

Decizie și Estimare în Prelucrarea Informației

Capitolul II. Elemente de teorie statistică a detecției

II.1 Introdurre

- ▶ Detecția semnalelor = a decide care semnal este prezent dintre două sau mai multe posibilități
 - ▶ inclusiv că nu există nici un semnal
- ▶ Avem la dispoziție observații **cu zgomot**
 - ▶ semnalele sunt afectate de zgomot

Schema bloc a detecției semnalelor

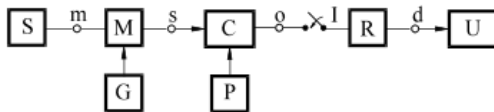


Figure 1: Signal detection model

► Conținut:

- Sursa de informație: generează mesaje a_n cu probabilitățile $p(a_n)$
- Modulator: transmite semnalul $s_n(t)$ la mesajul a_n
- Canal: adaugă zgomot aleator
- Eșantionare: prelevă eșantioane din semnalul $s_n(t)$
- Receptor: **decide** ce mesaj a_n s-a fost recepționat

► Transmisie de date

- nivele constante de tensiune (e.g. $s_n(t) = \text{constant}$)
- modulație PSK (Phase Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu aceeași frecvență dar faze inițiale diferite
- modulație FSK (Frequency Shift Keying): $s_n(t) = \text{cosinus}$ cu frecvențe diferite
- modulație OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing): caz particular de FSK

► Radar

- se emite un semnal; în cazul unui obstacol, semnalul se reflectă înapoi
- receptorul așteaptă posibilele reflecții ale semnalului emis și decide
 - nu este prezentă o reflecție -> nici un obiect
 - semnalul reflectat este prezent -> obiect detectat

- ▶ Decizie între mai mult de două semnale
- ▶ Numărul de eşantioane (observații):
 - ▶ un singur eşantion
 - ▶ mai multe eşantioane
 - ▶ observarea întregului semnal continuu, pentru un timp T

II.2 Detectia semnalelor constante folosind 1 esantion

Detecție unui semnal constant, 1 eșantion

- ▶ Cel mai simplu caz: detecția unui semnal constant afectat de zgomot, folosind un singur eșantion
 - ▶ două mesaje a_0 și a_1
 - ▶ mesajele sunt modulate cu semnale constante
 - ▶ pentru a_0 : se emite $s_0(t) = 0$
 - ▶ pentru a_1 : se emite $s_1(t) = A$
 - ▶ peste semnal se suprapune zgomot aditiv
 - ▶ eșantionarea preia un singur eșantion
 - ▶ decizie: se compară eșantionul cu un prag

Decizia pe bază de prag

- ▶ Valoarea eșantionului este $r = s + n$
 - ▶ s este semnalul adevărat ($s_0 = 0$ or $s_1 = A$)
 - ▶ n este un eșantion de zgomot
- ▶ n este o variabilă aleatoare continuă
- ▶ r este de asemenea o variabilă aleatoare
 - ▶ cum depinde distribuția lui r de cea a lui n
- ▶ Decizia se ia prin compararea lui r cu un prag T :
 - ▶ dacă $r < T$, se ia decizia D_0 : semnalul adevărat este s_0
 - ▶ dacă $r \geq T$, se ia decizia D_1 : semnalul adevărat este s_1

- ▶ Receptorul decide între **două ipoteze**:
 - ▶ H_0 : semnalul adevărat este s_0 (s-a transmis a_0)
 - ▶ H_1 : semnalul adevărat este s_1 (s-a transmis a_1)
- ▶ Rezultate posibile
 1. Semnalul nu este prezent (s_0), si nu este detectat
 - ▶ Decizia D_0 în ipoteza H_0
 - ▶ Probabilitatea sa este $P_n = P(D_0 \cap H_0)$
 2. **Alarmă falsă**: semnalul nu este prezent (s_0), dar este detectat (eroare!)
 - ▶ Decizia D_1 în ipoteza H_0
 - ▶ Probabilitatea este $P_{fa}P(D_1 \cap H_0)$
 3. **Ratare**: semnalul este prezent (s_1), dar nu este detectat (eroare!)
 - ▶ Decizia D_0 în ipoteza H_1
 - ▶ Probabilitatea este $P_m = P(D_0 \cap H_1)$
 4. Semnal detectat corect: semnalul este prezent, și este detectat
 - ▶ Decizia D_1 în ipoteza H_1
 - ▶ Probabilitatea este $P_d = P(D_1 \cap H_1)$

Criteriul plauzibilității maxime (Maximum Likelihood)

