

INTRODUCERE

Prelucrarea numerică a semnalelor (PNS) este un domeniu al științei care s-a dezvoltat foarte rapid în ultimii 30 de ani, ca urmare a progresului înregistrat de tehnologia calculatoarelor și fabricarea circuitelor integrate. Prelucrarea numerică a semnalelor are aplicații în orice domeniu în care informația poate fi prezentată sub formă numerică. Dintre acestea se amintesc:

1. Procesarea de imagini: facsimil, harta vremii prin satelit, animație etc.
2. Instrumentație/control: analiză spectrală, controlul poziției și a vitezei, compresie de date etc.
3. Vorbire/audio: recunoașterea vocii, sinteza vorbirii, egalizare etc.
4. Militar: securitatea comunicațiilor, procesare radar, procesare sonar, ghidarea proiectilelor etc.
5. Telecomunicații: anulare ecou, egalizare adaptivă, conferințe video, comunicații de date etc.
6. Biomedical: scanare computer-tomografie, electroencefalografie, electrocardiografie etc.

Această enumerare ilustrează importanța prelucrării numerice a semnalelor în diverse domenii de activitate. Câteva dintre **avantajele** acestui mod de prelucrare a semnalelor sunt:

1. *Acuratețe garantată* – determinată de numărul de biți folosiți în reprezentarea semnalului;
2. *Reproductibilitate perfectă* – se obțin performanțe identice de la unitate la unitate, dacă nu variază toleranțele componentelor, de exemplu o înregistrare numerică poate fi copiată sau reproducă fără vreo degradare a calității semnalului;
3. *Nu are abateri cu temperatura sau vechimea*;
4. Sistemele de PNS pot fi realizate sub *formă de circuite integrate* care prezintă siguranță crescută, gabarit redus, putere mică, cost mic;
5. *Flexibilitate crescută* – sistemele de PNS pot fi programate și reprogramate pentru a realiza o varietate de funcții, fără modificarea hardului;

6. Performanțe superioare – sistemele de PNS pot realiza funcții inaccesibile prelucrării analogice, de exemplu obținerea unui răspuns de fază liniară, implementarea de algoritmi pentru filtrarea adaptivă.

Evident, există și **dezavantaje** ale PNS:

1. *Viteză și cost* – sistemele de PNS pot fi scumpe când sunt implicate semnale de bandă largă. În prezent, convertoarele analog/numerice și numeric/analogice sunt costisitoare sau nu au suficientă rezoluție pentru aplicații PNS de bandă largă. Timpul necesar conversiei limitează viteza de lucru. Obișnuit, numai circuitele integrate specializate pot procesa semnale în domeniul MHz și sunt scumpe. Semnale de bandă mai mare de 100 MHz se prelucrează numai analogic;

2. *Timpul de proiectare* – uneori proiectarea unui circuit poate consuma nejustificat de mult timp;

3. *Problema lungimii finite a cuvintelor* – în situațiile de prelucrare în timp real, considerații economice impun ca algoritmii PNS să fie implementați pe un număr limitat de biți. Dacă acesta nu este suficient pentru a reprezenta variabilele, apar degradări serioase ale performanțelor circuitului. Sistemele numerice sunt afectate de zgomotul de cuantizare al convertoarelor analog/numerice, care este cu atât mai mare cu cât numărul de biți folosit în reprezentarea eșantioanelor semnalului de intrare este mai mic. Mai mult, în timpul prelucrării, datorită operației de rotunjire, apare un zgomot care, prin acumulare, poate conduce la instabilitate pentru sistemele de ordin superior.

Prelucrarea numerică a semnalelor implică reprezentarea, transmisia și prelucrarea semnalelor folosind tehnici numerice și procesoare numerice, deci, se poate spune că PNS se ocupă cu reprezentarea numerică a semnalelor și utilizarea procesoarelor numerice pentru a analiza, modifica sau extrage informații din semnale.

Deși domeniul prelucrării numerice a semnalelor este foarte dinamic, ajungându-se, în funcție de aplicație la dezvoltarea unor algoritmi și metode de analiză foarte sofisticate, în lucrarea de față se urmărește prezentarea principiilor fundamentale care stau la baza prelucrării numerice de semnal. Obiectivele acestei cărți constau în prezentarea unitară și documentată a teoriei sistemelor discrete liniare și introducerea unor metode și tehnici de analiză de bază folosite în prelucrarea numerică a semnalelor. Conceptele descrise în această carte pot fi împărțite în patru categorii: analiză, sinteză, transformări și filtrare liniară. Semnalele și sistemele se analizează în domeniul timp și frecvență pentru a le determina caracteristicile. În domeniul timp un filtru numeric este caracterizat de *răspunsul la impuls* $\{h[n]\}$. *Suma de convoluție*

permite determinarea ieșirii $\{y[n]\}$, cunoscute fiind secvența de intrare $\{x[n]\}$ și răspunsul la impuls. Cunoașterea răspunsului la impuls permite determinarea stabilității filtrului. *Ecuatiile cu diferențe* constituie o descriere alternativă a filtrelor în domeniul timp, utilă în implementarea lor.

De obicei, specificațiile filtrelor se dau în domeniul frecvență, motiv pentru care va fi folosită *transformata Fourier* pentru examinarea proprietăților semnalelor și sistemelor în acest domeniu. Transformata Fourier a răspunsului la impuls $\{h[n]\}$ determină *funcția de transfer* $H(\omega)$ a filtrului și reprezintă câștigul filtrului la diferite frecvențe. Transformata Fourier a unei secvențe $\{x[n]\}$ definește *spectrul* $X(\omega)$ al acesteia. *Transformata Fourier discretă* este folosită pentru analiza spectrală cu ajutorul calculatorului numeric, folosind algoritmi rapizi de calcul. Tot pentru analiza semnalelor și sistemelor discrete se folosește o tehnică mai generală oferită de transformata Z, cu ajutorul căreia se obține o interpretare facilă a răspunsului în frecvență al filtrului. *Funcția de sistem* $H(z)$ este transformata Z a răspunsului la impuls. Metodele de sinteză implică aflarea coeficienților pentru satisfacerea specificațiilor dorite ale filtrelor. De asemenea, sunt prezentate câteva metode simple de obținere a unor filtre numerice selective de frecvență.

În capitolul 1 sunt descrise operațiile de bază ce intervin în conversia analog - numerică a semnalelor analogice, este descris în detaliu procesul de eșantionare a unui semnal armonic și este explicat fenomenul alias.

Capitolul 2 este dedicat caracterizării și analizei sistemelor discrete liniare invariante în timp în domeniul timp. Este intodusă suma de convoluție și se efectuează clasificarea sistemelor în funcție de caracteristicile lor. Sistemele discrete liniare invariante în timp sunt descrise cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe și se determină răspunsul acestora la semnale de intrare arbitrară în condiții inițiale nenule.

În capitolul 3 se introduc transformata Z bilaterală și unilaterală și proprietățile acestora. Se ilustrează folosirea transformatei Z în caracterizarea sistemelor liniare invariante în timp și se reformulează proprietățile de cauzalitate și stabilitate ale sistemelor în funcție de transformata Z. Transformata Z unilaterală este folosită pentru determinarea răspunsului unui sistem discret, liniar, invariant în timp la un semnal de intrare dat, în condiții inițiale.

Capitolul 4 tratează analiza semnalelor în domeniul frecvență. Sunt introduse seria și transformata Fourier ca instrumente de analiză a

semnalelor periodice, respectiv aperiodice, atât în domeniul analogic, cât și discret.

În capitolul 5 sistemele discrete liniare invariante în timp sunt caracterizate în domeniul frecvență. Sunt prezentate câteva metode simple de proiectare a unor filtre de tip FIR și IIR.

Capitolul 6 este dedicat eșantionării semnalelor și spectrelor lor și problematicii refacerii acestora din eșantioanele prelevate. Se are în vedere eșantionarea în domeniul timp atât a semnalelor analogice aperiodice și periodice, cât și a semnalelor discrete. De asemenea, se tratează eșantionarea spectrelor semnalelor aperiodice analogice și discrete și refacerea lor.

În capitolul 7 este tratată transformata Fourier discretă: proprietăți, legătura cu alte transformate și aplicații ale DFT în filtrarea liniară.

Capitolul 8 introduce algoritmi rapizi pentru calculul conoluției și ai transformatei Fourier rapide.

În capitolul 9 sunt introduse diverse structuri de implementare ale filtrelor numerice care, în practică, au comportări diferite la cuantizarea coeficienților filtrelor.

Capitolele 10 și 11 prezintă separat metode de proiectare folosite pentru obținerea filtrelor cu răspuns finit și, respectiv, infinit la impuls.

Capitolul 12 analizează efectul lungimii finite a reprezentării valorilor numerice asupra performanțelor sistemelor, în diverse structuri de implementare.

În capitolul 13 sunt introduse metodele neparametrice și parametrice de estimare a spectrului de putere al semnalelor.

Capitolul 14 tratează problematica predicției liniare și a filtrării liniare optimale.

În capitolul 15 sunt introduse noțiuni fundamentale referitoare la dispozitivele de modificare a frecvenței de eșantionare a semnalelor și analiza multirezoluție a semnalelor prin descompunerea subbandă.

Cartea de față cuprinde 53 de exemple și 86 de probleme, selectate în scopul ilustrării aspectelor teoretice prezentate, și se adresează atât studenților de la studii de zi sau aprofundate, cât și specialiștilor doritori de o tratare unitară a unui domeniu atât de dinamic.

CAPITOLUL 1

NOTIUNI ȘI OPERAȚII DE BAZĂ ÎN CONVERSIA ANALOG/NUMERICĂ ȘI NUMERIC/ANALOGICĂ

1.1. Semnale

Prin *semnal* se înțelege orice cantitate sau calitate fizică care variază cu timpul, spațiul sau oricare altă sau alte variabile independente și transportă sau conține informație.

Așa, de exemplu, dacă un vapor circulă pe timp de ceată, pentru a evita o eventuală coliziune cu altul, el emite semnale sonore care, recepționate de alte nave, "aduc" informații cu privire la prezența și poziția sa.

Semnalele au natură fizică foarte diversă: biologice, acustice, mecanice, electrice, chimice, video etc.

Metodele folosite în prelucrarea semnalelor sau în analiza răspunsului unui sistem la un anumit tip de semnal depind de natura și caracteristicile semnalelor, motiv pentru care se va prezenta o clasificare a acestora.

1.1.1. Semnale multidimensionale și multicanal

Deși semnalele pot fi reprezentate în multe moduri, în toate cazurile informația este conținută în modelul adoptat. Matematic, semnalele sunt modelate ca funcții de una sau mai multe variabile independente.

De exemplu, un semnal sonor este reprezentat ca o funcție de o singură variabilă, și anume, timpul. Dacă, însă, se consideră o înregistrare fotografică alb-negru, caracterizată în fiecare punct de o nuanță de gri, aceasta constituie "valoarea" semnalului. Ea nu depinde de timp, ci de poziția punctului investigat în cadrul imaginii. În acest caz, semnalul nu are o evoluție temporală, ci se modifică în funcție de coordonatele

carteziene ale punctului din imagine, fiind o funcție de două variabile spațiale $I(x,y)$.

Evident, se poate imagina o succesiune de fotograme, cum este cazul peliculei cinematografice, caz în care nuanțele de gri într-un punct se modifică de la o fotogramă la alta. În acest caz, semnalul este atât funcție de coordonatele carteziene, cât și de timp și poate fi descris de un semnal tridimensional $I(x,y,t)$.

Un semnal se numește *monodimensional* dacă este reprezentat în funcție de o singură variabilă independentă.

Un semnal se numește *M-dimensional* dacă valoarea sa este o funcție de M variabile independente. Semnalul generat de o singura sursă sau senzor și care este o funcție de una sau mai multe variabile independente se numește *semnal monocanal* sau *scalar*.

În unele aplicații, semnalele pot fi generate de mai multe surse sau senzori. Astfel de semnale pot fi reprezentate în formă vectorială. Un exemplu în acest sens îl constituie acceleratia determinata de un cutremur de pământ, care este rezultatul suprapunerii a trei tipuri de unde elastice: primară, secundară și de suprafață.

Multe surse generează semnale scalare care, uneori, din considerante matematice sau de notație, sunt tratate drept componente ale unui vector. Un exemplu în acest sens îl constituie ieșirea unui electrocardiograf care are trei electrozi (senzori) plasați în trei locuri diferite pe piele. Dacă notăm cu $s_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, semnalul electric de la electrodul k drept funcție de timp, setul de $p = 3$ semnale poate fi reprezentat ca

$$S_3(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

O astfel de matrice sau vector de semnale reprezintă un *semnal multicanal*.

În continuare, se consideră cazul unei imagini TV color, care poate fi descrisă de trei funcții de forma $I_r(x,y,t)$, $I_g(x,y,t)$ și $I_b(x,y,t)$ corespunzătoare strălucirii celor trei culori fundamentale (roșu, verde și albastru) ca funcții de timp și coordonatele pixelului. Imaginea TV color reprezintă astfel un semnal tricanal, tridimensional, ce poate fi reprezentat de vectorul

$$I(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

În cele ce urmează, se va opera cu semnale unicanal, unidimensionale, reale sau complexe, care vor fi numite simplu, semnale.

În electronica uzuală, variabila după care se produce modificarea valorii semnalului este de obicei timpul, motiv pentru care se va considera acest caz, marcând explicit excepțiile. În vederea prelucrării semnalului se utilizează circuite electronice, analogice sau numerice. În consecință, un semnal de o natură fizică oarecare, să zicem biologică, trebuie mai întâi "tradus" într-un semnal electric sau, în general, într-un semnal ușor prelucrabil ulterior. Acesta trebuie să reflecte cât mai fidel caracteristicile semnalului original. Conversia unui semnal de natură oarecare în semnal electric se realizează cu ajutorul unui traductor.

Evident, va apărea și problema inversă. De exemplu, în orientarea unei antene pe o anumită direcție, semnalul electric de comandă trebuie să fie tradus în poziția unghiulară cerută antenei prin intermediul unui "sistem" care admite o comandă electrică (tensiune sau curent) și furnizează ca răspuns o mișcare mecanică de unghi determinat.

1.1.2. Semnale definite în timp continuu și în timp discret

Semnalele pot fi clasificate după caracteristicile variabilei independente și valorile pe care le iau. Variabila independentă poate fi continuă sau discretă. *Semnalele definite în timp continuu* sunt definite pentru orice valoare a variabilei independente dintr-un interval finit sau infinit. Acestea mai sunt cunoscute sub numele de semnale *analogice*. Considerații asupra amplitudinii semnalului vor fi făcute în paragraful următor.

Un exemplu de semnal definit în timp continuu este reprezentat de semnalul de forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \cdot \sin[2\pi F_i(t) + \theta_i(t)] \quad (1.3)$$

unde $\{A_i(t)\}$, $\{F_i(t)\}$ și $\{\theta_i(t)\}$ reprezintă mulțimile amplitudinilor, frecvențelor și fazelor (posibil variante în timp) ale sinusoidelor componente și N – numărul de componente. În figura 1.2a este reprezentat un semnal definit în timp continuu.

Este posibil ca un semnal definit în timp continuu să nu fie o funcție continuă de variabila independentă, cum este cazul semnalului reprezentat în figura 1.1.

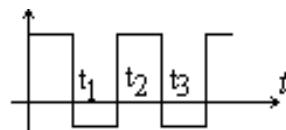


Figura 1.1. Semnal discontinuu definit în timp continuu

Spre deosebire de semnalele definite în timp continuu, există o a doua mare categorie de *semnale definite în timp discret*, care sunt definite numai pentru valori discrete de timp. Acestea nu trebuie neapărat să fie echidistante, dar, în practică, din considerente de comoditate a tratării matematice, de cele mai multe ori, se iau uniform distanțe. Un semnal definit în timp discret poate fi reprezentat matematic de o secvență de numere *reale sau complexe*.

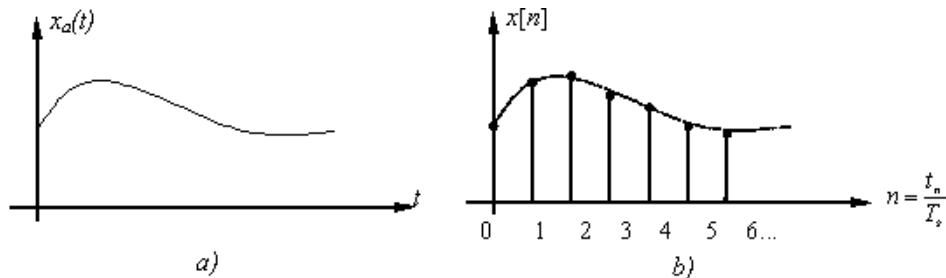


Figura 1.2. Semnal definit în timp discret (b) obținut prin eșantionarea unui semnal analogic (a)

Pentru a putea prelucra un semnal cu ajutorul calculatorului numeric este necesară discretizarea în timp a semnalului definit în timp continuu, operație denumită *eșantionarea* semnalului. *Eșantioanele* reprezintă valorile pe care le ia semnalul la anumite momente de timp $t_n = nT_s$, $n \in \mathbb{Z}$, T_s fiind pasul sau perioada de eșantionare. Se poate nota timpul t_n prin împărțirea la T_s , astfel încât timpul (normat) este n , o variabilă discretă. Prin abuz de limbaj, variabila discretă n este denumită *timp discret*, deși este o mărime adimensională. În plus, această mărime poate proveni și dintr-un semnal care nu are evoluție temporală. În figura 1.2a se prezintă un semnal $x_a(t)$ ce evoluează în timp continuu t . Din el se preleveză eșantioane la momentele nT_s , rezultând semnalul $x[n]$ în timp

discret, $n \in Z$. Semnalul $x[n]$ nu este definit decât la valori întregi ale timpului discret n , obținut prin normare cu T_s . Valoarea semnalului discret la un moment n este egală cu valoarea semnalului analogic la momentul de eșantionare nT_s , adică

$$x_a(nT_s) \equiv x[n] \quad (1.4)$$

unde prin $[]$ s-a indicat faptul că variabila este discretă.

În mod asemănător, se poate imagina că cele două coordonate x și y ale unei înregistrări fotografice se discretizează cu pașii Δx și Δy , obținându-se coordonatele punctelor de eșantionare sub forma unei grile $(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y)$, unde $m \in Z$ și $n \in Z$. După normare, în plan rezultă coordonatele (m, n) .

În practică există și semnale intrinsec definite în timp discret, cum ar fi indicele de bursă; un alt exemplu ar fi cel care indică, la o mulțime finită de persoane procentul din acestea care au publicat 0 cărți, o carte, 2 cărți și.a.m.d., ca în figura 1.3. "Semnalul" care arată procentul de persoane ce au n cărți publicate este un semnal dependent intrinsec de o variabilă discretă (număr de cărți). El nu provine din eșantionarea unui semnal analogic.

Notățiile folosite în literatura de specialitate pentru semnalele definite în timp discret sunt $x[n]$, $x(n)$, x_n sau chiar $x(nT_s)$. În continuare, se va prefera și utilizarea cu paranteze pătrate pentru argument, pentru a sublinia caracterul discret al timpului.

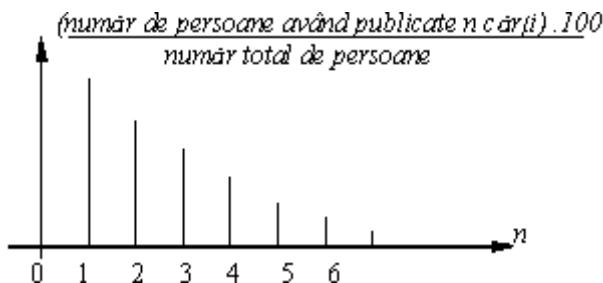


Figura 1.3

1.1.3. Semnale cu valori continue și discrete

Valorile pe care le poate lua un semnal pot fi continue sau discrete. Dacă un semnal poate lua toate valorile posibile dintr-un interval finit sau infinit, el se numește cu *valori continue*. Acesta este cazul

semnalelor reprezentate în figura 1.2 a și b. Se observă că atât semnalele analogice cât și cele discrete pot avea valori continue.

Dacă un semnal ia valori dintr-o mulțime finită de valori posibile, el se numește cu *valori discrete*. În mod obișnuit, valorile discrete sunt exprimate ca multiplu întreg al diferenței dintre două valori successive posibile. Procesul de transformare a unui semnal cu valori continue într-unul cu valori discrete se numește *cuantizare*. Atât semnalele definite în timp continuu cât și cele definite în timp discret pot avea valori discrete.

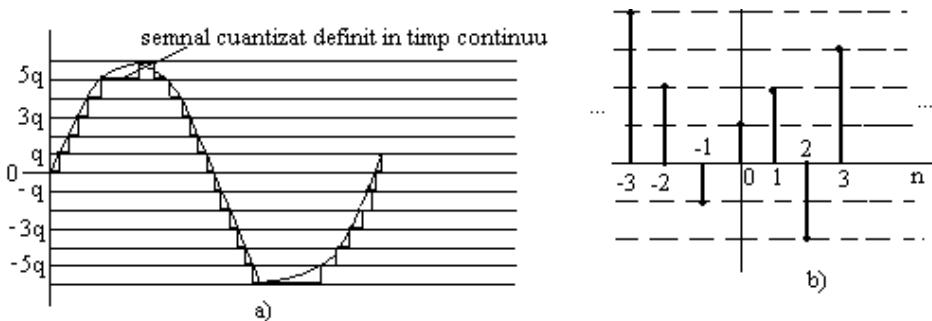


Figura 1.4. Semnal cuantizat a) definit în timp continuu, b) definit în timp discret

În figura 1.4a este reprezentat un semnal analogic cuantizat cu cuanta q . În prelucrarea numerică a semnalelor, pe lângă discretizarea acestora în timp, este necesară și cuantizarea valorilor eșantioanelor, deoarece calculatorul acceptă la intrare numere ce pot fi reprezentate cu un număr finit de cifre binare. Sunt cunoscute sub numele de *semnale numerice* sau *digitale* cele pentru care atât timpul sau, mai general, variabila independentă, cât și amplitudinea semnalului au valori discrete. În figura 1.4b este reprezentat un semnal numeric. Semnalele definite în timp discret se mai numesc și *semnale discrete*, indiferent dacă sunt sau nu cuantizate.

Procesarea numerică a semnalelor se ocupă cu transformările ale semnalelor care sunt discrete atât în timp, cât și în amplitudine. Procesoarele numerice analizează, modifică sau extrag informații din astfel de semnale.

1.1.4. Semnale deterministe și aleatoare

Pentru analiza și procesarea semnalelor este necesară descrierea matematică a acestora, care se referă, de fapt, la modelul ales pentru semnal. Aceasta conduce la o altă clasificare importantă a semnalelor.

Un semnal se numește *determinist* dacă poate fi descris în mod unic de o expresie matematică explicită, o lege sau un tabel de atribuire. Acest termen se folosește pentru a evidenția faptul că orice valoare trecută, prezentă sau viitoare a semnalului este cunoscută precis, fără nici o incertitudine.

În practică, există semnale care fie nu pot fi descrise de formule matematice convenabile din punctul de vedere al fidelității, fie această descriere este prea complicată pentru a fi utilizată. Un semnal se numește *aleator* dacă evoluția acestuia în timp este imprevizibilă. Analiza și descrierea semnalelor aleatoare se realizează cu ajutorul metodelor *statistice*.

1.2. Conceptul de frecvență pentru semnale analogice și discrete

În scopul stabilirii unei analogii între noțiunile de frecvență definite pentru semnale analogice și discrete, se vor considera semnale descrise de o funcție armonică.

a) Fie $x_a(t)$ o oscilație armonică, descrisă matematic în timp continuu de relația

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.5)$$

unde indicele a indică un semnal analogic.

Semnalul $x_a(t)$ este complet caracterizat de trei parametri:

A – amplitudinea oscilației;

Ω – pulsația, exprimată în radiani/secundă;

θ – faza, exprimată în radiani.

Mărimea Ω este legată de frecvența F , exprimată în cicluri/perioadă, prin relația

$$\Omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T_p} \quad (1.6)$$

unde T_p este perioada oscilației.

Cu (1.6), relația (1.5) se mai scrie

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F t + \theta), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1.7)$$

Prin abuz de limbaj, pulsația Ω este uneori denumită tot frecvență, dar cu specificarea unității de măsură de radiani/secundă, în timp ce F are unitatea de măsură cicluri/perioadă sau Hz.

Semnalul dat de relația (1.7) este caracterizat de următoarele proprietăți:

1. Pentru o frecvență fixă F , $x_a(t)$ este periodic, de perioadă fundamentală $T_p = \frac{1}{F}$, adică $x_a(t + T_p) = x_a(t)$ (1.8)

2. Semnalele armonice cu frecvențe distincte sunt distincte.

3. Creșterea frecvenței semnalului are ca rezultat obținerea mai multor perioade ale semnalului în același interval de timp.

Semnalele armonice pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor exponențiale și invers, utilizând relația lui Euler

$$e^{\pm j(\Omega t + \theta)} = \cos(\Omega t + \theta) \pm j \sin(\Omega t + \theta) \quad (1.9)$$

Rezultă atunci

$$x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)} \quad (1.10)$$

Se observă folosirea unui termen ce conține pulsație negativă. Aceasta se utilizează datorită comodității de calcul pe care o oferă exponențialele (reproducere prin integrare sau derivare). Termenul corespunzător pulsației pozitive determină un fazor ce se rotește în sens opus celor de ceasornic cu viteza unghiulară Ω , iar cel cu pulsație negativă, un fazor ce se rotește în sens orar cu aceeași viteza unghiulară.

b) Fie semnalul armonic discret

$$x[n] = A \cos(\omega n + \theta), \quad n \in Z \quad (1.11)$$

unde A este amplitudinea sinusoidei, ω – pulsația, θ – faza.

Pentru a păstra analogia cu cazul semnalelor analogice, pulsația se măsoară în radiani/eașantion, iar faza în radiani. Tot prin abuz de limbaj, pulsației ω i se mai spune frecvență, dar cu specificarea unității de măsură. În locul pulsației ω se poate folosi frecvența f

$$\omega = 2\pi f \quad (1.12)$$

adică $x[n] = A \cos(2\pi fn + \theta), \quad n \in Z$ (1.13)

În paragraful (1.3.1) se va stabili legătura dintre frecvențele f și F , dar pentru moment se evidențiază câteva proprietăți ale semnalului discret $x[n]$ dat de relația (1.13), în comparație cu cele stabilite pentru semnalul analogic.

1. Periodicitatea în timp discret este definită prin relația

$$x[n \pm N] = x[n], \quad \forall n \in Z \text{ și } N \text{ întreg} \quad (1.14)$$

Cea mai mică valoare pozitivă a lui N pentru care (1.14) este adevărată se numește *perioadă fundamentală*.

Pentru ca semnalul dat de (1.13) de frecvență f_0 să fie periodic trebuie ca

$$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta] = \cos[2\pi f_0n+\theta]$$

(1.15) Relația (1.15) este adevărată dacă și numai dacă

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \quad (1.16)$$

sau, echivalent

$$f_0 = \frac{k}{N} \quad (1.17)$$

adică f_0 este un *număr rational*.

2. Semnalele armonice discrete sunt identice dacă pulsațiile lor diferă printr-un multiplu întreg de 2π sau, echivalent, frecvențele diferă printr-un număr întreg, adică semnalele

$$x_k[n] = A \cos(\omega_k n + \theta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.18)$$

sunt identice, dacă

$$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi; \quad -\pi < \omega_0 \leq \pi, \text{ sau } f_k = f_0 + k, \quad -\frac{1}{2} < f_0 \leq \frac{1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Pe de altă parte, secvențele corespunzătoare oricărui semnal armonic discret cu pulsația cuprinsă în intervalul $(-\pi, \pi]$ sau frecvența în intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sunt distințe. Intervalele $(-\pi, \pi]$ și $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ se

numesc *fundamentale*. Datorită periodicității descrise de (1.19), orice secvență armonică de altă pulsație sau frecvență decât cele din intervalul fundamental este identică cu o secvență armonică având pulsația

$-\pi < \omega_0 \leq \pi$, respectiv frecvența $-\frac{1}{2} < f_0 \leq \frac{1}{2}$. Din acest motiv

semnalele armonice ale căror frecvențe $f_k \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ se numesc *alias-uri*

ale semnalului armonic corespunzător frecvenței f_0 . Adoptarea acestei denumiri va fi justificată în paragraful 1.3.1.

3. Frecvență maximă de oscilație se atinge atunci când $\omega = \pi$ (sau $\omega = -\pi$) sau, echivalent, $f = \frac{1}{2}$ (sau $f = -\frac{1}{2}$).

1.3. Conversia analog-numerică și numeric-analogică

Cele mai multe din semnalele de interes practic (vorbire, biologice, seismice, radar, sonar, de comunicații, audio, video) sunt analogice. Pentru a prelucra astfel de semnale cu metode numerice este nevoie să le transformă mai întâi într-o formă numerică, adică într-o

secvență de numere $x_q[n]$, cu o anumită precizie. Această operație se numește conversie analog-numerică, iar dispozitivul care realizează acest lucru se numește convertor analog-numeric (A/N). După prelucrarea acestora, urmează adesea o nouă conversie, numeric-analogică (N/A), prin care datele numerice $y[n]$ sunt transformate într-o mărime analogică $y_r(t)$.

Operațiile descrise anterior sunt realizate de un sistem a cărui schemă bloc este reprezentată în figura 1.5.

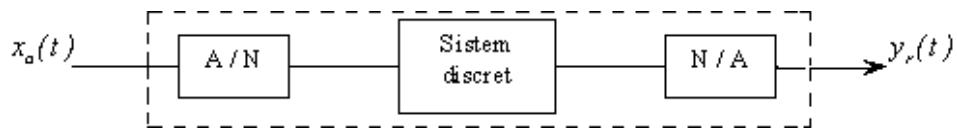


Figura 1.5. Sistem discret pentru procesarea semnalelor analogice

Conversia analog-numerică poate fi văzută ca un proces în trei etape, ilustrat în figura 1.6.

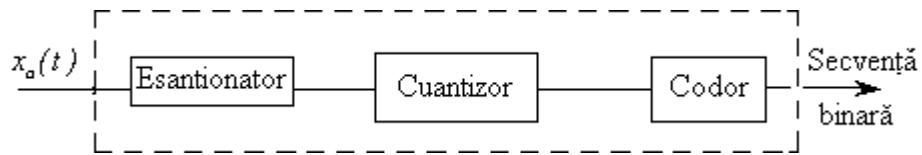


Figura 1.6. Părțile componente ale unui convertor A / N

Cele trei etape ale conversiei A/N sunt:

1. *Eșantionarea*, care constă în reținerea valorilor semnalului definit în timp continuu la momente discrete de timp. Dacă intrarea este $x_a(t)$, ieșirea din blocul de eșantionare este $x_a(nT) = x[n]$, unde T este perioada de eșantionare.
2. *Cuantizarea*, prin care se alocă fiecărui eșantion o valoare dintr-o mulțime finită. Diferența dintre eșantionul necuantizat ($x[n]$) și cel cuantizat ($x_q[n]$) reprezintă eroarea de cuantizare.
3. *Codarea*, care reprezintă atribuirea unei secvențe binare fiecărui eșantion cuantizat $x_q[n]$. În practică, există circuite care realizează toate aceste funcții. După ce mărimea $x_q[n]$ este prelucrată numeric, se obține mărimea $y[n]$ care, de obicei, este supusă unei operații inverse, de conversie N/A, pentru a putea fi văzută, auzită etc.

Eşantionarea nu conduce la pierdere de informaţii şi nici nu introduce distorsiuni dacă banda semnalului este limitată şi frecvenţa de eşantionare este adekvată aleasă pentru a nu apărea suprapunerile sau interferenţe spectrale, cunoscute şi sub numele de *eroare de aliore sau eroare alias* [13].

Cuantizarea conduce la pierdere de informaţie, fiind un proces ireversibil care are ca rezultat distorsionarea semnalului. Mărimea distorsiunilor depinde de numărul de biţi folosiţi în procesul de conversie A/N [29].

1.3.1. Eşantionarea semnalelor analogice

Există multe metode de a eşantiona un semnal analogic. În cele ce urmează, se va considera numai eşantionarea *periodică* sau *uniformă*, care este cea mai întâlnită în practică. Aceasta este descrisă de relaţia

$$x[n] = x_a(nT), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

unde $x[n]$ este semnalul discret obținut prin reținerea valorilor semnalului analogic $x_a(t)$ la fiecare T secunde. Această procedură este ilustrată în figura 1.7.

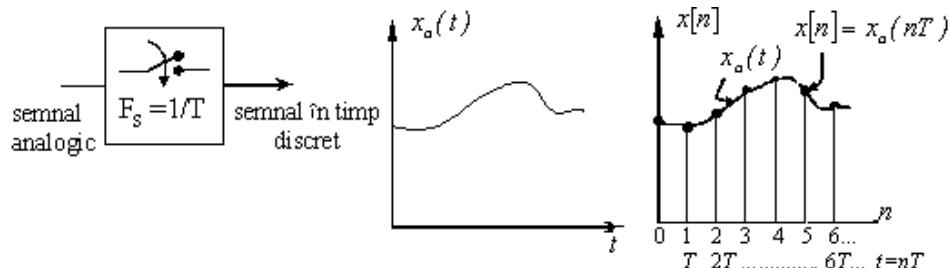


Figura 1.7. Eşantionarea periodică a unui semnal analogic

Intervalul de timp T dintre două eşantioane succese se numeşte *perioadă de eşantionare* sau *interval de eşantionare*. Inversa acestei mărimi ($1/T = F_s$) se numeşte *viteză* sau *rată de eşantionare* (eşantioane/secundă) sau *frecvenţă de eşantionare* (Hertz). Eşantionarea periodică implică existenţa unei relaţii între variabilele independente ale semnalului analogic şi discret, adică între t şi n .

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (1.21)$$

În consecință, va exista o relație și între frecvența F (sau Ω) a semnalului analogic și f (sau ω) a semnalului discret. Pentru a stabili această relație, se consideră un semnal analogic, de forma

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F t + \theta) \quad (1.22)$$

care, eșantionat periodic cu $F_s = 1/T$ eșantioane pe secundă, produce semnalul

$$x_a(nT) = x[n] = A \cos(2\pi F n T + \theta) = A \cos\left(\frac{2\pi n F}{F_s} + \theta\right) \quad (1.23)$$

Dacă se compară (1.23) cu (1.13) se observă că frecvențele F și f sunt legate prin relația

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (1.24)$$

sau, echivalent,

$$\omega = \Omega T \quad (1.25)$$

Relația (1.24) justifică numele de frecvență *relativă* sau *normalizată*, care se folosește uneori pentru mărimea f .

Se reamintește (paragraful 1.2) că domeniile în care pot lua valori mărurile F și Ω pentru semnalele analogice sunt

$$-\infty < F < +\infty, \quad -\infty < \Omega < +\infty, \quad (1.26)$$

în timp ce, pentru semnale discrete, f și ω iau valori în domeniile

$$-\frac{1}{2} < f \leq \frac{1}{2}, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (1.27)$$

Înlocuind (1.24) și (1.25) în (1.27), rezultă

$$-\frac{1}{2T} = -\frac{F_s}{2} < F \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \quad (1.28)$$

respectiv

$$-\frac{\pi}{T} = \pi F_s < \Omega \leq \pi F_s = \frac{\pi}{T} \quad (1.29)$$

Din cele prezentate anterior se observă că diferența esențială între semnalele definite în timp continuu și discret constă în domeniile de valori ale frecvențelor F și f sau Ω și ω .

Eșantionarea periodică a semnalelor analogice implică transformarea domeniului infinit pentru frecvența F (sau Ω) într-unul finit pentru mărimea f (sau ω).

Deoarece cea mai mare frecvență a unui semnal discret este $\omega = \pi$ sau $f = \frac{1}{2}$, rezultă că folosind o frecvență de eșantionare F_s , valorile maxime corespunzătoare pentru F și Ω sunt

$$F_{\max} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T}, \quad \Omega_{\max} = \pi F_s = \frac{\pi}{T} \quad (1.30)$$

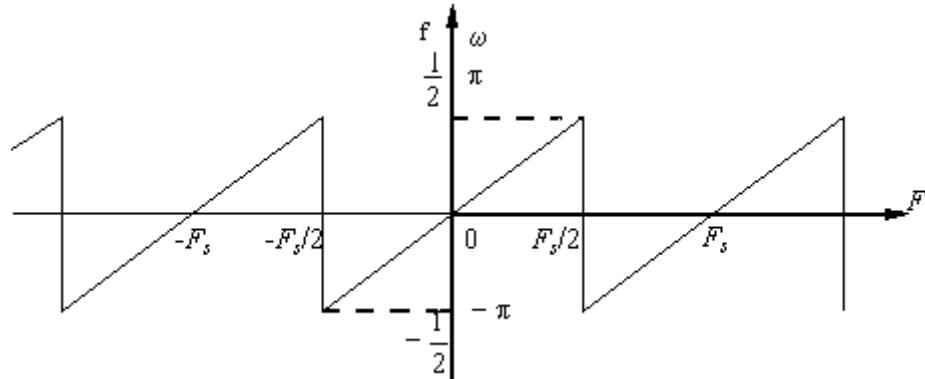


Figura 1.8. Relația dintre f și F

Eșantionarea poate introduce ambiguitate atunci când $F_s < 2|F|$, deoarece cea mai mare frecvență a unui semnal analogic ce poate fi unic determinată când semnalul este eșantionat cu $F_s = \frac{1}{T}$ este $F_{\max} = \frac{F_s}{2}$ sau $\Omega_{\max} = \pi F_s$. Relația dintre frecvențele din domeniul continuu și discret este ilustrată în figura 1.8.

Exemplul 1.1.

Pentru a evidenția ambiguitatea ce poate fi introdusă prin eșantionare, se consideră cazul a două semnale analogice armonice:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 2\pi(10)t \\ x_2(t) &= \cos 2\pi(50)t \end{aligned} \quad (1.31)$$

care sunt eșantionate la $F_s = 40$ Hz.

Semnalele discrete corespunzătoare sunt

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos 2\pi\left(\frac{10}{40}\right)n = \cos \frac{\pi}{2}n \\ x_2[n] &= \cos 2\pi\left(\frac{50}{40}\right)n = \cos \frac{5\pi}{2}n \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\text{Dar } \cos \frac{5\pi}{2} n = \cos \left(2\pi n + \frac{\pi n}{2} \right) = \cos \frac{\pi n}{2}, \text{ deci } x_2[n] = x_1[n].$$

Se observă că semnalele discrete obținute prin eșantionarea lui $x_1(t)$ și $x_2(t)$ cu $F_s = 40$ Hz sunt identice și, dat fiind semnalul $\cos \frac{\pi}{2} n$, există ambiguitate în a spune că el provine din $x_1(t)$ sau $x_2(t)$.

Deoarece $x_2(t)$ produce exact aceleași eșantioane ca și $x_1(t)$ prin eșantionarea la $F_s = 40$ Hz, se spune că frecvența $F_2 = 50$ Hz este un *alias* al frecvenței $F_1 = 10$ Hz la viteza de eșantionare de 40 Hz. Termenul provine din limba engleză, având sensul de "a se da drept altcineva", încetătenit și în limba română. Într-adevăr, în domeniul fundamental discret $(-1/2, 1/2]$ intră frecvențe ce provin din eșantionarea unor semnale analogice ale căror frecvențe nu aparțin intervalului $(-F_s/2, F_s/2]$. Apariția acestor aliasuri determină fenomenul de *interferență* sau *suprapunere spectrală*, fenomen întâlnit și sub denumirea de *aliere*.

Frecvența F_2 nu este singurul alias al frecvenței F_1 la frecvența de eșantionare de 40 Hz. Toate semnalele de forma $\cos 2\pi(F_1 + 40k)t$, $k = 1, 2, 3, \dots$, eșantionate la frecvența $F_s = 40$ Hz produc aceleași eșantioane și, în consecință, frecvențele $F_k = F_1 + 40k$ sunt aliasuri pentru $F_1 = 10$ Hz, la frecvența de eșantionare $F_s = 40$ Hz.

În general, eșantionarea semnalului analogic

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \theta) \quad (1.33)$$

cu frecvența de eșantionare $F_s = \frac{1}{T}$, conduce la semnalul discret

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \quad (1.34)$$

unde $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$ este frecvența relativă a sinusoidei.

Dacă se impune $F_s \geq 2|F_0|$, rezultă $|f_0| \leq \frac{1}{2}$, caz în care relația dintre F_0 și f_0 este bijectivă și, deci, este posibilă refacerea semnalului analogic $x_a(t)$ din eșantioanele $x[n]$.

Dacă, însă, semnalele

$$x_a(t) = A \cos(2\pi F_k t + \theta), \quad (1.35)$$

unde

$$F_k = F_0 + kF_s, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.36)$$

sunt eșantionate cu frecvența F_s , semnalul eșantionat obținut este

$$\begin{aligned} x[n] &\equiv x_a(nT) = A \cos\left(2\pi \frac{F_0 + kF_s}{F_s} \cdot n + \theta\right) = A \cos\left(2\pi n \frac{F_0}{F_s} + \theta + 2\pi kn\right) = \\ &= A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \end{aligned} \quad (1.37)$$

adică un număr infinit de semnale armonice analogice sunt reprezentate după eșantionare de același semnal discret. Cu alte cuvinte, dat fiind $x[n]$ de relația (1.37), nu se poate, în general, preciza semnalul analogic din care a fost obținut. Deoarece frecvența $F_s/2$ a unui semnal armonic analogic este cea mai înaltă frecvență ce poate fi unic reprezentată la frecvența de eșantionare F_s , transformarea oricărei frecvențe (alias) mai mari ca $F_s/2$ ($\omega = \pi$) într-o frecvență echivalentă mai mică decât $F_s/2$ se poate face în felul următor: se ia punctul de la $F_s/2$ ca pivot și se "reflectă" sau se "pliază" frecvența alias în domeniul $-F_s/2 < F \leq F_s/2$. Frecvența $F_s/2$ se numește frecvență de *reflexie (folding)*. La același rezultat se ajunge și prin scăderea unui multiplu întreg de F_s din frecvența F_k .

1.3.2. Teorema eșantionării

Pentru a se putea stabili perioada de eșantionare T sau, echivalent, frecvența de eșantionare F_s optimă pentru refacerea semnalului analogic din cel eșantionat, trebuie cunoscută frecvența cea mai înaltă din spectrul semnalului analogic. În multe cazuri acest lucru este posibil. De exemplu, frecvența componentelor unui semnal vocal este mai mică de 3000 Hz, un semnal TV conține componente importante de frecvență până la 5 MHz. Informația acestor semnale este conținută în amplitudinile, frecvențele și fazele componentelor sale. Uneori însă nu se cunosc astfel de detalii despre semnal (valoarea maxima a frecvenței), scopul prelucrării fiind chiar obținerea acestora.

Dacă se cunoaște valoarea maximă a frecvenței componentelor unei clase de semnal (vocal, TV etc.), se poate specifica frecvența de eșantionare pentru transformarea semnalului analogic în semnal discret, astfel încât să poată fi realizată fără ambiguitate și transformarea inversă.

Fie un semnal analogic reprezentat ca o sumă de sinusoide de diferite amplitudini, frecvențe și faze

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi F_i t + \theta_i) \quad (1.38)$$

unde N este numărul componentelor, A_i – amplitudinea componentelor, F_i – frecvențele componentelor, θ_i – fazele componentelor.

În cadrul unei clase de semnale (de exemplu cel vocal), frecvența maximă variază lent de la realizare la realizare (de exemplu de la vorbitor la vorbitor) și trebuie determinată valoarea maximă posibilă F_{max} .

Din paragraful precedent se știe că cea mai mare frecvență a semnalului analogic care poate fi reconstruită fără ambiguitate atunci când acesta este eșantionat cu frecvența F_s este $F_s/2$. Eșantionarea componentelor a căror frecvență este mai mare de $F_s/2$ sau mai mică decât $-F_s/2$ are ca rezultat obținerea de eșantioane identice cu cele corespunzătoare frecvențelor din intervalul $-\frac{F_s}{2} \leq F \leq \frac{F_s}{2}$. Rezultă atunci

că pentru evitarea ambiguităților ce rezultă din aliere, frecvența de eșantionare trebuie aleasă, astfel încât

$$F_s \geq 2F_{max} \quad (1.39)$$

unde F_{max} este cea mai mare frecvență din spectrul semnalului analogic.

Cu această frecvență de eșantionare, orice componentă de frecvență $|F_i| \leq F_{max}$ a semnalului analogic se transformă într-un semnal discret cu frecvența

$$-\frac{1}{2} < f_i = \frac{F_i}{F_s} \leq \frac{1}{2} \quad (1.40)$$

sau, echivalent

$$-\pi < \omega_i = 2\pi f_i \leq \pi \quad (1.41)$$

În concluzie, alegerea frecvenței de eșantionare astfel încât să fie îndeplinită relația (1.39) asigură transformarea componentelor sinusoidale ale semnalului analogic în componente de frecvență ale semnalului discret, care aparțin intervalului fundamental de frecvență. În aceste condiții, semnalul analogic poate fi reconstruit din eșantioanele sale. În continuare se va enunța teorema eșantionării, demonstrația sa fiind dată în paragraful 6.1.2.

Teorema eșantionării

Dacă frecvența cea mai înaltă conținută într-un semnal analogic $x_a(t)$ este $F_{max} = B$ și semnalul este eșantionat cu o frecvență $F_s \geq 2F_{max} = 2B$, atunci semnalul $x_a(t)$ poate fi refăcut din eșantioanele sale, folosind funcția de interpolare ideală

$$g(t) = \frac{\sin \pi F_s t}{\pi F_s t} \quad (1.42)$$

caz în care semnalul analogic $x_a(t)$ este dat de relația

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right), \quad (1.43)$$

unde $x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = x_a(nT) \equiv x[n]$ sunt eșantioanele lui $x_a(t)$.

Dacă eșantionarea se realizează la frecvența minimă $F_s = 2B$, relația (1.43) devine

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin 2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)}{2\pi B\left(t - \frac{n}{2B}\right)} \quad (1.44)$$

Frecvența de eșantionare $F_N = 2B = 2F_{max}$ poartă numele de *frecvență Nyquist*. Relația (1.43) se numește *formula de interpolare ideală* pentru reconstrucția semnalului analogic $x_a(t)$ din eșantioanele sale. Se observă că în fiecare punct de eșantionare la formarea semnalului contribuie o singură funcție de interpolare. În intervalul dintre două eșantionări, la formarea semnalului contribuie toate funcțiile de interpolare, aşa cum este ilustrat în figura 1.9. Conform relațiilor (1.43) și (1.44), refacerea semnalului analogic este complicată, deoarece presupune o sumă ponderată infinită a funcției de interpolare $g(t)$ și a versiunilor sale întârziante. Datorită acestei complexități, relațiile (1.43) și (1.44) prezintă în principal interes teoretic, în practică folosindu-se metode de interpolare mai simple. Subiectul va fi reluat și tratat pe larg în capitolul 6.

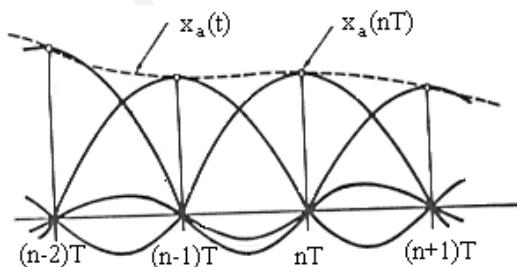


Figura 1.9. Reconstrucția semnalului analogic prin interpolare ideală

Exemplul 1.2.

Se consideră semnalul analogic

$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$. Să se determine frecvența Nyquist pentru semnal.

Frecvențele prezente în semnalul analogic $x_a(t)$ sunt:

$$F_1 = 25 \text{ Hz}, \quad F_2 = 150 \text{ Hz}, \quad F_3 = 50 \text{ Hz}.$$

$F_{max} = 150 \text{ Hz}$ și, conform relației (1.39), $F_s \geq 2F_{max} = 300 \text{ Hz}$. Frecvența Nyquist este $F_N = 2F_{max} = 300 \text{ Hz}$.

