Examen DEPI 2019-2020

Nr.2

Exerciții (17p)

1. Fie o variabilă aleatoare continuă A având distribuția uniformă $\mathcal{U}[-2, 6]$.

   a. (1p) Reprezentați grafic distribuția (specificați pe grafic limitele și înălțimea funcției)
   b. (1p) Calculați probabilitatea ca A să fie pozitiv
   c. (1p) Calculați valoarea medie pătratică $\overline{A^2}$
   d. (1p) Fie alta variabilă aleatoare B definită ca $B = A - x$. Cât ar trebui să fie x pentru ca probabilitatea $P(B < 0)$ să fie egală cu $\frac{1}{2}$?

2. Un semnal constant poate avea două valori posibile, $s_0(t) = -3$ (ipoteza H_0) sau $s_1(t) = 3$ (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de zgomot gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 9)$. La recepție se ia un singur eșantion, la momentul $t_0 = 2$, și se obține valoarea $r_0 = 1.5$. Cele două ipoteze au probabilitățile $P(H_0) = \frac{1}{3}$ și $P(H_1) = \frac{2}{3}$

   a. (1p) Reprezentați grafic cele două distribuții condiționate, $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$
   b. (1p) Determinați regiunile de decizie, conform criteriului plauzibilității maxime
   c. (2p) Calculați probabilitatea detecției corecte, pentru criteriul probabilității minime de eroare
   d. (1p) Care este decizia luată folosind criteriul riscului minim, dacă valorile costurilor sunt $C_{00} = 0$, $C_{01} = 5$, $C_{10} = 15$, $C_{11} = 0$?

3. Fie detecția unui semnal care poate fi de forma $s_1(t) = \sin(\frac{\pi}{4}t)$ (ipoteza H_1) sau $s_0(t) = -1$ (ipoteza H_0). Semnalul este afectat de zgomot Gaussian cu distribuția $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 3)$. La recepție se iau 3 eșantioane la momentele de timp $t_0 = 0$, $t_1 = 2$ și $t_2 = 6$, și se obțin valorile $r_0 = -0.5$, $r_1 = -0.3$ și $r_3 = 0.5$.

   a. (2p) Care este decizia luată, conform criteriului Plauzibilității Maxime?
   b. (2p) Dacă ar trebui să renunțăm la unul dintre momentele de eșantionare, la care ar fi cel mai indicat să renunțăm? (t_0, t_1 sau t_2). Justificați.

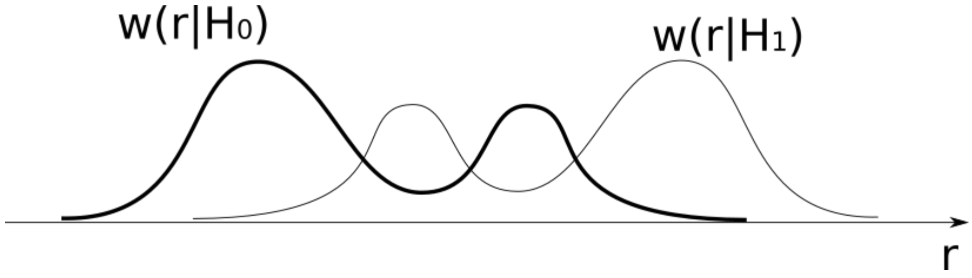
4. (4p) Se recepționează un semnal de forma $r(t) = \underbrace{A \cdot t + 4}_{s_\Theta(t)} + zgomot$, unde A este un parametru necunoscut. Zgomotul are distribuție Gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 9)$. La recepție se iau trei eșantioane, la momentele $t_0 = 0, t_1 = 2, t_2 = 4$, valorile fiind $r_1 = 3.5$, $r_2 = 7.9$, $r_3 = 11.5$. Estimați parametrul A folosind estimarea de plauzibilitate maximă.

Teorie (18p)

1. (2p) Care este definiția funcției de repartiție a unei variabile aleatoare?

2. (2p) Ce înseamnă că un proces aleator este **ergodic**?

3. (2p) Hașurați probabilitatea condiționată de **pierdere**, pentru criteriul Plauzibilității Maxime, pentru cele două funcții de plauzibilitate de mai jos. Explicați în cuvinte ce ați colorat.



4. (2p) Dacă un semnal ** se dublează** și zgomotul care afectează semnalul **se dublează** de asemenea, cum se modifică **raportul Semnal-Zgomot** SNR comparativ cu cazul inițial? Justificați.
   a. SNR crește
   b. SNR scade
   c. SNR rămâne constant

5. (4p) Fie cazul detecției unui semnal constant cu valoare 0 sau A, afectat de zgomot Gaussian, folosind un eșantion. Pornind de la expresia criteriului plauzibilității maxime

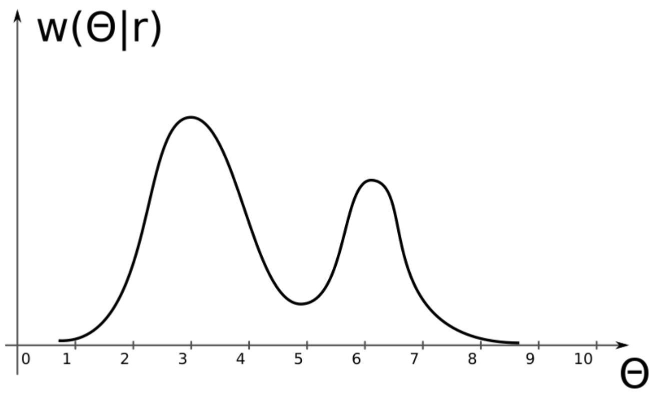
$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

   demonstrați că pragul T cu care se compară eșantionul are valoarea $T = \frac{A}{2}$

6. (2p) Explicați cum operează algoritmul $k-NN$ (k- Nearest Neighbors) pentru a determina clasa căruia aparține un vector x.

7. (2p) Care este diferența între estimarea de plauzibilitate maximă și estimarea Bayesiană?

8. (2p) Distribuția **a posteriori** a unui parametru necunoscut Θ este reprezentată mai jos.
   a. Care este valoarea estimatorului MAP? Explicați.
   b. Cum este valoarea estimatorului EPMM, mai mare sau mai mică decât cea a estimatorului MAP? Explicați.



Notă: 30p pentru nota 10. 3p din oficiu. Timp disponibil: 2h