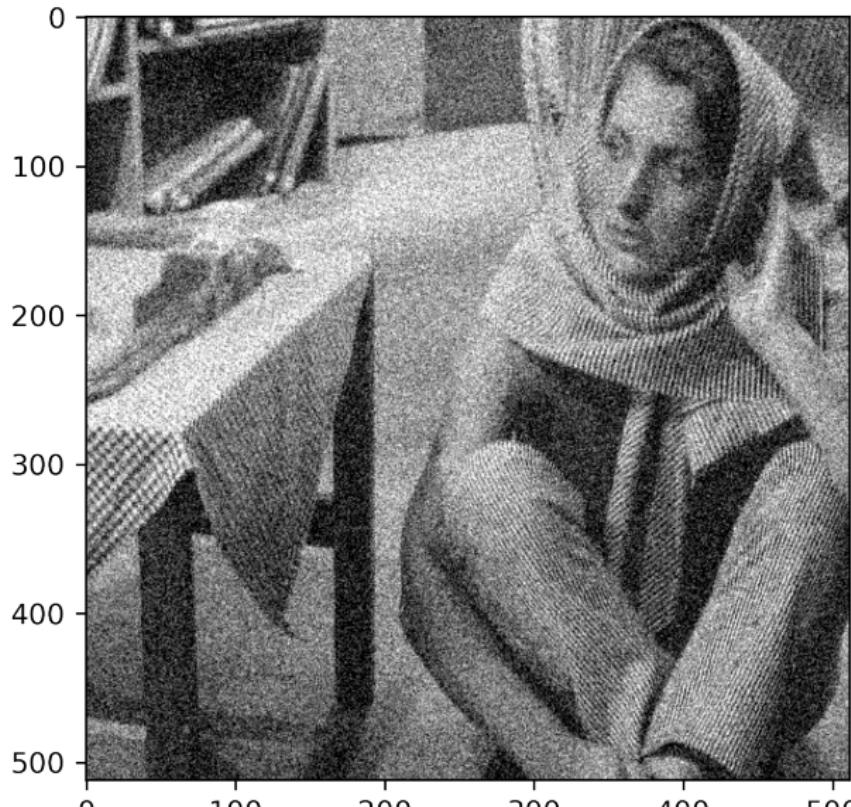
Diferite distribuții

- ▶ Imagine + zgomot (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)



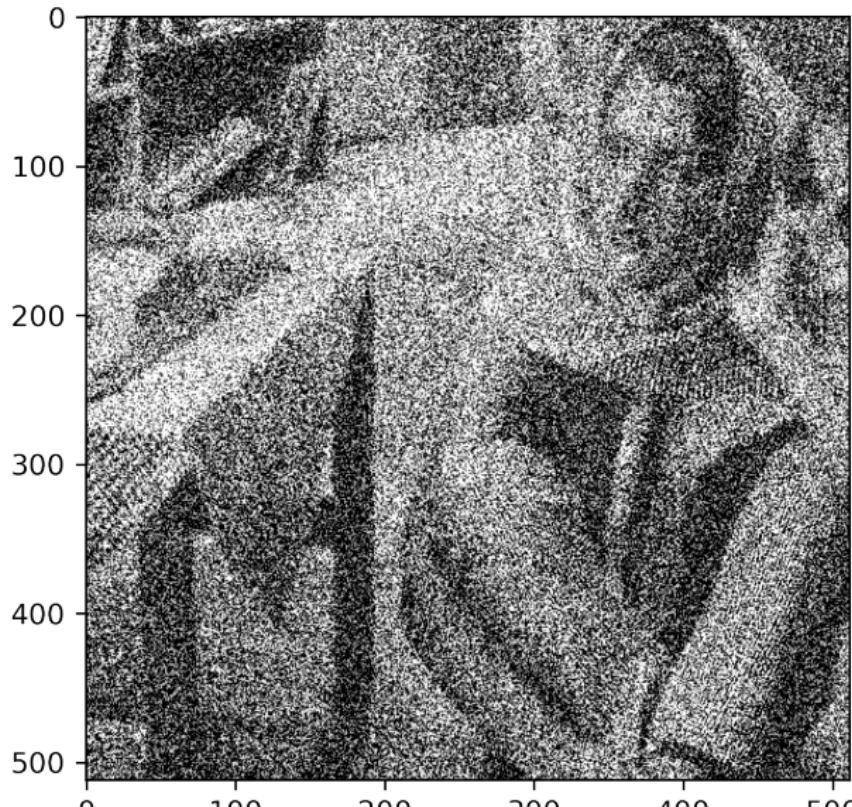
Diferite distribuții

- ▶ Imagine + zgomot mai mare (normal, $\mu = 0, \sigma^2 = 10$)



Diferite distribuții

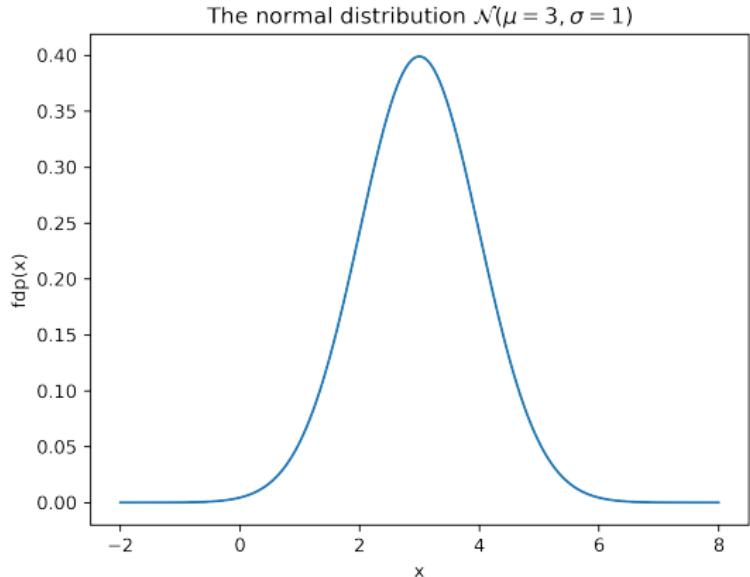
- ▶ Imagine + zgomot (uniform, $\mathcal{U}[-5, 5]$)



Distribuția normală

- Densitatea de probabilitate:

$$w_A(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Distribuția normală

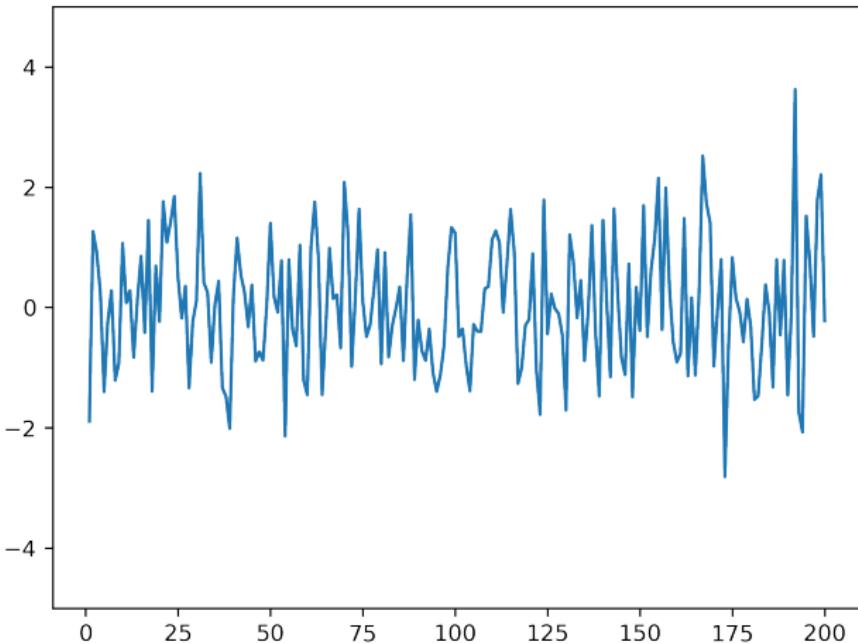
- ▶ Are doi parametri:
 - ▶ **Media** μ = “centrul” funcției
 - ▶ **Deviatia standard** σ = “lățimea” funcției
 - ▶ σ mic = funcție îngustă și înaltă
 - ▶ σ mare = funcție largă și joasă
- ▶ Constanta de la începutul expresiei asigură normalizarea (faptul că integrala = 1)
- ▶ Extrem de des întâlnită în practică
- ▶ Orice valoare reală este posibilă ($w_A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)
- ▶ Se notează cu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Distribuția normală