Discuție. Se observă că prin eșantionarea componentei de semnal $10\sin 300\pi t$ cu $F_N = 300 \text{ Hz}$ rezultă semnalul discret $10\sin \pi n$, care este egal cu zero. Aceasta înseamnă că semnalul sinusoidal a fost eșantionat în punctele în care valoarea sa era egală cu zero și această componentă va dispărea din semnalul discret. Această situație se poate evita în două moduri:

a) se introduce un offset de θ° în sinusoida respectivă, caz în care rezultă semnalul $10\sin(300\pi t + \theta)$ care, eșantionat la $F_N = 300 \text{ Hz}$, produce eșantioanele

$$x[n] = 10\sin(\pi n + \theta) = 10\sin \pi n \cdot \cos \theta + \cos \pi n \cdot \sin \theta = (-1)^n \cdot 10\sin \theta$$

Pentru $\theta \neq 0$ și $\theta \neq \pi$ eșantioanele semnalului vor fi diferite de zero.

b) se eșantionează semnalul la o frecvență superioară frecvenței Nyquist, metodă care este agreată și folosită frecvent în astfel de cazuri.

Exemplul 1.3.

Fie semnalul analogic

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

a) Să se determine frecvența Nyquist pentru semnal.

b) Se presupune semnalul eșantionat la $F_s = 5000 \text{ Hz}$. Ce semnal discret se obține după eșantionare?

c) Care este semnalul analogic $y_a(t)$ ce poate fi refăcut din eșantioanele de la punctul b), prin interpolare ideală?

a) Frecvențele prezente în semnalul analogic sunt: $F_1 = 1 \text{ KHz}$, $F_2 = 3 \text{ KHz}$, $F_3 = 6 \text{ KHz}$.

$$F_{max} = 6 \text{ KHz} \Rightarrow F_N = 12 \text{ KHz}$$

b) Dacă semnalul analogic se eșantionează cu $F_s = 5 \text{ KHz}$, după eșantionare se obține semnalul discret

$$\begin{aligned}
x[n] &= x_a(nT) = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5 \sin 2\pi\left(\frac{3}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(\frac{6}{5}\right)n = \\
&= 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + 5 \sin 2\pi\left(1 - \frac{2}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(1 + \frac{1}{5}\right)n = 3 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n + \\
&+ 5 \sin 2\pi\left(-\frac{2}{5}\right)n + 10 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n = 13 \cos 2\pi\left(\frac{1}{5}\right)n - 5 \sin 2\pi\left(\frac{2}{5}\right)n.
\end{aligned}$$

c) Deoarece numai componentele de 1 KHz și 2 KHz sunt prezente în semnalul eşantionat și înănd seama că $t=nT$ sau $n=t/T=tF_s$, semnalul analogic ce poate fi refăcut este: $y_a(t)=13\cos 2000\pi t - 5\sin 4000\pi t$, care, evident, diferă de cel original. Distorsionarea semnalului analogic original a fost determinată de apariția erorii alias datorată frecvenței de eşantionare scăzute folosite.

1.3.3. Cuantizarea semnalelor de amplitudine continuă

În paragraful 1.3, s-a definit *cuantizarea* ca fiind procesul de conversie a unui semnal discret, care ia valori într-un domeniu continuu, într-un semnal discret ce ia valori într-o mulțime finită de valori posibile. Eroarea introdusă prin reprezentarea valorilor continue ale unui semnal prin valori ale unei mulțimi finite se numește *eroare de cuantizare*.

Operația de cuantizare a eşantionului $x[n]$ se notează cu $Q[x[n]]$, iar valoarea eşantionului cuantizat obținut la ieșirea cuantizorului se notează cu $x_q[n]$, adică

$$x_q[n] = Q[x[n]] \quad (1.45)$$

Eroarea de cuantizare $e_q[n]$ se definește ca diferența dintre valoarea cuantizată și cea necuantizată a eşantionului

$$e_q[n] = x_q[n] - x[n] \quad (1.46)$$

Pentru ilustrarea operației de cuantizare se consideră următorul **exemplu**:

Fie semnalul definit în timp discret $x[n] = \begin{cases} 0,9^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, care a fost

obținut prin eşantionarea semnalului analogic $x_a(t) = 0,9^t$, $t > 0$ cu o frecvență $F_s = 1$ Hz. În tabelul 1 sunt prezentate valorile primelor 10 eşantioane ale lui $x[n]$ cu n zecimale. Este evident că aceste valori nu vor putea fi prelucrate de un calculator, deoarece numai un număr finit de zecimale pot fi stocate și prelucrate. Dacă se lucrează numai cu o singură

zecimală, eliminarea celorlalte se poate face fie prin trunchiere, fie prin rotunjire.

Tabelul 1

n	$x[n]$	$x_q[n]$ trunchiere	$x_q[n]$ rotunjire	$e_q[n] = x_q[n] - x[n]$ rotunjire
0	1,0	1,0	1,0	0,00
1	0,9	0,9	0,9	0,00
2	0,81	0,8	0,8	-0,01
3	0,729	0,7	0,7	-0,029
4	0,6561	0,6	0,7	0,0439
5	0,59049	0,5	0,6	0,00951
6	0,531441	0,5	0,5	-0,031441
7	0,4782969	0,4	0,5	0,0217031
8	0,43046721	0,4	0,4	-0,03046721
9	0,387420489	0,3	0,4	0,012579511

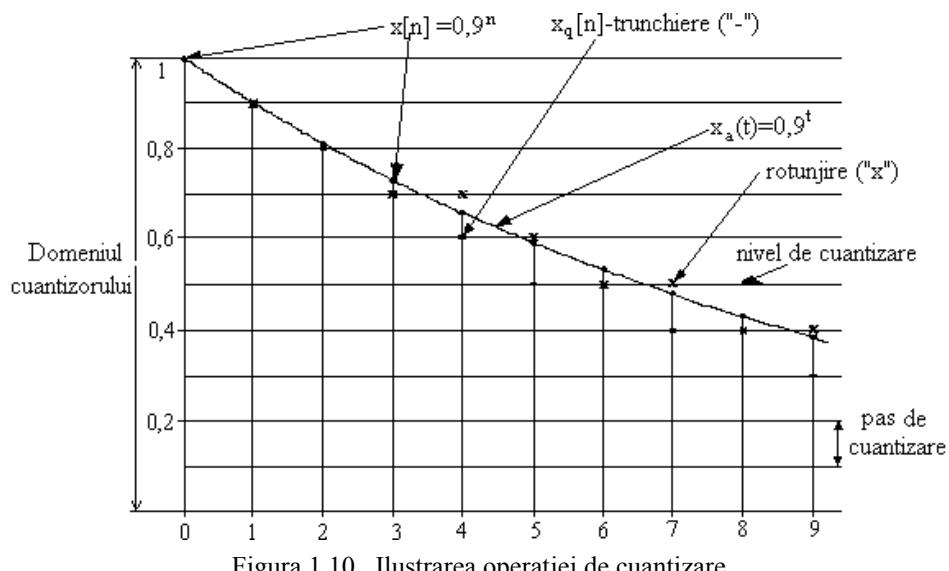


Figura 1.10. Ilustrarea operației de cuantizare

Valorile permise pe care le poate lua semnalul cuantizat se numesc *nivele de cuantizare*, iar distanța dintre două nivele de cuantizare succesive se numește *pas de cuantizare* sau *rezoluție*.

Cuantizorul cu *rotunjire* atribuie fiecărui eşantion al lui $x[n]$ valoarea celui mai apropiat nivel de cuantizare. Cuantizorul cu *trunchiere* atribuie fiecărui eşantion al lui $x[n]$ nivelul de cuantizare inferior sau egal eşantionului. Eroarea de cuantizare în cazul rotunjirii este

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q[n] \leq \frac{\Delta}{2}, \quad (1.47)$$

$$\text{iar în cazul trunchierii} \quad 0 \leq e_q[n] < \Delta, \quad (1.48)$$

unde Δ este pasul de cuantizare.

Dacă se notează cu x_{\min} și x_{\max} valoarea minimă și respectiv, maximă a lui $x[n]$ și cu L numărul nivelelor de cuantizare, atunci

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L - 1} \quad (1.49)$$

Valoarea $x_{\max} - x_{\min}$ reprezintă *domeniul dinamic al cuantizorului*.

Pentru exemplul considerat anterior, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = 0$, $L = 11$, ceea ce conduce la $\Delta = 0,1$. Evident, cu cât numărul nivelelor de cuantizare crește, cu atât pasul de cuantizare scade și, implicit, și eroarea de cuantizare.

Cuantizarea semnalelor analogice are ca rezultat o pierdere de informație, datorită atribuirii aceluiași nivel de cuantizare tuturor eşantioanelor ce se găsesc la distanță mai mică sau egală cu $\Delta/2$ de nivelul de cuantizare (în cazul rotunjirii).

1.3.4. Codarea eşantioanelor cuantizate

Prin procesul de codare, în cadrul convertorului A/N se atribuie o secvență binară unică fiecărui nivel de cuantizare.

Dacă există L nivele de cuantizare, vor fi necesare L secvențe binare distințe. Cu o lungime de b biți pe secvență, numită și cuvânt, se pot forma 2^b secvențe binare distințe. Este necesar ca $2^b \geq L$ sau, echivalent, $b \geq \log_2 L$, adică numărul de biți necesar codorului este cel mai mic întreg mai mare sau egal cu $\log_2 L$. Obișnuit, convertoarele A/D sunt pe 16 biți sau mai puțin. Evident, cu creșterea numărului de biți convertorul este mai scump, dar mai precis.

Calculatoarele lucrează cu numere reprezentate prin secvențe de 0 și 1. Lungimea acestor secvențe (lungimea cuvintelor) este fixă și de obicei este 8, 12, 16 sau 32. În procesare, lungimea finită a cuvintelor determină complicații în analiza sistemelor de prelucrare numerică a

semnalelor. Pentru evitarea acestora, în general, se negligează faptul că semnalele numerice provin în urma cuantizării și, unde este posibil sunt tratate ca semnale eșantionate [24].

1.3.5. Conversia numeric-analogică

Pentru a converti mărimea numerică obținută în urma prelucrării numerice în una analogică, se folosește un convertor numeric-analogic, a cărui sarcină este de a realiza o interpolare între eșantioane.

Teorema eșantionării specifică forma optimă a funcției de interpolare pentru un semnal de bandă limitată, dar, aşa cum s-a arătat anterior, aceasta este prea complicată pentru a fi implementată practic.

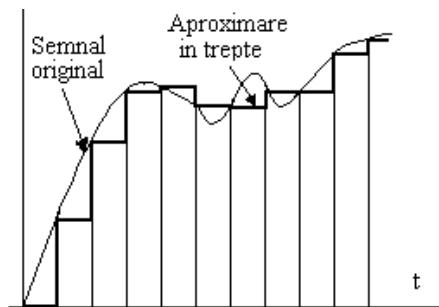


Figura 1.11. Conversia N/A (cu memorie) de ordinul zero

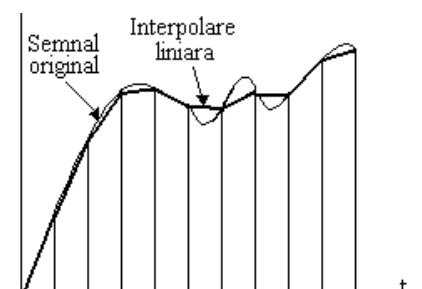


Figura 1.12. Conversia N/A prin interpolare liniară

Cel mai simplu convertor D/A este cel de ordinul zero [24], ca re păstrează valoarea constantă a eșantionului până la apariția următorului eșantion. Această situație este ilustrată în figura 1.11.

O îmbunătățire a semnalului analogic refăcut în urma conversiei N/A se poate obține cu un convertor cu interpolare liniară [24], care furnizează un semnal obținut prin conectarea eșantioanelor succesive prin linii, aşa cum este arătat în figura 1.12. Problema refacerii semnalului din eșantioanele sale va fi reluată în capitolul 6.

1.4. Probleme propuse

- 1.1. Să se stabilească dacă următoarele semnale a) prețul de închidere la diferite produse la bursă; b) un film color; c) poziția volanului unei mașini în mișcare, dacă sistemul de referință este legat de mașină; d)

poziția volanului unei mașini în mișcare, dacă sistemul de referință este pământul; e) greutatea și înălțimea unui copil măsurate în fiecare lună; sunt 1) uni sau multidimensionale; 2) mono sau multicanal; 3) continue sau discrete în timp; 4) continue sau discrete în amplitudine. Să se argumenteze pe scurt răspunsul.

1.2. Să se determine care din următoarele semnale sunt periodice și pentru cele care sunt să se determine perioada fundamentală.

a) $x[n] = \cos 0.01\pi n$;

b) $x[n] = \cos\left(\pi \frac{30n}{105}\right)$;

c) $x[n] = \cos 3\pi n$;

d) $x[n] = \sin 3n$;

e) $x[n] = \sin\left(\pi \frac{62n}{10}\right)$;

f) $x_a(t) = 3 \cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$;

g) $x[n] = 3 \cos\left(5n + \frac{\pi}{6}\right)$;

h) $x[n] = 2 \exp\left[j\left(\frac{n}{6} - \pi\right)\right]$;

i) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{18}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$;

j) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.

1.3. a) Să se arate că perioada fundamentală N_p a semnalului

$$s_k[n] = e^{j2\pi kn/N}; k = 0, 1, 2, \dots$$

este $N_p = N/\text{c.m.m.d.c}(k, N)$, unde c.m.m.d.c. este cel mai mare divizor comun al lui k și N .

b) Care este N_p pentru $N=7$?

c) Care este N_p pentru $N=16$?

1.4. Se consideră următorul semnal analogic sinusoidal

$$x_a(t) = 3 \sin(100\pi t)$$

- a) Să se reprezinte $x_a(t)$ pentru $0 \leq t \leq 30$ ms;
- b) Semnalul $x_a(t)$ este eșantionat cu $F_s = 300$ eșantioane/sec. Să se determine frecvența semnalului discret $x[n] = x_a(nT)$, $T = \frac{1}{F_s}$ și să se arate că acesta este periodic.
- c) Să se calculeze valorile lui $x[n]$ dintr-o perioadă și să se reprezinte $x[n]$ pe același grafic cu $x_a(t)$. Care este perioada semnalului discret?
- d) Se poate găsi o frecvență de eșantionare astfel încât semnalul $x[n]$ să atingă valoarea maximă de 3? Care este frecvența minimă pentru acest lucru?

1.5. Un semnal analogic $x_a(t) = \sin(480\pi t) + 3 \sin(720\pi t)$ este eșantionat cu o frecvență $F_s = 600$ eșantioane/sec.

- a) Să se determine frecvența Nyquist pentru $x_a(t)$;
- b) Să se determine frecvența de folding;
- c) Care sunt frecvențele conținute de semnalul discret $x[n]$;
- d) Dacă $x[n]$ este trecut prin un convertor D/A ideal, ce semnal $y_a(t)$ se reface?

1.6. Pe un canal de comunicații se transmit cuvinte binare care reprezintă eșantioane ale semnalului de intrare

$$x_a(t) = 3 \cos 600\pi t + 2 \cos 1800\pi t.$$

Pe canal se pot transmite 10000 biți/secundă și fiecare eșantion de intrare îi poate fi atribuit unul din 1024 nivele diferite de tensiune.

- a) Care este frecvența de eșantionare și frecvența de folding?
- b) Care este frecvența Nyquist pentru semnalul $x_a(t)$?
- c) Care sunt frecvențele semnalului discret?
- d) Care este rezoluția Δ a convertorului?

1.7. Semnalul discret $x[n] = 6.35 \cos \frac{\pi}{10} n$ este cuantizat cu o rezoluție

- a) $\Delta = 0.1$ sau
 b) $\Delta = 0.02$. Câți biți sunt necesari convertorului A/D în fiecare caz?

CAPITOLUL 2

SEMNALE ȘI SISTEME DISCRETE

2.1. Semnale discrete

După cum a fost precizat în capitolul 1, un semnal discret, $x[n]$, este o funcție a cărei variabilă independentă este un întreg și poate lua orice valoare reală sau complexă.

Este de remarcat că un semnal discret nu este definit la momente dintre două eșantioane succesive și este greșit a considera că semnalul $x[n]$ este egal cu zero pentru valori neîntregi ale variabilei independente.

Obișnuit, $x[k]$ definește al k -lea eșantion al semnalului $x[n]$, indiferent dacă acesta provine din eșantionarea unui semnal analogic sau nu.

Un exemplu de semnal discret este reprezentat în figura 2.1.

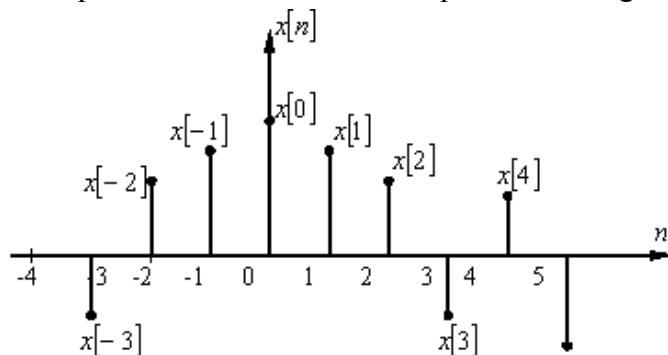


Figura 2.1. Reprezentarea grafică a unui semnal discret

Pe lângă reprezentarea grafică a unui semnal discret, mai există câteva moduri de descriere a acestora, care uneori sunt mai convenabile:

1. Reprezentarea funcțională, de exemplu

$$x[n] = \begin{cases} n, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 4, & n = 6 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.1)$$

2. Reprezentarea tabelară, de exemplu

n	- - - - -	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	- - - - -
$x[n]$	- - - - -	0	0	0	1	4	$\sqrt{2}$	0	0	0	- - - - -

3. Reprezentarea prin secvențe de numere

O secvență infinită, cu originea timpului marcată prin (\uparrow) este reprezentată sub forma

$$x[n] = \{ \dots, 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \} \quad (2.2)$$

\uparrow

O secvență $x[n]$ ale cărei valori sunt nule pentru $n < 0$, se reprezintă sub forma

$$x[n] = \{ 0, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \} \quad (2.3)$$

\uparrow

În acest caz, originea timpului este primul element din stânga al secvenței și marcarea sa este optională.

O secvență discretă de durată finită se reprezintă ca

$$x[n] = \{ 3, -1, -2, 5, 0, 4, 1 \} \quad (2.4)$$

\uparrow

unde (\uparrow) reprezintă originea timpului, adică $x[0]$.

2.1.1. Câteva semnale discrete elementare

În prelucrarea numerică a semnalelor intervin adesea câteva semnale de bază, care vor fi definite după cum urmează:

1. *Semnalul impuls unitate*, care este descris de

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.5)$$

și este reprezentat în figura 2.2.

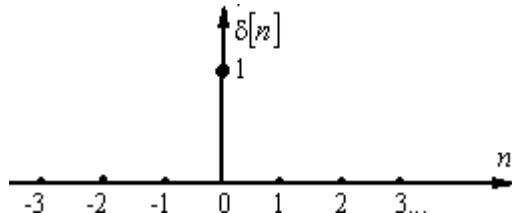


Figura 2.2. Reprezentarea grafică a impulsului unitate

Impulsul unitate joacă același rol ca distribuția Dirac din cazul semnalelor definite în timp continuu, dar, spre deosebire de aceasta, $\delta[n]$ este o funcție obișnuită, nu o distribuție. O secvență arbitrară, cum este cea din figura 2.1, poate fi reprezentată ca o sumă de impulsuri ponderate și întârziate

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k], k \in Z \quad (2.6)$$

2. Semnalul treapta unitate, notat $u[n]$, este definit de

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \in N \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (2.7)$$

și este reprezentat în figura 2.3.

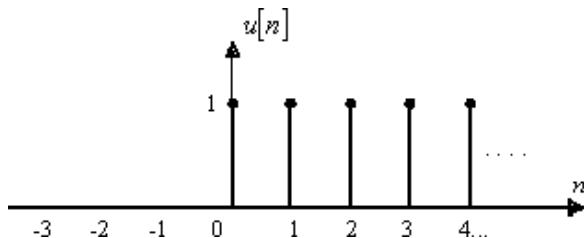


Figura 2.3. Reprezentarea grafică a treptei unitate

Legătura între treapta unitate și impulsul unitate este dată de relația

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], k \in Z \quad (2.8)$$

care arată că valoarea treptei unitate la momentul n rezultă prin acumularea valorilor precedente ale impulsului unitate.

O altă reprezentare a treptei unitate este dată de suma de impulsuri unitate întârziate

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], n, k \in Z \quad (2.8')$$

Impulsul unitate poate fi reprezentat ca

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (2.9)$$

3. *Semnalul rampă unitate*, notat uzuial cu $u_r[n]$ și definit de

$$u_r[n] = \begin{cases} n, & n \in N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.10)$$

este reprezentat în figura 2.4.

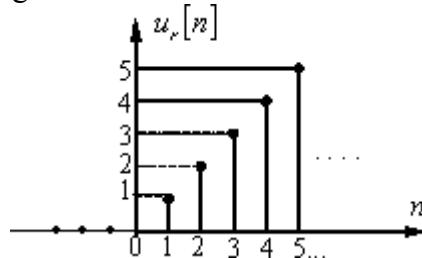


Figura 2.4. Reprezentarea grafică a semnalului rampă unitate

4. *Semnalul exponentiaș*, definit de

$$x[n] = a^n, \text{ pentru } n \in Z \quad (2.11)$$

Pentru $a \in \Re$, $x[n]$ este real și este reprezentat în figura 2.5 pentru diferite valori ale lui a .

Dacă parametrul a este complex, atunci se poate scrie

$$a = r \cdot e^{j\omega_0} \quad (2.12)$$

unde r și ω_0 reprezintă modulul, respectiv faza mărimii complexe a . În acest caz

$$x[n] = r^n e^{j\omega_0 n} = r^n (\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) \quad (2.13)$$

Deoarece $x[n]$ este complex, se poate reprezenta grafic partea sa reală

$$x_R[n] = r^n \cos \omega_0 n \quad (2.14)$$

ca funcție de n și, de asemenea, partea sa imaginäră

$$x_I[n] = r^n \sin \omega_0 n \quad (2.15)$$

tot ca funcție de n .

Pentru un semnal complex discret $x[n]$ se mai poate reprezenta uneori numai modulul

$$|x[n]| = r^n, \quad (2.16)$$

de asemenea, ca funcție de n .

Semnalul exponentiaș poate fi scris ca o sumă de funcții sinus și cosinus ponderate exponentiaș, iar o secvență sinusoidală ca o sumă de exponențiale.

Se observă că partea reală și imaginară a lui $e^{j\omega_0 n}$ variază sinusoidal cu n . Faptul că n este întotdeauna întreg conduce la diferențe importante între proprietățile secvențelor exponențiale complexe și sinusoidale discrete și continue. Pentru a păstra analogia cu cazul analogic, ω_0 reprezintă pulsația sinusoidei complexe și se măsoară în radiani/eșantion, iar n – numărul de eșantioane.

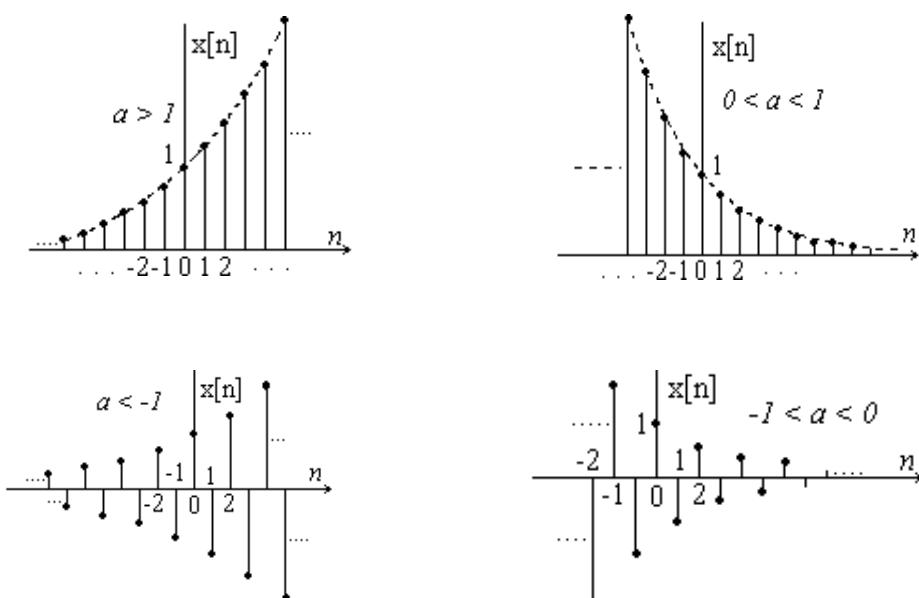


Figura 2.5. Reprezentarea grafică a semnalului exponențial pentru diverse valori ale lui α

Exponențialele complexe sau sinusoidele discrete sunt periodice de perioadă 2π , deci va fi necesară numai considerarea pulsațiilor din domeniul fundamental $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ sau $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

2.2. Clasificarea semnalelor discrete

2.2.1. Semnale de energie finită și semnale de putere finită

Energia unui semnal se definește cu relația

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \quad (2.17)$$

Această mărime poate fi calculată atât pentru semnale reale, cât și pentru semnale complexe. Dacă mărimea E , definită de (2.17) este finită, semnalul se numește de *energie finită*.

Puterea medie a unui semnal discret $x[n]$ se definește cu relația

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (2.18)$$

Dacă se definește energia unui semnal pe un interval finit $-N \leq n \leq N$, ca fiind

$$E_N = \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (2.19)$$

atunci, energia sa se poate exprima ca

$$E \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} E_N \quad (2.20)$$

și puterea sa medie

$$P \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} E_N \quad (2.21)$$

Evident, dacă E este finit, $P = 0$. Pe de altă parte, dacă energia unui semnal este infinită, puterea poate fi finită sau infinită. Dacă puterea este finită (și diferită de zero) semnalul se numește de *putere finită*.

Exemplul 2.1.

Să se determine puterea semnalului treapta unitate. Pentru treapta unitate, puterea este

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N u^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2},$$

deci treapta unitate este un semnal de putere finită. Din expresia energiei se observă că pentru acest semnal energia este infinită.

Cu definițiile anterioare, rezultă că semnalul rampă unitate, definit de (2.10), nu este nici de putere, nici de energie finită.

2.2.2. Semnale periodice și neperiodice

Un semnal $x[n]$ este periodic, de perioadă N dacă și numai dacă

$$x[n \pm N] = x[n], \text{ pentru } \forall n \in \mathbb{Z} \quad N \text{ întreg} \quad (2.22)$$

Cea mai mică valoare pozitivă a lui N pentru care relația (2.22) este îndeplinită se numește *perioadă fundamentală*.

Dacă nu există nici o valoare pentru N care să satisfacă relația (2.22), semnalul se numește *neperiodic* sau *aperiodic*.

Energia unui semnal periodic este finită pe o perioadă, $0 \leq n \leq N-1$, dacă $x[n]$ ia valori finite în acest interval. Energia semnalelor periodice, pentru $-\infty < n < \infty$, este infinită. Puterea medie a semnalelor periodice este finită și este egală cu puterea medie pe o perioadă, dacă valorile semnalului în acest interval sunt finite.

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (2.23)$$

Evident, semnalele periodice ce pot lua numai valori finite sunt de putere finită.

2.2.3. Semnale pare (simetrice) și impare (antisimetrice)

Un semnal real $x[n]$ este par, dacă

$$x[-n] = x[n] \quad (2.24)$$

și impar, dacă

$$x[-n] = -x[n] \quad (2.25)$$

Se observă că pentru semnale impare $x[0]=0$.

În figura 2.6 sunt prezentate două semnale, unul par (a) și unul impar (b).

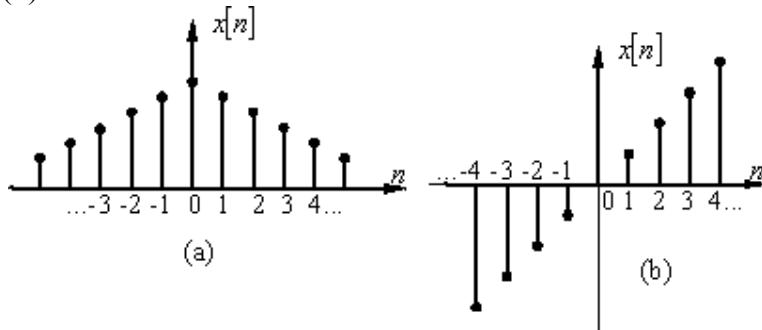


Figura 2.6. Exemple de semnal par (a) și impar (b)

Orice semnal discret $x[n]$ poate fi exprimat ca suma a două componente, una pară și una impară. Într-adevăr, dacă se definește

$$x_e[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]] \quad (2.26)$$

unde $x_e[n]$ satisfacă condiția de simetrie (2.24) și

$$x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]] \quad (2.27)$$

unde $x_o[n]$ satisface relația (2.25), rezultă

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \quad (2.28)$$

2.3. Operații simple cu semnale discrete

În acest paragraf vor fi considerate câteva operații simple efectuate asupra variabilei independente și a amplitudinii semnalului discret.

Transformări ale variabilei independente

Deplasarea în timp a semnalului. Un semnal $x[n]$ poate fi deplasat în timp prin înlocuirea variabilei independente n cu $n - k$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Pentru $k > 0$, deplasarea în timp are ca rezultat o întârziere a semnalului cu k unități de timp. Dacă $k < 0$, deplasarea în timp determină un avans al semnalului cu $|k|$ unități de timp.

Exemplul 2.2.

Fie semnalul $x[n]$ reprezentat în figura 2.7.a. Să se reprezinte semnalele $x[n - 3]$ și $x[n + 2]$. Semnalele $x[n - 3]$ și respectiv $x[n + 2]$ sunt reprezentate în figurile 2.7.b și 2.7.c.

Dacă semnalul $x[n]$ este stocat pe un mediu oarecare este relativ simplu de a modifica originea timpului prin introducerea unei întârzieri sau a unui avans. Dacă, însă, semnalul este generat de un fenomen fizic ce se desfășoară în timp real, nu este posibilă realizarea unui avans, deoarece acest lucru implică eșantioane ce nu au fost încă generate.

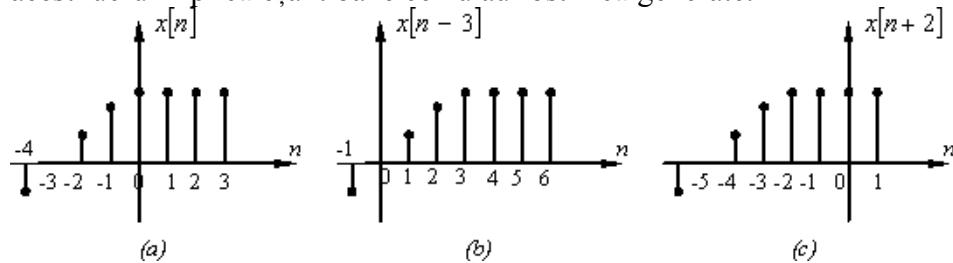


Figura 2.7. Reprezentarea grafică a semnalului $x[n]$ – (a), a versiunii sale întârziate cu 3 unități – (b) și în avans cu 2 unități – (c)

Reflectarea semnalului. O altă modificare a variabilei independente, necesară în aplicații, este aceea de a înlocui variabila n cu $-n$, operație numită *reflectare* (folding) a semnalului în raport cu axa ordonatelor. Această operație este ilustrată în figura 2.8.

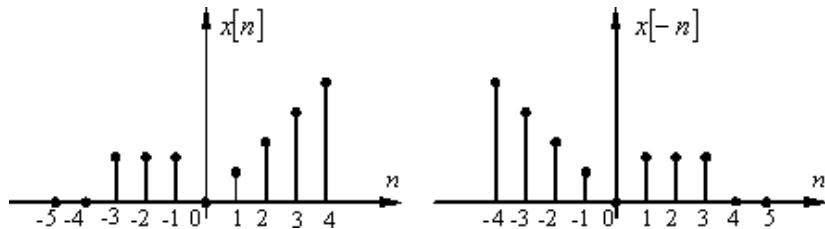


Figura 2.8. Ilustrarea grafică a operației de reflectare

Multe din operațiile realizate în PNS implică reflectarea și deplasarea în timp. Operațiile de reflectare și deplasare în timp nu sunt comutative.

Dacă se notează operația de deplasare în timp cu TD și cea de reflectare cu TF, se poate scrie

$$TD_k[x[n]] = x[n-k], k > 0$$

$$TF[x[n]] = x[-n]$$

$$TD_k\{TF[x[n]]\} = TD_k[x[-n]] = x[-n+k]$$

în timp ce

$$TF\{TD_k[x[n]]\} = TF[x[n-k]] = x[-n-k]$$

Exemplul 2.3.

Fie semnalul $x[n]$ reprezentat în figura 2.9. Să se reprezinte semnalul obținut prin reflectarea și deplasarea spre dreapta cu 2 unități a semnalului $x[n]$, precum și cel obținut prin deplasarea spre dreapta cu 2 unități și apoi reflectarea semnalului $x[n]$.

Soluție. În figura 2.9 s-au reprezentat semnalele $x_1[n] = x[-n]$, adică $x[n]$ reflectat, $x_2[n] = x[-n+2]$, adică $x[n]$ reflectat și deplasat 2 unități spre dreapta, $x_3[n] = x[n-2]$, adică $x[n]$ deplasat cu 2 unități spre dreapta și $x_4[n] = x[-n-2]$, adică $x[n]$ deplasat 2 unități spre dreapta și apoi reflectat.

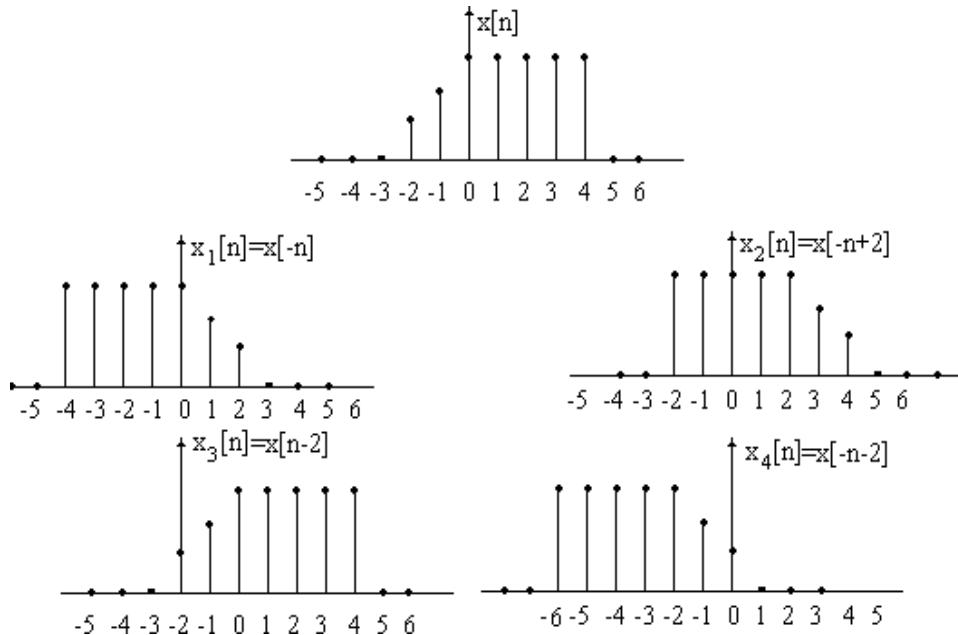


Figura 2.9. Ilustrarea necomutativității operațiilor de deplasare în timp și reflectare

Decimarea semnalului. Operația de decimare a semnalului constă în înlocuirea variabilei independente n cu Mn , unde $M \in N$, adică

$$x_{M\downarrow}[n] = x[Mn] \quad (2.29)$$

Această operație se mai numește de *scalare a axei timpului* sau *subeșantionare* și este ilustrată în figura 2.10a, pentru $M=2$.

Semnalul $x_{2\downarrow}[n] = x[2n]$ are o "derulare" mai rapidă decât $x[n]$.

Interpolarea semnalului. Operația de interpolare conduce la obținerea unui semnal cu "derulare mai lentă", dat de relația

$$x_{L\uparrow}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & \text{daca } L \text{ divide pe } n, L \in N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.30)$$

prin introducerea a $L-1$ valori nule între două eșantioane consecutive ale semnalului $x[n]$. Această operație este ilustrată în figura 2.10b, pentru $L=2$.

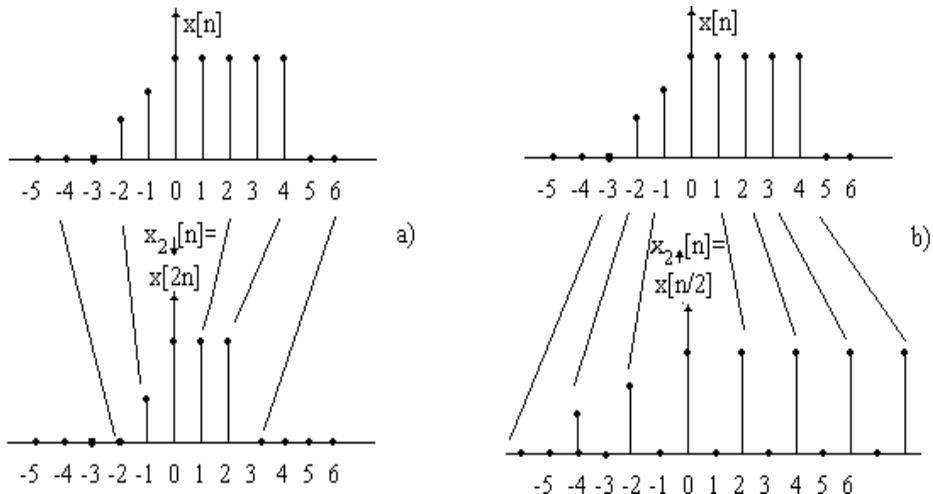


Figura 2.10. Ilustrarea operațiilor de a) decimare, b) interpolare

Sumarea, multiplicarea și scalarea secvențelor

Suma a două semnale $x_1[n]$ și $x_2[n]$ este un semnal $y[n]$ ale cărui valori la un anumit moment sunt egale cu suma valorilor semnalelor implicate în sumă la acel moment

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad n \in Z \quad (2.31)$$

Produsul a două secvențe se obține efectuând produsul eșantion cu eșantion al secvențelor

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n], \quad n \in Z \quad (2.32)$$

Scalarea amplitudinii unui semnal cu o constantă A se realizează prin multiplicarea valorii fiecărui eșantion al semnalului cu constanta A

$$y[n] = A \cdot x[n], \quad n \in Z \quad (2.33)$$

2.4. Sisteme discrete

Un *sistem discret* este un dispozitiv sau un algoritm care operează asupra unui semnal discret, numit *intrare* sau *excitație*, conform unor reguli bine definite, pentru a produce un alt semnal discret, numit *ieșirea* sau *răspunsul sistemului*.

Semnalul de intrare $x[n]$ este transformat de sistemul discret în semnalul de ieșire $y[n]$, conform relației

$$y[n] = H[x[n]] \quad (2.34)$$

unde H reprezintă transformarea (numită uneori și operator) sau procesarea realizată de sistem asupra lui $x[n]$ pentru a produce $y[n]$. Grafic, relația (2.34) este reprezentată în figura 2.11.

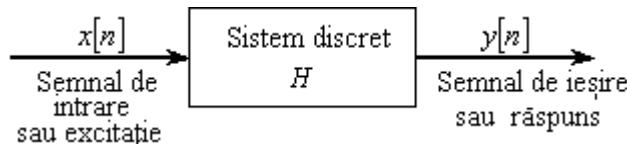


Figura 2.11. Reprezentarea unui sistem în timp discret

În continuare se va face referire numai la sisteme cu o singură intrare și o singură ieșire. Există mai multe moduri de a caracteriza un sistem discret și a descrie operația pe care el o execută asupra intrării pentru a obține răspunsul sistemului. Unul dintre acestea constă în descrierea sistemului printr-o relație intrare – ieșire, ignorându-se detaliile de structură internă sau de realizare a sistemului, acesta fiind văzut ca o "cutie neagră". Această situație este descrisă de notația

$$x[n] \xrightarrow{H} y[n] \quad (2.34')$$

echivalentă cu (2.34).

Exemplul 2.4.

Relația intrare – ieșire este exemplificată prin următoarele sisteme, în care semnalul de intrare se consideră a fi

$$x[n] = \begin{cases} |n|, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

- a) $y[n] = x[n]$
- b) $y[n] = x[n-1]$
- c) $y[n] = x[n+1]$
- d) $y[n] = \frac{1}{3}[x[n+1] + x[n] + x[n-1]]$
- e) $y[n] = \max\{x[n+1], x[n], x[n-1]\}$
- f) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \dots$ (2.35)

Semnalul de intrare poate fi scris explicit sub forma secvenței

$$x[n] = \{ \dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, \dots \}$$

↑

Ieșirea sistemelor este

a) $y[n] = \{ \dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, \dots \}$



Se observă că ieșirea este identică cu intrarea și sistemul se numește *identitate*.

b) $y[n] = \{ \dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, \dots \}$



În acest caz sistemul întârzie cu un eșantion semnalul de intrare.

c) $y[n] = \{ \dots, 0, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 0, \dots \}$



Acum sistemul "avansează" sau anticipează semnalul de intrare cu un eșantion.

d) $y[n] = \{ \dots, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, 1, \frac{2}{3}, 1, 2, \frac{5}{3}, 1, 0, \dots \}$



În acest caz, sistemul realizează media aritmetică a eșantionului prezent, trecut și următor pentru fiecare moment de timp.

e) $y[n] = \{ \dots, 0, 3, 3, 3, 2, 1, 2, 3, 3, 3, 0, \dots \}$



Acum sistemul selectează la fiecare moment n valoarea maximă dintre $x[n-1]$, $x[n]$ și $x[n+1]$.

f) $y[n] = \{ \dots, 0, 3, 5, 6, 6, 7, 9, 12, 0, \dots \}$



Acum sistemul este un *acumulator*, calculând suma tuturor eșantioanelor trecute până la momentul respectiv.

Pentru unele din sistemele considerate în exemplele precedente se observă că ieșirea la un moment $n = n_0$ nu depinde numai de intrarea de la $n = n_0$ (adică $x[n_0]$), ci și de valorile intrării la momente dinainte și după n_0 .

În exemplul acumulatorului relația intrare – ieșire care îl definește poate fi rescrisă echivalent sub forma

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n] = y[n-1] + x[n] \quad (2.35')$$

care justifică numele de acumulator, sistemul calculând valoarea curentă a ieșirii prin adunarea (acumularea) valorii curente a intrării la valoarea precedentă a ieșirii.

Pentru acest exemplu se presupune că semnalul de intrare este cunoscut pentru $n \leq n_0$ și se dorește să se determine ieșirea $y[n]$ pentru $n \geq n_0$.

Pentru $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, relația (2.35) devine

$$\begin{aligned} y[n_0] &= y[n_0 - 1] + x[n_0], \\ y[n_0 + 1] &= y[n_0] + x[n_0 + 1] \end{aligned}$$

s. a. m. d.

Se observă că în calculul lui $y[n_0]$ intervine $y[n_0 - 1]$, care se poate calcula cu relația

$$y[n_0 - 1] = \sum_{k=-\infty}^{n_0 - 1} x[k],$$

adică $y[n_0 - 1]$ reprezintă efectul tuturor intrărilor anterioare momentului n_0 asupra sistemului. Răspunsul sistemului pentru $n \geq n_0$ la semnalul de intrare $x[n]$ aplicat la momentul n_0 depinde de semnalul de intrare la momentul n_0 și toate intrările aplicate anterior. În consecință, $y[n]$ pentru $n \geq n_0$ nu este unic determinat de intrarea $x[n]$ pentru $n \geq n_0$.

Informația suplimentară necesară determinării lui $y[n]$ pentru $n \geq n_0$ este *condiția inițială* $y[n_0 - 1]$, care sintetizează efectul intrărilor anterioare asupra sistemului. Condiția inițială $y[n_0 - 1]$ împreună cu secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$ vor determina în mod unic secvența de ieșire $y[n]$ pentru $n \geq n_0$.

Dacă accumulatorul nu a avut nici o excitație înainte de n_0 , condiția inițială $y[n_0 - 1] = 0$, caz în care sistemul se zice că este *inițial relaxat*. În acest caz, ieșirea $y[n]$ depinde numai de secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$.

De obicei, sistemele se consideră relaxate la $n = -\infty$. Dacă intrarea se aplică unui sistem de la $n = -\infty$, ieșirea sistemului este unic determinată de secvența de intrare.

Se observă, în cazul acumulatorului, ca pentru a determina în mod unic secvența de ieșire $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, este necesară o singură condiție inițială. În general, pentru sisteme discrete, informația suplimentară constituită de setul de valori $y[n_0-1], y[n_0-2], \dots, y[n_0-N]$ necesare determinării ieșirii $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, la secvența de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, poartă numele de *condiții inițiale*. Dacă acestea sunt nule, sistemul este *inițial relaxat*. Aceste noțiuni vor fi reluate în paragraful 2.5, unde se va introduce descrierea sistemelor discrete cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe.

Exemplul 2.5.

Se consideră acumulatorul descris de (2.35) excitat de secvența $x[n] = n \cdot u[n]$. Să se determine secvența de ieșire în condițiile:

- a) sistemul este inițial relaxat ($y[-1] = 0$);
- b) $y[-1] = 1$.

Ieșirea sistemului este definită ca

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k] + \sum_{k=0}^n x[k] = y[-1] + \sum_{k=0}^n x[k]$$

$$\text{Dar } \sum_{k=0}^n x[k] = \frac{n(n+1)}{2}$$

- a) Dacă $y[-1] = 0 \rightarrow y[n] = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0;$
- b) Dacă $y[-1] = 1 \rightarrow y[n] = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}, \quad n \geq 0.$

2.4.1. Reprezentarea simbolică a sistemelor discrete

Operațiile asupra semnalelor discrete reprezentate prin secvențe sunt realizate de sisteme discrete a căror reprezentare simbolică este dată în continuare.

Sumator.

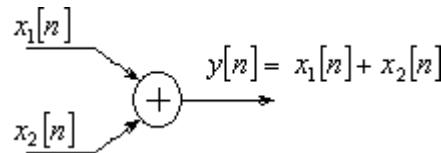


Figura 2.12. Reprezentarea simbolică a sumatorului

Multiplicator cu o constantă



Figura 2.13. Reprezentarea simbolică a multiplicatorului cu o constantă

Multiplicator de semnal

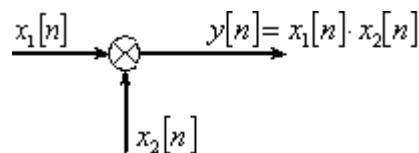


Figura 2.14. Reprezentarea simbolică a multiplicatorului

Element de întârziere

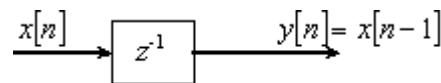


Figura 2.15. Reprezentarea simbolică a unui element de întârziere

Element de anticipare

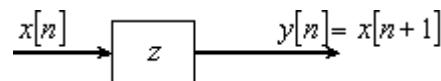


Figura 2.16. Reprezentarea grafică a unui element de anticipare

Observație. Operația de anticipare este nerealizabilă fizic într-un sistem de timp real.

Exemplul 2.6.

Cu ajutorul blocurilor constructive prezentate anterior să se reprezinte diagrama bloc a sistemului discret descris de

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 5x[n] + 2x[n-2].$$

Soluție. Din relația intrare – ieșire care caracterizează sistemul se observă că acesta poate fi implementat cu ajutorul a 3 multiplicatoare, 2 sumatoare și 3 elemente de întârziere.

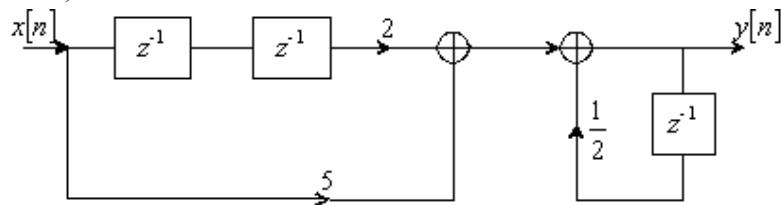


Figura 2.17. Reprezentarea diagramei bloc pentru sistemul din exemplul 2.6.

2.4.2. Clasificarea sistemelor discrete

În analiza și proiectarea sistemelor discrete este de dorit clasificarea lor în funcție de proprietățile generale pe care acestea le au. Din acest motiv este necesară specificarea unor proprietăți ale acestora care pot fi folosite în descrierea caracteristicilor lor generale.

