

## Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

## Capitolul III. Elemente de Teoria Estimării

## III.1 Introdurre

# Ce înseamnă “estimare”?

- ▶ Un emițător transmite un semnal  $s_{\Theta}(t)$  care depinde de parametru **necunoscut**  $\Theta$
- ▶ Semnalul este afectat de zgomot, se recepționează

$$r(t) = s_{\Theta}(t) + \text{zgomot}$$

- ▶ Vrem să **găsim** valoarea parametrului  $\Theta$ 
  - ▶ pe baza eșantioanelor din semnalul recepționat, sau a întregului semnal
  - ▶ datele recepționate au zgomot  $\Rightarrow$  parametrul este “estimat”
- ▶ Valoarea găsită este  $\hat{\Theta}$ , **estimatul** lui  $\Theta$ 
  - ▶ există întotdeauna eroare de estimare  $\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$

# Ce înseamnă “estimare”?

- ▶ Exemple:

- ▶ Amplitudinea unui semnal constant:  $r(t) = A + zgomot$ , trebuie estimat  $A$
- ▶ Faza unui semnal sinusoidal:  $r(t) = \cos(2\pi ft + \phi) + zgomot$ , de estimat  $\phi$
- ▶ Exemple mai complicate:
  - ▶ De estimat/decis ce cuvânt este pronunțat într-un semnal vocal

- ▶ Fie următoarea problemă de estimare:

Se recepționează un semnal  $r(t) = A + z_{gomot}$ , estimați-l pe  $A$

- ▶ La detecție: se alege între **două valori cunoscute** ale  $A$ :
  - ▶ de ex.  $A$  poate fi 0 sau 5 (ipotezele  $H_0$  și  $H_1$ )
- ▶ La estimare:  $A$  poate fi oricât  $\Rightarrow$  se alege între **o infinitate de opțiuni** ale  $A$ 
  - ▶  $A$  poate fi orice valoare din  $\mathbb{R}$ , în general

- ▶ Detecție = Estimare **restrânsă** doar la un set discret de opțiuni
- ▶ Estimare = Detecție cu un număr **infini**t de opțiuni posibile
- ▶ Metodele statistice sunt similare
  - ▶ În practică, distincția între estimare și detecție nu este strictă
  - ▶ (de ex. când trebuie să alegem între 1000 de ipoteze, este “detecție” sau “estimare”?)

# Semnalul recepționat

- ▶ Semnalul recepționat este  $r(t) = s_{\Theta}(t) + z_{\text{gomot}}$ 
  - ▶ este afectat de zgomot
  - ▶ depinde de parametrul necunoscut  $\Theta$
- ▶ Considerăm **N eșantioane** din  $r(t)$ , luate la momentele de timp  $t_i$

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

- ▶ Eșantioanele depind de valoarea lui  $\Theta$



# Semnalul recepționat

- ▶ Fiecare eșantion  $r_i$  este o variabilă aleatoare ce depinde de  $\Theta$  (și de zgomot)
  - ▶ Fiecare eșantion are o distribuție care depinde de  $\Theta$

$$w_i(r_i|\Theta)$$

- ▶ Întregul vector de eșantioane  $\mathbf{r}$  este o variabilă aleatoare N-dimensională ce depinde de  $\Theta$  (și de zgomot)
  - ▶ Are o distribuție N-dimensională ce depinde de  $\Theta$
  - ▶ Egală cu produsul tuturor  $w_i(r_i|\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = w_1(r_1|\Theta) \cdot w_2(r_2|\Theta) \cdot \dots \cdot w_N(r_N|\Theta)$$

► Considerăm două tipuri de estimare:

1. **Estimare de plauzibilitate maximă** (Maximum Likelihood Estimation, MLE): În afară de  $\mathbf{r}$  nu se cunoaște nimic despre  $\Theta$ , decât cel mult vreun domeniu de existență (de ex.  $\Theta > 0$ )
2. **Estimare Bayesiană**: În afară de  $\mathbf{r}$  se mai cunoaște o distribuție *a priori*  $w(\Theta)$  a lui  $\Theta$ , care indică ce valori ale lui  $\Theta$  sunt mai probabile / mai puțin probabile
  - caz mai general decât primul

## II.2 Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood)

# Estimarea tip Maximum Likelihood

- ▶ Dacă nu se cunoaște vreo distribuție *a priori* se folosește metoda estimării de plauzibilitate maximă (“Maximum Likelihood”, ML)
- ▶ Se definește **plauzibilitatea** unui valori  $\Theta$ , dat fiind vectorul de observații  $\mathbf{r}$ :

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\Theta|\mathbf{r})$$

- ▶  $L(\Theta|\mathbf{r})$  reprezintă funcția de plauzibilitate
- ▶ A se compara cu formula din Cap. 2, slide 20
  - ▶ e aceeași
  - ▶ aici “ghicim” pe  $\Theta$ , acolo “ghiceam” pe  $H_i$

