

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introdurre

- ▶ Detecția semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
 - ▶ inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)
- ▶ Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
 - ▶ semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Contextul problemei de decizie

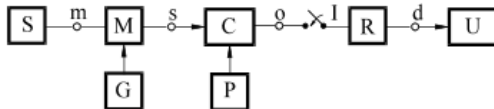


Figure 1: Schema bloc a unui sistem de comunicație

- Schema bloc a unui sistem de comunicație:
 - Sursa de informație: generează mesajele a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
 - Generator: generează semnalele diferite $s_1(t), \dots, s_n(t)$
 - Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
 - Canal: adaugă zgomot aleator
 - Eșantionare: ia eșantioane din semnalul $s_n(t)$
 - Receptor: **decide** ce mesaj a_n s-a fost recepționat
 - Utilizator: primește mesajele recuperate

Formularea problemei

- ▶ Două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- ▶ Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - ▶ pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$
- ▶ Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- ▶ Se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- ▶ **Problema deciziei:** pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?

- ▶ Transmisie de date cu diverse modulații binare:
 - ▶ nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) = \text{constant } 0 \text{ sau } 5V$)
 - ▶ modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
 - ▶ modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu frecvențe diferite
 - ▶ modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK
 - ▶ la recepție se primește un semnal afectat de zgomot, **se decide** dacă s-a primit 0 sau 1

► Detecții radar

- se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
- receptorul așteaptă posibilele reflecții ale semnalului emis și **decide**
 - nu este prezentă o reflecție -> nici un obiect
 - semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat

- ▶ Decizie între mai mult de două semnale
- ▶ Numărul de eşantioane (observații):
 - ▶ un singur eşantion
 - ▶ mai multe eşantioane
 - ▶ observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detectia semnalelor folosind 1 esantion

Formularea problemei

- ▶ Două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- ▶ Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - ▶ pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$
- ▶ Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- ▶ Se recepționează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- ▶ **Problema deciziei:** pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?

Detectia unui semnal cu 1 eşantion

- ▶ Două mesaje a_0 şi a_1 (0 logic sau 1 logic)
- ▶ Mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ şi $s_1(t)$
 - ▶ pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$
- ▶ Peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- ▶ Se recepţionează un semnal cu zgomot, $r(t) = s(t) + n(t)$
- ▶ **Decizie:** pe baza $r(t)$, care semnal a fost cel transmis?
- ▶ Cel mai simplu scenariu: la recepţie **se ia un singur eşantion** la momentul t_0 , $r = r(t_0)$, şi se decide pe baza sa

- ▶ Există **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
 - ▶ H_1 : semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- ▶ Receptorul poate lua una din **două decizii**:
 - ▶ D_0 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

Rezultate posibile

► Există 4 situații posibile:

1. **Rejecție corectă:** ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_0

► Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$

► “**True Negative**”

2. **Alarmă falsă:** ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_1

► Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$

► “**False Positive**”

3. **Pierdere:** ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_0

► Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$

► “**False Negative**”

4. **Detecție corectă:** ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_1

► Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$

► “**True Positive**”

- ▶ Terminologia are la origine aplicații radar:
 - ▶ un semnal se emite de către sursă
 - ▶ semnal recepționat = o posibilă reflecție din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
 - ▶ H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
 - ▶ H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
 - ▶ de aici numele “alarmă falsă”, “pierdere” etc.

- ▶ În general se consideră zgomot **aditiv**, **alb**, **staționar**
 - ▶ aditiv = zgomotul se adună cu semnalul
 - ▶ alb = eșantioane distincte sunt necorelate
 - ▶ staționar = are aceleași proprietăți statistice la orice moment de timp
- ▶ Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut
 - ▶ este o realizare a unui proces aleator
 - ▶ se cunoaște doar distribuția sa, nu și valorile particulare

Eșantionul preluat la recepție

- ▶ La recepție se primește semnalul $r(t) = s(t) + n(t)$
 - ▶ $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
 - ▶ $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- ▶ Valoarea eșantionului luat la momentul t_0 este $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$
 - ▶ $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
 - ▶ $n(t_0)$ este un eșantion din semnalul de zgomot

Eșantionul preluat la recepție

- ▶ Eșantionul $n(t_0)$ este o **variabilă aleatoare**
 - ▶ fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
 - ▶ v.a. continuă , intervalul valorilor posibile e continuu
- ▶ $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0) =$ o constantă + o variabilă aleatoare
 - ▶ este de asemenea o variabilă aleatoare
 - ▶ $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $s_0(t_0)$, fie cu $s_1(t_0)$
- ▶ Care e distribuția lui $r(t_0)$?
 - ▶ o constantă + o v.a. = aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Funcții de plauzibilitate

- ▶ Fie distribuția zgomotului cunoscută, $w(x)$
- ▶ Distribuția lui r este $w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_0 , distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_1 , distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- ▶ $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții condiționate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
 - ▶ “|” înseamnă “condiționat de”, “dat fiind”
 - ▶ adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
 - ▶ r reprezintă necunoscuta funcției

Funcții de plauzibilitate

Exemplu:

- ▶ Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Care e distribuția unui eșantion r , în ambele ipoteze?

Problema deciziei

Decizie pe baza celor două distribuții:

- ▶ Avem două distribuții posibile (câte una în fiecare ipoteză)
- ▶ Avem un eșantion $r = r(t_0)$, care poate proveni din oricare distribuție
- ▶ Care ipoteză **decidem** a fi adevărată?

Plauzibilitatea unui parametru

- ▶ În general, **plauzibilitatea (likelihood)** unui parametru P pe baza unor **observații** O = densitatea de probabilitate a lui O , dacă parametrul are valoarea P :

$$L(P|O) = w(O|P)$$

- ▶ În cazul nostru:
 - ▶ parametrul necunoscut = care ipoteză H este cea adevărată
 - ▶ observațiile = eșantionul r
- ▶ **Plauzibilitatea unei ipoteze H** pe baza **observației** r este:

$$L(H_0|r) = w(r|H_0)$$

$$L(H_1|r) = w(r|H_1)$$

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- ▶ **Criteriul plauzibilității maxime** (“Maximum Likelihood”): se alege ipoteza cu **cea mai mare plauzibilitate** de a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$
 - ▶ “alegem ipoteza cea mai plauzibilă”
 - ▶ “se alege ipoteza cu plauzibilitatea mai mare”

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- ▶ Se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
- ▶ Se compară **raportul de plauzibilitate** cu 1

Exemplu: zgomot gaussian

Exemplu (continuare):

- ▶ Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.
- ▶ Care e decizia luată cu criteriul ML, pentru un eșantion $r = 1.6$?
- ▶ La tablă:
 - ▶ schiță a celor două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - ▶ discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
 - ▶ discuție: care este pragul T pentru decizii

Exemplu: Frunze

Din care copac a căzut frunza?

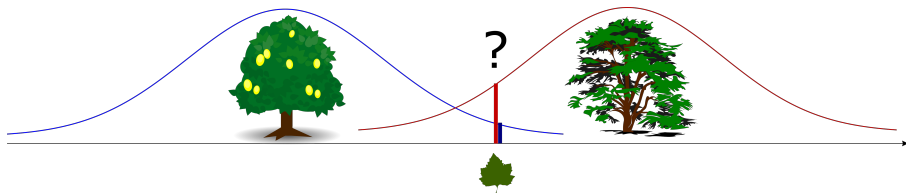


?