2.4.2.1. Sisteme discrete statice și dinamice

Un sistem discret se numește *static* sau *fără memorie* dacă ieșirea sa la un moment oarecare n depinde numai de intrarea din acel moment.

În caz contrar, sistemul se numește *dinamic* sau *cu memorie*. Dacă ieșirea unui sistem la un moment n este complet determinată de intrările $x[n-N], \dots, x[n]$ ($N \geq 0$), se spune că acesta are memorie de ordinul N . Dacă N este finit, sistemul este *cu memorie finită*, iar dacă $N = \infty$, sistemul are *memorie infinită*.

Exemple de sisteme statice (fără memorie)

- a) $y[n] = a x[n];$
- b) $y[n] = n x[n] + b x^3[n].$

Exemple de sisteme dinamice (cu memorie)

c) $y[n] = x[n] + 3x[n-1];$

d) $y[n] = \sum_{k=0}^N x[n-k];$

$$e) \quad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k].$$

Sistemele c) și d) au memorie finită, în timp ce e) are memorie infinită.

Se observă că sistemele statice sunt descrise în general de o relație intrare – ieșire de forma

$$y[n] = F[x[n], n] \quad (2.36)$$

și nu includ elemente de întârziere (memorie).

2.4.2.2. Sisteme discrete invariante și variante în timp

Sistemele pot fi împărțite în două mari categorii:

- sisteme invariante în timp;
- sisteme variante în timp.

Prin definiție, un sistem relaxat, descris de operatorul H este *invariant în timp* dacă și numai dacă

$$x[n] \xrightarrow{H} y[n]$$

implică

$$x[n-k] \xrightarrow{H} y[n-k] \quad (2.37)$$

pentru orice semnal de intrare $x[n]$ și orice deplasare k .

Pentru a determina dacă un sistem este sau nu invariant în timp se procedează în felul următor:

Se consideră o intrare arbitrară $x[n]$, care va produce răspunsul $y[n]$. Se întârzie semnalul de intrare cu k unități și se recalculează ieșirea. În general, aceasta se poate scrie

$$y[n, k] = H[x[n-k]] \quad (2.38)$$

Dacă ieșirea $y[n, k]$ este egală cu $y[n-k]$ pentru toate valorile lui k , sistemul este invariant în timp. În caz contrar, dacă $y[n, k] \neq y[n-k]$, chiar pentru o singură valoare a lui k , sistemul este variant în timp.

Exemplul 2.7.

Să se determine dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu variante în timp.

a) $y[n] = H[x[n]] = x[n] - x[n-1];$

b) $y[n] = H[x[n]] = n \cdot x[n];$

c) $y[n] = x[n] \cos \omega_0 n.$

a) $y[n, k] = H[x[n-k]] = x[n-k] - x[n-k-1]$

$$y[n-k] = x[n-k] - x[n-k-1]$$

Deoarece $y[n, k] = y[n-k]$, rezultă că sistemul este invariant în timp.

b) $y[n, k] = H[x[n-k]] = n \cdot x[n-k]$
 $y[n-k] = (n-k) \cdot x[n-k]$

Se observă că $y[n, k] \neq y[n-k]$, rezultă că sistemul este variant în timp.

c) $y[n, k] = H[x[n-k]] = x[n-k] \cos \omega_0 n$
 $y[n-k] = x[n-k] \cos \omega_0 (n-k)$

Deoarece $y[n, k] \neq y[n-k]$, rezultă că sistemul este variant în timp.

2.4.2.3. Sisteme discrete liniare și neliniare

Prin definiție, un sistem discret este liniar, dacă satisfac principiul superpoziției. Cu alte cuvinte, în acest caz, răspunsul sistemului la o sumă ponderată de semnale de intrare este egal cu suma răspunsurilor sistemului la fiecare din semnalele de intrare, ponderate corespunzător, adică un sistem discret, relaxat, caracterizat de operatorul H este *liniar*, dacă

$$H[a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]] = a_1 H[x_1[n]] + a_2 H[x_2[n]] \quad (2.39)$$

pentru orice secvențe de intrare arbitrară $x_1[n]$ și $x_2[n]$ și pentru orice constante arbitrale a_1 și a_2 .

Relația (2.39) implică proprietățile de scalare și aditivitate ale sistemelor liniare și poate fi extinsă la orice combinație ponderată de semnale de intrare, pe baza inducției. Într-adevăr, dacă se presupune că

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k[n] \xrightarrow{H} y[n] = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k[n]$$

unde $y_k[n] = H[x_k[n]]$, $k = 1, 2, \dots, M-1$, este adevărată pentru $M-1$ semnale, atunci pentru semnalul

$$\sum_{k=1}^M a_k x_k[n] = x[n] + a_M x_M[n],$$

ieșirea sistemului este

$$\begin{aligned} H\left[\sum_{k=1}^M a_k x_k[n]\right] &= H[x[n] + a_M x_M[n]] = H[x[n]] + a_M H[x_M[n]] \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k[n] + a_M y_M[n] = \sum_{k=1}^M a_k y_k[n] \end{aligned}$$

În general, din (2.39) se observă că un sistem relaxat, liniar, cu intrarea zero produce ieșirea nulă. Dacă un sistem produce o ieșire diferită de zero la intrare zero, el este fie nerelaxat, fie neliniar.

Dacă un sistem discret nu satisfac principiul superpoziției, el se numește *neliniar*.

Exemplul 2.8.

Să se determine dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu liniare.

- a) $y[n] = H[x[n]] = n \cdot x[n]$;
- b) $y[n] = H[x[n]] = x[n^2]$;
- c) $y[n] = H[x[n]] = x^2[n]$.

Soluție.

a) Pentru două secvențe de intrare $x_1[n]$ și $x_2[n]$, ieșirile corespunzătoare sunt

$$\begin{aligned}y_1[n] &= n \cdot x_1[n] \\y_2[n] &= n \cdot x_2[n]\end{aligned}$$

O combinație liniară a celor două semnale de intrare are ca rezultat ieșirea

$$\begin{aligned}y_3[n] &= H[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = n[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] \\&= a_1n x_1[n] + a_2n x_2[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]\end{aligned}$$

care este o combinație liniară a ieșirilor corespunzătoare, deci sistemul este liniar.

b) $y_1[n] = x_1[n^2]$, $y_2[n] = x_2[n^2]$
 $y_3[n] = H[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1x_1[n^2] + a_2x_2[n^2] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$

deci sistemul este liniar.

c) $y_1[n] = x_1^2[n]$, $y_2[n] = x_2^2[n]$
 $y_3[n] = H[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1^2x_1^2[n] + 2a_1a_2x_1[n]x_2[n] + a_2^2x_2^2[n] = a_1^2y_1[n] + a_2^2y_2[n] + 2a_1a_2x_1[n]x_2[n]$

Combinația liniară corespunzătoare a ieșirilor $y_1[n]$ și $y_2[n]$ este

$$a_1y_1[n] + a_2y_2[n] = a_1x_1^2[n] + a_2x_2^2[n] \neq y_3[n],$$

deci sistemul este neliniar.

2.4.2.4. Sisteme discrete cauzale și necauzale

Un sistem discret este *cauzal* dacă ieșirea sa la un moment n , $y[n]$, depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării ($x[n], x[n-1], \dots$) și de nici o valoare viitoare ($x[n+1], x[n+2], \dots$). Matematic, ieșirea unui sistem cauzal poate fi scrisă sub forma

$$y[n] = F[x[n], x[n-1], x[n-2], \dots] \quad (2.40)$$

unde $F[\cdot]$ este o funcție arbitrară. Un sistem discret care nu satisface relația (2.40) se numește *necaузal*. Un sistem necauzal nu este realizabil fizic.

Exemplul 2.9.

Să se stabilească dacă sistemele descrise de următoarele relații intrare – ieșire sunt sau nu cauzale.

- a) $y[n] = x[n] - x[n-1]$;
- b) $y[n] = x[n+1] - x[n]$;
- c) $y[n] = x[n^2]$;
- d) $y[n] = x[-n]$.

Soluție

- a) cauzal;
- b) necauzal;
- c) necauzal;
- d) necauzal (de exemplu, pentru $n = -1$, $y[-1] = x[1]$).

Prin analogie cu sistemele cauzale, se definesc secvențele cauzale cele care sunt egale cu zero pentru $n < 0$. În caz contrar, ele se numesc necauzale. Dacă o secvență este diferită de zero numai pentru $n < 0$, aceasta se numește pur necauzală.

2.4.2.5. Sisteme discrete stabile și instabile

Stabilitatea este o proprietate importantă care trebuie avută în vedere în orice aplicație practică. Un sistem oarecare, relaxat, se spune că este stabil în sens MIME (Mărginit la Intrare Mărginit la ieșire), dacă și numai dacă orice semnal de intrare limitat produce un semnal de ieșire limitat (se mai folosește acronimul englezesc BIBO de la Bounded Input – Bounded Output, în specificarea sistemelor stabile). Matematic, aceasta se poate scrie

$$\text{dacă } |x[n]| \leq M_x < \infty; \quad \text{atunci } |y[n]| \leq M_y < \infty \quad (2.41)$$

Implicațiile pe care le are stabilitatea pentru sistemele liniare invariante în timp vor fi discutate în paragraful 2.4.7.

Se spune că un sistem cauzal și stabil este realizabil. În caz contrar este nerealizabil.

Alte clasificări ale sistemelor discrete în funcție de răspunsul la impuls și de modul de implementare vor fi prezentate în paragrafele 2.4.8 și 2.4.9, după introducerea descrierii sistemelor discrete cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe și a sumei de conoluție.

2.4.3. Analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp (SDLIT) Suma de conoluție

În continuare se vor trata sisteme discrete, liniare, invariante în timp, pentru care se va arăta că sunt complet caracterizate în domeniul timp de răspunsul la impuls.

Există două metode de bază, folosite în analiza răspunsului sistemelor discrete liniare la un semnal de intrare dat. Una se bazează pe obținerea soluției din ecuația intrare – ieșire care caracterizează sistemul, care are, în general, forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.42)$$

unde a_k și b_k sunt parametri constanți care caracterizează sistemul și independenți de $x[n]$ și $y[n]$. Relația (2.42) se numește *ecuație cu diferențe* a sistemului discret, liniar, invariant în timp.

A doua metodă se bazează pe folosirea răspunsului la impuls al sistemului. Ca o consecință a proprietăților de liniaritate și invarianță în timp, răspunsul sistemului la un semnal de intrare arbitrar poate fi exprimat în funcție de răspunsul său la impuls cu ajutorul sumei de conoluție. Pentru determinarea răspunsului unui sistem liniar la un semnal de intrare dat, acesta se descompune într-o sumă de semnale elementare componente și, folosind proprietatea de liniaritate a sistemului, răspunsurile sistemului la semnalele elementare se sumează pentru a forma răspunsul total.

Orice semnal $x[n]$ poate fi descompus într-o sumă de impulsuri scalate și întârziate, conform relației (2.6). De exemplu, secvența $x[n] = \{2, 4, 0, 3\}$ poate fi scrisă sub forma

$$\uparrow \qquad x[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 3\delta[n-2]$$

Se definește răspunsul sistemului $y[n, k]$ la un impuls aplicat la momentul $n - k$ cu relația

$$y[n, k] \equiv h[n, k] = H[\delta[n - k]] \quad (2.43)$$

În (2.43), n desemnează timpul, iar k arată localizarea în timp a impulsului de intrare.

Considerând semnalul de intrare dat de (2.6), răspunsul sistemului va fi

$$y[n] = H \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\} \quad (2.44)$$

Sistemul discret fiind liniar, conform principiului superpoziției, rezultă

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] H[\delta[n - k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n, k] \quad (2.45)$$

Dacă sistemul discret liniar este și invariant în timp, adică dacă

$$\begin{aligned} \delta[n] &\xrightarrow{H} h[n] \text{ atunci} \\ \delta[n - k] &\xrightarrow{H} h[n - k], \end{aligned} \quad (2.46)$$

relația (2.45) devine

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] \quad (2.47)$$

Relația (2.47) este cunoscută sub denumirea de *sumă de conoluție* și din aceasta rezultă că, dacă pentru un sistem discret liniar invariant în timp se cunoaște răspunsul la impuls, se poate deduce răspunsul sistemului la orice secvență de intrare. Funcția $h[n]$ se mai numește *funcție pondere*.

Pentru calculul ieșirii la un anumit moment $n = n_0$ se efectuează următoarele operații elementare:

1. *Reflectarea*. Răspunsul la impuls $h[k]$ este "reflectat" față de $k = 0$ pentru a obține $h[-k]$.
2. *Deplasarea în timp*. Se deplasează $h[-k]$ cu n_0 unități de timp spre dreapta (stânga) dacă n_0 este pozitiv (negativ) pentru a obține $h[n_0 - k]$.
3. *Multiplicarea*. Se înmulțește $x[k]$ cu $h[n_0 - k]$ pentru a produce secvențe de tipul $v_{n_0}[k] \equiv x[k] h[n_0 - k]$.
4. *Sumarea*. Se sumează toate valorile secvenței produs $v_{n_0}[k]$ pentru a se obține ieșirea la momentul $n = n_0$.

Pașii 2÷4 trebuie repetăți pentru toate valorile posibile ale lui n_0 pentru a obține $y[n]$ pentru $-\infty < n < \infty$. Operația de conoluție este simetrică, adică nu contează care din cele două secvențe este reflectată și deplasată. Într-adevăr, dacă în (2.47) se efectuează schimarea de variabilă $m=n-k$, atunci $k=n-m$,

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m] \quad (2.48)$$

Revenind la indexul k , se obține

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \quad (2.48')$$

relație care arată, de fapt, că suma de conoluție este comutativă.

Exemplul 2.10.

Să se determine răspunsul sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & \text{n rest.} \end{cases} \quad \text{la intrarea } x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{in rest.} \end{cases}$$

Soluție. Conform pașilor descriși anterior, se calculează întâi $h[-k]$.

$$h[-k] = \{ \dots, 0, -1, 1, 2, 1, 0, \dots \}$$



$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = x[0]h[0] + x[1]h[-1] = 4$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k] = x[0]h[1] + x[1]h[0] + x[2]h[-1] = 8$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[2-k] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 7$$

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[3-k] = x[1]h[2] + x[2]h[1] = 1$$

$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[4-k] = x[2]h[2] = -3$$

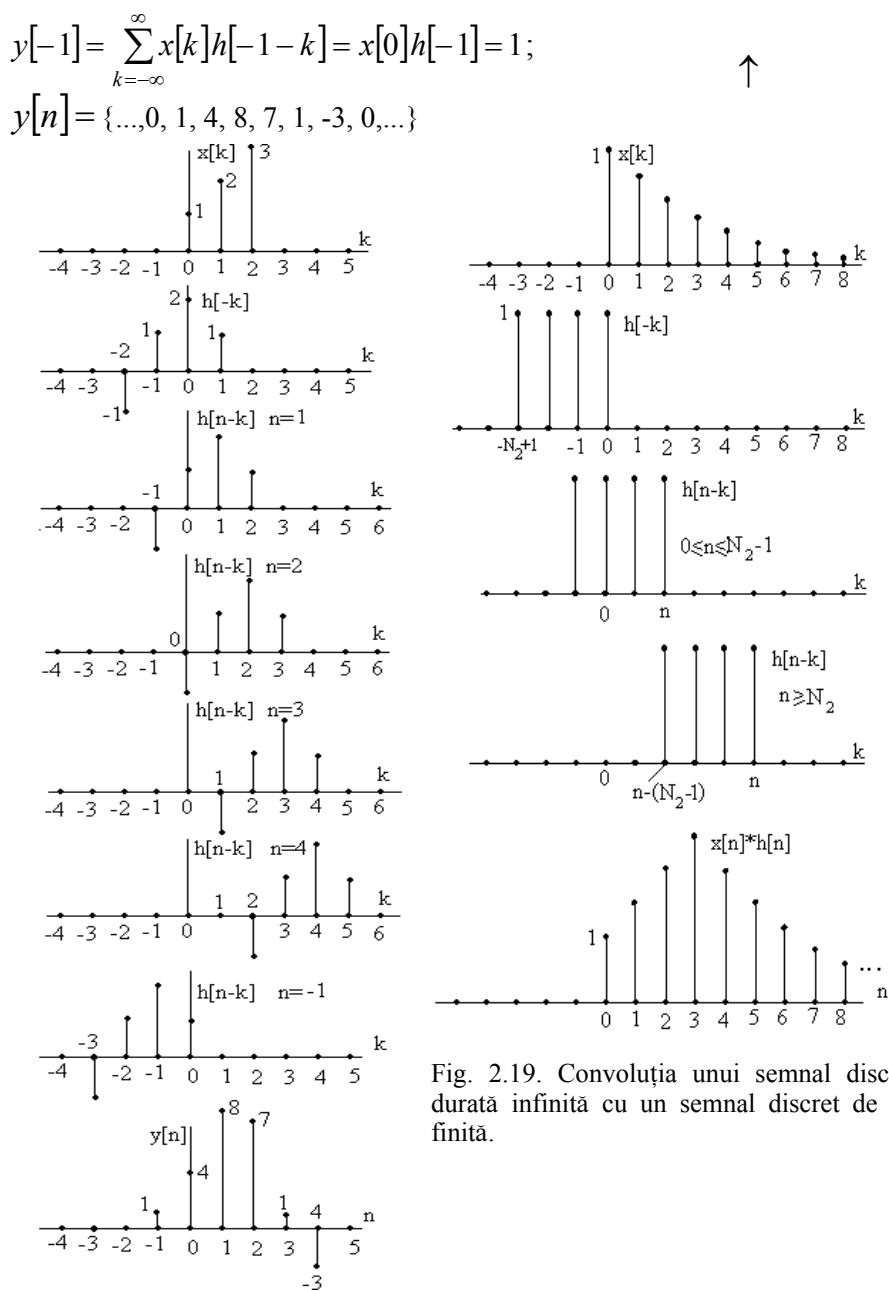


Fig. 2.18. Convoluția a două semnale de durată finită N_1 și N_2 . Convoluția are durată $N_1 + N_2 - 1$

Grafic, rezultatele anterioare pot fi urmărite pe figura 2.18. $h[-k]$ se deplasează cu n unități. Pentru $n > 0$, deplasarea este spre dreapta și pentru $n < 0$, spre stânga. Conform pașilor prezențați anterior, pentru o valoare n dată, se efectueză produsele dintre $x[k]$ și $h[n-k]$, eșantion cu eșantion, și apoi se sumează.

Dacă semnalele au durată finită, având N_1 , respectiv N_2 eșantioane, cuprinse între $-N_3$ și $-N_3+N_1-1$, respectiv $-N_4$ și $-N_4+N_2-1$, conoluția lor are durată finită, având N_1+N_2-1 eșantioane, produsul $x[k]h[n-k]$ fiind zero pentru toți k atunci când $n < -(N_4+N_3)$ și $n > -N_4+N_2-1-N_3+N_1-1$. În cazul exemplului considerat, $N_1=3$, $N_2=4$, $N_3=0$, $N_4=1$ și produsele $x[k]h[n-k]$ sunt zero pentru $n < -1$ și $n > 4$. Prin urmare, nu se pune problema convergenței sumei de conoluție, dacă ambele semnale au durată finită și, evident, fiecare din semnale este mărginită $|x[n]| \leq M_1, \forall n \in Z$, $|h[n]| \leq M_2, \forall n \in Z$.

Exemplul 2.11.

Să se determine conoluția dintre semnalul $x[n]$ de durată nemărginită $x[n] = a^n u[n]$, și $h[n] = u[n] - u[n - N_2]$, care este nenul doar pentru $0, 1, 2, N_2-1$, adică are lungimea N_2 .

Soluție. Conoluția acestor semnale este ilustrată în figura 2.19. Unul din semnale fiind de durată nemărginită, și conoluția va avea durată infinită și, prin urmare, se va pune problema convergenței sumei ce reprezintă conoluția pentru toate valorile lui n .

Din figură se observă că pentru $n < 0$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = 0$.

$$\text{Dacă } 0 \leq n < N_2, (x * h)[n] = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

$$\text{Dacă } n \geq N_2, (x * h)[n] = \sum_{k=n-N_2+1}^n a^k = a^{n-N_2+1} \frac{1-a^{N_2}}{1-a}.$$

2.4.4. Proprietățile sistemelor discrete, liniare, invariante în timp și interconectarea acestora

Deoarece răspunsul unui SDLIT este dat de o sumă de conoluție, proprietățile acestei clase de sisteme sunt definite de proprietățile sumei de conoluție discrete, care este comutativă și asociativă.

1. Comutativitatea sistemelor și conectarea lor în cascadă.

Proprietățile de comutativitate și asociativitate ale sumei de conoluție conduc la comutativitatea SDLIT. Pentru a ilustra acest lucru, se consideră sistemele din figura 2.20a și b.

$$y_1[n] = x_1[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = \\ x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] = x_2[n] * h_1[n] = y_2[n]. \quad (2.50)$$

Sistemele din figura 20 a și b sunt echivalente cu sistemul din figura 20 c. Se constată că într-o cascadă de sisteme discrete, liniare, invariante în timp nu contează locul acestora în cascadă, deoarece, indiferent de poziția acestora, pentru același semnal de intrare se obține același semnal de ieșire. Ca o consecință a proprietății de comutativitate și asociativitate, răspunsul la impulsul unei cascade de SDLIT este independent de ordinea sistemelor în cascadă.

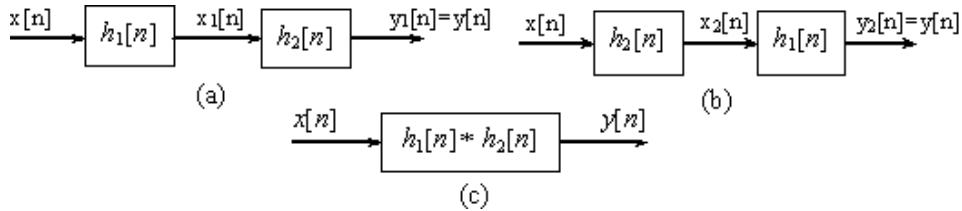


Figura 2.20. Ilustrarea proprietății de comutativitate a SDLIT

2. Impulsul unitate $\delta[n]$ este element neutru pentru suma de conoluție

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = \\ = \dots x[n-1] \delta[1] + x[n] \delta[0] + x[n+1] \delta[-1] + \dots = x[n] \quad (2.51)$$

deci, dacă la intrarea unui sistem discret liniar se aplică $x[n] = \delta[n]$ la ieșire se obține

$$y[n] = \delta[n] * h[n] = h[n] \quad (2.52)$$

3. Dacă la intrarea unui SDLIT se aplică $\delta[n - n_0]$, la ieșire se obține $h[n - n_0]$, adică

$$\delta[n - n_0] * h[n] = h[n - n_0] \quad (2.53)$$

4. Un sistem având răspunsul la impuls $h[n] = \delta[n]$ nu modifică semnalul de intrare

$$y[n] = x[n] \quad (2.54)$$

În contextul conectării în cascadă a sistemelor se introduce noțiunea de *sistem invers*, caracterizat prin răspunsul la impuls $h_i[n]$ care satisfacă relația

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n] \quad (2.55)$$

5. Conectarea în paralel a SDLIT. În figura 2.21 (a) este prezentată conectarea în paralel a două sisteme $h_1[n]$ și $h_2[n]$. Se poate arăta simplu că acesta este echivalent cu sistemul din figura 2.21 (b).

Într-adevăr, conform figurii 2.21.a, se poate scrie

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \quad (2.56)$$

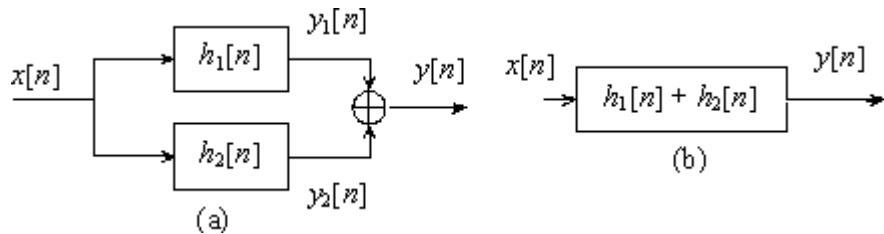


Figura 2.21. Conectarea în paralel a două SDLIT

2.4.5. Răspunsul SDLIT la treapta unitate

Deși răspunsul la impuls joacă un rol esențial în analiza și sinteza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, uneori prezintă interes utilizarea răspunsului la treapta unitate pentru a obține răspunsul sistemului la o intrare arbitrară. Răspunsul la treapta unitate $x[n] = u[n]$ se obține utilizând suma de conoluție

$$y[n] = s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (2.57)$$

Din această relație se poate obține explicit răspunsul la impuls în funcție de răspunsul la treapta unitate, după cum urmează:

$$s[n] = h[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} h[k] = h[n] + s[n-1] \quad (2.58)$$

de unde rezultă

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad (2.59)$$

Pentru a obține răspunsul $y[n]$ al sistemului la semnalul de intrare $x[n]$, se înlocuiește $h[n]$ dat de (2.59) în relația (2.47).

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] [s[n-k] - s[n-k-1]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] s[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] s[n-k-1] \quad (2.60)$$

Cunoscând răspunsul $s[n]$ al unui sistem la treapta unitate, se definește convoluția dintre acesta și un semnal oarecare de intrare ca fiind

$$y_s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] s[n-k] \quad (2.61)$$

Răspunsul $y[n]$ al sistemului la intrarea $x[n]$ se poate exprima sub forma

$$y[n] = y_s[n] - y_s[n-1] \quad (2.62)$$

2.4.6. Cauzalitatea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp exprimată în funcție de răspunsul la impuls

În cazul SDLIT cauzalitatea poate fi exprimată în funcție de răspunsul la impuls al sistemului. Pentru a determina această relație, fie un SDLIT a cărui ieșire la un moment $n=n_0$ este dată de suma de convoluție

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n_0 - k] \quad (2.63)$$

care se împarte în doi termeni, unul conținând valoarea prezentă și cele trecute ale intrării ($x[n]$ pentru $n \leq n_0$) și unul care conține valorile viitoare ale intrării ($x[n]$ pentru $n > n_0$).

$$y[n_0] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n_0 - k] + \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] x[n_0 - k] = \quad (2.64)$$

$$[h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + \dots] + [h[-1]x[n_0 + 1] + h[-2]x[n_0 + 2] + \dots]$$

Cum pentru un sistem cauzal ieșirea la momentul n_0 depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării, rezultă că răspunsul la impuls al sistemului trebuie să satisfacă condiția

$$h[n] = 0 \text{ pentru } n < 0 \quad (2.65)$$

Deoarece $h[n]$ este răspunsul la impuls al SDLIT relaxat, rezultă că relația (2.65) este condiția necesară și suficientă pentru cauzalitate. Datorită acestei condiții limitele sumei pot fi modificate pentru a reflecta această restricție, obținându-se

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \quad (2.66)$$

Anterior s-a intodus noțiunea de *secvență cauzală* pentru a denumi o secvență care este zero pentru $n < 0$ și de *secvență necauzală* pentru a denumi o secvență care este diferită de zero pentru $n < 0$. Această terminologie semnifică faptul că astfel de secvențe pot fi răspunsurile la impuls ale unui sistem cauzal, respectiv, necauzal.

Dacă la intrarea unui SDLIT cauzal se aplică o secvență cauzală, suma de conoluție devine

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k] \quad (2.67)$$

Răspunsul unui SDLIT cauzal la un semnal de intrare cauzal este, de asemenea, cauzal, deoarece $y[n] = 0$, pentru $n < 0$.

2.4.7. Stabilitatea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp exprimată în funcție de răspunsul la impuls

Condiția de stabilitate în sens MIME din paragraful 2.4.2.5 poate fi exprimată pentru SDLIT în funcție de caracteristicile sistemului. Fie un SDLIT caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$ căruia i se aplică un semnal de intrare mărginit $|x[n]| \leq M_x < \infty$. Ieșirea sa este dată de suma de conoluție (2.48').

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (2.68)$$

Din relația (2.68) se observă că semnalul de ieșire va fi mărginit dacă răspunsul la impuls al sistemului satisfacă condiția

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \leq \infty \quad (2.69)$$

În concluzie, un SDLIT este stabil în sens MIME dacă răspunsul său la impuls este absolut sumabil.

2.4.8. Sisteme discrete cu răspuns finit la impuls și răspuns infinit la impuls

Așa cum s-a arătat anterior, SDLIT pot fi caracterizate în funcție de durata răspunsului lor la impuls. Aceste sisteme se împart în două clase, și anume: cele al căror răspuns la impuls are durată finită, numite

sisteme FIR (acronimul provenind de la inițialele englezesti "finite impulse response") și cele al căror răspuns la impuls are durată infinită, numite sisteme IIR ("infinite impulse response").

Un sistem FIR are un răspuns la impuls egal cu zero în afara unui interval finit. Fără a pierde din generalitate, pentru sistemele FIR cauzale se poate scrie

$$h[n] = 0, \text{ pentru } n < 0 \text{ și } n \geq M \quad (2.70)$$

caz în care suma de conoluție devine

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] \quad (2.71)$$

O interpretare utilă a acestei expresii se obține observând că ieșirea la momentul n este o sumă ponderată a eșantioanelor semnalului de intrare $x[n], x[n-1], \dots, x[n-M+1]$. Cu alte cuvinte, sistemul ponderează cu valorile răspunsului la impuls $h[k]$ cele mai recente M valori ale eșantioanelor de semnal și sumează cele M produse. În consecință, sistemul acționează ca o fereastră care "vede" numai ultimele M eșantioane ale intrării pentru a obține ieșirea. Cu alte cuvinte, un sistem FIR are o memorie finită de ordin M .

Spre deosebire de sistemele FIR, un sistem IIR are răspunsul la impuls de durată infinită și, cu ajutorul sumei de conoluție, răspunsul său este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (2.72)$$

unde s-a presupus sistemul cauzal (limita inferioară a sumei este $k = 0$), deși această presupunere nu era absolut necesară.

Se observă că în calculul răspunsului sunt implicate valoarea prezentă și toate valorile precedente ale intrării, deci sistemul are memorie infinită.

2.4.9. Sisteme discrete recursive și nerecursive

Anterior s-a arătat cum se poate obține ieșirea unui SDLIT cu ajutorul sumei de conoluție în funcție de eșantioanele semnalului de intrare. Există multe sisteme pentru care este mai convenabil a se exprima ieșirea nu numai în funcție de valoarea prezentă și cele anterioare ale intrării, ci și în funcție de valorile precedente ale ieșirii.

Exemplul 2.12.

Fie sistemul definit de relația

$$y[n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x[k] \quad (2.73)$$

care calculează media eșantioanelor acumulate (media cumulativă).

Din (2.73) se observă că pentru calculul ieșirii $y[n]$ este necesară stocarea tuturor eșantioanelor $x[k]$, pentru $0 \leq k \leq n$. Aparent, este necesară o memorie care crește liniar cu numărul eșantioanelor de la intrare. Pentru sistemul descris de relația (2.73) este mai ușor să se calculeze $y[n]$ în funcție de $y[n-1]$ și $x[n]$. Într-adevăr, printr-o rearanjare simplă a relației (2.73) se obține

$$(n+1)y[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n] = n \cdot y[n-1] + x[n] \quad (2.74)$$

și atunci

$$y[n] = \frac{n}{n+1} y[n-1] + \frac{1}{n+1} x[n] \quad (2.75)$$

Acum media cumulativă se calculează mai ușor, multiplicând valoarea precedentă a ieșirii $y[n-1]$ cu $\frac{n}{n+1}$, valoarea eșantionului curent de intrare cu $\frac{1}{n+1}$ și apoi adunând cele două produse.

Conform relației (2.75), calculul lui $y[n]$ necesită două multiplicări, o adunare și o locație de memorie (element de întârziere), după cum este arătat în figura 2.22.

Acesta este un exemplu de sistem recursiv. În general, ieșirea unui sistem cauzal recursiv poate fi exprimată astfel

$$y[n] = F[y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N], x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]] \quad (2.76)$$

unde $F[\cdot]$ este o funcție de argumentele sale. Ecuația (2.76) este o *ecuație recursivă*, specificând un mod de calcul al ieșirii sistemului în funcție de valorile precedente ale ieșirii și valoarea prezentă și precedente ale intrării.

Spre deosebire de sistemul descris de (2.76), dacă $y[n]$ depinde numai de valoarea prezentă și cele trecute ale intrării, atunci

$$y[n] = F[x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]] \quad (2.77)$$

și sistemul se numește *nerecursiv*.

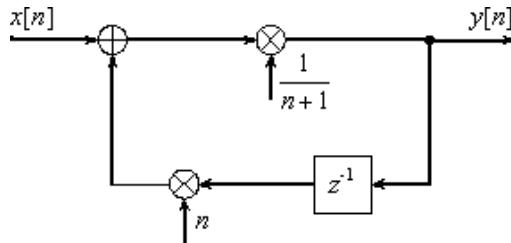


Figura 2.22. Implementarea sistemului descris de (2.75)

Un sistem FIR, cauzal, descris de suma de conoluție

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^M h[k] x[n-k] = h[0] x[n] + h[1] x[n-1] + \dots + h[M] x[n-M] = \\ &= F[x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]], \end{aligned} \quad (2.78)$$

unde $F[\cdot]$ este o sumă ponderată a valorilor prezentă și trecute ale intrării cu valoarea răspunsului la impuls $h[n]$, $0 \leq n \leq M$, este *nerecursiv*.

Diferența de bază între sistemele nerecursive și cele recursive constă în prezența la cele din urmă a unei reacții ce conține cel puțin un element de întârziere.

Pentru calculul ieșirii $y[n_0]$ a unui sistem recursiv care este excitat cu un semnal aplicat la $n = 0$, trebuie calculate toate valorile precedente ale ieșirii $y[0], y[1], \dots, y[n_0 - 1]$. Spre deosebire de această situație, realizarea nerecursivă permite calculul lui $y[n_0]$ fără cunoașterea ieșirilor precedente. Din (2.76) se observă că ieșirea unui sistem recursiv se poate determina dacă se cunosc condițiile inițiale și intrarea. Din punct de vedere al contribuțiilor acestora în răspunsul sistemului se pot face următoarele observații:

1. Dacă sistemul este inițial relaxat la momentul $n = 0$, memoria sa ar trebui să fie zero, deci $y[-1] = \dots = y[-N] = 0$. Deoarece memoria sistemului determină starea sa, răspunsul acestuia în condiții inițiale nule se numește *răspuns de stare zero* sau *răspuns forțat* și se notează cu $y_{zs}[n]$ sau $y_{fr}[n]$.

2. Dacă sistemul este nerelaxat și intrarea sa este nulă, răspunsul său se numește *răspuns de intrare zero*, notat $y_{zi}[n]$. Aceasta se mai numește *răspuns liber* sau *natural* $y_{nr}[n]$.

3. Un sistem recursiv cu condiții inițiale nenule este nerelaxat și poate produce un semnal de ieșire fără a avea excitație.

4. Pentru clasa sistemelor liniare răspunsul acestora este suma celor două răspunsuri, de intrare zero și de stare zero $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$.

Întotdeauna este posibil să implementezi un sistem FIR în manieră nerecursivă, dar prin rearanjarea adecvată a relației (2.77) care descrie sistemul, acesta poate fi implementat și recursiv.

Exemplul 2.13.

Fie un sistem FIR descris de ecuația

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-k] \quad (2.79)$$

care calculează media mobilă sau alunecătoare.

Conform relației (2.77), acest sistem este de tip FIR, cu răspunsul la impuls

$$h[n] = \frac{1}{M+1}, \quad 0 \leq n \leq M \quad (2.80)$$

și implementarea din figura 2.23.

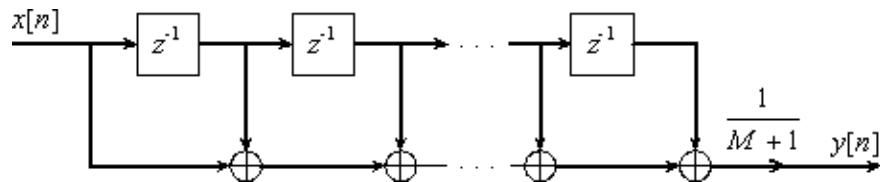


Figura 2.23. Implementarea nerecursivă a unui sistem FIR pentru calculul mediei mobile

Relația (2.79) poate fi însă rearanjată sub forma

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M x[n-1-k] + \frac{1}{M+1} (x[n] - x[n-1-M]) = \\ &= y[n-1] + \frac{1}{M+1} (x[n] - x[n-1-M]) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Relația (2.79), scrisă în forma echivalentă (2.81), poate fi implementată ca în figura 2.24 în formă recursivă.

Un sistem IIR nu poate fi implementat decât recursiv, deoarece implementarea nerecursivă ar implica un număr infinit de celule de întârziere.

În concluzie, termenii de FIR și IIR trebuie să se văză drept caracteristici generale ale sistemelor referitoare la durata răspunsului la

impuls, în timp ce termenii de recursiv și nerecursiv se referă la posibilitățile de implementare ale acestora.

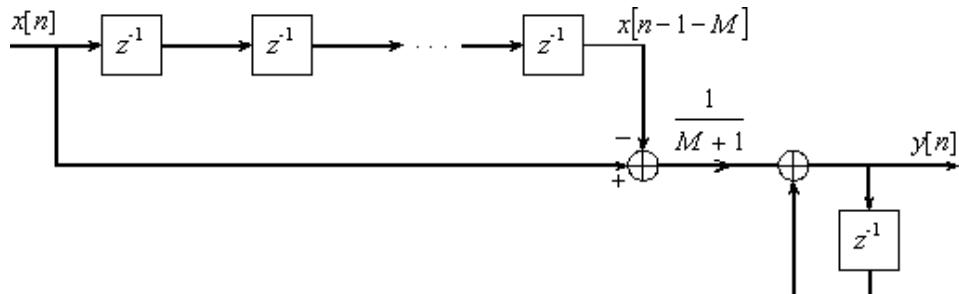


Figura 2.24. Implementarea recursivă a unui sistem FIR care calculează media mobilă

2.5. Corelația semnalelor discrete

În secțiunile precedente semnalele s-au presupus deterministe, adică fiecare valoare a secvenței este unic determinată de o expresie matematică, un tabel de atribuire sau o regulă oarecare. În multe situații însă, procesele care generează semnale sunt mult prea complexe, astfel încât descrierea lor este fie foarte dificilă, fie imposibilă. În aceste cazuri este utilă modelarea lor cu secvențe aleatoare, a căror caracterizare matematică se realizează pe baza mediilor de diferite ordine [15]. Semnalele aleatoare nu sunt absolut sumabile sau de patrat sumabil și, în consecință, nu au transformată Fourier, dar multe din proprietățile acestor semnale pot fi descrise de funcțiile lor de autocorelație sau de corelație, pentru care transformata Fourier există adesea.

Ca și în cazul conoluției, în cazul operației de corelație sunt implicate două semnale. Spre deosebire de conoluție, scopul calculării corelației a două semnale este de a obține o măsură a gradului în care cele două semnale sunt dependente și de a extrage informații din această dependență.

Operația de corelație este folosită în cazul radarului, sonarului, comunicațiilor digitale și alte aplicații. Spre exemplu, se presupune că există două secvențe aleatoare $x[n]$ și $y[n]$ care trebuie comparate. În cazul radarului sau sonarului $x[n]$ poate reprezenta semnalul discret transmis, iar $y[n]$, semnalului recepționat. Dacă ținta este prezintă, semnalul recepționat $y[n]$ constă din suma dintre semnalul reflectat de țintă și zgromot, adică

$$y[n] = a x[n-D] + w[n], \quad (2.82)$$

unde D – întârzierea introdusă în semnalul reflectat, a – un factor de atenuare și $w[n]$ – zgomot aditiv. Pe de altă parte, dacă nu există țintă în spațiul investigat, semnalul $y[n]$ constă numai din zgomot. Deoarece, în general, semnalul reflectat de țintă este "înecat" în zgomot, se pune problema detecției țintei, adică, de a decide, pe baza semnalului recepționat, dacă țintă este sau nu prezentă și, în caz afirmativ, să se găsească întârzierea D din care se poate determina distanța până la țintă. Inspectia vizuală a semnalului $y[n]$ nu relevă prezența sau absența semnalului $ax[n-D]$. Operația de corelație între semnalul transmis și cel recepționat oferă un mijloc de a decide prezența sau lipsa țintei.

O altă aplicație a corelației, întâlnită adesea în comunicațiile digitale, constă în detecția între două alternative. În acest caz semnalul recepționat este de forma

$$y[n] = x_i[n] + w[n], \quad i = 0, 1; \quad 0 \leq n \leq L-1 \quad (2.83)$$

unde $x_0[n]$ și $x_1[n]$ reprezintă, de exemplu, "0" logic, respectiv, "1" logic. Efectuând corelațiile semnalului recepționat cu cele două semnale $x_0[n]$ și $x_1[n]$ generate local la recepție, se poate lua decizia care din cele două semnale $x_0[n]$ sau $x_1[n]$ este prezent în semnalul recepționat.

În cele ce urmează se va defini operația de corelație și autocorelație pentru semnale de energie finită și pentru semnale de putere finită.

2.5.1. Corelația și autocorelația secvențelor de energie finită

Fie $x[n]$ și $y[n]$ două semnale de energie finită. Secvența de corelație dintre $x[n]$ și $y[n]$ este o secvență $r_{xy}[l]$ definită cu relația

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y[n-l], \quad l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (2.84)$$

sau, echivalent

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l] y[n], \quad l = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (2.85)$$

Ordinea indicilor x și y indică direcția în care o secvență este deplasată față de cealaltă. În relația (2.84) $x[n]$ este nedeplasată și $y[n]$ este

deplasată față de $x[n]$ cu l unități, spre dreapta pentru l pozitiv și spre stânga pentru l negativ. În (2.85) $y[n]$ este nedeplasată și $x[n]$ este deplasată cu l unități spre stânga pentru l pozitiv și spre dreapta, dacă l este negativ.

Deplasarea lui $x[n]$ spre stânga cu l unități față de $y[n]$ echivalează cu deplasarea lui $y[n]$ spre dreapta față de $x[n]$ cu l unități, astfel încât $r_{xy}[l]$ obținut din (2.84) și (2.85) este același.

Dacă se inversează rolurile lui $x[n]$ și $y[n]$ se obține

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-l] \quad (2.86)$$

sau

$$r_{yx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n+l]x[n] \quad (2.87)$$

Comparând (2.84) cu (2.87) sau (2.85) cu (2.86), rezultă

$$r_{xy}[l] = r_{yx}[-l] \quad (2.88)$$

Cu excepția operației de reflectare, calculul corelației implică aceleași operații ca și convoluția: deplasarea unei secvențe, multiplicarea și sumarea produselor, adică $r_{xy}[l]$ se obține din convoluția

$$r_{xy}[l] = x[l]*y[-l] \quad (2.89)$$

În cazul particular în care $y[n] = x[n]$ se obține *autocorelația*, definită ca

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] \quad (2.90)$$

sau, echivalent

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+l]x[n] \quad (2.91)$$

Din (2.90) și (2.91) rezultă $r_{xx}[l] = r_{xx}[-l]$, deci funcția de autocorelație este pară. Când se lucrează cu secvențe de durată finită, evident, sumele sunt finite, limitele de sumare fiind determinate de lungimea secvențelor implicate în corelație.

Pentru evidențierea unor proprietăți ale funcției de autocorelație și corelație se presupun două secvențe $x[n]$ și $y[n]$ de energie finită, și se formează combinația liniară

$$z[n] = a x[n] + b y[n-l] \quad (2.92)$$

Energia semnalului $z[n]$ este

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a x[n] + b y[n-l]]^2 &= a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n-l] + \\ &+ 2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] = a^2 r_{xx}[0] + b^2 r_{yy}[0] + 2ab r_{xy}[l] \end{aligned} \quad (2.93)$$

Fie

$$r_{xx}[0] = E_x \text{ și } r_{yy}[0] = E_y \quad (2.94)$$

energiile semnalelor $x[n]$ și $y[n]$.

Evident,

$$a^2 r_{xx}[0] + b^2 r_{yy}[0] + 2ab r_{xy}[l] \geq 0 \quad (2.95)$$

Presupunând $b \neq 0$ și împărțind (2.93) prin b^2 , rezultă

$$r_{xx}[0] \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 2r_{xy}[l] \left(\frac{a}{b} \right) + r_{yy}[0] \geq 0 \quad (2.96)$$

Această relație este adevărată dacă discriminantul său este mai mic sau egal cu zero, adică

$$r_{xy}^2[l] - r_{xx}[0]r_{yy}[0] \leq 0 \quad (2.97)$$

Din (2.97) rezultă

$$|r_{xy}[l]| \leq \sqrt{r_{xx}[0]r_{yy}[0]} = \sqrt{E_x E_y} \quad (2.98)$$

În cazul particular $y[n] = x[n]$, rezultă

$$|r_{xx}[l]| \leq r_{xx}[0] = E_x \quad (2.99)$$

Aceasta înseamnă că funcția de autocorelație își atinge valoarea maximă în origine. În practică este uneori preferabil a se normaliza funcția de corelație și autocorelație la domeniul $[-1, 1]$.

Funcția de corelație normalizată, numită uneori și *coefficient de corelație*, se calculează cu relația

$$\rho_{xy}[l] = \frac{r_{xy}[l]}{\sqrt{r_{xx}[0]r_{yy}[0]}} \quad (2.100)$$

Funcția de autocorelație normalizată, numită uneori și *coefficient de autocorelație*, se calculează cu relația

$$\rho_{xx}[l] = \frac{r_{xx}[l]}{r_{xx}[0]} \quad (2.101)$$

Evident, $|\rho_{xy}[l]| \leq 1$ și $|\rho_{xx}[l]| \leq 1$.

2.5.2. Corelația secvențelor de putere finită

Fie $x[n]$ și $y[n]$ două secvențe de putere finită. Funcția lor de corelație este definită prin relația

$$r_{xy}[l] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] y[n-l] \quad (2.102)$$

Dacă $x[n] = y[n]$, se obține funcția de autocorelație

$$r_{xx}[l] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n] x[n-l] \quad (2.103)$$

Dacă, în particular, $x[n]$ și $y[n]$ sunt periodice, de perioadă N , mediile din (2.102) și (2.103) sunt identice cu cele pe o perioadă și atunci se poate scrie

$$r_{xy}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] y[n-l] \quad (2.104)$$

$$r_{xx}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] x[n-l] \quad (2.105)$$

Secvențele $r_{xy}[l]$ și $r_{xx}[l]$ sunt periodice, de perioadă N . Factorul $\frac{1}{N}$ poate fi considerat factor de normalizare.

Exemplul 2.14.

Fie secvența

$$y[n] = x[n] + w[n] \quad (2.106)$$

unde $x[n]$ este o secvență periodică de perioadă necunoscută N , iar $w[n]$ zgomotul aditiv, presupus alb.

Considerând M eșantioane prelevate din $y[n]$, adică $0 \leq n \leq M-1$, cu $M \gg N$ și presupunând $y[n] = 0$ pentru $n < 0$ și $n > M$, funcția de autocorelație pentru $y[n]$ este

$$r_{yy}[l] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y[n] y[n-l] \quad (2.107)$$

Înlocuind (2.106) în (2.107), rezultă

$$r_{yy}[l] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (x[n] + w[n])(x[n-l] + w[n-l]) = r_{xx}[l] + r_{xw}[l] + r_{wx}[l] + r_{ww}[l] \quad (2.108)$$

unde $r_{xx}[l]$ este funcția de autocorelație a semnalului $x[n]$, $r_{xw}[l]$ și $r_{wx}[l]$ funcțiile de corelație dintre semnal și zgomotul aditiv, iar $r_{ww}[l]$ funcția de autocorelație a zgomotului.

Deoarece $x[n]$ s-a presupus periodic, de perioadă N , și funcția sa de autocorelație va fi periodică, având maxime locale pentru $l = 0, N, 2N, \dots$. Funcțiile de corelație $r_{xw}[l]$ și $r_{wx}[l]$ dintre semnal și zgomot sunt mici datorită independenței dintre cele două semnale.

Funcția de autocorelație a zgomotului va avea un maxim în origine tînzând apoi asimptotic la valoarea sa medie [15].