- ▶ Se alege ipoteza care pare **cea mai plauzibilă** dat fiind eșantionul observat r
- ▶ **Plauzibilitatea** (“*likelihood*”) unei observații r = densitatea de probabilitate a lui r dată fiind ipoteza H_0 sau H_1
- ▶ Plauzibilitatea în cazul ipotezei H_0 : $w(r|H_0)$
 - ▶ r este doar zgomot, deci provine din distribuția zgomotului de pe canal
- ▶ Plauzibilitatea în cazul ipotezei H_1 : $w(r|H_1)$
 - ▶ r este A + zgomot, deci valoarea sa provine din distribuția (A + zgomot)
- ▶ Raportul de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

- ▶ Fie cazul în care zgomotul are distribuție normală
- ▶ Desen: cele două densități de probabilitate pentru H_0 și H_1

Decizia pe bază de prag

- ▶ Decizie ML pe baza raportului de plauzibilitate = compararea lui r cu un prag T
- ▶ Pragul = punctul de intersecție a celor două distribuții

Zgomot cu distribuție normală

- ▶ Caz particular: zgomotul are distribuția normală $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- ▶ Raportul de plauzibilitate este $\frac{w(r|H_1)}{r|H_0} = \frac{e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$
- ▶ Pentru distribuția normală, e preferabil să aplicăm *logaritmul natural*
 - ▶ logaritmul este o funcție monoton crescătoare, deci nu schimbă rezultatul comparației
 - ▶ dacă $A < B$, atunci $\log(A) < \log(B)$
- ▶ **log-likelihood** al unei observații = logaritmul plauzibilității (likelihood)
 - ▶ de obicei este vorba de logaritmul natural, dar poate fi orice bază

Testul “log-likelihood” în cazul ML

- ▶ Pentru zgomot cu distribuție normală, decizia ML înseamnă compararea *log-likelihood*

$$\frac{(r - A)^2}{r^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

- ▶ Se extrage radicalul

$$\frac{|r - A|}{|r|} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

- ▶ $|r - A|$ = distanța de la r la A , $|r|$ = distanța de la r la 0
- ▶ Decizie ML în zgomot normal: se alege valoarea 0 sau A **cea mai apropiată** de r
 - ▶ principiu foarte general, întâlnit în multe alte scenarii
 - ▶ principiul **cel mai apropiat vecin** (“*nearest neighbor*”)
 - ▶ receptorul ML se mai numește **receptor de distanță minimă** (“*minimum distance receiver*”)
 - ▶ echivalent cu setarea unui prag $T = \frac{A}{2}$

- ▶ Dacă zgomotul are altă distribuție?
 - ▶ Pragul T rămâne punctul de intersecție, oricare ar fi acela
 - ▶ Pot fi mai multe puncte de intersecție, deci mai multe praguri
 - ▶ axa \mathbb{R} este împărțită în **regiuni de decizie** R_0 și R_1
- ▶ Dacă distribuția zgomotului este diferită în cazurile H_0 și H_1 ?
 - ▶ Pragul T (sau pragurile) rămân punctele de intersecție, oricare ar fi acelea
- ▶ Dacă semnalul $s_0(t)$ (pentru ipoteza H_0 , simbolul a_0) nu este 0, ci o altă valoare constantă B ?
 - ▶ Pragul T (sau pragurile) rămân punctele de intersecție, dar distribuțiile sunt centrate pe B și A
 - ▶ Pentru zgomot gaussian, se alege B sau A , cel mai apropiat de eșantion (pragul este la mijlocul distanței dintre B și A)

- ▶ Mai mult de două semnale?
 - ▶ De ex. 4 nivele de semnal posibile: -6, -2, 2, 6
 - ▶ Se alege cea mai plauzibilă ipoteză, pe baza celor 4 plauzibilități
 - ▶ Nu mai există un singur prag T , sunt în mod necesar mai multe

Exerciții

- ▶ Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea $r = 2.25$
 1. Dacă zgomotul este gaussian, ce semnal este detectat pe baza criteriului plauzibilității maxime?
 2. Dar dacă semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
 3. Repetați a. și b. dacă valoarea 0 se înlocuiește cu -1
- ▶ Un semnal poate avea patru valori posibile: $-6, -2, 2, 6$. Fiecare valoare durează timp de o secundă. Semnalul este afectat de zgomot alb cu distribuție normală. Receptorul ia un singur eșantion pe secundă. Folosind criteriul plauzibilității maxime, decideți ce semnal s-a transmis, dacă receptorul primește eșantioanele următoare:

