

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introducere

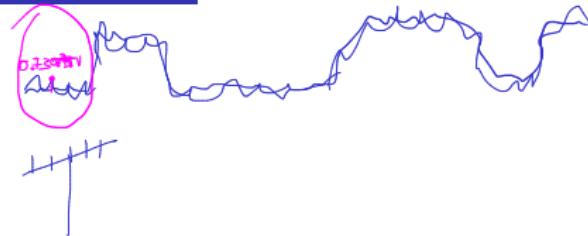
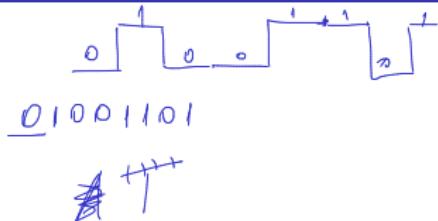
Introducere

$$0: \Delta_0(t) = 0$$

$$1: \Delta_L(t) = 5$$

$$0: 0\text{ V}$$

$$1: 5\text{ V}$$



- ▶ Detectia semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități

- ▶ inclusiv că nu există nici un semnal (este 0)

- ▶ Avem la dispoziție observații cu zgomot

- ▶ semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ zgomotul este aditiv (se adună la semnalul original)

Contextul problemei de decizie

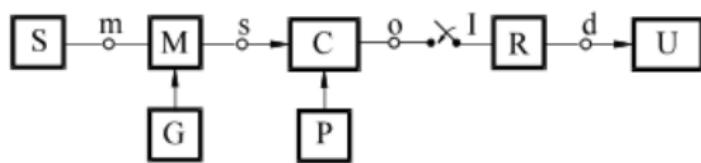
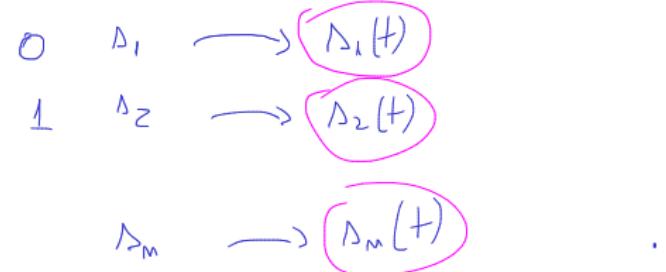


Figure 1: Schema bloc a unui sistem de comunicație



► Schema bloc a unui sistem de comunicație:

- Sursa de informație: generează mesajele a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
- Generator: generează semnalele diferite $s_1(t), \dots, s_n(t)$
- Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
- Canal: adaugă zgomot aleator
- Eșantionare: ia eșantioane din semnalul $s_n(t)$
- Receptor: decide ce mesaj a_n s-a fost recepționat
- Utilizator: primește mesajele recuperate

$$R(t) = \Delta(t) + z_{\text{zgomot}}(t)$$

Scenarii practice

► Transmisie de date cu diverse modulații binare:

- ▶ nivele constante de tensiune (de ex. $s_n(t) = \text{constant } 0 \text{ sau } 5V$)
- ▶ modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) = \cos(\omega t + \phi)$ cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
- ▶ modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) = \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ sau $\cos(\omega_2 t + \phi_2)$ cu frecvențe diferite
- ▶ modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK
- ▶ la recepție se primește semnalul cu zgomot, **se decide** dacă s-a primit 0 sau 1

$$0 \text{ logic} : s_1(t) = 0V$$

$$1 \text{ logic} : s_2(t) = 5V$$

$$0 \text{ logic} : s_1(t) = \cos(2\pi f_1 t)$$

$$1 \text{ logic} : s_2(t) = \cos(2\pi f_2 t)$$

$$\cos(2\pi f_1 t)$$

$$\cos(2\pi f_2 t)$$

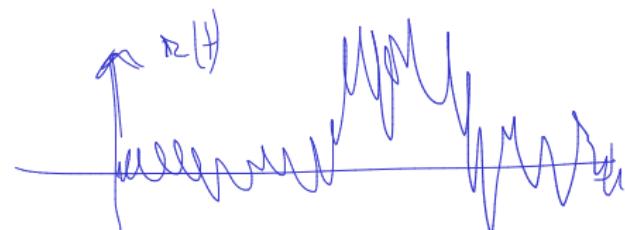
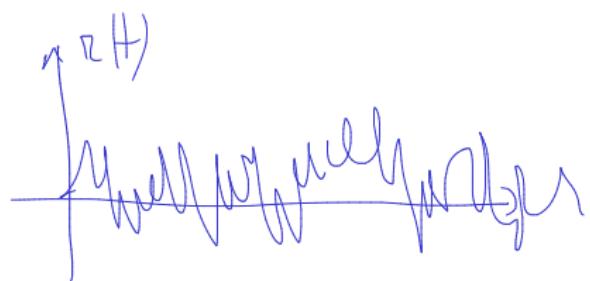
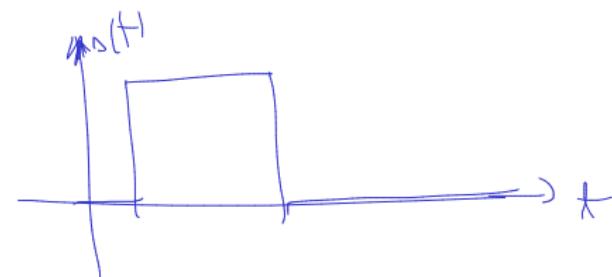
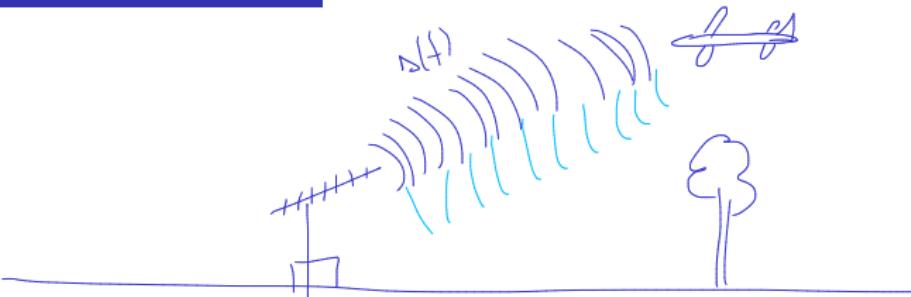
$$\sin(2\pi f_1 t)$$

Loc recepție

Scenarii practice

► Detectii radar

- ▶ se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
- ▶ receptorul aşteaptă posibilele reflectii ale semnalului emis și decide
 - ▶ nu este prezentă o reflectie -> nici un obiect
 - ▶ semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat



- ▶ Decizie între mai mult de două semnale
- ▶ Numărul de eșantioane (observații):
 - ▶ un singur eșantion
 - ▶ mai multe eșantioane
 - ▶ observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detectia semnalelor folosind 1 esantion

Detectia unui semnal cu 1 esantion

- Cel mai simplu caz: detectia (decizia) folosind un singur esantion

- două mesaje a_0 și a_1 (0 logic sau 1 logic)
- mesajele sunt modulate cu semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$
 - pentru a_0 : se transmite $s(t) = s_0(t)$
 - pentru a_1 : se transmite $s(t) = s_1(t)$

- peste semnal se suprapune zgomotul $n(t)$
- se receptionează un semnal cu zgomot, $r(t) = \underline{s(t)} + \underline{n(t)}$
- la receptie: se preia un singur esantion la timpul t_0 , $\boxed{r = r(t_0)}$
- decizie: pe baza $r(t_0)$, care semnal a fost cel transmis?

0 : 0 V

1 : 5 V

$r = 1.73 \text{ V}$

$$s(t) = \begin{cases} s_0(t) \\ s_1(t) \end{cases} \text{ sau}$$

Am nășterea expunție în

- ▶ Există două ipoteze:
 - ▶ H_0 : semnalul adevărat este $s(t) = s_0(t)$ (s-a transmis a_0)
 - ▶ H_1 : semnalul adevărat este $s(t) = s_1(t)$ (s-a transmis a_1)
- ▶ Receptorul poate lua una din **două decizii**:
 - ▶ D_0 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : receptorul decide că semnalul corect este $s(t) = s_1(t)$

Rezultate posibile

- Există 4 situații posibile:

1. **Rejecție corectă**: ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_0

- ▶ Probabilitatea este $P_r = P(D_0 \cap H_0)$
- ▶ "True Negative"

2. **Alarmă falsă**: ipoteza corectă este H_0 , decizia este D_1

- ▶ Probabilitatea este $P_{af} = P(D_1 \cap H_0)$
- ▶ "False Positive"

3. **Pierdere**: ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_0

- ▶ Probabilitatea este $P_p = P(D_0 \cap H_1)$
- ▶ "False Negative"

4. **Detectie corectă**: ipoteza corectă este H_1 , decizia este D_1

- ▶ Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$
- ▶ "True Positive"

► Terminologia are la origine aplicații radar:

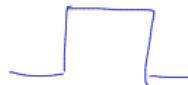
- ▶ un semnal se emite de către sursă
- ▶ semnal recepționat = o posibilă reflectie din partea unei ținte, puternic afectată de zgomot
- ▶ H_0 = nu există un obiect, nu există semnal reflectat (doar zgomot)
- ▶ H_1 = există un obiect, există un semnal reflectat
- ▶ de aici numele “alarmă falsă”, “pierdere” etc.

Zgomotul

- În general se consideră zgomot **aditiv, alb, staționar**

$$r(t) = s(t) + \text{zgomot}(t)$$

- aditiv = zgomotul se adună cu semnalul



- alb = eșantioane distincte sunt necorelate



- staționar = are aceleasi proprietati statistice la orice moment de timp

- Semnalul de zgomot $n(t)$ este necunoscut

- este o realizare a unui proces aleator



- se cunoaste doar distribuția sa, nu și valorile particulare

Eşantionul preluat la recepție

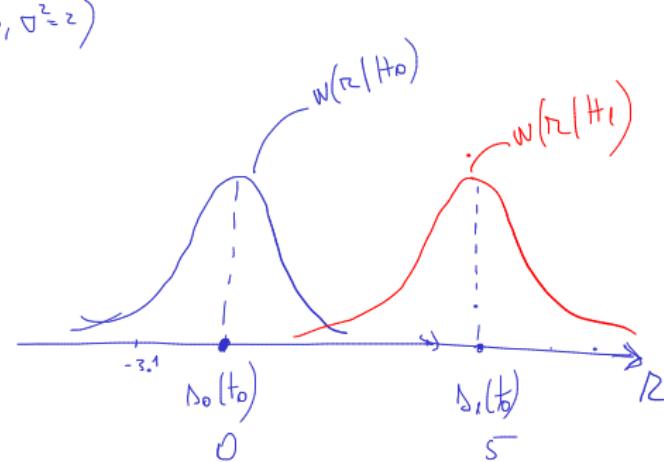
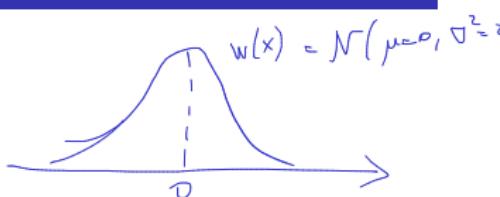
- ▶ La recepție se primește semnalul $r(t) = s(t) + n(t)$
 - ▶ $s(t)$ = semnalul original, fie $s_0(t)$, fie $s_1(t)$
 - ▶ $n(t)$ = semnalul de zgomot necunoscut
- ▶ Valoarea eşantionului luat la momentul t_0 este $\overset{R}{r}(t_0) = s(t_0) + \underset{\text{a }}{\textcircled{n}}(t_0)$
 - ▶ $s(t_0)$ = fie $s_0(t_0)$, fie $s_1(t_0)$
 - ▶ $n(t_0)$ este un eşantion din semnalul de zgomot $=$ o variabilă aleatorie

- ▶ Eșantionul $n(t_0)$ este o variabilă aleatoare
 - ▶ fiind un eșantion de zgomot (un eșantion dintr-un proces aleator)
 - ▶ v.a. continuă, intervalul valorilor posibile e continuu
- ▶ $r(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$ = o constantă + o variabilă aleatoare
 - ▶ este de asemenea o variabilă aleatoare
 - ▶ $s(t_0)$ este o constantă, egală fie cu $\underline{s_0(t_0)}$, fie cu $\underline{s_1(t_0)}$
- ▶ Care e distribuția lui $r(t_0)$?
 - ▶ o constantă + o v.a. = aceeași distribuție ca v.a., dar translată cu valoarea constantei

Funcții de plauzibilitate

H_0

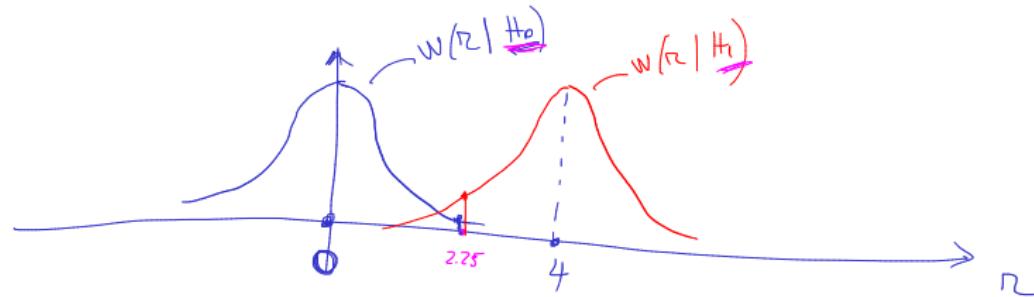
- ▶ Fie distribuția zgromotului cunoscută, $w(x)$
- ▶ Distribuția lui r este $w(x)$ translată cu $s(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_0 , distribuția eșantionului este $w(r|H_0) = w(x)$ translată cu $s_0(t_0)$
- ▶ În ipoteza H_1 , distribuția eșantionului este $w(r|H_1) = w(x)$ translată cu $s_1(t_0)$
- ▶ $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ se numesc **distribuții conditionate** sau **funcțiile de plauzibilitate**
 - ▶ “|” înseamnă “conditionat de”, “dat fiind”
 - ▶ adică dat fiind una sau cealaltă dintre ipoteze
 - ▶ r reprezintă necunoscuta funcției



$$H_0: \text{Dacă } s_0 \text{ transmis } s_0(t) \Rightarrow r = s_0(t_0) + \text{zgromot}$$

$$H_1: \text{Dacă } s_1 \text{ transmis } s_1(t) \Rightarrow r = s_1(t_0) + \text{zgromot}$$

Functii de plauzibilitate



Exemplu:

- Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Care e distribuția unui eșantion r , în ambele ipoteze?

$$r = s(t) + \text{zgomot}$$

\ / \ /

fie 0 fie 4

Decizie pe baza celor două distribuții:

- ▶ Avem două distribuții posibile (câte una în fiecare ipoteză)
- ▶ Avem un eşantion $r = r(t_0)$, care poate proveni din oricare distribuție $= 2.25$
- ▶ Care ipoteză **decidem** a fi adevărată?