# Estimarea tip Maximum Likelihood

Estimarea de plauzibilitate maximă (Maximum Likelihood, ML):

- ▶ Estimatul  $\hat{\Theta}_{ML}$  este **valoarea care maximizează plauzibilitatea, dat fiind valorile observate  $\mathbf{r}$** 
  - ▶ i.e. valoarea care maximizează  $L(\Theta|\mathbf{r})$ , adică maximizează  $w(\mathbf{r}|\Theta)$

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

- ▶ Dacă  $\Theta$  aparține doar unui anumit interval, se face maximizarea doar pe acel interval

- ▶ Notății matematice generale
  - ▶  $\arg \max_x f(x) =$  “valoarea  $x$  care maximizează funcția  $f(x)$ ”
  - ▶  $\max_x f(x) =$  “valoarea maximă a funcției  $f(x)$ ”

# Estimare vs decizie Maximum Likelihood

- ▶ Estimarea ML este foarte similară cu decizia ML!
- ▶ Criteriul de decizie ML:
  - ▶ “se alege ipoteza cu plauzibilitate mai mare”:

$$\frac{L(H_1|r)}{L(H_0|r)} = \frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- ▶ Estimare ML:
  - ▶ “se alege valoarea care maximizează plauzibilitatea”

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta)$$

# Găsirea maximului

- ▶ Cum se rezolvă problema de maximizare?
  - ▶ adică cum se găsește estimatul  $\hat{\Theta}_{ML}$  care maximizează  $L(\Theta|\text{vecr})$
- ▶ Maximul se găsește prin derivare și egalare cu 0

$$\frac{dL(\Theta|\mathbf{r})}{d\Theta} = 0$$

- ▶ Se poate aplica **logaritmul natural** asupra funcției  $L(\Theta|\mathbf{r})$  înainte de derivare (funcția “log-likelihood”)

$$\frac{d \ln(L(\Theta|\mathbf{r}))}{d\Theta} = 0$$



# Procedura de găsire a estimatului

Procedura de găsire a estimatului ML:

1. Se găsește expresia funcției

$$L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta)$$

2. Se pune condiția ca derivata lui  $L(\Theta|\mathbf{r})$  sau a lui  $\ln((L(\Theta|\mathbf{r})))$  să fie 0

$$\frac{dL(\Theta)}{d\Theta} = 0, \text{ sau } \frac{d \ln(L(\Theta))}{d\Theta} = 0$$

3. Se rezolvă ecuația, se găsește valoarea  $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul  $\hat{\Theta}_{ML}$  este negativă, pentru a verifica că este un punct de maxim
  - ▶ întrucât derivata = 0 și pentru maxime și pentru minime
  - ▶ uneori sărim peste această etapă

# Exemple

- ▶ Estimarea unui semnal constant în zgomot gaussian:

Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru un semnal de valoare constantă  $s_{\Theta}(t) = A$  din 5 măsurători afectate de zgomot  $r_i = A + \text{zgomot}$ , cu valori egale cu  $[5, 7, 8, 6.1, 5.3]$ . Zgomotul este AWGN  $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$ .

- ▶ Soluție: la tablă
- ▶ Estimatul  $\hat{A}_{ML}$  este chiar valoarea medie a eșantioanelor
  - ▶ (deloc surprinzător)

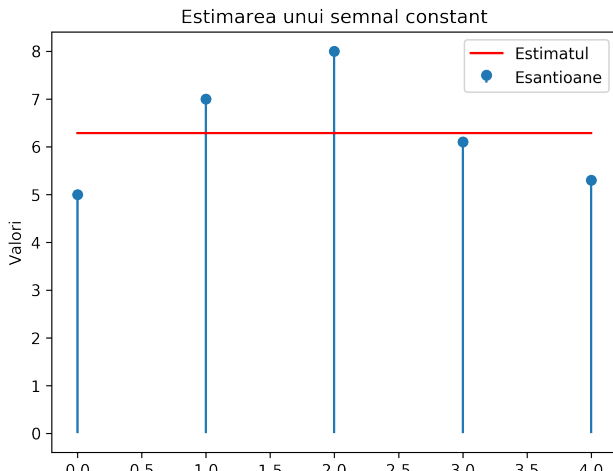
# Simulare numerică

Traceback (most recent call last):

File "source.py", line 1, in <module>

```
import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np, math;
```

ModuleNotFoundError: No module named 'matplotlib'



# Aproximare a unei curbe

- ▶ Estimare = aproximare a unei curbe
  - ▶ se găsește cea mai bună potrivire a lui  $s_{\Theta}(t)$  pri datele  $\mathbf{r}$
- ▶ Din exemplul grafic anterior:
  - ▶ avem un set de date  $\mathbf{r}$
  - ▶ se cunoaște forma semnalului = o dreaptă orizontală ( $A$  constant)
  - ▶ se aproximează în mod optim dreapta prin setul de date