4, 6.6, -5.2 , 1.1, 0.3, -1.5 , 7, -7 , 4.4

Probabilități de eroare condiționate

- ▶ Putem calcula probabilitățile de eroare condiționate
- ▶ Fie regiunile de decizie:
 - ▶ R_0 : dacă $r \in R_0$, decizia este D_0 , de ex. $(-\infty, T)$ pentru zgomot gaussian
 - ▶ R_1 : dacă $r \in R_1$, decizia este D_1 , de ex. $[T, \infty)$ pentru zgomot gaussian
- ▶ Probabilitatea unei alarme false ***dacă semnalul original este $s_0(t)$***

$$P(D_1|H_0) = \int_{R_1} w(r|H_0)dx$$

- ▶ Probabilitatea unei ratări ***dacă semnalul original este $s_1(t)$***

$$P(D_0|H_1) = \int_{R_0} w(r|H_1)dx$$

- ▶ Aceste valori nu țin cont de probabilitatea ca semnalul să fie $s_0(t)$ sau $s_1(t)$
 - ▶ sunt **condiționate** (“dacă”)

Probabilități de eroare condiționate

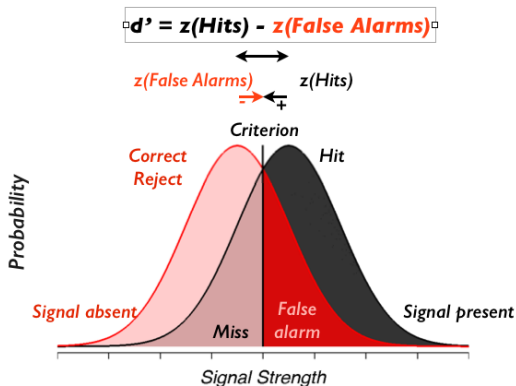


Figure 2: Probabilitățile deciziilor

[sursa: <http://gru.stanford.edu/doku.php/tutorials/sdt>]

Reamintire (TCl): regula lui Bayes

- ▶ Reamintire (TCl): regula lui Bayes

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

- ▶ Interpretare
 - ▶ Probabilitatea $P(A)$ este extrasă din $P(B|A)$
 - ▶ $P(B|A)$ nu mai conține nici o informație despre $P(A)$, șansele ca A chiar să aibă loc
 - ▶ Exemplu: $P(\text{gol} \mid \text{șut la poartă})$. Câte goluri se înscriu?

- Un semnal poate avea două valori posibile, 0 sau 5. Semnalul 0 este afectat de zgomot gaussian $\mathcal{N}(0, 0.5)$, iar semnalul 5 de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$. Receptorul decide pe baza criteriului plauzibilității maxime, folosind un singur eșantion din semnal.
 1. Calculați probabilitatea unei decizii greșite când semnalul original este $s_0(t)$
 2. Calculați probabilitatea unei decizii greșite când semnalul original este $s_1(t)$

Dezavantaje ale criteriului plauzibilității maxime

- ▶ Raportul de plauzibilitate utilizează densitățile de probabilitate **condiționate**
 - ▶ condiționate de ipotezele H_0 sau H_1
- ▶ Condiționarea de ipotezele H_0 și H_1 ignoră probabilitatea celor două ipoteze H_0 și H_1
- ▶ Dacă $p(H_0) > p(H_1)$, am vrea să împingem pragul T înspre H_1 , și vice-versa
 - ▶ pentru că este mai probabil ca semnalul să fie $s_0(t)$
 - ▶ și de aceea vrem să “favorizăm” decizia D_0

Criteriul probabilității minime de eroare

- ▶ Se iau în calcul probabilitățile $P(H_0)$ și $P(H_1)$
- ▶ Se urmărește **minimizarea probabilității totale de eroare** P_e
 - ▶ erori = alarme false și ratări
- ▶ Trebuie să găsim regiunile de decizie R_0 și R_1

Probabilitatea de eroare

- Probabilitatea unei alarme false

$$\begin{aligned}P(D_1 \cap H_0) &= P(D_1|H_0) \cdot P(H_0) \\&= \int_{R_1} w(r|H_0) dx \cdot P(H_0) \\&= (1 - \int_{R_0} w(r|H_0) dx) \cdot P(H_0)\end{aligned}$$

- Probabilitatea unei ratări

$$\begin{aligned}P(D_0 \cap H_1) &= P(D_0|H_1) \cdot P(H_1) \\&= \int_{R_0} w(r|H_1) dx \cdot P(H_1)\end{aligned}$$

- Suma lor este

$$P_e = P(H_0) + \int_{-\infty}^T [w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0)] dx$$

Probabilitatea de eroare minimă

- ▶ Urmărim minimizarea P_e , adică să minimizăm integrala
- ▶ Pentru a minimiza integrala, se alege R_0 astfel încât pentru toți $r \in R_0$, termenul din integrala este **negativ**
 - ▶ integrarea pe întregul interval în care o funcție este negativă conduce la valoarea minimă
- ▶ Așadar, când $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) < 0$ avem $r \in R_0$, adică decizia D_0
- ▶ Invers, dacă $w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) > 0$ avem $r \in R_1$, adică decizia D_1
- ▶ Astfel

$$w(r|H_1) \cdot P(H_1) - w(r|H_0) \cdot P(H_0) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- ▶ Similar cu criteriul plauzibilității maxime, dar depinde de probabilitățile celor două ipoteze (cazuri, simboluri)
 - ▶ Când una dintre ipoteze este mai probabilă decât cealaltă, pragul este împins în favoarea sa, înspre cealaltă ipoteză
- ▶ De asemenea bazat pe raportul de plauzibilitate, ca și primul criteriu