În concluzie, în (2.108) este de așteptat ca numai $r_{xx}[l]$ să aibă maxime semnificative pentru $l \geq 0$, ceea ce permite detecția semnalului periodic $x[n]$ "înecat" în zgomot și determinarea perioadei sale.

2.5.3. Corelația dintre intrarea și ieșirea unui sistem

În paragraful de față se urmărește obținerea unor relații intrare – ieșire pentru sisteme discrete, liniare, invariante în timp în "domeniul corelației", deoarece semnalul obținut la ieșirea sistemului nu este arbitrar, necorelat și independent de semnalul de intrare.

Fie un semnal $x[n]$, a cărui funcție de autocorelație $r_{xx}[l]$ este cunoscută, care se aplică la intrarea unui SDLIT caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$. Semnalul de ieșire este

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.109)$$

Secvența de intercorelație dintre intrare și ieșire este

$$r_{yx}[l] = y[l] * x[-l] = h[l] * [x[l] * x[-l]] = h[l] * r_{xx}[l] \quad (2.110)$$

adică convoluția dintre răspunsul la impuls al sistemului și funcția de autocorelație a secvenței de intrare.

Din (2.88) și (2.110) rezultă

$$r_{xy}[l] = h[-l] * r_{xx}[l] \quad (2.111)$$

Tinând cont de (2.89), (2.109) și proprietățile convoluției, funcția de autocorelație a secvenței de ieșire este

$$\begin{aligned} r_{yy}[l] &= y[l] * y[-l] = [h[l] * x[l]] * [h[-l] * x[-l]] = \\ &[h[l] * h[-l]] * [x[l] * x[-l]] = r_{hh}[l] * r_{xx}[l] \end{aligned} \quad (2.112)$$

Funcția de autocorelație $r_{hh}[l]$ a răspunsului la impuls $h[n]$ există, dacă sistemul este stabil. Evaluând (2.112) pentru $l=0$, se obține energia semnalului de ieșire cu ajutorul funcțiilor de autocorelație.

$$r_{yy}[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}[k] r_{xx}[k] \quad (2.113)$$

2.6. Sisteme discrete, liniare, invariante în timp, caracterizate de ecuații cu diferențe cu coeficienți constanți

2.6.1. Soluția ecuației liniare cu diferențe cu coeficienți constanți

În paragraful 2.4.3 au fost considerate SDLIT și s-a arătat că acestea pot fi complet caracterizate de răspunsul lor la impuls. De asemenea, a fost prezentată și o altă manieră de descriere a relației intrare – ieșire pentru această familie de sisteme discrete, și anume, prin ecuația cu diferențe exprimată de relația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.114)$$

Data fiind ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți care caracterizează un sistem discret, liniar, invariant în timp, în acest paragraf se urmărește a se obține o expresie explicită pentru ieșirea $y[n]$, printr-o metodă numită *directă*. O metodă alternativă, numită *indirectă*, bazată pe folosirea transformatei Z va fi prezentată în paragraful 3.6.2.

Ca și în cazul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, o ecuație liniară cu diferențe are soluția [3]

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n] \quad (2.115)$$

unde $y_p[n]$ reprezintă o *soluție particulară a ecuației complete*, iar $y_h[n]$ *soluția generală a ecuației cu diferențe omogene* ($x[n-k] = 0$ pentru $k = \overline{0, M}$).

Soluția generală a ecuației cu diferențe omogene

Prin impunerea intrării egală cu zero se obține *ecuația cu diferențe omogenă*

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0, \quad a_0 = 1 \quad (2.116)$$

Se alege o soluție a ecuației omogene de forma

$$y[n] = \lambda^n \quad (2.117)$$

Înlocuind (2.117) în (2.116), se obține

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{n-k} = 0 \quad (2.118)$$

sau $\lambda^{n-N} (\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + a_2 \lambda^{N-2} + \dots + a_{N-1} \lambda + a_N) = 0 \quad (2.118')$

Ecuația (2.118) sau (2.118') se numește *ecuație caracteristică*, iar polinomul din paranteză se numește *polinom caracteristic* al sistemului, care are N rădăcini notate $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, care pot fi reale și/sau complexe, distincte sau nu. Dacă coeficienții a_1, \dots, a_N sunt reali, cum se întâmplă de obicei în practică, rădăcinile sunt fie reale, fie reale și/sau perechi complex conjugate. Unele rădăcini pot fi identice, caz în care rădăcinile se numesc multiple. Pentru început însă, se presupune că acestea sunt distincte.

Soluția generală a ecuației cu diferențe omogene este [3]

$$y_h[n] = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_N \lambda_N^n \quad (2.119)$$

unde c_1, c_2, \dots, c_N sunt coeficienți de ponderare, care se determină din condițiile inițiale specificate pentru sistem. Deoarece $x[n] = 0$, relația (2.119) poate fi folosită pentru determinarea *răspunsului de intrare zero* $y_{zi}[n]$ al sistemului, coeficienții de ponderare determinându-se din condițiile inițiale $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$.

Exemplul 2.15.

Să se determine răspunsul sistemului cauzal descris de ecuația cu diferențe omogenă

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = 0 \quad (2.120)$$

cu condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$.

Soluție. Ecuația caracteristică este $\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$, astfel încât forma generală a soluției ecuației cu diferențe, omogene este

$$y_h[n] = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = c_1 (-1)^n + c_2 4^n \quad (2.121)$$

Constantele c_1 și c_2 se obțin din condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$. Din ecuația (2.120) se obține

$$\begin{aligned}y[0] &= 3y[-1] + 4y[-2] \\y[1] &= 3y[0] + 4y[-1] = 13y[-1] + 12y[-2]\end{aligned}\quad (2.122)$$

Pe de altă parte, din (2.121) se poate scrie

$$\begin{aligned}y[0] &= c_1 + c_2 \\y[1] &= -c_1 + 4c_2\end{aligned}\quad (2.123)$$

Înlocuind (2.123) în (2.122), rezultă

$$c_1 = -\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2]$$

$$c_2 = \frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2]$$

și răspunsul de intrare zero al sistemului va fi

$$y_{zi}[n] = \left[-\frac{1}{5}y[-1] + \frac{4}{5}y[-2] \right] (-1)^n + \left[\frac{16}{5}y[-1] + \frac{16}{5}y[-2] \right] 4^n ; \quad n \geq 0 \quad (2.124)$$

Dacă ecuația caracteristică are rădăcina λ_1 multiplă de ordin m , iar celelalte rădăcini, $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_N$, simple, soluția generală a ecuației cu diferențe omogene este [3]

$$y_h[n] = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n + c_3 n^2 \lambda_1^n + \dots + c_m n^{m-1} \lambda_1^n + c_{m+1} \lambda_{m+1}^n + \dots + c_N \lambda_N^n. \quad (2.125)$$

În cazul rădăcinilor complex conjugate și coeficienții corespunzători sunt complex conjugați și contribuția acestora se combină într-o componentă reală. Astfel, dacă λ_p și λ_q sunt cele două rădăcini complex conjugate

$$\begin{aligned}\lambda_p &= r(\cos \alpha + j \sin \alpha) \\ \lambda_q &= r(\cos \alpha - j \sin \alpha)\end{aligned}\quad (2.126)$$

contribuția lor în răspuns este

$$\begin{aligned}c_p \lambda_p^n &= c_p r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) \\c_q \lambda_q^n &= c_q r^n (\cos n\alpha - j \sin n\alpha)\end{aligned}\quad (2.127)$$

unde coeficienții c_p și c_q sunt complex conjugați

$$c_p = ce^{j\theta}; \quad c_q = ce^{-j\theta} \quad (2.128)$$

cu $c = |c_p| = |c_q|$.

Ținând seama de (2.128), termenii din relația (2.127) se combină în componentă

$$\begin{aligned} c_p r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) + c_q r^n (\cos n\alpha - j \sin n\alpha) &= \\ &= r^n (A_k \cos n\alpha + B_k \sin n\alpha) \end{aligned} \quad (2.129)$$

unde

$$\begin{aligned} A_k &= 2c \cos \theta \\ B_k &= -2c \sin \theta \end{aligned} \quad (2.130)$$

Dacă ecuația caracteristică are N_1 rădăcini reale distințe și $(N-N_1)/2$ perechi de rădăcini complex conjugate, soluția este de forma

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N_1} c_k \lambda_k^n + \sum_{k=1}^{\frac{N-N_1}{2}} r^n (A_k \cos n\alpha + B_k \sin n\alpha) \quad (2.131)$$

Dacă unele rădăcini reale sau complex conjugate sunt multiple, în răspuns apar și termeni de forma (2.125).

Soluția particulară a ecuației cu diferențe

Soluția particulară se obține presupunând o anumită formă pentru aceasta, în funcție de semnalul de intrare [23]. În tabelul 2.1 sunt prezentate soluții particulare pentru cele mai uzuale semnale folosite în practica prelucrării numerice a semnalelor.

Tabelul 2.1

Semnal de intrare $x[n]$	Soluție particulară $y_p[n]$
A (constant)	K
$A M^n$	$k M^n$
$A n^M$	$k_0 n^M + k_1 n^{M-1} + \dots + k_M$
$A^n n^M$	$A^n (k_0 n^M + k_1 n^{M-1} + \dots + k_M)$
$\begin{cases} A \cos \omega_0 n \\ A \sin \omega_0 n \end{cases}$	$k_1 \cos \omega_0 n + k_2 \sin \omega_0 n$
$\delta[n]$	$\sum_{i=0}^{M-N} k_i \delta[n-i]$

Exemplul 2.16.

Să se determine soluția particulară a ecuației cu diferențe

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + x[n] \quad (2.126)$$

la semnalul de intrare $x[n] = 2^n$, $n \geq 0$.

Soluția particulară este

$$y_p[n] = k \cdot 2^n u[n] \quad (2.127)$$

Substituind (2.127) în (2.126), se obține

$$k \cdot 2^n u[n] = \frac{5}{6}k \cdot 2^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{6}k \cdot 2^{n-2} u[n-2] + 2^n u[n]$$

Pentru a determina pe k , ecuația precedentă se evaluează pentru $n \geq 2$.

$$4k = \frac{5}{6}(2k) - \frac{1}{6}k + 4 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$$

Soluția particulară este

$$y_p[n] = \frac{8}{5}2^n, \quad n \geq 0.$$

Soluția totală a ecuației liniare cu diferențe și răspunsul de stare zero al sistemului

Soluția totală se obține prin sumarea soluției generală a ecuației omogene cu o soluție particulară a ecuației complete, adică

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \quad (2.128)$$

Suma rezultată $y[n]$, pentru $n \geq 0$, conține constantele c_k ale soluției ecuației omogene, care se determină din primele eșantioane ale ieșirii calculate iterativ astfel încât sistemul să satisfacă condițiile inițiale date $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$.

Datorită liniarității sistemului, răspunsul $y[n]$ poate fi determinat și cu relația

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] \quad (2.129)$$

unde $y_{zs}[n]$ este numit *răspuns de stare zero*, iar $y_{zi}[n]$, *răspuns de intrare zero*. Răspunsul de stare zero se determină rezolvând ecuația cu diferențe în condiții inițiale nule. Așa cum s-a mai precizat, răspunsului de intrare zero se deduce din ecuația omogenă, ținând cont de condițiile inițiale $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$.

Exemplul 2.17.

Se consideră un sistem recursiv descris de ecuația

$$y[n] = a y[n-1] + x[n] \quad (2.130)$$

unde a – constantă. Pentru acest sistem se dorește aflarea semnalului de ieșire în condițiile în care se presupune că la intrarea sistemului se aplică semnalul, pentru $n \geq 0$, fără a face vreo presupunere asupra intrării pentru $x[n] n < 0$, dar presupunând cunoscută valoarea $y[-1]$, adică condiția inițială. Caz particular $x[n]=2^n u[n]$.

Semnalul de ieșire poate fi obținut prin mai multe metode, și anume: folosind relația (2.128), folosind relația (2.129) și, pentru acest caz simplu al unei ecuații cu diferențe de ordinul întâi, prin recurență.

1. Ecuația cu diferențe omogenă este

$$y[n]-ay[n-1]=0 \quad (2.131)$$

Ecuația caracteristică este $\lambda-a=0$, cu rădăcina $\lambda=a$. Soluția ecuației omogene este $y_h[n]=c_1 a^n$ (2.132)

Soluția particulară a ecuației neomogene este de forma $y_p[n]=k 2^n u[n]$. Înlocuind soluția particulară în ecuația cu diferențe și apoi evaluând-o pe aceasta pentru $n=1$, rezultă $k=\frac{2}{2-a}$.

$$y_p[n]=\frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \quad (2.133)$$

Conform relației (2.128), soluția generală este

$$y[n]=c_1 a^n + \frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \quad (2.134)$$

Evaluând (2.130) și (2.134) în $n=0$ și egalând cele două relații, se obține $c_1 = ay[-1] - \frac{a}{2-a}$.

$$y[n]=a^{n+1} y[-1] + \frac{1}{2-a} (2^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \geq 0 \quad (2.135)$$

2. Răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n]=c_1 a^n \quad (2.136)$$

Evaluând (2.131) și (2.136) în $n=0$, apoi egalând relațiile, rezultă $c_1 = ay[-1]$.

$$y_{zi}[n]=a^{n+1} y[-1] \quad (2.137)$$

Răspunsului de stare zero este de forma

$$y_{zs}[n]=c_1'' a^n + \frac{2}{2-a} 2^n, n \geq 0 \quad (2.138)$$

Constanta c_1'' se determină prin evaluarea relațiilor (2.138) și (2.130) în $n=0$ cu condiția inițială nulă. Rezultă astfel $c_1'' = -\frac{a}{2-a}$.

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{2-a} (2^{n+1} - a^{n+1}), n \geq 0 \quad (2.139)$$

Înlocuind (2.137) și (2.139) în (2.129), se obține soluția totală de aceeași formă cu cea dată de (2.135).

3. Plecând de la (2.130), se poate scrie

$$\begin{aligned} y[0] &= a y[-1] + x[0] \\ y[1] &= a y[0] + x[1] = a^2 y[-1] + a x[0] + x[1] \\ y[2] &= a y[1] + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + a x[1] + x[2] \\ &\vdots \\ y[n] &= a y[n-1] + x[n] = a^{n+1} y[-1] + a^n x[0] + a^{n-1} x[1] + \dots \\ &\quad + a x[n-1] + x[n] \end{aligned} \quad (2.141)$$

sau, mai compact

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0 \quad (2.142)$$

Particularizând (2.142) pentru semnalul de intrare considerat, se obține răspunsul total al sistemului, evident, de aceeași formă cu (2.135).

Se observă că răspunsul $y[n]$ dat de (2.142) conține doi termeni: primul, care îl conține pe $y[-1]$, este un rezultat al condiției inițiale, iar al doilea termen se datorează semnalului de intrare $x[n]$.

Dacă sistemul este inițial relaxat la momentul $n=0$, memoria sa ar trebui să fie zero, deci $y[-1]=0$. Pentru sistemul descris de (2.130) răspunsul de stare zero sau răspunsul forțat este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0 \quad (2.143)$$

În continuare, se presupune sistemul inițial nerelaxat ($y[-1] \neq 0$) și intrarea $x[n]=0$ pentru toți n . Răspunsul de intrare zero sau răspunsul natural al sistemului este

$$y_{zi}[n] = a^{n+1} y[-1], \quad n \geq 0 \quad (2.144)$$

adică un sistem recursiv cu condiții inițiale nenule produce un semnal de ieșire fără a avea excitație, acesta datorându-se memoriei sistemului.

Sistemul descris de (2.130) este cel mai simplu sistem recursiv din clasa sistemelor recursive descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți. Forma generală pentru o astfel de ecuație este dată de relația

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad a_0 \equiv 1 \quad (2.145)$$

Ordinul ecuației cu diferențe sau ordinul sistemului este egal cu N.

Ecuația (2.145) exprimă ieșirea sistemului la momentul n direct ca o sumă ponderată a intrării prezente și a valorilor anterioare ale intrării și ieșirii. Pentru a determina ieșirea $y[n]$ pentru $n \geq 0$ este necesară cunoașterea intrării $x[n]$ și condițiile inițiale $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$. Acestea sintetizează "istoria" sistemului necesară aflării ieșirii prezente și viitoare.

Exemplul 2.18.

Să se determine soluția totală a ecuației cu diferențe

$$y[n] = \frac{5}{6} y[n-1] - \frac{1}{6} y[n-2] + x[n] \quad (2.146)$$

când semnalul de intrare este $x[n] = 2^n$, $n \geq 0$ și $\begin{cases} y[-1] = 1 \\ y[-2] = 2 \end{cases}$.

Se determină întâi soluția ecuației omogene

$$\begin{aligned} \lambda^n - \frac{5}{6} \lambda^{n-1} + \frac{1}{6} \lambda^{n-2} &= 0 \\ \lambda^{n-2} \left[\lambda^2 - \frac{5}{6} \lambda + \frac{1}{6} \right] &= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Forma generală a soluției ecuației omogene cu diferențe este

$$y_h[n] = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

Din exemplul 2.16, soluția particulară a acestui sistem la intrarea $x[n]$ este dată de (2.127) cu $k = \frac{8}{5}$.

Soluția totală este

$$y[n] = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{8}{5} 2^n, \quad n \geq 0 \quad (2.147)$$

unde constantele c_1 și c_2 se determină astfel încât să satisfacă condițiile inițiale.

Din (2.146) rezultă

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{5}{6}y[-1] - \frac{1}{6}y[-2] + 1 \\ y[1] &= \frac{5}{6}y[0] - \frac{1}{6}y[-1] + 2 = \frac{19}{36}y[-1] - \frac{5}{36}y[-2] + \frac{17}{6} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Din (2.147) se obține

$$\begin{aligned} y[0] &= c_1 + c_2 + \frac{8}{5} \\ y[1] &= c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{16}{5} \end{aligned} \quad (2.149)$$

Introducând (2.149) în (2.148) rezultă c_1 și c_2 în funcție de condițiile inițiale $y[-1]$ și $y[-2]$.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 &= -\frac{7}{60} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{2}{5} \\ y[n] &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5}2^n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.150)$$

Pe de altă parte, răspunsul total al sistemului se mai poate obține din sumarea răspunsului de stare zero cu răspunsul de intrare zero.

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] \quad (2.151)$$

Răspunsul de stare zero se obține din (2.147), prin evaluarea coeficienților în condiții inițiale nule.

$$\left. \begin{aligned} c'_1 + c'_2 + \frac{8}{5} &= 1 \\ \frac{1}{2}c'_1 + \frac{1}{3}c'_2 + \frac{16}{5} &= \frac{17}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c'_1 = -1; \quad c'_2 = \frac{2}{5}$$

$$y_{zs}[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5}2^n \quad (2.152)$$

Răspunsul de intrare zero se obține din rezolvarea ecuației omogene și folosirea condițiilor inițiale

$$y_h[n] = c''_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c''_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (2.153)$$

$$\begin{cases} y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 0 \\ y[0] = c''_1 + c''_2 \\ y[1] = \frac{1}{2}c''_1 + \frac{1}{3}c''_2 \end{cases} \quad (2.154)$$

$$\begin{cases} y[0] = \frac{5}{6}y[-1] - \frac{1}{6}y[-2] \\ y[1] = \frac{19}{36}y[-1] - \frac{5}{36}y[-2] \end{cases} \quad (2.155)$$

Din egalarea ecuației (2.155) cu (2.154) rezultă $c''_1 = \frac{1}{2}$, $c''_2 = 0$ și

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2.156)$$

Răspunsul total al sistemului se obține din sumarea răspunsurilor de stare zero și de intrare zero, adică, în cazul exemplului considerat

$$y[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5}2^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8}{5}2^n \quad (2.157)$$

Evident, $y[n]$ obținut cu relația (2.157) este identic cu cel dat de (2.150) obținut pe baza soluției ecuației omogene și a soluției particulare, cu constantele c_1 și c_2 determinate corespunzător.

2.6.2. Răspunsul la impuls al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp

Răspunsul la impuls al unui sistem discret, liniar, invariant în timp, relaxat a fost definit ca răspunsul sistemului la excitația impuls unitate. În cazul sistemelor recursive, răspunsul la impuls este egal cu răspunsul de stare zero, când intrarea este $x[n] = \delta[n]$.

De exemplu, în cazul sistemului recursiv de ordinul întâi din exemplul 2.17, răspunsul de stare zero este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0. \quad (2.158)$$

care, particularizat pentru $x[n] = \delta[n]$, este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n a^k \delta[n-k] = a^n, \quad n \geq 0. \quad (2.159)$$

În concluzie, răspunsul la impuls al sistemului recursiv, de ordinul întâi, descris de (2.130), este

$$h[n] = a^n u[n] \quad (2.160)$$

Tinând cont de (2.160) și (2.158), se observă că răspunsul de stare zero este conoluția dintre răspunsul la impuls al sistemului și semnalul cauzal de intrare.

În cazul general al unui sistem arbitrar, liniar, invariant în timp, recursiv, cauzal, răspunsul de stare zero la un semnal de intrare cauzal este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n h[k] x[n-k], \quad n \geq 0. \quad (2.161)$$

Când semnalul de intrare este impulsul unitate, ($x[n] = \delta[n]$), (2.161) devine

$$y_{zs}[n] = h[n]. \quad (2.162)$$

Pentru a determina răspunsul la impuls al unui sistem discret descris de o ecuație liniară cu diferențe, cu coeficienți constanți se face apel la paragraful 2.6.1, conform căruia, răspunsul total al unui astfel de sistem este suma dintre soluția ecuației omogene și o soluție particulară a ecuației generale. Soluția particulară este dată în tabelul 2.1. Pentru cazul în care $N > M$, soluția particulară este egală cu zero și răspunsul la impuls constă numai din soluția ecuației omogene, cu coeficienții c_k din (2.119) evaluați astfel încât să satisfacă condițiile inițiale dictate de impuls.

Exemplul 2.19.

Să se determine răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n] - 3y[n-1] - 4y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \quad (2.163)$$

În exemplul 2.15 s-a determinat soluția ecuației cu diferențe omogene pentru acest sistem de forma

$$y_h[n] = (c_1 (-1)^n + c_2 4^n) u[n] \quad (2.164)$$

Cum pentru intrarea $x[n] = \delta[n]$, soluția particulară este zero, răspunsul la impuls al sistemului este dat de (2.164), unde c_1 și c_2 sunt evaluate să satisfacă relația (2.163).

Pentru $n=0$ și $n=1$, (2.163) devine

$$\begin{aligned} y[0] &= 1 \\ y[1] &= 5 \end{aligned} \quad (2.165)$$

în condițiile $y[-1] = y[-2] = 0$, deoarece sistemul trebuie să fie relaxat.

Evaluând (2.164) în $n=0$ și $n=1$, se obține

$$\begin{aligned} y[0] &= c_1 + c_2 \\ y[1] &= -c_1 + 4c_2 \end{aligned} \quad (2.166)$$

Din (2.165) și (2.166) rezultă $c_1 = -1/5$, $c_2 = 6/5$. Răspunsul la impuls al sistemului este

$$h[n] = \left[-\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{5}{6}4^n \right] u[n] \quad (2.167)$$

Pentru o ecuație liniară cu diferențe, cu coeficienți constanți răspunsul la impuls este de forma soluției ecuației omogene

$$h[n] = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n \quad (2.168)$$

unde rădăcinile polinomului caracteristic s-au presupus distincte. Coeficienții c_k se determină din condiții initiale nule $y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$.

Exprimarea răspunsului la impuls în forma (2.168) permite stabilirea unei legături între rădăcinile polinomului caracteristic și stabilitatea în sens MIME a sistemului, după cum urmează

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^N |c_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n \quad (2.169)$$

Dacă $|\lambda_k| < 1, \forall k = \overline{1, N} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k|^n < \infty$, și, deci, $\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

Pe de altă parte, dacă una sau mai multe din mărimele $|\lambda_k| \geq 1, h[n]$ nu mai este absolut sumabil și, în consecință, sistemul este instabil. Prin urmare, o condiție necesară și suficientă pentru stabilitatea sistemelor cauzale recursive descrise prin ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți este ca rădăcinile polinomului caracteristic să fie subunitare în modul.

2.7. Probleme propuse

2.1. Un semnal discret $x[n]$ este definit sub forma

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3}, & -3 \leq n \leq -1 \\ 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

- a) Să se determine valorile semnalului și să se reprezinte $x[n]$;
- b) Să se reprezinte semnalul care rezultă dacă
 - 1) întâi se reflectă $x[n]$, apoi se întârzie semnalul rezultat cu 4 eșantioane;
 - 2) întâi se întârzie $x[n]$ cu 4 eșantioane, apoi se reflectă semnalul rezultat.
- c) Să se reprezinte semnalul $x[-n+4]$;
- d) Să se compare rezultatele de la pct. b) și c). Cum se poate obține $x[-n+4]$ din $x[n]$?
- e) Să se exprime $x[n]$ în funcție de semnalele $\delta[n]$ și $u[n]$.

2.2. Un semnal discret $x[n]$ este reprezentat în figura p2.2. Să se calculeze și să se reprezinte fiecare din următoarele semnale

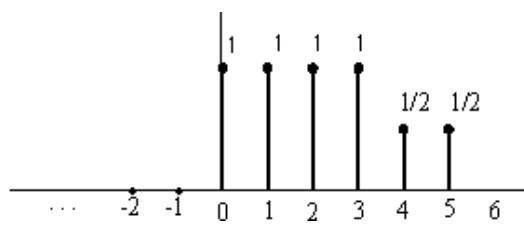


Figura p2.2.

- a) $x[n-2]$;
- b) $x[4-n]$;
- c) $x[n+2]$;
- d) $x[n]u[2-n]$;
- e) $x[n-1]\delta[n-3]$;

- f) $x[n^2]$;
- g) partea pară a lui $x[n]$;
- h) partea impară a lui $x[n]$.

2.3. Să se arate că orice semnal poate fi descompus într-o parte pară și una impară. Este această descompunere unică? Ilustrați argumentația utilizând semnalul

$$x[n] = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

↑

2.4. Fie sistemul $y[n] = H[x[n]] = x[n^2]$.

- a) Să se determine dacă este invariant în timp;
- b) Se aplică sistemului semnalul

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

- 1) să se reprezinte $x[n]$;
- 2) să se determine și să se reprezinte $y[n] = H[x[n]]$;
- 3) să se reprezinte $y'_2[n] = y[n-2]$;
- 4) să se determine și să se reprezinte $x_2[n] = x[n-2]$;
- 5) să se determine și să se reprezinte semnalul $y_2[n] = H[x_2[n]]$;
- 6) să se compare semnalele $y_2[n]$ cu $y[n-2]$. Ce concluzie rezultă?
- c) Să se repete pct. b) pentru sistemul $y[n] = x[n] - x[n-1]$;
- d) Să se repete pct. b) pentru sistemul $y[n] = H[x[n]] = n x[n]$.

2.5. Un sistem discret poate fi

- 1) static sau dinamic;
- 2) liniar sau neliniar;
- 3) invariant sau variant în timp;
- 4) cauzal sau necauzal;
- 5) stabil sau instabil.

Să se examineze următoarele sisteme din punctul de vedere al proprietăților de mai sus.

- a) $y[n] = \cos[x[n]]$;

- b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x[k];$
- c) $y[n] = x[n] \cos \omega_0 n;$
- d) $y[n] = x[-n+2];$
- e) $y[n] = \text{Trun}[x[n]],$ unde $\text{Trun}[x[n]]$ reprezintă partea întreagă a lui $x[n]$ obținută prin trunchiere;
- f) $y[n] = \text{Round}[x[n]],$ unde $\text{Round}[x[n]]$ reprezintă partea întreagă a lui $x[n]$ obținută prin rotunjire;
- g) $y[n] = |x[n]|;$
- h) $y[n] = x[n]u[n];$
- i) $y[n] = x[n] + n x[n+1];$
- j) $y[n] = x[2n];$
- k) $y[n] = x[-n].$

2.6. Să se determine și să se reprezinte conoluția $y[n]$ a semnalelor

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{3}n & , 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & , -2 \leq n \leq 2 \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}$$

- a) numeric;
b) grafic.

2.7. Să se calculeze conoluția $y[n]$ a următoarelor perechi de semnale:

- a) $x[n] = \begin{cases} \alpha^n & , -3 \leq n \leq 5 \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}, h[n] = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}$
- b) $x[n] = a^n u[n]$
 $h[n] = b^n u[n],$ pentru $a \neq b$ și $a = b.$

c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2, 0, 1 \\ 2, & n = -1 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}, \quad h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-4] + \delta[n-5].$

d) $x[n] = u[n+1] - u[n-4] - \delta[n-5], \quad h[n] = [u[n+2] - u[n-3]](3 - |n|).$

2.8. Fie $x[n]$, cu $N_1 \leq n \leq N_2$ și $h[n]$, $M_1 \leq n \leq M_2$, două semnale de durată finită.

- Să se determine domeniul $L_1 \leq n \leq L_2$ al conoluției lor în funcție de N_1, N_2, M_1 și M_2 ;
- Să se determine limitele domeniului conoluției în cazul în care cele două semnale se suprapun parțial în stânga, se suprapun complet și se suprapun parțial în dreapta. Se presupune $h[n]$ de durată mai mică decât $x[n]$.
- Să se ilustreze rezultatele obținute calculând conoluția următoarelor semnale

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -2 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}, \quad h[n] = \begin{cases} 2, & -1 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

2.9. Să se determine răspunsul la impuls și la treapta unitate al sistemelor descrise de următoarele ecuații cu diferențe:

- $y[n] = 0.6 y[n-1] - 0.08 y[n-2] + x[n];$
- $y[n] = 0.7 y[n-1] - 0.1 y[n-2] + 2 x[n] - x[n-2].$

2.10. Se consideră SDLIT interconectate ca în figura p2.10.

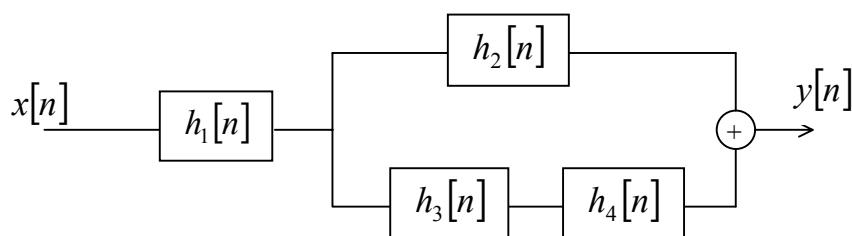


Figura p2.10.

- Să se exprime răspunsul la impuls al întregului sistem în funcție de $h_1[n]$, $h_2[n]$, $h_3[n]$ și $h_4[n]$;

- b) Să se determine $h[n]$, dacă $h_1[n] = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}$,
 $h_2[n] = h_3[n] = (n+1)u[n]$, $h_4[n] = \delta[n-2]$;
c) Să se determine răspunsul sistemului de la pct. b) dacă
 $x[n] = \delta[n+2] + 3\delta[n-1] - 4\delta[n-3]$.

2.11. Să se determine răspunsul sistemului al căruia răspuns la impuls este $h[n] = a^n u[n]$ la semnalul de intrare $x[n] = u[n] - u[n-10]$.

2.12. Două semnale $s[n]$ și $v[n]$ sunt legate prin următoarea ecuație cu diferențe

$$s[n] + a_1 s[n-1] + \dots + a_N s[n-N] = b_0 v[n].$$

- a) Să se deseneze implementarea
- 1) sistemului care generează $s[n]$ când este excitat cu $v[n]$;
 - 2) sistemului care generează $v[n]$ când este excitat cu $s[n]$;
- b) care este răspunsul la impuls al cascadei formate prin interconectarea sistemelor 1 și 2?

2.13. Un sistem discret are realizarea din figura p2.13.

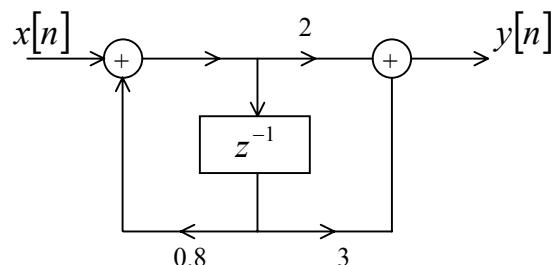


Figura p2.13.

- a) Să se calculeze răspunsul la impuls al sistemului;
b) Să se implementeze sistemul invers, adică cel care produce ieșirea $x[n]$ pentru intrarea $y[n]$.

2.14. Să se determine răspunsul $y[n]$, $n \geq 0$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

la intrarea $x[n] = (-1)^n u[n]$ și condițiile:

- a) $y[-1] = y[-2] = 0$
- b) $y[-1] = 1; y[-2] = -1.$

2.15. Să se determine răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe de ordin doi

$$y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n] - x[n-1].$$

2.16. Să se calculeze secvențele de corelație $r_{xx}[l]$, $r_{xy}[l]$ și $r_{yx}[l]$ ale următoarelor secvențe:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n_0 - N \leq n \leq n_0 + N \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}, \quad y[n] = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

2.17. Să se determine secvența de autocorelație a următoarelor secvențe:

- a) $x[n] = \{1, 2, 1, 1\};$
- b) $y[n] = \{1, 1, 2, 1\}.$

Ce concluzie se desprinde ?

CAPITOLUL 3

TRANSFORMATA Z ȘI APLICAȚIILE EI LA ANALIZA SISTEMELOR DISCRETE, LINIARE, INVARIANTE ÎN TIMP

3.1. Transformata Z

În analiza semnalelor și a sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, transformata Z joacă același rol ca transformata Laplace în analiza semnalelor și a sistemelor analogice, liniare, invariante în timp.

3.1.1. Transformata Z directă

Transformata Z a unui semnal discret $x[n]$ este definită ca o serie de puteri

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (3.1)$$

unde z este o variabilă complexă. În planul complex z, în abscisă se trece partea reală a variabilei complexe z, iar în ordonată, partea sa imaginară. Relația (3.1) se numește transformată Z directă, pentru că transformă semnalul definit în domeniul timp în reprezentarea sa în planul complex, X(z).

Transformata Z a unui semnal $x[n]$ va fi notată cu

$$X(z) = Z\{x[n]\}, \quad (3.2)$$

în timp ce relația dintre $x[n]$ și $X(z)$ va fi indicată de reprezentarea

$$x[n] \xleftarrow{Z} X(z) \quad (3.3)$$

Deoarece transformata Z este o serie infinită de puteri, ea există numai pentru acele valori ale lui z pentru care seria converge. Regiunea de convergență (RC) a transformatei X(z) este dată de multimea valorilor lui z pentru care X(z) are valori finite. Ori de câte ori este dată o transformată Z, trebuie precizată și RC corespunzătoare.

Exemplul 3.1.

Să se determine transformata Z pentru următoarele semnale de durată finită:

- a) $x_1[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
- b) $x_2[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
 ↑
c) $x_3[n] = \{0, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$
- d) $x_4[n] = \delta[n]$
- e) $x_5[n] = \delta[n - k], \quad k > 0$
- f) $x_6[n] = \delta[n + k], \quad k > 0$

Soluție. Din definiția (3.1) se obține:

- a) $X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$, RC: planul $z - \{z = 0\}$.
- b) $X_2(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$, RC: planul $z - \{z = 0; z = \infty\}$.
- c) $X_3(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$, RC: planul $z - \{z = 0\}$.
- d) $X_4(z) = 1$, RC: planul z .
- e) $X_5(z) = z^{-k}$, RC: planul $z - \{z = 0\}$.
- f) $X_6(z) = z^k$, RC: planul $z - \{z = \infty\}$.

Din exemplul precedent se observă că RC a semnalelor de durată finită este întreg planul z , exceptând eventual punctele $z = 0$ și/sau $z = \infty$, unde unii termeni ai seriei devin nemărginiti. Din definiția transformatei Z, se observă că transformata Z a părții cauzale a unei secvențe conține numai puteri negative ale variabilei z , iar partea pur necauzală, numai puteri pozitive. Pentru secvențe de durată finită $x[n] = \{x_{N_1}, x_{N_1+1}, \dots, x_{N_2}\}$, cu N_1, N_2 numere întregi, se consideră că $x[n] = 0$, pentru $n \notin [N_1, N_2]$.

În unele cazuri, sumele finite sau infinite ale unei serii de puteri pot fi exprimate mai compact, dacă seria converge într-o regiune.

Exemplul 3.2.

Transformata Z a semnalului $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ este

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

care este o serie geometrică infinită, convergentă pentru $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1$, și,

$$\text{deci, } X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \text{ pentru } |z| > \frac{1}{2}, \text{ adică RC: } |z| > \frac{1}{2}.$$

Dacă în relația (3.1) variabila complexă se exprimă sub formă polară $z = re^{j\theta}$, unde $r = |z|$ și $\theta = \angle z$, atunci $X(z)$ poate fi scris sub forma

$$X(z)|_{z=re^{j\theta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n} \quad (3.4)$$

În regiunea de convergență a lui $X(z)$, $|X(z)| < \infty$.

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\theta n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\theta n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| \quad (3.5)$$

Prin urmare, $|X(z)|$ este finit dacă $x[n]r^{-n}$ este absolut sumabil. Problema găsirii RC pentru $X(z)$ este echivalentă cu determinarea domeniului de valori pentru r , pentru care $x[n]r^{-n}$ este absolut sumabil. Pentru aceasta, se exprimă (3.5) sub forma

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} |x[n]r^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |x[-n]r^n| + \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x[n]}{r^n} \right| \quad (3.6)$$

Dacă $|X(z)|$ converge într-o regiune a planului complex, ambele sume din (3.6) trebuie să fie finite în acea regiune. Dacă prima sumă, care corespunde părții necauzale a lui $x[n]$, converge, trebuie să existe valori suficient de mici pentru r , astfel încât produsele $x[-n]r^n$ să fie absolut sumabile pentru $n \geq 1$. Așadar, pentru prima sumă, RC este formată din punctele dintr-un cerc de rază $r_1 < \infty$ ca în figura 3.1a. Dacă a doua sumă, care corespunde părții cauzale a lui $x[n]$, converge, trebuie să existe valori pentru r suficient de mari, astfel încât $\frac{x[n]}{r^n}$, $0 \leq n < \infty$, să fie

absolut sumabil. Regiunea de convergență pentru a doua sumă constă din punctele din afara unui cerc de rază $r > r_2$, ca în figura 3.1b. Deoarece convergența lui $X(z)$ implică ambele sume din (3.6) finite, RC pentru $X(z)$ este regiunea inclusă din planul z , $r_2 < r < r_1$, figurată în figura 1c.

Dacă $r_2 > r_1$, nu există regiune de convergență comună pentru cele două sume și, deci, $X(z)$ nu există.

Conceptul de regiune de convergență în legătură cu transformata Z este ilustrat pe următoarele două exemple.

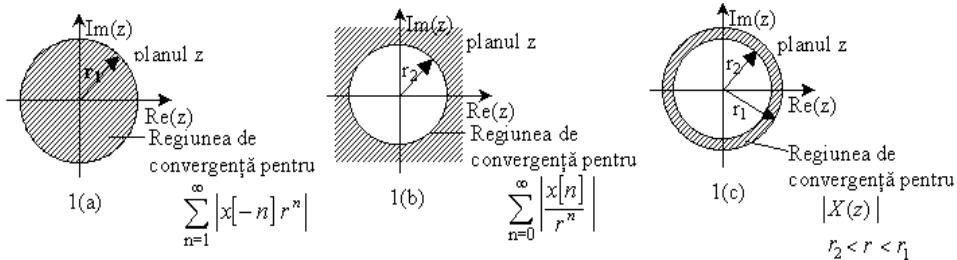


Figura 3.1. Regiunea de convergență pentru a) partea pur necauzală a lui $X(z)$, b) partea cauzală a lui $X(z)$ și c) $X(z)$

Exemplul 3.3.

Să se determine transformata Z a semnalului

$$x[n] = \alpha^n u[n] = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Soluție. Aplicând definiția (3.1), se obține

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

Dacă $|\alpha z^{-1}| < 1$ sau, echivalent, $|z| > |\alpha|$, seria $X(z)$ converge la $\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad RC \quad |z| > |\alpha| \quad (3.8)$$

Dacă în (3.8) se impune $\alpha = 1$, se obține transformata Z a treptei unitate

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad RC : \quad |z| > 1 \quad (3.9)$$

Exemplul 3.4.

Să se determine transformata Z a semnalului

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -\alpha^n & n \leq -1 \end{cases} \quad (3.10)$$

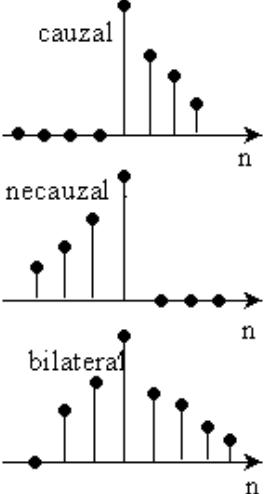
Soluție. Aplicând definiția (3.1), se obține

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha^{-1} \cdot z)^m, \text{ unde } m = -n.$$

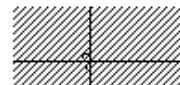
Dacă $|\alpha^{-1} z| < 1$, sau, echivalent, $|z| < \alpha$, $X(z) = -\frac{\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$

$$x[n] = -\alpha^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad RC : |z| < |\alpha| \quad (3.11)$$

Semnal de durată finită



Regiunea de convergență (RC)



planul z -($z=0$)

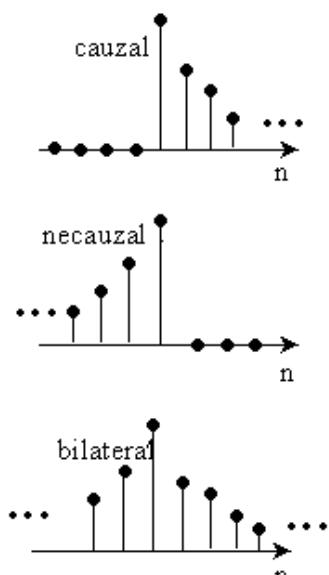


planul z -($z=\infty$)

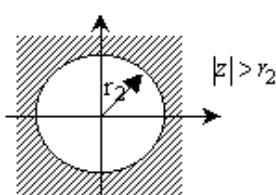


planul z -($z=0$ și $z=\infty$)

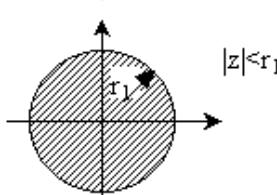
Semnale de durată infinită



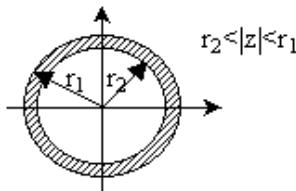
Regiunea de convergență (RC)



$|z| > r_2$



$|z| < r_1$



$r_2 < |z| < r_1$

Figura 3.2. Regiuni de convergență pentru diverse tipuri de semnale

Din comparația exemplelor 3 și 4 se desprind următoarele observații:

1. Două semnale diferite, unul cauzal, dat de (3.7), și celălalt necauzal, dat de (3.10), au aceeași transformată Z, adică

$$Z\{\alpha^n u[n]\} = Z\{-\alpha^n u[-n-1]\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

și, prin urmare, cunoașterea transformatei Z a unui semnal fără precizarea RC nu determină în mod unic semnalul respectiv. Această ambiguitate se elimină prin specificarea regiunii de convergență. În continuare, termenul de transformată Z va fi folosit pentru a face referire atât la expresia analitică a transformatei Z cât și la regiunea ei de convergență;

2. Exemplul 3 ilustrează faptul că RC a unui semnal cauzal este exteriorul unui cerc de rază $r_2=\alpha$, iar exemplul 4 ilustrează că RC a unui semnal necauzal este interiorul unui cerc de rază $r_1=\alpha$. Pentru un semnal bilateral (care are o parte cauzală și una pur necauzală) RC, dacă există, va fi un inel circular, ca în fig.1c.

Din cele prezentate până acum s-a observat că RC a unui semnal depinde atât de durata sa (finită sau infinită) cât și de faptul dacă este sau nu cauzal, dependență arătată în figura 3.2.

Transformata Z dată de relația (3.1) mai este cunoscută ca transformata Z bilaterală, pentru a o deosebi de transformata Z unilaterală definită de relația

$$X^+(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (3.12)$$

În continuare se va folosi expresia de *transformată Z* în desemnarea transformatei bilaterale date de (3.1). Evident, dacă semnalul $x[n]$ este cauzal, transformata Z bilaterală și cea unilaterală sunt identice.

3.1.2. Transformata Z inversă

În multe cazuri se dispune de transformata Z a unui semnal și trebuie determinat semnalul $x[n]$, lucru care se realizează cu ajutorul *transformatei Z inverse*. O formulă de obținere a lui $x[n]$ din $X(z)$ se bazează pe teorema integrală a lui Cauchy [23].

Se presupune transformata Z de forma

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k} \quad (3.13)$$

Multiplicând ambii membri ai relației (3.13) cu z^{n-1} și apoi integrând pe un contur închis din RC a lui X(z) care conține originea, se obține

$$\oint_c X(z)z^{n-1} dz = \oint_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{n-1-k} dz \quad (3.14)$$

unde c – reprezintă un contur închis din RC ce conține originea, parcurs în sens anterior. Deoarece seria converge pe acest contur, se poate schimba ordinea integrării și sumării din membrul drept al relației (3.14), obținându-se

$$\oint_c X(z)z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \oint_c z^{n-1-k} dz \quad (3.15)$$

Conform teoremei integrale a lui Cauchy, se poate scrie

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{n-k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (3.16)$$

Aplicând (3.16) în (3.15), membrul drept se reduce la $2\pi j x[n]$ și formula de inversiune este

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz \quad (3.17)$$

Deși relația de inversiune (3.17) permite obținerea originalului din transformata Z, ea nu se folosește direct în evaluarea transformatei Z inverse atunci când se operează cu semnale care au transformate Z rationale (raport de polinoame), deoarece pentru acestea s-au dezvoltat metode mai simple de inversiune.

Transformata Z inversă a lui X(z) se notează cu Z^{-1} , adică $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$.

3.2. Proprietățile transformatei Z

Transformata Z reprezintă un instrument foarte puternic în studiul semnalelor și sistemelor discrete, însușire ce este o consecință a proprietăților pe care le posedă. Când într-o expresie intervin mai multe transformate Z, va rezulta o transformată a cărei regiune de convergență este cel puțin intersecția regiunilor de convergență a transformatelor individuale.

1. Liniaritatea

Dacă $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z) \quad z \in RC1$
 $x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z) \quad z \in RC2$

atunci

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xrightarrow{Z} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \quad (3.18)$$

cu RC - cel puțin intersecția dintre RC1 și RC2.

Această proprietate se demonstrează simplu, aplicând definiția (3.1)

2. Translația sau deplasarea în timp

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$

atunci

$$x[n-k] \xrightarrow{Z} z^{-k} X(z) \quad (3.19)$$

Demonstrația rezultă imediat din aplicarea definiției (3.1).

$$Z\{x[n-k]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} \cdot z^{-k} = z^{-k} \cdot X(z),$$

unde $m=n-k$. RC pentru $z^{-k} \cdot X(z)$ este aceeași cu RC pentru $X(z)$, exceptând $z=0$ pentru $k>0$ și $z=\infty$ pentru $k<0$.

3. Modularea în timp

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$, $RC : r_1 < |z| < r_2$

atunci

$$e^{j\omega_0 n} \cdot x[n] \xrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} \cdot z) \quad RC : r_1 < |z| < r_2 \quad (3.20)$$

Demonstrație

$$Z\{e^{j\omega_0 n} \cdot x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} \cdot x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(e^{-j\omega_0} \cdot z \right)^{-n} = X\left(e^{-j\omega_0} \cdot z \right)$$

$$RC : r_1 < |z| < r_2$$

Regiunea de convergență a transformatei semnalului modulat este aceeași cu a semnalului inițial, deoarece multiplicarea cu $e^{-j\omega_0}$ a variabilei z nu modifică modulul variabilei complexe, ci numai unghiul său.

Se poate stabili o relație mai generală, modulând cu z_0^n , $|z_0| \neq 1$.

$$Z\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_0^n x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0} \right); \quad RC : r_1 < \left| \frac{z}{z_0} \right| < r_2$$

Dacă z_0 este real, adică $z_0=a$, se obține scalarea în domeniul z, adică

$$Z\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(a^{-1} z \right)^{-n} = X(a^{-1} z)$$

Deoarece RC pentru $X(z)$ este $r_1 < |z| < r_2$, RC pentru $X(a^{-1}z)$ este

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2 \text{ sau } |a|r_1 < |z| < |a|r_2.$$

4. Reflectarea semnalului

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$ RC: $r_1 < |z| < r_2$

atunci

$$x[-n] \xleftarrow{Z} X(z^{-1}) \quad RC: \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \quad (3.21)$$

Demonstrație

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

unde $m = -n$.