Exemplu: Frunze

Alegem copacul cu **plauzibilitatea maximă**:



Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 - ▶ zgomot de tip AWGN

- ▶ Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r-s_0(r_0))^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$

- ▶ Pentru distribuția normală, aplicăm **logaritmul natural**
 - ▶ logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
 - ▶ dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$

Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 0$$

- ▶ Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} |r - s_1(t_0)|$$

- ▶ Notă: $|r - A|$ = **distanța** dintre r și A
 - ▶ $|r|$ = distanța de la r la 0
- ▶ Așadar, se alege **distanța minimă** dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

Criteriul ML pentru zgomot gaussian

- ▶ Criteriul ML **pentru zgomot gaussian**: ipoteza se alege pe baza **cele mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$
 - ▶ principiul **cel mai apropiat vecin** ("*nearest neighbor*")
 - ▶ un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
 - ▶ un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** ("*minimum distance receiver*")

Etape pentru decizia pe baza ML

1. Se schițează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

Etape pentru decizia pe baza ML, zgomot gaussian

- ▶ Doar dacă zgomotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
 1. Se determină $s_0(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_0
 2. Se determină $s_1(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgomotului, în cazul ipotezei H_1
 3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege **cea mai apropiată** valoare

Decizie pe bază de prag

- ▶ Alegerea valorii celei mai apropiate = același lucru cu **compararea r cu un prag** $T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$
 - ▶ i.e. dacă cele două valori sunt 0 și 5, luăm o decizie prin compararea lui r cu 2.5
- ▶ La **criteriul ML**, pragul = **punctul de intersecție** al celor două distribuții condiționate

Exercițiu

- ▶ Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$
 - a. Scrieți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
 - b. Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
 - c. Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
 - d. Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1

Regiuni de decizie

- ▶ **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- ▶ Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- ▶ Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- ▶ Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- ▶ Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior
 - ▶ $R_0 = [-\infty, 2.5]$
 - ▶ $R_1 = [2.5, \infty]$

Plauzibilitate vs probabilitate

- ▶ Există o distincție subtilă între termenii “probabilitate” și “plauzibilitate”
- ▶ Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$ de la exemplul anterior:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Care este necunoscuta în această expresie?
 - ▶ în general, r
 - ▶ dar în cazul deciziei noastre este i , iar r este cunoscut

Terminologie: probabilitate și plauzibilitate

- ▶ Pentru aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
 - ▶ dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ, σ, H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r, x) atunci funcția o interpretăm ca densitatea de **probabilitate**
 - ▶ dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r, x), și necunoscuta este un parametru statistic (de ex. μ, σ, i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**

- ▶ Dacă zgomotul are altă distribuție?
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- ▶ Regiunile de decizie sunt date de **punctele de intersecție** ale distribuțiilor condiționate
 - ▶ Pot fi mai multe intersecții, în general, deci mai multe praguri

- ▶ Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1 ?
- ▶ Similar:
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege **cea mai înaltă funcție** $w(r|H_i)$ în punctul r dat

- ▶ Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?
- ▶ **Nu contează forma** semnalelor
- ▶ Tot ce contează sunt **valorile celor două semnale la momentul de eșantionare** t_0 :
 - ▶ $s_0(t_0)$
 - ▶ $s_1(t_0)$

- ▶ Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- ▶ Se extinde raționamentul la n ipoteze
 - ▶ Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots, s_{n-1}(t)$
 - ▶ Avem n valori diferite $s_0(t_0), \dots, s_{n-1}(t_0)$
 - ▶ Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
 - ▶ Se alege distribuția $w(r|H_i)$ **cea mai înaltă** pentru $r = r(t_0)$ dat

- ▶ Dacă se iau mai multe eşantioane din semnale?
- ▶ Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

Detecții succesive

- ▶ Într-o comunicație binară, fiecare detecție/decizie produce valoarea unui bit (mesaj)
- ▶ Se repetă o altă detecție separată pentru bitul (mesajul) următor, și tot așa

- ▶ Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare este transmisă timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

4, 6.6, -5.2, 1.1, 0.3, -1.5, 7, -7, 4.4

Probabilități condiționate

- ▶ Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile
- ▶ Fie regiunile de decizie:
 - ▶ R_0 : dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
 - ▶ R_1 : dacă $r \in R_1$, decizia este D_1
- ▶ Probabilitatea condiționată a rejecției corecte
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0) dx$$

- ▶ Probabilitatea condiționată a alarmei false
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0) dx$$

Probabilități condiționate

- ▶ Probabilitatea condiționată de pierdere
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1) dx$$

- ▶ Probabilitatea condiționată a detecției corecte
 - ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
 - ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1) dx$$

- ▶ Relații între probabilitățile condiționate
 - ▶ suma $P(D_0|H_0) + P(D_1|H_0) = 1$ (rejecție corectă + alarmă falsă)
 - ▶ suma $P(D_0|H_1) + P(D_1|H_1) = 1$ (pierdere + detecție corectă)
 - ▶ De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

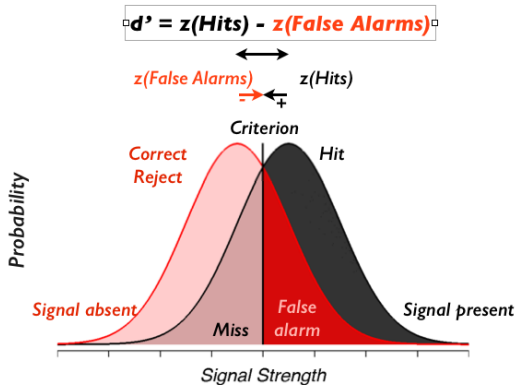


Figure 2: Probabilități condiționate

- ▶ Ignorați textul, contează zonele colorate
- ▶ [sursa: <http://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt>]*

Teoremă:

Criteriul ML **minimizează probabilitatea totală de eroare condiționată** $P(D_1|H_0) + P(D_0|H_1)$

Demonstrație:

Informal: de pe figura precedentă, dacă pragul T se deplasează fie la dreapta fie la stânga, suma celor două arii hașurate (probabilități) pentru alarmă falsă + pierdere crește

TODO: demonstrație riguroasă

Probabilitățile celor 4 rezultate

- ▶ Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze
- ▶ Nu includ și probabilitățile **ipotezelor înselor**
 - ▶ adică, $P(H_0)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_0
 - ▶ $P(H_1)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_1
- ▶ Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$
 - ▶ $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **inițiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

Reamintire (TCl): regula lui Bayes

- ▶ Reamintire (TCl): **regula lui Bayes**

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- ▶ Interpretare:

- ▶ Probabilitatea $P(A)$ este extrasă afară din $P(B|A)$
- ▶ $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, șansele ca A chiar să aibă loc
- ▶ Exemplu: $P(\text{gol} \mid \text{șut la poartă}) = \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriu?