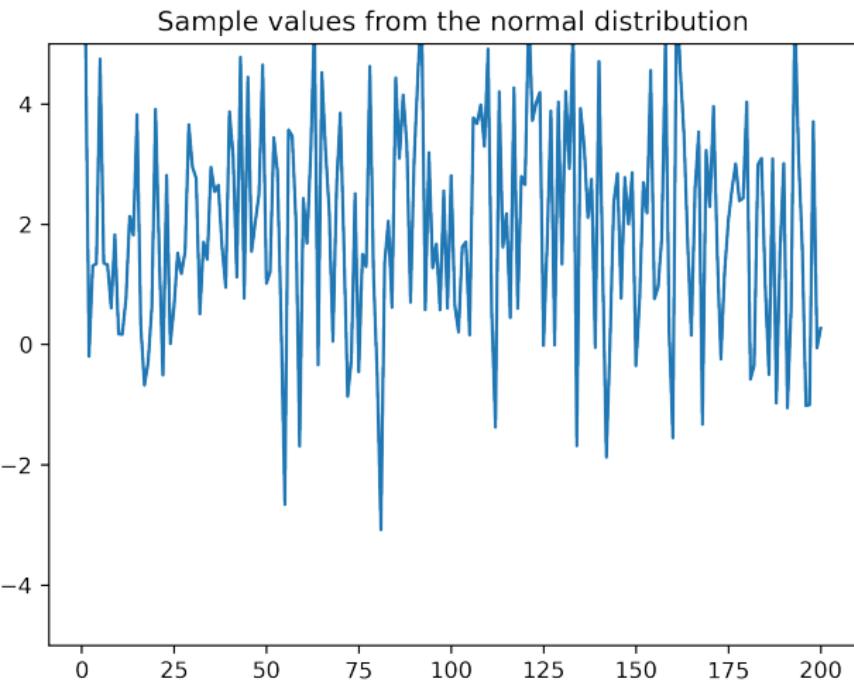
- ▶ Distribuția descrește pe măsură ce x se îndepărtează de centrul μ
 - ▶ Datorită termenului $-(x - \mu)^2$ de la exponent
 - ▶ Valorile cele mai probabile sunt în jurul lui μ ($x - \mu = 0$)
 - ▶ Valorile apropiate de μ sunt mai probabile, valorile mai depărtate de μ sunt mai puțin probabile
- ▶ Distribuția exprimă o preferință pentru valori apropiate de μ , cu probabilitate din ce în ce mai scăzută la valori mai depărtate de μ

Exemple de valori generate cu distribuția normală ($\mu=0$, $\sigma^2=1$)

Sample values from the normal distribution



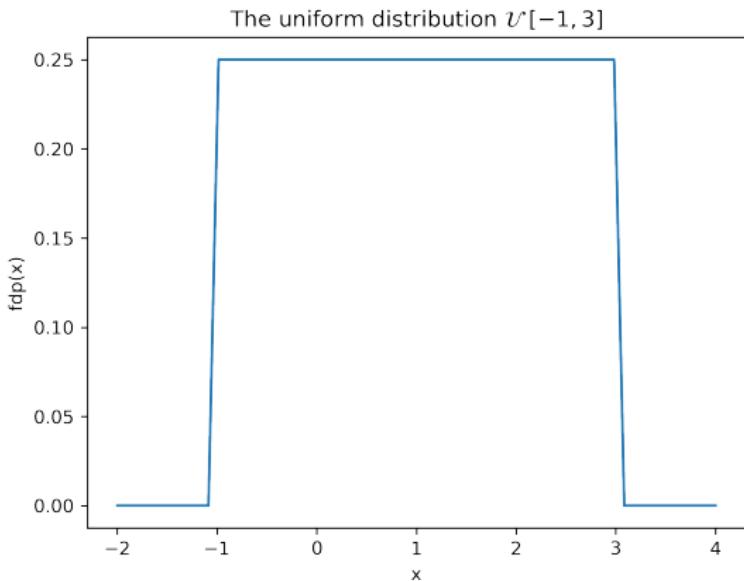
Exemple de valori generate cu distribuția normală ($\mu=2$, $\sigma^2=4$)



Distribuția uniformă

- ▶ Densitatea de probabilitate = constantă între două limite

$$w_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Distribuția uniformă

- ▶ Are doi parametri: limitele a și b ale intervalului
- ▶ “Înălțimea” funcției este $\frac{1}{b-a}$ pentru normalizare
 - ▶ pentru ca integrala (aria) să fie 1
- ▶ Sunt posibile doar valori din intervalul $[a, b]$
 - ▶ valorile din afara intervalului au probabilitatea 0
- ▶ Se notează cu $\mathcal{U}[a, b]$

Alte distribuții

- ▶ Nenumărate variante, apar în diverse aplicații

Calculul probabilității pentru distribuția normală

- ▶ Cum calculăm \int_a^b dintr-o distribuție normală?
 - ▶ Nu se poate prin formule algebrice, funcție ne-elementară
- ▶ Se folosește *the error function*:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

- ▶ Funcția de repartiție a unei distribuții normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$F_A(X) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$$

- ▶ Valorile funcției $\operatorname{erf}()$ sunt tabelate / se calculează numeric
 - ▶ de ex. pe Google, căutați $\operatorname{erf}(0.5)$
 - ▶ Alte valori folosite:
 - ▶ $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$
 - ▶ $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

Exercițiu

Exercițiu:

- ▶ Fie A o v.a. cu distribuția $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculați probabilitatea ca $A \in [2, 4]$

Suma unei constante cu o v.a.

- ▶ Fie o v.a. A
- ▶ Ce reprezintă $B = 5 + A$?

Răspuns:

- ▶ B este tot o variabilă aleatoare
- ▶ B are același tip de distribuție, dar “translată” cu 5 la dreapta

Exemplu:

- ▶ A este o v.a. cu distribuție normală $w_A(x) = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$
- ▶ Care este distribuția variabilei $B = 5 + A$?
- ▶ Răspuns: $w_B(x) = \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 2)$

V.a. ca funcții de alte v.a

- ▶ O funcție aplicată unei v.a. produce o altă v.a.
- ▶ Exemple: dacă A este o v.a. distribuită $\mathcal{U}[0, 10]$, atunci
 - ▶ $B = 5 + A$ este o altă v.a., distribuită $\mathcal{U}[5, 15]$
 - ▶ $C = A^2$ este de asemenea o v.a.
 - ▶ $D = \cos(A)$ este de asemenea o v.a.
- ▶ Motivatie: dacă A este aleatoare, și valorile B, C, D sunt aleatoare
- ▶ A, B, C, D nu sunt independente
 - ▶ O anumită valoare a uneia implică automat și valoarea celorlalte

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Fie un sistem cu două v.a. continue A și B
- ▶ Care este probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea în jurul (x, y) ?
- ▶ Distribuția valorilor perechii (A, B) este descrisă de:
 - ▶ Densitatea de probabilitate comună $w_{AB}(x, y)$
 - ▶ Funcția de repartiție comună $F_{AB}(x, y)$

Sisteme de mai multe variabile aleatoare

- ▶ Funcția de repartiție comună:

$$F_{AB}(x, y) = P_{AB} \{A \leq x \cap B \leq y\}$$

- ▶ Densitatea de probabilitate comună:

$$w_{AB}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{AB}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- ▶ FDP comună descrie probabilitatea ca perechea (A, B) să aibă valoarea într-o vecinătate a (x, y)
- ▶ Similar pentru v.a discrete:

$$w_{AB}(x, y) = P \{A = x \cap B = y\}$$

Variabile independente

- ▶ Două v.a. A și B sunt **independente** dacă valoarea uneia nu influențează în nici un fel valoarea celeilalte
- ▶ Pentru v.a. independente, probabilitatea ca A să fie în jurul lui x și B în jurul lui y este produsul celor două probabilități

$$w_{AB}(x, y) = w_A(x) \cdot w_B(y)$$

- ▶ Valabilă pentru FR / FDP / FMP, v.a. continue sau aleatoare etc.
- ▶ Similar pentru mai mult de două v.a.

Variabile independente

Exercițiu:

- ▶ Calculați probabilitatea ca trei v.a. X , Y și Z i.i.d. $\mathcal{N}(-1, 1)$ să fie toate pozitive
 - ▶ **i.i.d** = “independente și identic distribuite”