# Semnal oarecare în AWGN

- ▶ Fie semnalul original  $s_{\Theta}(t)$
- ▶ Zgomotul este AWGN  $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- ▶ Eșantioanele  $r_i$  sunt luate la momentele  $t_i$
- ▶ Eșantioanele  $r_i$  au distribuție normală, cu media  $\mu = s_{\Theta}(t_i)$  și varianța  $\sigma^2$
- ▶ Funcția de plauzibilitate globală = produsul plauzibilităților fiecărui eșantion  $r_i$

$$\begin{aligned} L(\Theta|\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}|\Theta) &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

- Logaritmul plauzibilității (“log-likelihood”) este

$$\ln(L(\Theta|\mathbf{r})) = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)}_{constant} - \frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}$$

# Semnal oarecare în AWGN

- Maximul funcției = minimul exponentului

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \min \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

- Termenul  $\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$  este **distanța  $d(\mathbf{r}, s_{\Theta})$  la pătrat**

$$d(\mathbf{r}, s_{\Theta}) = \sqrt{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}$$

$$(d(\mathbf{r}, s_{\Theta}))^2 = \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

- ▶ Estimarea ML se poate rescrie sub forma:

$$\hat{\Theta}_{ML} = \arg \max_{\Theta} L(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \min_{\Theta} d(\mathbf{r}, \mathbf{s}_{\Theta})^2$$

- ▶ Estimatul de plauzibilitate maximă (ML)  $\hat{\Theta}_{ML}$  = valoarea care face  $s_{\Theta}(t_i)$  **cel mai apropiat de vectorul recepționat  $\mathbf{r}$** 
  - ▶ mai aproape = potrivire mai bună = mai probabil
  - ▶ cel mai aproape = cea mai bună potrivire = cel mai probabil = plauzibilitate maximă



# Semnal oarecare în AWGN

- ▶ Estimare ML în zgomot gaussian = **minimizarea distanței**
- ▶ Aveam aceeași interpretare și la decizia ML!
  - ▶ dar la decizie alegeam minimul din 2 opțiuni
  - ▶ aici alegem minimul dintre toate opțiunile posibile
- ▶ Relația e valabilă pentru orice fel de spații vectoriale
  - ▶ vectori cu  $N$  elemente, semnale continue, etc
  - ▶ doar se înlocuiește definiția distanței Euclidiene

# Semnal oarecare în AWGN

Procedura pentru estimarea tip ML în zgomot AWGN:

1. Se scrie expresia pentru pătratul distanței:

$$D = (d(\mathbf{r}, s_{\Theta}))^2 = \sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2$$

2. Vrem minimul, deci egalăm derivata cu 0:

$$\frac{dD}{d\Theta} = \sum 2(r_i - s_{\Theta}(t_i))\left(-\frac{ds_{\Theta}(t_i)}{d\Theta}\right) = 0$$

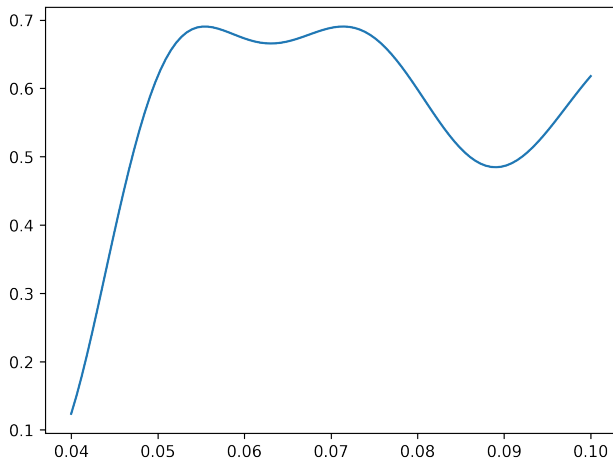
3. Se rezolvă și obținem valoarea  $\hat{\Theta}_{ML}$
4. Se verifică că derivata a doua în punctul  $\hat{\Theta}_{ML}$  este pozitivă, pentru a se verifica că punctul este un minim
  - uneori sărim peste această etapă

Estimarea frecvenței  $f$  a unui semnal sinusoidal

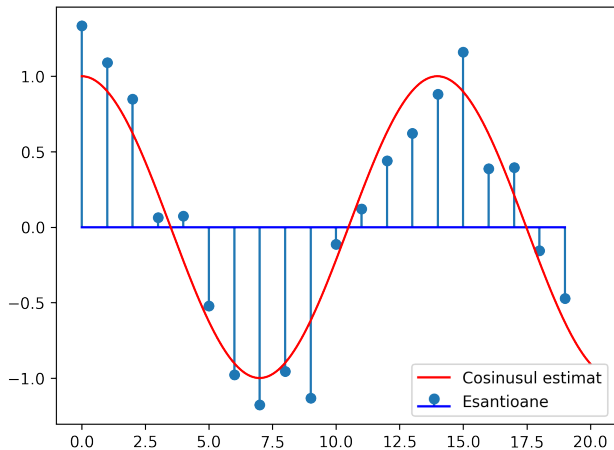
- ▶ Găsiți estimatul Maximum Likelihood pentru frecvența  $f$  a unui semnal  $s_{\Theta}(t) = \cos(2\pi ft_i)$ , din 10 măsurători afectate de zgomot  $r_i = \cos(2\pi ft_i) + \text{zgomot}$  de valori [...]. Zgomotul este AWGN  $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$ . Momentele de eșantionare sunt  $t_i = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
- ▶ Soluție: la tablă