- ▶ La noi:

$$P(D_i \cap H_j) = P(D_i|H_j) \cdot P(H_j)$$

- ▶ pentru toți i și j (în toate cele 4 cazuri)

- ▶ Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilității maxime, folosind un singur eșantion din semnal.
 - a. Calculați probabilitatea condiționată a alarmei false
 - b. Calculați probabilitatea condiționată de pierdere
 - c. Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ și $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculați probabilitatea rejecției corecte și a detecției corecte (nu cele condiționate)

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

- ▶ Criteriul ML compară distribuțiile **condiționate** ale eșantionului observat
 - ▶ condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- ▶ Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 **ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1**
 - ▶ Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- ▶ Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1 , și vice-versa
 - ▶ pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
 - ▶ și de aceea vrem să “favorizăm”/“încurajăm” decizia D_0
- ▶ Avem nevoie de un criteriu mai general . . .

Exemplu: Terenuri de fotbal

TODO

Criteriul probabilității minime de eroare

- ▶ Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- ▶ **Criteriul probabilității minime de eroare (MPE):**

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$\frac{P(H_1) \cdot w(r|H_1)}{P(H_0) \cdot w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- ▶ prescurtat MPE (Minimum Probability of Error)

Criteriul probabilității minime de eroare

Teoremă:

Criteriul MPE **minimizează probabilitatea totală de eroare**:

$$P_e = P_{af} + P_p = P(D_1 \cap H_0) + P(D_0 \cap H_1)$$

- nu probabilitățile condiționate, ci cele care includ $P(H_i)$

Criteriul probabilității minime de eroare

Demonstrație:

- Probabilitatea unei alarme false este:

$$\begin{aligned}P(D_1 \cap H_0) &= P(D_1|H_0) \cdot P(H_0) \\&= \int_{R_1} w(r|H_0) dx \cdot P(H_0) \\&= (1 - \int_{R_0} w(r|H_0) dx) \cdot P(H_0)\end{aligned}$$

- Probabilitatea de pierdere este:

$$\begin{aligned}P(D_0 \cap H_1) &= P(D_0|H_1) \cdot P(H_1) \\&= \int_{R_0} w(r|H_1) dx \cdot P(H_1)\end{aligned}$$

- Probabilitatea totală a erorilor (suma lor) este:

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^T [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)] dx$$

Probabilitatea de eroare minimă

- ▶ Urmărim minimizarea P_e , adică să minimizăm integrala
- ▶ Putem alege R_0 cum dorim, pentru acest scop
- ▶ Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
 - ▶ integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- ▶ Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- ▶ Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1

► Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- ▶ Criteriul MPE este o generalizare a criteriului ML, depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
 - ▶ se exprimă tot sub forma unui raport de plauzibilitate
- ▶ Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- ▶ Criteriul ML este un caz particular al MPE pentru for $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

- Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- Echivalent

$$(r-s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} (r-s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- sau, dacă se desfac parantezele:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul ML, se compară distanțele (la pătrat):

$$|r - s_0(t_0)| \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} |r - s_1(t_0)|$$

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} (r - s_1(t_0))^2$$

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Interpretarea 2: valoarea de prag

- La criteriul ML, se compară r cu un prag T

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$$

- La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

- ▶ Fie decizia între două semnale constante: $s_0(t) = -5$ și $s_1(t) = 5$. Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r .
 - Să se găsească regiunile de decizie conform criteriului MPE
 - Calculați probabilitatea alarmei false și probabilitatea de pierdere
 - Repetăți a) și b) dacă $s_1(t)$ este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?

Criteriul riscului minim

- ▶ Dacă ne afectează mai mult un anumit tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte (pierderi)?
 - ▶ Criteriul MPE tratează toate erorile la fel
 - ▶ Ne trebuie un criteriu mai general
- ▶ Idee: se atribuie **un cost** fiecărui scenariu, apoi se minimizează costul mediu
- ▶ C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
 - ▶ C_{00} = costul unei rejecții corecte
 - ▶ C_{10} = costul unei alarme false
 - ▶ C_{01} = costul unei pierderi
 - ▶ C_{11} = costul unei detecții corecte
- ▶ Ideea de “costuri” și minimizarea costului mediu este general întâlnită
 - ▶ de ex. TCI: codare: “costul” unui mesaj este lungimea cuvântului de cod, vrem să minimizăm costul mediu, adică lungimea medie

Criteriul riscului minim

- ▶ Definim **riscul** = **media costurilor**

$$R = C_{00}P(D_0 \cap H_0) + C_{10}P(D_1 \cap H_0) + C_{01}P(D_0 \cap H_1) + C_{11}P(D_1 \cap H_1)$$

- ▶ Criteriul riscului minim: **se minimizează riscul R**
 - ▶ adică se minimizează costul mediu
 - ▶ se mai numește “criteriul costului minim”

- ▶ Demonstrație la tablă
 - ▶ se folosește regula lui Bayes
- ▶ Concluzie: regula de decizie este

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

Criteriul riscului minim (MR):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

- prescurtat MR (Minimum Risk)

- ▶ Criteriul MR este o generalizare a MPE (la rândul lui o generalizare a ML)
 - ▶ se exprimă tot printr-un raport de plauzibilitate
- ▶ Atât **probabilitățile** cât și **costurile** pot influența decizia în favoarea uneia sau alteia dintre ipoteze
- ▶ Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, MR se reduce la criteriul MPE
 - ▶ de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- ▶ Dacă zgomotul este gaussian (normal), la fel ca la celelalte criterii, se aplică logaritmul natural
- ▶ Se obține:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

- ▶ sau

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pe lângă probabilități apar și costurile

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

Interpretarea 2: Valoarea de prag

- ▶ La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ în funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pragul este influențat și de costuri

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

- ▶ Criteriul MR împinge decizia înspre **minimizarea scenariilor cu cost ridicat**
- ▶ Exemplu: din ecuații:
 - ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{01} crește, iar celelalte rămân la fel?
 - ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{10} crește, iar celelalte rămân la fel?
 - ▶ ce se întâmplă dacă ambele costuri C_{01} și C_{10} cresc, iar celelalte rămân la fel?

Pariul lui Pascal

Raționamentul filozofului și matematicianului Blaise Pascal (1623–1662):

Dumnezeu există sau nu. Rațiunea nu poate decide între cele două alternative.

Tu trebuie să pariezi (nu este opțional).

În cazul în care câștigi, câștigi totul; dacă pierzi, nu pierzi nimic. Pariază fără ezitare că El există. Ai de câștigat o infinitate de vieți fericite, împotriva unui număr finit de șanse de a pierde.¹

- Un exemplu filozofic de utilizare a criteriului riscului minim

¹sursa textului: Wikipedia

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

- ▶ Criteriile ML, MPE și MR au toate forma următoare

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ pentru ML: $K = 1$
- ▶ pentru MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ pentru MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

În zgomot gaussian, criteriile se reduc la:

- Compararea pătratului distanțelor:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln(K)$$

- Compararea eșantionului r cu un prag T :

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)}_T$$

Exercițiu

- ▶ Un sistem *airbag* detectează un accident prin eșantionarea semnalului de la un senzor cu 2 valori posibile: $s_0(t) = 0$ (OK) sau $s_1(t) = 5$ (accident).
- ▶ Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.
- ▶ Se ia un singur eșantion din semnal.
- ▶ Costurile scenariilor sunt: $C_{00} = 0$, $C_{01} = 100$, $C_{10} = 10$, $C_{11} = -100$
 - a. Găsiți regiunile de decizie R_0 și R_1 .