RC a lui $X(z^{-1})$ este $r_1 < |z^{-1}| < r_2$ sau, echivalent, $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

Se observă că dacă z_0 aparține RC a lui $x[n]$, $1/z_0$ aparține RC pentru $x[-n]$.

5. Derivarea transformatei Z

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad z \in RC$

atunci

$$nx[n] \xleftarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad z \in RC \quad (3.22)$$

Demonstrație

Prin derivarea ambilor membri ai relației (3.1) rezultă

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n][n]z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [n x[n]]z^{-n} = -z^{-1} Z\{n x[n]\}.$$

Ambele transformate au aceeași regiune de convergență.

6. Transformarea diferenței

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad z \in RC$

atunci

$$x[n] - x[n-1] \xleftarrow{Z} (1 - z^{-1})X(z), \quad z \in RC - \{z = 0\} \quad (3.23)$$

Demonstrația se obține aplicând proprietatea 2 de translare în timp.

7. Însumarea în timp

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad z \in RC$
atunci

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{Z} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}, \quad z \in RC - \{z = 1\} \quad (2.24)$$

Demonstrație

Semnalul sumă $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ satisfacă relația $x[n] = y[n] - y[n-1]$, a cărei transformată Z este $X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$. În consecință,
 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \xrightarrow{Z} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$.

8. Transformarea semnalului complex conjugat

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z} X(z) \quad z \in RC$ unde $x[n]$ este o secvență complexă,
atunci

$$x^*[n] \xrightarrow{Z} X^*(z^*)$$

Demonstrație

$$Z\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*), \quad z \in RC$$

9. Teorema convoluçãoiei

Dacă $x_1[n] \xrightarrow{Z} X_1(z) \quad RC_1$
 $x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z) \quad RC_2$
atunci

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \xrightarrow{Z} X(z) = X_1(z)X_2(z) \quad (3.25)$$

cu RC intersecția RC_1 cu RC_2 .

Demonstrație

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right] \cdot z^{-n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m] z^{-m} \cdot z^{-k} = \\
&= X_2(z) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] z^{-k} = X_2(z) \cdot X_1(z)
\end{aligned}$$

Convoluția este una dintre cele mai importante proprietăți ale transformatei Z deoarece transformă convoluția a două semnale din domeniul timp într-o multiplicare a transformatelor Z.

Uneori, pentru calculul convoluției a două semnale se recurge la folosirea transformatei Z, după cum urmează:

1 - se calculează transformatele Z ale semnalelor implicate în convoluție

$$\begin{aligned}
X_1(z) &= Z\{x_1[n]\} && \text{domeniu timp} \rightarrow \text{domeniu z.} \\
X_2(z) &= Z\{x_2[n]\}
\end{aligned}$$

2 - se multiplică cele două transformate

$$X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) \quad \text{în domeniu z.}$$

3 - se efectuează transformarea inversă

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} \quad \text{domeniu z} \rightarrow \text{domeniu timp.}$$

În multe cazuri această procedură implică un efort de calcul mai mic decât calculul direct al sumei de convoluție.

10. Teorema corelației

Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$, $z \in RC1$ $x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z)$, $z \in RC2$

$$\text{atunci } r_{x_1 x_2}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n-l] \xleftrightarrow{Z} R_{x_1 x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1}) \quad (3.26)$$

RC: intersecția RC pentru $X_1(z)$ cu RC pentru $X_2(z^{-1})$

Demonstrație

Se reamintește că $r_{x_1 x_2}[l] = x_1[l] * x_2[-l]$

Folosind proprietățile de convoluție și de reflectare în timp, se obține

$$R_{x_1 x_2}(z) = Z\{x_1[l]\} \cdot Z\{x_2[-l]\} = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1}).$$

Ca și în cazul convoluției, corelația a două semnale poate fi calculată mai ușor cu relația (3.26), urmată de transformarea inversă a rezultatului.

11. Teorema produsului semnalelor în domeniul timp

Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z)$, $r_{1l} < |z| < r_{1u}$

și $x_2[n] \xrightarrow{Z} X_2(z)$, $r_{2l} < |z| < r_{2u}$

atunci

$$x_3[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \xrightarrow{Z} X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \quad (3.27)$$

unde c este un contur închis care include originea plasat în regiunea comună de convergență a lui $X_1(v)$ și $X_2(1/v)$.

Demonstrație

$$X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \cdot x_2[n] z^{-n}$$

Se înlocuiește $x_1[n]$ cu transformata inversă a lui $X_1(z)$, conform relației (3.17)

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) v^{n-1} dv,$$

apoi se schimbă ordinea sumei cu integrala

$$X_3(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right] v^{-1} dv = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$$

Pentru a găsi RC pentru $X_3(z)$, se observă că dacă $X_1(v)$ converge pentru $r_{1l} < |v| < r_{1u}$ și $X_2(z)$ pentru $r_{2l} < |z| < r_{2u}$, atunci RC pentru $X_2\left(\frac{z}{v}\right)$ este

$r_{2l} < \left| \frac{z}{v} \right| < r_{2u}$. RC pentru $X_3(z)$ este cel puțin

$$r_{1l} r_{2l} < |z| < r_{1u} r_{2u}$$

Dacă $x_2[n] = x_1^*[n]$, se obține

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) X^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right) \frac{dv}{v}$$

Pentru $z=1$, rezultă expresia teoremei lui Parseval în domeniul z.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) X^*\left(\frac{1}{v^*}\right) \frac{dv}{v}, \text{ unde c este un contur în RC.}$$

12. Teorema valorii inițiale

Dacă $x[n]$ este un semnal discret cauzal ($x[n]=0$ pentru $n<0$), atunci

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3.28)$$

Demonstrație

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

Evident, pentru $z \rightarrow \infty$, $z^{-n} \rightarrow 0$, pentru $n \geq 1$, și (3.28) rezultă imediat.

În Tabelul 3.1 sunt date câteva perechi semnal – transformată Z , uzuale, frecvent utilizate în practică.

Tabel 3.1

	Semnal $x[n]$	Transformată Z $X(z)$	RC
1.	$\delta[n]$	1	întreg planul z
2.	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3.	$n \cdot u[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
4.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
5.	$n \cdot a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
6.	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7.	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
8.	$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)} a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^k}$	$ z > a $
9.	$(\cos \omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10.	$(\sin \omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
11.	$(a^n \cos \omega_0 n) u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $

12.	$(a^n \sin \omega_0 n) u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2az^{-1} \cos \omega_0 + a^2 z^{-2}}$	$ z > a $
-----	------------------------------	---	-------------

Exemplul 3.5.

Să se determine transformata Z a semnalelor

- a) $x_1[n] = n$,
- b) $x_2[n] = n^2$,
- c) $x_3[n] = n^3$.

Soluție

a) Fie $x[n] = u[n]$. $X(z) = \frac{z}{z-1}$.

Conform relației (3.22),

$$n \xleftarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}.$$

b) Conform punctului a), $Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$. Aplicând (3.22) acestei relații, rezultă

$$Z\{n^2\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

c) Aplicând (3.22) relației precedente, se obține

$$Z\{n^3\} = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^{-1}(1+4z^{-2}+z^{-3})}{(1-z^{-1})^4}$$

3. 3. Transformate Z exprimate prin funcții raționale

3.3.1. Poli și zerouri

O familie importantă de transformate Z este aceea pentru care $X(z)$ este o funcție rațională, adică un raport de două polinoame în z^{-1} sau z .

Zerourile unei transformate Z, $X(z)$, sunt valorile lui z pentru care $X(z)=0$. Polii transformatei Z sunt valorile lui z pentru care $X(z)=\infty$.

Dacă $X(z)$ este o funcție rațională, atunci

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (3.29)$$

Dacă $a_0 \neq 0$ și $b_0 \neq 0$, (3.29) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \cdot \frac{z^M + (b_1 / b_0) z^{M-1} + \dots + (b_M / b_0)}{z^N + (a_1 / a_0) z^{N-1} + \dots + (a_N / a_0)} = \\ &= \frac{b_0}{a_0} z^{-M+N} \frac{(z - z_1) \dots (z - z_M)}{(z - p_1) \dots (z - p_N)} = G \cdot z^{N-M} \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

unde $G = \frac{b_0}{a_0}$.

Transformata $X(z)$ are M zerouri finite la $z=z_1, z_2 \dots z_M$, (rădăcinile polinomului de la numărător), N poli finiți la $z=p_1, p_2 \dots p_N$ (rădăcinile numitorului) și $|N - M|$ zerouri (dacă $N > M$) sau poli (dacă $N < M$) în origine. Poli și zerouri pot apărea și la infinit. Un zerou este la infinit, dacă $X(\infty)=0$ și un pol este la infinit, dacă $X(\infty)=\infty$. Numărul de poli și zerouri de la zero și infinit este același, deoarece un pol în zero echivalează cu un zerou la infinit și un zerou în zero echivalează cu un pol la infinit. Polii și zerourile de la 0 și/sau ∞ se numesc *banali* sau *triviali*. Zerourile și polii finiți determinați de coeficienții b_k și a_k se mai numesc *nebanali* sau *netriviali*.

Se face convenția ca în planul complex un pol să fie reprezentat prin "x" iar un zero prin "o". Ordinul de multiplicitate al polilor sau zerourilor se indică printr-un număr plasat în apropierea semnului "x" sau "o". Evident, RC a unei transformate Z nu poate conține poli. Dacă pentru o transformată Z se cunosc polii și zerourile, atunci, conform (3.30), se poate determina transformata Z până la un factor de câștig G și apoi, eventual, semnalul original.

3.3.2. Descompunerea transformatorilor Z raționale

În continuare se vor aborda câteva aspecte referitoare la descompunerea în fracții simple a transformatorilor Z raționale, care se vor

dovedi foarte utile în implementarea sistemelor discrete de ordin superior.

Fie o transformată Z , exprimată sub forma dată de relația (3.29). O funcție rațională de forma (3.29) se numește *proprie*, dacă $a_N \neq 0$ și $M < N$. Conform relației (3.30), aceasta înseamnă că numărul zerourilor finite este mai mic decât al polilor finiți. În caz contrar funcția se numește *improperie*.

O funcție rațională improprie ($M \geq N$) poate fi întotdeauna scrisă ca suma dintre o funcție polinomială și una rațională proprie, adică

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{N-M} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)} \quad (3.31)$$

sau, altfel scris

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + X_{pr}(z) \quad (3.31')$$

Dacă polii lui $X_{pr}(z)$ sunt distincți, atunci

$$X_{pr}(z) = \frac{A_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{A_N}{1-p_N z^{-1}} \quad (3.32)$$

În cazul în care coeficienții a_k și b_k sunt reali, polii complecși apar în perechi conjugate și se grupează după cum urmează:

$$\frac{A}{1-pz^{-1}} + \frac{A^*}{1-p^*z^{-1}} = \frac{A - Ap^*z^{-1} + A^* - A^*pz^{-1}}{1-pz^{-1} - p^*z^{-1} + pp^*z^{-2}} = \frac{b_{c0} + b_{c1}z^{-1}}{1+a_{c1}z^{-1}+a_{c2}z^{-2}} \quad (3.33)$$

unde

$$\begin{aligned} b_{c0} &= 2\operatorname{Re}(A) & a_{c1} &= -2\operatorname{Re}(p) \\ b_{c1} &= -2\operatorname{Re}(Ap^*) & a_{c2} &= |p|^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Combinând (3.31), (3.32) și (3.33), $X(z)$ devine

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{k_1} \frac{b_{rk}}{1+a_{rk}z^{-1}} + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{b_{c0k} + b_{c1k}z^{-1}}{1+a_{c1k}z^{-1}+a_{c2k}z^{-2}} \quad (3.35)$$

unde $k_1 + 2k_2 = N$, indicele "c" face referire la poli complecși, iar "r" la poli reali.

Evident, pentru $M=N$, primul termen este o constantă, iar pentru $M < N$, acesta dispare.

O formă alternativă pentru exprimarea lui $X(z)$ se obține plecând de la expresia (3.30) care, pentru $a_0=1$ poate fi scrisă echivalent

$$X(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (3.36)$$

Dacă $a_0 \neq 1$, se poate obține (3.36) din (3.30) prin împărțirea numărătorului și numitorului la a_0 . În această expresie polii complex conjugați și zerourile complex conjugate se combină pentru a forma expresiei cu coeficienții reali, de forma

$$\frac{(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \frac{1 + b_{c1k} z^{-1} + b_{c2k} z^{-2}}{1 + a_{c1k} z^{-1} + a_{c2k} z^{-2}} \quad (3.37)$$

unde

$$\begin{aligned} b_{c1k} &= -2 \operatorname{Re}(z_k) & a_{c1k} &= -2 \operatorname{Re}(p_k) \\ b_{c2k} &= |z_k|^2 & a_{c2k} &= |p_k|^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Presupunând $M=N$, se obține

$$X(z) = b_0 \prod_{k=1}^{k_1} \frac{1 + b_{rk} z^{-1}}{1 + a_{rk} z^{-1}} \prod_{k=1}^{k_2} \frac{1 + b_{c1k} z^{-1} + b_{c2k} z^{-2}}{1 + a_{c1k} z^{-1} + a_{c2k} z^{-2}} \quad (3.39)$$

unde $N=k_1+2k_2$

3.3.3. Localizarea polilor și comportarea în domeniul timp a semnalelor cauzale

În continuare se va considera relația dintre poziția polilor și forma semnalului corespunzător din domeniul timp pe baza perechilor semnal – transformată Z din tabelul 3.1. Se va opera cu semnale reale, cauzale ale căror caracteristici depind de poziționarea polilor transformatei Z în regiunea $|z|<1$ sau $|z|>1$. Deoarece cercul $|z|=1$ are raza egală cu 1, el se numește *cercul unitate*.

Dacă un semnal real are o transformată Z cu un pol, acesta trebuie să fie real. Singurul semnal de acest fel este semnalul real exponential.

$$x[n] = a^n u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad RC \quad |z| > |a| \quad (3.40)$$

care are un zero la $z_1=0$ și un pol la $p_1=a$ pe axa reală.

În figura 3.3 este prezentată comportarea semnalului în funcție de poziția polului față de cercul unitate. Semnalul este exponential descrescător dacă polul este în interiorul cercului unitate; constant, dacă

polul este pe cercul unitate și exponențial crescător când acesta este în afara cercului unitate. În plus, un pol negativ are ca rezultat un semnal cu semnul alternant.

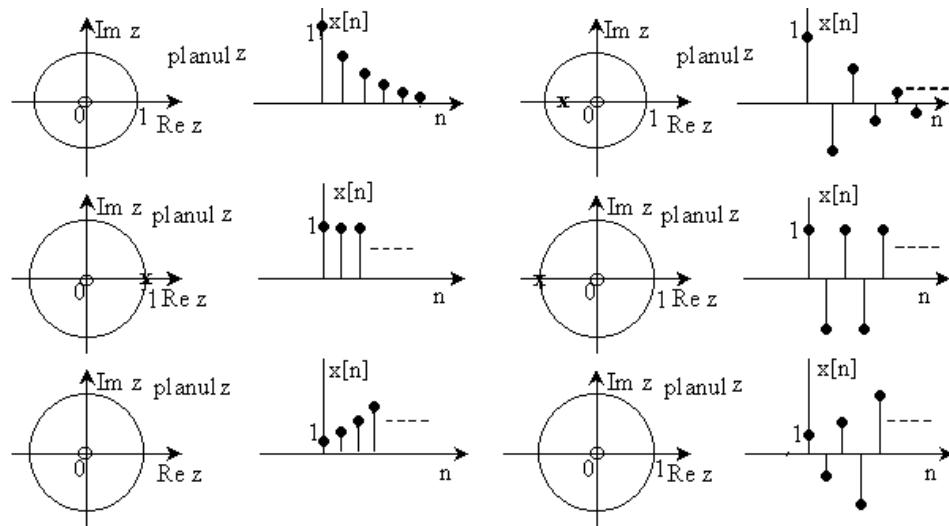


Figura 3.3. Comportarea în domeniul timp a unui semnal cauzal a cărui transformată Z are un singur pol real

Un semnal real a cărui transformată Z are un pol real dublu este de forma

$$x[n] = n a^n u[n] \quad (3.41)$$

și comportarea sa este ilustrată în figura 3.4.

Se observă că un pol dublu pe cercul unitate are ca rezultat un semnal nelimitat.

În figura 3.5 este prezentat cazul unui semnal cauzal a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugăți (p și p^* , $|p|=|p^*|=r$). Conform tabelului 3.1, aceștia au ca rezultat un semnal sinusoidal cu o înfășurătoare exponentială.

Distanța r de la pol la origine determină anvelopa sinusoidei, iar unghiul pe care îl face polul cu axa reală determină frecvența sinusoidei. Se observă că amplitudinea semnalului este descrescătoare pentru $r < 1$, constantă pentru $r = 1$ și crescătoare pentru $r > 1$.

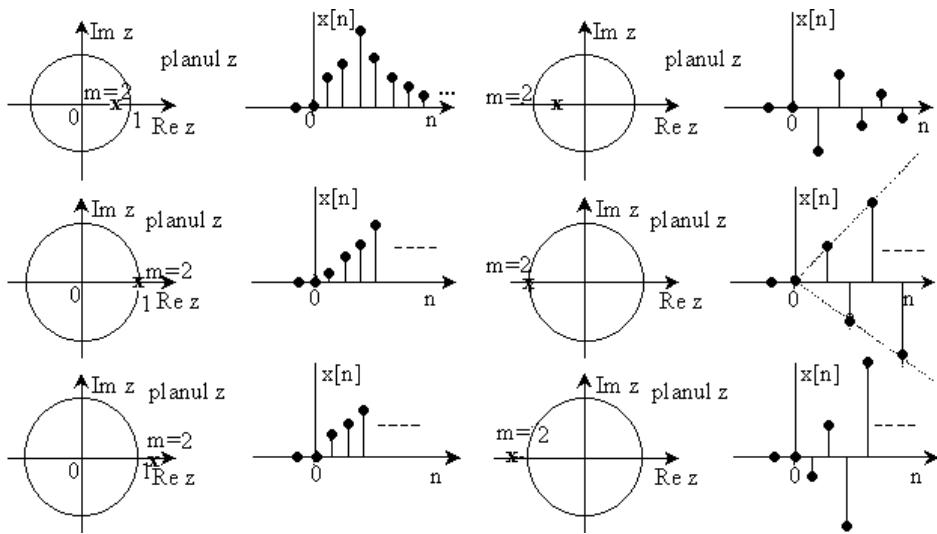


Figura 3.4. Comportarea în domeniul timp a unui semnal real cauzal a cărui transformată Z are un pol real dublu

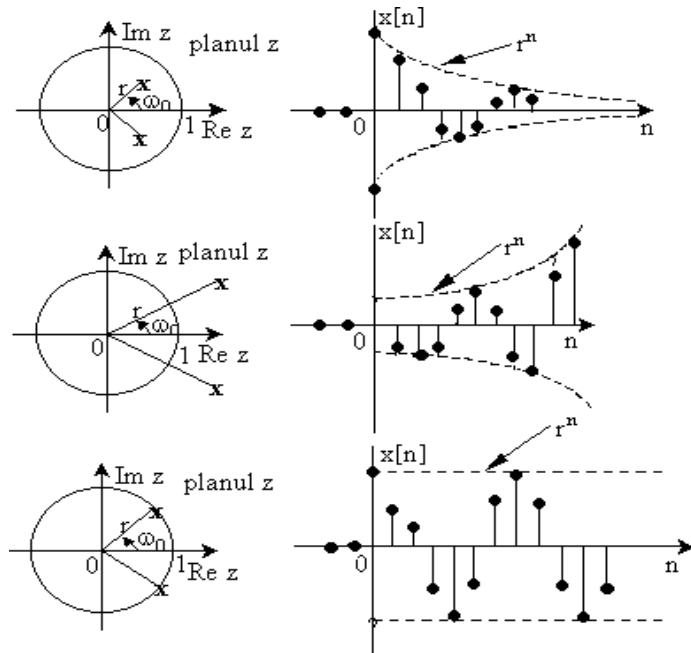


Figura 3.5. Comportarea oscilatorie în domeniul timp a unui semnal real cauzal a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugăți

Spre deosebire de cazul polului real dublu plasat pe cercul unitate, o pereche de poli complex conjugăți plasați pe cercul unitate au ca rezultat un semnal real limitat. În figura 3.6 se prezintă alura unui semnal cauzal real a cărui transformată Z are o pereche de poli complex conjugăți cu ordin de multiplicitate $m=2$ pe cercul unitate.

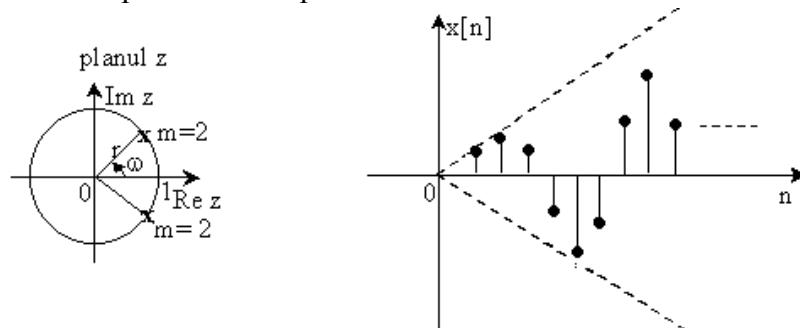


Figura 3.6. Semnal real cauzal a cărui transformată Z are o pereche dublă de poli complex conjugăți pe cercul unitate.

În concluzie, semnalele reale cauzale ale căror transformate Z au poli reali simpli sau perechi simple de poli complex conjugăți în interiorul sau pe cercul unitate sunt întotdeauna mărginite în amplitudine. Mai mult, semnalul cu un pol (sau o pereche de poli complex conjugăți) plasați în apropierea originii descrește mult mai rapid decât cel pentru care aceștia sunt plasați în apropierea cercului unitate (dar, evident, în interiorul lui).

3.3.4. Funcția de transfer (sau de sistem) a unui sistem discret, liniar invariant în timp

În capitolul precedent s-a arătat că răspunsul unui sistem discret, liniar, invariant în timp la un semnal de intrare $x[n]$ se poate obține efectuând convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului. Transformata Z a produsului de convoluție, prezentată în paragraful 3.2, permite scrierea

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (3.42)$$

unde $Y(z)$ este transformata Z a secvenței de ieșire,
 $X(z)$ este transformata Z a secvenței de intrare,
 $H(z)$ este transformata Z a răspunsului la impuls $h[n]$.

Din (3.42) rezultă

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.43)$$

Mărimea $H(z)$, care este transformata Z a răspunsului la impuls, caracterizează sistemul în domeniul z și se numește *funcție de transfer sau funcție (de) sistem*.

Relația (3.43) este utilă pentru aflarea funcției de transfer pentru sisteme descrise de o ecuație cu diferențe, de forma (2.114). Aplicând transformata Z acestei relații se obține

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k Y(z)z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z)z^{-k} \quad (3.44)$$

$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (3.44')$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.44'')$$

sau, echivalent

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.45)$$

Prin urmare, un SDLIT descris de o ecuație cu diferențe are o funcție de transfer rațională. Relația (3.45) este forma generală a funcției de transfer pentru un SDLIT, din care derivă două forme particulare.

Dacă $a_k=0$ pentru $1 \leq k \leq N$, (3.45) devine

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k} \quad (3.46)$$

În acest caz $H(z)$ conține M zerouri ale căror valori sunt determinate de coeficienții sistemului $\{b_k\}$ și un pol banal de ordin de multiplicitate M în origine. Deoarece sistemul conține numai poli banali (în $z=0$) și M zerouri nebanale, el se numește *numai cu zerouri* (all-zero system). Un astfel de sistem este cu răspuns finit la impuls (FIR).

Pe de altă parte, dacă $b_k=0$ pentru $1 \leq k \leq M$, (3.45) devine

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}, \quad a_0 \equiv 1 \quad (3.47)$$

În acest caz $H(z)$ are N poli a căror valoare este determinată de coeficienții $\{a_k\}$ și un zerou banal de ordin de multiplicitate N în origine.

În general, nu se face referire la zerourile banale și, în consecință, sistemul conține numai poli nebanali, acesta numindu-se sistem *numai cu poli* (all-pole system).

Forma generală (3.45) a funcției de transfer a unui SDLIT conține atât zerouri, cât și poli, și sistemul se numește *sistem poli-zerouri*, cu N poli și M zerouri. Polii și/sau zerourile de la $z=0$ și $z=\infty$ sunt implicați și nu se consideră.

3.4. Transformata Z inversă pentru funcții sistem rationale

În (3.1.2) s-a stabilit relația de inversiune a transformatei Z ca fiind

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (3.48)$$

unde integrala se evaluează pe un contur închis c , care cuprinde originea și se găsește în regiunea de convergență a lui $X(z)$.

În practică, evaluarea transformatei Z inverse se realizează prin următoarele trei metode:

1. Evaluarea directă a relației (3.48) folosind teorema reziduurilor;
2. Dezvoltarea în serie de puteri de variabilă z sau z^{-1} ;
3. Descompunerea în fracții simple și folosirea tabelelor.

3.4.1. Evaluarea directă

Evaluarea directă a integralei pe contur (3.48) se poate efectua cu ajutorul teoremei reziduurilor a lui Cauchy care afirmă că dacă $f(z)$ este o funcție de variabilă complexă, c un contur închis în domeniul z și $f(z)$ nu are poli în $z=z_0$, atunci

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0) & \text{dacă } z_0 \text{ este în interiorul conturului } c \\ 0 & \text{dacă } z_0 \text{ este în afara conturului } c \end{cases} \quad (3.49)$$

Mai general, dacă în interiorul conturului c există poli multipli ai integrandului și $f(z)$ nu are poli în $z=z_0$, atunci

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} dz = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} f(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z=z_0} & \text{dacă } z_0 \text{ este în} \\ & \text{interiorul conturului } c \\ 0 & \text{dacă } z_0 \text{ este în afara} \\ & \text{conturului } c \end{cases} \quad (3.50)$$

Valoarea membrului drept din relațiile (3.49) și (3.50) se numește *reziduul polului la $z=z_0$* .

Dacă se presupune că integrandul relației (3.48) este de forma

$$P(z) = \frac{f(z)}{g(z)}, \quad (3.51)$$

unde $f(z)$ nu are poli în interiorul conturului c în punctele z_1, z_2, \dots, z_n și $g(z)$ este un polinom cu rădăcini distințe simple z_1, z_2, \dots, z_n în interiorul conturului c , atunci

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{f(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i(z)}{z - z_i} \right) dz = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{A_i(z)}{z - z_i} dz = \sum_{i=1}^n A_i(z_i) \quad (3.52)$$

unde

$$A_i(z_i) = (z - z_i) \cdot P(z) \Big|_{z=z_i} = (z - z_i) \frac{f(z)}{g(z)} \Big|_{z=z_i} \quad (3.53)$$

Valorile $A_i(z_i)$ sunt reziduurile polilor corespunzători la $z = z_i$, $i = 1, 2, \dots$. Cu alte cuvinte, valoarea integralei pe contur este egală cu suma reziduurilor tuturor polilor din interiorul conturului c .

Relația (3.52) s-a obținut prin descompunerea în fracții simple a integrandului și aplicarea relației (3.49). Dacă $g(z)$ are rădăcini multiple în interiorul conturului c , se folosește relația (3.50) pentru evaluarea reziduurilor.

Cu ajutorul teoremei reziduurilor, $x[n]$ din (3.48) se calculează ca fiind

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_{\text{toti polii din } c} \text{reziduurile lui } X(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_i} = \\ &= \sum_i (z - z_i) \cdot X(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z=z_i} \end{aligned} \quad (3.54)$$

pentru cazul în care $\{z_i\}$ sunt poli simpli sau cu relația

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_{\text{toti polii din } c} \text{reziduurile lui } X(z) z^{n-1} \quad (3.54')$$

în cazul în care există și poli multipli.

Dacă $X(z) z^{n-1}$ nu are poli în interiorul conturului c pentru una sau mai multe valori ale lui n , atunci $x[n]=0$ pentru aceste valori.

Exemplul 3.5.

Să se determine originalul lui $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$, prin

evaluarea integralei pe contur.

Soluție

$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^n}{z-a} dz$, unde c este un cerc de rază mai mare decât $|a|$.

Integrandul este de forma (3.51), cu $f(z) = z^n$ și $g(z) = z - a$. Există două cazuri:

a) $n \geq 0$, când $f(z)$ are numai zerouri în origine și, conform (3.49), rezultă

$$x[n] = z^n \Big|_{z=a} = a^n.$$

b) $n < 0$, $f(z) = z^n$ are un pol de ordinul n în $z = 0$.

$$\text{Pentru } n = -1, \text{ rezultă } x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{z(z-a)} dz = \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z} \Big|_{z=a} = 0$$

Pentru $n = -2$, rezultă

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{z^2(z-a)} dz = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^2} \Big|_{z=a} = 0$$

În general,

$$\begin{aligned} x[-n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{z^n(z-a)} dz = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^n} \Big|_{z=a} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{(z-a)^n} \Big|_{z=0} + \frac{1}{a^n} = 0. \end{aligned}$$

În concluzie, $x[n] = a^n u[n]$.

Relația (3.48) este valabilă pentru toți n , dar, pentru n negativ, aplicarea ei poate deveni greoare, datorită polului multiplu care apare în

$z=0$. Acest lucru poate fi evitat prin efectuarea schimbării de variabilă $z=p^{-1}$, astfel încât (3.48) devine [17]

$$x[n] = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{c'} X(1/p) p^{-n+1} p^{-2} dp \quad (3.55)$$

Conturul de integrare c' din (3.55) este parcurs în sens orar. Multiplicând cu -1 pentru a inversa sensul de parcurgere a conturului, schimbarea de variabilă anterioară conduce la expresia

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c'} X(1/p) p^{-n-1} dp = \sum_{\text{toti polii din } c'} \text{Reziduurile lui } X(1/p) p^{-n-1} \quad (3.56)$$

Dacă conturul c din (3.48) este un cerc de rază r în planul z , conturul c' din (3.56) este un cerc de rază $1/r$ în planul p . Polii lui $X(z)$ care erau în afara conturului c corespund acum polilor lui $X(1/p)$ care sunt în interiorul conturului c' , și invers. Pentru exemplul 3.5, $x[n]$ poate fi exprimat sub forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c'} \frac{p^{-n-1}}{1-ap} dp \quad (3.57)$$

Conturul de integrare c' este acum un cerc de rază mai mică decât $1/a$. Pentru $n < 0$ nu există singularități în interiorul conturului, astfel încât $x[n] = 0$.

3.4.2. Transformata Z inversă obținută prin descompunere în serie de puteri

Fiind dată o transformată Z , $X(z)$, cu RC precizată, aceasta se poate descompune într-o serie de puteri de forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \quad (3.58)$$

care este convergentă în RC.

Exemplul 3.6.

Să se determine transformata Z inversă pentru

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

dacă

a) RC: $|z| > 1$

b) RC: $|z| < 0,5$

Soluție

a) Conform paragrafului 3.1.1, deoarece RC este exteriorul unui cerc, este de așteptat ca $x[n]$ să fie cauzal și se va căuta o descompunere într-o serie de puteri negative ale lui z .

Prin împărțirea numărătorului la numitor, se obține

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \frac{31}{16}z^{-4} + \dots$$

Comparând această relație cu (3.1), rezultă

$$x[n] = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots \right\}$$

b) În acest caz RC este interiorul unui cerc și, în consecință, semnalul $x[n]$ este pur necauzal. Descompunerea se va face în puteri pozitive ale lui z , prin efectuarea împărțirii

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1+3z-2z^2 \\ \hline / \quad 3z-2z^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ 2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 + \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -3z+9z^2-6z^3 \\ \hline / \quad 7z^2-6z^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -7z^2+21z^3-14z^4 \\ \hline / \quad 15z^3-14z^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -15z^3+45z^4-30z^5 \\ \hline / \quad 31z^4-30z^5 \end{array}$$

În acest caz $x[n]=0$ pentru $n \geq 0$. Comparând rezultatul cu (3.1), se obține

$$x[n] = \left\{ \dots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, 0 \right\}$$

3.4.3. Transformata Z inversă obținută prin descompunerea în fracții simple și folosirea tabelelor

În metoda folosirii tabelelor se urmărește exprimarea funcției $X(z)$ ca o combinație liniară

$$X(z) = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) + \dots + \alpha_k X_k(z) \quad (3.59)$$

unde $X_1(z), X_2(z) \dots X_k(z)$ sunt expresii ale căror transformate inverse $x_1[n], x_2[n] \dots x_k[n]$ se găsesc în tabelul 3.1 al perechilor semnal - transformată Z . Dacă este posibilă o astfel de descompunere, atunci $x[n]$, transformata inversă a lui $X(z)$, se obține folosind proprietatea de liniaritate a transformatei Z , rezultând

$$x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \dots + \alpha_k x_k[n] \quad (3.60)$$

Descompunerea (3.59) este utilă în special dacă $X(z)$ este o funcție rațională, ca în (3.29). Fără a pierde din generalitate, presupunem $a_0=1$, astfel încât (3.29) poate fi scrisă sub forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.61)$$

În cazul în care $M \geq N$, $X(z)$ poate fi întotdeauna scrisă ca suma dintre o funcție polinomială și una rațională proprie, adică

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{N-M} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)} \quad (3.62)$$

Transformata Z inversă a funcției polinomiale se poate determina simplu din definiția transformatei Z , de aceea se va considera numai cazul transformării unei funcții raționale proprii. Pentru a determina transformata Z inversă a unei funcții raționale proprii, întâi se va descompune aceasta în fracții simple, apoi se va inversa fiecare termen.

Fie $X(z)$ o funcție rațională proprie, adică

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.63)$$

unde $a_N \neq 0$ și $M < N$.

Pentru simplificarea calculelor ulterioare se elimină puterile negative ale lui z prin multiplicarea numărătorului și numitorului expresiei (3.63) cu z^N , rezultând

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (3.64)$$

Deoarece $N > M$, funcția

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \dots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (3.65)$$

este, de asemenea, proprie.

Pentru a descompune în fracții simple (3.63) sau (3.65), întâi trebuie factorizat numitorul, în factori care conțin polii p_1, p_2, \dots, p_N ai lui $X(z)$.

Se disting două cazuri:

a) *Poli distincți*

Se presupune că polii p_1, p_2, \dots, p_N sunt distincți și (3.65) se descompune după cum urmează:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (3.66)$$

Coefficienții $A_k, k = \overline{1, N}$ se determină din relația

$$A_k = \left. \frac{(z - p_k) X(z)}{z} \right|_{z=p_k} \quad (3.67)$$

Relațiile (3.66) și (3.67) sunt adevărate atât pentru poli reali cât și complecși, cu condiția să fie distincți. Dacă coeficienții $a_k, k = \overline{1, N}$, sunt reali, în cazul în care numitorul are rădăcini complexe, acestea apar în perechi complex conjugate.

b) *Poli multipli*

Dacă $X(z)$ are un pol de multiplicitate m , atunci numitorul conține factorul $(z - p_k)^m$ și descompunerea în fracții simple va conține termenii

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{mk}}{(z - p_k)^m} \quad (3.68)$$

unde

$$A_{ik} = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left[\frac{(z - p_k)^m \cdot X(z)}{z} \right]_{z=p_k}, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.69)$$

După descompunerea în fracții simple, se inversează fiecare termen.

În cazul polilor distincți, relația (3.66) se scrie

$$X(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \dots + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}} \quad (3.70)$$

Transformata Z inversă, $x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$ se obține prin inversarea fiecarui termen din (3.70) și considerarea combinației liniare corespunzătoare. Din tabelul 3.1 rezultă

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - p_k z^{-1}} \right\} = \begin{cases} (p_k)^n u[n] & \text{dacă } RC : |z| > |p_k|, \text{ semnal cauzal} \\ -p_k^n u[-n-1] & \text{dacă } RC : |z| < |p_k|, \text{ semnal necauzal} \end{cases} \quad (3.71)$$

Dacă $x[n]$ este cauzal, RC este $|z| > p_{\max}$, unde $p_{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \dots, |p_N|\}$.

În acest caz toți termenii din (3.59) au ca rezultat componente de semnal cauzal și semnalul $x[n]$ este

$$x[n] = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \dots + A_N p_N^n) u[n] \quad (3.72)$$

Dacă toți polii sunt distincți, dar unii sunt complecsi, aceștia din urmă vor avea ca rezultat exponentiale complexe. Dacă polinoamele ce reprezintă numărătorul, respectiv numitorul lui $X(z)$ au coeficienți reali și dacă p_k este un pol complex atunci și conjugatul său, p_k^* , este un pol. Coeficienții corespunzători din dezvoltarea în fracții simple sunt, de asemenea, complex conjugăți, iar contribuția acestei perechi de poli complex conjugăți este

$$x_k[n] = [A_k (p_k)^n + A_k^* (p_k^*)^n] u[n]. \quad (3.73)$$

Mărimile A_k și p_k pot fi exprimate în formă polară

$$A_k = |A_k| e^{j\alpha_k} \quad (3.74)$$

$$p_k = |p_k| e^{j\beta_k} \quad (3.75)$$

unde $|A_k|$ și $|p_k|$ reprezintă modulele iar α_k și β_k fazele componentelor A_k și p_k .

Înlocuind (3.74) și (3.75) în (3.73), se obține

$$x_k[n] = |A_k| |p_k|^n (e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}) u[n] \quad (3.76)$$

sau, echivalent

$$x_k[n] = 2|A_k| |p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u[n] \quad (3.77)$$

În concluzie,

$$Z^{-1} \left(\frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \frac{A_k^*}{1 - p_k^* z^{-1}} \right) = 2|A_k| |p_k|^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u[n] \quad (3.78)$$

dacă RC: $|z| > |p_k|$. Fiecare pereche de poli complex conjugăți va determina o componentă reală, armonică, cauzală, cu o anvelopă exponențială (crescătoare pentru $|p_k| > 1$, descrescătoare pentru $|p_k| < 1$ și constantă pentru $|p_k| = 1$). Unghiul dintre raza ce unește originea cu polul și axa reală pozitivă va determina frecvența semnalului sinusoidal. Zerourile sau, echivalent, numărătorul lui $X(z)$ influențează indirect amplitudinea și fază lui $x_k[n]$ prin coeficienții A_k .

În cazul prezenței unui pol dublu, transformata este dată în tabelul 3.1.

$$Z^{-1} \left\{ \frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2} \right\} = np^n u[n], \text{ RC: } |z| > |p| \quad (3.79)$$

În cazul polilor multipli, reali sau complecsi, este necesară inversarea termenilor de forma $\frac{A}{(z - p_k)^m}$.

Pentru găsirea originalului în cazul polilor al căror ordin de multiplicitate este mai mare decât 2 se folosesc proprietățile transformatei Z.

Exemplul 3.7.

Să se determine semnalul cauzal $x[n]$ care are transformata Z

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2} \quad (3.80)$$

Soluție

Se descompune X(z) în fracții simple.

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{A_3}{(z-1)^2} \quad (3.81)$$

$$A_1 = \left. \frac{(z+1)X(z)}{z} \right|_{z=-1} = \frac{1}{4} \quad (3.82)$$

$$A_3 = \left. \frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right|_{z=1} = \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

$$A_2 = \left. \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] \right|_{z=1} = \frac{3}{4} \quad (3.84)$$

$$X(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad (3.85)$$

Se inversează fiecare termen al descompunerii, obținându-se

$$x[n] = \left[\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2} \right] u[n] \quad (3.86)$$

Exemplul 3.8.

Să se determine transformata Z inversă a expresiei

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} \quad (3.87)$$

dacă

- a) RC: $|z| > 1$
- b) RC: $|z| < 0,5$
- c) RC: $0,5 < |z| < 1$

Soluție $X(z) = \frac{1}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} \quad (3.88)$

$p_1=1$

$p_2=0,5$.

- a) În acest caz, dacă $|z| > 1$ semnalul $x[n]$ este cauzal

$$x[n] = 2(1)^n u[n] - (0,5)^n u[n] = (2 - 0,5^n) u[n] \quad (3.89)$$

- b) pentru $|z| < 0,5$, semnalul $x[n]$ este pur necauzal

$$x[n] = [-2 + (0,5)^n] u[-n-1] \quad (3.90)$$

- c) pentru $0,5 < |z| < 1$, RC este un inel circular, ceea ce implică un semnal bilateral, în care un termen corespunde unui semnal cauzal și celălalt unui semnal necauzal. RC dată este suprapunerea regiunilor $|z| > 0,5$ și $|z| < 1$ și, deci, $p_2=0,5$ produce partea cauzală și $p_1=1$ partea necauzală a semnalului.

$$x[n] = -2(1)^n u[-n-1] - (0,5)^n u[n] \quad (3.91)$$

3.5. Transformata Z unilaterală

În transformata Z bilaterală, semnalul era definit pentru întregul domeniu $-\infty < n < \infty$, ceea ce nu făcea posibilă evaluarea ieșirii sistemelor nerelaxate. Se reamintește că acestea erau descrise de ecuații cu diferențe cu condiții initiale nenule. Pentru evaluarea răspunsului sistemelor discrete cu condiții initiale nenule se folosește transformata Z unilaterală, după cum se va vedea în paragraful 3.6.2.

3.5.1. Definiție și proprietăți

Transformata Z unilaterală a unui semnal $x[n]$ este definită de relația

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (3.92)$$

Se folosește, de asemenea, notația $Z^+\{x[n]\}$ și

$$x[n] \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$$

Transformata Z unilaterală diferă de cea bilaterală în limita inferioară a sumei, care este întotdeauna zero, indiferent dacă semnalul este sau nu, cauzal. Datorită acestei proprietăți, transformata Z unilaterală are următoarele caracteristici:

1. Nu conține informații despre semnalul $x[n]$ pentru valori negative ale variabilei independente.
2. Este unică numai pentru semnale cauzale, deoarece numai acestea sunt zero pentru $n < 0$.
3. Transformata Z unilaterală $X^+(z)$ a lui $x[n]$ este identică cu cea bilaterală a semnalului $x[n] u[n]$. Deoarece $x[n] u[n]$ este cauzal, RC a transformatei sale Z și, deci, RC a lui $X^+(z)$ este întotdeauna exteriorul unui cerc. În concluzie, când se folosește transformata Z unilaterală, nu mai este necesar a se specifica RC.

Exemplul 3.9.

Să se determine transformata Z unilaterală a următoarelor semnale:

$$x_1[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\} \xrightarrow{Z^+} X_1^+(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$x_2[n] = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\} \xrightarrow{Z^+} X_2^+(z) = 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

$$x_3[n] = \{0, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\} \xrightarrow{Z^+} X_3^+(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

$$x_4[n] = \delta[n] \xrightarrow{Z^+} X_4^+(z) = 1$$

$$x_5[n] = \delta[n - k] \xrightarrow{Z^+} X_5^+(z) = z^{-k}, k > 0$$

$$x_6[n] = \delta[n + k] \xrightarrow{Z^+} X_6^+(z) = 0, k > 0$$

Principala aplicație a transformatei Z unilaterale vizează analiza sistemelor discrete descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți

constanți cu condiții inițiale nenule. În general, astfel de sisteme au implementare recursivă și se presupun cauzale. În aceste condiții ieșirea se calculează pentru $n \geq 0$, în condițiile inițiale prescrise. În aplicarea transformatei Z unilaterale la probleme de acest tip, proprietățile de liniaritate și deplasare în timp sunt de importanță deosebită. Proprietatea de liniaritate pentru transformata Z unilaterală este identică cu proprietatea de liniaritate pentru transformata Z bilaterală, în schimb, cea de deplasare în timp este diferită.

Proprietatea de deplasare în timp

Caz I - întârziere

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$

atunci

$$x[n-k] \xleftarrow{Z^+} z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x[-n]z^n \right], \quad k > 0, \quad (3.93)$$

și, dacă $x[n]$ este cauzal, atunci

$$x[n-k] \xleftarrow{Z^+} z^{-k} X^+(z) \quad (3.94)$$

Demonstrație

Aplicând definiția (3.92), se obține

$$\begin{aligned} Z^+ \{x[n-k]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{m=-k}^{\infty} x[m]z^{-(m+k)} = \\ &= z^{-k} \left[\sum_{m=-k}^{-1} x[m]z^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} \right] = z^{-k} \left[\sum_{m=-1}^{-k} x[m]z^{-m} + X^+(z) \right], \end{aligned} \quad (3.95)$$

unde $m = n - k$

Dacă în (3.95) se înlocuiește m cu $-n$, rezultă (3.93).

Caz II - anticipare

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$

$$\text{atunci} \quad x[n+k] \xleftarrow{Z^+} z^k \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x[n]z^{-n} \right], \quad k > 0 \quad (3.96)$$

Demonstrație

$$Z^+ \{x[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+k]z^{-n} = \sum_{m=k}^{\infty} x[m]z^{-(m-k)} =$$

$$= z^k \left[\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right] = z^k \left[X^+(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x[m]z^{-m} \right], \quad (3.97)$$

unde $m = n + k$

Dacă în (3.97) se înlocuiește m cu $-n$, rezultă (3.96).

Aplicații ale proprietății de deplasare în timp

Transformarea diferențelor

Diferența de ordinul întâi pentru o secvență se definește prin relația

$$\Delta x[n] = x[n+1] - x[n] \quad (3.98)$$

Similar cu diferența de ordinul întâi, se definește diferența de ordinul al doilea, prin relația

$$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] \quad (3.98')$$

În general,

$$\Delta^k x[n] = \Delta^{k-1} x[n+1] - \Delta^{k-1} x[n] \quad (3.98'')$$

Dacă $X^+(z) = Z^+ \{x[n]\}$ există, atunci există și $Z^+ \{\Delta^k x[n]\}$ și aceasta este

$$Z^+ \{\Delta^k x[n]\} = (z-1)^k X^+(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \Delta^i x[0] \quad (3.99)$$

unde $\Delta^i x[0]$ este diferența de ordinul "i" pentru $n=0$ și $\Delta^0 x[0] = x[0]$.

Aplicând transformata Z unilaterală relației (3.98), se obține

$$\begin{aligned} Z^+ \{\Delta x[n]\} &= Z^+ \{x[n+1]\} - Z^+ \{x[n]\} = \\ &= z(X^+(z) - x[0]) - X^+(z) = (z-1)X^+(z) - zx[0] \end{aligned} \quad (3.100)$$

Relația (3.99) se obține prin aplicarea transformatei Z unilaterale relației (3.98''), exprimată în funcție de diferențele de ordin inferior. Relația (3.99) poate fi folosită pentru obținerea transformatei Z a secvențelor pentru care $\Delta^k x[n] = 0$ pentru un anumit $k \geq 1$. Din (3.99), $X(z)$ se poate scrie sub forma

$$X^+(z) = \frac{z}{z-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\Delta^i x[0]}{(z-1)^i} + \frac{1}{(z-1)^k} Z^+ \{\Delta^k x[n]\} \quad (3.101)$$

Exemplul 3.10.

Să se determine transformata Z pentru semnalele

a) $x_1[n] = C_n^1$

b) $x_2[n] = C_n^2$

Soluție

a) $x_1[n] = C_n^1 = n$. Pentru această secvență, $\Delta x[n] = n + 1 - n = 1$,

$\Delta^2 x[n] = \Delta x[n+1] - \Delta x[n] = 0$. Toate diferențele de ordin mai mare decât 1 sunt, de asemenea, zero. Prin înlocuirea acestor valori în (3.101), se obține

$$Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (3.102)$$

b) $x_2[n] = C_n^2 = \frac{(n-1)n}{2}$, pentru care

$\Delta x_2[n] = C_{n+1}^2 - C_n^2 = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, $\Delta^2 x_2[n] = 1$. Diferențele de ordin superior lui 2 sunt egale cu zero. Aplicând (3.101), se obține

$$Z\{C_n^2\} = \frac{z}{(z-1)^3} \quad (3.103)$$

Similar, se poate verifica relația generală $Z\{C_n^m\} = \frac{z}{(z-1)^{m+1}}$.