# Simulare numerică

Funcția de plauzibilitate este



# Simulare numerică



# Parametri multipli

- ▶ Dacă semnalul depinde de mai mulți parametri?
  - ▶ de ex. amplitudinea, frecvența și faza inițială a unui cosinus:

$$s(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$$

- ▶ Se va considera  $\Theta$  ca fiind un vector:

$$\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_M]$$

- ▶ e.g.  $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3] = [A, f, \phi]$

# Parametri multipli

- ▶ Se rezolvă cu aceeași procedură, dar în loc de o singură derivată vom avea  $M$  derivate
- ▶ Se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial \Theta_M} = 0 \end{cases}$$

- ▶ uneori este dificil/imposibil

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- ▶ Cum se estimează parametrii  $\Theta$  în cazuri complicate?
  - ▶ în aplicații reale, unde pot fi foarte mulți parametri ( $\Theta$  este vector)
- ▶ De obicei nu se pot găsi valorile optime prin formule directe
- ▶ Se îmbunătățesc valorile în mod iterativ cu algoritmi tip **coborâre după gradient** (Gradient Descent)



# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

1. Se inițializează parametrii cu valori aleatoare  $\Theta^{(0)}$
2. Repetă la fiecare iterație  $k$ :
  - 2.1 Se calculează funcția  $L(\Theta^{(k)}|\mathbf{r})$
  - 2.2 Se calculează derivatele  $\frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$  pentru toți  $\Theta_i$  (“**Gradient**”)
  - 2.3 Se actualizează toate valorile  $\Theta_i$  prin scăderea derivatei (“**Descent**”):

$$\Theta_i^{(k+1)} = \Theta_i^{(k)} - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta_i^{(k)}}$$

► sau, sub formă vectorială:

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^k - \mu \frac{\partial L}{\partial \Theta^{(k)}}$$

3. Până la îndeplinirea unui criteriu de terminare (de ex. parametrii nu se mai modifică mult)

# Coborâre după gradient (Gradient Descent)

- ▶ Explicații la tablă
- ▶ Exemplu: regresia logistică cu valori 2D
  - ▶ exemplu la tablă

- ▶ Cel mai proeminent exemplu: **Rețele Neurale Artificiale** (a.k.a. “Rețele Neurale”, “Deep Learning”, etc.)
  - ▶ Pot fi văzute ca un exemplu de estimare ML
  - ▶ Se utilizează algoritmul *Gradient Descent* pentru găsirea parametrilor
  - ▶ Aplicații de vârf: recunoașterea de imagini, automated driving etc.
- ▶ Mai multe informații despre rețele neurale / machine learning:
  - ▶ căutați cursuri sau cărți online
  - ▶ IASI AI Meetup

# Deplasarea și varianța estimatorilor

- ▶ Cum caracterizăm calitatea unui estimator?
- ▶ Un estimator  $\hat{\Theta}$  este **o variabilă aleatoare**
  - ▶ poate avea diverse valori, pentru că se calculează pe baza eșantioanelor recepționate, care depind de zgomot
  - ▶ exemplu: se repetă aceeași estimare pe calculatoare diferite  $\Rightarrow$  valori estimate ușor diferite
- ▶ Fiind o variabilă aleatoare, se pot defini:
  - ▶ valoarea medie a estimatorului:  $E \{ \hat{\Theta} \}$
  - ▶ varianța estimatorului:  $E \{ (\hat{\Theta} - \Theta)^2 \}$

# Deplasarea și varianța estimatorilor

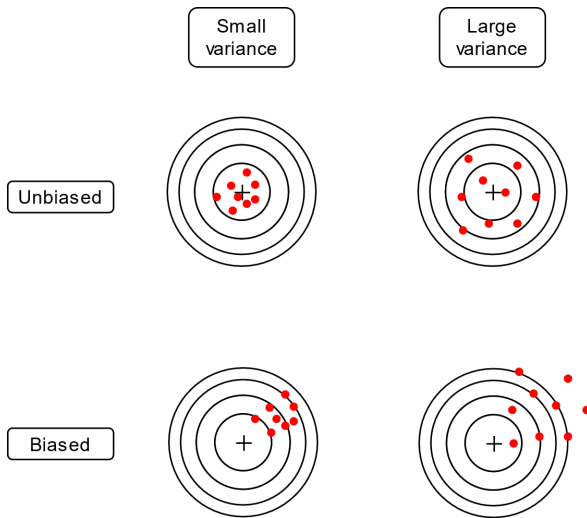


Figure 1: Deplasarea și varianța estimatorilor

# Deplasarea unui estimator

- ▶ **Deplasarea** (“bias”) unui estimator = diferența dintre valoarea medie a estimatorului și valoarea adevărată  $\Theta$