Plauzibilitatea unui parametru

- În general, **plauzibilitatea (likelihood)** unui parametru P pe baza unor **observații** O = densitatea de probabilitate a lui O , dacă parametrul are valoarea P :

$$\underline{L(P|O)} = w(O|P)$$

- În cazul nostru:
 - parametrul necunoscut = care ipoteză H este cea adevărată
 - observațiile = eșantionul r
- **Plauzibilitatea unei ipoteze H pe baza observației r este:**

$\text{Plauzib. ipotezei } H_0 = \underline{L(H_0|r)} = w(r|H_0) = \text{Prob. lui } r, \text{ presupunând că } H_0 \text{ e adevărată}$

$$L(H_1|r) = w(r|H_1)$$

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- ▶ **Criteriul plauzibilității maxime** ("Maximum Likelihood"): se alege ipoteza cu cea mai mare plauzibilitate de a fi generat eșantionul observat $r = r(t_0)$

- ▶ "alegem ipoteza cea mai plauzibilă"
- ▶ "se alege ipoteza cu plauzibilitatea mai mare"

$L = \frac{\text{plauzibilitate}}{L}$

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} 1 \stackrel{H_0}{\lessgtr} 1$$

- ▶ Se alege valoarea maximă dintre $w(r(t_0)|H_0)$ și $w(r(t_0)|H_1)$
- ▶ Se compară **raportul de plauzibilitate** cu 1

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)}$$

Raport de plauzibilitate

Decizie H_1 ,
 $H_1 > H_0$
Decizie H_0

Exemplu: zgomot gaussian

PM

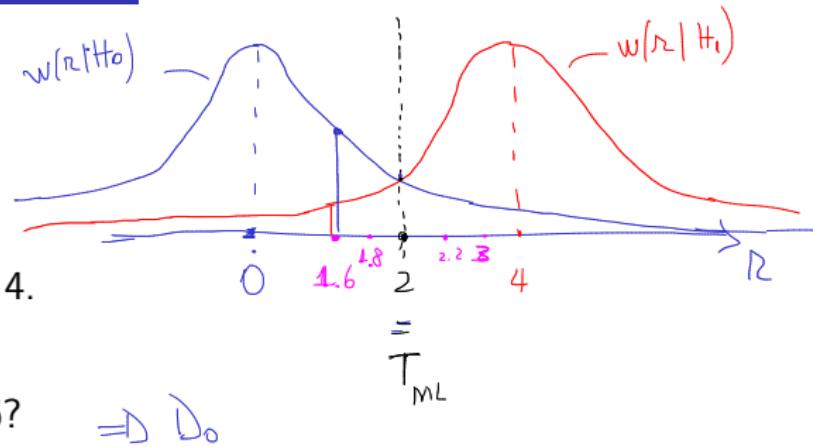
Exemplu (continuare):

- ▶ Un semnal constant $s(t)$ poate avea două valori posibile, 0 sau 4. Semnalul este afectat de zgomot $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.

- ▶ Care e decizia luată cu criteriul ML, pentru un eşantion $r = 1.6$?

- ▶ La tablă:

- ▶ schită a celor două distribuții conditionate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
- ▶ discuție: ce decizie se ia pentru diferite valori ale lui r
- ▶ discuție: care este pragul T pentru decizii



Exemplu: Frunze

Din care copac a căzut frunza?

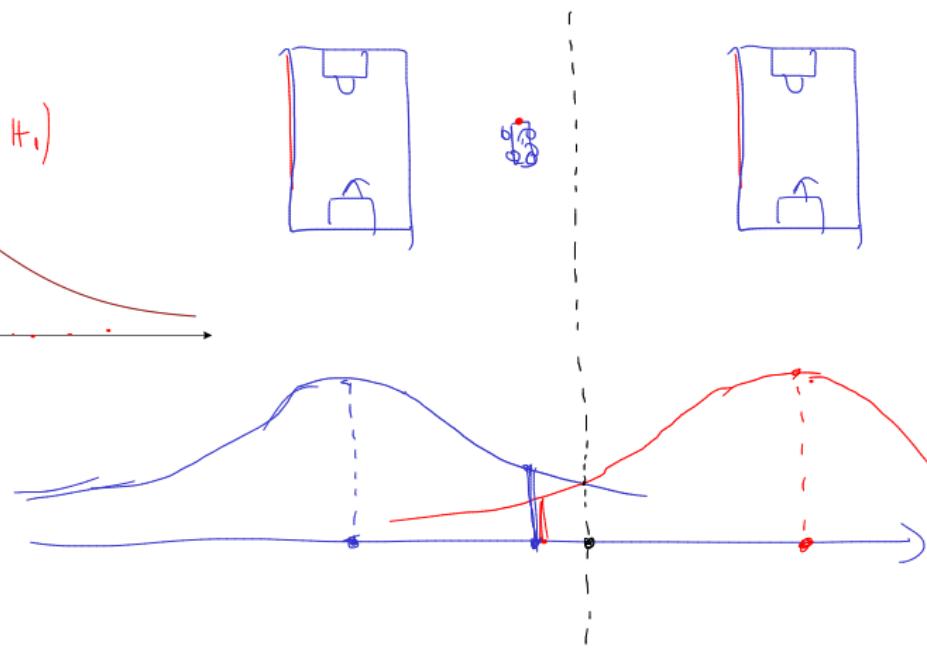
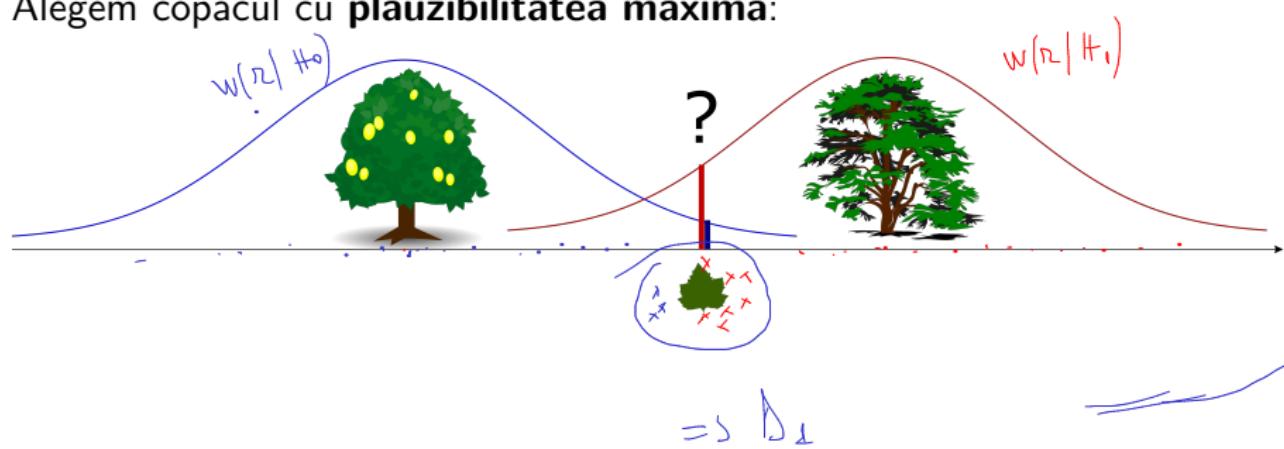


?



Exemplu: Frunze

Alegem copacul cu **plauzibilitatea maximă**:



Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

- ▶ Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

- ▶ zgomot de tip AWGN

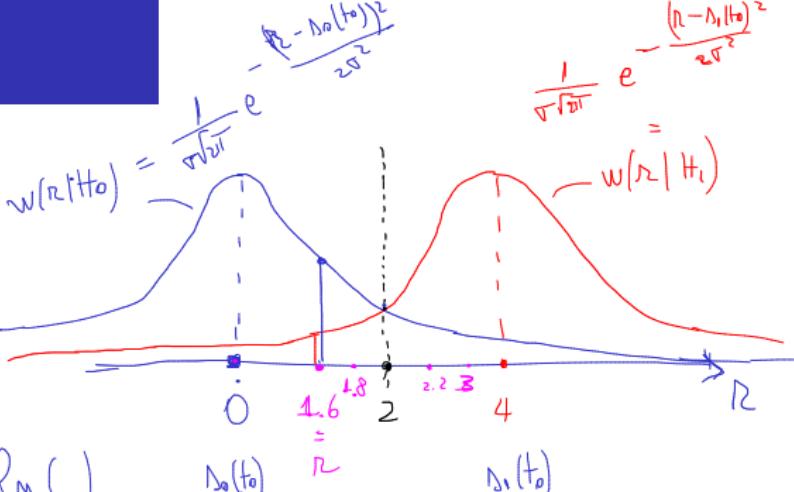
- ▶ Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}} H_1}{e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}} H_0} \geq 1$

- ▶ Pentru distribuția normală, e preferabil să aplicăm **logaritmul natural**

- ▶ logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
- ▶ dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$

$$\ln(\) - \ln(\) \stackrel{=0}{\geq} \ln(1) \quad \cdot 2\sigma^2$$

$$\frac{-(r-\mu_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-\mu_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \geq 0$$



Zgomot cu distribuție normală (AWGN)

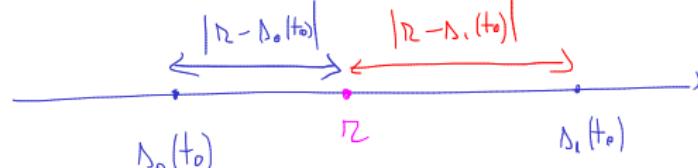
- ▶ Aplicarea logaritmului natural la ambii termeni ai relației conduce la:

$$-(r - s_1(t_0))^2 + (r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} 0$$

$$\left[\left(r - s_0(t_0) \right)^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \left(r - s_1(t_0) \right)^2 \right] \quad \left[\sqrt{\text{...}} \right]$$

- ▶ Care este echivalent cu:

$$|r - s_0(t_0)| \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$



- ▶ Notă: $|r - A| = \text{distanța}$ dintre r și A

▶ $|r| = \text{distanța de la } r \text{ la } 0$

- ▶ Așadar, se alege distanță minimă dintre $r(t_0)$ și $s_1(t_0)$ sau $s_0(t_0)$

- ▶ Criteriul ML pentru zgomot gaussian: ipoteza se alege pe baza **celei mai apropiate** valori dintre $s_0(t_0)$ și $s_1(t_0)$ față de eșantionul $r = r(t_0)$
 - ▶ principiul **cel mai apropiat vecin** ("nearest neighbor")
 - ▶ un principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
 - ▶ un receptor ce folosește ML se mai numește **receptor de distanță minimă** ("minimum distance receiver")

Etape pentru decizia pe baza ML

1. Se schițează cele două distribuții condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
2. Se determină care dintre cele două funcții este mai mare în dreptul valorii eșantionului observat $r = r(t_0)$

Etape pentru decizia pe baza ML, zgromot gaussian

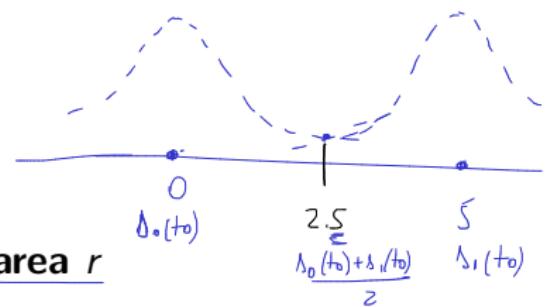
- ▶ Doar dacă zgromotul este gaussian, identic pentru toate ipotezele:
 1. Se determină $s_0(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgromotului, în cazul ipotezei H_0
 2. Se determină $s_1(t_0)$ = valoarea semnalului original, în absența zgromotului, în cazul ipotezei H_1
 3. Se compară cu eșantionul observat $r(t_0)$, se alege cea mai apropiată valoare

Decizie pe bază de prag

- ▶ Alegerea valorii celei mai apropiate = același lucru cu compararea r cu un prag $T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$

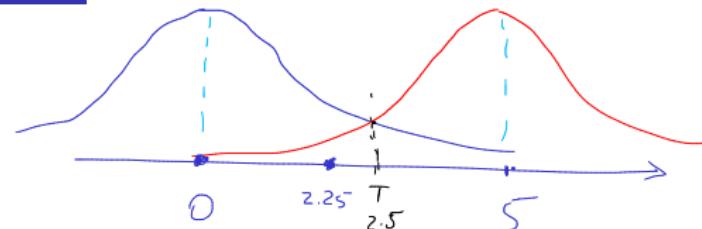
▶ i.e. dacă cele două valori sunt 0 și 5, luăm o decizie prin compararea lui r cu 2.5

- ▶ La criteriul ML , pragul = punctul de intersecție al celor două distribuții condiționate



Exercițiu

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul este afectat de zgomot alb, gaussian, cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$. Receptorul ia un singur eșantion, cu valoarea $r = 2.25$

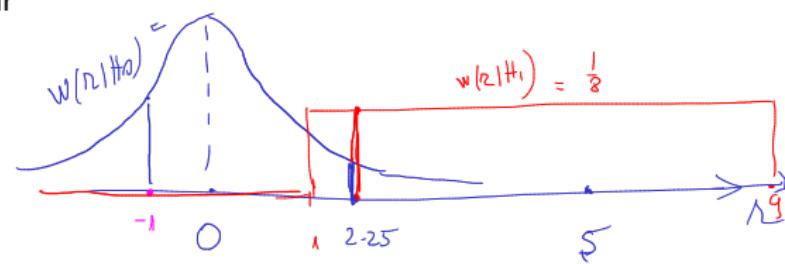


$\rightarrow D_0$

- Scriți expresiile celor două distribuții condiționate, și reprezentați-le
- Ce decizie se ia pe baza criteriului plauzibilității maxime?
- Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $U[-4, 4]$?
- Repetați b. și c. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1

$$W(r|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\geq \frac{1}{8}$$



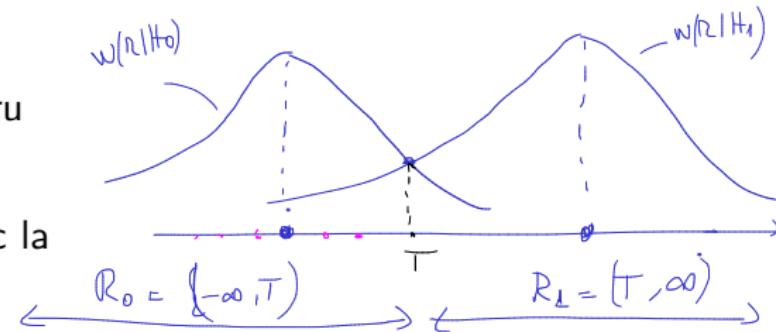
$$w(r|H_1) = \frac{1}{8}$$

5

Regiuni de decizie

- ▶ **Regiuni de decizie** = intervalul de valori ale eșantionului r pentru care se ia o anumită decizie
- ▶ Regiunea de decizie R_0 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_0
- ▶ Regiunea de decizie R_1 = intervalul de valori ale lui r care conduc la decizia D_1
- ▶ Regiunile de decizie acoperă întreg domeniul de valori ale lui r (toată axa reală)
- ▶ Exemplu: indicați regiunile de decizie la exercițiul anterior