Transformarea sumelor parțiale

Fie suma parțială $\sum_{k=0}^{n-1} x[k]$, generată de semnalul $x[n]$. Dacă

$Z^+\{x[n]\} = X(z)$ există pentru $|z| > r$, atunci transformata sumei parțiale de asemenea există și, pentru $|z| > \max\{r, 1\}$, aceasta este

$$Z^+\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\right\} = \frac{X(z)}{z-1} \quad (3.104)$$

Demonstrație

$$\sum_{k=0}^{n-1} x[k] = \sum_{k=0}^n x[k] - x[n]. \quad \text{Dacă se notează } \sum_{k=0}^n x[k] = y[n], \quad \text{rezultă}$$

$y[n] - y[n-1] = x[n]$. Aplicând transforma Z^+ ultimei relații și ținând cont că și $y[n]$ este cauzal, se obține $Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$. Dar

$Y(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^n x[k]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x[k] + x[n]\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x[k]\right\} + X(z)$. Înlocuind pe $Y(z)$ în ultima relație, rezultă (3.104).

Exemplul 3.11.

Să se determine transformata Z^+ a secvenței $\Delta \sum_{k=0}^{n-1} x[k]$.

Soluție. $\Delta \sum_{k=0}^{n-1} x[k] = \sum_{k=0}^n x[k] - \sum_{k=0}^{n-1} x[k] = x[n]$. Aplicând transformata Z acestei expresii, rezultă $Z^+ \left\{ \Delta \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \right\} = X(z)$.

Exemplul 3.12.

Să se determine transformata Z a sumei $\sum_{k=0}^{n-1} k$. Din relația (3.102)

se știe că $Z\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$. Aplicarea directă a relației (3.104) conduce la

rezultatul dorit $Z^+ \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} k \right\} = \frac{z}{(z-1)^3}$. Se constată că s-a obținut același

rezultat ca în (3.103), ceea ce, datorită unicității transformatei Z unilaterale pentru semnale cauzale, conduce la concluzia că și originalele sunt egale, adică $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2$, relație, evident, adevărată.

Teorema valorii finale

Dacă $x[n] \xrightarrow{Z^+} X^+(z)$
atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z) \quad (3.105)$$

Această teoremă este utilă în stabilirea alurii asimptotice a semnalului $x[n]$ când se cunoaște numai transformata sa $X^+(z)$, iar inversarea acesteia este complicată.

Transformata diferenței $x[n+1] - x[n]$ a unui semnal cauzal este

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x[m]z^{-(m-1)} - \\ - X^+(z) &= z \left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} - x[0] \right) - X^+(z) = (z-1)X^+(z) - zx[0] \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $z \rightarrow 1$ se obține

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])z^{-n} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z) - x[0] \quad (3.106)$$

După trecerea la limită, membrul stâng al egalității devine

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n]) = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (x[n+1] - x[n]) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (x[k+1] - x[0]) = x[\infty] - x[0] \end{aligned} \quad (3.107)$$

Comparând (3.106) cu (3.107), rezultă

$$x[\infty] = \lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X^+(z)$$

numită și *teorema valorii finale* a unui semnal cauzal. Dacă semnalul este cauzal, regiunea de convergență este exteriorul unui cerc. Dacă cercul unitate este în domeniul de convergență, $X^+(z)|_{|z|=1}$ are valoare finită și, deci, $x[\infty] = 0$.

3.6. Analiza SDLIT în domeniul z

În paragraful 3.3.3. s-a definit funcția de transfer sau de sistem a unui SDLIT și s-a stabilit relația sa cu răspunsul la impuls și ecuația cu diferențe care descrie sistemul, folosindu-se transformata Z bilaterală, caz în care indicarea regiunii de convergență este obligatorie. Dacă sistemul și semnalul de intrare sunt cauzale, relația (3.42) se scrie corespunzător pentru transformate Z unilaterale. În continuare se va prezenta folosirea funcției de sistem în determinarea răspunsului sistemului la o excitare arbitrară. Analiza va avea drept obiect sisteme poli-zerouri reprezentate de ecuații cu diferențe cu coeficienți constanți cu condiții inițiale arbitrară.

3.6.1. Răspunsul sistemelor discrete descrise de funcții de transfer raționale în condiții inițiale nule

Fie un sistem poli-zerouri descris de ecuația cu diferențe (2.114) și funcția de transfer corespunzătoare dată de (3.45). Funcția de sistem $H(z)$ este raportul a două polinoame $B(z)/A(z)$. Mai mult, se presupune că și semnalul de intrare are o transformată Z exprimată printr-o funcție rațională, de forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \quad (3.108)$$

Această presupunere nu este foarte restrictivă, deoarece cele mai multe semnale de interes practic au transformata Z de această formă.

Dacă sistemul este relaxat, condițiile inițiale ale sistemului sunt nule, adică $y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$ și transformata Z a ieșirii este

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z) \cdot N(z)}{A(z) \cdot Q(z)} \quad (3.109)$$

Se presupune că sistemul conține polii simpli p_1, p_2, \dots, p_N și transformata Z a semnalului de intrare are, de asemenea, polii simpli q_1, q_2, \dots, q_L unde $p_k \neq q_m$ pentru toți $k=1,2,\dots,N$ și $m=1,2,\dots,L$. Dacă zerourile polinoamelor de la numărător $B(z)$ și $N(z)$ nu coincid cu polii $\{p_k\}$ și $\{q_k\}$, astfel încât nu există anulare poli zerouri, atunci, dezvoltarea în fracții simple a lui $Y(z)$ este de forma

$$Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^L \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}} \quad (3.110)$$

Transformarea Z inversă conduce la semnalul cauzal de ieșire

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u[n] + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u[n] \quad (3.111)$$

Se observă că ieșirea $y[n]$ este compusă din două părți. Prima parte este funcție de polii $\{p_k\}$ ai sistemului și se numește *răspuns natural*, $y_{nr}[n]$, al sistemului.

$$y_{nr}[n] = \sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n u[n] \quad (3.112)$$

Partea a doua a răspunsului $y[n]$ este funcție de polii $\{q_k\}$ ai semnalului de intrare și se numește *răspuns forțat*, $y_{fr}[n]$, al sistemului.

$$y_{fr}[n] = \sum_{k=1}^L Q_k(q_k)^n u[n] \quad (3.113)$$

Coeficienții A_k și Q_k sunt funcții de ambele seturi de poli $\{p_k\}$ și $\{q_k\}$. Condițiile inițiale fiind nule, relația (3.111) reprezintă răspunsul de stare zero al sistemului.

Dacă $X(z)$ și $H(z)$ au unul sau mai mulți poli în comun sau dacă $X(z)$ și/sau $H(z)$ conțin poli multipli, atunci $Y(z)$ va avea poli multipli și, în consecință, dezvoltarea în fracții simple a lui $Y(z)$ va conține termeni de forma $1/(1-p_i z^{-1})^k$, $k=1,2,\dots,m$, unde m este ordinul polului p_i . Inversarea acestor factori va conduce la termeni de forma $n^{k-1} p_i^n$ în ieșirea $y[n]$ [23].

3.6.2. Răspunsul sistemelor discrete descrise de funcții de transfer raționale în condiții inițiale nenule

În acest caz se presupune că semnalul de intrare $x[n]$ se aplică sistemului poli-zeroare la $n=0$, adică semnalul de intrare s-a presupus cauzal. Se presupun, de asemenea, condițiile inițiale $y[-1], y[-2] \dots y[-N]$ nenule pentru sistem.

Deoarece intrarea este un semnal cauzal și deoarece se dorește determinarea ieșirii $y[n]$ pentru $n \geq 0$, se va folosi transformata Z unilaterală, care permite utilizarea condițiilor inițiale.

Conform relației (3.93), transformata Z unilaterală a relației (2.114) este

$$Y^+(z) = - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^k y[-n] z^n \right] + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X^+(z) \quad (3.114)$$

Deoarece $x[n]$ este cauzal, se poate înlocui $X^+(z) = X(z)$ și (3.114) devine

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y[-n] z^n}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \\ &= H(z) \cdot X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (3.115)$$

unde

$$N_0(z) = - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \sum_{n=1}^k y[-n] z^n \quad (3.116)$$

Din (3.115) se observă că transformata Z a ieșirii sistemului cu condiții inițiale nenule poate fi împărțită în două părți. Prima parte este transformata Z a răspunsului de stare zero al sistemului

$$Y_{zs}(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (3.117)$$

iar a doua componentă este rezultatul condițiilor inițiale nenule și reprezintă transformata Z a răspunsului când intrarea este nulă.

$$Y_{zi}^+(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad (3.118)$$

Transformata Z a răspunsului total este suma acestor două componente. Răspunsul sistemului în domeniul timp se obține prin determinarea transformatorelor Z inverse pentru $Y_{zs}(z)$ și $Y_{zi}^+(z)$ și adunarea rezultatelor, adică

$$y[n] = y_{zs}[n] + y_{zi}[n] \quad (3.119)$$

Deoarece numitorul lui $Y_{zi}^+(z)$ este $A(z)$, polii săi sunt p_1, p_2, \dots, p_N și $Y_{zi}^+(z)$ se poate descompune în fracții simple, sub forma

$$Y_{zi}^+(z) = \sum_{k=1}^N \frac{D_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (3.120)$$

unde D_k sunt coeficienții descompunerii în fracții simple.

În consecință, răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N D_k (p_k)^n u[n] \quad (3.121)$$

Acesta poate fi adăugat la (3.111) pentru a forma răspunsul total al sistemului și se obține

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A'_k (p_k)^n u[n] + \sum_{k=1}^L Q_k (q_k)^n u[n] \quad (3.122)$$

unde

$$A'_k = A_k + D_k \quad (3.123)$$

Cele prezentate anterior arată clar că efectul condițiilor inițiale este de modificare a răspunsului natural al sistemului prin modificarea coeficienților $\{A_k\}$. Acestea nu introduc noi poli și nu influențează răspunsul forțat al sistemului. Analiza efectuată a luat în considerație numai cazul polilor simpli, indiferent dacă aceștia sunt reali și/sau

complex conjugăți. Aceleași concluzii rezultă și în cazul polilor multipli, reali și/sau complex conjugăți.

Exemplul 3.13.

Să se determine răspunsul la semnalul de intrare $x[n] = 2^n u[n]$ al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = (5/6)y[n-1] - (1/6)y[n-2] + x[n]$$

în următoarele condiții inițiale:

- a) $y[-1] = y[-2] = 0$
- b) $y[-1] = 1; y[-2] = 2$

Soluție. Funcția de transfer a sistemului este

$$H(z) = \frac{1}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)z^{-2}}$$

Sistemul are doi poli $p_1=1/2$ și $p_2=1/3$.

Transformata Z a intrării este

$$X(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} Y_{zs}(z) &= H(z)X(z) = \frac{1}{\left(1 - (1/2)z^{-1}\right)\left(1 - (1/3)z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)} = \\ &= \frac{-1}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{2/5}{1 - (1/3)z^{-1}} + \frac{8/5}{1 - 2z^{-1}} \end{aligned}$$

și $y_{zs}[n] = [-(1/2)^n + (2/5)(1/3)^n + (8/5)2^n]u[n]$

- a) deoarece condițiile inițiale sunt nule, în acest caz $y[n] = y_{zs}[n]$.
- b) pentru condițiile inițiale $y[-1] = 1$ și $y[-2] = 2$, în transformata Z apare componenta suplimentară

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{(1/2) - (1/6)z^{-1}}{1 - (5/6)z^{-1} + (1/6)1z^{-2}} = \frac{1/2}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{0}{1 - (1/3)z^{-1}}$$

În consecință, răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = (1/2)(1/2)^n u[n]$$

iar răspunsul total are transformata Z

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = \frac{(-1/2)}{1 - (1/2)z^{-1}} + \frac{2/5}{1 - (1/3)z^{-1}} + \frac{8/5}{1 - 2z^{-1}}$$

Aplicând transformata Z inversă, rezultă

$$y[n] = [(-1/2)(1/2)^n + (2/5)(1/3)^n + (8/5)2^n]u[n].$$

3.6.3. Răspunsul tranzitoriu și permanent al SDLIT

După cum s-a arătat în paragraful (3.6.1), răspunsul unui sistem la un semnal de intrare dat poate fi separat în două componente: răspunsul natural și răspunsul forțat.

Răspunsul natural al unui sistem cauzal este dat de (3.112). Dacă $|p_k| < 1$ pentru toți k , atunci $y_{nr}[n]$ descrește la zero pentru $n \rightarrow \infty$. În acest caz răspunsul natural este un *răspuns tranzitoriu*. Viteza cu care semnalul descrește la zero depinde de poziția polilor. Cu cât un pol este mai apropiat de origine, acesta determină o descreștere mai rapidă, iar dacă polul este plasat în apropierea cercului unitate (dar, evident, în interior), descreșterea este mai lentă și răspunsul tranzitoriu va persista mai mult timp.

Răspunsul forțat este dat de (3.113). Dacă toți polii semnalului de intrare sunt în interiorul cercului unitate, $y_{fr}[n]$ va descrește la zero pentru $n \rightarrow \infty$, ca în cazul răspunsului natural. Dacă, în schimb, semnalul de intrare este o sinusoidă cu polii pe cercul unitate, răspunsul forțat este, de asemenea, o sinusoidă care persistă pentru $n \geq 0$, caz în care răspunsul forțat se numește *răspuns permanent* al sistemului. Așadar, pentru ca sistemul să prezinte un răspuns permanent pentru $n \geq 0$, intrarea trebuie să persiste pentru toți $n \geq 0$.

3.6.4. Cauzalitatea și stabilitatea SDLIT exprimate în funcție de funcția de sistem

Un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal este cel al cărui răspuns la impuls $h[n]$ satisfacă condiția

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (3.124)$$

De asemenea, s-a arătat că RC pentru transformata Z a unui semnal cauzal este exteriorul unui cerc. În consecință, un SDLIT este cauzal, dacă și numai dacă RC a funcției sale de transfer este exteriorul unui cerc de rază $r < \infty$, inclusiv punctul $z = \infty$.

Stabilitatea unui SDLIT poate fi exprimată în funcție de caracteristicile funcției de transfer. Se reamintește (paragraful 2.4.7) că o condiție necesară și suficientă pentru ca un SDLIT să fie stabil în sens MIME este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (3.125)$$

Această condiție implică faptul ca cercul unitate să fie conținut în RC a lui $H(z)$. Într-adevăr, deoarece

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (3.126)$$

rezultă

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|z^{-n} \quad (3.127)$$

Prin evaluarea pe cercul unitate ($|z|=1$), se obține

$$|H(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| \quad (3.128)$$

În concluzie, dacă un sistem este stabil în sens MIME, cercul unitate este inclus în RC a lui $H(z)$. Se poate demonstra că reciproca este de asemenea adevarată și, prin urmare, un SDLIT este stabil MIME dacă și numai dacă RC a funcției de transfer include cercul unitate.

Condițiile pentru cauzalitate și stabilitate sunt diferite și unele nu le implică pe celelalte. De exemplu, un sistem cauzal poate fi stabil sau nu, aşa cum și un sistem necauzal poate fi stabil sau nu. Similar, atât sistemele stabile cât și cele instabile pot fi cauzale sau nu.

Pentru un sistem cauzal se pot stabili condiții de stabilitate având în vedere că RC a funcției de transfer este exteriorul unui cerc de raza r . Pentru un sistem stabil, RC trebuie să conțină cercul unitate. În consecință, un sistem stabil și cauzal trebuie să aibă o funcție de sistem care converge pentru $|z|>r<1$. Deoarece RC nu poate conține nici un pol al lui $H(z)$, rezultă că un SDLIT cauzal este stabil în sens MIME, dacă și numai dacă toți polii lui $H(z)$ sunt în interiorul cercului unitate.

Exemplul 3.14.

Un SDLIT este caracterizat de funcția de transfer

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3,5z^{-1} + 1,5z^{-2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

Să se specifică RC a lui $H(z)$ și să se determine $h[n]$ în următoarele condiții:

- a) sistemul este stabil;

- b) sistemul este cauzal;
- c) sistemul este pur necauzal.

Soluție. Sistemul are polii la $z = \frac{1}{2}$ și $z = 3$.

- a) Deoarece sistemul este stabil, RC trebuie să includă cercul unitate și, deci, $\frac{1}{2} < |z| < 3$. În consecință, $h[n]$ este necauzal și

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1].$$

- b) Deoarece sistemul este cauzal, $|z| > 3$, caz în care

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(3)^n u[n].$$

Acest sistem este instabil (conține pe $(3)^n u[n]$).

- c) dacă sistemul este pur necauzal, RC este $|z| < 0,5$, și deci

$$h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2(3)^n\right] u[-n-1].$$

Acest sistem este instabil (conține pe $(1/2)^n u[-n-1]$).

3.6.5. Anulări poli zerouri

Dacă o transformată Z conține un pol în același loc pe care este plasat un zerou, polul este anulat de zero și, în consecință, termenul care conține polul respectiv dispare din transformata Z. Anulări poli-zerouri pot apărea fie în funcția de transfer a sistemului, fie în produsul dintre aceasta și transformata Z a semnalului de intrare. În al doilea caz se spune că un pol al sistemului este anulat de un zero al semnalului de intrare sau invers. Aceasta înseamnă că, printr-o alegere potrivită a zerourilor semnalului de intrare, se pot anula unul sau mai mulți poli ai răspunsului sistemului, ceea ce ar putea fi folosit în practică pentru stabilizarea unui sistem.

Dacă zeroul este plasat foarte aproape de pol, dar nu exact în poziția polului, acesta va avea o contribuție în răspuns. În practică anulări neexacte poli-zerouri apar ca rezultat al preciziei numerice finite folosite în reprezentarea coeficienților sistemului. În consecință, dacă numărul de biți folosiți în reprezentarea mărimilor nu este suficient, nu se va încerca

stabilizarea unui sistem instabil prin plasarea unui zero în semnalul de intrare pe acea poziție.

3.6.6. Poli multipli și stabilitate

Din cele prezentate anterior, s-a observat că o condiție necesară și suficientă pentru ca un SDLIT cauzal să fie stabil în sens MIME este ca toți polii săi să fie conținuți în interiorul cercului unitate.

În continuare se va analiza stabilitatea sistemelor în funcție de poziția polilor sistemului și ai semnalului de intrare. Se disting următoarele cazuri:

1. Atât polii sistemului p_k cât și cei ai semnalului de intrare q_j sunt conținuți în interiorul cercului unitate, adică $|p_k| < 1$, $k=1\dots N$, $|q_j| < 1$, $j=1\dots L$.

Dacă toți polii p_k și q_j sunt distincți și $p_k \neq q_j$, atunci atât răspunsul natural, cât și cel forțat sunt limitate și sistemul este stabil. Dacă polii sistemului și ai semnalului nu sunt neapărat simpli sau semnalul de intrare conține unul sau mai mulți poli care coincid cu ai sistemului, atunci ieșirea sistemului va conține poli multipli, care vor avea ca rezultat secvențe de ieșire care conțin termeni de forma $A_k n^b p_k^n u[n]$ unde $0 \leq b \leq m-1$ și m este ordinul de multiplicitate a polului p_k . Dacă $|p_k| < 1$, acești termeni descresc spre 0 pentru $n \rightarrow \infty$, deoarece p_k^n domină pe n^b . În consecință, nici un semnal de intrare limitat nu va produce o ieșire nelimitată, dacă polii sistemului sunt în interiorul cercului unitate.

2. Polii sistemului sunt strict în interiorul cercului unitate, $|p_k| < 1$, iar semnalul de intrare are poli atât în interiorul cercului unitate, cât și pe cercul unitate, $|q_j| \leq 1$.

Dacă semnalul conține un pol real simplu ($z=1$ sau $z=-1$) sau doi poli reali distincți ($z=1$ și $z=-1$) sau o pereche de poli complex conjugăți pe cercul unitate, restul fiind conținuți în interiorul acestuia, atât răspunsul natural, cât și cel forțat sunt limitate, cei doi poli complecși combinându-se într-o componentă sinusoidală de semnal în răspunsul forțat al sistemului. Evident, dacă semnalul are pe cercul unitate cel puțin un pol real dublu sau o pereche dublă de poli complex conjugăți, răspunsul devine nelimitat și sistemul este instabil.

3. Polii semnalului de intrare sunt strict în interiorul cercului unitate $|q_j| < 1$, iar sistemul are poli atât în interiorul cercului unitate, cât și pe cercul unitate $|p_k| \leq 1$.

Dacă pe cercul unitate există un singur pol real ($z=1$ sau $z=-1$) sau doi poli reali distincți ($z=1$ și $z=-1$) sau o pereche de poli complex conjugăți ai sistemului, răspunsul natural este limitat și sistemul este stabil. Dacă sistemul are pe cercul unitate poli reali sau complex conjugăți multipli, răspunsul său devine nelimitat și sistemul instabil.

4. Atât polii sistemului cât și ai semnalului de intrare se găsesc fie în interiorul cercului unitate, fie pe cercul unitate, adică $|p_k| \leq 1$ și $|q_j| \leq 1$.

Dacă polii sistemului și ai semnalului de intrare de pe cercul unitate sunt simpli și nu coincid, răspunsul sistemului este limitat și sistemul stabil. Dacă, însă, un pol al sistemului coincide cu un pol al semnalului de pe cercul unitate, în răspunsul sistemului va apărea o componentă de forma $A_k n p_k^n u[n]$, care este nelimitată. Cu atât mai mult, dacă polii sunt multipli, răspunsul va fi nelimitat, conținând termeni de forma $A_k n^b p_k^n u[n]$ unde $0 \leq b \leq m-1$ și m este ordinul de multiplicitate a polului p_k de pe cercul unitate.

Sigurele sisteme de interes care au poli pe cercul unitate sunt oscilatoarele, despre care se spune că sunt *marginal stabile*.

Următorul exemplu ilustrează situația din cazul 4.

Exemplul 3.15.

Să se determine răspunsul sistemului cauzal, descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = y[n-1] + x[n], \text{ la treapta unitate.}$$

Soluție. Funcția de sistem a sistemului este $H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, care conține polul $z = 1$ pe cercul unitate. Transformata Z a semnalului de intrare $x[n] = u[n]$ este $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ care, de asemenea, conține un pol la $z = 1$.

Transformata Z a semnalului de ieșire este

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \text{ care conține un pol dublu la } z=1.$$

Transformata Z inversă a lui $Y(z)$ este

$$\begin{aligned} y[n] &= Z^{-1} \left\{ \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{1-z^{-1}+z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right\} = \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{1-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right\} = u[n] + nu[n] = (n+1)u[n] \end{aligned}$$

care, evident, este o secvență nelimitată și, în consecință, sistemul este instabil. Acest exemplu ilustrează faptul că stabilitatea MIME impune ca polii sistemului să se găsească strict în interiorul cercului unitate.

3.6.7. Stabilitatea sistemelor de ordinul II

Ecuațiile liniare cu diferențe sau funcțiile de sistem corespunzătoare ale sistemelor discrete au de obicei coeficienți reali, ceea ce determină ca polii sistemului să fie reali și/sau complex conjugăți. Pentru a evita lucrul cu valori complexe, contribuția polilor complex conjugăți se combină în expresii de ordinul al doilea cu coeficienți reali, motiv pentru care sistemele de ordinul doi formează blocurile constructive de bază folosite în realizarea sistemelor de ordin superior și vor fi analizate în detaliu.

Fie un sistem cauzal cu doi poli, descris de ecuația cu diferențe de ordinul doi

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] \quad (3.129)$$

Funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (3.130)$$

și sistemul are două zerouri în origine $z_1 = z_2 = 0$ și doi poli

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} \quad (3.131)$$

Sistemul este stabil în sens MIME, dacă polii sunt în interiorul cercului unitate, adică dacă $|p_2| < 1$ și $|p_1| < 1$. Aceste condiții impun anumite relații între coeficienții a_1 și a_2 , care vor fi determinate atât pentru cazul în care polii sunt complex conjugăți, cât și reali.

Dacă $a_1^2 < 4a_2$, polii sunt complex conjugăți $p_{1,2} = \rho e^{j\theta}$, și condiția de modul subunitar pentru aceștia conduce la

$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}}{2} = \sqrt{a_2} < 1; a_1^2 < 4a_2 \quad (3.132)$$

ceea ce este echivalent cu relația

$$|a_2| < 1, \quad a_2 > \frac{a_1^2}{4} \quad (3.133)$$

Înlocuind (3.131) în condiția $|p_{1,2}| < 1$, în cazul polilor reali, se obține

$$-1 < -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}} < 1 \quad (3.134)$$

condiție ce echivalează cu patru inegalități ce trebuie îndeplinite simultan. Prin rezolvarea acestora rezultă $a_2 > -a_1 - 1$ și $a_2 > a_1 - 1$, relații ce pot fi reunite în

$$|a_2| < 1 + a_2 \quad (3.135)$$

Cu alte cuvinte, un sistem cu doi poli este stabil, dacă și numai dacă coeficienții a_1 și a_2 satisfac condițiile (3.133) și (3.135). Aceste condiții definesc o regiune în planul coeficienților (a_1, a_2) în formă de triunghi, după cum este arătat în figura 3.7.

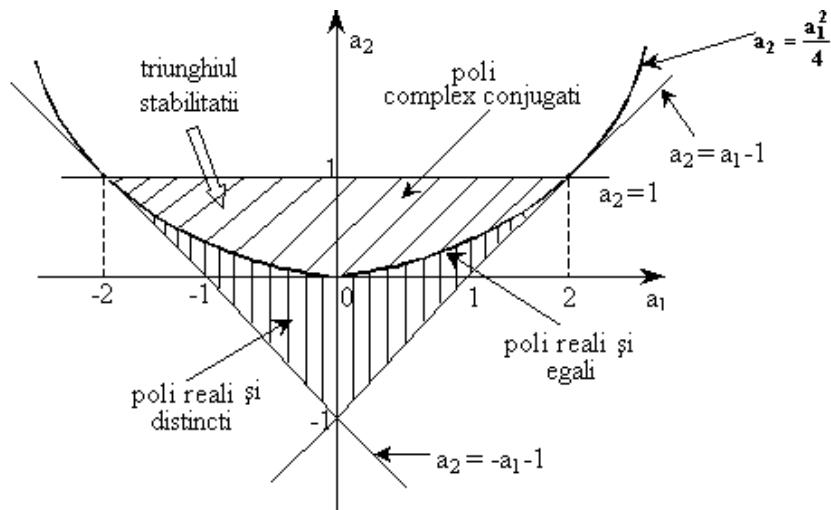


Figura 3.7. Regiunea de stabilitate în planul coeficienților (a_1, a_2) pentru un sistem de ordinul II

Sistemul este stabil dacă și numai dacă punctul de coordonate (a_1, a_2) este în interiorul triunghiului, numit triunghiul stabilității. Caracteristicile unui sistem cu doi poli depind de localizarea acestora sau de poziția punctului (a_1, a_2) în triunghiul stabilității. Polii sistemului pot fi reali sau complecși, după valoarea discriminantului $\Delta = a_1^2 - 4a_2$.

Parabola $a_2 = \frac{a_1^2}{4}$ împarte triunghiul stabilității în două regiuni.

Regiunea de sub parabolă corespunde polilor distincți reali. Punctele de pe parabolă corespund polilor reali dubli și regiunea de deasupra parabolei corespunde polilor complex conjugăți.

a) *poli reali și distincți ($a_1^2 > 4a_2$)*

Deoarece $p_1 \neq p_2$ și reali, funcția de transfer a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} \quad (3.136)$$

unde

$$A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = -\frac{b_0 p_2}{p_1 - p_2}, \quad (3.137)$$

răspunsul la impuls fiind

$$h[n] = \frac{b_0}{p_1 - p_2} (p_1^{n+1} - p_2^{n+1}) u[n] \quad (3.138)$$

adică diferența a două expoенțiale descrescătoare.

b) *poli reali și egali ($a_1^2 = 4a_2$)*

În acest caz $p_1 = p_2 = -\frac{a_1}{2}$ și funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - p z^{-1})^2} \quad (3.139)$$

căreia îi corespunde răspunsul la impuls

$$h(n) = b_0 [n+1] p^n u[n] \quad (3.140)$$

adică produsul dintre un semnal rampă și o expoențială descrescătoare, care va avea o alură descrescătoare pentru un n suficient de mare.

c) *poli complex conjugăți ($a_1^2 < 4a_2$)*

Deoarece polii sunt complex conjugăți, funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{A}{1-pz^{-1}} + \frac{A^*}{1-p^*z^{-1}} = \frac{A}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{A^*}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}} \quad (3.141)$$

unde $p = r e^{j\omega_0}$ cu $0 \leq \omega_0 \leq \pi$.

$$A = \frac{b_0 p}{p - p^*} = \frac{b_0 e^{j\omega_0}}{j \cdot 2 \sin \omega_0}, \quad A^* = -\frac{b_0 p^*}{p - p^*} = -\frac{b_0 e^{-j\omega_0}}{j \cdot 2 \sin \omega_0} \quad (3.142)$$

Răspunsul la impuls al sistemului cu poli complex conjugăți este

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin((n+1)\omega_0) u[n] \quad (3.143)$$

Acesta are o comportare oscilatorie cu o anvelopă exponențială descrescătoare pentru $r < 1$. Unghiul ω_0 determină frecvența de oscilație iar distanța față de origine a polului determină viteza de descreștere a exponențialei. Evident, cu cât r este mai aproape de cercul unitate, descreșterea este mai lentă, și cu cât r este mai apropiat de origine, descreșterea este mai rapidă.

3.7. Probleme propuse

3.1. Să se determine transformata Z a următoarelor semnale și să se indice regiunea de convergență.

a) $x_a[n] = [3, 0, 0, 0, 0, 6, 1, -4];$
b)

c) $x_b[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 5 \\ 0, & n < 4 \end{cases};$

d) $x_c[n] = (n+1)u[n];$

e) $x_d[n] = (a^n + a^{-n})u[n], \quad a \in R;$

f) $x_e[n] = (n a^n \sin \omega_0 n)u[n];$

g) $x_f[n] = (n a^n \cos \omega_0 n)u[n];$

h) $x_g[n] = \frac{1}{2} \left(n^2 + n \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} u[n-1];$

$$i) \quad x_h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases};$$

$$j) \quad x_i[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases};$$

$$k) \quad x_j[n] = x_h[n+4];$$

$$l) \quad x_k[n] = x_h[-n].$$

3.2. Să se determine transformata Z a semnalelor:

- a) $x[n] = \alpha^{|n|}$, $|\alpha| < 1$;
- b) $x[n] = 1$, $-\infty < n < \infty$;

3.3. Folosind metoda descompunerii în serii de puteri, să se determine transformata Z inversă pentru semnalul

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

dacă

- a) $x[n]$ este cauzal;
- b) $x[n]$ este necauzal.

3.4. Să se determine semnalul cauzal $x[n]$ a cărui transformată Z este $X(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - z^{-1})^2}$.

3.5. Fie $x[n]$ un semnal care admite transformată Z . Să se determine, în funcție de $X(z)$, transformata Z a următoarelor semnale:

$$a) \quad x_1[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & \text{pentru } n \text{ par} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

b) $x_2[n] = x[2n]$.

3.6. Să se determine semnalul cauzal $x[n]$, dacă transformata sa Z este:

a) $X(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

b) $X(z) = \frac{z^{-6} + z^{-7}}{1 - z^{-1}}$

c) $X(z) = \frac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

d) $X(z) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})(1-0.5z^{-1})}$

e) X(z) este specificată de diagrama poli-zerouri

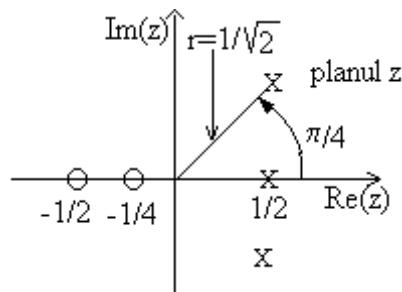


Figura p3.6

3.7. Să se determine toate semnalele posibile $x[n]$ care pot avea transformata Z

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

3.8. Să se determine conoluția următoarelor perechi de semnale cu ajutorul transformatei Z:

a) $x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]; \quad x_2[n] = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) u[n]$

$$\begin{array}{ll} \text{b)} & x_1[n] = u[n]; \quad x_2[n] = \delta[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ & \\ \text{c)} & x_1[n] = n u[n]; \quad x_2[n] = 2^n u[n-1] \end{array}$$

3.9. Folosind proprietățile transformatei Z să se determine originalul pentru următoarele transformate:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & X(z) = \log(1 - 2z) \quad |z| < \frac{1}{2} \\ & \\ \text{b)} & X(z) = \log\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \quad |z| > \frac{1}{2} \end{array}$$

3.10. Să se determine semnalul $x[n]$ a cărui transformată Z este

$$X(z) = e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z}} \quad |z| \neq 0$$

3.11. Să se determine semnalul $x[n]$ cu transformata

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2}}, \quad \text{dacă } X(z) \text{ converge pe cercul unitate.}$$

3.12. Să se calculeze conoluția următoarelor perechi de semnale în domeniul timp și cu ajutorul transformatei Z unilaterale:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 1\} \quad x_2[n] = \{1, 1, 1\} \\ & \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{b)} & x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad x_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ & \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{c)} & x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 1\} \quad x_2[n] = \{1, 1, 1\} \\ & \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array}$$

S–au obținut aceleași rezultate prin ambele metode? Explicați.

3.13. Să se determine răspunsul $y[n]$, $n \geq 0$ al sistemelor descrise de următoarele ecuații cu diferențe, cu ajutorul transformatei Z unilaterale:

- a) $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2] = 0; \quad y[-1] = y[-2] = 1.$
- b) $y[n] - 1,5y[n-1] + 0,5y[n-2] = 0; \quad y[-1] = y[-2] = 0.$
- c) $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$
 $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]; \quad y[-1] = 1;$
- d) $y[n] = \frac{1}{4}y[n-2] + x[n]$
 $x[n] = u[n]; \quad y[-1] = 0, y[-2] = 1.$

3.14. Să se calculeze răspunsul de stare zero al următoarelor sisteme:

- a) $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]; \quad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos \frac{\pi}{3}\right) u[n]$
- b) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]; \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$
- c) $y[n] = -0,1y[n-1] + 0,2y[n-2] + x[n] + x[n-1]; \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
- d) $y[n] = -y[n-2] + 10x[n]; \quad x[n] = 10 \left(\cos \frac{\pi}{2} n\right) u[n]$
- e) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]; \quad x[n] = (-1)^n \quad -\infty < n < \infty$

3.15. Se consideră sistemul

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}; \quad \text{RC: } 0.5 < |z| < 1$$

- a) Să se reprezinte diagrama poli-zerouri a sistemului. Este acesta stabil?
b) Să se determine răspunsul la impuls.

- 3.16. Să se determine răspunsul sistemului
 $y[n] = 0.7y[n-1] - 0.12y[n-2] + x[n-1] + x[n-2]$
la intrarea $x[n] = nu[n]$. Este sistemul stabil?

3.17. Să se determine răspunsul la impuls, $h[n]$, al sistemului din figură.

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]; h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]; h_3[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

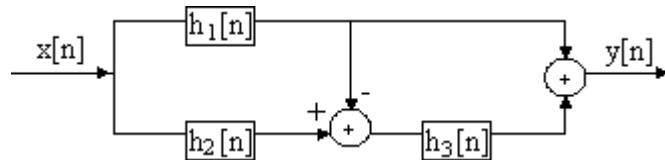


Figura p3.17

3.18. Se consideră interconectarea sistemului din figură, unde $h[n] = a^n u[n]$, $-1 < a < 1$.

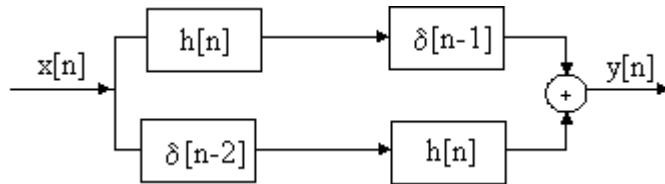


Figura p3.18

- a) Să se determine răspunsul la impuls al sistemului și să se stabilească dacă este cauzal și stabil.
- b) Să se implementeze sistemul cu un număr minim de sumatoare, multiplicatoare și elemente de întârziere.

$$3.19. \text{Se consideră sistemul } H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

Să se determine:

- a) răspunsul la impuls;
- b) răspunsul de stare zero la intrarea $x[n] = u[n]$;
- c) răspunsul total la intrarea $x[n] = u[n]$ dacă $y[-1] = 1$; $y[-2] = 2$.

3.20. Fie sistemul cauzal descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

Să se determine:

- a) răspunsul la impuls;
- b) răspunsul de stare zero la treapta unitate;
- c) răspunsul la treapta unitate dacă $y[-1] = A \neq 0$;
- d) răspunsul la intrarea $x[n] = \cos \omega_0 n$, $0 \leq n < \infty$.

3.21. Să se determine răspunsul de stare zero al sistemului

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + 4x[n] + 3x[n-1]$$

la intrarea $x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$.

Care este răspunsul de regim permanent al sistemului?

CAPITOLUL 4

ANALIZA SEMNALELOR DISCRETE ÎN DOMENIUL FRECVENTĂ

Un alt instrument matematic foarte util în analiza și proiectarea SLIT îl constituie transformata și seria Fourier. Aceste reprezentări ale semnalelor implică descompunerea semnalului în sinusoide sau exponențiale complexe. Astfel, semnalul este reprezentat în *domeniul frecvență*.

Pentru clasa semnalelor periodice, descompunerea se numește *serie Fourier*, iar pentru clasa semnalelor aperiodice de energie finită, descompunerea se numește *transformată Fourier*.

Aceste descompuneri sunt importante, deoarece permit obținerea cu ușurință a răspunsului sistemelor SLIT la astfel de semnale, pe baza proprietății de liniaritate a seriei și transformatei Fourier.

Din domeniul fizicii au fost preluate noțiunile de spectru, analiză spectrală și sinteză de spectru, prin analogie cu următoarea situație: lumina albă este descompusă cu ajutorul unei prisme în culorile curcubeului, fiecare din acestea corespunzînd unei anumite frecvențe din spectrul vizual.

Analiza în frecvență a unui semnal implică descompunerea sa în componente sinusoidale. Rolul prismei este preluat de seria și transformata Fourier. Ca și în fizică, termenul de *spectru* se referă la conținutul de frecvențe al semnalului. Procesul de obținere a spectrului se numește *analiză spectrală*. În practică determinarea spectrului unui semnal, bazată pe măsurători asupra semnalului, se numește *estimare spectrală*. Transformata Fourier a unui semnal se numește *funcție de densitate spectrală* sau, mai simplu, *spectrul* semnalului.

Recombinarea sinusoidelor componente în scopul refacerii semnalului original este o problemă de *sinteză Fourier*. În cele ce urmează analiza se va referi atât la semnale analogice periodice și aperiodice, cât și la semnale discrete, de asemenea, periodice și aperiodice.

4.1. Analiza în frecvență a semnalelor analogice

Pentru semnalele analogice periodice și aperiodice se vor trece succint în revistă în următoarele două paragrafe câteva aspecte referitoare la ecuația de analiză, ecuația de sinteză, spectrul de amplitudine, spectrul de fază, spectrul de putere și, respectiv, spectrul de energie al semnalelor, tratarea detaliată a acestor subiecte fiind prezentată în [13], [16], [20].

4.1.1. Analiza în frecvență a semnalelor analogice periodice

Reprezentarea matematică a semnalelor periodice este dată de seria Fourier care este o sumă ponderată de sinusoide armonice sau exponențiale complexe având aceeași perioadă fundamentală $T_p=1/F_0$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (4.1)$$

Semnalul exponențial $\{e^{j2\pi k F_0 t}, k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots\}$ este "blocul constructiv" de bază cu ajutorul căruia se construiesc semnale periodice diferite, prin alegerea potrivită a frecvenței fundamentale F_0 și a coeficienților $\{c_k\}$. F_0 reprezintă frecvența fundamentală a semnalului $x(t)$, iar coeficienții $\{c_k\}$ determină forma semnalului. Pentru un semnal periodic $x(t)$, de perioadă T_p , coeficienții $\{c_k\}$ se determină cu relația [23]

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \quad (4.2)$$

Coefficienții $\{c_k\}$ formează *spectrul* semnalului periodic. Modulul coeficienților formează *spectrul de amplitudine*, iar argumentul lor, *spectrul de fază*. Se observă că integrala poate fi evaluată pe orice interval de lungime T_p al semnalului $x(t)$. În reprezentarea semnalelor periodice prin serii Fourier apare problema convergenței seriei date de (4.1) la $x(t)$ pentru orice valoare a lui t .

Există unele condiții care garantează convergența [23], dintre care un set foarte utilizat în prelucrarea semnalelor este cunoscut sub numele de *condițiile Dirichlet*, care asigură faptul că $x(t)$ este egal cu dezvoltarea sa în seria dată de (4.1) în orice punct de continuitate, dacă:

1. Semnalul $x(t)$ are un număr finit de discontinuități pe orice interval finit;

2. Semnalul conține un număr finit de maxime și minime în orice perioadă;
3. Semnalul este absolut integrabil pe orice perioadă, adică

$$\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty \quad (4.3)$$

O altă condiție de convergență, dar mai slabă decât condiția 3 din setul anterior este aceea ca semnalul să aibă energie finită pe o perioadă, adică să fie de *de patrat integrabil* pe o perioadă, adică

$$\int_{T_p} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.4)$$

Aceasta garantează faptul că energia semnalului diferență

$$d(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \cdot 2\pi k F_0 t} \quad (4.5)$$

este zero, deși $x(t)$ și seria sa Fourier pot差别ri pentru toate valorile lui t . Un semnal absolut integrabil este de energie finită, dar reciproca nu este adevărată. Ambele condiții prezentate mai sus sunt *suficiente*, dar nu și necesare, adică există semnale care nu respectă condițiile Dirichlet și nu sunt nici de patrat integrabil, dar seria Fourier este convergentă.

Toate semnalele periodice de interes practic satisfac aceste condiții. În concluzie, dacă $x(t)$ este periodic și satisfac condițiile Dirichlet, el poate fi reprezentat într-o serie Fourier (4.1), cu coeficienții specificați de (4.2). Ecuată (4.1) se numește *ecuație de sinteză*, iar ecuația (4.2), *ecuație de analiză*.

În general, coeficienții Fourier sunt complecsi, iar dacă semnalul $x(t)$ este real, coeficienții simetrici sunt complexi conjugați $c_{-k} = c_k^*$.

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k} ; \quad c_k^* = c_{-k} = |c_k| e^{-j\theta_k} \quad (4.6)$$

Spectrul de amplitudine este par

$$|c_{-k}| = |c_k|, \quad (4.7)$$

iar cel de fază este impar

$$\angle c_{-k} = -\angle c_k \quad (4.8)$$

Un semnal periodic are energie infinită și putere medie finită, dată de relația

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 dt \quad (4.9)$$

Între coeficienții Fourier și puterea semnalului periodic există relația

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (4.10)$$

Relațiile (4.9) și (4.10) ilustrează echivalența puterilor, pentru semnale de putere finită.

Mărimea $|c_k|^2$ reprezintă puterea medie a armonicii k a semnalului, iar puterea medie totală a semnalului periodic este suma puterilor medii ale armonicilor. Reprezentarea lui $|c_k|^2$ funcție de frecvențele kF_0 , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ formează *spectrul densității de putere* a semnalului periodic $x(t)$.

Deoarece $|c_k|^2$ există numai pentru valori discrete ale frecvenței $(0; \pm F_0; \pm 2F_0, \dots)$, se spune că spectrul semnalului periodic este format din linii spectrale. Distanța dintre două linii spectrale consecutive este inversă perioadei fundamentale $F_0 = \frac{1}{T_p}$, iar forma spectrului (distribuția de putere a semnalului) depinde de caracteristicile în domeniul timp ale semnalului.

4.1.2. Analiza în frecvență a semnalelor analogice aperiodice

Semnalele analogice aperiodice se reprezintă în domeniul frecvență cu ajutorul transformatei Fourier care, pentru semnalul $x(t)$, se definește cu relația

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi F t} dt \quad (4.11)$$

$X(F)$, transformata Fourier directă a semnalului $x(t)$, mai este cunoscută sub numele de funcție de densitate spectrală și este o funcție de variabilă continuă F . Transformata Fourier inversă este dată de relația

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j \cdot 2\pi F t} dF \quad (4.12)$$

și permite determinarea semnalului $x(t)$ din $X(F)$. Relația (4.11) se numește *ecuație de analiză*, iar (4.12) *ecuație de sinteză*.

Perechile Fourier (4.11) și (4.12) se pot exprima și în funcție de pulsația $\Omega = 2\pi F$, $dF = \frac{d\Omega}{2\pi}$, în forma

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (4.13)$$

și

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (4.14)$$

Un set de condiții suficiente pentru existența transformatei Fourier a semnalelor aperiodice este dat de condițiile Dirichlet [23]:

1. Semnalul $x(t)$ are un număr finit de discontinuități;
2. Semnalul $x(t)$ conține un număr finit de maxime și minime;
3. Semnalul $x(t)$ este absolut integrabil, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.15)$$

O altă condiție de convergență, dar mai slabă decât (4.15), este aceea ca semnalul să fie de energie finită, adică să fie de *de patrat integrabil* [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.16)$$

Un semnal absolut integrabil este de energie finită, însă reciprocă nu este întotdeauna adevărată. În general, transformata Fourier $X(F)$ este o mărime complexă, care se exprimă în coordonate polare sub forma

$$X(F) = |X(F)| e^{j\theta(F)} \quad (4.17)$$

unde $|X(F)|$ este modulul spectrului, iar $\theta(F)$ faza sa.

Dacă semnalul $x(t)$ este real, atunci transformata Fourier prezintă proprietăți de simetrie, și anume, spectrul de amplitudine este o funcție pară

$$|X(-F)| = |X(F)| \quad (4.18)$$

iar cel de fază este o funcție impară

$$\angle X(-F) = -\angle X(F) \quad (4.19)$$

Energia matematică a unui semnal $x(t)$ este dată de relația

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.20)$$

Legătura dintre energia semnalului și transformata sa Fourier $X(F)$, este dată de echivalență energiilor

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF \quad (4.21)$$

care exprimă principiul conservării energiei între domeniile timp și frecvență.

Mărimea

$$S_{xx}(F) = |X(F)|^2, \quad (4.22)$$

care este integrandul relației (4.21), reprezintă distribuția de energie a semnalului, funcție de frecvență și se numește *spectrul densității de energie* sau *densitate spectrală de energie* a lui $x(t)$. Din (4.22) se observă că

$$S_{xx}(-F) = S_{xx}(F) \quad (4.23)$$

adică spectrul densității de energie a unui semnal real are simetrie pară.

Din (4.22) se observă că $S_{xx}(F)$ nu conține informații despre fază și, deci, din cunoașterea spectrului de energie nu se va putea reface în mod unic semnalul $x(t)$.

4.2. Analiza în frecvență a semnalelor discrete

Așa cum s-a arătat în paragraful 1.2, spre deosebire de semnalele analogice, al căror domeniu de frecvențe se întinde de la $-\infty$ la ∞ , domeniul de frecvențe pentru semnalele discrete este restrâns în intervalul $(-\pi, \pi]$ sau $[0, 2\pi)$.

4.2.1. Serii Fourier pentru semnale discrete periodice

Pentru un semnal discret periodic ($x[n] = x[n + N], \forall n \in Z$) există numai N valori într-o perioadă, după care acestea se repetă $x[N] = x[0], x[N+1] = x[1], \dots$. Se mai poate scrie $x[n] = x[(n)_N]$, unde $(n)_N$ este reprezentarea lui n în clase de resturi modulo N . Această observație atestă faptul că spațiul semnalelor discrete periodice, de perioadă N , are dimensiunea N . Funcțiile elementare $e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k \in N, 0 \leq k \leq N-1$ formează o bază ortogonală completă în spațiul funcțiilor periodice de perioadă N . Un semnal discret de perioadă fundamentală N , poate conține componente de frecvență separate prin

$\frac{2\pi}{N}$ radiani sau $f = \frac{1}{N}$ și reprezentarea în serie Fourier a unui semnal discret periodic, va conține cel mult N componente de frecvență. Aceasta reprezintă diferența esențială între reprezentările în serie Fourier ale semnalelor continue și discrete.

Se presupune un semnal discret $x[n]$, de perioadă N. Seria Fourier pentru acest semnal discret se definește cu relația

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.24)$$

unde $\{c_k\}$ sunt coeficienții dezvoltării în serie.