$$\text{Deplasare} = E \{ \hat{\Theta} \} - \Theta$$

- ▶ Estimator **nedeplasat** = valoarea medie a estimatorului este egală cu valoarea adevărată a parametrului  $\Theta$

$$E \{ \hat{\Theta} \} = \Theta$$

- ▶ Estimator **deplasat** = valoarea medie a estimatorului diferă de valoarea adevărată a parametrului  $\Theta$ 
  - ▶ diferența  $E \{ \hat{\Theta} \} - \Theta$  este **deplasarea** estimatorului

# Deplasarea unui estimator

- ▶ Exemplu: semnal constant  $A$ , zgomot Gaussian (cu media), estimatorul de plauzibilitate maximă este  $\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_i r_i$
- ▶ Atunci:

$$\begin{aligned} E \{ \hat{A}_{ML} \} &= \frac{1}{N} E \left\{ \sum_i r_i \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \{ r_i \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \{ A + \text{zgomot} \} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A \\ &= A \end{aligned}$$

- ▶ Acest estimator este nedeplasat

# Varianța unui estimator

- ▶ **Varianța** unui estimator măsoară “abaterile” estimatorului în jurul valorii medii
  - ▶ aceasta e definiția varianței  $\sigma^2$  în general
- ▶ Dacă un estimator are **varianța** mare, valoarea estimată poate fi departe de cea reală, chiar dacă estimatorul este nedeplasat
- ▶ De obicei se preferă estimatori cu **varianță mică**, tolerându-se o eventuală mică deplasare



## II.3 Estimare Bayesiană

- ▶ **Estimarea Bayesiană** ia în calcul termeni suplimentari pe lângă  $w(\mathbf{r}|\Theta)$ :
  - ▶ o distribuție *a priori*  $w(\Theta)$
  - ▶ opțional, o funcție de cost
- ▶ Se obține echivalentul din estimare pentru criteriile de decizie MPE și MR

# Estimare Bayesiană

- ▶ Se definește **distribuția a posteriori** a lui  $\Theta$ , dat fiind observațiile  $\mathbf{r}$ , folosind **regula lui Bayes**:

$$w(\Theta|\mathbf{r}) = \frac{w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)}{w(\mathbf{r})}$$

- ▶ Termenii:
  - ▶  $\Theta$  este parametrul necunoscut
  - ▶  $\mathbf{r}$  este vectorul de observații
  - ▶  $w(\Theta|\mathbf{r})$  este probabilitatea ca parametrul să aibă valoarea  $\Theta$ , dat fiind vectorul de observații  $\mathbf{r}$ ;
  - ▶  $w(\mathbf{r}|\Theta)$  este funcția de plauzibilitate
  - ▶  $w(\Theta)$  este distribuția **a priori** a lui  $\Theta$
  - ▶  $w(\mathbf{r})$  este distribuția **a priori** a lui  $\mathbf{r}$ ; se presupune a fi constantă

# Regula lui Bayes

- ▶ Relația precedentă arată că, în general, estimarea lui  $\Theta$  depinde de două lucruri:
  1. De vectorul observațiilor  $\mathbf{r}$ , prin termenul  $w(\mathbf{r}|\Theta)$
  2. De informația “a priori” avută despre  $\Theta$ , prin termenul  $w(\Theta)$
- ▶ Numele este “estimare Bayesiană”
  - ▶ Thomas Bayes = matematician englez, a descoperit regula cu acest nume
  - ▶ Noțiunile bazate pe regula lui Bayes poartă deseori numele de “Bayesiane”

# Distribuția *a priori*

- ▶ Presupunem că se știe de dinainte o distribuție a lui  $\Theta$ ,  $w(\Theta)$ 
  - ▶ știm de dinainte care e probabilitatea de a fi a anume valoare sau alta
  - ▶ se numește distribuția *a priori*
- ▶ Estimarea trebuie să ia în calcul și distribuția *a priori*
  - ▶ estimatul va fi “tras” înspre valori mai probabile

# Estimatorul MAP

- ▶ Cunoaștem distribuția *a posteriori*  $w(\Theta|\mathbf{r})$ . Care este valoarea estimată?
- ▶ Se poate alege valoarea care are probabilitate maximă
- ▶ Estimatorul **Maximum A Posteriori (MAP)** este

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \max_{\Theta} \Theta w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

- ▶ Estimatorul MAP alege acea valoare  $\Theta$  unde distribuția *a posteriori*  $w(\Theta|\mathbf{r})$  este maximă
- ▶ Estimatorul MAP maximizează **produsul** dintre plauzibilitate și **distribuția *a priori***  $w(\Theta)$