Distribuția normală 2D

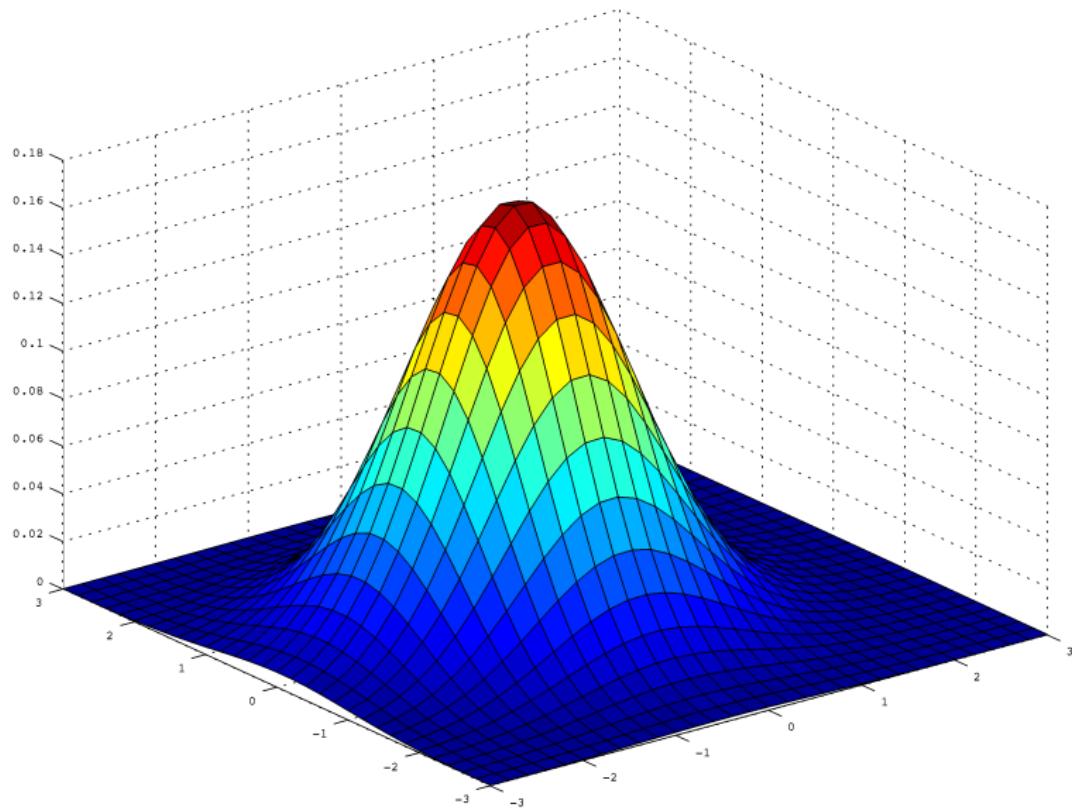
- ▶ Distribuția normală 2D pentru o pereche de variabile aleatoare

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ este:}$$

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} e^{(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))}$$

- ▶ Ea este caracterizată de o medie $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$, care stabilește centrul, și o matrice de covarianță $\boldsymbol{\Sigma}$ cu dimensiunea 2×2 care stabilește forma elipsoidală

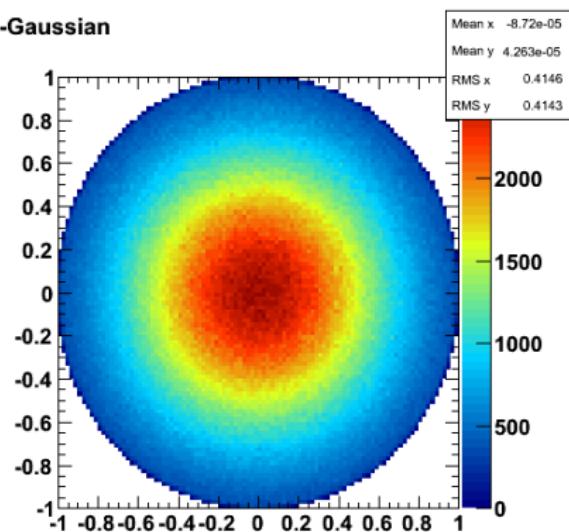
Distribuția normală 2D



Distribuția normală 2D - vedere de sus

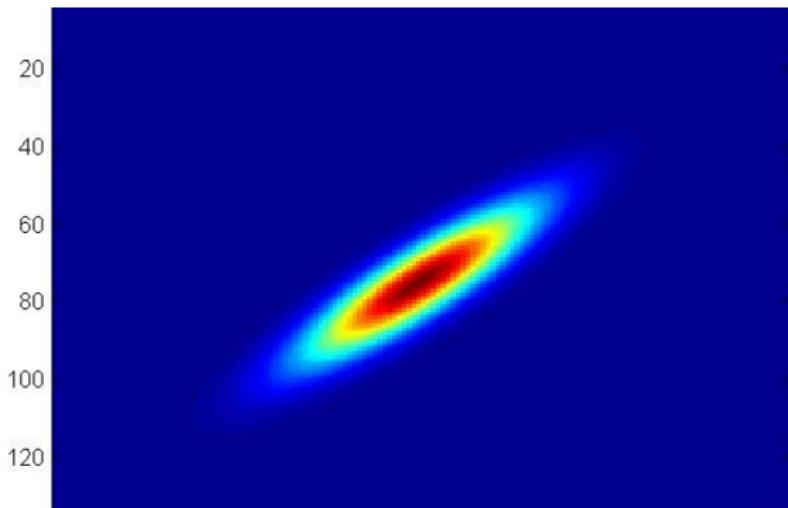
- ▶ Vedere de sus
- ▶ Aici, $\mu = (0, 0)$
- ▶ Probabilitatea scade pe măsură ce crește distanța față de centru, în elipse concentrice (simetric)

2D-Gaussian



Altă distribuție normală 2D

- ▶ Vedere de sus
- ▶ Forma elipsoidală (orientare, alungire) este dată de matricea de covariantă



Exemplu: traectorii

Traекторii ale vehiculelor în intersecția Podu Roș

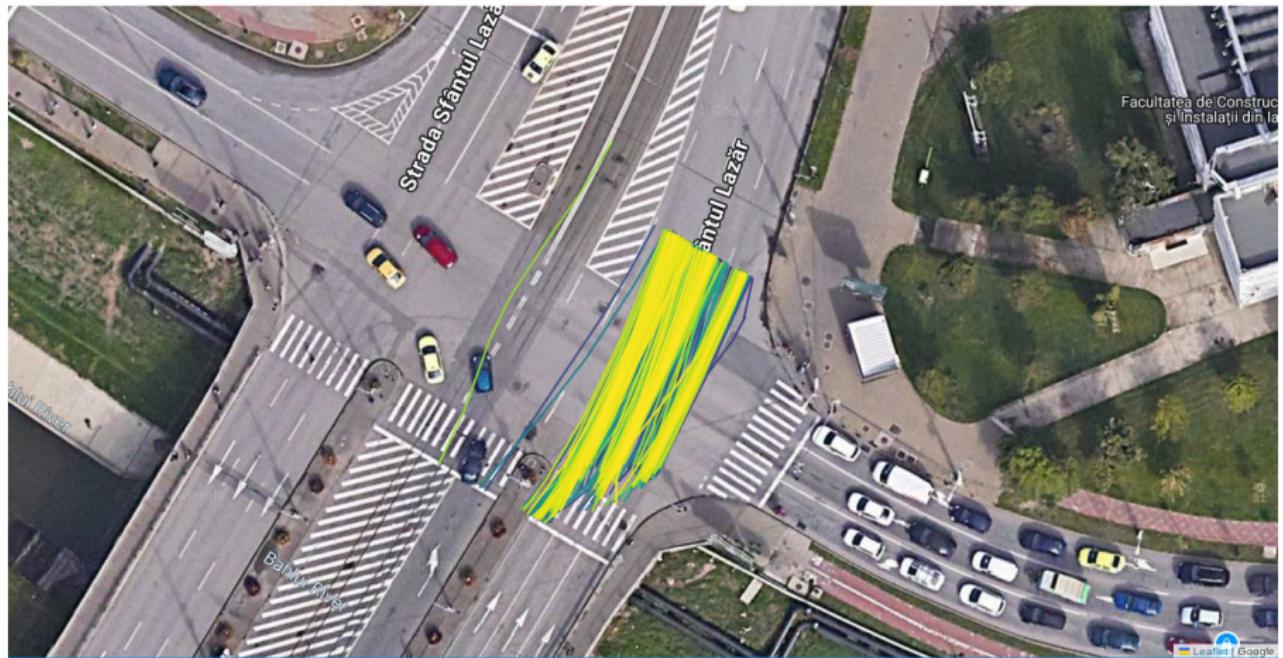
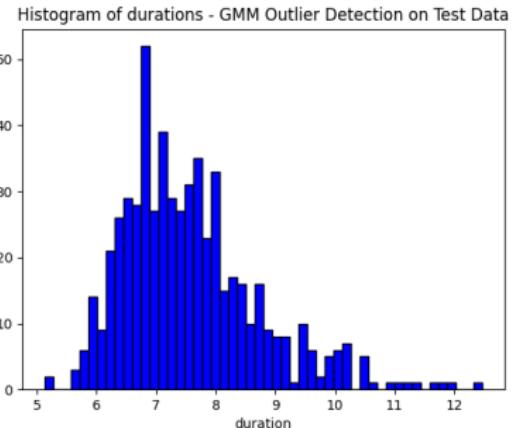
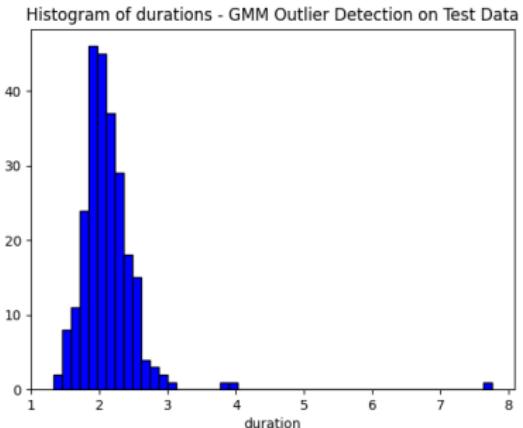