Pentru a determina expresia coeficienților Fourier, se folosește relația

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N \dots \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (4.25)$$

Multiplicând ambii membri ai relației (4.24) cu $e^{-j2\pi mn/N}$ și sumând produsul de la $n = 0$ la $n = N-1$, rezultă

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi(k-m)n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} c_m = N c_m, \quad (m = k) \quad (4.26)$$

de unde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.27)$$

Relația (4.24) se mai numește ecuație de sinteză, iar (4.27) ecuație de analiză. Coeficienții $\{c_k\}$ reprezintă *spectrul* semnalului discret și descriu semnalul $x[n]$ în domeniul frecvență, reprezentând amplitudinea și faza asociate componentei

$$s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\omega_k n} \quad (4.28)$$

unde $\omega_k = 2\pi k / N$. Coeficienții $\{c_k\}$ sunt mărimi complexe, modulul coeficienților determinând *spectrul de modul*, iar faza acestora, *spectrul de fază*.

Semnalul $s_k[n]$ este periodic, de perioadă N , adică $s_k[n+N] = s_k[n]$.

Natura discretă a semnalului $s_k[n]$ determină ca și coeficienții $\{c_k\}$ să fie periodici, de aceeași perioadă N . Într-adevăr,

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(k+N)n/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = c_k \quad (4.29)$$

Spectrul unui semnal $x[n]$ periodic, de perioadă N , este o secvență periodică, de aceeași perioadă N . În consecință, cunoașterea a N eșantioane consecutive din semnal sau din spectrul său determină o descriere completă a semnalului în domeniile timp, respectiv frecvență. Aceasta înseamnă că domeniul corespunzător lui $k = 0, 1, \dots, N-1$ (adică o perioadă) acoperă domeniul fundamental de frecvență $0 \leq \omega_k = \frac{2\pi k}{N} < 2\pi$ sau, pentru $-\frac{N}{2} < k \leq \frac{N}{2}$ domeniul corespunzător de frecvență este $-\pi < \omega_k = \frac{2\pi k}{N} \leq \pi$.

Dacă semnalul $x[n]$ este real, $x^*[n] = x[n]$, și din relația (4.27) se obține

$$c_k^* = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right)^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi kn/N} = c_{-k} \quad (4.30)$$

sau, echivalent

$$\begin{aligned} |c_{-k}| &= |c_k| \quad \text{simetrie pară} \\ -\angle c_{-k} &= \angle c_k \quad \text{simetrie impară} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Acstea proprietăți de simetrie ale spectrului semnalului periodic, împreună cu proprietatea de periodicitate a coeficienților c_k determină

$$|c_k| = |c_{N-k}| \quad (4.32)$$

$$\angle c_k = -\angle c_{N-k} \quad (4.33)$$

adică

$$\begin{aligned} |c_0| &= |c_N| \quad \angle c_0 = -\angle c_N = 0 \\ |c_1| &= |c_{N-1}| \quad \angle c_1 = -\angle c_{N-1} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$|c_{N/2}| = |c_{N/2}| \quad \angle c_{N/2} = 0 \text{ pentru } N \text{ par}$$

$$\left| c_{(N-1)/2} \right| = \left| c_{(N+1)/2} \right| \quad \angle c_{(N-1)/2} = -\angle c_{(N+1)/2} \text{ pentru } N \text{ impar}$$

Pentru un semnal real, spectrul dat de coeficienții c_k , $k = 0, 1, \dots, N/2$, pentru N par sau $k = 0, 1, \dots, (N-1)/2$ pentru N impar, descrie complet semnalul în domeniul frecvență.

Folosind proprietățile de simetrie pentru coeficienții c_k , seria Fourier (4.24) devine

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^L |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn + \theta_k\right) \text{ sau}$$

$$x[n] = a_0 + \sum_{k=1}^L \left(a_k \cos \frac{2\pi}{N} kn - b_k \sin \frac{2\pi}{N} kn \right) \quad (4.35)$$

unde $\theta_k = \angle c_k$, $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$, $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$, $L = N/2$ pentru N par și $L = (N-1)/2$, pentru N impar.

Spectrul este discret și periodic, de aceeași perioadă fundamentală cu semnalului.

Exemplul 4.1.

Să se calculeze spectrul următoarelor secvențe:

- a) $x_1[n] = \cos \sqrt{5}\pi n$;
- b) $x_2[n] = 2 \sin \pi n / 3$;
- c) $x_3[n] = \{1,1,0,0\}$.

Soluție

a) Pentru $x_1[n] = \cos \sqrt{5}\pi n = \cos 2\pi f_0 n$ rezultă $f_0 = \sqrt{5}/2 \notin \mathbb{Q}$, ceea ce înseamnă că secvența nu este periodică și spectrul său nu se calculează cu ajutorul seriei Fourier.

b) $x_2[n] = 2 \sin \pi n / 3 = \frac{2(e^{j2\pi n/6} - e^{-j2\pi n/6})}{2j} = -j(e^{j2\pi n/6} - e^{j2\pi 5n/6})$. Prin

identificare cu seria Fourier rezultă $N=6$, $c_1=-j$, $c_5=j$, $c_2=c_3=c_4=c_6=0$. Se observă că $|c_1|=|c_5|=1$, $\angle c_1 = -\pi/2$, $\angle c_5 = \pi/2$.

c) Perioada secvenței este $N=4$. Aplicând relația (4.27), se obțin coeficienții seriei pentru $k=0, 1, 2, 3$.

$c_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (x[0] + x[1] e^{-j2\pi k/4})$, de unde rezultă următoarele valori pentru $k=0, 1, 2, 3$: $c_0=1/2$; $c_1=(1-j)/4$; $c_2=0$; $c_3=(1+j)/4$.

4.2.2. Spectrul densității de putere pentru semnale discrete periodice

Puterea medie a unui semnal discret periodic, cu perioada N , se calculează cu relația

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (4.36)$$

Înlocuind (4.24) în (4.36) și ținând cont de (4.27), aceasta se exprimă în funcție de coeficienții Fourier, după cum urmează:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N} \right) = \\ &\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Relația (4.37) se numește echivalență puterilor pentru semnale discrete periodice. Mărimea $|c_k|^2$ se numește *spectrul densității de putere* a semnalului discret periodic. Ca și în cazul semnalelor analogice, spectrul densității de putere nu conține informații despre faza semnalului.

Energia unui semnal discret periodic calculată pe o perioadă este

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \quad (4.38)$$

4.2.3. Proprietățile seriei Fourier pentru semnale periodice discrete

- 1. Liniaritatea** Dacă transformările (4.24) și (4.27) definesc o pereche Fourier $x[n] \longleftrightarrow \{c_k\}$, atunci

$$\sum_j a_j x_j[n] \longleftrightarrow \sum_j a_j c_{jk} \quad (4.39)$$

- 2. Deplasarea (translarea) în timp**

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow \left\{ e^{-j2\pi k n_0 / N} c_k \right\} \quad (4.40)$$

Spectrul de modul al semnalului nu este afectat de deplasare, ci numai spectrul de fază. Într-adevăr, aplicând (4.27) și notând $n-n_0=m$, se obține

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n - n_0] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j2\pi k(m+n_0)/N} = \\ &e^{-j2\pi k n_0 / N} \frac{1}{N} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m] e^{-j2\pi km / N} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Cum nu contează originea domeniului de însumare, ci doar înglobarea a N valori succesive, relația (4.40) este demonstrată.

- 3. Conjugarea complexă** Fie $x[n] \in C$.

$$x^*[n] \longleftrightarrow \{b_k\} = \{c_{-k}^*\} = \{c_{(-k)_N}^*\} \quad (4.42)$$

Coefficienții b_k ai semnalului complex conjugat $x^*[n]$ sunt

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(-k)n/N} \right)^* = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^* \quad (4.43)$$

4. Reflectarea semnalului

$$x[-n] \longleftrightarrow \{c_{-k}\} = \{c_{(-k)_N}\} \quad (4.44)$$

5. Modificarea scării timpului

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{m} c_k \right\} \quad (4.45)$$

unde $x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases}$ (4.46)

Perioada N_1 a semnalului $x_{(m)}[n]$ se determină după cum urmează:

$$x_{(m)}[n+N_1] = \begin{cases} x[(n+N_1)/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } (n+N_1) \\ 0; & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.47)$$

Definiția periodicității implică egalitatea relațiilor (4.46) și (4.47). Dacă n se divide la m și $(n+N_1)$ se divide la m , atunci și N_1 se divide la m . Alegând $N_1=Lm$, $L \in N^*$, rezultă

$$x_{(m)}[n+N_1] = \begin{cases} x[(n/m)+L]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases} = \begin{cases} x[n/m]; & \text{dacă } m \text{ divide } n \\ 0; & \text{în rest} \end{cases}$$

Deoarece $x[n]$ este de perioadă N , se obține $L=N$ și, deci, perioada semnalului $x_{(m)}[n]$ este $N_1=Lm=Nm$. Coeficienții seriei se calculează astfel:

$$\begin{aligned} c_{1k} &= \frac{1}{mN} \sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} n} = \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x_{(m)}[pm] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} mp} = \\ &= \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-jk \frac{2\pi}{N} p} = \frac{1}{m} c_k \end{aligned}$$

6. Modularea semnalului.

$$e^{jk_0 \frac{2\pi}{N} n} x[n] \longleftrightarrow \{c_{k-k_0}\} \quad (4.48)$$

Modularea realizează translarea cu k_0 a spectrului de modul și fază.

7. Produsul a două semnale (teorema produsului). Dacă $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt două secvențe periodice de perioadă N , ai căror coeficienți Fourier sunt

$$c_{1k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}},$$

respectiv $c_{2k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}, k = \overline{0, N-1}$

atunci

$$x_3[n] = x_1[n] x_2[n] \longleftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2((k-m)_N)} = c_{1m} \otimes c_{2m} \quad (4.50)$$

unde \otimes desemnează conoluția periodică sau circulară a secvențelor c_{1m} și c_{2m} . Produsul semnalelor este periodic de perioadă N. Coeficienții c_k ai produsului sunt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} e^{j \frac{2\pi m n}{N}} \right) x_2[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi (k-m)n}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2(k-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} c_{1m} c_{2(k-m)_N} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ultima sumă reprezintă *conoluția periodică sau circulară* a secvențelor discrete formate din coeficienții c_{1k} și c_{2k} .

8. Conoluția periodică sau circulară (teorema conoluției). Dacă $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt două secvențe periodice de perioadă N, ai căror coeficienți Fourier sunt dați de (4.49), atunci

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \longleftrightarrow \{Nc_{1k} c_{2k}\} \quad (4.52)$$

unde, prin definiție, conoluția circulară a două semnale periodice $x_1[n]$ și $x_2[n]$ de aceeași perioadă N este

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k] x_2[(n-k)_N] \quad (4.53)$$

Pentru a determina coeficienții seriei Fourier ai conoluției $x_1[n] \otimes x_2[n]$ se determină semnalul $x_3[n]$ care are drept coeficienți ai seriei Fourier produsele $Nc_{1k} c_{2k}$.

$$\begin{aligned} x_3[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} Nc_{1k} c_{2k} e^{j 2\pi k n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] e^{-j 2\pi k m / N} \right) c_{2k} e^{j 2\pi k n / N} = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_{2k} e^{j 2\pi k (n-m) / N} \right) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[n-m] \end{aligned} \quad (4.54)$$

9. Diferența de ordinul întâi a semnalului discret

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \right) c_k \\ \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

10. Însumarea în domeniul timp Însumând un semnal discret $x[n]$ periodic de perioadă N , fără componentă continuă, adică având $c_0=0$, se obține un semnal $y[n]$ de aceeași perioadă, pentru care

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] = y[n] \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_k \\ \hline 1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \end{array} \right\}, c_0 = 0. \quad (4.56)$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]; y[n] - y[n-1] = x[n] \quad (4.57)$$

Coeficienții seriei Fourier ai semnalului $y[n]$ sunt b_k . Aplicând proprietatea 9 (relația 4.55) relației (4.57), se obține

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \right) b_k \\ \end{array} \right\} = c_k \quad (4.58)$$

de unde rezultă coeficienții b_k ai semnalului $y[n]$, ca în relația (4.56).

11. Proprietăți specifice semnalelor reale. Dacă $x[n] \in R$, atunci $x[n] = x^*[n]$ și, conform relației (4.24), rezultă că

$$c_k = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^* \quad (4.59)$$

ceea ce echivalează cu

$$|c_k| = |c_{-k}| = |c_{(-k)_N}^*|; \quad \angle c_k = -\angle c_{-k} = -\angle c_{(-k)_N}$$

$$\operatorname{Re}\{c_k\} = \operatorname{Re}\{c_{-k}\} = \operatorname{Re}\{c_{(-k)_N}\}; \quad \operatorname{Im}\{c_k\} = -\operatorname{Im}\{c_{-k}\} = -\operatorname{Im}\{c_{(-k)_N}\} \quad (4.59')$$

4.2.4. Analiza în frecvență a semnalelor discrete aperiodice

În analiza semnalelor discrete, aperiodice, de energie finită se folosește transformata Fourier. Prin definiție, transformata Fourier a unui semnal discret $x[n]$, de energie finită, este dată de relația

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.60)$$

unde $X(\omega)$ reprezintă *spectrul* semnalului $x[n]$.

Există două deosebiri de bază între transformatele Fourier pentru semnale de energie finită analogice și discrete. Prima constă în faptul că spectrul semnalului analogic cuprinde un domeniu infinit de frecvență $(-\infty, \infty)$, pe când cel pentru semnale discrete este limitat la domeniul $(-\pi, \pi]$ sau, echivalent, $[0, 2\pi)$, fiind periodic, de perioadă 2π . Această periodicitate este o consecință a periodicității semnalului exponentional complex. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} X(\omega + 2k\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned} \quad (4.61)$$

A două diferență de bază constă în faptul că transformata Fourier a semnalului discret se exprimă printr-o sumă, în timp ce pentru cel analogic, cu o integrală. Deoarece $X(\omega)$ este o funcție periodică de variabilă ω , ea se poate descompune cu ajutorul seriei Fourier. Coeficienții Fourier ai descompunerii sunt valorile secvenței $x[n]$. Pentru a demonstra această afirmație, se multiplică ambii membri ai relației (4.60) cu $e^{j\omega m}$ și se integrează pe domeniul $[-\pi, \pi]$. Astfel,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega \quad (4.62)$$

Integrala din membrul drept se calculează schimbând întâi ordinea sumei cu integrala. Această schimbare poate fi făcută dacă seria

$$X_M(\omega) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.63)$$

converge uniform la $X(\omega)$ pentru $M \rightarrow \infty$. Convergența uniformă presupune că $X_M(\omega) \rightarrow X(\omega)$ pentru $M \rightarrow \infty$. (Convergența transformatei Fourier este detaliată în paragraful 4.2.6). Presupunând, pentru moment, că seria converge uniform, membrul drept al relației (4.62) devine

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x[m] & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (4.64)$$

Din (4.64) și (4.62) se obține

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4.65)$$

Ecuația (4.60) se numește *ecuație de analiză*, iar (4.65), *ecuație de sinteză*.

4.2.5. Spectrul densității de energie pentru semnale discrete aperiodice

Energia E_x a unui semnal discret, definită cu relația (2.17) poate fi exprimată în funcție de spectrul $X(\omega)$, după cum urmează:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) e^{-j\omega n} d\omega \right] = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.66)$$

Această relație este cunoscută sub numele de echivalență energiilor pentru semnale discrete aperiodice, de energie finită.

Spectrul $X(\omega)$ este o mărime complexă, care în coordonate polare se exprimă sub forma

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (4.67)$$

unde $\theta(\omega) = \angle X(\omega)$ este faza, iar $|X(\omega)|$ modulul lui $X(\omega)$.

Ca și în cazul semnalelor analogice

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (4.68)$$

reprezintă distribuția de energie a semnalului ca o funcție de frecvență și se numește *spectrul densității de energie*.

Pentru $x[n]$ un semnal real,

$$X^*(\omega) = X(-\omega) \quad (4.69)$$

sau, echivalent

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad (4.70)$$

$$\text{și} \quad \angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \quad (4.71)$$

Din (4.68) ÷ (4.71) rezultă

$$S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega) \quad (4.72)$$

Din această proprietate de simetrie, rezultă că domeniul de frecvență pentru semnale discrete aperiodice poate fi redus la $0 \leq \omega \leq \pi$ (adică o jumătate de perioadă), lucru care s-a putut observa și la semnale discrete periodice. În consecință, descrierea unui semnal real discret poate

fă realizată complet prin specificarea spectrului în domeniul de frecvență $0 \leq \omega \leq \pi$ sau $0 \leq F \leq F_s / 2$.

4.2.6. Convergența transformatei Fourier

În obținerea transformatei inverse date de (4.65) s-a presupus că seria (4.63) converge uniform la $X(\omega)$ când $M \rightarrow \infty$. Convergența uniformă presupune că pentru fiecare ω [23]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |X_M(\omega) - X(\omega)| = 0 \quad (4.73)$$

Convergența uniformă este garantată dacă $x[n]$ este absolut sumabil. Într-adevar, dacă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (4.74)$$

$$\text{atunci } |X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (4.75)$$

În plus, se observă că, dacă $x[n]$ este absolut sumabil, atunci el este un semnal de energie finită.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \leq \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \right]^2 < \infty \quad (4.76)$$

Relația (4.74) este o *condiție suficientă* pentru existența transformatei Fourier discrete.

Unele secvențe nu sunt absolut sumabile, dar sunt de pătrat sumabile, adică au energie finită, ceea ce reprezintă o condiție mai slabă decât (4.74). Și pentru aceste semnale, de energie finită, se poate defini transformata Fourier, dar trebuie relaxate condițiile convergenței uniforme. Pentru asemenea secvențe se poate impune o condiție de convergență în medie pătratică [18]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega) - X_M(\omega)|^2 d\omega = 0 \quad (4.77)$$

Energia erorii $|X(\omega) - X_M(\omega)|$ tinde la zero, dar nu este necesar ca eroarea $|X(\omega) - X_M(\omega)|$ să tindă la zero. În acest mod, semnalele de energie finită pot fi incluse în clasa semnalelor pentru care există transformata Fourier.

Exemplul 4.2.

Să se determine răspunsul la impuls al unui sistem al căruia răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.78)$$

Răspunsul la impuls poate fi determinat cu relația (4.65).

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, & n \neq 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

Se observă că $h[n]$ este diferit de zero pentru $n < 0$, deci sistemul este necauzal. De asemenea, $h[n]$ nu este absolut sumabil. Aceasta se datorează faptului că $H(\omega)$ este o funcție discontinuă în $\omega = \omega_c$ și $\omega = -\omega_c$.

Seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-jn\omega} \quad (4.80)$$

nu converge uniform pentru toate valorile lui ω . Secvența $h[n]$ este de energie finită, $E_x = \frac{\omega_c}{\pi}$, deci suma din (4.80) va converge la $H(\omega)$ dat de (4.78) în medie pătratică. În continuare se consideră suma finită

$$\begin{aligned} H_M(\omega) &= \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-jn\omega} = \sum_{n=-M}^M \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\theta n} e^{-jn\omega} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-(\theta-\omega)M} \sum_{m=0}^{2M} e^{j(\theta-\omega)m} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[(2M+1)(\omega-\theta)/2]}{\sin[(\omega-\theta)/2]} d\theta \end{aligned} \quad (4.81)$$

În figura 4.2 este reprezentat $H_M(\omega)$ pentru diverse valori ale lui M . Se observă oscilații semnificative la $\omega = \omega_c$, independent de valoarea lui M . Cu creșterea lui M , oscilațiile au o frecvență mai ridicată, dar mărimea riplului rămâne aceeași. Pentru $M \rightarrow \infty$, oscilațiile converg la punctul de discontinuitate $\omega = \omega_c$, dar rămân de aceeași amplitudine. Oricum, $h[n]$ dat de (4.79) este de patrat sumabil și $H_M(\omega)$ converge la $H(\omega)$ în medie pătratică.

Comportarea oscillatorie a aproximării $H_M(\omega)$ a lui $H(\omega)$ în punctul de discontinuitate a lui $H(\omega)$ se numește *fenomen Gibbs*. Deși eroarea dintre $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(\omega)$ și $H(\omega)$ poate părea neimportantă, deoarece cele două funcții diferă numai în $\omega = \omega_c$, se va vedea (la proiectarea filtrelor digitale)

că sumele finite au implicații importante în proiectarea sistemelor discrete pentru filtrare.

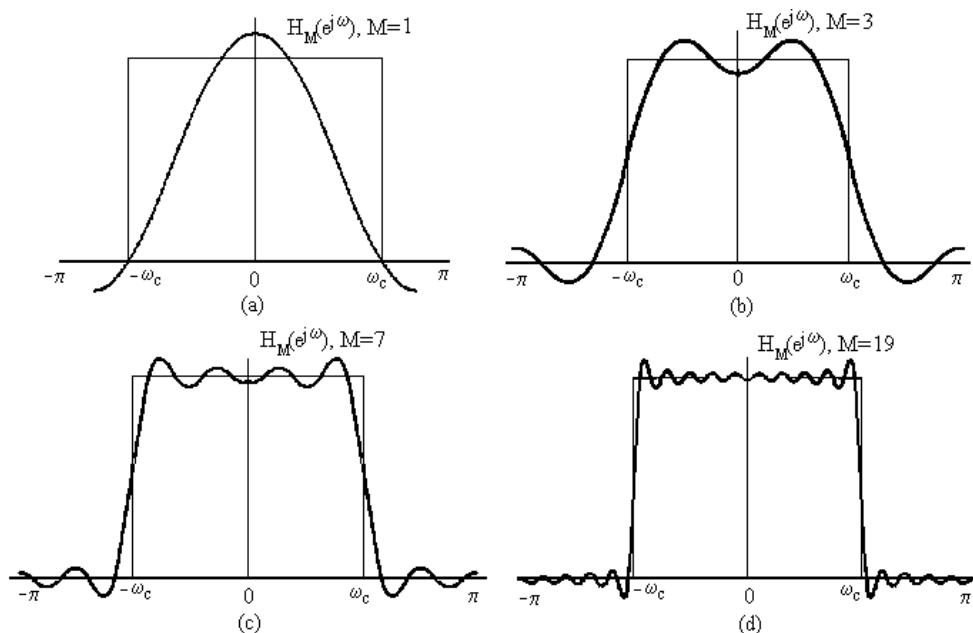


Figura 4.2. Comportarea oscilatorie la $\omega = \omega_c$, denumită fenomen Gibbs

Fenomenul Gibbs a fost observat inițial la trunchierea seriei Fourier pentru semnale analogice periodice. În 1898 fizicianul Albert Michelson a construit un analizor armonic, cu care descompunea un semnal până la optzecea componentă, neglijând componente de ordin superior. Însumând componente, se obținea un semnal foarte asemănător cu cel inițial, cu o singură excepție, și anume, cazul când semnalul analizat era o undă rectangulară, la reconstrucția căruia se obținea un semnal care avea mici oscilații în vecinătatea tranziției semnalului. În 1899 Gibbs studiază și explică acest fenomen prin neconvergență uniformă a seriei Fourier în discontinuitate, deoarece odată cu creșterea lui M , amplitudinea oscilațiilor nu descrește, ele fiind doar "înghesuite" înspre momentul de tranziție al semnalului. Din figura 4.2 se observă că, indiferent de valoarea lui M , deci indiferent de calitatea aproximării, valoarea spre care tinde seria în punctul de discontinuitate a semnalului este media limitelor laterale ale semnalului.

Observație: Spre deosebire de semnalele discrete aperiodice, pentru semnale discrete periodice trunchierea seriei Fourier nu conduce la

apariția unui fenomen asemănător cu fenomenul Gibbs, ci numai la o aproximare a acesteia. Aproximarea va fi cu atât mai bună, cu cât numărul termenilor însumăți se apropie de N, perioada semnalului. Când se însumează toți termenii, semnalul obținut este chiar $x[n]$, fără nici o eroare. Din cele prezentate până acum s-a observat că sumabilitatea absolută a unei secvențe (care asigură convergența uniformă a transformatei Fourier) și energia finită (care asigură convergența în medie pătratică) sunt *condiții suficiente* pentru existența transformatei Fourier. Există semnale care nu îndeplinesc condițiile semnalate anterior, dar totuși li se poate asocia o transformată Fourier, situație care va fi tratată în paragraful următor.

4.2.7. Transformata Fourier pentru semnale discrete periodice

După cum s-a arătat în paragraful 4.2.6, convergența uniformă a transformatei Fourier a unei secvențe impune ca aceasta să fie absolut sumabilă, iar convergența în medie pătratică cere ca secvența să fie de patrat sumabil. Secvențele periodice nu satisfac nici una din aceste condiții, deoarece ele nu tind spre zero pentru $n \rightarrow \pm\infty$. Se poate considera că secvențele ce pot fi exprimate ca o sumă de exponențiale complexe au transformata Fourier sub forma unui tren de impulsuri [18]. Acesta este cazul semnalelor discrete periodice pentru care transformata Fourier poate fi interpretată ca fiind un tren de impulsuri în domeniul frecvență a căror valoare este proporțională cu valoarea coeficienților seriei Fourier. Mai precis, dacă $x[n]$ este periodic de perioadă N și coeficienții corespunzători ai seriei Fourier sunt c_k , atunci transformata Fourier a secvenței periodice $x[n]$ este definită ca fiind trenul de impulsuri

$$X(\omega) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \quad (4.82)$$

De remarcat periodicitatea de 2π pentru $X(\omega)$ atât timp cât $c_k = c_{k+N}$, și impulsurile sunt spațiate la multipli întregi de $2\pi/N$, unde N este un întreg care reprezintă perioada semnalului $x[n]$. Pentru a arăta că $X(\omega)$ definit de (4.82) reprezintă transformata Fourier a semnalului periodic, se înlocuiește aceasta relație în (4.65), obținându-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.83)$$

Se reamintește că în evaluarea transformatei Fourier inverse integrarea se poate efectua pe orice interval de perioadă 2π , deoarece integrandul este periodic de perioadă 2π . Limitele integralei au fost notate cu $0-$ și $2\pi-$ pentru a sugera că integrarea se efectuează pe un interval care conține impulsul din $\omega=0$ și îl exclude pe cel din $\omega=2\pi$. Prin schimbarea ordinii sumei cu integrala se obține

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{0-}^{2\pi-} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) e^{j\omega n} d\omega = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn} \quad (4.84)$$

Forma finală a ecuației (4.84) a rezultat datorită faptului că numai impulsurile corespunzătoare lui $k=0, 1, \dots, (N-1)$ sunt incluse în intervalul dintre $\omega=0-$ și $\omega=2\pi-$.

Comparând relația (4.84) cu (4.24) se observă că membrul drept al ecuației (4.84) este chiar reprezentarea în serie Fourier pentru semnalul $x[n]$ dat de (4.1). În consecință, transformata Fourier inversă a trenului de impulsuri din relația (4.82) este chiar semnalul periodic $x[n]$. Deși transformata Fourier a secvențelor periodice nu converge în sens obișnuit, ci numai în sens distribuțional, introducerea impulsurilor permite includerea secvențelor periodice în cadrul celor care pot avea transformată Fourier.

Uneori este utilă cunoașterea transformatei Fourier pentru semnale care nu sunt nici absolut sumabile, nici de patrat sumabil. Acest lucru se va ilustra pe exemplele următoare.

Exemplul 4.3.

Fie secvența $x_1[n]=1$ pentru toți n . Această secvență nu este nici absolut sumabilă, nici de patrat sumabil, aşa încât, pentru acest caz suma (4.60) nu converge nici uniform, nici în medie patratică. Formal, se poate stabili o relație similară proprietății de dualitate din domeniul analogic în felul următor

$$\text{dacă} \quad F\{\delta[n]\} = 1 \quad (4.85)$$

$$\text{atunci} \quad F\{1\} = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.86)$$

unde $\delta[n]$ este funcția impuls unitate, iar $\delta(\omega)$ este distribuția Dirac.

Într-adevăr, prin înlocuirea formală a relației (4.86) în (4.65) se obține

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = 1 \quad (4.87)$$

dar, pentru semnale discrete, spectrul este periodic de perioadă 2π , $\delta(\omega) = \delta(\omega - 2\pi k)$ și

$$F^{-1}\{2\pi\delta(\omega - 2\pi k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) e^{j\omega n} d\omega = e^{j2\pi kn} = 1, \quad n \in Z \quad (4.88)$$

Semnalul $x_1[n] = 1$ se poate scrie ca o sumă de impulsuri unitate întârziante

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (4.89)$$

Acest semnal se poate descompune într-o serie Fourier exponențială în forma

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (4.90)$$

Semnalul $x_1[n]$ fiind periodic de perioadă $N=1$, se poate descompune într-o serie Fourier ai cărei coeficienți sunt

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{\frac{j2\pi kn}{N}} = 1 \quad (4.91)$$

astfel încât, prin prelungire periodică conform relației (4.90), $x_1[n]$ se poate scrie

$$x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kn} \quad (4.92)$$

Tinând seama de (4.86), rezultă că

$$F\{e^{j2\pi kn}\} = 2\pi\delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.93)$$

Cu relația (4.93), rezultă

$$F\{x_1[n]\} = F\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kn} \right\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.94)$$

Cu (4.60), spectrul semnalului $x_1[n]$ este

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \quad (4.95)$$

Din (4.94) și (4.95) rezultă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \quad (4.96)$$

Se constată că spectrul unui semnal discret și periodic este, de asemenea, discret și periodic. În cazul considerat, impulsurile care constituie spectrul sunt funcție de variabilă continuă ω și, prin urmare, sunt de "înălțime infinită, lățime zero și arie unitară", ceea ce este în concordanță cu faptul că seria (4.60) nu converge.

Exemplul 4.4.

Fie semnalul $x_2[n] = e^{j\omega_0 n}$ care este periodic relativ la ω_0 , de perioadă 2π . Conform relațiilor (4.60) și (4.94), spectrul său este

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X_1(\omega - \omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k), \quad (4.97)$$

adică, transformata Fourier a unei exponențiale complexe de modul unitar este o distribuție Dirac de perioadă 2π , după cum este reprezentat în figura 4.3.

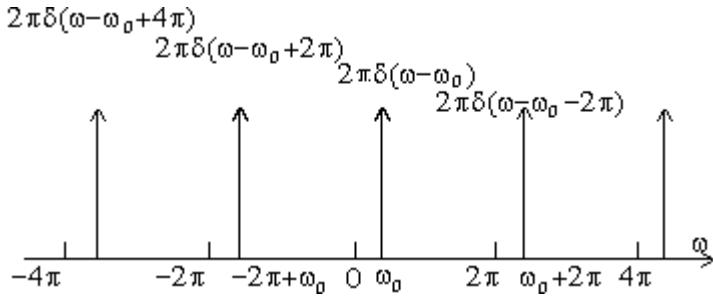


Figura 4.3. Spectrul exponențialei discrete

Rezultatul obținut în acest exemplu poate fi extins la semnale periodice care pot fi exprimate ca o sumă ponderată de exponențiale complexe (seria Fourier discretă). Astfel, aplicând transformata Fourier relației (4.24) și tinând seama de liniaritate, rezultă

$$X(\omega) = F\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k F\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\} \quad (4.98)$$

Conform relației (4.97), (4.98) devine

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi r) \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{N} - 2\pi r) \right) \quad (4.99)$$

Pentru r fixat, termenii care rezultă sunt distribuții Dirac plasate în intervalul $[2\pi r, 2\pi r - 2\pi/N]$ cu pasul $2\pi/N$. Pentru $r+1$, în intervalul immediat următor $[2\pi(r+1), 2\pi(r+1) - 2\pi/N]$ se obțin aceleasi valori pentru coeficienți, adică $2\pi c_0, 2\pi c_1, \dots, 2\pi c_{N-1}$. Dacă se consideră și periodicitatea după k , cu perioada N , relația (4.99) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned}
X(\omega) = & 2\pi c_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - r \cdot 2\pi) + 2\pi c_1 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi) + \\
& + 2\pi c_2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2 \cdot \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi) + \dots + \\
& + 2\pi c_{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - (N-1) \cdot \frac{2\pi}{N} r \cdot 2\pi\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{(k)_N} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{N}\right)
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Forma spectrului semnalului periodic este prezentată în figura 4.4. Acesta este format din linii spectrale reprezentate de distribuții Dirac plasate la multiplii frecvenței de $2\pi/N$. Amplitudinile acestora au valoarea $2\pi c_{(k)_N}$. Se remarcă periodicitatea cu 2π a spectrului, ca rezultat al periodicității coeficienților seriei Fourier și al plasării distribuțiilor la multipli întregi de $\omega_0 = 2\pi/N$.

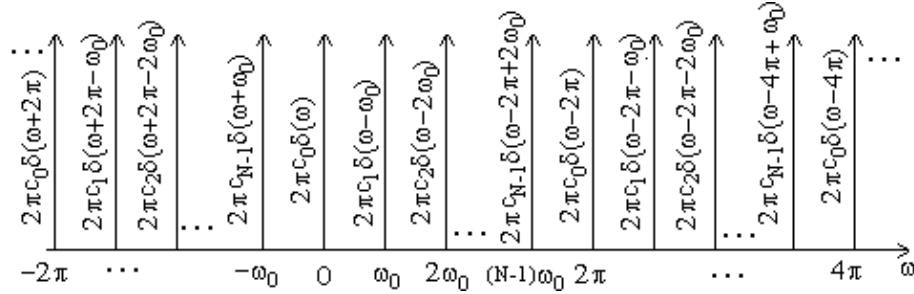


Figura 4.4. Spectrul unui semnal discret periodic, format din distribuții Dirac plasate la $\omega_k=2k\pi/N$ și periodic de perioadă 2π

Exemplul 4.5.

Fie semnalul discret periodic $\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$, de perioadă N . Să se determine spectrul acestui semnal.

Soluție. Coeficienții Fourier ai acestui semnal periodic sunt

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_N[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}$$

Conform relației (4.100), spectrul acestui semnal periodic este

$$F\{\delta_N[n]\} = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega), \quad \omega_0 = 2\pi/N. \tag{4.101}$$

4.2.8. Relația între transformata Fourier și transformata Z

Transformata Z a unei secvențe $x[n]$ este definită ca

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad \text{RC: } r_2 < |z| < r_1 \quad (4.102)$$

Dacă se exprimă z în formă polară

$$z = re^{j\omega} \quad (4.103)$$

unde $r = |z|$ și $\omega = \angle z$, atunci în regiunea de convergență

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \quad (4.104)$$

Din (4.104) se observă că $X(z)$ poate fi interpretată ca transformată Fourier a semnalului $x[n]r^{-n}$.

Termenul r^{-n} poate fi văzut ca un factor de ponderare ce crește cu n, dacă $r < 1$ și descrește pentru $r > 1$. Dacă $X(z)$ converge pentru $|z|=1$, atunci

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.105)$$

adică transformata Fourier poate fi văzută ca transformata Z a unei secvențe evaluată pe cercul unitate. Dacă $X(z)$ nu converge în regiunea $|z|=1$ (cercul unitate nu este conținut în RC a lui $X(z)$), transformata Fourier fie nu există, fie nu se obține prin simpla înlocuire în $X(z)$. Reciproc, dacă $X(\omega)$ există, atunci $X(z)$ converge pe cercul unitate. Din cele prezentate până acum se desprind două observații.

1. Există secvențe pentru care există transformata Z, dar care nu au transformată Fourier sau, dacă au, aceasta nu se calculează prin evaluarea lui $X(z)$ pe cercul unitate. Existența transformatei Z impune ca secvența $\{x[n]r^{-n}\}$ să fie absolut sumabilă pentru anumite valori ale lui r, adică

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \quad (4.106)$$

Dacă (4.106) converge numai pentru valori ale lui $r > 1$, atunci transformata Z există, dar transformata Fourier nu există. Acesta este, de exemplu, cazul secvenței cauzale exponențiale $x[n] = a^n u[n]$, unde $|a| > 1$.

2. Există semnale de energie finită care au transformată Fourier, dar care nu admit transformată Z.

De exemplu, semnalul

$$x[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (4.107)$$

nu satisfacă relația (4.106), și, deci, nu admite transformată Z, dar, deoarece este de energie finită, transformata sa Fourier converge în medie pătratică la funcția discontinuă $X(\omega)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (4.108)$$

În concluzie, existența transformatei Z necesită ca (4.106) să fie satisfăcută într-o anumită regiune a planului Z. Dacă această regiune conține cercul unitate, transformata $X(\omega)$ există. Existența transformatei Fourier pentru semnale de energie finită nu asigură în mod necesar existența transformatei Z.

4.2.9. Proprietățile transformatei Fourier pentru semnale discrete aperiodice de energie finită

Transformata Fourier a semnalelor discrete aperiodice de energie finită prezintă o serie de proprietăți foarte utile în reducerea complexității analizei acestora. Se vor folosi notațiile:

$$X(\omega) = F\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.109)$$

pentru transformarea directă (ecuație de analiză) și

$$x[n] = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (4.110)$$

pentru transformarea inversă (ecuație de sinteză). $x[n]$ și $X(\omega)$ se vor numi perechi Fourier. Se reamintește că $X(\omega)$ este o funcție periodică de perioadă 2π .

Proprietățile transformatei Fourier prezentate în continuare sunt similare celor ale transformatei Z, obținându-se din acestea prin înlocuirea $z = e^{j\omega}$.

1. Liniaritatea Dacă $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(\omega)$
și $x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega) \quad (4.111)$

2. Translația (deplasarea) în domeniul timp Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ atunci $x[n-k] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega k} X(\omega)$ (4.112)

3. Reflectarea în timp a semnalului Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ atunci $x[-n] \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$ (4.113)

Aceasta înseamnă că prin reflectarea unui semnal $x[n]$ se obține un semnal al cărui spectru are același modul cu cel al lui $x[n]$, dar faza suferă o schimbare de semn.

4. Modularea în domeniul timp Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ atunci $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$ (4.114)

5. Scalarea variabilei în domeniul timp Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ atunci $x_{(m)}[n] \xleftrightarrow{F} X(m\omega)$ (4.115)

unde $x_{(m)}[n]$ este dat de (4.46).

6. Conjugarea complexă a semnalului Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ și $x[n] \in C$,

atunci $x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$ (4.116)

7. Transformarea diferenței de ordinul întâi a semnalului discret
Expresia $x[n] - x[n-1]$ este echivalentă diferențierii în domeniul analogic.
Dacă $x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

atunci $x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{F} (1 - e^{-j\omega}) X(\omega)$ (4.117)

8. Teorema convoluçãoiei Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$

și $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $x[n] = x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$ (4.118)

9. Teorema corelației Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ și $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $r_{x_1 x_2}(l) \xleftrightarrow{F} S_{x_1 x_2}(\omega) = X_1(\omega) X_2(-\omega)$ (4.119)

$S_{x_1 x_2}(\omega)$ se numește *spectrul densității de energie de intercorelație* a semnalelor $x_1[n]$ și $x_2[n]$.

10. Multiplicarea a două secvențe

Dacă $x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

atunci $x_3[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$ (4.120)

Demonstrația rezultă din (3.27). Dacă $X_1(v)$ și $X_2\left(\frac{1}{v}\right)$ converg pe cercul unitate definit de $v = e^{j\lambda}, -\pi < \lambda < \pi$, se poate alege cercul unitate drept contur de integrare pentru integrala din (3.27). Înlocuind $v = e^{j\lambda}$ și $z = e^{j\omega}$ în (3.27), apoi schimbând variabila din v în λ se obține (4.120), unde $X_1(\lambda) = X_1(v)|_{v=e^{j\lambda}}$, $X_2(\omega - \lambda) = X_2\left(\frac{z}{v}\right)|_{v=e^{j\lambda}, z=e^{j\omega}}$.

Integrala din relația (4.120) reprezintă convoluția transformatelor $X_1(\omega)$ și $X_2(\omega)$ și relația (4.120) este duala convoluției în domeniul timp. Aceasta înseamnă că multiplicarea a două secvențe în domeniul timp este echivalentă cu convoluția lor în domeniul frecvență, și invers.

11. Teorema Wiener-Hincin Fie $x[n]$ un semnal real. Atunci

$$r_{xx}[l] \xleftarrow{F} S_{xx}(\omega) \quad (4.121)$$

adică, densitatea spectrală de energie pentru un semnal de energie finită este transformată Fourier a funcției de autocorelație a semnalului. Aceasta este un caz particular al relației (4.119).

12. Teorema lui Parseval Dacă $x_1[n] \xleftarrow{F} X_1(\omega)$ și $x_2[n] \xleftarrow{F} X_2(\omega)$

atunci
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) \cdot X_2^*(\omega) d\omega \quad (4.122)$$

Pentru demonstrarea relației (4.122), se exprimă $x_1[n]$ din (4.110) și apoi se folosește (4.109).

În cazul în care $x_2[n] = x_1[n] = x[n]$, relația (4.122) devine

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (4.122')$$

adică s-a obținut echivalența energiilor, ca o consecință a relației lui Parseval. Membrul stâng al relației (4.122') reprezintă energia semnalului $x[n]$, egală, de asemenea, cu funcția de autocorelație $r_{xx}[l]$, evaluată în $l=0$. Integrandul din (4.122') reprezintă spectrul densității de energie care, integrat pe un interval de 2π are ca rezultat energia totală a semnalului. Rezumând, se poate scrie

$$E_x = r_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4.123)$$

13. Derivarea în domeniul spectrului Dacă $x[n] \xleftarrow{F} X(\omega)$

$$\text{atunci } nx[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(\omega)}{d\omega} \quad (4.124)$$

14. Însumarea în domeniul timp Dacă $x[n] \xrightarrow{F} X(\omega)$

$$\text{atunci } \sum_{k=-\infty}^n x[k] \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0) \delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.125)$$

Se consideră un semnal $v[n]$ cu proprietatea că $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v[k] = 0$. Dacă se notează cu $V(\omega)$ spectrul său, pentru $\omega = 0$ se obține

$$V(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] = 0 \quad (4.126)$$

Suma parțială a semnalului $v[n]$ este

$$u_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n v[k]; u_1[n] - u_1[n-1] = v[n] \text{ și } U_1(\omega) \text{ spectrul său.}$$

Conform relației (4.117), se obține

$$(1 - e^{-j\omega})U_1(\omega) = V(\omega) \text{ cu } V(0) = 0, \text{ adică } U_1(\omega) = \frac{V(\omega)}{1 - e^{-j\omega}}. \quad (4.127)$$

Relația (4.127) are sens numai dacă $V(0)=0$, deoarece $(1 - e^{-j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0$

În continuare se va determina spectrul semnalului treaptă unitate $u[n]$ care nu satisface condiția (4.126). Din exemplul 4.3 se observă că spectrul unui semnal discret constant este format din linii spectrale plasate la multipli de 2π pe axa frecvențelor. Fie $g_u(\omega)$ componenta spectrului treptei unitate pentru frecvențele $\omega = 2k\pi$, de forma $g_u(\omega) = g\delta_{2\pi}(\omega) = g \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$, unde g este o constantă. Scăzând această componentă din spectrul treptei unitate $X_u(\omega)$, spectrul rămas corespunde unui semnal ce satisface condiția (4.126). Cum $X_u(0) = g_u(0)$ este componenta continuă a semnalului, scăzând din semnal această componentă continuă C , se obține semnalul $u[n] - C$, căruia i se poate aplica relația (4.127).

$$(u[n] - C) - (u[n-1] - C) = u[n] - u[n-1] = \delta[n] \text{ și, deci}$$

$$X_u(\omega) - g_u(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}; \quad X_u(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + g\delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.128)$$

Pentru a determina constanta g se arată că partea impară a treptei unitate discrete este de forma

$$u_o[n] = u[n] + a + b\delta[n] \quad (4.129)$$

Cum $u_o[0] = 0$, rezultă $1+a+b=0$ și (4.129) se poate scrie

$$\frac{u[n] - u[-n]}{2} = u[n] - 1 - b + b\delta[n].$$

Pentru $n=1$ se obține $b=-1/2$ și apoi $a=-1/2$.

Componenta impară a treptei unitate este

$$u_o[n] = u[n] - 1/2 - (1/2)\delta[n] \quad (4.129')$$

și are, după cum se va vedea (proprietatea 15), un spectru pur imaginär.

$$F\{u_o[n]\}(\omega) = X_u(\omega) - (1/2)2\pi\delta_{2\pi}(\omega) - 1/2.$$

Înlocuind (4.128) în (4.129'), se obține

$$\begin{aligned} F\{u_o[n]\}(\omega) &= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} - \frac{1}{2} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) = \\ &= -j \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} + (g-\pi)\delta_{2\pi}(\omega) \notin R \end{aligned}$$

Aceasta impune $g = \pi$ și relația (4.128) devine

$$u[n] \xrightarrow{F} X_u(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi) \quad (4.130)$$

Semnalul sumă parțială $y[n]$ se poate scrie ca o conoluție

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = x[n] * u[n] \quad (4.131)$$

Aplicând teorema conoluției relației (4.131) și ținând seama de (4.130) se obține

$$Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(\omega)\delta_{2\pi}(\omega) \quad (4.132)$$

$X(\omega)\delta(\omega - 2k\pi) = X(2k\pi)\delta(\omega - 2k\pi)$ și cum $X(\omega)$ este periodică, adică $X(2k\pi) = X(0)$, rezultă că $X(\omega)\delta(\omega - 2k\pi) = X(0)\delta(\omega - 2k\pi)$ și relația (4.125) este demonstrată.

15. Proprietăți de simetrie

Dacă un semnal prezintă proprietăți de simetrie în domeniul timp, este posibilă deducerea unor caracteristici ale semnalului în domeniul frecvență.

Semnalele $x[n]$ și $X(\omega)$ se presupun complexe, adică

$$x[n] = x_R[n] + jx_I[n] \quad (4.133)$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega) \quad (4.134)$$

unde indicii R și I indică partea reală, respectiv imaginäră.

Înlocuind (4.133) și $e^{-j\omega n} = \cos \omega n - j \sin \omega n$ în (4.109) și separând părțile reale și imaginare, se obține

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_R[n] \cos \omega n + x_I[n] \sin \omega n \quad (4.135)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n] \sin \omega n - x_I[n] \cos \omega n] \quad (4.136)$$

Similar, din (4.110) se obține

$$x_R[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.137)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \sin \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.138)$$

În continuare, se vor considera câteva cazuri particulare.

- a) **Semnale reale** Dacă $x[n]$ este real $\rightarrow x_R[n] = x[n]$ și $x_I[n] = 0$. Atunci

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos \omega n \quad (4.139)$$

$$X_I(\omega) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin \omega n \quad (4.140)$$

Deoarece $\cos(-\omega)n = \cos \omega n$ și $\sin(-\omega)n = -\sin \omega n$, rezultă

$$X_R(-\omega) = X_R(\omega) \text{ simetri pară} \quad (4.141)$$

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \text{ simetrie impară} \quad (4.142)$$

Combinînd (4.141) cu (4.142), se obține

$$X^*(\omega) = X(-\omega), \quad (4.143)$$

caz în care se spune că spectrul unui semnal real are *simetrie hermitică*. În acest caz, modulul și faza spectrului sunt

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \quad (4.144)$$

$$\angle X(\omega) = \arctg \frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \quad (4.145)$$

Ca o consecință a relațiilor (4.141) și (4.142), atât spectrul de modul cât și cel de fază prezintă proprietăți de simetrie.

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \text{ simetrie pară} \quad (4.146)$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \text{ simetrie impară} \quad (4.147)$$

Deoarece $x[n] = x_R[n]$, din (4.137) rezultă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.148)$$

Deoarece ambele produse $X_R(\omega) \cos \omega n$ și $X_I(\omega) \sin \omega n$ sunt funcții pare, rezultă

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_{\pi} [X_R(\omega) \cos \omega n - X_I(\omega) \sin \omega n] d\omega \quad (4.149)$$

a1) **Semnale reale pare** Dacă $x[n]$ este real și par ($x[-n] = x[n]$) atunci $x[n] \cos \omega n$ este par și $x[n] \sin \omega n$ este impar. Din (4.139), (4.140) și (4.149) se obține

$$X_R(\omega) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \cos \omega n, \quad X_R(-\omega) = X_R(\omega) \quad (4.150)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (4.151)$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_R(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.152)$$

Cu alte cuvinte, spectrele semnalelor discrete reale și pare sunt reale și, în plus, sunt funcții pare de ω .

a2) **Semnale reale impare** Dacă $x[n]$ este real și impar, ($x[-n] = -x[n]$), atunci

$$X_R(\omega) = 0 \quad (4.153)$$

$$X_I(\omega) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \sin \omega n, \quad X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \quad (4.154)$$

$$x[n] = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} X_I(\omega) \sin \omega n d\omega \quad (4.155)$$

Cu alte cuvinte, semnalele discrete reale și impare au spectrul pur imaginar și, în plus, acesta este o funcție impară de ω .

b) **Semnale pur imaginare** În acest caz $x_R[n] = 0$; $x[n] = jx_I[n]$.