Criteriul Neyman-Pearson

- ▶ Un criteriu mai general decât toate cele de până acum
- ▶ Criteriul Neyman-Pearson: se maximizează probabilitatea de detecție ($P(D_1 \cap H_1)$) păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată ($P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda$)
 - ▶ Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$
- ▶ Criteriile ML, MPE și MR sunt cazuri particulare ale Neyman-Pearson, pentru diverse valori ale λ .

Exercițiu

- ▶ O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- ▶ Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție uniformă $U[-5, 5]$.
- ▶ Receptorul ia un singur eșantion r .
 - a. Găsiți regiunile de decizie conform criteriului Neyman-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
 - b. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Sumar: criterii de decizie

- ▶ Am văzut: decizie între două semnale, bazată pe 1 eșantion
- ▶ Toate criteriile au la bază raportul de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K
- ▶ În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni de decizie
 - ▶ regiunea R_0 : dacă r este aici, se decide D_0
 - ▶ regiunea R_1 : dacă r este aici, se decide D_1
- ▶ Pentru zgomot gaussian, granița între regiuni (valoarea de prag) este:

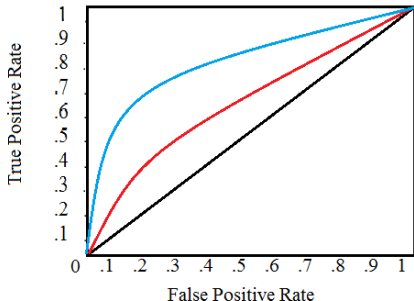
$$T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)$$

Compararea a două probleme de decizie

- ▶ Fie o problemă de decizie cu $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = 10$, și zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$
- ▶ Fie o altă problemă de decizie cu $s_0(t) = 10$, $s_1(t) = 16$, and noise $\mathcal{U}[-8, 8]$
- ▶ Care e mai ușoară? Cum să le comparăm
- ▶ Cum se evaluează performanțele rezultatelor într-o problemă de decizie?
 - ▶ Trebuie să comparăm probabilitățile “bune” (P_{cd} , P_{cr}) și cele “rele” (P_{fa} , P_m)

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **“Caracteristica de operare a receptorului” (“Receiver Operating Characteristic”, ROC)**
- ▶ Reprezintă probabilitatea $P_{dc} = P(D_1|H_1)$ în funcție de probabilitatea $P_{af} = P(D_1|H_0)$
 - ▶ pentru diferite praguri T
 - ▶ fiecare T corespunde unui punct de pe grafic



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Există întotdeauna un **compromis** între P_d (bun) și P_{fa} (rău)
 - ▶ creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
 - ▶ pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- ▶ Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
 - ▶ dar întotdeauna e vorba de un compromis
- ▶ O măsură a performanței globale este **Area Under the Curve** (AUC)
 - ▶ indiferent de alegerea unui prag sau a altuia
- ▶ Două situații diferite (două semnale diferite, algoritmi etc) se pot compara prin afișarea ROC și compararea AUC-urilor asociate

Caracteristica Precision vs Recall

- ▶ Un grafic similar este cel de **Precision vs Recall**

- ▶ **Precision** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_1 \cap H_0)}$

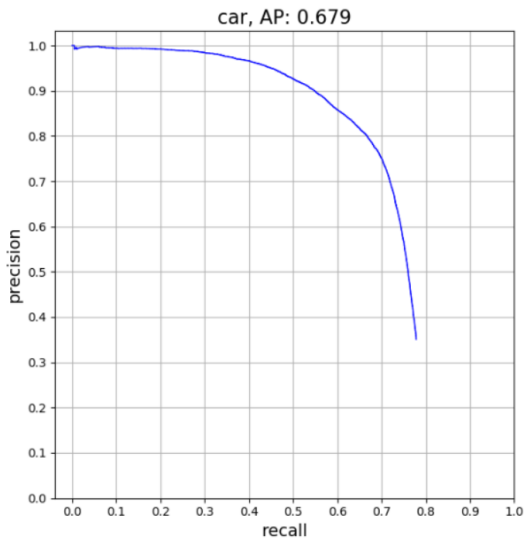
- ▶ = True Positives / (True Positives + False Positives)

- ▶ **Recall** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_0 \cap H_1)} = P(D_1 | H_1)$

- ▶ = True Positives / (True Positives + False Negatives)

Caracteristica Precision vs Recall

Exemplu de grafic Precision vs Recall dintr-o aplicație practică



Caratteristica Precision vs Recall

Aplicația pentru care este obținut graficul precedent:



Raport Semnal-Zgomot

- ▶ Cum putem îmbunătăți performanțele de detecție?
 - ▶ i.e. creșterea P_d pentru același P_{af}
 - ▶ independent de alegerea unui prag sau a altuia
- ▶ Două soluții:
 - ▶ Creșterea diferenței dintre $s_0(t)$ și $s_1(t)$ (se crește **puterea semnalului**)
 - ▶ Scăderea zgomotului (se scade **puterea zgomotului**)
 - ▶ i.e. se crește **raportul Semnal-Zgomot**

- ▶ Următoarele trei slide-uri nu se cer pentru examenul 2020-2021 (până la Raportul semnal zgomot).

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
 - ▶ Sau, echivalent, considerăm doar probabilități condiționate
- ▶ Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned} P_d &= P(D_1|H_1) \\ &= \int_T^\infty w(r|H_1) \\ &= (F(\infty) - F(T)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\ &= Q \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned}P_{fa} &= P(D_1 | H_0) \\&= \int_T^\infty w(r | H_0) \\&= (F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

- Rezultă $\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa})$,
- Și: $\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa}) + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Înlocuind în P_d , obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{constant} + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- ▶ Fie un scenariu simplu:

- ▶ $s_0(t_0) = 0$
- ▶ $s_1(t_0) = A = constant$

- ▶ Obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{constant} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Raportul semnal zgomot

- ▶ **Raportul semnal zgomot (SNR)** = $\frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- ▶ Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie = $\overline{X^2}$
 - ▶ Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
 - ▶ Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- ▶ În cazul nostru, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \sqrt{\text{SNR}} \right)$$

- ▶ Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
 - ▶ Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- ▶ Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
 - ▶ SNR mare: performanță bună
 - ▶ SNR mic: performanță slabă

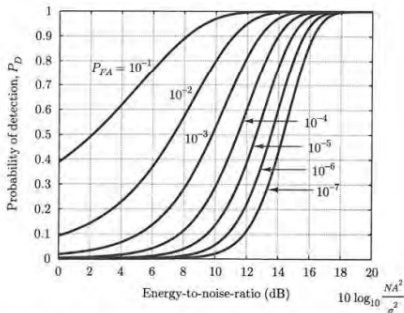


Figure 6: Performanțele detecției depind de SNR

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

Alte aplicații ale teoriei deciziei

- ▶ Se pot utiliza aceste criterii de decizie în alte aplicații?
 - ▶ nu pentru a decide între semnale, ci în alte scopuri
- ▶ Matematic, problema se pune sub forma următoare:
 - ▶ avem 2 (sau mai multe) distribuții posibile
 - ▶ avem 1 valoare observată
 - ▶ determinăm cea mai plauzibilă distribuție, pe baza valorii observate
- ▶ În acest caz particular, decidem între două semnale
- ▶ Dar acest model matematic se poate aplica și în alte contexte:
 - ▶ medicină: un semnal ECG indică o boală sau nu?
 - ▶ business: va cumpăra clientul un produs, sau nu?
 - ▶ De obicei se folosesc mai multe eșantioane, dar principiul matematic este același

Alte aplicații ale teoriei deciziei

Exemplu (pur imaginar):

- ▶ O persoană sănătoasă cu greutatea = X kg are concentrația de trombocite pe ml de sânge distribuită aproximativ $\mathcal{N}(\mu = 10 \cdot X, \sigma^2 = 20)$.
- ▶ O persoană suferind de boala B are o valoare mult mai scăzută, distribuită aproximativ $\mathcal{N}(100, \sigma^2 = 10)$.
- ▶ În urma analizelor de laborator, ai obținut valoarea $r = 255$. Greutatea ta este 70 kg.
- ▶ Decideți: sănătos sau nu?