Criteriul probabilității minime de eroare - zgomot gaussian

- Presupunând că zgomotul este gaussian (normal), $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$w(r|H_1) = e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma^2}}$$

$$w(r|H_0) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

- Se aplică logaritmul natural

$$-\frac{(r-A)^2}{2\sigma^2} + \frac{r^2}{2\sigma^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- Echivalent

$$2rA - A^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)}{2A}}_T$$

- ▶ Se compară eşantionul tot cu un prag T , dar valoarea acestuia este împinsă înspre ipoteza mai puțin probabilă
 - ▶ T depinde de raportul $\frac{P(H_0)}{P(H_1)}$
- ▶ Regiuni de decizie
 - ▶ $R_0 = (-\infty, T]$
 - ▶ $R_1 = [T, \infty)$
 - ▶ pot fi diferite pentru alte tipuri de zgomot

- O sursă de informație furnizează două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$. Mesajele se transmit prin semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1). Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție gaussiană $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia un singur eșantion cu valoarea r . Decizia se face prin compararea valorii r cu un prag T , astfel: dacă $r < T$ se decide că s-a transmis mesajul a_0 , altfel se decide mesajul a_1 .
 1. Să se găsească valoarea pragului T conform criteriul probabilității minime de eroare
 2. Dar dacă semnalul 5 este afectat de zgomot uniform $\mathcal{U}[-4, 4]$?
 3. Calculați probabilitatea unei alarme false și a unei ratări

Criteriul riscului (costului) minim

- ▶ Dacă ne afectează mai mult un anumit tip de erori (de ex. alarme false) decât celelalte?
- ▶ Criteriul riscului (sau costului) minim: deciziile au un cost, se minimizează costul mediu
 - ▶ C_{ij} = costul deciziei D_i când ipoteza adevărată este H_j
 - ▶ C_{00} = costul unei rejecții corecte
 - ▶ C_{10} = costul unei alarme false
 - ▶ C_{01} = costul unei ratări
 - ▶ C_{11} = costul unei detecții corecte
- ▶ Definim **riscul** = costul mediu

$$R = C_{00}P(D_0 \cap H_0) + C_{10}P(D_1 \cap H_0) + C_{01}P(D_0 \cap H_1) + C_{11}P(D_1 \cap H_1)$$

- ▶ Criteriul riscului minim: **se minimizează riscul R**

- ▶ Demonstrație la tablă
 - ▶ se folosește regula lui Bayes
- ▶ Concluzie: regula de decizie este

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)}$$

- ▶ Similar cu primele două criterii, bazat tot pe **raportul de plauzibilitate**
- ▶ Atât probabilitățile cât și costurile pot împinge pragul T într-o parte sau alta
- ▶ Caz particular: dacă $C_{10} - C_{00} = C_{01} - C_{11}$, se reduce la criteriul probabilității de eroare minime
 - ▶ de ex.: dacă $C_{00} = C_{11} = 0$ și $C_{10} = C_{01}$

În zgomot gaussian

- ▶ Dacă zgomotul este gaussian (normal), se aplică logaritmul natural, ca la celelalte criterii
- ▶ Se obține valoarea pragului T :

$$-(r - A)^2 + r^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)}_C$$

$$r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln \left(\frac{(C_{10} - C_{00})p(H_0)}{(C_{01} - C_{11})p(H_1)} \right)}{2A}}_T$$

În zgomot gaussian

- ▶ În general, pentru un raport de plauzibilitate comparat cu K ,
 $\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\geq} K$, pragul este

$$T = \frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln K}{2A}$$

Exemplu

- ▶ Exemplu la tablă: 0 / 5, zgomot alb $N(0, \sigma^2)$, un eșantion

Criteriul Neymar-Pearson

- ▶ Criteriul Neymar-Pearson: se maximizează probabilitatea de detecție ($P(D_1 \cap H_1)$) păstrând probabilitatea alarmei false sub o limită fixată ($P(D_1 \cap H_0) \leq \lambda$)
- ▶ Se deduce pragul T din constrângerea la limită $P(D_1 \cap H_0) = \lambda$

Exercițiu

- ▶ O sursă de informație produce două mesaje cu probabilitățile $p(a_0) = \frac{2}{3}$ și $p(a_1) = \frac{1}{3}$.
- ▶ Mesajele sunt codate ca semnale constante cu valorile -5 (a_0) și 5 (a_1).
- ▶ Semnalele sunt afectate de zgomot alb cu distribuție *triunghiulară* în intervalul $[-5, 5]$.
- ▶ Receptorul ia un singur eșantion r .
- ▶ Decizia se ia prin compararea r cu un prag T : dacă $r < T$ se decide că mesajul este a_0 , altfel este a_1 .
 1. Găsiți pragul T conform criteriului Neyman-Pearson, pentru $P_{fa} \leq 10^{-2}$
 2. Care este probabilitatea de detecție corectă?