Figure 1: Traекторii ale vehiculelor, In Podu Ros -> Out Palat

Exemplu: trajectorii

Distribuția duratei traectoriilor

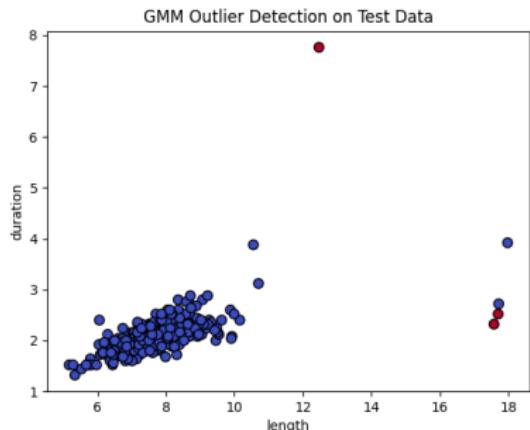
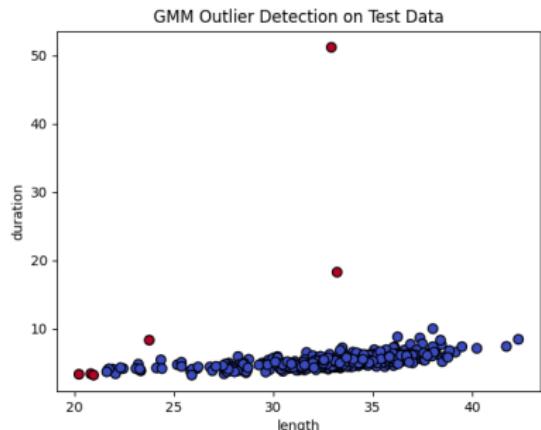
- ▶ a. In Splai -> Out Palat
- ▶ b. In Splai -> Out Podu Ros



Exemplu: traectorii

Distribuția (lungime, durată) pentru traectorii

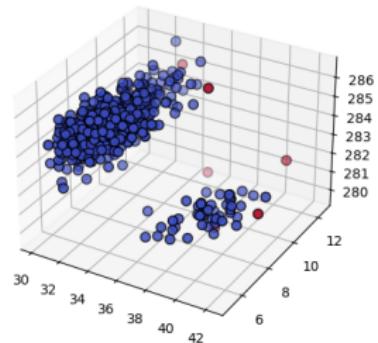
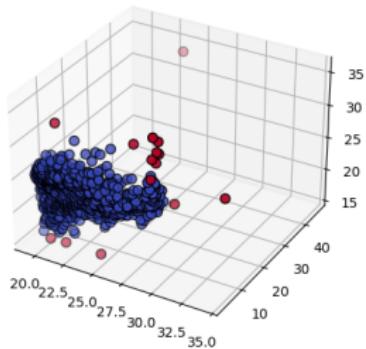
- ▶ a. In Podu Ros -> Out Splai
- ▶ b. In Splai -> Out Podu Ros



Exemplu: trajectorii

Distribuția (lungime, durată, curbură) pentru trajectorii

- a. In Podu Ros -> Out Palat
- b. In Splai -> Out Podu Ros



Medii statistice

- ▶ V.a. sunt caracterizate prin medii statistice ("momente")
- ▶ **Valoarea medie** (momentul de ordin 1)
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\bar{A} = E\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\bar{A} = E\{A\} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_A(x)$$

- ▶ (Exemplu: entropia $H(X)$ = valoarea medie a informației)
- ▶ Notație ușuală: μ

Ce înseamnă valoarea medie

- ▶ Ce înseamnă, practic, valoarea medie a unei variabile aleatoare?
 - ▶ Dacă avem $N \rightarrow \infty$ valori aleatoare conform distribuției respective, valoarea medie = media tuturor acestor valori;
 - ▶ Dacă trebuie să prezicem valoarea unei variabile aleatoare X , și plătim un cost proporțional cu pătratul erorii pe care o facem, $(u - X)^2$, valoarea medie μ este cea mai bună alegere, întrucât minimizează costul global:

$$\mu = \arg \min_u \int_{-\infty}^{\infty} (u - x)^2 \cdot w(x) dx$$

- ▶ Demonstrație: la tablă: derivare, derivata = 0

Ce înseamna valoarea medie

- ▶ Valorile care au probabilitate ridicată “trag” valoarea medie înspre ele
- ▶ Pentru distribuții cu formă simetrică (de ex. distribuția normală),
valoarea medie = valoarea centrală a funcției
 - ▶ Demonstrație: ambele laturi ale funcției “trag” valoare medie înspre ele
în mod egal, valoarea medie rămâne la mijloc
- ▶ Pentru distribuția normală, $\bar{X} = \mu$
- ▶ Pentru distribuția uniformă $\mathcal{U}[a, b]$, $\bar{X} = \frac{a+b}{2}$ (mijlocul intervalului)

Proprietățile valorii medii

- ▶ Calculul valorii medii este o operație **liniară**
 - ▶ pentru că, la bază, integrala / suma este o operație liniară
- ▶ Pentru două variabile aleatoare A și B (independente):
- ▶ Liniaritate

$$E\{c_1A + c_2B\} = c_1E\{A\} + c_2E\{B\}$$

- ▶ Sau:

$$E\{cA\} = cE\{A\}, \forall c \in \mathbb{R}$$

$$E\{A + B\} = E\{A\} + E\{B\}$$

- ▶ Fără demonstrație

Valoarea pătratică medie

- ▶ Valoarea pătratică medie = valoarea medie a pătratelor valorilor
- ▶ Momentul de ordin 2
- ▶ Pentru v.a. continue:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ Pentru v.a. discrete:

$$\overline{A^2} = E\{A^2\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: media pătratelor = energia medie a unui semnal

Varianță

- ▶ Varianță = valoarea pătratică medie a abaterii față de valoarea medie :)
- ▶ V.a. continue:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x) dx$$

- ▶ V.a. discrete:

$$\sigma^2 = \overline{\{A - \mu\}^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot w_A(x)$$

- ▶ Interpretare: cât de mult variază valorile în jurul mediei
 - ▶ σ^2 = mare: abateri mari față de medie
 - ▶ σ^2 = mic: valori concentrate în jurul mediei

Legătura între cele trei mărimi

- ▶ Legătura între medie, valoarea pătratică medie și varianță:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{(A - \mu)^2} \\&= \overline{A^2 - 2 \cdot A \cdot \mu + \mu^2} \\&= \overline{A^2} - 2\mu\overline{A} + \mu^2 \\&= \overline{A^2} - \mu^2\end{aligned}$$

Suma variabilelor aleatoare

- ▶ Suma a două sau mai multe v.a. **independente** este tot o v.a.
- ▶ Distribuția ei = **convoluția** distribuțiilor v.a. componente
- ▶ Dacă $C = A + B$, atunci:

$$w_C(x) = w_A(x) \star w_B(x)$$

- ▶ Caz particular: dacă A și B sunt v.a. normale, cu $\mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ și $\mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$, atunci:
 - ▶ C este tot o v.a. cu distribuție normală, $\mathcal{N}(\mu_C, \sigma_C^2)$, având:
 - ▶ media = suma mediilor: $\mu_C = \mu_A + \mu_B$
 - ▶ varianța = suma varianțelor: $\sigma_C^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2$

II.2 Procese aleatoare

Procese aleatoare

- ▶ Un **proces aleator** = o secvență de variabile aleatoare indexate (înșiruite) în timp
- ▶ Proces aleator **în timp discret** $f[n]$ = o secvență de v.a. la momente de timp discrete
 - ▶ ex: o secvență de 50 aruncări de zar, cotația zilnică a unor acțiuni la bursă
- ▶ Proces aleator **în timp continuu** $f(t)$ = o secvență de v.a. la orice moment de timp
 - ▶ ex: un semnal tip zgomot de tensiune
- ▶ Fiecare eșantion dintr-un proces aleator este o v.a. de sine stătătoare
 - ▶ ex.: $f(t_0)$ = valoarea la momentul t_0 este o v.a.