II.3 Detectia semnalelor cu mai multe esantioane

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Se transmite un semnal $s(t)$
 - ▶ Există **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul original este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ H_1 : semnalul original este $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ Receptorul poate lua **două decizii**:
 - ▶ D_0 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_1(t)$
- ▶ Există 4 scenarii posibile

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot (necunoscut)
 - ▶ Se recepționează un semnal $r(t) = s(t) + n(t)$
- ▶ Se iau N eșantioane din $r(t)$, nu doar 1
 - ▶ Fiecare eșantion $r_i = r(t_i)$ se ia la momentul t_i
- ▶ Eșantioanele formează **vectorul de eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- ▶ Fiecare eșantion r_i este o **variabilă aleatoare**
 - ▶ $r(t_i) = s(t_i) + n(t_i) = \text{constantă} + \text{o v.a.}$
- ▶ Vectorul \mathbf{r} reprezintă un set de N v.a. dintr-un proces aleator
- ▶ Considerând întreg vectorul \mathbf{r} , valorile vectorului \mathbf{r} sunt descrise de **distribuții de ordin N**

- ▶ În ipoteza H_0 :

$$w_N(\mathbf{r}|H_0) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N|H_0)$$

- ▶ În ipoteza H_1 :

$$w_N(\mathbf{r}|H_1) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N|H_1)$$

Plauzibilitatea vectorului de eşantioane

- ▶ Se aplică **aceleaşi criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eşantion

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Observaţii
 - ▶ \mathbf{r} este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eşantioanelor
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_1
 - ▶ valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- ▶ Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
 - ▶ identic ca la 1 eşantion, doar că acum datele = mai multe eşantioane

- ▶ Presupunând că zgomotul este alb, eşantioanele r_i sunt independente
- ▶ În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot \dots \cdot w(r_N|H_j)$$

- ▶ de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9] = \text{plauzibilitatea obținerii lui } 5.1 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.7 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.9$
- ▶ Funcțiile $w(r_i|H_j)$ sunt distribuțiile condiționate ale fiecărui eşantion
 - ▶ de care am mai văzut deja

- ▶ Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al unui vector de eşantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eşantion
- ▶ **Se înmulţesc** rapoartele de plauzibilitate ale fiecărui eşantion în parte, şi se aplică criteriile asupra rezultatului final

- ▶ Toate criteriile de decizie pot fi scrise astfel:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Valoarea lui K se alege ca pentru 1 eşantion:

- ▶ criteriul ML: $K = 1$
- ▶ criteriul MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ criteriul MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Caz particular: AWGN

- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise” = Zgomot alb, gaussian, aditiv
- ▶ În ipoteza H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ În ipoteza H_0 : $w(r_i|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i-s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i-s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{\sum (r_i-s_0(t_i))^2 - \sum (r_i-s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

Criterii de decizie pentru AWGN

- ▶ Raportul de plauzibilitate global se compară cu K :

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = e^{\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2 - \sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Se aplică logaritmul natural, obținându-se:

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 1: distanța geometrică

- Sumele reprezintă **distanța geometrică** la pătrat:

$$\sum (r_i - s_1(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_1(t))^2$$

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_0(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_0(t))^2$$

- distanța între vectorul observat \mathbf{r} și semnalele originale $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$
- vectori cu N eșantioane \Rightarrow distanța între vectori de dimensiune N
- Totul se reduce la a compara distanțele

Interpretarea 1: distanța geometrică

► Criteriul Maximum Likelihood:

- $K = 1, \ln(K) = 0$
- se alege **distanța minimă** între \mathbf{r} și vectorii $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$
- de unde și numele “receptor de distanță minimă”

► Criteriul Minimum Probability of Error:

- $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- Apare un termen suplimentar, în favoarea ipotezei mai probabile

► Criteriul Minimum Risk:

- $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$
- Termenul suplimentar depinde și de probabilități, și de costuri

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.
 - a. Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
 - b. Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
 - c. Ce decizie se ia conform criteriului riscului minim. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?

Alt exercițiu

Alt exercițiu:

- ▶ Fie detecția unui semnal $s(t) = 3 \sin(2\pi ft)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent ($s_0(t) = 0$, ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.
 - a. Care sunt cele mai bune momente de eșantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
 - b. Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime?
 - c. Dacă se folosește criteriul probabilității minime de eroare, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
 - d. Dacă se folosește criteriul riscului minim, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?
 - e. Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detecția?

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ Dacă se descompun parantezele:

$$\sum (r_i - s_0(t_i))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- ▶ Se obține:

$$\begin{aligned} \sum (r_i)^2 + \sum s_0(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_0(t_i) &\underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sum (r_i)^2 + \\ &+ \sum s_1(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_1(t_i) + 2\sigma^2 \ln(K) \end{aligned}$$

- ▶ Echivalent cu:

$$\sum r_i s_1(t_i) - \frac{\sum (s_1(t_i))^2}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \sum r_i s_0(t_i) - \frac{\sum (s_0(t_i))^2}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ Algebră: **produsul scalar** al vectorilor **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

- ▶ $\sum r_i s_1(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu $\mathbf{s}_1(\mathbf{t}) = [s_1(t_1), s_1(t_2), \dots, s_1(t_N)]$
- ▶ $\sum r_i s_0(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu $\mathbf{s}_0(\mathbf{t}) = [s_0(t_1), s_0(t_2), \dots, s_0(t_N)]$
- ▶ $\sum (s_1(t_i))^2 = \sum s_1(t_i) \cdot s_1(t_i) = \langle \mathbf{s}_1(\mathbf{t}), \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle = E_1$ este **energia** vectorului $s_1(t)$
- ▶ $\sum (s_0(t_i))^2 = \sum s_0(t_i) \cdot s_0(t_i) = \langle \mathbf{s}_0(\mathbf{t}), \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle = E_0$ este **energia** vectorului $s_0(t)$

Interpretarea 2: produs scalar

- Decizia se poate rescrie sub forma:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- Interpretare: **comparăm produsele scalare**
 - se scad energiile semnalelor, pentru o comparație corectă
 - există de asemenea termenul care depinde de criteriul ales

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ Caz particular:

- ▶ Dacă cele două semnale au energii egale:

$$E_1 = \sum s_1(t_i)^2 = E_0 = \sum s_0(t_i)^2$$

- ▶ Exemple:

- ▶ modulație BPSK: $s_1 = A \cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A \cos(2\pi ft)$

- ▶ modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A \cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$

