Examen DEPI 2019-2020

Nr.1

Exerciții (17p)

1. Fie o variabilă aleatoare continuă A având distribuția normală $\mathcal{N}(\mu = -2, \sigma^2 = 4)$.
   a. (1p) Reprezentați grafic distribuția (calculați și specificați pe grafic valoarea medie și înălțimea funcției)
   b. (1p) Calculați probabilitatea ca A să fie pozitiv
   c. (1p) Calculați valoarea medie pătratică $\overline{A^2}$
   d. (1p) Fie alta variabilă aleatoare B definită ca $B = A - x$. Cât ar trebui să fie x pentru ca probabilitatea $P(B < 0)$ să fie egală cu $\frac{1}{2}$?

2. Un semnal constant poate avea două valori posibile, $s_0(t) = 0$ (ipoteza H_0) sau $s_1(t) = 5$ (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$. La recepție se ia un singur eșantion, la momentul $t_0 = 1$, și se obține valoarea $r_0 = 1.5$. Cele două ipoteze au probabilitățile $P(H_0) = \frac{1}{4}$ și $P(H_1) = \frac{3}{4}$
   a. (1p) Reprezentați grafic cele două distribuții condiționate, $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
   b. (1p) Determinați regiunile de decizie, conform criteriului probabilității minime de eroare
   c. (2p) Calculați probabilitatea alarmei false, pentru criteriul plauzibilității maxime
   d. (1p) Care este decizia luată folosind criteriul riscului minim, dacă valorile costurilor sunt $C_{00} = 0$, $C_{01} = 10$, $C_{10} = 5$, $C_{11} = 0$?

3. Fie detecția unui semnal care poate fi de forma $s_1(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t)$ (ipoteza H_1) sau $s_0(t) = 1$ (ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 3)$. La recepție se iau 3 eșantioane la momentele de timp $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ și $t_2 = 2$, și se obțin valorile $r_0 = 0.3$, $r_1 = -0.2$ și $r_3 = 0.5$.
   a. (2p) Care este decizia luată, conform criteriului Plauzibilității Maxime?
   b. (2p) Dacă ar trebui să renunțăm la unul dintre momentele de eșantionare, la care ar fi cel mai indicat să renunțăm, la t_0, t_1 sau t_2? Justificați.

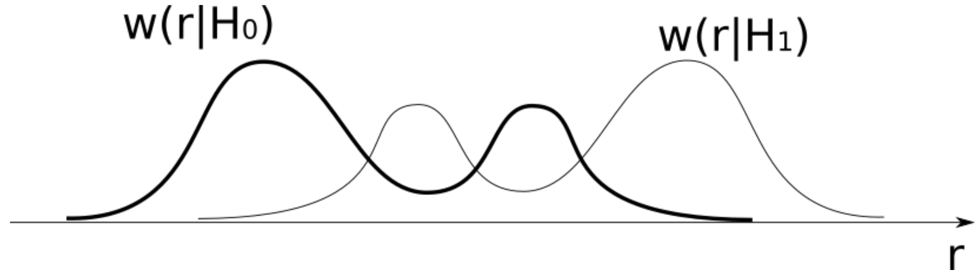
4. (4p) Se recepționează un semnal de forma $r(t) = \underbrace{1 - 2 \cdot A \cdot t}_{s_\Theta(t)} + zgomot$, unde A este un parametru necunoscut. Zgomotul are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 9)$. La recepție se iau trei eșantioane, la momentele $t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4$, valorile fiind $r_1 = 1.1$, $r_2 = 5.3$, $r_3 = 10$. Estimați parametrul A folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

Teorie (18p)

1. (2p) Ce valoare are funcția de repartiție în punctele ∞ și $-\infty$?. Justificați

2. (2p) Ce înseamnă un proces aleator staționar în sens strict și în sens larg?

3. (2p) Indicați pe grafic care sunt **regiunile de decizie** în cazul criteriului **plauzibilității maxime**, pentru funcțiile de plauzibilitate de mai jos. Explicați în cuvinte ce ați indicat.



4. (2p) Dacă zgomotul care afectează un semnal **se dublează**, cum se modifică **raportul Semnal-Zgomot** SNR (justificați în cuvinte):

   a. SNR crește
   b. SNR scade
   c. SNR rămâne constant

5. (4p) Fie cazul detecției unui semnal constant cu valoare 0 sau A, afectat de zgomot Gaussian, folosind un eșantion. Pornind de la expresia criteriului plauzibilității maxime

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

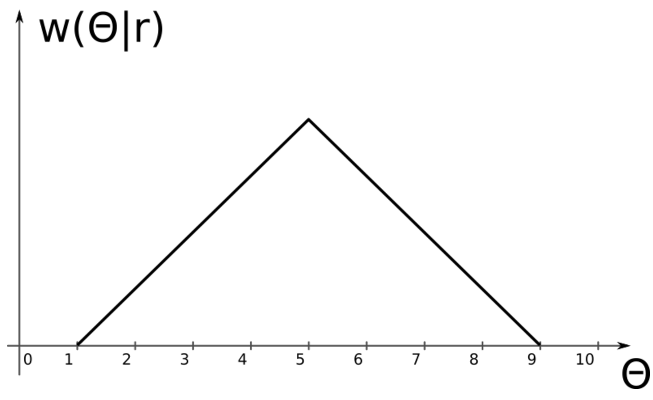
   demonstrați că pragul T cu care se compară eșantionul are valoarea $T = \frac{A}{2}$

6. (2p) Explicați cum operează algoritmul $k - NN$ (k- Nearest Neighbors) pentru a determina clasa căruia aparține un vector x.

7. (2p) Care este diferența între estimarea de plauzibilitate maximă și estimarea Bayesiană?

8. (2p) Distribuția **a posteriori** a unui parametru necunoscut Θ este funcția triunghiulară de mai jos.

   a. Care este valoarea estimatorului MAP? Explicați.
   b. Care este valoarea estimatorului EPMM? Explicați.



Notă: 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h