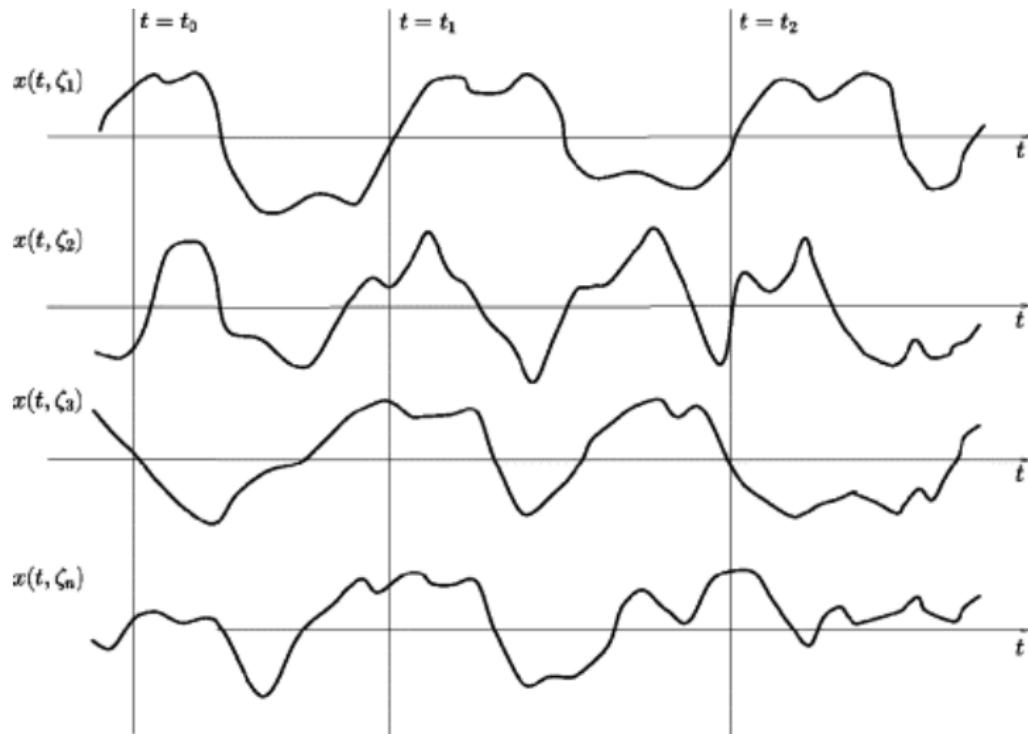
Realizări ale proceselor aleatoare

- ▶ **Realizare** a unui p.a. = o secvență particulară de realizări ale v.a. componente
 - ▶ ex: un anume semnal de zgomot măsurat cu un osciloscop; am obținut o anume realizare, dar am fi putut obține orice altă realizare
- ▶ Notația uzuală: $f^{(k)}[n]$ sau $f^{(k)}(t)$
 - ▶ k indică realizarea particulară care se consideră
 - ▶ t sau n este timpul
- ▶ Când considerăm un p.a., considerăm întregul set de realizări posibile
 - ▶ la fel ca atunci când considerăm o v.a.

Proces aleator = un fenomen 2-D

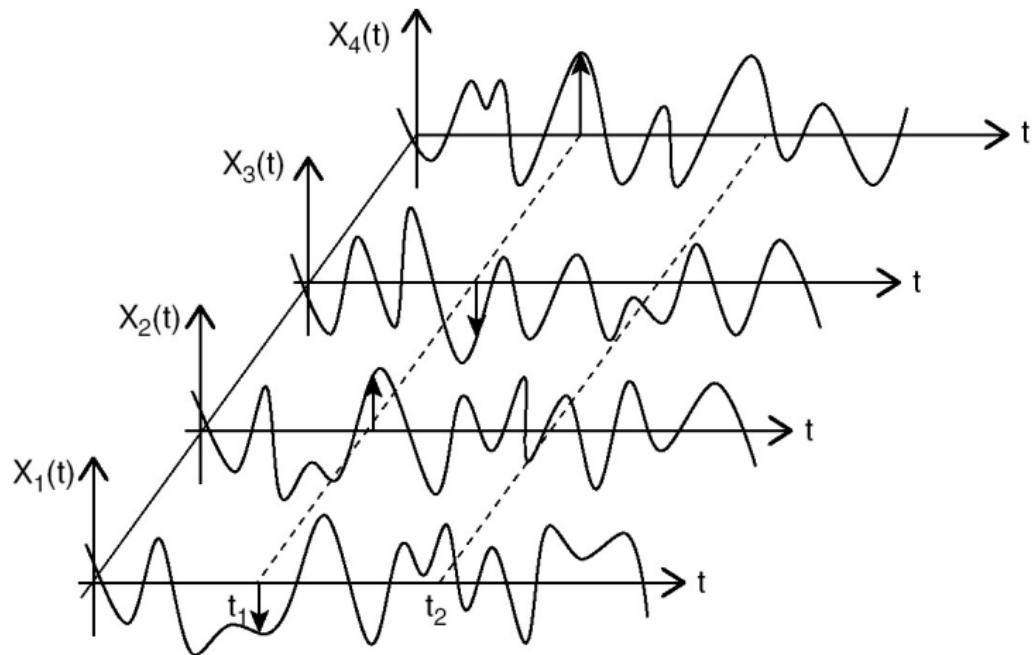
- ▶ Un proces aleator trebuie vizualizat în două dimensiuni:
 - ▶ $f^{(k)}[n]$ sau $f^{(k)}(t)$ depind de două variabile:
 - ▶ k = realizarea
 - ▶ t sau n = timpul

Proces aleator = un fenomen 2-D



- ▶ sursa: “Information-Based Inversion and Processing with Applications”
Edited by Tadeusz J. Ulrych, Mauricio D. Sacchi, Volume 36,

Proces aleator = un fenomen 2-D



- ▶ sursa: Razdolsky, L. (2014). Random Processes. In Probability-Based Structural Fire Load (pp. 89-136). Cambridge: Cambridge University Press

Proces aleator = un fenomen 2-D

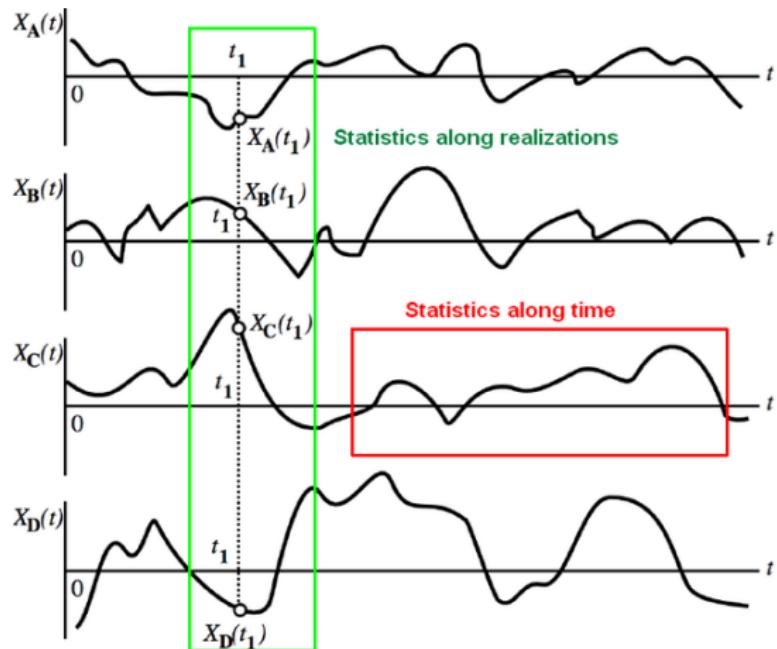


- ▶ sursa: <https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process>

Două feluri de valori medii

- ▶ Procesele aleatoare au două tipuri de valori medii:
 - ▶ Valori medii **statistice** = calculate la un timp t sau n fixat, de-a lungul tuturor realizărilor posibile
 - ▶ Valori medii **temporale** = calculate pentru o realizare k fixată, de-a lungul timpului

Două feluri de valori medii



- ▶ sursa: <https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-a-stationary-ergodic-and-a-stationary-non-ergodic-process>

Distribuții de ordin 1 ale proceselor aleatoare

- ▶ Fiecare eșantion $f(t_1)$ dintr-un proces aleator este o v.a.
 - ▶ descris de o **distribuție de ordin 1**
 - ▶ are FR $F_1(x; t_1)$
 - ▶ are FDP / FMP $w_1(x; t_1) = \frac{dF_1(x; t_1)}{dx}$
 - ▶ distribuția depinde de momentul t_1
- ▶ Un eșantion la alt moment t_2 este o v.a. diferită, cu funcții posibil diferite
 - ▶ altă FR $F_1(x; t_2)$
 - ▶ altă FDP / FMP $w_2(x; t_2) = \frac{dF_1(x; t_2)}{dx}$
- ▶ Aceste funcții descriu distribuția valorilor unui eșantion
- ▶ Indicele w_1 arată că considerăm o singură v.a. din proces (distribuții de ordin 1-)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin 2

- ▶ O pereche de v.a. $f(t_1)$ și $f(t_2)$ formează un sistem de 2 v.a.:
 - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin 2**
 - ▶ au FR comună $F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)$
 - ▶ au FDP / FMP comună $w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_i, x_j; t_1, t_2)}{\partial x_i \partial x_j}$
 - ▶ distribuția depinde de momentele t_1 și t_2
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile perechilor (distribuții de ordin 2)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Distribuții de ordin n