Două nivele de semnal nenule

- ▶ Dacă semnalul $s_0(t)$ nu este 0, ci are o altă valoare constantă $s_0(t) = B$?
- ▶ Distribuția zgometului $w(r|H_0)$ va fi centrată pe B în loc de 0
- ▶ În rest, totul rămâne la fel
- ▶ Performanțele sunt determinate de diferența dintre cele două valori ($A - B$)
 - ▶ cazul $s_0 = 0, s_1 = A$ este identic cu cazul $s_0 = -\frac{A}{2}, s_1 = \frac{A}{2}$
- ▶ Valabil pentru toate criteriile de decizie

Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Semnal unipolar: o valoare este 0, cealaltă este nenulă
 - ▶ $s_0 = 0, s_1 = A$
- ▶ Semnal diferențial: două valori nenule cu semne contrare, aceeași valoare absolută
 - ▶ $s_0 = -\frac{A}{2}, s_1 = \frac{A}{2}$
- ▶ Care metodă este mai bună?

Semnale diferențiale sau unipolare

- ▶ Cu aceeași diferență între nivele, performanțele deciziei sunt identice
- ▶ Dar puterea medie a semnalelor diferă
- ▶ Pentru semnale diferențiale: $P = \left(\pm \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4}$
- ▶ Pentru semnale unipolare: $P = P(H_0) \cdot 0 + P(H_1) (A)^2 = \frac{A^2}{2}$
 - ▶ presupunând probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Semnalul diferențial necesită putere la jumătate față de cel unipolar (mai bine)

Sumar: criterii de decizie

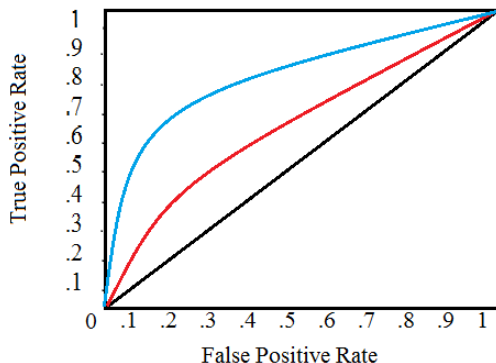
- ▶ Am văzut: decizie între două nivele constante, bazată pe 1 eşantion r
- ▶ Toate criteriile au la bază un test al raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Criterii diferite conduc la valori diferite pentru K (pragul de plauzibilitate)
- ▶ În funcție de distribuția zgomotului, axa reală este împărțită în regiuni
 - ▶ regiunea R_0 : dacă r este aici, se decide D_0
 - ▶ regiunea R_1 : dacă r este aici, se decide D_1
 - ▶ de ex. $R_0 = (-\infty, \frac{A+B}{2}]$, $R_1 = (\frac{A+B}{2}, \infty)$ (pentru crit. plauz. max)
- ▶ Pentru zgomot gaussian, pragul este $T = \frac{A^2 + 2\sigma^2 \cdot \ln K}{2A}$

Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Performanța unui receptor este ilustrată cu un grafic numit **“Caracteristica de operare a receptorului” (“Receiver Operating Characteristic”, ROC)**
- ▶ Reprezintă probabilitatea detecției corecte $P_d = P(D_1 \cap H_1)$ în funcție de probabilitatea alarmei false $P_{fa} = P(D_1 \cap H_0)$



Caracteristica de operare a receptorului (ROC)

- ▶ Există întotdeauna un **compromis** între P_d și P_{fa}
 - ▶ creșterea P_d implică și creșterea P_{fa}
 - ▶ pentru a fi siguri că nu ratăm nici un semnal (creșterea P_d), plătim prin creșterea probabilității de alarme false
- ▶ Criterii diferite = diferite praguri K = diferite puncte pe grafic = compromisuri diferite
- ▶ Cum să creștem performanțele unui receptor?
 - ▶ adică să creștem P_D menținând P_{fa} la aceeași valoare