- ▶ Atunci formula se simplifică:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ În domeniul prelucrărilor de semnale, produsul scalar măsoară **similitudinea** a două semnale
- ▶ Interpretare: verificăm dacă vectorul eșantioanelor **r** este **mai asemănător** cu $s_1(t)$ sau cu $s_0(t)$
 - ▶ Se alege cel mai similar cu **r**
 - ▶ Se scad și energiile semnalelor (necesar d.p.d.v. matematic)
- ▶ **Produsul scalar** a doi vectori **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

Implementare cu circuite de corelare

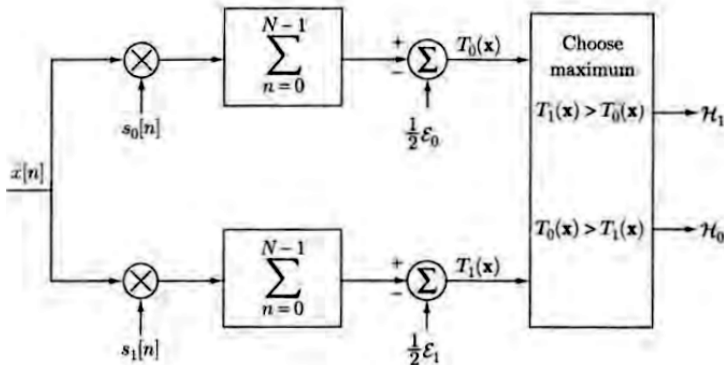


Figure 7: Decizie între două semnale

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

Exemplu: BPSK

- Demodulare BPSK:

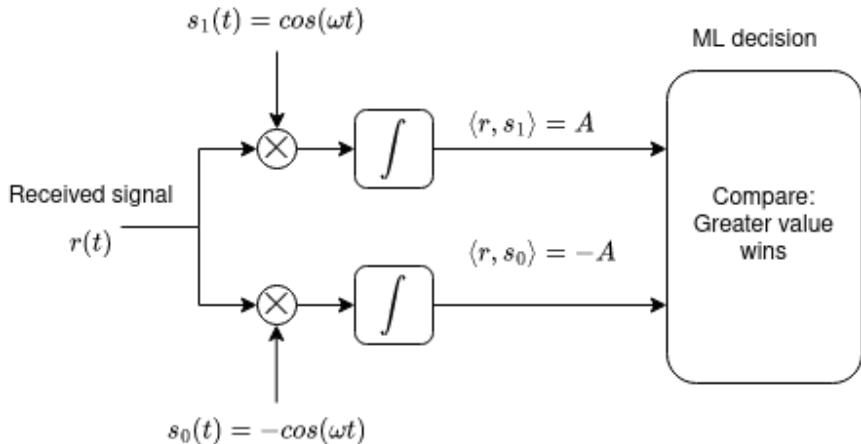


Figure 8: Decizie BPSK: implementare directă

Exemplu: BPSK

► Demodulare BPSK:

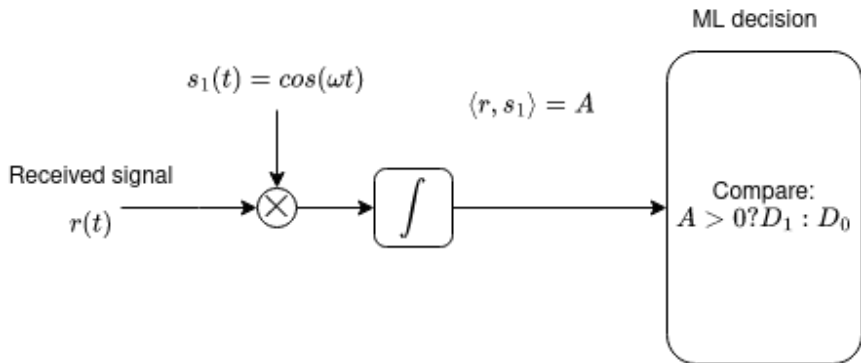


Figure 9: Decizie BPSK: implementare mai eficientă

Exemplu: QPSK

$$s_1(t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

$$s_2(t) = \cos(\omega t + 3\frac{\pi}{4})$$

$$s_3(t) = \cos(\omega t + 5\frac{\pi}{4})$$

$$s_4(t) = \cos(\omega t + 7\frac{\pi}{4})$$

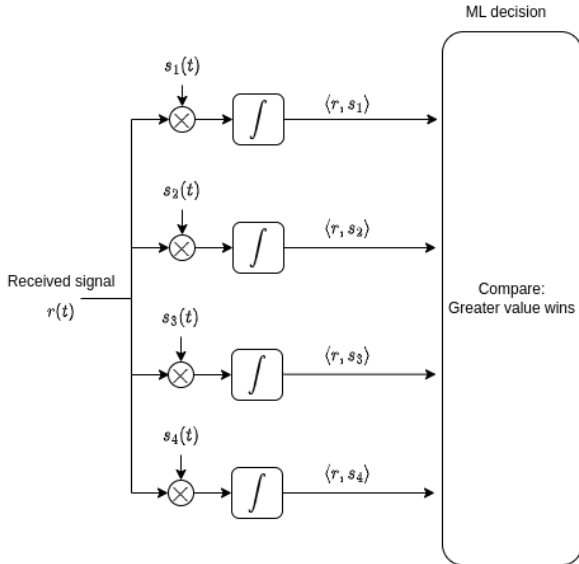


Figure 10: Decizie QPSK: implementare directă

Example: QPSK

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$s_1(t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

$$s_2(t) = \cos(\omega t + 3\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

$$s_3(t) = \cos(\omega t + 5\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

$$s_4(t) = \cos(\omega t + 7\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

$$s_n(t) = \cos(\omega t + n\frac{\pi}{4}) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

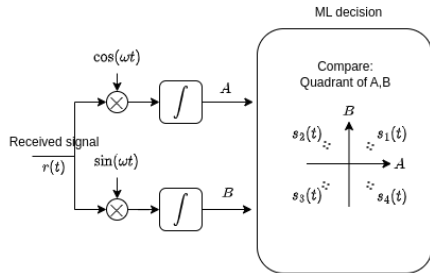


Figure 11: Decizie QKSP: implementare mai eficientă

- Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n-k] = \sum_k r[k]h[N-1-n+k]$$

- Rezultatul convoluției, la finalul semnalului de intrare, $y[N-1]$ ($n = N-1$), este chiar produsul scalar:

$$y[N-1] = \sum_k r[k]s[k]$$

- ▶ Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru a cărui răspuns la impuls = oglindirea lui $s[n]$** , luându-se eșantionul de la finalul semnalului de intrare

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ se obține valoarea produsului scalar
- ▶ **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. “matched filter”)
 - ▶ filtrul este *adaptat* semnalului dorit

Detecția semnalelor cu filtre adaptate

- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t_i)$
- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_0(t_i)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile la momentul final $n = N - 1$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se folosește regula de decizie cu produse scalare

Detectia semnalelor cu filtre adaptate

- ▶ Dacă $s_0(t) = 0$, avem nevoie doar de un singur filtru adaptat pentru $s_1(t)$, și se compară rezultatul cu un prag