- ▶ Generalizare la un grup de n eșantioane dintr-un p.a.
- ▶ Un set de n v.a. $f(t_1), \dots, f(t_n)$ dintr-un proces aleator $f(t)$:
 - ▶ sunt descrise de o **distribuție de ordin n**
 - ▶ au FR comună $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$
 - ▶ au FDP / FMP comună $w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^2 F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$
 - ▶ depind de momentele de timp t_1, t_2, \dots, t_n
- ▶ Aceste funcții descriu cum sunt distribuite valorile seturilor de n eșantioane (*distribuții de ordin n*)
- ▶ Similar pentru p.a. discrete

Medii statistice

Procesele aleatoare sunt caracterizate de medii **statistice** și **temporale**

Pentru procese continue:

1. Valoarea medie

$$\overline{f(t_1)} = \mu(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1) dx$$

2. Valoarea pătratică medie

$$\overline{f^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

3. Varianța

$$\sigma^2(t_1) = \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1) dx$$

- ▶ Legătura între aceste trei mărimi:

$$\begin{aligned}\sigma^2(t_1) &= \overline{\{f(t_1) - \mu(t_1)\}^2} \\ &= \overline{f(t_1)^2} - 2\overline{f(t_1)\mu(t_1)} + \overline{\mu(t_1)^2} \\ &= \overline{f^2(t_1)} - \mu(t_1)^2\end{aligned}$$

- ▶ Observații:

- ▶ aceste trei valori sunt calculate pentru toate realizările, la momentul t_1
- ▶ ele caracterizează doar eșantionul de la momentul t_1
- ▶ la alt moment de timp t_2 , v.a. $f(t_2)$ este diferită, și valorile medii pot dифeiri

Medii statistice - autocorelația

Medii statistice care caracterizează **o pereche** de eșantioane:

4. Funcția de autocorelație

$$R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)f(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

5. Funcția de corelație (pentru două procese aleatoare diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f(t_1)g(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

- ▶ Observații:
 - ▶ aceste funcții pot fi diferențiate pentru perechi de valori luate la momente diferențiate (t_1, t_2)

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește \int cu \sum , și notația $f(t)$ cu $f[t]$:

1. $\overline{f[t_1]} = \mu(t_1) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot w_1(x; t_1)$
2. $\overline{f^2[t_1]} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w_1(x; t_1)$
3. $\sigma^2(t_1) = \overline{(f[t_1] - \mu(t_1))^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu(t_1))^2 \cdot w_1(x; t_1)$
4. $R_{ff}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]f[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 x_2 w_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$
5. $R_{fg}(t_1, t_2) = \overline{f[t_1]g[t_2]} = \sum_{x_1=-\infty}^{\infty} \sum_{x_2=-\infty}^{\infty} x_1 y_2 w_2(x_1, y_2; t_1, t_2)$

Medii temporale

- ▶ Dacă avem acces doar la o singură realizare $f^{(k)}(t)$ a procesului?
- ▶ Calculăm valorile medii **pentru o singură realizare $f^{(k)}(t)$, de-a lungul timpului**

Medii temporale

Medii temporale pentru procese aleatoare continue:

1. Valoarea medie temporală

$$\overline{f^{(k)}(t)} = \mu^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f^{(k)}(t) dt$$

2. Valoarea medie pătratică temporală

$$\overline{[f^{(k)}(t)]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f^{(k)}(t)]^2 dt$$

Varianța temporală

3. Varianța temporală

$$\sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}(t) - \mu^{(k)}\}^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f^{(k)}(t) - \mu^{(k)})^2 dt$$

- ▶ Relația dintre cele trei mărimi:

$$\sigma^2 = \overline{[f^{(k)}(t)]^2} - [\mu^{(k)}]^2$$

- ▶ Observație:
 - ▶ aceste valori nu mai depind de timpul t

Autocorelația temporală

4. Funcția de autocorelație temporală

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)f^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

5. Funcția de corelație temporală (pentru două procese diferite $f(t)$ și $g(t)$)

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t_1 + t)g^{(k)}(t_2 + t)dt \end{aligned}$$

Procese aleatoare discrete

Pentru **procese aleatoare discrete**, se înlocuiește \int cu \sum , T cu N , și se împarte la $2N + 1$ în loc de $2T$

$$1. \overline{f^{(k)}[t]} = \mu^{(k)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]$$

$$2. \overline{[f^{(k)}[t]]^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t])^2$$

$$3. \sigma^2 = \overline{\{f^{(k)}[t] - \mu^{[k]}\}^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N (f^{(k)}[t] - \mu^{(k)})^2$$

Procese aleatoare discrete

4. Autocorelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{ff}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t] f^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

5. Corelația temporală:

$$\begin{aligned} R_{fg}(t_1, t_2) &= \overline{f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t_1 + t] g^{(k)}[t_2 + t] \end{aligned}$$

Realizări de lungime finită

- ▶ E posibil să avem o realizare de **lungime finită** (de ex. un vector cu 1000 de eșantioane dintr-o realizare a unui p.a.)
- ▶ Cum calculăm mediile temporale?
- ▶ Se fac sumele/integralele de la $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$ în loc de la $-\infty$ la ∞
- ▶ Exemplu: calculați mediile temporale pentru realizarea de lungime finită

$$\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$$

Medii statistice și temporale

- ▶ Mediile statistice sunt, de obicei, cele de dorit
 - ▶ dar necesită cunoașterea distribuțiilor $w(x)$, care în practică sunt rareori cunoscute
- ▶ În practică, de obicei avem acces doar la o singură realizare, obținută printr-o măsurătoare
 - ▶ deci putem calcula doar mediile temporale pe acea realizare
- ▶ Din fericire, în multe cazuri mediile statistice și temporale sunt **identice** ("ergodicitate")

Procese aleatoare staționare

- ▶ Până acum, am considerat că mediile statistice depind de timp
 - ▶ pot fi diferite pentru un eșantion de la t_1 și de la t_2
- ▶ Proces aleator **staționar** = dacă mediile statistice rămân aceleasi la modificarea originii timpului (întârzierea semnalului)
- ▶ Altfel spus: distribuțiile (FDP/FMP) eșantioanelor rămân identice la modificarea originii timpului

$$w_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

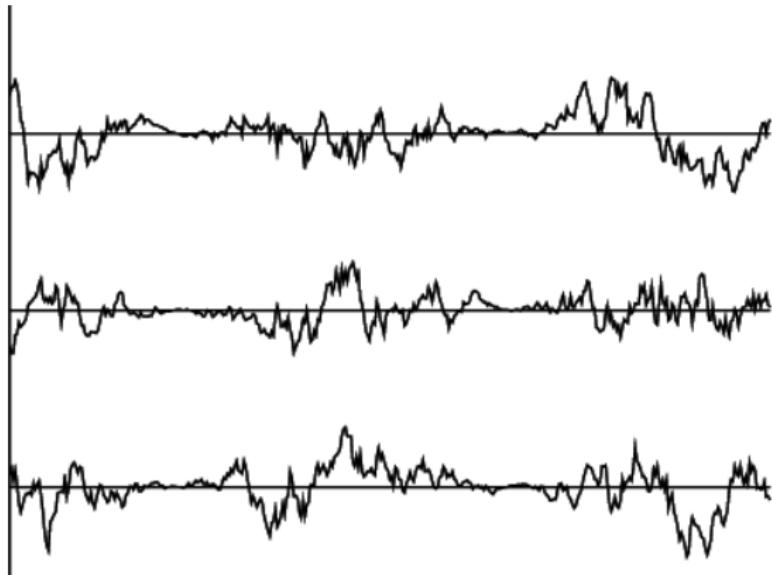
- ▶ Practic, pentru a fi staționar trebuie ca **toate mediile statistice să nu mai depindă de timp t**

Staționar în sens strict sau larg

- ▶ Proces aleator **staționar în sens strict**:
 - ▶ relația e valabilă pentru distribuțiile de orice ordin n
 - ▶ valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța, autocorelația și **toate celelalte** statistici de ordin superior nu depind de originea timpului t
- ▶ Proces aleator **staționar în sens larg**:
 - ▶ relația e valabilă doar pentru distribuțiile de ordin $n = 1$ și $n = 2$ (distribuțiile unui singur eșantion, sau a două eșantioane)
 - ▶ **doar** valoarea medie, valoarea pătratică medie, varianța și autocorelația nu depind de originea timpului t , dar statisticile de ordin superior pot depinde

Procese aleatoare staționare

- ▶ Este procesul aleator schițat mai jos staționar sau nu?