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- ▶ Considerăm probabilități egale $P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Deciziile se iau pe baza raportului de plauzibilitate

$$\frac{w(r|H_1)}{w(r|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Probabilitatea detecției corecte este

$$\begin{aligned} P_d &= P(D_1|H_1)P(H_1) \\ &= P(H_1) \int_T^\infty w(r|H_1) \\ &= P(H_1)(F(\infty) - F(T)) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T - A}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\ &= Q \left(\frac{T - A}{\sqrt{2}\sigma} \right) \end{aligned}$$

Performanțele detecției în zgomot alb gaussian

- Probabilitatea alarmei false este

$$\begin{aligned}P_{fa} &= P(D_1|H_0)P(H_0) \\&= P(H_0) \int_T^\infty w(r|H_0) \\&= P(H_0)(F(\infty) - F(T)) \\&= \frac{1}{4} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{T-0}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \\&= Q \left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma} \right)\end{aligned}$$

- Rezultă că $\frac{T}{\sqrt{2}\sigma} = Q^{-1}(P_{fa})$
- Înlocuind în P_d se obține

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Raportul semnal zgomot

- ▶ **Raportul semnal zgomot (SNR)** = $\frac{\text{puterea semnalului original}}{\text{puterea zgomotului}}$
- ▶ Puterea medie a unui semnal = valoarea pătratică medie = $\overline{X^2}$
 - ▶ Puterea semnalului original este $\frac{A^2}{2}$
 - ▶ Puterea zgomotului este $\overline{X^2} = \sigma^2$ (pentru valoare medie nulă $\mu = 0$)
- ▶ În cazul nostru, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$

$$P_d = Q \left(\underbrace{Q^{-1}(P_{fa})}_{\text{constant}} - \sqrt{\text{SNR}} \right)$$

- ▶ Pentru P_{fa} de valoare fixă, P_d crește odată cu SNR
 - ▶ Q este o funcție monoton descrescătoare

Performanța depinde de SNR

- ▶ Performanța receptorului crește odată cu creșterea SNR
 - ▶ SNR mare: performanță bună
 - ▶ SNR mic: performanță slabă

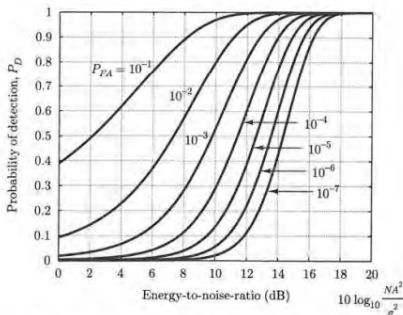


Figure 4: Performanțele detecției depind de SNR

[sursa: *Fundamentals of Statistical Signal Processing*, Steven Kay]

Decizii între ipoteze statistice

- ▶ Teoria statistică a detecției este utilă și în alte contexte în afară de detecția unor semnale propriu-zise
 - ▶ oriunde avem de ales între două ipoteze
- ▶ Decizia se face între două distribuții de probabilitate
 - ▶ indiferent ce semnificație au cele două distribuții
- ▶ În cazul detecției unui semnal constant, se alege între două distribuții care **diferă doar prin valoarea medie**, în general
 - ▶ o distribuție are valoarea medie 0, cealaltă A
- ▶ Dar se poate face decizie între distribuții care diferă prin alt parametru
 - ▶ valoarea medie, sau
 - ▶ varianța, or
 - ▶ forma distribuției, etc

Decizii între ipoteze statistice

- ▶ Exemplu: Un eșantion cu valoarea $r = 2.5$ poate proveni dintr-o distribuție $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$ (ipoteza H_0) sau dintr-o alta $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$ (ipoteza H_1). Care ipoteză se consideră adevărată?
 - ▶ Ceea ce diferă este varianța, nu valoarea medie
- ▶ Se pot folosi exact aceleași criterii
 - ▶ Se desenează cele două distribuții
 - ▶ Se calculează plauzibilitățile $w(r|H_0)$ și $w(r|H_1)$ for r
 - ▶ Se decide pe baza raportului de plauzibilitate, conform unui criteriu

II.3 Detectia unui semnal constant cu mai multe eșantioane

Multiple eşantioane dintr-un semnal constant

- ▶ Presupunem că avem mai multe eşantioane, nu doar unul
- ▶ Eşantioanele formează **vectorul eşantioanelor**

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$$

- ▶ În ambele ipoteze, semnalul recepţionat este un **proces aleator**
 - ▶ H_0 : proces aleator cu valoarea medie 0
 - ▶ H_1 : proces aleator cu valoarea medie A
- ▶ Dacă zgomotul este staţionar şi ergodic, semnalul recepţionat este şi el staţionar şi ergodic (semnalul = o constantă + zgomotul)
- ▶ Valorile vectorului \mathbf{r} sunt descrise de **distribuţia de ordin N** a procesului aleator, $w_N(\mathbf{r}) = w_N(r_1, r_2, \dots, r_N)$
- ▶ Dacă zgomotul este alb, momentele de timp când se iau eşantioanele nu contează