- ▶ $R_0 = [-\infty, 2.5]$
- ▶ $R_1 = [2.5, \infty]$



Plauzibilitate vs probabilitate

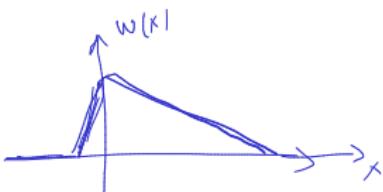
- ▶ Distincție subtilă între termenii “probabilitate” și “plauzibilitate”
- ▶ Să considerăm distribuția condiționată $w(r|H_i)$ de la exemplul anterior:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r - s_i(t_0))^2}{2\sigma^2}}$$

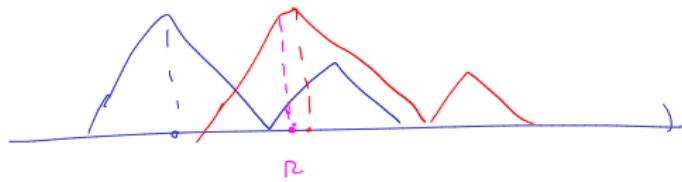
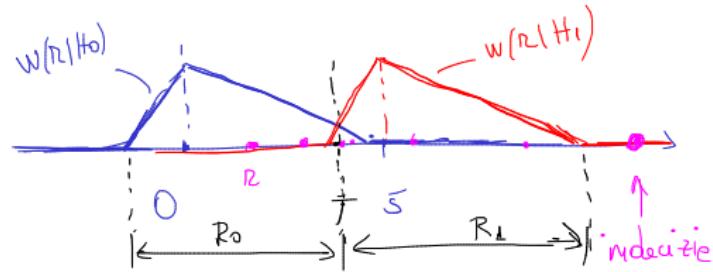
- ▶ Care este necunoscută în această expresie?
 - ▶ În general, r
 - ▶ dar în cazul deciziei noastre este i , iar r este cunoscut

- ▶ Pentru aceeași expresie matematică a funcției de distribuție:
 - ▶ dacă se cunosc parametrii statistici (de ex. μ, σ, H_i), și necunoscuta este valoarea însăși (de ex. r, x) atunci funcția o interpretăm ca densitatea de **probabilitate**
 - ▶ dacă se cunoaște valoarea însăși (de ex. r, x), și necunoscuta este un parametru statistic (de ex. μ, σ, i), atunci avem o **funcție de plauzibilitate**

Generalizări

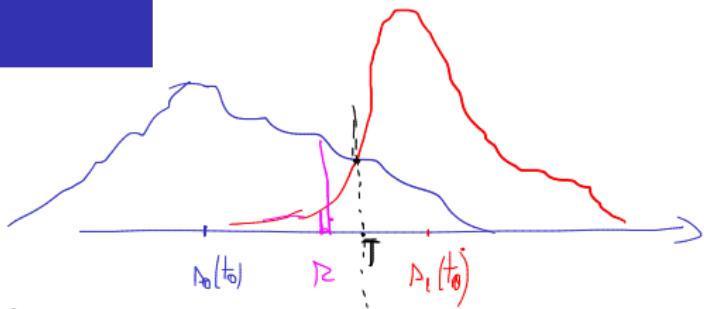


- ▶ Dacă zgomotul are altă distribuție?
 - ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
 - ▶ Se evaluatează pentru $r = r(t_0)$
 - ▶ Criteriul ML = se alege cea mai mare funcție $w(r|H_i)$ în punctul r dat
- ▶ Regiunile de decizie sunt date de **punctele de intersecție** ale distribuțiilor condiționate
 - ▶ Pot fi mai multe intersectări, în general, deci mai multe praguri



- ▶ Dacă zgomotul are distribuție diferită în ipoteza H_0 față de ipoteza H_1 ?
- ▶ Similar:

- ▶ Se schițează distribuțiile condiționate
- ▶ Se evaluatează pentru $r = r(t_0)$
- ▶ Criteriul ML = se alege **cea mai înaltă funcție** $w(r|H_i)$ în punctul r dat



Generalizări

$$s_0 = 0 \quad s_1 = 5$$

$$s_0 = \cos(2\pi 0.3t) \quad s_1 = \sin(2\pi 0.3t)$$

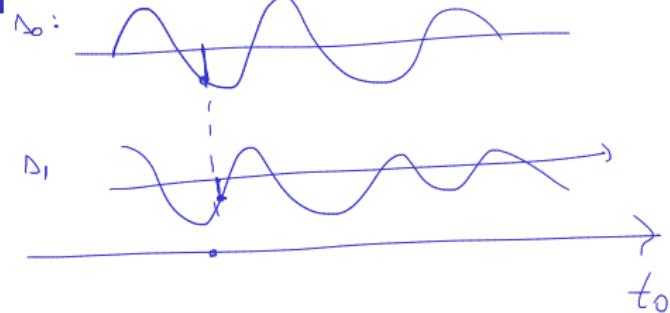
- ▶ Dacă cele două semnale $s_0(t)$ și $s_1(t)$ sunt constante / nu sunt constante?
- ▶ Nu contează forma semnalelor
- ▶ Tot ce contează sunt **valorile celor două semnale la momentul de eșantionare t_0** :

▶ $s_0(t_0) = A$
 ▶ $s_1(t_0) = B$

$$s_0(t) = \cos(2\pi f t) \Rightarrow$$

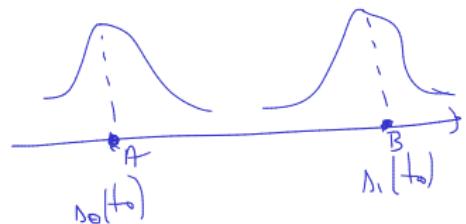
$$s_1(t) = \sin(2\pi f t) \Rightarrow$$

$$t_{t_0} = 0.38c.$$



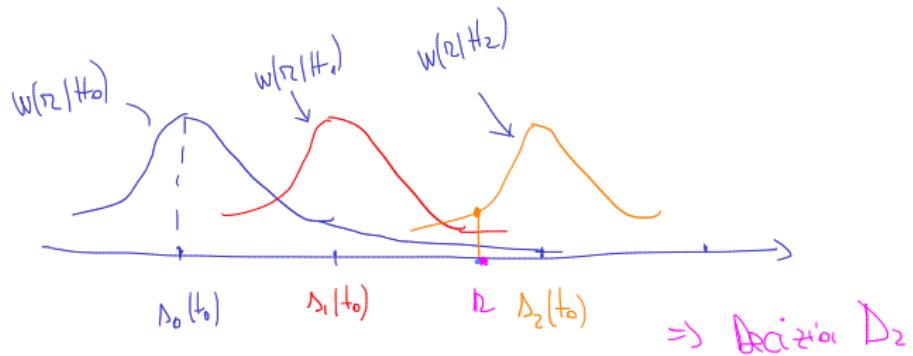
$$s_0(t_0) = \cos(2\pi f t_0) =$$

$$s_1(t_0) = \sin(2\pi f t_0) =$$



Generalizări

- ▶ Dacă avem mai mult de 2 ipoteze?
- ▶ Se extinde raționamentul la n ipoteze
 - ▶ Avem n semnale posibile $s_0(t), \dots, s_{n-1}(t)$
 - ▶ Avem n valori diferențiale $s_0(t_0), \dots, s_{n-1}(t_0)$
 - ▶ Avem n distribuții condiționate $w(r|H_i)$
 - ▶ Se alege distribuția $w(r|H_i)$ **cea mai înaltă** pentru $r = r(t_0)$ dat



- ▶ Dacă se iau mai multe eșantioane din semnale?
- ▶ Va fi tratat separat într-un subcapitol ulterior

Multiple separate detection

- ▶ Într-un proces de comunicație, fiecare detectie/decizie produce valoarea unui bit (mesaj)
- ▶ Se repetă o altă detectie separată pentru bitul (mesajul) următor, și tot așa

La Seminar

- Un semnal poate avea patru valori posibile: -6, -2, 2, 6. Fiecare valoare este transmisă timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

4, 6.6, -5.2, 1.1, 0.3, -1.5, 7, -7, 4.4

Probabilități condiționate

- ▶ Putem calcula **probabilitățile condiționate** ale celor 4 rezultate posibile

- ▶ Fie regiunile de decizie:

- ▶ R_0 : dacă $r \in R_0$, decizia este D_0
- ▶ R_1 : dacă $r \in R_1$, decizia este D_1

- ▶ Probabilitatea condiționată a rejectiei corecte

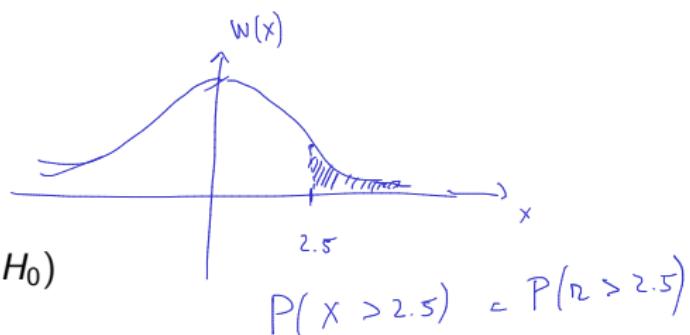
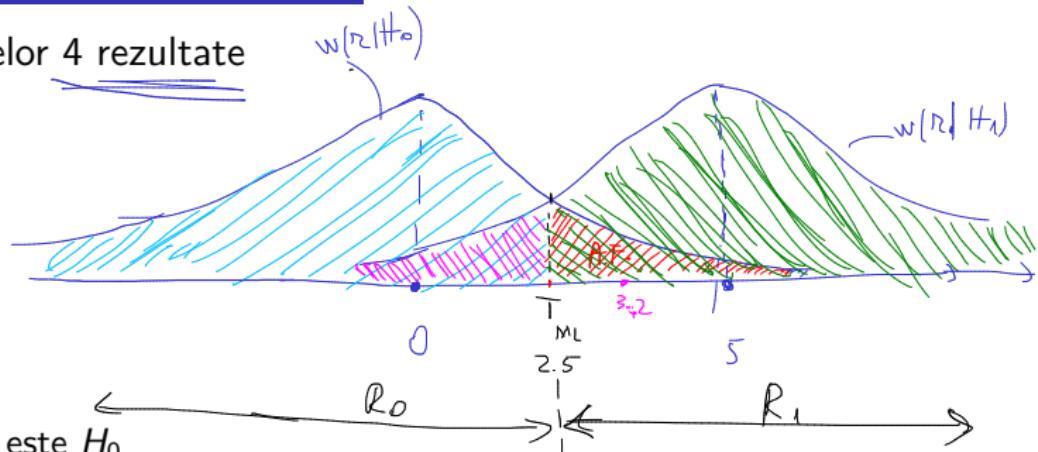
- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_0
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_0|H_0) = \int_{R_0} w(r|H_0) dx$$

- ▶ Probabilitatea condiționată a alarmei false

- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_0
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_0)$

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0) dx$$



▶ Probabilitatea condiționată de pierdere

- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_0 când ipoteza este H_1
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_0 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1) dx$$

▶ Probabilitatea condiționată a detectiei corecte

- ▶ = probabilitatea de a lua decizia D_1 când ipoteza este H_1
- ▶ = probabilitatea ca r să fie în R_1 , calculată pe distribuția $w(r|H_1)$

$$P(D_1|H_1) = \int_{R_1} w(r|H_1) dx$$

- ▶ Relații între probabilitățile condiționate
 - ▶ suma $P(D_0|H_0) + P(D_1|H_0) = 1$ (rejecție corectă + alarmă falsă)
 - ▶ suma $P(D_0|H_1) + P(D_1|H_1) = 1$ (pierdere + detectie corectă)
 - ▶ De ce? Justificați.

Probabilități condiționate

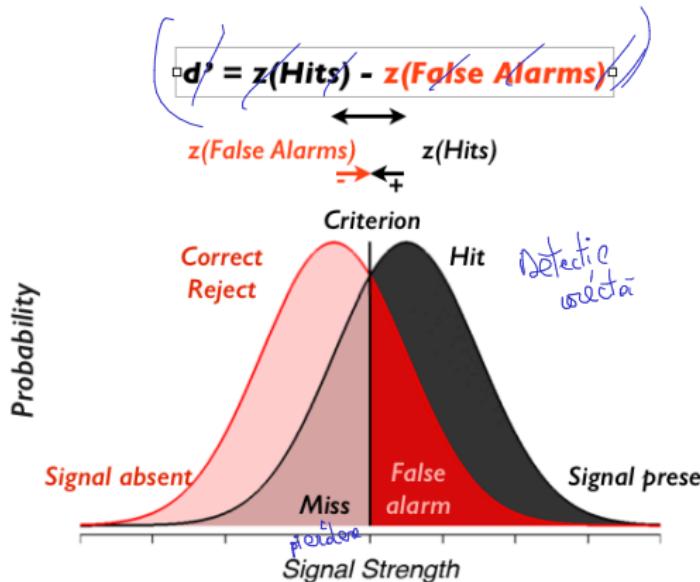


Figure 2: Probabilități condiționate

- ▶ Ignorați textul, contează zonele colorate
- ▶ [sursa: <http://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt>]*

Probabilitățile celor 4 rezultate

- ▶ Probabilitățile condiționate sunt calculate **dat fiind** una sau alta dintre ipoteze

- ▶ Nu includ și probabilitățile **ipotezelor înselor**

- ▶ adică, $P(H_0)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_0
 - ▶ $P(H_1)$ = probabilitatea de a avea ipoteza H_1

- ▶ Pentru a le lua în calcul, se multiplică cu $P(H_0)$ sau $P(H_1)$

- ▶ $P(H_0)$ și $P(H_1)$ se numesc probabilitățile **înțiale** (sau **a priori**) ale ipotezelor

$$P(D_1 \cap H_1) = P(D_1 | H_1) \cdot P(H_1)$$

Reamintire (TCI): regula lui Bayes

► Reamintire (TCI): regula lui Bayes

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

si
„condiționat de”
„deacă”

► Interpretare:

- ▶ Probabilitatea $P(A)$ este extrasă afară din din $P(B|A)$
- ▶ $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, sănsele ca A chiar să aibă loc
- ▶ Exemplu: $P(\text{gol} | \text{"șut la poartă"}) = \frac{1}{2}$. Câte goluri se înscriv?

► La noi:

$$P(D_i \cap H_j) = P(D_i|H_j) \cdot P(H_j)$$

- ▶ pentru toți i și j (în toate cele 4 cazuri)

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \end{aligned}$$

$$P(B|A) \cdot P(A)$$

Exercițiu

$$\frac{P(D_i | H_j)}{P(D_i \cap H_j)} = P(D_i | H_j) \cdot \underset{\text{si}}{P(H_j)}$$

- Un semnal constant poate avea două valori posibile, 0 sau 5.

Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 2)$.

Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilității maxime, folosind un singur eșantion din semnal.

a. Calculați probabilitatea condiționată a alarmei false

$$P(D_1 | H_0)$$

b. Calculați probabilitatea condiționată de pierdere

$$P(D_0 | H_1)$$

c. Dacă $P(H_0) = \frac{1}{3}$ și $P(H_1) = \frac{2}{3}$, calculați probabilitatea rejecției corecte și a detectiei corecte (nu cele condiționate)

$$P(D_0 | H_0) \cdot \underline{P(H_0)}$$

$$\underline{P(D_1 | H_1) \cdot P(H_1)}$$

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

w($n | \quad$)

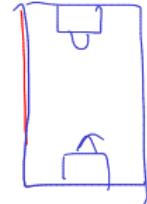
- ▶ Criteriul ML compară distribuțiile conditionate ale eșantionului observat
 - ▶ conditionate de ipotezele H_0 sau H_1
- ▶ Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1
 - ▶ Decizia e aceeași indiferent dacă $P(H_0) = 99.99\%$ și $P(H_1) = 0.01\%$, sau invers
- ▶ Dacă $P(H_0) > P(H_1)$, am vrea să împingem pragul de decizie înspre H_1 , și vice-versa
 - ▶ pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
 - ▶ și de aceea vrem să “favorizăm”/“încurajăm” decizia D_0
- ▶ Avem nevoie de un criteriu mai general . . .

Exemplu: Terenuri de fotbal

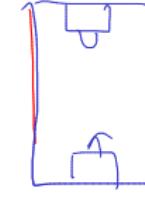
$$P(H_0) = \frac{1}{7}$$

$$w(n \mid H_0) \cdot P(H_0)$$

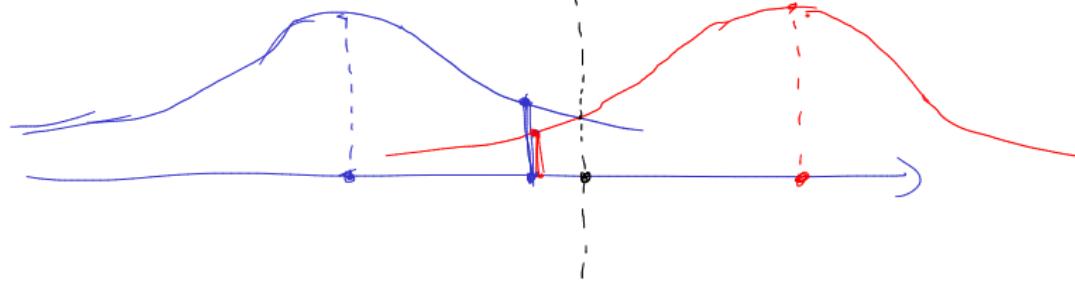
$$w(r \mid H_1) \cdot P(H_1)$$



$$P(H_1) = \frac{6}{7}$$



TODO



Criteriul probabilității minime de eroare

- ▶ Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- ▶ Se urmărește minimizarea probabilității totale de eroare

$$P_e = P_{af} + P_p \quad = \quad P(D_1 \cap H_0) + P(D_0 \cap H_1)$$

- ▶ erori = alarmă falsă și pierdere
- ▶ Trebuie să găsim un nou criteriu
 - ▶ adică, alte regiuni de decizie R_0 și R_1

Probabilitatea de eroare

- ▶ Probabilitatea unei alarme false este:

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap H_0) &= P(D_1|H_0) \cdot P(H_0) \\ &= (1 - P(D_0|H_0)) \cdot P(H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0) dx \cdot P(H_0) \\ &= \left(1 - \int_{R_0} w(r|H_0) dx\right) \cdot P(H_0) = P(H_0) - P(H_0) \cdot \int_{R_0} w(r|H_0) dx \end{aligned}$$

- ▶ Probabilitatea de pierdere este:

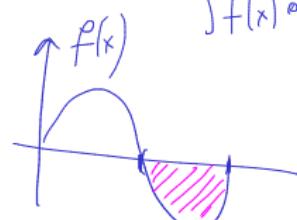
$$\begin{aligned} P(D_0 \cap H_1) &= P(D_0|H_1) \cdot P(H_1) \\ &= \int_{R_0} w(r|H_1) dx \cdot P(H_1) \end{aligned}$$

$$R_0 = (-\infty, T]$$

$$\int f(x) dx$$

- ▶ Probabilitatea totală a erorilor (suma lor) este:

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^T [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)] dx \quad \leftarrow \text{Vream minimum!}$$



Probabilitatea de eroare minimă

- ▶ Urmărim minimizarea P_e , adică să minimizăm integrala
- ▶ Putem alege R_0 cum dorim, pentru acest scop
- ▶ Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
 - ▶ integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- ▶ Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- ▶ Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1
- ▶ Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \stackrel{H_1}{\geqslant} 0$$
$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\geqslant} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Criteriul probabilității minime de eroare

$$P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2} \Rightarrow M.L.$$

► Criteriul probabilității minime de eroare (MPE):

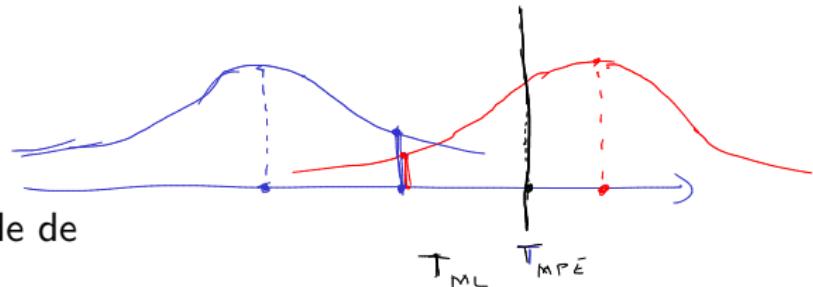
$$\left[\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right]$$

(=)

$$\left[\frac{\frac{w(r|H_1) \cdot P(H_1)}{w(r|H_0) \cdot P(H_0)}}{\frac{w(r|H_0) \cdot P(H_0)}{w(r|H_1) \cdot P(H_1)}} \stackrel{H_1}{\gtrless} \frac{1}{1} \right]$$

► prescurtat MPE (Minimum Probability of Error)

- ▶ Criteriul MPE este o generalizare a criteriului ML, depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
 - ▶ se exprimă tot sub forma unui raport de plauzibilitate
- ▶ Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- ▶ Criteriul ML este un caz particular al MPE pentru for
 $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$



$$\begin{array}{c} P(H_0) > P(H_1) \\ 4/5 \qquad \qquad \qquad 1/5 \end{array}$$

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- ▶ Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} = \frac{e^{-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$e^{\frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} - \frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2}} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad \left| \mu(\cdot) \right.$$

- ▶ Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-s_1(t_0))^2}{2\sigma^2} + \frac{(r-s_0(t_0))^2}{2\sigma^2} \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lesssim} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right) \quad \left| \cdot 2\sigma^2 \right.$$

- ▶ Echivalent

$$(r-s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lesssim} (r-s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ sau, dacă se desfac parantezele:

$$r \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\gtrless} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul ML, se compară distanțele (la pătrat):

$$\rightarrow |r - s_0(t_0)| \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} |r - s_1(t_0)|$$

$$\rightarrow (r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2$$

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - \underline{s}_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - \underline{s}_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

suplimentar

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$

Interpretarea 2: valoarea de prag

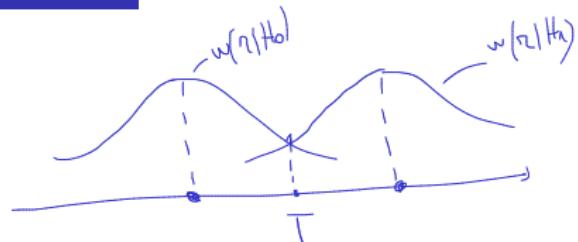
- ▶ La criteriul ML, se compară r cu un prag T

$$r \stackrel{H_1}{\geq} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2}$$

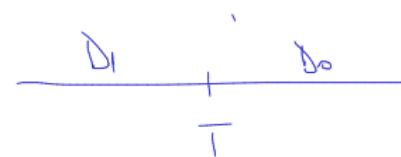
- ▶ La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \stackrel{H_1}{\geq} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)}_{\text{termen suplimentar}}$$

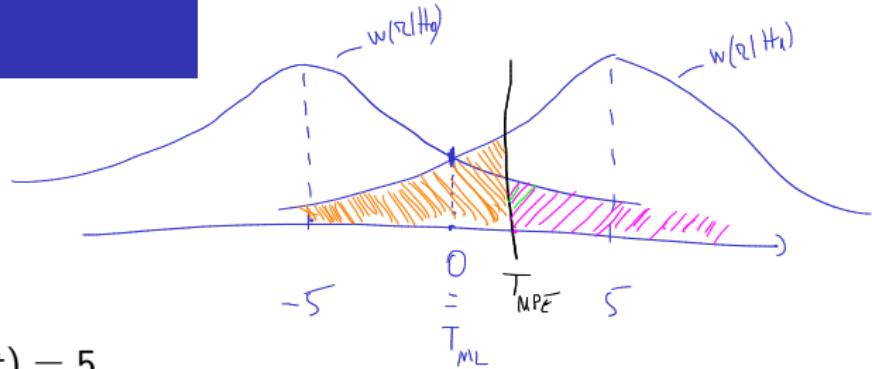
În funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$



Depinde:



Exerciții



$$P(H_0) = \frac{4}{5} \quad P(H_1) = \frac{1}{5}$$

► Fie decizia între două semnale constante: $s_0(t) = -5$ și $s_1(t) = 5$.

Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană

$\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r .

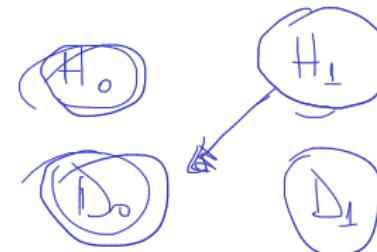
- Să se găsească regiunile de decizie conform criteriului MPE
- Calculați probabilitatea alarmei false și probabilitatea de pierdere
- Repetați a) și b) dacă $s_1(t)$ este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?

a) $T_{MPE} = \underbrace{\frac{-5 + 5}{2}}_{\text{mean}} + \frac{1}{5+5} \cdot \ln(4) = \frac{\ln(4)}{10} = \boxed{0.06}$

b) $P_{of} = P(D_1 \cap H_0) = \underbrace{P(D_1 | H_0) \cdot P(H_0)}_{T_{ML}} = \int_{0.06}^{\infty} w(r | H_0) dr \cdot P(H_0)$
 $P_p = P(D_0 \cap H_1) = \underbrace{P(D_0 | H_1) \cdot P(H_1)}_{T_{NPE}} = \int_{-\infty}^{0.06} w(r | H_1) dr \cdot P(H_1)$

Criteriul riscului minim

- ▶ Dacă ne afectează mai mult un anume tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte (pierderi)?
 - ▶ Criteriul MPE tratează toate erorile la fel
 - ▶ Ne trebuie un criteriu mai general
- ▶ Idee: se atribuie un cost fiecărui scenariu, apoi se minimizează costul mediu
- ▶ C_{ij} = costul deciziei D_i ; când ipoteza adevărată este H_j
 - ▶ C_{00} = costul unei rejectii corecte
 - ▶ ~~C_{10}~~ = costul unei alarme false
 - ▶ ~~C_{01}~~ = costul unei pierderi
 - ▶ C_{11} = costul unei detectii corecte
- ▶ Ideea de "costuri" și minimizarea costului mediu este general întâlnită
 - ▶ de ex. TCI: codare: "costul" unui mesaj este lungimea cuvântului de cod, vrem să minimizăm costul mediu, adică lungimea medie



Criteriul riscului minim

$$R = C_{00} \cdot 25\% + C_{10} \cdot 5\% + C_{01} \cdot 2\% + C_{11} \cdot 68\%$$

- Definim riscul = **media costurilor**

$$R = \underbrace{C_{00}P(D_0 \cap H_0)}_{+} + \underbrace{C_{10}P(D_1 \cap H_0)}_{+} + \underbrace{C_{01}P(D_0 \cap H_1)}_{+} + \underbrace{C_{11}P(D_1 \cap H_1)}_{+}$$

- Criteriul riscului minim: se minimizează riscul R

- adică se minimizează costul mediu
- se mai numește “criteriul costului minim”

Calcule

$$P(D_0 \cap H_0) = P(D_0 | H_0) \cdot P(H_0) = P(H_0) \cdot \int_{R_0} w(r | H_0) dr \quad | \cdot C_{00}$$

$$P(D_1 \cap H_0) = P(D_1 | H_0) \cdot P(H_0) = P(H_0) \cdot \left(1 - \int_{R_0} w(r | H_0) dr\right) \quad | \cdot C_{10}$$

$$P(D_0 \cap H_1) = P(H_1) \cdot \int_{R_1} w(r | H_1) dr \quad | \cdot C_{01}$$

$$P(D_1 \cap H_1) = P(H_1) \cdot \left(1 - \int_{R_1} w(r | H_1) dr\right) \quad | \cdot C_{11}$$

Demonstrație la tablă

se folosește regula lui Bayes

Concluzie: regula de decizie este

$$R = C_{10} \cdot P(H_0) + C_{11} \cdot P(H_1) + \int_{R_0} \left[w(r | H_0) (C_{00} \cdot P(H_0) - C_{10} \cdot P(H_0)) + w(r | H_1) (C_{01} \cdot P(H_1) - C_{11} \cdot P(H_1)) \right] dr$$

Vrem minim!

$$\frac{w(r | H_1)}{w(r | H_0)} \frac{H_1}{H_0} \frac{(C_{10} - C_{00}) \cdot P(H_0)}{(C_{01} - C_{11}) \cdot P(H_1)}$$

$$w(r | H_0) \cdot P(H_0) (C_{00} - C_{10}) \geq_{H_0} w(r | H_1) \cdot P(H_1) (C_{11} - C_{01})$$



$$\Rightarrow R_0 : \text{unde este } < 0 \quad (\Rightarrow w(r | H_0) \cdot P(H_0) (C_{00} - C_{10}) < w(r | H_1) \cdot P(H_1) (C_{11} - C_{01}))$$

$R_0 :$

$\Rightarrow 0$

$$\int_{R_1} = 1 - \int_{R_0}$$

Criteriul riscului minim

$$C_{01} - C_{11} = C_{10} - C_{00}$$

\Rightarrow MPE

Criteriul riscului minim (MR):

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\underset{\text{erorare}}{\downarrow} w(r|H_1) \cdot P(H_1) \cdot \underset{\text{OK}}{\downarrow} (C_{01} - C_{11})}{\underset{\text{erorare}}{\uparrow} w(r|H_0) \cdot P(H_0) \cdot \underset{\text{OK}}{\uparrow} (C_{10} - C_{00})} \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lneq} 1$$

- prescurtat MR (Minimum Risk)

- ▶ Criteriul MR este o generalizare a MPE (la rândul lui o generalizare a ML)
 - ▶ se exprimă tot printr-un raport de plauzibilitate
- ▶ Atât probabilitățile cât și costurile pot influența decizia în favoarea uneia sau alteia dintre ipoteze
- ▶ Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, MR se reduce la criteriul MPE
 - ▶ de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- Dacă zgomotul este gaussian (normal), la fel ca în celelalte criterii, se aplică logaritmul natural
- Se obține:

$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

► sau

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

T_{MR}

Interpretarea 1: Comparație între distanțe

- ▶ La criteriul MPE, se compară pătratul distanțelor, dar cu un termen suplimentar în favoarea ipotezei mai probabile:

$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ termenul depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pe lângă probabilități apar și costurile

$$(r - s_0(t_0))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

Interpretarea 2: Valoarea de prag

- ▶ La criteriul MPE, pragul este împins înspre ipoteza mai puțin probabilă:

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- ▶ În funcție de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ La criteriul MR, pragul este influențat și de costuri

$$r \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)$$

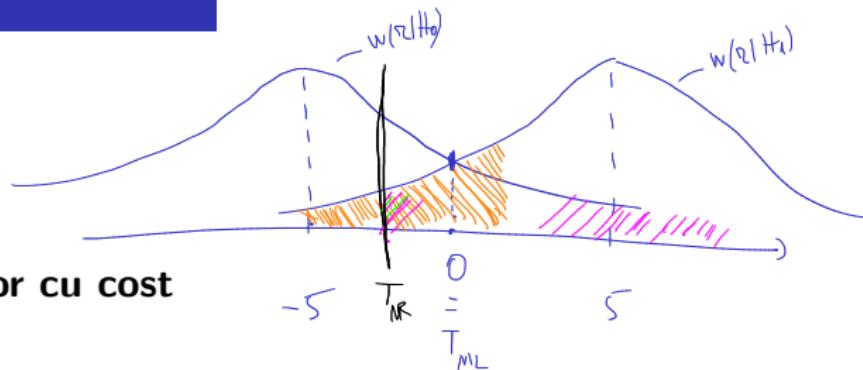
$\ln \left(\frac{0,001}{}$

T

Influența costurilor

- ▶ Criteriul MR împinge decizia înspre **minimizarea scenariilor cu cost ridicat**
- ▶ Exemplu: din ecuații:

- ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{01} crește, iar celealte rămân la fel?
- ▶ ce se întâmplă dacă costul C_{10} crește, iar celealte rămân la fel?
- ▶ ce se întâmplă dacă ambele costuri C_{01} și C_{10} cresc, iar celealte rămân la fel?



Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

- ▶ Criteriile ML, MPE și MR au toate forma următoare

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ pentru ML: $K = 1$
- ▶ pentru MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ pentru MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Forma generală a criteriilor ML, MPE și MR

În zgomot gaussian, criteriile se reduc la:

- Compararea pătratului distanțelor:

$$(r - s_0(t_0))^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} (r - s_1(t_0))^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln(K)$$

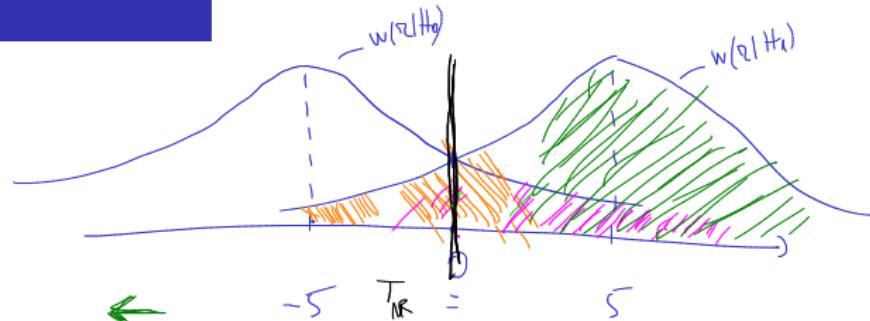
- Compararea eșantionului r cu un prag T :

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)}_T$$

- ▶ Un sistem *airbag* detectează un accident prin eșantionarea semnalului de la un senzor cu 2 valori posibile: $s_0(t) = 0$ (OK) sau $s_1(t) = 5$ (accident).
- ▶ Semnalul este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$.
- ▶ Se ia un singur eșantion din semnal.
- ▶ Costurile scenariilor sunt: $C_{00} = 0$, $C_{01} = 100$, $C_{10} = 10$, $C_{11} = -100$
 - a. Găsiți regiunile de decizie R_0 și R_1 .

Criteriul Neyman-Pearson

- Un criteriu mai general decât toate cele de până acum
- Criteriul Neyman-Pearson: se maximizează probabilitatea de detectie ($P(D_1 \cap H_1)$) păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată ($P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda$)
 - Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$
- Criteriile ML, MPE și MR sunt cazuri particulare ale Neyman-Pearson, pentru diverse valori ale λ .



\Rightarrow Când $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow T \Rightarrow \infty$

Când $\lambda \rightarrow 1 \Rightarrow T \Rightarrow -\infty$

- ▶ O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$. 10
- ▶ Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție uniformă $U[-5, 5]$.
- ▶ Receptorul ia un singur eșantion r .
 - a. Găsiți regiunile de decizie conform criteriului Neymar-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
 - b. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Aplicație: Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Aplicație: transmisie binară cu semnale constante (de ex. nivele constante de tensiune)

- ▶ Două modalități frecvent întâlnite:

- ▶ Semnal unipolar: o valoare este 0, cealaltă este nenulă
 - ▶ $s_0(t) = 0, s_1(t) = A$

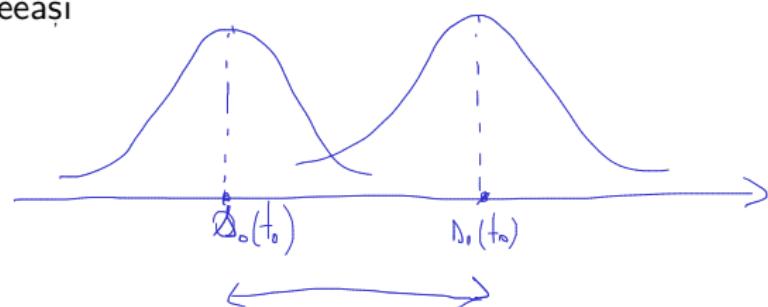
- ▶ Semnal diferențial: două valori nenele cu semne contrare, aceeași valoare absolută

- ▶ $s_0(t) = -\frac{A}{2}, s_1(t) = \frac{A}{2}$

- ▶ Care metodă este mai bună?

$$\begin{array}{ll} \Delta_0(+): & \Delta_1(+): \\ 0 \vee & 5 \vee \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Delta_0(-): & \Delta_1(-): \\ -2.5 \vee & 2.5 \vee \end{array}$$



- ▶ Pentru că există aceeași diferență între nivele, performanțele deciziei sunt identice
- ▶ Dar puterea medie a semnalelor diferă
- ▶ Pentru semnale diferențiale: $P = \left(\pm \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$
- ▶ Pentru semnale unipolare: $P = P(H_0) \cdot 0 + P(H_1)(A)^2 = \frac{A^2}{2}$
 - ▶ presupunând probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Semnalul diferențial necesită putere la jumătate față de cel unipolar (mai bine)

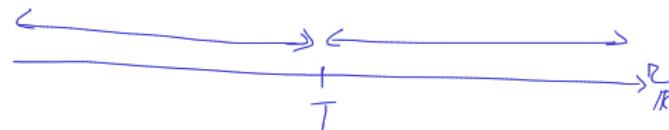
Sumar: criterii de decizie

- ▶ Am văzut: decizie între două semnale, bazată pe 1 eșantion
- ▶ Toate criteriile au la bază raportul de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K \quad \begin{array}{c} K = \\ \swarrow \quad \searrow \\ k = \\ \swarrow \quad \searrow \\ k = \end{array}$$

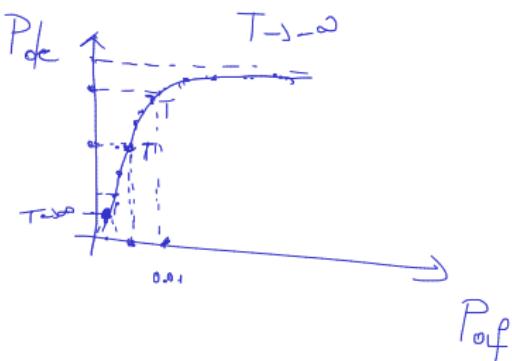
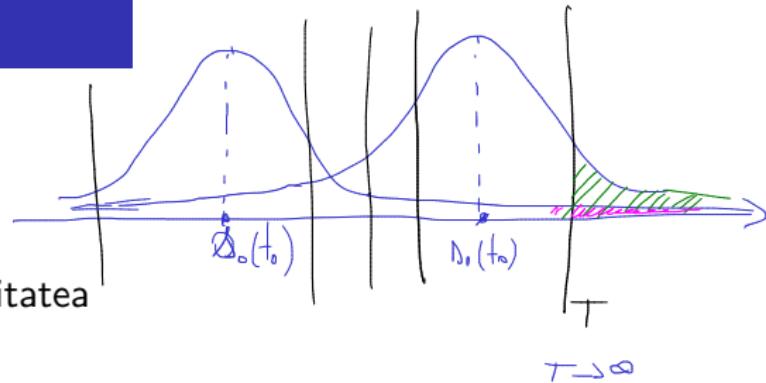
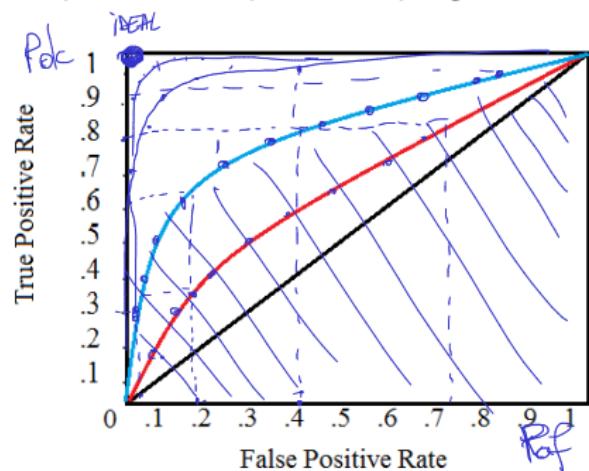
- ▶ Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K
- ▶ În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni de decizie
 - ▶ regiunea R_0 : dacă r este aici, se decide D_0
 - ▶ regiunea R_1 : dacă r este aici, se decide D_1
- ▶ Pentru zgomot gaussian, granița între regiuni (valoarea de prag) este:

$$T = \frac{s_0(t_0) + s_1(t_0)}{2} + \frac{\sigma^2}{s_1(t_0) - s_0(t_0)} \cdot \ln(K)$$



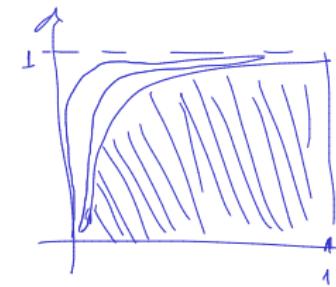
Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **“Caracteristica de operare a receptorului”** (“**Receiver Operating Characteristic**”, ROC)
- ▶ Reprezintă probabilitatea $P_{cd} = P(D_1|H_1)$ în funcție de probabilitatea $P_{af} = P(D_1|H_0)$
 - ▶ pentru diferite praguri T
 - ▶ fiecare T corespunde unui punct de pe grafic



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Există întotdeauna un **compromis** între P_d (bun) și P_{fa} (rău)
 - ▶ creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
 - ▶ pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- ▶ Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
 - ▶ dar întotdeauna e vorba de un compromis
- ▶ O măsură a performanței globale este **Area Under the Curve** (AUC)
 - ▶ indiferent de alegerea unui prag sau a altuia

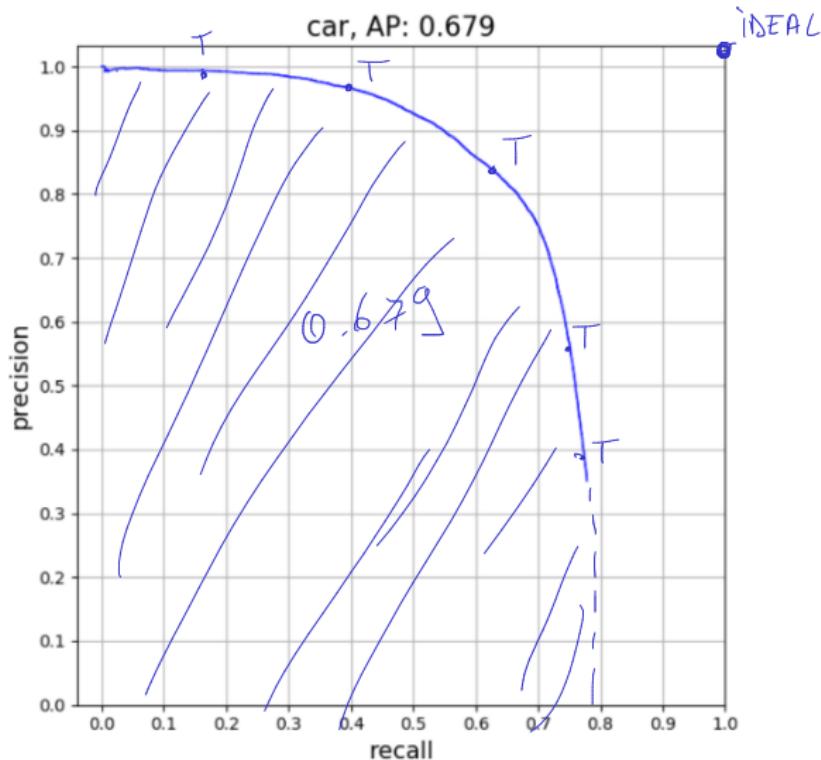


Caracteristica Precision vs Recall

- ▶ Un grafic similar este cel de Precision vs Recall
- ▶ **Precision** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_1 \cap H_0)}$
 - ▶ = True Positives / (True Positives + False Positives)
- ▶ **Recall** = $\frac{P(D_1 \cap H_1)}{P(D_1 \cap H_1) + P(D_0 \cap H_1)} = P(D_1 | H_1)$
 - ▶ = True Positives / (True Positives + False Negatives)

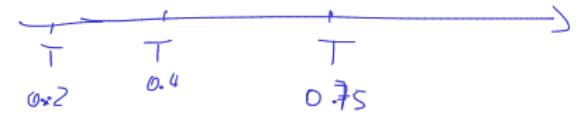
Caracteristica Precision vs Recall

Exemplu de grafic Precision vs Recall dintr-o aplicație practică



Caracteristica Precision vs Recall

Aplicația pentru care este obținut graficul precedent:



$$D_1 \cap H_2$$

$$D_0 \cap H_1$$

$$D_1 \cap H_0$$

$$D_0 \cap H_0$$

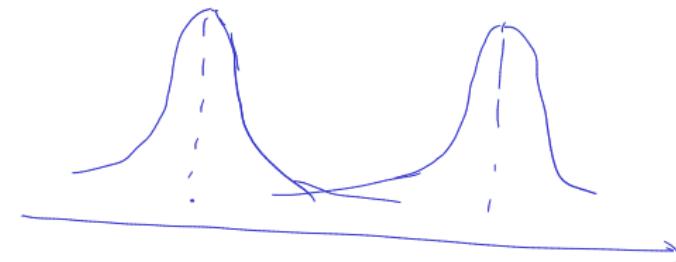
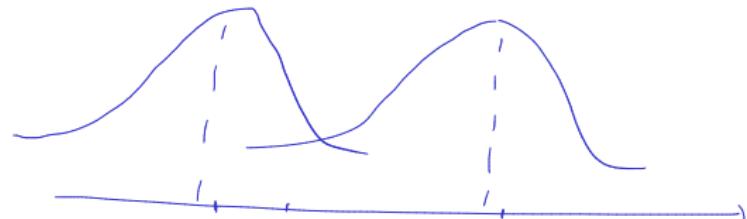
Raport Semnal-Zgomot

- ▶ Cum putem îmbunătăți performanțele de detecție?