- ▶ sursa: SEX, LIES & STATISTICS, Ned Wright,
<http://www.astro.ucla.edu/~wright/statistics/>

Procese aleatoare staționare

- ▶ Răspuns: ne-staționar
- ▶ Se observă că varianța nu este aceeași la toate momentele de timp

Consecințe ale stationarității

- ▶ Pentru distribuții ale unui singur eșantion (de ordin $n = 1$):

$$w_1(x_i; t_1) = w_1(x_i; t_2) = w_1(x_i)$$

- ▶ Valoarea medie, valoarea medie pătratică, varianța unui eșantion sunt **identice la orice moment de timp t**

$$\overline{f(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\overline{f^2(t)} = \text{constant}, \forall t$$

$$\sigma^2(t) = \text{constant}, \forall t$$

Consecințe ale stationarității

- ▶ Pentru distribuții ale unor perechi de eșantioane (de ordin $n = 2$):

$$w_2(x_i, x_j; t_1, t_2) = w_2(x_i, x_j; 0, t_2 - t_1) = w_2(x_i, x_2; t_2 - t_1)$$

- ▶ Funcția de autocorelație depinde doar de **diferența de timp**
 $\tau = t_2 - t_1$ dintre eșantioane

$$R_{ff}(t_1, t_2) = R_{ff}(0, t_2 - t_1) = R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$$

- ▶ Depinde doar de valoarea $\tau = t_2 - t_1 =$ diferența de timp dintre cele două eșantioane

Consecințe ale stationarității

Definiția funcției de autocorelație pentru p.a. **stationare**:

- ▶ Autocorelația statistică: formula rămâne aceeași
- ▶ Autocorelația temporală:
 - ▶ pentru p.a. continue

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^{(k)}(t)f^{(k)}(t+\tau) dt$$

- ▶ pentru p.a. discrete

$$R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{t=-N}^N f^{(k)}[t]f^{(k)}[t+\tau]$$

- ▶ lungime finită: se limitează integralele / sumele la intervalul avut la dispoziție, $\int_{t_{min}}^{t_{max}}$ sau $\sum_{t_{min}}^{t_{max}}$

Consecințe ale stationarității

- ▶ Pentru funcția de **corelație**, definiția este similară cu cea de la autocorelație de mai sus
- ▶ Corelația depinde doar de **diferența de timp** $\tau = t_2 - t_1$ dintre cele două eșantioane

$$R_{fg}(t_1, t_2) = R_{fg}(0, t_2 - t_1) = R_{fg}(\tau) = \overline{f(t)g(t + \tau)}$$

Interpretarea autocorelației

- ▶ $R_{ff}(\tau) = \overline{f(t)f(t + \tau)}$ = **media produsului a două eşantioane situate la distanță de τ**
 - ▶ ne spune dacă eşantioanele variază la fel sau nu
- ▶ Idem pentru corelație, doar că eşantioanele provin din p.a. diferite, f și g

Interpretarea autocorelației

► Exemple:

- ▶ $R_{ff}(0.5) > 0$: două eșantioane decalate cu 0.5 secunde tind să varieze în aceeași direcție (ambele pozitive, ambele negative => produsele sunt majoritar pozitive)
 - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre celălătă
- ▶ $R_{ff}(1) < 0$: două eșantioane decalate cu 1 secundă tind să varieze în direcții opuse (când unul este pozitiv, celălalt este negativ => produsele sunt majoritar negative)
 - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, se poate "ghici" ceva despre celălătă
- ▶ $R_{ff}(2) = 0$: două eșantioane decalate cu 2 secunde sunt **necorelate** (produsele sunt în medie 0, deci cele două eșantioane au la fel de multe șanse de a fi de același semn sau cu semne contrare)
 - ▶ dacă se cunoaște una dintre ele, **nu** se mai poate "ghici" ceva despre celălătă

Procese aleatoare ergodice

- ▶ În practică, avem acces la o singură realizare
- ▶ Proces aleator **ergodic** = dacă mediile temporale pe orice realizare sunt **identice cu mediile statistice**
- ▶ Ergodicitatea înseamnă:
 - ▶ Se pot calcula toate mediile pe baza unei singure realizări (oricare)
 - ▶ dar realizarea respectivă trebuie să fie foarte lungă (lungimea $\rightarrow \infty$) pentru valori precise
 - ▶ Toate realizările sunt similare unele cu altele, dpdv statistic
 - ▶ o realizare este caracteristică pentru întreg procesul aleator

Procese aleatoare ergodice

- ▶ Majoritatea proceselor aleatoare de interes sunt ergodice și staționare
 - ▶ de ex. zgomote de tensiune
- ▶ Exemplu de proces aleator **ne-ergodic**:
 - ▶ se aruncă un zar, următoarele 50 valori sunt identice cu prima valoare
 - ▶ o singură realizare nu e caracteristică pentru tot procesul

Procese aleatoare ergodice

```
int getRandomNumber()
{
    return 4; // chosen by fair dice roll.
               // guaranteed to be random.
}
```

- ▶ XKCD 221 (link aici: <https://xkcd.com/221/>)
- ▶ Se consideră toate numerele care s-ar fi putut obține în loc de 4 (1,2,3,5 sau 6)
- ▶ Care e problema aici?
 - ▶ proces aleator staționar sau ne-staționar?
 - ▶ proces aleator ergodic sau ne-ergodic?

I.3 Proprietăți ale autocorelației

Densitatea spectrală de putere

- ▶ **Densitatea spectrală de putere** (DSP) $S_{ff}(\omega)$ reprezintă puterea unui semnal în funcție de frecvență (f sau $\omega = 2\pi f$)
- ▶ Pentru un semnal **determinist** (ne-aleator), este dată de modului transf. Fourier la pătrat:

$$S_{ff}(\omega) = |F(\omega)|^2$$

- ▶ Puterea în banda de frecvență $[f_1, f_2]$ este $\int_{f_1}^{f_2} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ Puterea totală a procesului aleator este $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$
- ▶ DSP este o funcție măsurabilă practic:
 - ▶ poate fi determinată experimental
 - ▶ este importantă în aplicații practice (ingineresci)

Densitatea spectrală de putere

- ▶ Ce reprezintă DSP pentru un proces aleator?
 - ▶ nu mai avem un singur semnal, cu o infinitate de realizări posibile
 - ▶ fiecare realizare are o transformată Fourier proprie, diferită
 - ▶ DSP fiind diferită pentru fiecare realizare în parte, este, ea însăși, un proces aleator
- ▶ **DSP a unui proces aleator** = media DSP pentru toate realizările posibile
- ▶ Are aceeași utilitate și semnificație ca în cazul unui semnal determinist, doar că **în medie** în raport cu toate realizările posibile
 - ▶ pentru o realizare particulară, DSP poate varia în jurul DSP mediei

Teorema Wiener-Hincin

Teorema Wiener-Hincin:

- ▶ Densitatea spectrală de putere = **transformata Fourier a funcției de autocorelație**

$$S_{ff}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- ▶ Fără demonstrație
- ▶ Leagă două concepte de natură diferită
 - ▶ Funcția de autocorelație: o proprietate *statistică*
 - ▶ DSP: o proprietate *fizică* (tine de energia semnalului; importantă în aplicații practice)

Zgomot alb

- ▶ **Zgomot alb** = un proces aleator cu **funcția de autocorelație egală cu un Dirac**

$$R_{ff}(\tau) = \delta(\tau)$$

- ▶ este proces aleator: orice eșantion este o variabilă aleatoare
- ▶ autocorelația este un Dirac: este 0 pentru orice $\tau \neq 0$
- ▶ oricare două eșantioane diferite ($\tau \neq 0$) au corelație zero (necorelate)
 - ▶ valorile a două eșantioane distincte nu au legătură între ele

Zgomot alb

- ▶ **Densitatea spectrală de putere** = transf. Fourier a unui Dirac = **constantă** $\forall \omega$

$$S_{ff}(\omega) = \text{constant}, \forall \omega$$

- ▶ putere constantă pentru toate frecvențele, până la $f = \infty$
- ▶ Zgomotul alb poate avea **orice distribuție** (normală, uniformă etc.)
 - ▶ termenul “zgomot alb” nu se referă la distribuția eșantioanelor, ci la faptul că valorile eșantioanele sunt necorelate

Zgomot alb de bandă limitată

- ▶ În lumea reală, pentru orice semnal puterea scade la 0 la frecvențe foarte înalte
 - ▶ pentru că puterea totală $P = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}\omega$ nu poate fi infinită
 - ▶ se numește zgomot alb **de bandă limitată**
- ▶ În acest caz, autocorelația = **aproximativ** un Dirac, dar nu chiar infinit de "subtire"
 - ▶ eșantioane foarte apropiate sunt totuși corelate
 - ▶ de ex. din cauza unor mici capacități parazite

AWGN

- ▶ **AWGN** = Additive White Gaussian Noise
 - ▶ Zgomot alb, Gaussian, aditiv
 - ▶ tipul/modelul de zgomot cel mai frecvent întâlnit în aplicații
- ▶ Înseamnă:
 - ▶ **zgomot**: este un proces aleator (fiecare eșantion este aleator, fiecare realizare este diferită)
 - ▶ **gaussian**: eșantioanele au distribuția normală
 - ▶ **alb**: valorile eșantioanelor sunt necorelate între ele
 - ▶ **aditiv**: zgomotul se adună peste semnalul original (adică de ex. nu se multiplică cu acesta)

Examen 2020-2021

- ▶ Până aici s-a făcut în 2020-2021. Celealte slide-uri din acest fișier nu se cer.