# Estimatorul MAP

Exemplu: Imagine

# Relația dintre estimarea MAP și ML

- ▶ Estimatorul ML:

$$\arg \max w(\mathbf{r}|\Theta)$$

- ▶ Estimatorul MAP:

$$\arg \max w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

- ▶ Estimatorul ML este un caz particular de MAP pentru  $w(\Theta)$  constant
  - ▶  $w(\Theta) = \text{constant}$  înseamnă că toate valorile lui  $\Theta$  sunt *a priori* echiprobabile
  - ▶ i.e. nu avem extra informații despre valoarea lui  $\Theta$



# Relația cu detecția semnalelor

- ▶ Criteriul probabilității minime de eroare:  $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Se poate rescrie ca  $w(r|H_1) \cdot P(H_1) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} w(r|H_0)P(H_0)$ 
  - ▶ adică se alege ipoteza pentru care  $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$  este mai mare
- ▶ **Criteriul de decizie MPE:** se alege ipoteza care maximizează  $w(r|H_i) \cdot P(H_i)$ 
  - ▶ dintre cele două ipoteze  $H_0, H_1$
- ▶ **Estimarea MAP:** se alege valoarea care maximizează  $w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$ 
  - ▶ dintre toate valorile posibile pentru  $\Theta$
- ▶ Același principiu!

- ▶ Vrem să găsim un echivalent și pentru criteriul MR
- ▶ Avem nevoie de un echivalent pentru costurile  $C_{ij}$
- ▶ **Eroarea de estimare** = diferența între estimatul  $\hat{\Theta}$  și valoarea reală  $\Theta$

$$\epsilon = \hat{\Theta} - \Theta$$

- ▶ **Funcția de cost**  $C(\epsilon)$  = atribuie un cost pentru fiecare eroare de estimare posibilă
  - ▶ când  $\epsilon = 0$ , costul  $C(0) = 0$
  - ▶ erori  $\epsilon$  mici au costuri mici
  - ▶ erori  $\epsilon$  mari au costuri mari

# Funcția de cost

- ▶ Funcții de cost uzuale:

- ▶ Pătratică:

$$C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$$

- ▶ Uniformă:

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- ▶ Liniară:

$$C(\epsilon) = |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta|$$

- ▶ De desenat la tablă

# Funcția de cost

- ▶ Funcția de cost  $C(\epsilon)$  reprezintă echivalentul costurilor  $C_{ij}$  de la detecție
  - ▶ la detecție aveam doar 4 valori:  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{11}$
  - ▶ aici avem un cost pentru fiecare eroare posibilă  $\epsilon$
- ▶ Funcția de cost dictează ce valoare alegem din distribuția  $w(\Theta|\mathbf{r})$

# Importanța funcției de cost

- Fie distribuția *a posteriori* următoare:

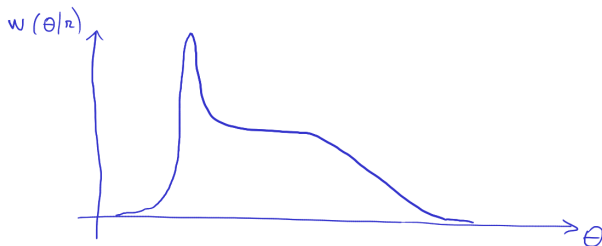


Figure 2: Unbalanced posterior distribution

- Care este estimatorul MAP?
- Dacă avem funcția de cost următoare:
  - dacă estimarea  $\hat{\Theta}$  este  $<$  valoarea reală  $\Theta$ , te costă 1000 \$
  - dacă estimarea  $\hat{\Theta}$  este  $>$  valoarea reală  $\Theta$ , platești 1 \$
  - schimbăm valoarea estimată ? :)

- ▶ Distribuția *a posteriori*  $w(\Theta|\mathbf{r})$  dă probabilitatea fiecărei valori  $\hat{\Theta}$  de a fi cea corectă
- ▶ Alegerea unui estimat  $\hat{\Theta}$  implică o anumite eroare  $\epsilon$
- ▶ Eroarea de estimare are un anumit cost  $C(\epsilon)$
- ▶ **Riscul** = valoarea medie a costului =  $C(\epsilon) \times \text{probabilitatea:}$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

# The Bayesian risk

- ▶ Alegem valoarea  $\hat{\Theta}$  care **minimizează costul mediu**  $R$

$$\hat{\Theta} = \arg \min_{\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} C(\epsilon) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ O obținem înlocuind  $C(\epsilon)$  cu definiția sa, și derivând după  $\hat{\Theta}$ 
  - ▶ Atenție: se derivează după  $\hat{\Theta}$ , nu  $\Theta$ !