- ▶ i.e. creșterea P_d pentru același P_{af}
- ▶ independent de alegerea unui prag sau a altuia
 T

- ▶ Două soluții:

- ▶ Creșterea diferenței dintre $s_0(t)$ și $s_1(t)$ (se crește puterea semnalului)
- ▶ Scăderea zgomotului (se scade **puterea zgomotului**)
- ▶ i.e. se crește **raportul Semnal-Zgomot**



- ▶ Următoarele trei slide-uri nu se cer pentru examenul 2020-2021 (până la Raportul semnal zgromot).

2021 – 2022

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
 - ▶ Sau, echivalent, considerăm doar probabilități condiționate
- ▶ Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned}P_d &= P(D_1|H_1) \\&= \int_T^{\infty} w(r|H_1) \\&= (F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P(D_1|H_0) \\ &= \int_T^{\infty} w(r|H_0) \\ &= (F(\infty) - F(T)) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\ &= Q \left(\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$

- ▶ Rezultă $\frac{T - s_0(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa})$,
- ▶ Și: $\frac{T - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa}) + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma}$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Înlocuind în P_d , obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} + \frac{s_0(t_0) - s_1(t_0)}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- ▶ Fie un scenariu simplu:

- ▶ $s_0(t_0) = 0$
- ▶ $s_1(t_0) = A = \text{constant}$

- ▶ Obținem:

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Raportul semnal zgomot

- ▶ **Raportul semnal zgomot (SNR)** = $\frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$



- ▶ Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie = $\overline{X^2}$
 - ▶ Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
 - ▶ Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- ▶ În cazul nostru, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \sqrt{\text{SNR}} \right)$$

- ▶ Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
 - ▶ Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- ▶ Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
 - ▶ SNR mare: performanță bună
 - ▶ SNR mic: performanță slabă

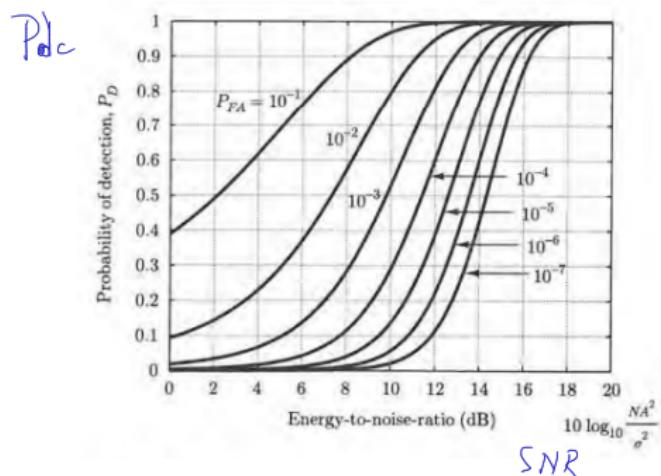
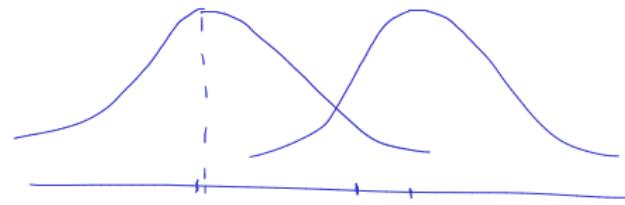


Figure 6: Performanțele detectiei depend de SNR

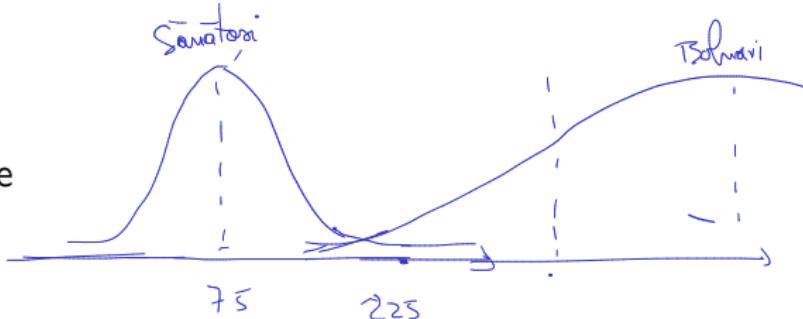
[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

- ▶ Se pot utiliza aceste criterii de decizie în alte aplicații?
 - ▶ nu pentru a decide între semnale, ci în alte scopuri
- ▶ Matematic, problema se pune sub forma următoare:
 - ▶ avem 2 (sau mai multe) distribuții posibile
 - ▶ avem 1 valoare observată
 - ▶ determinăm cea mai plauzibilă distribuție, pe baza valorii observate
- ▶ În acest caz particular, decidem între două semnale
- ▶ Dar acest model matematic se poate aplica și în alte contexte:
 - ▶ medicină: un semnal ECG indică o boală sau nu?
 - ▶ business: va cumpăra clientul un produs, sau nu?
 - ▶ De obicei se folosesc mai multe eşantioane, dar principiul matematic este același



Exemplu (pur imaginar):

- ▶ O persoană sănătoasă cu greutatea $= X$ kg are concentrația de trombocite pe ml de sânge distribuită aproximativ $\mathcal{N}(\mu = 10 \cdot X, \sigma^2 = 20)$.
- ▶ O persoană suferind de boala B are o valoare mult mai scăzută, distribuită aproximativ $\mathcal{N}(100, \sigma^2 = 10)$.
- ▶ În urma analizelor de laborator, ai obținut valoarea $r = 255$. Greuata ta este 70 kg.
- ▶ Decideți: sănătos sau nu?



II.3 Detectia semnalelor cu mai multe esantioane

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Se transmite un semnal $s(t)$
 - ▶ Există **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul original este $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ H_1 : semnalul original este $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ Receptorul poate lua **două decizii**:
 - ▶ D_0 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_0(t)$
 - ▶ D_1 : se decide că semnalul a fost $s(t) = s_1(t)$
 - ▶ Există 4 scenarii posibile

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- ▶ Contextul rămâne același:
 - ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot (necunoscut)
 - ▶ Se recepționează un semnal $\underline{r(t)} = s(t) + n(t)$
- ▶ Se iau N eșantioane din $r(t)$, nu doar 1
 - ▶ Fiecare eșantion $r_i = r(t_i)$ se ia la momentul t_i
- ▶ Eșantioanele formează **vectorul de eșantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

Eșantioane multiple dintr-un semnal

- ▶ Fiecare eșantion r_i este o **variabilă aleatoare**

- ▶ $r(t_i) = s(t_i) + n(t_i) = \text{constantă} + \text{o v.a.}$

- ▶ Vectorul \mathbf{r} reprezintă un set de N v.a. dintr-un proces aleator

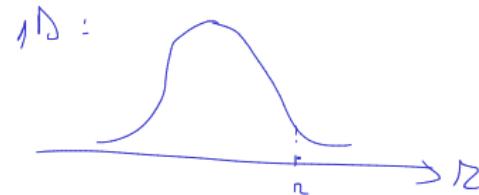
- ▶ Considerând întreg vectorul \mathbf{r} , valorile vectorului \mathbf{r} sunt descrise de **distribuții de ordin N**

- ▶ În ipoteza H_0 :

$$\underline{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N | H_0)$$

- ▶ În ipoteza H_1 :

$$\underline{w_N(\mathbf{r}|H_1)} = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N | H_1)$$



$$\mathbf{r} : w(\mathbf{r})$$

3D :

$$\mathbf{r} = [3, 7, 9.5]$$

$$w(\mathbf{r})$$

Plauzibilitatea vectorului de eşantioane

- ▶ Se aplică aceleasi criterii bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eșantion

$$\left[\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} \frac{H_1}{H_0} \gtrless K \right] = \begin{cases} \text{L, NL} \\ \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \\ \dots, MPE \\ \dots, MR \end{cases}$$

- ▶ Observații
 - ▶ \mathbf{r} este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eșantioanelor
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_1
 - ▶ valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- ▶ Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
 - ▶ identic ca la 1 eșantion, doar că acum datele = mai multe eșantioane

Descompunere

- ▶ Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt independente
- ▶ În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = \underbrace{w(r_1|H_j)}_{\cdot} \underbrace{w(r_2|H_j)}_{\cdot} \cdots \underbrace{w(r_N|H_j)}_{\cdot}$$

- ▶ de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9] =$ plauzibilitatea obținerii lui 5.1 \times plauzibilitatea obținerii lui 4.7 \times plauzibilitatea obținerii lui 4.9
- ▶ Funcțiile $w(r_i|H_i)$ sunt distribuțiile condiționate ale fiecărui eșantion
 - ▶ de care am mai văzut deja

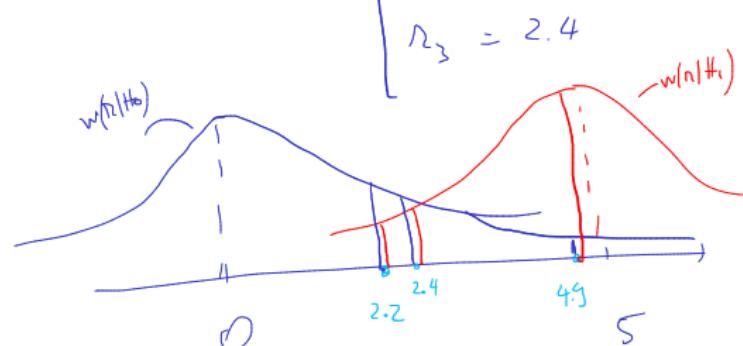
Descompunere

- ▶ Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \left[\frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \right]_{H_0}^{H_1} \geq K$$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al unui vector de eșantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eșantion
- ▶ **Se înmulțesc** rapoartele de plauzibilitate ale fiecărui eșantion în parte, și se aplică criteriile asupra rezultatului final

$$\begin{aligned} \Delta_0 (+) &= 0 \\ \Delta_1 (+) &= 5 \end{aligned}$$



$$\text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \geq K$$

H_1
 H_0

- ▶ Toate criteriile de decizie pot fi scrise astfel:

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \stackrel{H_1}{\gtrless} K$$

- ▶ Valoarea lui K se alege ca pentru 1 eșantion:

- ▶ criteriul ML: $K = 1$
- ▶ criteriul MPE: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ criteriul MR: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Caz particular: AWGN

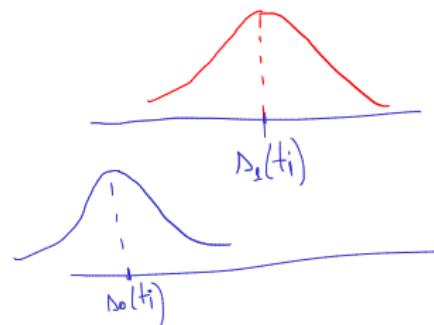
- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise” = Zgomot alb, gaussian, aditiv

- ▶ În ipoteza H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ În ipoteza H_0 : $w(r_i|H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}$

- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^N \frac{(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\sum_{i=1}^N \frac{(r_i - s_0(t_i))^2}{2\sigma^2}}} = e^{\frac{\sum (r_i - s_0(t_i))^2 - \sum (r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$



$$\frac{e^{-\frac{(r_1 - s_1(t_1))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r_1 - s_0(t_1))^2}{2\sigma^2}}} \cdot \frac{e^{-\frac{(r_2 - s_1(t_2))^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(r_2 - s_0(t_2))^2}{2\sigma^2}}} \cdot \dots$$

Criterii de decizie pentru AWGN

- Raportul de plauzibilitate global se compară cu K :

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = e^{\frac{\sum(r_i - s_0(t_i))^2 - \sum(r_i - s_1(t_i))^2}{2\sigma^2}} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} K$$

$$\cdot P_m (\quad) \Leftrightarrow$$

- Se aplică logaritmul natural, obținându-se:

$$\boxed{\sum_{i=1}^N (r_i - s_0(t_i))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \sum (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)}$$

$d(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_0(t))$ $d(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1(t))$

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

$$\mathbf{s}_0(t_i) = [s_{01}(t_i), s_{02}(t_i), \dots, s_{0N}(t_i)]$$

$$\mathbf{s}_1(t_i) = [s_{11}(t_i), s_{12}(t_i), \dots, s_{1N}(t_i)]$$

Interpretarea 1: distanță geometrică

- ▶ Sumele reprezintă distanță geometrică la pătrat:

$$\sum(r_i - s_1(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_1(t))^2$$

$$\sum(r_i - s_0(t_i))^2 = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_0(\mathbf{t})\|^2 = d(\mathbf{r}, s_0(t))^2$$

- ▶ distanță între vectorul observat \mathbf{r} și semnalele originale $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$
- ▶ vectori cu N eșantioane \Rightarrow distanță între vectori de dimensiune N
- ▶ Totul se reduce la a compara distanțele

$(y_1, y_2) = y$
 $x = (x_1, x_2)$
 $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$



$d(a, b) = |a - b| = \sqrt{(a - b)^2}$

► Criteriul Maximum Likelihood:

- ▶ $K = 1, \ln(K) = 0$
- ▶ se alege **distanța minimă** între \mathbf{r} și vectorii $s_1(t)$, respectiv $s_0(t)$)
- ▶ de unde și numele “receptor de distanță minimă”

► Criteriul Minimum Probability of Error:

- ▶ $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Apare un termen suplimentar, în favoarea ipotezei mai probabile

► Criteriul Minimum Risk:

- ▶ $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$
- ▶ Termenul suplimentar depinde și de probabilități, și de costuri

Exercițiu

Exercițiu:

- Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.

- Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
- Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
- Ce decizie se ia conform criteriului roscului minim. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?

$$\mathbf{R} = [1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8]$$

$$\Delta_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\Delta_1 = [6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6]$$

$$d(\mathbf{R}, \Delta_0)^2 \stackrel{H_0}{\geq} d(\mathbf{R}, \Delta_1)^2 + 2\pi^2 h(K)$$

$$d(\mathbf{R}, \Delta_0)^2 = (1.1-0)^2 + (4.4-0)^2 + \dots + (3.8-0)^2$$

$$d(\mathbf{R}, \Delta_1)^2 = (1.1-6)^2 + (4.4-6)^2 + \dots + (3.8-6)^2$$

Alt exercițiu

Alt exercițiu:

- Fie detecția unui semnal $s(t) = 3 \sin(2\pi ft)$ care poate fi prezent (ipoteza H_1) sau absent ($s_0(t) = 0$, ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot alb Gaussian $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane.
- Care sunt cele mai bune momente de eșantionare t_1 și t_2 pentru a maximiza performanțele detecției?
 - Receptorul ia două eșantioane $\{1.1, 4.4\}$, la momentele de timp $t_1 = \frac{0.125}{f}$ și $t_2 = \frac{0.625}{f}$. Care este decizia, conform criteriului plauzibilității maxime?
 - Dacă se folosește criteriul probabilității minime de eroare, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?
 - Dacă se folosește criteriul riscului minim, cu $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$, iar $C_{00} = 0$, $C_{10} = 10$, $C_{01} = 20$, $C_{11} = 5$?
 - Dar dacă receptorul ia un al treilea eșantion la momentul $t_3 = \frac{0.5}{f}$. Se poate îmbunătăți detecția?

$$R = [1.1, 4.4]$$

$$\Delta_0 = [0, 0]$$

$$\Delta_1 = [3 \sin(2\pi f t_1), 3 \sin(2\pi f t_2)]$$

Interpretarea 2: produs scalar

- Dacă se descompun parantezele:

$$\sum_{i=1}^N (r_i - s_0(t_i))^2 \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \sum_{i=1}^N (r_i - s_1(t_i))^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Se obține:

$$\begin{aligned} \cancel{\sum (r_i)^2} + \sum s_0(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_0(t_i) &\stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \cancel{\sum (r_i)^2} + \\ &+ \sum s_1(t_i)^2 - 2 \sum r_i s_1(t_i) + 2\sigma^2 \ln(K) \end{aligned}$$

- Echivalent cu:

$$\sum_{\langle n, b_i \rangle} r_i s_1(t_i) - \frac{\sum (s_1(t_i))^2}{2} \stackrel{H_1}{\underset{H_0}{\gtrless}} \sum_{\langle n, b_i \rangle} r_i s_0(t_i) - \frac{\sum (s_0(t_i))^2}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- Algebră: **produsul scalar** al vectorilor **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_N]$$

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_N]$$

$$\langle a, b \rangle = \sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N$$

- $\sum r_i s_1(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N] \text{ cu } \mathbf{s}_1(\mathbf{t}_i) = [s_1(t_1), s_1(t_2), \dots, s_1(t_N)]$$

- $\sum r_i s_0(t_i) = \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle$ este produsul scalar al vectorului

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N] \text{ cu } \mathbf{s}_0(\mathbf{t}_i) = [s_0(t_1), s_0(t_2), \dots, s_0(t_N)]$$

- $\sum (s_1(t_i))^2 = \sum s_1(t_i) \cdot s_1(t_i) = \langle \mathbf{s}_1(\mathbf{t}), \mathbf{s}_1(\mathbf{t}) \rangle = E_1$ este **energia** vectorului $s_1(t)$

- $\sum (s_0(t_i))^2 = \sum s_0(t_i) \cdot s_0(t_i) = \langle \mathbf{s}_0(\mathbf{t}), \mathbf{s}_0(\mathbf{t}) \rangle = E_0$ este **energia** vectorului $s_0(t)$

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ Decizia se poate reescris sub forma:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \stackrel{H_1}{\gtrless} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

suplimentar

- ▶ Interpretare: **comparăm produsele scalare**

- ▶ se scad energiile semnalelor, pentru o comparație corectă
- ▶ există de asemenea termenul care depinde de criteriul ales

► Caz particular:

- Dacă cele două semnale au energii egale:

$$E_1 = \sum s_1(t_i)^2 = E_0 = \sum s_0(t_i)^2$$

- Exemple:

- modulație BPSK: $s_1 = A \cos(2\pi ft)$, $s_0 = -A \cos(2\pi ft)$

- modulație 4-PSK: $s_{n=0,1,2,3} = A \cos(2\pi ft + n\frac{\pi}{4})$

- Atunci formula se simplifică:

$$\underbrace{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle}_{H_0} \stackrel{H_1}{\gtrless} \underbrace{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle}_{H_0} + \sigma^2 \ln(K)$$

Interpretarea 2: produs scalar

- ▶ În domeniul prelucrărilor de semnale, produsul scalar măsoară **similitudinea** a două semnale
- ▶ Interpretare: verificăm dacă vectorul eșantioanelor **r** este **mai asemănător** cu $s_1(t)$ sau cu $s_0(t)$
 - ▶ Se alege cel mai similar cu **r**
 - ▶ Se scad și energiile semnalelor (necesar d.p.d.v. matematic)
- ▶ **Produsul scalar** a doi vectori **a** și **b**:

$$\langle a, b \rangle = \sum_i a_i b_i$$

Implementare cu circuite de corelare

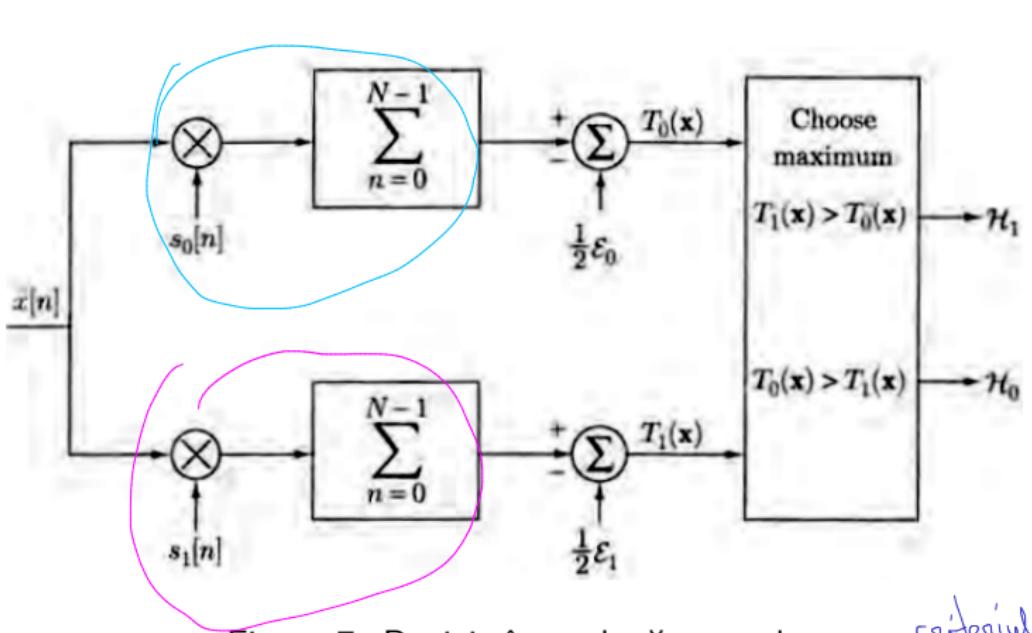


Figure 7: Decizie între două semnale

cu criteriu ML

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_0 &\Leftrightarrow \langle r_1 s_1 \rangle - \frac{1}{2} E_L \\ &+ \sqrt{E_h(K)} \end{aligned}$$

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

- ▶ Cum se calculează produsul scalar a două semnale $r[n]$ și $s[n]$ de lungime N ?

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \sum r_i s(t_i)$$

- ▶ Fie $h[n]$ semnalul  $s[n]$ oglindit

- ▶ Începe la momentul 0, durează până la momentul $N - 1$, dar este oglindit

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ Exemplu:

- ▶ dacă $s[n] = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$
 - ▶ atunci $h[n] = s[N - 1 - n] = [6, 5, 4, 3, 2, 1]$

Filtru adaptat

- Convoluția lui $r[n]$ cu $h[n]$ este

$$y[n] = \sum_k r[k]h[n-k] = \sum_k r[k]h[N-1-n+k]$$

- Rezultatul convoluției, la finalul semnalului de intrare, $y[N-1]$ ($n = N-1$), este chiar produsul scalar:

$$\underbrace{y[N-1]}_{\text{=}} = \sum_k r[k]s[k] \quad \leftarrow \langle r, s \rangle$$

Filtru adaptat

$$y[N-1] = \langle r, s \rangle$$

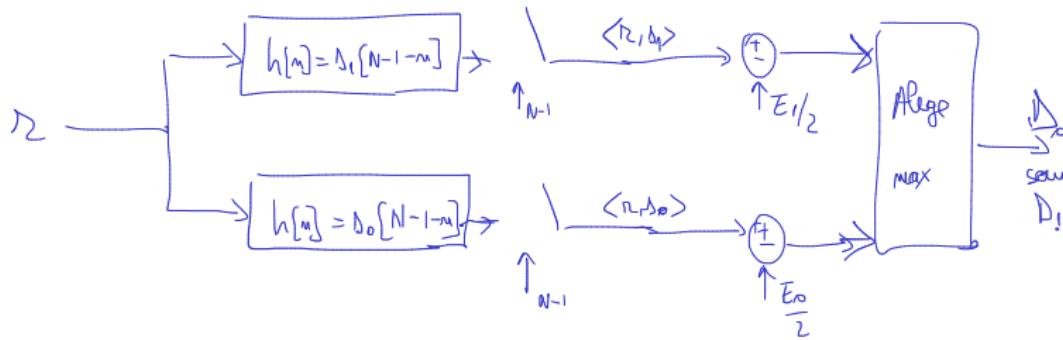
- ▶ Pentru detecția unui semnal $s[n]$ se poate folosi un **filtru al cărui răspuns la impuls = oglindirea lui** $s[n]$, luându-se eșantionul de la finalul semnalului de intrare

$$h[n] = s[N - 1 - n]$$

- ▶ se obține valoarea produsului scalar $h[n]$
- ▶ **Filtru adaptat** = un filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului care se dorește a fi detectat (eng. “matched filter”)
- ▶ filtrul este *adaptat* semnalului dorit

Detectia semnalelor cu filtre adaptate

- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t_i)$
- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_0(t_i)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile la momentul final $n = N - 1$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se folosește regula de decizie cu produse scalare



Detectia semnalelor cu filtre adaptate

- Dacă $s_0(t) = 0$, avem nevoie doar de un singur filtru adaptat pentru $s_1(t)$, și se compară rezultatul cu un prag

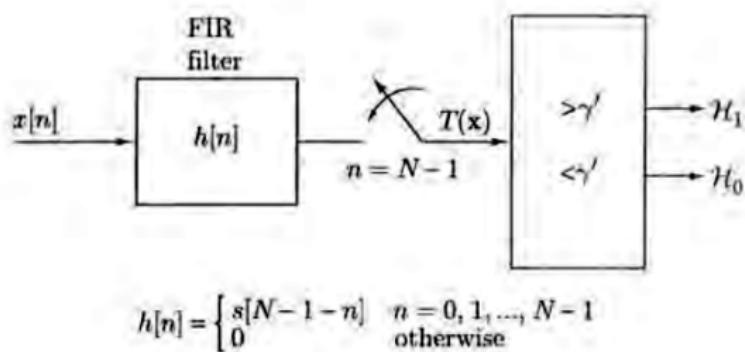


Figure 8: Detectie folosind un filtru adaptat

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Steven Kay*]

II.4 Detectia unui semnal oarecare cu observare continuă

Observarea continuă a unui semnal oarecare

- ▶ Observare continuă = fără eşantionare, se foloseşte întreg semnalul continuu
 - ▶ similar cazului cu N eşantioane, dar cu $N \rightarrow \infty$
- ▶ Semnalele originale sunt $s_0(t)$ si $s_1(t)$
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot
 - ▶ Presupunem doar zgomot Gaussian, pentru simplitate
- ▶ Semnalul recepționat este $r(t)$

- ▶ Se extinde cazul precedent cu N eșantioane la cazul unui semnal continuu, $N \rightarrow \infty$
- ▶ Fiecare semnal $r(t)$, $s_1(t)$ și $s_0(t)$ reprezintă un punct într-un spațiu Euclidian infinit dimensional
- ▶ Distanța între două semnale este:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 dt}$$

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sqrt{\sum_i (r_i - s(t_i))^2}$$

$$d(\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t)) = \sqrt{\int (r(t) - s(t))^2 dt}$$

- ▶ Produsul scalar între două semnale:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s} \rangle = \int r(t)s(t)dt$$

- ▶ Similar cu cazul N dimensional, dar cu integrală în loc de sumă

Decizie în cazul AWGN: distanțe

- În cazul AWGN este aceeași regula de decizie:

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_0)^2 \stackrel{H_1}{\gtrless} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)^2 + 2\sigma^2 \ln(K)$$

- Distanță = se calculează cu formula precedentă, cu integrală
- Aceleași criterii de decizie:
 - Criteriul Maximum Likelihood: $K = 1, \ln(K) = 0$
 - se alege **distanța minimă**
 - Criteriul Minimum Probability of Error: $K = \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
 - Criteriul Minimum Risk: $K = \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$

Decizie în cazul AWGN: produse scalare

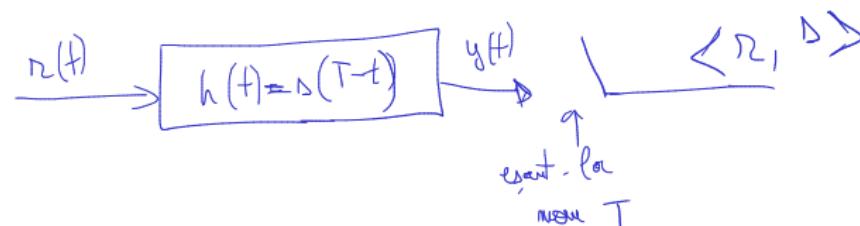
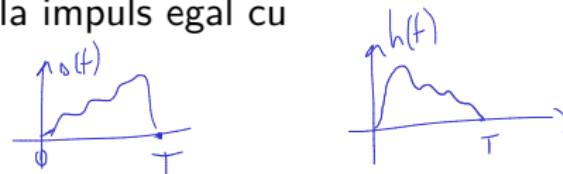
- În cazul AWGN este aceeași regulă de decizie:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_1 \rangle - \frac{E_1}{2} \stackrel{H_1}{\gtrless} \stackrel{H_0}{\lless} \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_0 \rangle - \frac{E_0}{2} + \sigma^2 \ln(K)$$

- Produsul scalar = formula precedentă, cu integrală
- Toate interpretările rămân identice
 - se schimbă doar tipul de semnal cu care lucrăm

Filtru adaptat

- ▶ Produsul scalar a două semnale se poate calcula cu un filtru adaptat
- ▶ Filtru adaptat = filtru proiectat să aibă răspunsul la impuls egal cu oglindirea semnalului căutat
 - ▶ dacă semnalul original $s(t)$ are lungimea T
 - ▶ atunci $h(t) = s(T - t)$
 - ▶ filtrul este analogic, răspunsul la impuls este continuu
- ▶ Ieșirea unui filtru adaptat la momentul $t = T$ este egală cu produsul scalar al intrării $r(t)$ cu $s(t)$



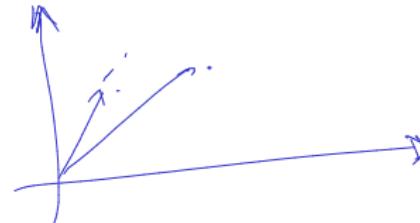
- ▶ Se folosește un filtru adaptat la semnalul $s_1(t)$
- ▶ Se folosește un alt filtru adaptat la semnalul $s_0(t)$
- ▶ Se eșantionează ieșirile filtrelor la sfârșitul semnalelor, $t = T$
 - ▶ se obțin valorile produselor scalare
- ▶ Se utilizează regula de decizie cu produse scalare

Spații vectoriale Euclidiene

- ▶ Recapitulare: Spații vectoriale Euclidiene
- ▶ Spațiu vectorial

- ▶ suma a două elemente = rămâne în același spațiu
- ▶ multiplicarea cu o constantă = rămâne în același spațiu
- ▶ există operații aritmetice de bază: sumă, multiplicare cu o constantă
- ▶ Exemple

- ▶ 1D = o dreaptă
- ▶ 2D = un plan
- ▶ 3D = spațiu tridimensional
- ▶ N-D = ...
- ▶ ∞ -D = ..