Plauzibilitatea vectorului de eşantioane

- ▶ Se aplică **aceleaşi criterii** bazate pe raportul de plauzibilitate în cazul unui singur eşantion

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_0)}{w_N(\mathbf{r}|H_1)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- ▶ Observaţii
 - ▶ \mathbf{r} este un vector; prin el se consideră plauzibilitatea tuturor eşantioanelor
 - ▶ ipotezele H_0 şi H_1 sunt aceleaşi ca în cazul cu 1 eşantion
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_0)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_0
 - ▶ $w_N(\mathbf{r}|H_1)$ = plauzibilitatea vectorului \mathbf{r} în ipoteza H_1
 - ▶ valoarea lui K este dată de criteriul de decizie utilizat
- ▶ Interpretare: se alege ipoteza cea mai plauzibilă de a fi generat datele observate
 - ▶ identic ca la 1 eşantion, doar că acum datele = mai multe eşantioane

Descompunere pe fiecare eșantion

- ▶ Presupunând că zgomotul este alb, eșantioanele r_i sunt **realizări independente ale aceleiași distribuții**
- ▶ În acest caz, distribuția totală $w_N(\mathbf{r}|H_j)$ se poate descompune ca un produs

$$w_N(\mathbf{r}|H_j) = w(r_1|H_j) \cdot w(r_2|H_j) \cdot \dots \cdot w(r_N|H_j)$$

- ▶ Termenii $w(r_i|H_j)$ sunt plauzibilitățile fiecărui eșantion în parte
 - ▶ de ex. plauzibilitatea obținerii vectorului $[5.1, 4.7, 4.9] = \text{plauzibilitatea obținerii lui } 5.1 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.7 \times \text{plauzibilitatea obținerii lui } 4.9$

Descompunere pe fiecare eşantion

- Prin urmare, criteriile bazate pe raportul de plauzibilitate devin

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{w(r_1|H_1)}{w(r_1|H_0)} \cdot \frac{w(r_2|H_1)}{w(r_2|H_0)} \cdots \frac{w(r_N|H_1)}{w(r_N|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

- Raportul de plauzibilitate al unui vector de eşantioane = produsul rapoartelor plauzibilitate ale fiecărui eşantion

Caz particulae: AWGN

- ▶ AWGN = “Additive White Gaussian Noise” = Zgomot alb, gaussian, aditiv
- ▶ În ipoteza H_1 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ În ipoteza H_0 : $w(r_i|H_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_i^2}{2\sigma^2}}$
- ▶ Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i-A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}}$$

- ▶ Se pot găsi trei interpretări ale raportului de plauzibilitate

Interpretarea 1: media eșantioanelor

► Interpretarea 1: media eșantioanelor

$$\begin{aligned}\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \\ &= e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2 - \sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{\sum (r_i^2 - 2r_i A + A^2) - \sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{\sum (-2r_i A + A^2)}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{-2A \sum (r_i) + NA^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{-2A \frac{\sum (r_i)}{N} + A^2}{2 \frac{\sigma^2}{N}}}\end{aligned}$$

Media a N variabile aleatoare normale

- ▶ Fie $U_r =$ media aritmetică a eşantioanelor r_i

$$U_r = \frac{1}{N} \sum r_i$$

- ▶ Care este distribuția sa?
- ▶ Fie suma $S_r = \sum r_i$ a celor N eşantioane r_i
 - ▶ Din cap.I: suma unor v.a. normale cu distribuția $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ este:
 - ▶ cu distribuție normală $\mathcal{N}(\mu_S, \sigma_S^2)$, unde:
 - ▶ valoarea medie: $\mu_S = N \cdot \mu$
 - ▶ varianța: $\sigma_S^2 = N \cdot \sigma^2$
- ▶ Așadar $U_r = \frac{1}{N} S_r$, din proprietățile mediei se obține:
 - ▶ U_r are distribuție normală, cu:
 - ▶ valoarea medie $= \frac{1}{N} \mu_S = \frac{1}{N} N \mu = \mu$
 - ▶ varianța $= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_S^2 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N \sigma_S^2 = \frac{1}{N} \sigma^2$

Media a N variabile aleatoare normale

- ▶ Media a N realizări ale unei distribuții normale are tot o distribuție normală, cu
 - ▶ aceeași valoare medie
 - ▶ varianța de N ori mai mică
- ▶ Dacă N este foarte mare, media aritmetică este un **estimator** foarte bun pentru valoarea medie a distribuției
 - ▶ distribuția sa devine foarte “îngustă” în jurul valorii medii