## Estimatorul EPMM (eroare pătratică medie minimă)

- ▶ Când funcția de cost este pătratică  $C(\epsilon) = \epsilon^2 = (\hat{\Theta} - \Theta)^2$

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta)^2 w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ Vrem  $\hat{\Theta}$  care minimizează  $R$ , deci derivăm

$$\frac{dR}{d\hat{\Theta}} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Theta} - \Theta) w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta = 0$$

- ▶ Echivalent cu

$$\hat{\Theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ Estimatorul de **eroare pătratică medie minimă (EPMM)** (“**Minimum Mean Squared Error, MMSE**”):

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$



- ▶ **Estimatorul EPMM:** estimatorul  $\hat{\Theta}$  este **valoarea medie** a distribuției *a posteriori*  $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{EPMM} = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta \cdot w(\Theta|\mathbf{r}) d\Theta$$

- ▶ EPMM = “Eroare Pătratică Medie Minimă”
  - ▶ valoarea medie = sumă (integrală) din fiecare  $\Theta$  ori probabilitatea sa  $w(\Theta|\mathbf{r})$
- ▶ Estimatrul EPMM se obține din distribuția *a posteriori*  $w(\Theta|\mathbf{r})$ , considerând funcția de cost pătratică

# Estimatorul MAP

- ▶ Dacă funcția de cost este uniformă

$$C(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| \leq E \\ 1, & \text{if } |\epsilon| = |\hat{\Theta} - \Theta| > E \end{cases}$$

- ▶ Știm că  $\Theta = \hat{\Theta} - \epsilon$
- ▶ Se obține

$$R = \int_{-\infty}^{\hat{\Theta}-E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta + \int_{\hat{\Theta}+E}^{\infty} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$$

$$R = 1 - \int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$$

# Estimatorul MAP

- ▶ Pentru minimizarea  $R$ , trebuie să maximizăm  $\int_{\hat{\Theta}-E}^{\hat{\Theta}+E} w(\Theta|\mathbf{r})d\Theta$ , integrala din jurul punctului  $\hat{\Theta}$
- ▶ Pentru  $E$  foarte mic, funcția  $w(\Theta|\mathbf{r})$  este aproximativ constantă, deci se va alege punctul unde funcția este maximă
- ▶ **Estimatorul Maximum A Posteriori (MAP)** = valoarea  $\hat{\Theta}$  care maximizează  $w(\Theta|\mathbf{r})$

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \max_{\Theta} w(\Theta|\mathbf{r}) = \arg \max_{\Theta} w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$

# Interpretare

- ▶ Estimatorul MAP:  $\hat{\Theta} =$  valoarea care maximizează distribuția *a posteriori*
- ▶ Estimatorul EPMM:  $\hat{\Theta} =$  valoarea medie a distribuției *a posteriori*

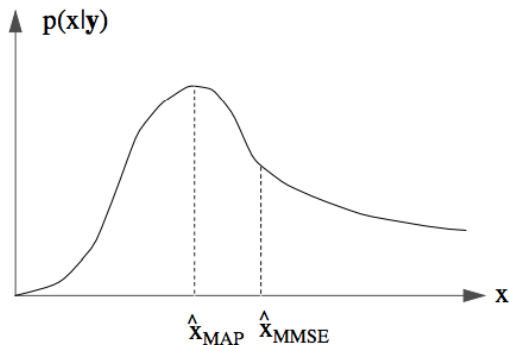


Figure 3: Estimatorul MAP vs EPMM(MMSE)

# Relația între estim. MAP and EPMM

- ▶ Estimatorul MAP = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost uniformă
  - ▶ ca la detecție: criteriul MPE = criteriul MR când costurile sunt la fel
- ▶ Estimatorul EPMM = minimizează costul mediu, folosind funcția de cost pătratică
  - ▶ similar cu criteriul MR, dar la estimare

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același  $\sigma$

- ▶ Vrem să estimăm temperatura de astăzi din Sahara
- ▶ Termometrul indică 40 grade, dar valoarea este afectată de zgomot Gaussian  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$  (termometru ieftin)
- ▶ Se știe că de obicei în această perioadă a anului temperatura este în jur de 35 grade, cu o distribuție Gaussiană  $\mathcal{N}(35, \sigma^2 = 2)$ .
- ▶ Estimați valoarea reală a temperaturii folosind estimarea ML, MAP și EPMM(MMSE)

# Exercițiu

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian același  $\sigma$

- ▶ Dacă avem trei termometre, care indică 40, 38, 41 grade?

