

# Proiectarea filtrului FIR invers

Laborator 4, PSS

## Table of contents

<b>1</b>	<b>Obiectiv</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noțiuni teoretice</b>	<b>1</b>
2.1	Filtrul invers . . . . .	1
2.2	Proiectarea filtrului FIR invers prin metoda celor mai mici pătrate . . . . .	2
2.3	Proiectarea filtrului FIR invers prin metoda Prony (variantă) . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Exercițiu teoretic</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Exerciții practice</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Întrebări finale</b>	<b>4</b>

## 1 Obiectiv

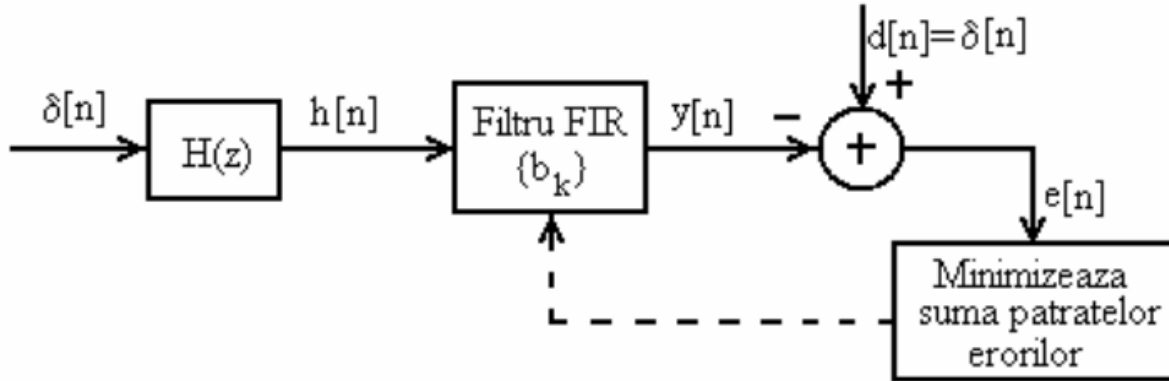
Proiectarea filtrului FIR invers prin metoda celor mai mici pătrate

## 2 Noțiuni teoretice

### 2.1 Filtrul invers

Filtrul **invers**  $H_I(z)$  al unui filtru oarecare  $H(z)$  este sistemul care anulează efectul lui  $H(z)$  asupra unui semnal:

$$H_I\{H\{x[n]\}\} \approx x[n]$$



O soluție directă este filtrul invers definit ca:

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Posibile probleme:

- $H_I(z)$  este instabil dacă  $H(z)$  are zerouri în afara cercului unitate

Soluție:

- Căutăm un **filtru FIR** care aproximează filtrul invers
- Fiind FIR, acesta este întotdeauna stabil

$$H_I(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-N} \approx \frac{1}{H(z)}$$

## 2.2 Proiectarea filtrului FIR invers prin metoda celor mai mici pătrate

Dat fiind un filtru  $H(z)$  cu răspunsul la impuls  $h[n]$ , **filtrul FIR invers**  $H_I(z) = b_0 + \dots + b_N z^N$  se obține rezolvând sistemul următor (similar cu cel de la metoda Prony):

$$\begin{bmatrix} h[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{hh}[0] & r_{hh}[-1] & \dots & r_{hh}[-N] \\ r_{hh}[1] & r_{hh}[0] & \dots & r_{hh}[-N+1] \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ r_{hh}[N] & r_{hh}[N-1] & \dots & r_{hh}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

Valorile  $r_{hh}$  sunt valorile funcției de autocorelație a semnalului  $h[n]$ .

## 2.3 Proiectarea filtrului FIR invers prin metoda Prony (variantă)

Vrem să proiectăm un filtru  $H_I(z)$  astfel încât:

$$\begin{aligned} H(z) \cdot H_I(z) &\approx 1 \\ \frac{1}{H_I(z)} &\approx H(z) \\ \frac{1}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}} &\approx H(z) \\ \frac{1/b_0}{1 + b_1/b_0 z^{-1} + \dots + b_N/b_0 z^{-N}} &\approx H(z) \end{aligned}$$

Relația de mai sus, trecută în domeniul timp:

$$h_I[n] \approx \underbrace{h[n]}_{h_d[n]}$$

Vrem să proiectăm un filtru de forma

$$\frac{1/b_0}{1 + b_1/b_0 z^{-1} + \dots + b_N/b_0 z^{-N}}$$

a carui răspuns la impuls  $h_I[n]$  să aproximeze răspunsul la impuls al filtrului inițial,  $h[n]$ .

Putem folosi în acest sens **metoda Prony**, cu gradul numărătorului 0 și gradul numitorului egal cu  $N$ .

Rezolvare cu metoda Prony:

1. Proiectăm un filtrul  $\frac{b'_0}{1+a'_1 z^{-1}+\dots+a'_N z^{-N}}$  care să aproximeze răspunsul la impuls dorit = răspuns la impuls al filtrului inițial,  $h_d[n] = h[n]$
2. După ce obținem coeficienții, simplificăm forțat fracția prin  $b'_0$  (coeficientul de la numărător)
3. Numitorul rezultat,  $1/b'_0 + a'_1/b'_0 z^{-1} + \dots + a'_N/b'_0 z^{-N}$ , este funcția de sistem a filtrului FIR invers obținut

$$H_I(z) = 1/b'_0 + a'_1/b'_0 z^{-1} + \dots + a'_N/b'_0 z^{-N} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$$

## 3 Exercițiu teoretic

1. Folosiți metoda celor mai mici pătrate pentru a găsi filtrul FIR invers de ordinul 2 al filtrului următor:

$$H(z) = 0.2 + 0.8z^{-1} + 0.2z^{-2}$$

## 4 Exerciții practice

1. Rezolvați numeric în Matlab sistemul de ecuații aferent proiectării filtrului FIR invers de la exercițiul teoretic, folosind funcția `linsolve()`.
2. Implementați în Matlab o funcție generală care să proiecteze filtrul FIR invers pentru orice ordin și orice răspuns la impuls  $h[n]$ :

```
function b = firinvers(ordin, h)
...
end
```

Funcția va primi ca argumente:

- **ordin**: ordinul filtrului dorit
- **hd**: un vector cu răspunsul la impuls al filtrului original (cât mai lung)

Funcția va returna coeficienții funcției de sistem a filtrului proiectat (doar numărător, fiind FIR):

- **b**: coeficienții de la numărător

3. Verificare: utilizați funcția de mai sus pentru a găsi filtrul FIR invers al filtrului de la exercițiul teoretic:

$$H(z) = 0.2 + 0.8z^{-1} + 0.2z^{-2}$$

Observație: la filtrele FIR, răspunsul la impuls coincide cu coeficienții lui  $H(z)$ .

4. Utilizați funcția de mai sus pentru a găsi filtrul FIR invers al filtrelor următoare:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{3}{1 + 0.1z^{-1} - 0.3z^{-2}}$$

Utilizați în prealabil `impz()` pentru a genera un răspuns la impuls al acestor filtre suficient de lung (de ex. 100 eșantioane).

5. Să se încarce un semnal audio în Matlab și să se filtreze cu  $H(z)$ , apoi cu inversul acestuia. Cum e aude fiecare semnal?

## 5 Întrebări finale

1. TBD