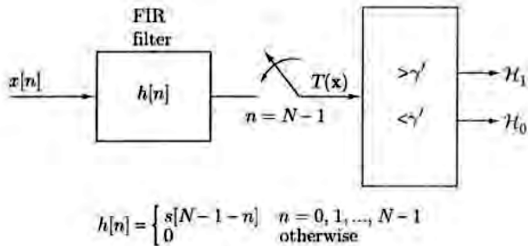


Figure 12: Detectie folosind un filtru adaptat

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

II.4 Detectia unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- ▶ Observare continuă = fără eșantionare, se folosește **întreg semnalul continuu**
 - ▶ similar cazului cu N eșantioane, dar cu $N \rightarrow \infty$
- ▶ Semnalele originale sunt $s_0(t)$ și $s_1(t)$
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ Presupunem **doar zgomot Gaussian**, pentru simplitate
- ▶ Semnalul recepționat este $r(t)$

Spațiu Euclidean

- ▶ Se extinde cazul precedent cu N eșantioane la cazul unui semnal continuu, $N \rightarrow \infty$
- ▶ Fiecare semnal $r(t)$, $s_1(t)$ și $s_0(t)$ reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- ▶ **Distanța** între două semnale este:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 dt}$$

- ▶ **Produsul scalar** între două semnale:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \int r(t)s(t)dt$$

- ▶ Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă

Decizie în cazul AWGN: distanțe

- ▶ În cazul AWGN este aceeași regula de decizie:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- ▶ Distanța = se calculează cu formula precedentă, cu integrală
- ▶ Aceleași criterii de decizie:
 - ▶ Criteriul Maximum Likelihood: $K = 1$, $\ln(K) = 0$
 - ▶ se alege **distanța minimă**
 - ▶ Criteriul Minimum Probability of Error: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
 - ▶ Criteriul Minimum Risk: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Decizie în cazul AWGN: produse scalare

- ▶ În cazul AWGN este aceeași regulă de decizie:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- ▶ Produsul scalar = formula precedentă, cu integrală
- ▶ Toate interpretările rămân identice
 - ▶ se schimbă doar **tipul de semnal** cu care lucrăm

- ▶ Produsul scalar a două semnale se poate calcula cu un **filtru adaptat**
- ▶ **Filtru adaptat** = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu **oglundirea** semnalului căutat
 - ▶ dacă semnalul original $s(t)$ are lungimea T
 - ▶ atunci $h(t) = s(T - t)$
 - ▶ filtrul este analogic, răspunsul la impuls este continuu
- ▶ ieșirea unui filtru adaptat la momentul $t = T$ este egală cu produsul scalar al intrării $r(t)$ cu $s(t)$

Detecția semnalelor cu filtre adaptate

- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t)$
- ▶ Se folosește un alt filtru adaptat la semnalul $s_0(t)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile filtrelor la sfârșitul semnalelor, $t = T$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se utilizează regula de decizie cu produse scalare

Spații vectoriale Euclidiene

- ▶ Recapitulare: Spații vectoriale Euclidiene
- ▶ Spațiu vectorial
 - ▶ suma a două elemente = rămâne în același spațiu
 - ▶ multiplicarea cu o constantă = rămâne în același spațiu
 - ▶ există operații aritmetice de bază: sumă, multiplicare cu o constantă
 - ▶ Exemple
 - ▶ 1D = o dreaptă
 - ▶ 2D = un plan
 - ▶ 3D = spațiu tridimensional
 - ▶ N-D = ...
 - ▶ ∞ -D = ..

Spații vectoriale Euclidiene

- ▶ Operația fundamentală: **produsul scalar**

- ▶ pentru semnale discrete

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$$

- ▶ pentru semnale continue

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t)y(t)$$

- ▶ Norma (lungimea) unui vector = radical(produsul scalar cu sine însuși)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- ▶ Distanța între doi vectori = norma diferenței dintre ei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- ▶ Energia unui semnal = norma la pătrat

$$E_x = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

- ▶ Unghiul dintre doi vectori

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

- ▶ are valoare între -1 și 1
- ▶ dacă $\langle x, y \rangle = 0$, vectorii sunt **ortogonali** (perpendiculari)

- Bonus: transformata Fourier = produs scalar cu $e^{j\omega t}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int x(t) e^{-j\omega t}$$

- pentru semnale complexe, al doilea termen se conjugă, de aceea este $-j$ în loc de j

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i^*$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)^*$$

- Identic pentru semnale discrete

- ▶ Concluzie: definirea algoritmilor în mod generic, pe bază de produse scalare / distanțe / norme, este extrem de folositoare!
 - ▶ se aplică automat tuturor spațiilor vectoriale
 - ▶ un singur algoritm, utilizări pentru multiple tipuri de semnale

II.5 Detectia semnalelor cu distributii necunoscute

Distribuții necunoscute

- ▶ Până acum, se cunoștea dpdv. matematic statistica tuturor datelor:
 - ▶ Se cunoșteau semnalele:
 - ▶ $s_0(t) = \dots$
 - ▶ $s_1(t) = \dots$
 - ▶ Se cunoștea zgomotul
 - ▶ gaussian, uniform, etc.
 - ▶ Se cunoșteau distribuțiile condiționate:
 - ▶ $w(r|H_0) = \dots$
 - ▶ $w(r|H_1) = \dots$
- ▶ În aplicații reale, lucrurile pot fi mai complicate

Exemplu

- ▶ Dacă semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ nu există / nu se cunosc?
- ▶ Exemplu: recunoașterea feței unei persoane
 - ▶ Identificarea persoanei A sau B bazată pe o imagine a feței
 - ▶ Avem:
 - ▶ 100 imagini ale persoanei A, în condiții diverse
 - ▶ 100 imagini ale persoanei B, în condiții diverse

Eșantioane vs distribuții

- ▶ Să comparăm recunoașterea fețelor cu detecția semnalelor
- ▶ Aspecte comune:
 - ▶ două ipoteze H_0 (persoana A) și H_1 (persoana B)
 - ▶ un vector de eșantioane \mathbf{r} = imaginea pe baza căreia se face decizia
 - ▶ se pot lua două decizii
 - ▶ 4 scenarii: rejecție corectă, alarmă falsă, pierdere, detecție corectă
- ▶ Ce diferă? Nu există formule matematice
 - ▶ nu există semnalele “originale” $s_0(t) = \dots$ și $s_1(t) \dots$
 - ▶ (fețele persoanelor A și B nu pot fi exprimate matematic ca semnale)
 - ▶ în schimb, avem multe exemple din fiecare distribuție
 - ▶ 100 imagini ale lui A = exemple ale \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ 100 imagini ale lui B = exemple ale \mathbf{r} în ipoteza H_1

- ▶ Terminologia folosită în domeniul **învățării automate** (*machine learning*):
 - ▶ Acest tip de problemă = problemă de **clasificare** a semnalelor
 - ▶ se dă un vector de date, găsiți-i clasa
 - ▶ **Clase de semnal** = categoriile posibile ale semnalelor (ipotezele H_i , persoanele A/B etc)
 - ▶ **Set de antrenare** = un set de semnale cunoscute inițial
 - ▶ de ex. 100 de imagini ale fiecărei persoane
 - ▶ setul de date va fi folosit în procesul de decizie

- ▶ Setul de antrenare conține informațiile pe care le-ar conține distribuțiile condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - ▶ $w(r|H_0)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_0
 - ▶ $w(r|H_1)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_1
 - ▶ setul de antrenare exprimă același lucru, nu prin formule, dar prin multe exemple
- ▶ Cum se face clasificarea în aceste condiții?