Exercițiu: valoare constantă, 1 măsurătoare, zgomot Gaussian  $\sigma$  diferit

- ▶ Dacă temperatura în această perioadă a anului are distribuție Gaussiană  $\mathcal{N}(35, \sigma_2^2 = 3)$ 
  - ▶ cu varianță diferită,  $\sigma_2 \neq \sigma$

# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- ▶ Fie semnalul original “curat”  $s_{\Theta}(t)$
- ▶ Zgomotul este Gaussian (AWGN)  $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$
- ▶ Ca în cazul estimării de plauzibilitate maximă, funcția de plauzibilitate este:

$$w(\mathbf{r}|\Theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2}}$$

- ▶ Dar acum aceasta **se înmulțește cu**  $w(\Theta)$

$$w(\mathbf{r}|\Theta) \cdot w(\Theta)$$



# Semnal oarecare în zgomot Gaussian (AWGN)

- ▶ Estimatorul MAP estimator este cel care maximizează produsul

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \max w(\mathbf{r}|\Theta)w(\Theta)$$

- ▶ Logaritmând:

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{MAP} &= \arg \max \ln (w(\mathbf{r}|\Theta)) + \ln (w(\Theta)) \\ &= \arg \max -\frac{\sum (r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2} + \ln (w(\Theta))\end{aligned}$$

# Distribuție “a priori” Gaussiană

- ▶ Dacă distribuția “a priori” este de asemenea Gaussiană  $\mathcal{N}(\mu_{\Theta}, \sigma_{\Theta}^2)$

$$\ln(w(\Theta)) = -\frac{\sum(\Theta - \mu_{\Theta})^2}{2\sigma_{\Theta}^2}$$

- ▶ Estimatorul MAP devine

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \min \frac{\sum(r_i - s_{\Theta}(t_i))^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum(\Theta - \mu_{\Theta})^2}{2\sigma_{\Theta}^2}$$

- ▶ Poate fi rescris

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \min d(\mathbf{r}, s_{\Theta})^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\Theta}^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_{\Theta})^2$$

# Interpretare

- ▶ Estimatorul MAP în zgomot Gaussian și cu distribuție “a priori” Gaussiană

$$\hat{\Theta}_{MAP} = \arg \min d(\mathbf{r}, s_{\Theta})^2 + \underbrace{\frac{\sigma^2}{\sigma_{\Theta}^2}}_{\lambda} \cdot d(\Theta, \mu_{\Theta})^2$$

- ▶  $\hat{\Theta}_{MAP}$  este apropiat de valoarea medie  $\mu_{\Theta}$  și de asemenea face ca semnalul adevărat să fie apropiat de eșantioanele recepționate  $\mathbf{r}$ 
  - ▶ Exemplu: “caut locuință aproape de serviciu dar și aproape de Mall”
  - ▶  $\lambda$  controlează importanța relativă a celor doi termeni
- ▶ Cazuri particulare
  - ▶  $\sigma_{\Theta}$  foarte mic = distribuția “a priori” este foarte specifică (îngustă) =  $\lambda$  mare = termenul al doilea este dominant =  $\hat{\Theta}_{MAP}$  foarte apropiat de  $\mu_{\Theta}$
  - ▶  $\sigma_{\Theta}$  foarte mare = distribuția “a priori” este foarte nespecifică =  $\lambda$  mic = primul termen este dominant =  $\hat{\Theta}_{MAP}$  apropiat de estimatorul de plauzibilitate maximă

- ▶ În general, aplicațiile practice:
  - ▶ utilizează diverse tipuri de distribuții “a priori”
  - ▶ estimează **mai mulți parametri** (un vector de parametri)
- ▶ Aplicații
  - ▶ reducerea zgomotului din semnale
  - ▶ restaurarea semnalelor (parți lipsă din imagini, imagini *blurate* etc)
  - ▶ compresia semnalelor

1. Urmărirea unui obiect (“single object tracking”) prin filtrare Kalman
  - ▶ urmărirea unui obiect prin măsurători succesive (e.g. din imagini succesive)
  - ▶ la fiecare nouă măsurătoare avem două distribuții ale poziției:
    - ▶ cea dată de măsurătoare respectivă,  $w(r|\Theta)$
    - ▶ cea prezisă pe baza poziției și vitezei de data trecută
    - ▶ ambele presupuse a fi Gaussiene, caracterizate doar prin medie și varianță
  - ▶ cele două se combină prin regula lui Bayes  $\Rightarrow$  o distribuție mai precisă  $w(\Theta|r)$ , tot Gaussiană
  - ▶ poziția exactă se estimează prin EPMM (media lui  $w(\Theta|r)$ )
  - ▶  $w(\Theta|r)$  prezice poziția de la momentul următor

# Single object tracking

# Single object tracking

## 2. Constrained Least Squares (CLS) image restoration

- ▶ Avem o imagine  $I$  afectată de erori (zgomot, pixeli lipsă, blurare)

$$I_{zg} = I_{true} + Z$$

- ▶ Estimăm imaginea originală prin:

$$\hat{I}_{true} = \operatorname{argmin}_I \|I - I_{zg}\|_2 + \lambda \cdot \|HighPass\{I\}\|_2$$

- ▶ Exemple:

- ▶ <https://www.mathworks.com/help/images/deblurring-images-using-a-regularized-filter.html>
- ▶ <https://demonstrations.wolfram.com/ImageRestorationForDegradedImages>
- ▶ Google it



# Constrained Least Squares (CLS) image restoration