Spații vectoriale Euclidiene

- ▶ Operația fundamentală: produsul scalar

- ▶ pentru semnale discrete

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i$$

- ▶ pentru semnale continue

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t) dt$$

- ▶ Norma (lungimea) unui vector = radical(produsul scalar cu sine însuși)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- ▶ Distanța între doi vectori = norma diferenței dintre ei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

$$= \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$
$$\sqrt{\int (x(t) - y(t))^2 dt}$$

- ▶ Energia unui semnal = normă la pătrat

$$E_x = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- ▶ Unghiul dintre doi vectori

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

- ▶ are valoare între -1 și 1
- ▶ dacă $\langle x, y \rangle = 0$, vectorii sunt **ortogonali** (perpendiculari)

- ▶ Bonus: transformata Fourier = produs scalar cu $e^{j\omega t}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int x(t) e^{-j\omega t}$$

- ▶ pentru semnale complexe, al doilea termen se conjugă, de aceea este $-j$ în loc de j

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_i x_i y_i^*$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int x(t) y(t)^*$$

- ▶ Identic pentru semnale discrete

- ▶ Concluzie: definirea algoritmilor în mod generic, pe bază de produse scalare / distanțe / norme, este extrem de folositoare!
 - ▶ se aplică automat tuturor spațiilor vectoriale
 - ▶ un singur algoritm, utilizări pentru multiple tipuri de semnale

II.5 Detectia semnalelor cu distribuții necunoscute

Distribuții necunoscute

► Până acum, se cunoștea dpdv. matematic statistica tuturor datelor:

► Se cunoșteau semnalele:

- $s_0(t) = \dots$ A $\cos(2\pi f_1 t)$...
- $s_1(t) = \dots$ S ...

► Se cunoștea zgomotul

- gaussian, uniform, etc.

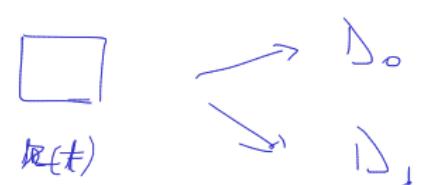
► Se cunoșteau distribuțiile condiționate:

- $w(r|H_0) = \dots$
- $w(r|H_1) = \dots$

► În aplicații reale, lucrurile pot fi mai complicate

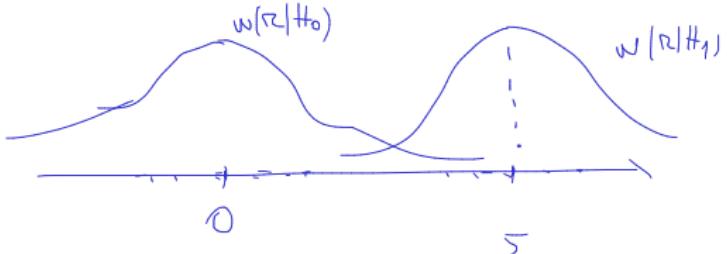
Exemplu

- ▶ Dacă semnalele $s_0(t)$ și $s_1(t)$ nu există / nu se cunosc?
- ▶ Exemplu: recunoașterea feței unei persoane
 - ▶ Identificarea persoanei A sau B bazată pe o imagine a feței
 - ▶ Avem:
 - ▶ 100 imagini ale persoanei A, în condiții diverse
 - ▶ 100 imagini ale persoanei B, în condiții diverse



- ▶ Să comparăm recunoașterea fetelor cu detectia semnalelor
- ▶ Aspecte comune:
 - ▶ două ipoteze H_0 (persoana A) și H_1 (persoana B)
 - ▶ un vector de esantioane r = imaginea pe baza căreia se face decizia
 - ▶ se pot lua două decizii D_0, D_1
 - ▶ 4 scenarii: reacție corectă, alarmă falsă, pierdere, detectie corectă
- ▶ Ce diferă? Nu există formule matematice
 - ▶ nu există semnalele "originale" $s_0(t) = \dots$ și $s_1(t) = \dots$
 - ▶ (fetele persoanelor A și B nu pot fi exprimate matematic ca semnale)
 - ▶ în schimb, avem multe exemple din fiecare distribuție
 - ▶ 100 imagini ale lui A = exemple ale r în ipoteza H_0 $w(r | H_0)$
 - ▶ 100 imagini ale lui B = exemple ale r în ipoteza H_1 $w(r | H_1)$

- ▶ Terminologia folosită în domeniul **învățării automate** (*machine learning*):
 - ▶ Acest tip de problemă = problemă de **clasificare** a semnalelor
 - ▶ se dă un vector de date, găsiți-i clasa
 - ▶ **Clase de semnal** = categoriile posibile ale semnalelor (ipotezele H_i , persoanele A/B etc)
 - ▶ **Set de antrenare** = un set de semnale cunoscute inițial
 - ▶ de ex. 100 de imagini ale fiecărei persoane
 - ▶ setul de date va fi folosit în procesul de decizie



- ▶ Setul de antrenare conține informațiile pe care le-ar conține distribuțiile condiționate $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
 - ▶ $w(r|H_0)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_0
 - ▶ $w(r|H_1)$ exprimă cum arată valorile lui r în ipoteza H_1
 - ▶ setul de antrenare exprimă același lucru, nu prin formule, dar prin multe exemple
- ▶ Cum se face clasificarea în aceste condiții?

Algoritmul k-NN

Algoritmul k-Nearest Neighbours (k-NN)

► Intrare:

- set de antrenare cu vectorii $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$, din L clase posibile de semnal
 $C_1 \dots C_L$
- clasele vectorilor de antrenare sunt cunoscute
- vector de test \mathbf{r} care trebuie clasificat
- parametrul k

1. Se calculează distanța între \mathbf{r} și fiecare vector de antrenare \mathbf{x}_i
 - se poate utiliza distanța Euclidiană, aceeași utilizată pentru detecția semnalelor din secțiunile precedente
 2. Se aleg cei mai apropiati k vectori de \mathbf{r} (cei k "nearest neighbours")
 3. Se determină clasa lui $\mathbf{r} =$ clasa majoritară între cei k cei mai apropiati vecini
- Ieșire: clasa vectorului \mathbf{r}

Algoritmul k-NN

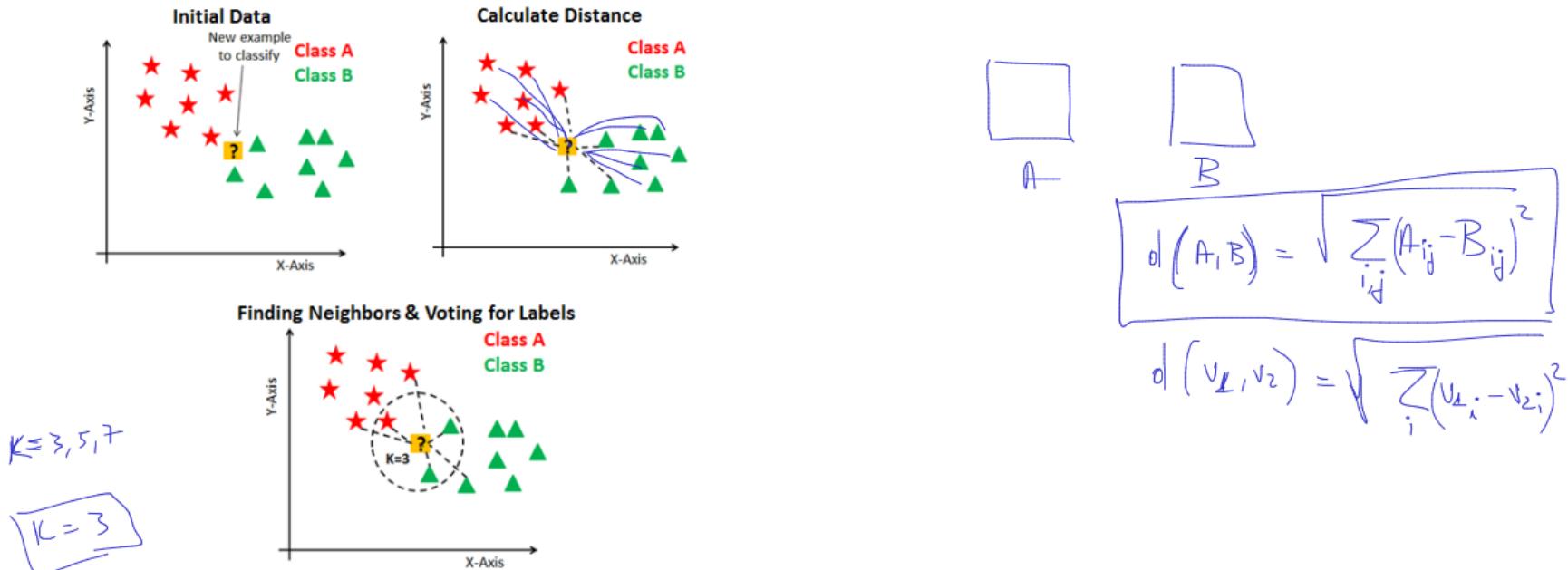


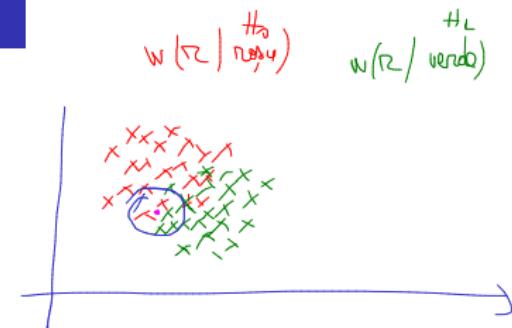
Figure 9: Algoritmul k-NN ilustrat [1]

[1] sursa: "KNN Classification using Scikit-learn", Avinash Navlani,

<https://www.datacamp.com/community/tutorials/k-nearest-neighbor-classification-scikit-learn>

Algoritmul k-NN și decizia ~~ML~~ M.P.E.

- ▶ Dacă setul de antrenare este foarte mare, algoritmul k-NN devine similar cu decizia pe baza criteriului ~~ML~~ M.P.E.
- ▶ Numărul de vectori situați într-o vecinătate a unui punct r este proporțional cu $w(r|H_i)$
- ▶ Mai mulți vecini din clasa A decât din clasa B $\Leftrightarrow \underline{w(r|H_A)} > \underline{w(r|H_B)}$



Algoritmul k-NN și decizia ~~ML~~ MPE

- ▶ Exemplu: frunze și copaci :) de povestit

Exercițiu

1. Fie următorul set de antrenare, compus din 5 vectori din clasa A și alți 5 vectori din clasa B:

► Clasa A:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

► Clasa B:

$$\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_9 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_{10} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determinați clasa vectorului $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ utilizând algoritmul k-NN, cu
 $k = 1, k = 3, k = 5, k = 7$ and $k = 9$

- ▶ k-NN este un algoritm de învățare supervizată
 - ▶ se cunosc clasele vectorilor din setul de antrenare
- ▶ Efectul lui k : netezirea frontierei de decizie:
 - ▶ k mic: frontieră foarte cotită / "șifonată" / cu multe coturi
 - ▶ k mare: frontieră mai netedă
- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?

Cross-validation

- ▶ Cum se găsește o valoare optimă pentru k ?
 - ▶ prin încercări ("băbește")
- ▶ **"Cross-validation"** = folosirea unui mic set de test pentru a verifica care valoare a parametrului e mai bună
 - ▶ acest set de date se numește set de "**cross-validare**"
 - ▶ se impune $k = 1$, se testează cu setul de "*cross-validare*" câți vectori sunt clasificați corect
 - ▶ se repetă pentru $k = 2, 3, \dots, max$
 - ▶ se alege valoarea lui k cu care s-au obținut rezultatele cele mai bune

- ▶ Cum se evaluatează performanța algoritmului k-NN?
 - ▶ Se folosește un set de date de testare, și se calculează procentajul vectorilor clasificați corect
- ▶ Setul de date pentru evaluarea finală trebuie să fie diferit de setul de "cross-validation"
 - ▶ pentru evaluarea finală se folosesc date pe care algoritmul nu le-a mai utilizat niciodată
- ▶ Cum se împarte setul de date disponibile?

Seturi de date

- ▶ Presupunem că avem în total 200 imagini tip fețe, 100 imagini ale persoanei A și 100 ale lui B
- ▶ Setul de date total se împarte în:
 - ▶ Set de antrenare
 - ▶ vectorii care vor fi utilizati de algoritm
 - ▶ cel mai numeros, aprox. 60% din datele totale
 - ▶ de ex. 60 imagini ale persoanei A și 60 ale lui B
 - ▶ Set de *cross-validation*
 - ▶ utilizat pentru a testa algoritmul în vederea alegerii parametrilor optimi (k)
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui A și 20 ale lui B)
 - ▶ Set de testare
 - ▶ utilizat pentru evaluarea finală a algoritmului, cu valorile parametrilor fixate
 - ▶ mai mic, aprox. 20% din date (de ex. 20 imagini ale lui A și 20 ale lui B)

Algoritmul *k-Means*

- ▶ k-Means: un algoritm pentru clusterizarea datelor
 - ▶ identificarea grupurilor de date apropiate între ele
- ▶ Un exemplu de algoritm de învățare nesupervizată
 - ▶ “învățare nesupervizată” = nu se cunosc clasele semnalelor din setul de antrenare

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means*

- ▶ Intrare:
 - ▶ set de antrenare cu vectorii $\underline{x_1 \dots x_N}$
 - ▶ numărul de clase C
- ▶ Inițializare: centroizii C iau valori aleatoare

$$\underline{c_i} \leftarrow \text{valori aleatoare}$$

- ▶ Repetă
 1. Clasificare: se clasifică fiecare vector x pe baza celui mai apropiat centroid:
$$classx = \arg \min_i d(x, c_i), \forall x$$
 2. Actualizare: se actualizează centroizii $c_i = \text{media vectorilor } x \text{ din clasa } i$

$$c_i \leftarrow \text{media } \underline{\text{vectorilor } x}, \forall x \text{ din clasa } i$$

- ▶ Ieșire: centroizii c_i , clasele tuturor vectorilor de intrare x_n

Algoritmul *k-Means*

Algoritmul *k-Means* explicitat video:

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 6:28 to 7:08

<https://www.youtube.com/watch?v=4b5d3muPQmA>

- ▶ Urmăriți video-ul următor, de la 3:05 la final

<https://www.youtube.com/watch?v=luRb3y8qKX4>

Algoritmul *k-Means*

- ▶ Algoritmul *k-Means* poate să nu conveargă spre niște grupuri adecvate de date
 - ▶ rezultatele depind de inițializarea aleatoare a centroizilor
 - ▶ se rulează de mai multe ori, se alege cel mai bun rezultat
 - ▶ există metode de inițializare optimizate (*k-Means++*)

Exercițiu

1. Fie datele următoare:

$$\{\mathbf{v}_n\} = [1.3, -0.1, 0.5, 4.7, 5.1, 5.8, 0.4, 4.8, -0.7, 4.9]$$

Utilizați algoritmul k-Means pentru a găsi doi centroizi \mathbf{c}_1 și \mathbf{c}_2 , pornind de la valorile aleatoare $\mathbf{c}_1 = -0.5$ și $\mathbf{c}_2 = 0.9$. Realizați 5 iterații ale algoritmului.