Algoritmul k-NN

Algoritmul *k-Nearest Neighbours* (k-NN)

► Intrare:

- set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$, din L clase posibile de semnal $C_1 \dots C_L$
- clasele vectorilor de antrenare sunt cunoscute
- vector de test \mathbf{r} care trebuie clasificat
- parametrul k

1. Se calculează distanța între \mathbf{r} și fiecare vector de antrenare \mathbf{x}_i
 - se poate utiliza distanța Euclidiană, aceeași utilizată pentru detecția semnalelor din secțiunile precedente
 2. Se aleg cei mai apropiați k vectori de \mathbf{r} (cei k "*nearest neighbours*")
 3. Se determină clasa lui \mathbf{r} = clasa majoritară între cei k cei mai apropiați vecini
- Ieșire: clasa vectorului \mathbf{r}

Algoritmul k-NN

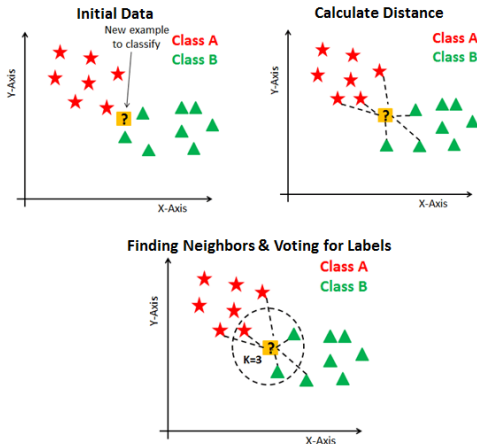


Figure 13: Algoritmul k-NN ilustrat [1]

[1] sursa: "KNN Classification using Scikit-learn", Avinash Navlani,

<https://www.datacamp.com/community/tutorials/k-nearest-neighbor-classification-scikit-learn>

Algoritmul k-NN și decizia ML

- ▶ Dacă setul de antrenare este foarte mare, algoritmul k-NN devine similar cu decizia pe baza criteriului ML
- ▶ Numărul de vectori situați într-o vecinătate a unui punct r este proporțional cu $w(r|H_i)$
- ▶ Mai mulți vecini din clasa A decât din clasa B $\Leftrightarrow w(r|H_A) > w(r|H_B)$

Algoritmul k-NN și decizia ML

- ▶ Exemplu: frunze și copaci :) de povestit

Exercițiu

1. Fie următorul set de antrenare, compus din 5 vectori din clasa A și alți 5 vectori din clasa B:

► Clasa A:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

► Clasa B:

$$\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_9 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{10} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determinați clasa vectorului $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ utilizând algoritmul k-NN, cu $k = 1$, $k = 3$, $k = 5$, $k = 7$ and $k = 9$

- ▶ k-NN este un algoritm de învățare supervizată
 - ▶ se cunosc clasele vectorilor din setul de antrenare
- ▶ Efectul lui k : netezirea frontierei de decizie:
 - ▶ k mic: frontieră foarte cotită / “șifonată” / cu multe coturi
 - ▶ k mare: frontieră mai netedă
- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?

- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?
 - ▶ prin încercări (“băbește”)
- ▶ “**Cross-validation**” = folosirea unui mic set de test pentru a verifica care valoare a parametrului e mai bună
 - ▶ acest set de date se numește set de “**cross-validare**”
 - ▶ se impune $k = 1$, se testează cu setul de “*cross-validare*” câți vectori sunt clasificați corect
 - ▶ se repetă pentru $k = 2, 3, \dots, \max$
 - ▶ se alege valoarea lui k cu care s-au obținut rezultatele cele mai bune

Evaluarea algoritmilor

- ▶ Cum se evaluează performanța algoritmului k-NN?
 - ▶ Se folosește un set de date de testare, și se calculează procentajul vectorilor clasificați corect
- ▶ Setul de date pentru evaluarea finală trebuie să fie diferit de setul de “*cross-validare*”
 - ▶ pentru evaluarea finală se folosesc date pe care algoritmul nu le-a mai utilizat niciodată
- ▶ Cum se împarte setul de date disponibile?

Seturi de date

- ▶ Presupunem că avem în total 200 imagini tip fețe, 100 imagini ale persoanei A și 100 ale lui B
- ▶ Setul de date total se împarte în:
 - ▶ Set de antrenare
 - ▶ vectorii care vor fi utilizați de algoritm
 - ▶ cel mai numeros, aprox. 60% din datele totale
 - ▶ de ex. 60 imagini ale persoanei A și 60 ale lui B
 - ▶ Set de *cross-validare*
 - ▶ utilizat pentru a testa algoritmul în vederea alegerii parametrilor optimi (k)
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui of A și 20 ale lui B)
 - ▶ Set de testare
 - ▶ utilizat pentru evaluarea finală a algoritmului, cu valorile parametrilor fixate
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui of A și 20 ale lui B)

Algoritmul *k-Means*

- ▶ k-Means: un algoritm pentru ***clusterizarea*** datelor
 - ▶ identificarea grupurilor de date apropiate între ele
- ▶ Un exemplu de algoritm de învățare nesupervizată
 - ▶ “învățare nesupervizată” = nu se cunosc clasele semnalelor din setul de antrenare

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means*

► Intrare:

- set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$
- numărul de clase C

► Inițializare: centroizii C iau valori aleatoare

$$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{valori aleatoare}$$

► Repetă

1. Clasificare: se clasifică fiecare vector \mathbf{x} pe baza celui mai apropiat centroid:

$$\text{class} \mathbf{x} = \arg \min_i d(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i), \forall \mathbf{x}$$

2. Actualizare: se actualizează centroizii $\mathbf{c}_i =$ media vectorilor \mathbf{x} din clasa i

$$\mathbf{c}_i \leftarrow \text{media vectorilor } \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \text{ din clasa } i$$

► Ieșire: centroizii \mathbf{c}_i , clasele tuturor vectorilor de intrare \mathbf{x}_n

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means* explicat video:

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 6:28 to 7:08

<https://www.youtube.com/watch?v=4b5d3muPQmA>

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 3:05 la final

<https://www.youtube.com/watch?v=luRb3y8qKX4>

Algoritmul *k-Means*

- ▶ Algoritmul *k-Means* poate să nu convergă spre niște grupuri adecvate de date
 - ▶ rezultatele depind de inițializarea aleatoare a centroizilor
 - ▶ se rulează de mai multe ori, se alege cel mai bun rezultat
 - ▶ există metode de inițializare optimizate (*k-Means++*)

Exercițiu

1. Fie datele următoare:

$$\{\mathbf{v}_n\} = [1.3, -0.1, 0.5, 4.7, 5.1, 5.8, 0.4, 4.8, -0.7, 4.9]$$

Utilizați algoritmul k-Means pentru a găsi doi centroizi \mathbf{c}_1 și \mathbf{c}_2 , pornind de la valorile aleatoare $\mathbf{c}_1 = -0.5$ și $\mathbf{c}_2 = 0.9$. Realizați 5 iterații ale algoritmului.