Interpretarea 1: media eşantioanelor

$$\begin{aligned}\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} &= e^{-\frac{-2AU_r+A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{U_r^2-2AU_r+A^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{-\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\ &= \frac{e^{-\frac{(U_r-A)^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}}{e^{-\frac{U_r^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}} \\ &= \frac{w(U_r|H_1)}{w(U_r|H_0)}\end{aligned}$$

- Raportul de plauzibilitate a N eşantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eşantioanelor**

Interpretarea 1: media eșantioanelor

- ▶ Raportul de plauzibilitate a N eșantioane gaussiene = raportul de plauzibilitate al **mediei eșantioanelor**
 - ▶ media are o varianță mai mică, $\frac{1}{N}\sigma^2$, deci este mai precisă
 - ▶ e ca și cum distribuția zgomotului devine de N ori mai îngustă (datorită medierii)
- ▶ Detecția unui semnal constant cu N eșantioane este similaru cu detecția cu un singur eșantion, doar că
 - ▶ se folosește valoarea medie a eșantioanelor r_i
 - ▶ distribuția sa este de N ori mai îngustă (varianța e de N ori mai mică)
- ▶ Când N crește, probabilitatea erorilor scade \Rightarrow performanțe îmbunătățite

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia 5 eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4, 3.7, 4.1, 3.8\}$.
 1. Ce decizie se ia conform criteriului plauzibilității maxime?
 2. Ce decizie se ia conform criteriului probabilității minime de eroare. dacă $P(H_0) = 2/3$ și $P(H_1) = 1/3$?

Interpretarea 2: geometric

- ▶ Folositoare în special pentru criteriul plauzibilității maxime
- ▶ Raportul de plauzibilitate pentru vectorul \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless K$$

- ▶ La criteriul plauzibilității maxime se compară cu 1

$$\frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless 1$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \frac{H_1}{H_0} \gtrless 1$$

$$-\sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i)^2 \frac{H_1}{H_0} \gtrless 0$$

$$\sum (r_i)^2 \frac{H_1}{H_0} \gtrless \sum (r_i - A)^2$$

Interpretarea 2: geometric

- ▶ $\sqrt{\sum (r_i)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]$
- ▶ $\sqrt{\sum (r_i - A)^2}$ este distanța geometrică (Euclidiană) între punctul $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ și punctul $\mathbf{A} = [A, A, \dots, A]$
- ▶ criteriul plauzibilității maxime alege **vectorul (punctul) semnalului cel mai apropiat** de vectorul (punctul) recepționat, într-un spațiu N-dimensional
 - ▶ receptorul se mai numește “receptor de distanță minimă”
 - ▶ aceeași interpretare ca în cazul 1-D
- ▶ Întrebare: care este interpretarea geometrică pentru celelalte criterii?

Exercițiu:

- ▶ Un semnal poate avea două valori, 0 (ipoteza H_0) sau 6 (ipoteza H_1). Semnalul este afectat de AWGN $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = 1)$. Receptorul ia două eșantioane cu valorile $\{1.1, 4.4\}$.
 1. Care este decizia conform criteriului plauzibilității maxime? Utilizați interpretarea geometrică.

Interpretarea 3: valoarea corelației

- Raportul de plauzibilitate al vectorului \mathbf{r}

$$\frac{w_N(\mathbf{r}|H_1)}{w_N(\mathbf{r}|H_0)} = \frac{e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$e^{-\frac{\sum (r_i - A)^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum (r_i)^2}{2\sigma^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} K$$

$$-\sum (r_i - A)^2 + \sum (r_i)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$2\sum r_i A - NA^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 2\sigma^2 \ln K$$

$$\frac{1}{N} \sum r_i A \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \underbrace{\frac{A^2}{2} + \frac{1}{N}\sigma^2 \ln K}_{L=const}$$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- ▶ **Valoarea de corelația** (sau “corelația”) a două semnale x and y este

$$C_{x,y} = \frac{1}{N} \sum x[n]y[n]$$

- ▶ Este valoarea funcției de corelație în 0

$$C_{x,y} = R_{xy}[0] = \overline{x[n]y[n+0]}$$

- ▶ Pentru semnale continue

$$C_{x,y} = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t)y(t)dt$$

- ▶ $\frac{1}{N} \sum r_i A$ este valoarea de corelație a vectorului recepționat $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ cu vectorul **țintă** $\mathbf{A} = [A, A, \dots, A]$

Interpretarea 3: valoarea corelației

- ▶ Dacă valoarea de corelație a vectorului recepționat cu vectorul țintă $\mathbf{A} = [A, A, \dots A]$ este mai mare decât un prag L , se decide că semnalul este detectat.
 - ▶ altfel, semnalul este rejectat
- ▶ Decizia este **similară u detecția semnalului cu singur eșantion**, unde valoarea eșantionului este $C_{x,y}$