Proprietăile funcției de autocorelație

1. Este o funcție pară

$$R_{ff}(\tau) = R_{ff}(-\tau)$$

► Demonstrație: Schimbare de variabilă în definiție

2. La infinit, tinde la o valoare constantă

$$R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2 = const$$

► Dem.: două eșantioane la un interval ∞ sunt necesar independente

3. Are valoarea maximă în 0

$$R_{ff}(0) \geq R_{ff}(\tau)$$

► Dem.: se pornește de la $\overline{(f(t) - f(t + \tau))^2} \geq 0$

► Interpretare: eșantioane diferite mai pot varia diferit, dar un eșantion variază întotdeauna identic cu sine însuși

Proprietăile funcției de autocorelație

4. Valoarea în 0 = puterea procesului aleator

$$R_{ff}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega$$

- ▶ Dem.: Se pune $\tau = 0$ în transf. Fourier inversă din teorema Wiener-Hincin

5. Varianța = diferența între valoarea din 0 și cea de la ∞

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) - R_{ff}(\infty)$$

- ▶ Dem.: $R_{ff}(0) = \overline{f(t)^2}$, $R_{ff}(\infty) = \overline{f(t)}^2$

Autocorelația unui proces aleator filtrat

- ▶ Fie un proces aleator aplicat la intrarea unui sistem
 - ▶ fie în timp continuu: intrarea $x(t)$, sistemul $H(s)$, ieșirea $y(t)$
 - ▶ fie în timp discret: intrarea $x[n]$, sistemul $H(z)$, ieșirea $y[n]$
- ▶ Cum depinde autocorelația ieșirii y de cea a intrării x ?
- ▶ Se știe că y este convoluția lui x cu răspunsul la impuls h

Dezvoltare matematică

- ▶ Pentru un proces aleator în timp discret

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \overline{y[n]y[n + \tau]} \\ &= \overline{\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]x[n - k_1] \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]x[n + \tau - k_2]} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2] \overline{x[n - k_1]x[n + \tau - k_2]} \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2] \end{aligned}$$

- ▶ Din teorema Wiener-Hincin se știe că:

$$S_{ff}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-j\omega\tau}$$

Dezvoltare matematică

- Așadar

$$S_{yy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[\tau - k_1 + k_2]e^{-j\omega\tau}$$

- Schimbare de variabilă $\tau - k_1 + k_2 = u$

- rezultă $\tau = u + k_1 - k_2$

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_1]h[k_2]R_{xx}[u]e^{-j\omega(u+k_1+k_2)} \\ &= \sum_{u=-\infty}^{\infty} R_{xx}[u]e^{-j\omega u} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} h[k_1]e^{-j\omega k_1} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} h[k_2]e^{j\omega k_2} \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot H(\omega) \cdot H^*(\omega) \\ &= S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Rezultat

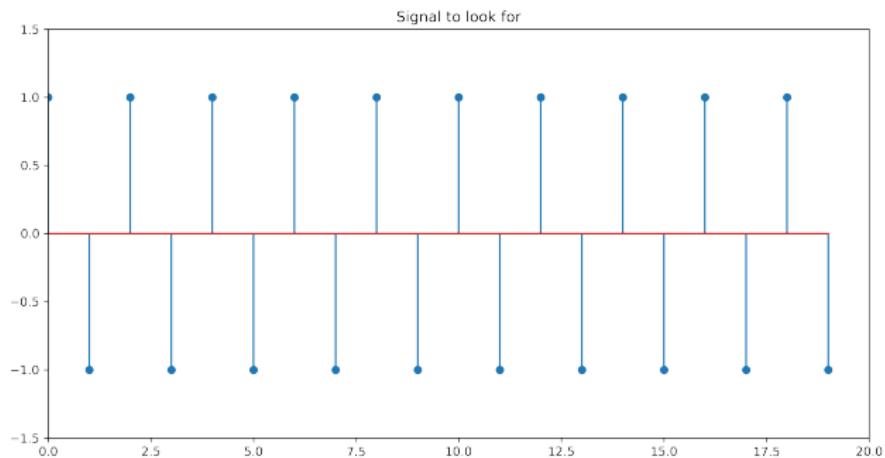
$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2$$

- ▶ DSP a lui y = DSP a lui x multiplicată cu răspunsul în amplitudine, la pătrat, al filtrului
- ▶ Relația este valabilă și pentru procese aleatoare continue

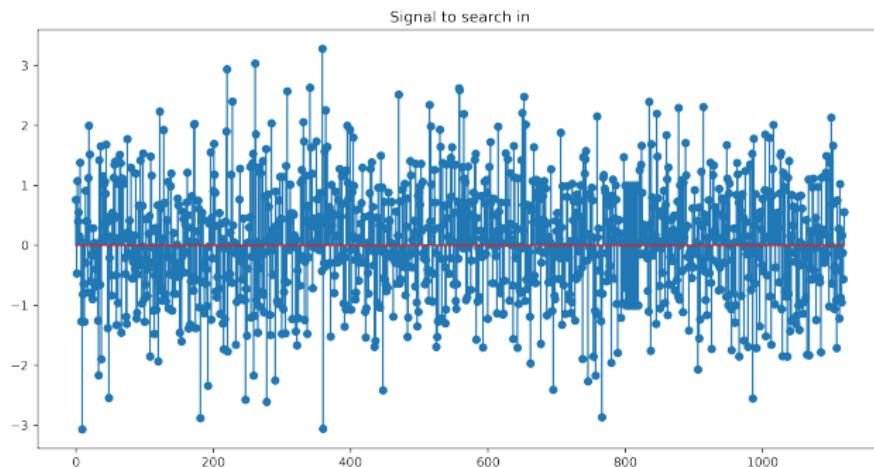
Aplicații ale (auto)corelației

- ▶ Căutarea unei anume porțiuni într-un semnal mai mare
- ▶ Corelația a două semnale = o măsura a **similarității** celor două semnale
 - ▶ Funcția de corelație măsoară similaritatea unui semnal cu toate versiunile decalate ale celuilalt
 - ▶ Exemplu numeric la tablă, semnale de lungime finită
- ▶ Corelația poate fi utilizată pentru localizare
 - ▶ Funcția de (auto)corelație are valori mari atunci când cele două semnale se potrivesc
 - ▶ Valori mari sunt atunci când valorile pozitive / negative ale semnalelor se potrivesc
 - ▶ Valori mici atunci când nu se potrivesc

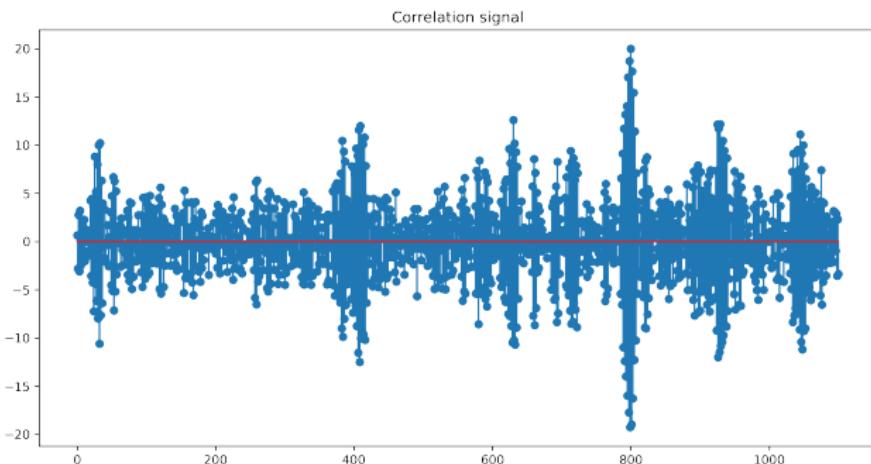
Semnalul căutat



Semnalul de dimensiuni mari



Rezultatul corelației



Identificare de sistem

- ▶ Determinarea răspunsului la impuls al unui sistem necunoscut, liniar și invariant în timp
- ▶ Se bazează pe corelația intrării cu ieșirea sistemului

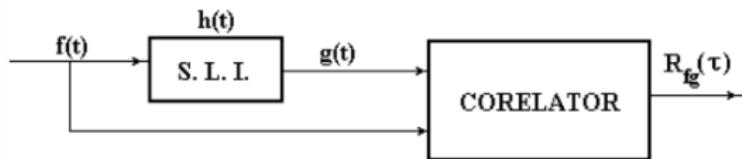


Figure 2: System identification setup

Identificare de sistem

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \overline{f[n]g[n + \tau]} \\ &= f[n] \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]f[n + \tau - k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\overline{f[n]f[n + \tau - k]} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]R_{ff}[\tau - k] \\ &= h[\tau] * R_{ff}[\tau] \end{aligned}$$

- Dacă intrarea f este **zgomot alb** cu puterea A , $R_{ff}[n] = A \cdot \delta[n]$, și

$$R_{fg}(\tau) = h[\tau] * R_{ff}[\tau] = A \cdot h[\tau] * \delta[\tau] = A \cdot h[\tau]$$

- Corelația măsurată este proporțională cu răspunsul la impuls al sistemului necunoscut