Astfel, (4.135), (4.136) și (4.138) devin

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] \sin \omega n \quad (4.156)$$

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n] \cos \omega n \quad (4.157)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [X_R(\omega) \sin \omega n + X_I(\omega) \cos \omega n] d\omega \quad (4.158)$$

b1) **Semnale pur imaginare pare** Dacă $x_I[n]$ este par ($x_I[-n] = x_I[n]$), rezultă

$$X_R(\omega) = 0 \quad (4.159)$$

$$X_I(\omega) = x_I[0] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I[n] \cos \omega n \quad (4.160)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X_I(\omega) \cos \omega n d\omega \quad (4.161)$$

b2) **Semnale pur imaginare impare** Dacă $x_I[n]$ este impar ($x_I[-n] = -x_I[n]$), atunci

$$X_R(\omega) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} x_I[n] \sin \omega n \quad (4.162)$$

$$X_I(\omega) = 0 \quad (4.163)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X_R(\omega) \sin \omega n d\omega \quad (4.164)$$

4.2.10. Cepstrum

Se consideră secvența $\{x[n]\}$ stabilă, cu transformata Z , $X(z)$, convergentă pe cercul unitate. Cepstrul complex al secvenței $\{x[n]\}$ se definește ca secvența $\{c_x[n]\}$, care este transformata Z inversă a secvenței $C_x(z)$, unde

$$C_x(z) = \ln X(z) \quad (4.165)$$

Cepstrul complex există dacă $C_x(z)$ converge într-o regiune inelară $r_1 < |z| < r_2$, unde $0 < r_1 < 1$ și $r_2 > 1$. În interiorul regiunii de convergență $C_x(z)$ poate fi reprezentat în serie Laurent

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_x[n] z^{-n} \quad (4.166)$$

unde $c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \oint_C \ln X(z) z^{n-1} dz$ (4.167)

unde C este un contur închis din regiunea de convergență care conține originea.

Dacă $C_x(z)$ poate fi reprezentat ca în relația (4.166), secvența complexă $\{c_x[n]\}$ este stabilă și, mai mult, dacă cepstrul complex există, $C_x(z)$ converge pe cercul unitate.

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.168)$$

$$\text{și} \quad c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.169)$$

Exprimând $X(\omega)$ în formă polară

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (4.170)$$

atunci

$$\ln X(\omega) = \ln |X(\omega)| + j\theta(\omega) \quad (4.171)$$

Înlocuind (4.171) în (4.169), se obține

$$c_x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\ln |X(\omega)| + j\theta(\omega)] e^{j\omega n} d\omega \quad (4.172)$$

Separând transformata Fourier inversă din (4.172) în transformatele Fourier inverse ale lui $\ln|X(\omega)|$ și $\theta(\omega)$, se obține

$$c_m[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(\omega)| e^{j\omega n} d\omega \quad (4.173)$$

$$c_\theta[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.174)$$

În unele aplicații, ca de exemplu în procesarea semnalului vocal, se calculează numai componenta $c_m[n]$, iar faza lui $X(\omega)$ este ignorată și, prin urmare, secvența $x[n]$ nu poate fi refacută din $\{c_m[n]\}$. Aceasta înseamnă că transformarea $x[n] \rightarrow c_m[n]$ nu este inversabilă. *Cepstrul* complex este folosit în practică pentru a se separa cele două semnale care intervin într-o operație de convoluție. Acest proces de separare se numește *deconvoluție*, iar folosirea cepstrului complex în efectuarea acestei separări se numește *deconvoluție homomorfică*.

4.2.11. Trasformata Fourier a semnalelor cu poli pe cercul unitate

În paragraful 4.2.8 s-a arătat că transformata Fourier a unei secvențe $x[n]$ poate fi obținută prin evaluarea transformatei Z , $X(z)$, pe cercul unitate, cu condiția ca acesta să fie conținută în RC a lui $X(z)$, în caz contrar, transformata Fourier fie nu există, fie nu se determină în acest mod.

Există unele semnale aperiodice care nu sunt nici absolut sumabile, nici de energie finită (condiții care asigurau, conform paragrafului 4.2.6 convergența transformatei Fourier). Pentru aceste semnale este util a extinde reprezentarea prin transformată Fourier în sens distribuțional. Matematic acest lucru poate fi realizat riguros permîțând transformatei Fourier să conțină impulsuri la anumite frecvențe corespunzătoare localizării polilor lui $X(z)$ de pe cercul unitate. Impulsurile sunt funcție de frecvență continuă ω și au amplitudine infinită, lațime zero și arie unitară. La limită, un astfel de impuls poate fi văzut ca un puls rectangular de înălțime $\frac{1}{a}$ și lațime a , când $a \rightarrow 0$.

Astfel, permîțând introducerea acestor impulsuri în spectrul semnalului, este posibil a extinde reprezentarea prin transformată Fourier a unor semnale care nu sunt nici absolut sumabile, nici de energie infinită.

Urmatoarele exemple ilustrează extinderea transformatei Fourier pentru trei secvențe cu poli pe cercul unitate.

Exemplul 4.6

Să se determine transformata Fourier pentru următoarele semnale:

- a) $x_1[n] = u[n]$
- b) $x_2[n] = (-1)^n u[n]$
- c) $x_3[n] = (\cos \omega_0 n)u[n]$

prin evaluarea transformatei Z corespunzătoare pe cercul unitate.

a) Din Tabelul 3.1, $X_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$ RC : $|z| > 1$

$X_1(z)$ un pol $p_1 = 1$ pe cercul unitate, dar converge pentru $|z| > 1$.

Evaluând $X_1(z)$ pe cercul unitate, exceptând $z = 1$, se obține

$$X_1(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{2j \sin(\omega/2)} = \frac{1}{2 \sin(\omega/2)} e^{j(\omega - \frac{\pi}{2})}; \omega \neq 2k\pi, k = 0, 1, \dots$$

La $\omega = 0$ și multipli de 2π , $X_1(\omega)$ conține impulsuri de arie π , așa cum s-a arătat în exemplul din paragraful 4.2.9, proprietatea 14.

Prezența polului la $z=1$ (adică la $\omega = 0$) creează probleme numai dacă se dorește calcularea lui $|X_1(\omega)|$ în $\omega = 0$, deoarece acolo această mărime este infinită. Deși, la o primă vedere, s-ar putea crede că semnalul ar avea componentă continuă, nu este cazul, deoarece acesta nu este constant pentru $-\infty < n < \infty$, ci are un salt abrupt la $n=0$, ceea ce determină existența tuturor frecvențelor din intervalul $0 < \omega < \pi$.

$$b) X_2(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1} \quad \text{RC } |z| > 1$$

Care are un pol la $z = -1 = e^{j\pi}$. Transformata Fourier evaluată la frecvențe diferite de $\omega = \pi$ și multipli de 2π ai acesteia este

$$x_2(\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad \omega \neq 2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad k=0,1,\dots$$

În acest caz impulsurile apar la $\omega = \pi + 2k\pi$

$$|X_2(\omega)| = \frac{1}{2 \left| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|} \quad \omega \neq 2\pi k + \pi \quad k=0,1,\dots$$

și faza $\angle X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{2} & \text{pentru } \cos \frac{\omega}{2} \geq 0 \\ \frac{\omega}{2} + \pi & \text{pentru } \cos \frac{\omega}{2} < 0 \end{cases}$

Datorită prezenței polului la $a = -1$ (adică frecvența $\omega = \pi$) modulul transformantei Fourier devine infinit, $|X(\omega)| \rightarrow \infty$ pentru $\omega = \pi$.

c) $X_3(\omega)$ devine infinit la $\omega = \omega_0$,

$$X_3(z) = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}, \quad \text{RC : } |z| > 1.$$

Transformata Fourier este

$$X_3(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega} \cos \omega_0}{(1 - e^{-j(\omega - \omega_0)})(1 - e^{j(\omega + \omega_0)})}; \omega \neq \omega_0 + 2\pi k; k = 0,1,\dots$$

$$|X_3(\omega)| = \frac{|1 - e^{-j\omega} \cos \omega_0|}{|1 - e^{-j(\omega - \omega_0)}||1 - e^{j(\omega + \omega_0)}|}, \omega \neq \omega_0 + 2\pi k, k = 0,1,\dots$$

pentru $\omega = -\omega_0$ sau $\omega = \omega_0$, $|X_3(\omega)|$ devine infinită, pentru orice altă valoare aceasta fiind bine definită.

4.3. Caracterizarea semnalelor în domeniul frecvență și dualitatea timp frecvență

4.3.1. Dualitatea semnalelor

Pentru analiza în frecvență a semnalelor, în paragrafele precedente s-au introdus:

-seria Fourier pentru semnale analogice și discrete periodice;

-transformata Fourier pentru semnale analogice și discrete aperiodice.

Din paragrafele 4.1 și 4.2 se observă că există două caracteristici ale semnalelor care determină caracteristicile spectrului, și anume, natura variabilei, continuă sau discretă, și periodicitatea sau neperiodicitatea semnalului. Formulele de analiză și sinteză obținute în paragrafele 4.1. și 4.2 pentru semnale analogice și discrete periodice sau aperiodice se numesc duale una alteia și sunt prezentate în tabelul din figura 4.5. Se desprind următoarele concluzii:

- Semnalele analogice au spectrul aperiodic.* Acest lucru se datorează faptului că exponențiala complexă $e^{j2\pi F t}$ este o funcție de variabilă continuă t și, deci, nu este periodică în F . Spectrul semnalelor continue se întinde pe întreaga axă reală, dar în anumite situații de simetrie aceasta se reduce la axa reală pozitivă de la $F=0$ la $F=\infty$.
- Semnalele discrete au spectrul periodic.* Într-adevăr, atât seria Fourier, cât și transformata Fourier pentru semnale discrete sunt funcții periodice cu perioada egală cu 2π . Ca urmare a acestei periodicități domeniul de frecvență al spectrului semnalelor discrete este finit, și cuprins între $\omega = -\pi$ și $\omega = \pi$, unde $\omega = \pi$ corespunde celei mai înalte frecvențe posibile de oscilație. În anumite condiții de simetrie acesta poate fi doar $\omega \in [0, \pi]$.
- Semnalele periodice au spectrul discret.* Acestea sunt descrise de serii Fourier, ai căror coeficienți reprezintă “liniile” spectrului discret. Spațiul dintre linii de ΔF sau Δf este egal cu inversul perioadei T_p

respectiv N , din domeniul timp, adică $\Delta F = \frac{1}{T_p}$ pentru semnale

analogice periodice și $\Delta f = \frac{1}{N}$ pentru semnale discrete periodice.

- d) *Semnalele aperiodice de energie finită au spectrul continuu.* Acest lucru este o consecință a faptului că atât $X(F)$ cât și $X(\omega)$ sunt funcții de $e^{j2\pi F t}$ și, respectiv $e^{j\omega n}$, care sunt funcții continue de F și ω .

Periodicitatea cu perioada α într-un domeniu implică discretizarea cu spațiere de $1/\alpha$ în celălalt domeniu, și invers. În domeniul frecvență perioada se referă la banda de frecvență, iar în domeniul timp spațierea se referă la perioada de eșantionare. Se observă că toate relațiile duale diferă numai în semnul exponentului exponențialei complexe. Această schimbare de semn poate fi interpretată ca o reflectare a semnalului sau spectrului, deoarece

$$e^{-j2\pi F t} = e^{j2\pi(-F)t} = e^{j2\pi F(-t)} \quad (4.165)$$

Din punct de vedere energetic s-a folosit termenul de densitate spectrală de energie în caracterizarea semnalelor aperiodice de energie finită și termenul de densitate spectrală de putere pentru semnale periodice, terminologie care este în concordanță cu faptul că semnalele periodice sunt de putere finită, iar cele aperiodice de energie finită.

4.3.2. Clasificarea semnalelor în domeniul frecvență

O posibilă clasificare a semnalelor în domeniul frecvență se poate efectua după banda dominantă din spectrul lor.

Dacă un semnal de putere (sau energie) finită are spectrul densității de putere (sau energie) concentrat în jurul frecvenței zero, atunci acesta se numește de *joasă frecvență*.

Dacă spectrul densității de putere (sau de energie) este concentrat la frecvențe înalte, acesta se numește *semnal de înaltă frecvență*.

Dacă spectrul densității de putere (sau de energie) al unui semnal este concentrat într-un domeniu cuprins între frecvențele joase și înalte, acesta se numește *semnal trece-bandă* sau *de medie frecvență*.

În plus față de această clasificare generală, se mai folosește o măsură cantitativă pentru domeniul în care este concentrat spectrul densității de putere (sau energie), numită *lățime de bandă*. Spre exemplu, dacă 95% din spectrul unui semnal analogic este concentrat în domeniul de frecvență $F_1 \leq F \leq F_2$, atunci 95% din lățimea de bandă a semnalului este $F_2 - F_1$. În cazul semnalelor trece bandă, termenul de *bandă îngustă* se

folosește pentru a descrie un semnal a cărui lățime de bandă $F_2 - F_1$ este mult mai mică (≤ 10 ori) decât frecvența mediană $\frac{F_1 + F_2}{2}$. În caz contrar semnalele se numesc de *bandă largă*. Un semnal este de *bandă limitată*, dacă spectrul său este zero în afara domeniului de frecvență $|F| \geq B$.

De exemplu, un semnal continuu, de energie finită $x(t)$ este de bandă limitată, dacă transformata sa Fourier $X(F)=0$ pentru $|F|>B$. Un semnal discret $x[n]$, de energie finită, este *periodic de bandă limitată*, dacă

$$|X(\omega)| = 0 \quad \text{pentru } \omega_o < |\omega| < \pi.$$

Similar, un semnal analogic periodic, $x_p(t)$, este de bandă limitată dacă coeficienții săi Fourier $c_k=0$ pentru $|k|>M$ cu M întreg pozitiv.

Un semnal discret periodic, cu perioada fundamentală N este periodic de bandă limitată, dacă coeficienții săi Fourier $c_k=0$ pentru $k_o < |k| < N$.

Folosind dualitatea dintre domeniile frecvență și timp se pot folosi mijloace similare în caracterizarea semnalelor în domeniul timp.

Un semnal se numește *limitat în timp* sau de durată finită dacă: $x(t)=0$ pentru $|t|>\tau$ pentru semnale analogice și $x[n]=0$ pentru $|n|>N$ pentru semnale discrete aperiodice. Dacă semnalul este periodic, el este *limitat în timp*, dacă $x_p(t)=0$ pentru $\tau < |t| < \frac{T_p}{2}$ pentru semnale analogice și $x[n]=0$ pentru $n_o < n < N$ pentru semnale discrete.

O caracteristică de bază a oricărui semnal este aceea că el nu poate fi simultan de bandă și durată limitată.

4.4. Probleme propuse

4.1. Să se calculeze și să se reprezinte spectrul de modul și de fază pentru următoarele semnale: ($a > 0$)

$$\text{a)} \quad x_a(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad \text{b)} \quad x_a(t) = Ae^{-a|t|}$$

$$4.2. \text{ Fie semnalul } x(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau & |t| \leq \tau \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

- a) Să se determine și să se reprezinte spectrul de modul și de fază $|X_a(F)|$ și $\angle X_a(F)$.
- b) Să se creeze semnalul periodic $x_p(t)$, cu perioada fundamentală $T_p \geq 2\tau$, astfel încât $x(t)=x_p(t)$ pentru $|t| < T_p/2$. Care sunt coeficienții Fourier c_k pentru semnalul $x_p(t)$?
- c) Să se arate că $c_k = (1/T_p) X_a(k/T_p)$.

4.3. Se consideră semnalul

$$x[n] = 2 + 2 \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi n}{4}$$

- a) Să se determine și să se reprezinte spectrul densității de putere.
- b) Să se determine puterea semnalului.

4.4. Să se determine și să se reprezinte spectrele de modul și de fază ale următoarelor semnale periodice.

- a) $x[n] = 4 \sin \frac{\pi(n-2)}{3}$, b) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{3}n + \sin \frac{2\pi}{5}n$
- c) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{3}n \sin \frac{2\pi}{5}n$, d) $x[n] = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, -2, \underbrace{1, 0, 1, 2, ...}\}$
- e) $x[n] = \{..., 0, 0, 1, 1, 0, 0, \underbrace{1, 1, 0, 0, ...}\}$, f) $x[n] = 1 \quad -\infty < n < \infty$

4.5 Să se determine semnalele periodice, cu perioada fundamentală $N = 8$, dată fiind coeficienții lor Fourier

- a) $\{c_k\} = \cos \frac{k\pi}{4} + \sin \frac{3k\pi}{4}$, b) $\{c_k\} = \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{3} & 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & k = 7 \end{cases}$
- c) $\{c_k\} = \left\{ ..., 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, ... \right\}$

4.6. Să se determine semnalele care au următoarele transformate Fourier:

a) $X(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0 \\ 1 & \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

b) $X(\omega) = \cos^2 \omega$

c) Semnalul din figura p.4.6.

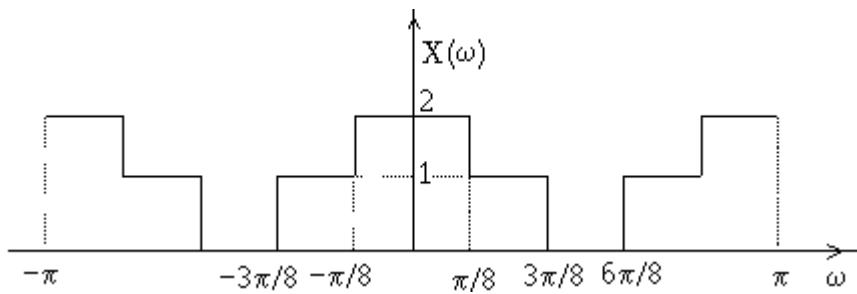


Figura p4.6.

4.7. Să se determine transformata Fourier a următoarelor semnale:

a) $x[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$, b) $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

c) $x[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq -1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

4.8. Se consideră semnalul $x[n] = \{-1, 2, -3, 2, -1\}$ a cărui

↑
transformată Fourier este $X(\omega)$. Să se calculeze următoarele mărimi:

a) $X(0)$; b) $\angle X(\omega)$; c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$; d) $X(\pi)$; e) $\int_{\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$

4.9. Fie $x[n]$ un semnal arbitrar, nu neapărat real, cu transformata Fourier $X(\omega)$. Să se exprime transformata Fourier a următoarelor semnale în funcție de $X(\omega)$.

a) $x^*[n]$; b) $x^*[-n]$; c) $y[n] = x[n] - x[n-1]$; d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$;

e) $y[n] = x[2n]$; f) $y[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ par} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$.

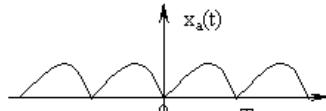
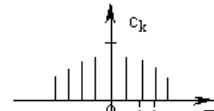
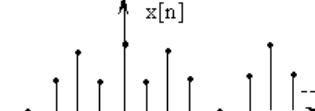
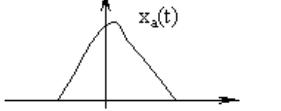
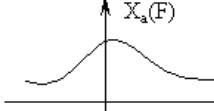
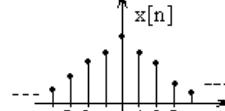
Semnale analogice		Semnale discrete	
	Domeniul timp	Domeniul frecvență	Domeniul timp
Semnale periodice Seri Fourier	 $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$	 $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$	 $x[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}$
	Continuu și periodic	Discret și aperiodic	Discret și periodic
Semnale aperiodice Transformate Fourier	 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF$	 $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt$	 $x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$
	Continuu și aperiodic	Continuu și aperiodic	Discret și aperiodic
			Continuu și periodic

Figura 4.4

CAPITOLUL 1

CARACTERIZAREA SISTEMELOR DISCRETE, LINIARE, INVARIANTE ÎN TIMP ÎN DOMENIUL FRECVENTĂ

Obiectul capitolului de față îl constituie caracterizarea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp (SDLIT) în domeniul frecvență. Se va arăta că un astfel de sistem este caracterizat în domeniul frecvență de transformata Fourier a răspunsului său la impuls. Această caracterizare conduce la opinia conform căreia un SDLIT acționează ca un filtru asupra diferitelor componente de frecvență ale intrării. În acest demers, semnalele de excitație sunt exponențialele complexe și semnalele armonice.

Caracterizarea SDLIT în domeniul frecvență este realizată cu ajutorul unei funcții de variabilă ω , notată $H(\omega)$ și numită răspuns în frecvență, care este în legătură cu funcția de sistem $H(z)$ și răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului [63].

Răspunsul în frecvență caracterizează complet SDLIT și permite determinarea răspunsului sistemului la semnale de intrare care pot fi exprimate cu ajutorul semnalelor exponențiale complexe și armonice.

1.1. Răspunsul SDLIT la semnale exponențiale complexe și armonice

Răspunsul oricărui SDLIT la un semnal de intrare arbitrar $x[n]$ este dat de suma de convoluție [63]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (1.1)$$

În această relație sistemul este caracterizat în domeniul timp de răspunsul la impuls $\{h[n], n \in Z\}$.

Se presupune că sistemul este excitat de semnalul exponențial complex

$$x[n] = A e^{j\omega_0 n}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

unde A este amplitudinea și ω_0 , frecvența unghiulară a semnalului discret de intrare din intervalul fundamental $[-\pi, \pi]$. Înlocuind (1.2) în (1.1), se obține

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] [A e^{j\omega_0(n-k)}] = A \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right] e^{j\omega_0 n} \quad (1.3)$$

Termenul din paranteză din relația (1.3) este transformata Fourier $H(\omega)$ a răspunsului la impuls $h[k]$ al sistemului

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \quad (1.4)$$

evaluată la frecvența unghiulară ω_0 , a semnalului de intrare, adică

$$H(\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \quad (1.4')$$

Funcția $H(\omega)$ există dacă sistemul este stabil în sens MIME (Mărginit la Intrare Mărginit la ieșire) [63], adică dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$.

Mărimea $H(\omega)$ poate fi, de asemenea, văzută ca transformata Z a răspunsului la impuls $h[n]$ evaluată pe cercul unitate, dacă aceasta nu are poli pe cercul unitate [63].

Cu (1.4'), răspunsul sistemului la o exponențială complexă este

$$y[n] = A H(\omega_0) e^{j\omega_0 n} \quad (1.5)$$

Din (1.5) se observă că răspunsul este, de asemenea, o exponențială complexă, de aceeași frecvență cu a intrării, dar diferită față de semnalul de intrare printr-un factor de multiplicare, $H(\omega_0)$. Ca urmare a acestei caracteristici, semnalul de intrare (1.2) se numește *funcție proprie* a sistemului. Cu alte cuvinte, o *funcție proprie* a unui sistem este un semnal de intrare care produce o ieșire ce diferă de intrare printr-un factor de multiplicare constant. Factorul de multiplicare se numește *valoare proprie* a sistemului. În acest caz, un semnal exponențial complex de forma (1.2) este o funcție proprie a unui SLDIT și $H(\omega)$ evaluată la frecvența semnalului de intrare este valoarea proprie corespunzătoare.

Exemplul 1.1.

Să se determine secvența de ieșire a sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (1.6)$$

dacă semnalul de intrare este $x[n] = A e^{j\pi n/2}$, $n \in Z$.

Soluție.

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (1.7)$$

La $\omega = \pi/2$, (1.7) devine

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ}$$

și secvența de ieșire este

$$y[n] = A \left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j26,6^\circ} \right) e^{j\pi n/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j(\pi n/2 - 26,6^\circ)}, \quad n \in Z \quad (1.8)$$

Se observă că singurul efect al sistemului asupra semnalului de intrare constă în scalarea amplitudinii cu $2/\sqrt{5}$ și defazarea cu $-26,6^\circ$. Semnalul de ieșire este, deci, o exponențială complexă de frecvență $\pi/2$, aceeași cu a semnalului de intrare, amplitudine $2A/\sqrt{5}$ și fază $-26,6^\circ$.

Dacă se modifică frecvența semnalului de intrare, se schimbă efectul sistemului asupra intrării și, implicit, ieșirea. De exemplu, dacă semnalul de intrare este o exponențială complexă de frecvență π , adică

$$x[n] = A e^{j\pi n} \quad (1.9)$$

atunci, la $\omega = \pi$,

$$H(\pi) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$$

și ieșirea este

$$y[n] = \frac{2}{3} A e^{j\pi n}, \quad n \in Z \quad (1.10)$$

Se observă că $H(\pi)$ este real, deci ieșirea este intrarea scalată cu $H(\pi) = 2/3$ și nedefazată.

În general, $H(\omega)$ este o funcție complexă de variabilă ω , care poate fi exprimată în coordonate polare, sub forma

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (1.11)$$

Trecerile prin zero ale funcției de transfer conduc la salturi de fază de π radiani, aşa încât $\theta(\omega)$ are discontinuități în acele puncte. Din acest motiv, răspunsul în frecvență se mai exprimă sub forma

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} = H_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad \theta(\omega) = \angle H_R(\omega) + \varphi(\omega) \quad (1.11')$$

Deoarece $H(\omega)$ caracterizează răspunsul sistemului în domeniul frecvență, acesta se numește *răspunsul în frecvență* al sistemului.

Mărimea $|H(\omega)|$ se numește *răspunsul de amplitudine* sau *de modul* și este modulul transformatei Fourier a răspunsului la impuls, iar $\theta(\omega) = \angle H(\omega)$ se numește *răspuns de fază* și este faza asociată transformatei Fourier $H(\omega)$ a răspunsului la impuls.

Uneori, transformata Fourier mai este cunoscută sub numele de *spectru Fourier* sau, mai simplu, *spectru*, motiv pentru care se mai întâlnește terminologia *de spectru de amplitudine* sau *de modul* pentru a face referire la $|H(\omega)|$ și *spectru de fază* pentru $\theta(\omega)$.

Uneori modulul este reprezentat logaritmic sub forma

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 10 \log_{10} |H(\omega)|^2 \quad (1.12)$$

Faza $\theta(\omega)$ din relația (1.11) nu este unic determinată, deoarece prin adăugarea oricărui multiplu întreg de 2π la $\theta(\omega)$, valoarea exponențialei complexe nu se modifică. Se definește *valoarea principală* a lui $\theta(\omega)$, notată cu $\text{ARG}[H(\omega)]$, cea cuprinsă în domeniul fundamental de valori $[-\pi, \pi]$. Dacă faza depășește acest interval, datorită periodicității de 2π a acesteia, este necesar un salt de $\pm 2\pi$ pentru a o aduce înapoi în intervalul fundamental. În unele situații este însă util a considera faza ca o funcție continuă de ω , numită *funcție totală de fază*, pentru $0 \leq \omega < \pi$ și se va nota cu $\text{Arg}[H(\omega)]$. Aceasta se poate determina din valoarea principală, prin adăugarea sau scăderea valorii de 2π radiani în punctele de discontinuitate, după cum se arată în figura 1.1. Această procedură se numește *desfășurare a fazei*.

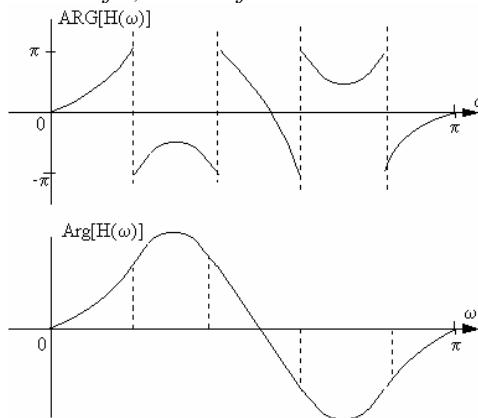


Figura 1.1. (a) Valoarea principală a fazei unui sistem, (b) Funcția totală de fază

$$-\pi \leq \text{ARG}[H(\omega)] \leq \pi \quad (1.13)$$

$$\text{Arg}(\omega) = \text{ARG}[H(\omega)] + 2\pi r(\omega) \quad (1.14)$$

unde $r(\omega)$ este un întreg care poate fi diferit la diverse valori ale lui ω .

Dacă în calculul răspunsului de fază se folosește valoarea principală, atunci aceasta va fi o funcție discontinuă. Discontinuitățile introduse de considerarea valorii principale vor consta în salturi de 2π radiani.

O proprietate importantă a lui $H(\omega)$ este că această funcție este periodică, de perioadă 2π , ceea ce se observă din relația (1.4).

$$H(\omega + 2\pi m) = H(\omega),$$

unde m este întreg oarecare. Relația (1.4) este dezvoltarea în serie Fourier a lui $H(\omega)$, $h[k]$ fiind coeficienții dezvoltării. În consecință, răspunsul la impuls $h[k]$ se obține cu relația [63]

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega k} d\omega \quad (1.15)$$

în care integrarea s-a efectuat pe intervalul fundamental pentru frecvența unghiulară discretă $[-\pi, \pi]$.

Pentru un SDLIT al cărui răspuns la impuls este real, modulul și faza lui $H(\omega)$ au proprietăți de simetrie, după cum urmează:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cos \omega k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sin \omega k = \\ &= H_R(\omega) + j H_I(\omega) = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} e^{j \arctg[H_I(\omega)/H_R(\omega)]} \end{aligned} \quad (1.16)$$

unde $H_R(\omega)$ și $H_I(\omega)$ reprezintă componenta reală, respectiv imaginată a lui $H(\omega)$, adică

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] \cos \omega k \\ H_I(\omega) &= - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] \sin \omega k \end{aligned} \quad (1.17)$$

Se observă că

$$H_R(\omega) = H_R(-\omega) \quad (1.18)$$

$$\text{și} \quad H_I(\omega) = -H_I(-\omega) \quad (1.19)$$

adică $H_R(\omega)$ este o funcție pară, iar $H_I(\omega)$ este impară. Drept urmare,

$|H(\omega)|$ este o funcție pară, iar $\theta(\omega) = \arctg \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$ este o funcție impară.

Cu alte cuvinte, dacă se cunoaște $|H(\omega)|$ și $\theta(\omega)$ pentru $0 \leq \omega \leq \pi$, atunci se cunosc aceste funcții și pentru $-\pi \leq \omega \leq 0$.

Proprietățile de simetrie satisfăcute de modulul și faza lui $H(\omega)$ și faptul că un semnal armonic poate fi exprimat ca suma sau diferența a două funcții exponențiale complexe scalate corespunzător determină ca răspunsul unui SDLIT la un semnal armonic să fie similar cu răspunsul sistemului la o exponențială complexă.

Într-adevăr, dacă intrarea este

$$x_1[n] = A e^{j\omega n} \quad (1.20)$$

ieșirea este

$$y_1[n] = A |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} e^{j\omega n} \quad (1.21)$$

Dacă intrarea este

$$x_2[n] = A e^{-j\omega n} \quad (1.22)$$

ieșirea este

$$y_2[n] = A |H(-\omega)| e^{j\theta(-\omega)} e^{-j\omega n} = A |H(\omega)| e^{-j\theta(\omega)} e^{-j\omega n} \quad (1.23)$$

Aplicându-se proprietatea de liniaritate pentru SDLIT [63], se poate determina răspunsul sistemului la semnalul de intrare

$$x[n] = \frac{1}{2} (x_1[n] + x_2[n]) = A \cos \omega n \quad (1.24)$$

$$y[n] = \frac{1}{2} (y_1[n] + y_2[n]) = A |H(\omega)| \cos[\omega n + \theta(\omega)] \quad (1.25)$$

Similar, dacă

$$x[n] = \frac{1}{2j} (x_1[n] - x_2[n]) = A \sin \omega n \quad (1.26)$$

răspunsul sistemului este

$$y[n] = \frac{1}{2j} (y_1[n] - y_2[n]) = A |H(\omega)| \sin[\omega n + \theta(\omega)] \quad (1.27)$$

Din cele prezentate până acum se observă că $H(\omega)$ sau, echivalent, $|H(\omega)|$ și $\theta(\omega)$ caracterizează complet efectul sistemului asupra semnalului de intrare armonic, de frecvență arbitrară. Dacă semnalul de intrare este compus din mai multe componente armonice, răspunsul sistemului se obține cu ajutorul proprietății de superpoziție a sistemelor liniare.

1.2. Răspunsul de regim permanent și tranzitoriu al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp la semnale de intrare armonice

Pentru a evidenția răspunsurile de regim permanent și tranzitoriu, se consideră un sistem descris de o ecuație cu diferențe de ordinul întâi, de forma

$$y[n] = a y[n-1] + x[n] \quad (1.28)$$

Cunoscută fiind condiția inițială $y[-1]$ pentru sistem, răspunsul acestuia la o intrare $x[n]$ aplicată la $n = 0$ se poate determina recursiv pentru $n \geq 0$, ca fiind

$$y[n] = a^{n+1} y[-1] + \sum_{k=0}^n a^k x[n-k], \quad n \geq 0 \quad (1.29)$$

Se presupune că semnalul de intrare este exponențială complexă

$$x[n] = A e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \quad (1.30)$$

care se aplică la momentul $n = 0$. Înlocuind (1.30) în (1.29) se obține

$$\begin{aligned} y[n] &= a^{n+1} y[-1] + A \sum_{k=0}^n a^k e^{j\omega(n-k)} = a^{n+1} y[-1] + A \left[\sum_{k=0}^n (a e^{-j\omega})^k \right] e^{j\omega n} = \\ &= a^{n+1} y[-1] - \frac{A a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n} + \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Răspunsul sistemului este format din răspunsul tranzitoriu și răspunsul permanent.

Sistemul descris de (1.28) este stabil în sens MIME, dacă $|a| < 1$ [63]. Răspunsul de regim permanent este cel înregistrat la un timp suficient de mare după aplicarea semnalului de intrare și se obține ca limită din $y[n]$, pentru n tînzând la infinit. În acest caz, termenii care conțin pe a^{n+1} din (1.31) tind la zero și, în consecință, răspunsul de regim permanent este

$$y_{ss}[n] = \frac{A}{1 - a e^{-j\omega}} e^{j\omega n} = A H(\omega) e^{j\omega n} \quad (1.32)$$

Se observă că răspunsul de regim permanent este determinat de sistem, prin $H(\omega)$ și semnalul de intrare, $A e^{j\omega n}$, ne-depinzând de condiția inițială.

Primii doi termeni din (1.31) reprezintă răspunsul tranzitoriu al sistemului, adică

$$y_{tr}[n] = a^{n+1} y[-1] - \frac{A a^{n+1} e^{-j\omega(n+1)}}{1-a e^{-j\omega}} e^{j\omega n}, \quad n \geq 0 \quad (1.33)$$

care descrește la zero pentru n tînzând la infinit. Primul termen al răspunsului tranzitoriu este răspunsul de intrare zero al sistemului, în timp ce al doilea termen se datorează semnalului exponențial de intrare. Se observă că răspunsul de regim tranzitoriu este determinat de sistem, prin parametrul a , semnalul de intrare, $A e^{j\omega n}$, și condiția inițială $y[-1]$.

În general, toate sistemele stabile în sens MIME se comportă similar atunci când sunt excitate cu exponentiale complexe sau semnale armonice la un moment oarecare de timp finit, adică răspunsul tranzitoriu tinde la zero, rămânând numai răspunsul de regim permanent.

1.3. Răspunsul de regim permanent al SDLIT la semnale de intrare periodice

Se presupune că intrarea unui SDLIT stabil este un semnal periodic $x[n]$, de perioadă fundamentală N . Atât timp cât un astfel de semnal există pentru $-\infty < n < \infty$, răspunsul total al sistemului la orice moment n , finit, este răspunsul de regim permanent. Pentru determinarea răspunsului $y[n]$ al sistemului, se reprezintă semnalul de intrare periodic în serie Fourier [35]

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.34)$$

unde $\{c_k\}$ sunt coeficienții seriei Fourier. Răspunsul sistemului la semnalul exponențial complex

$$x_k[n] = c_k e^{j2\pi k n/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.35)$$

este

$$y_k[n] = c_k H\left(\frac{2\pi}{N} k\right) e^{j2\pi k n/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.36)$$

$$\text{unde } H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = H(\omega)|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.37)$$

Folosind principiul superpoziției, se obține răspunsul sistemului la semnalul periodic $x[n]$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j2\pi k n/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.38)$$

Acest rezultat implică faptul că și răspunsul sistemului la semnalul de intrare periodic $x[n]$ este, de asemenea, periodic, de aceeași perioadă N .

Coeficienții seriei Fourier pentru $y[n]$ sunt

$$d_k = c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.39)$$

În concluzie, sistemul liniar poate modifica forma semnalului periodic de intrare prin scalarea amplitudinii, poate defaza componentele seriei Fourier, dar nu afectează perioada semnalului de intrare.

1.4. Răspunsul SDLIT la semnale de intrare aperiodice

În continuare, se pune problema determinării răspunsului sistemelor discrete, liniare, invariante în timp la semnale aperiodice de energie finită, demers în care va fi folosită transformata Fourier pentru semnale discrete.

Răspunsul unui SDLIT relaxat (care are condiții inițiale nule) la un semnal de intrare $x[n]$ este dat de suma de convoluție dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls al sistemului

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (1.40)$$

Aplicând transformata Fourier relației (1.40), se obține

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (1.41)$$

Relația (1.41) caracterizează sistemul în domeniul frecvență, arătând că spectrul semnalului de ieșire este egal cu spectrul semnalului de intrare multiplicat cu răspunsul în frecvență al sistemului. Relația (1.41) poate fi scrisă în formă polară

$$Y(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta_h(\omega)} |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)} = |H(\omega)| |X(\omega)| e^{j[\theta_x(\omega) + \theta_h(\omega)]} \quad (1.42)$$

În consecință, modulul și faza răspunsului $Y(\omega)$ se determină cu relațiile

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| \quad (1.43)$$

$$\text{și} \quad \theta_y(\omega) = \theta_x(\omega) + \theta_h(\omega) \quad (1.44)$$

Semnalul de intrare aperiodic, de energie finită are spectrul continuu, iar sistemul discret, liniar, invariant în timp, prin răspunsul său în frecvență, atenuază sau amplifică unele componente ale semnalului de

intrare. Din alura lui $|H(\omega)|$ se observă care componente de frecvență sunt atenuate și care amplificate. Faza lui $H(\omega)$ indică defazajul pe care îl suferă componentele semnalului de intrare.

De asemenea, se observă că ieșirea unui SDLIT stabil nu poate conține componente de frecvență care nu sunt conținute în semnalul de intrare, adică sistemul nu poate crea componente noi de frecvență.

În figura 1.2 este reprezentat schematic un SDLIT, care este descris de suma de convoluție în domeniul timp, de funcția de sistem $H(z)$ sau de răspunsul în frecvență $H(\omega)$.

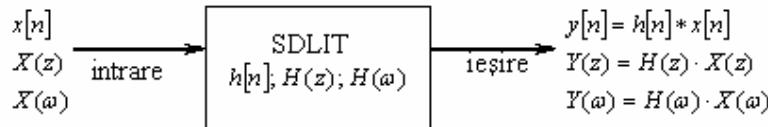


Figura 1.2. Relații intrare – ieșire pentru un SDLIT relaxat, în domeniile timp, Z și frecvență

Dacă pentru un astfel de sistem se cunoaște ieșirea $Y(\omega)$ în domeniul frecvență, răspunsul sistemului în domeniul timp se determină cu relația [63]

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega, \quad (1.45)$$

integrarea efectuându-se pe domeniul fundamental al frecvențelor unghiulare discrete.

Din (1.43) se obține

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 \quad (1.46)$$

sau, echivalent

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.47)$$

unde $S_{yy}(\omega)$ și $S_{xx}(\omega)$ reprezintă densitatea spectrală de energie al semnalelor $y[n]$, respectiv $x[n]$, definite de relațiile [34].

$$S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2 \quad (1.48)$$

$$S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (1.48')$$

Integrând relația (1.47) pe domeniul fundamental de frecvență, se obține energia semnalului de ieșire, de forma

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) d\omega \quad (1.49)$$

Răspunsul la impuls a L SDLIT conectate în paralel este dat de [63]

$$h[n] = \sum_{k=1}^L h_k[n] \quad (1.50)$$

unde $h_k[n]$, $k = 1, \dots, L$, este răspunsul la impuls al sistemelor individuale.

Folosind proprietatea de liniaritate a transformatei Fourier, se găsește răspunsul în frecvență al sistemului echivalent

$$H(\omega) = \sum_{k=1}^L H_k(\omega) \quad (1.51)$$

unde $H_k(\omega)$ este răspunsul în frecvență corespunzător sistemului cu răspunsul la impuls $h_k[n]$.

Dacă cele L SDLIT sunt conectate în cascadă, răspunsul la impuls al sistemului echivalent este

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] * \dots * h_L[n] \quad (1.52)$$

Aplicând transformata Fourier expresiei (1.52), se obține

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot \dots \cdot H_L(\omega) \quad (1.53)$$

Figura 1.3 ilustrează interconectarea în paralel și în serie a două SDLIT.

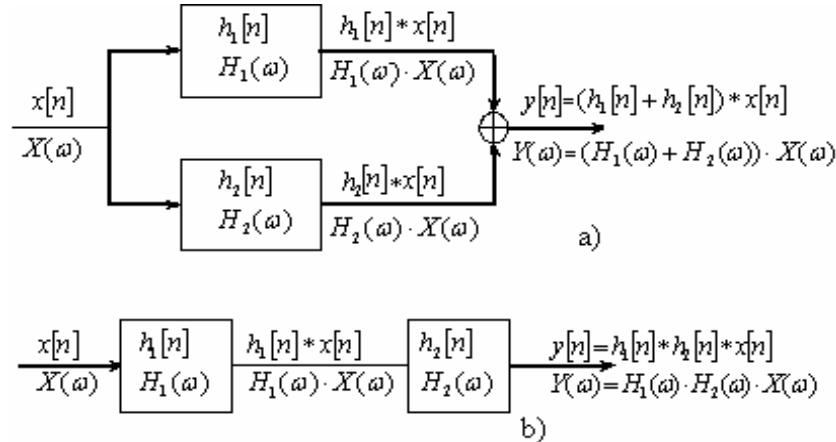


Figura 1.3. Conectarea SDLIT în (a) paralel și (b) cascadă

1.5. Relația între funcția de sistem și răspunsul în frecvență al sistemului

Dacă funcția de sistem $H(z)$ converge pe cercul unitate, se poate obține răspunsul în frecvență al sistemului prin evaluarea lui $H(z)$ pe cercul unitate [63].

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad (1.54)$$

Pentru cazul în care $H(z)$ este o funcție rațională, de forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.54')$$

rezultă

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\omega})} \quad (1.54'')$$

unde coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ sunt reali, iar $\{z_k\}$ și $\{p_k\}$ pot fi mărimi reale și/sau complexe. Uneori este convenabil să se exprime pătratul modulului lui $H(\omega)$ în funcție de $H(z)$.

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) \quad (1.55)$$

unde $H^*(\omega)$ este mărimea complex conjugată a lui $H(\omega)$.

Dacă $H(\omega)$ se exprimă prin (1.54''), rezultă

$$H^*(\omega) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* e^{j\omega})}, \quad (1.56)$$

adică $H^*(\omega)$ se obține din evaluarea lui $H^*(1/z^*)$

$$H^*(1/z^*) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k^* z)} \quad (1.56')$$

pe cercul unitate.

Dacă $\{h[n]\}$ este real sau, echivalent, coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ sunt reali, polii și zerourile complexe apar în perechi conjugate și $H(1/z^*)=H(z^{-1})$. În consecință, $H^*(\omega)=H(-\omega)$ și

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.57)$$

Conform teoremei de corelație pentru transformata Z [63], produsul $H(z)H(z^{-1})$ este transformata Z a funcției de autocorelație a secvenței $\{r_{hh}[m]\}$ a răspunsului la impuls. Conform teoremei Wiener Hincin [34], rezultă că $|H(\omega)|^2$ este transformata Fourier a lui $\{r_{hh}[m]\}$.

Similar, dacă $H(z) = B(z)/A(z)$, expresiile $D(z) = B(z)B(z^{-1})$ și $C(z) = A(z)A(z^{-1})$ sunt transformatele Z ale secvențelor de autocorelație $\{c_l\}$ și, respectiv, $\{d_l\}$, unde

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{k=0}^{N-|l|} a_k a_{k+l}, \quad -N \leq l \leq N \\ d_l &= \sum_{k=0}^{M-|l|} b_k b_{k+l}, \quad -M \leq l \leq M \end{aligned} \quad (1.58)$$

Deoarece parametrii sistemului $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ sunt reali, secvențele de autocorelație sunt pare, adică $c_l = c_{-l}$ și $d_l = d_{-l}$, ceea ce permite exprimarea expresiei $|H(\omega)|^2$ ca o funcție polinomială în $\cos \omega$:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{d_0 + \sum_{k=1}^M d_k \cos k\omega}{c_0 + \sum_{k=1}^N c_k \cos k\omega} \quad (1.59)$$

ținându-se cont că $\cos k\omega = \sum_{m=0}^k \beta_m (\cos \omega)^m$.

Se notează

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = b_0^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z)} \quad (1.60)$$

Dacă se cunoaște $|H(\omega)|^2$, înlocuind $e^{j\omega}$ cu z se obține $C(z)$. Se pune problema ce informație se poate obține din $C(z)$ despre $H(z)$. Se

observă că pentru fiecare pol p_k al lui $H(z)$, în $C(z)$ există un pol p_k și unul $(p_k^*)^{-1}$. Similar, pentru fiecare zerou z_k al lui $H(z)$, există o pereche de zerouri în $C(z)$ la z_k și $(z_k^*)^{-1}$. În consecință, polii și zerourile lui $C(z)$ apar în perechi conjugate reciproce, cu un element din fiecare pereche asociat lui $H(z)$ și unul lui $H^*(1/z^*)$. Mai mult, dacă un element din fiecare pereche este în interiorul cercului unitate, atunci celălalt (conjugatul inversat) va fi în afara cercului unitate.

Singura altă posibilitate ar fi ca ambele singularități să fie pe cercul unitate, caz în care acestea au ordin de multiplicitate dublu în aceeași poziție. Dacă $H(z)$ caracterizează un sistem stabil, atunci toți polii săi trebuie să fie în interiorul cercului unitate, restricție care permite identificarea polilor lui $H(z)$ dintre polii lui $C(z)$. Numai cu această precizare, zerourile lui $H(z)$ nu pot fi unic determinate dintre zerourile lui $C(z)$.

Exemplul 1.2.

Diagrama poli - zerouri pentru $C(z)$ este dată în figura 1.4. Să se determine polii și zerourile asociate lui $H(z)$.

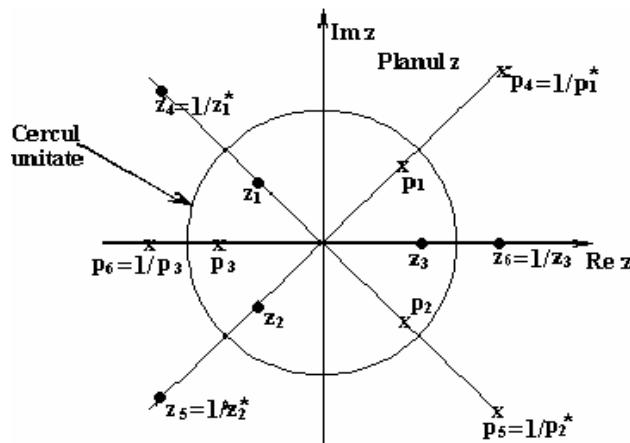


Figura 1.4. Diagrama poli - zerouri pentru un $C(z)$ dat

Soluție. Perechile conjugate reciproce de poli și zerouri pentru care un element este asociat lui $H(z)$ și unul lui $H^*(1/z^*)$ sunt: (p_1, p_4) (p_2, p_5), (p_3, p_6) și (z_1, z_4) (z_2, z_5), (z_3, z_6) . Știind că $H(z)$ corespunde unui sistem stabil și cauzal, polii se aleg din fiecare pereche astfel încât să fie în interiorul cercului unitate. Asupra zerourilor nu se fac astfel de

restricții. Oricum, în cazul în care coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ sunt reali, polii și zerourile sunt reali și/sau complex conjugăți. În consecință, zerourile asociate lui $H(z)$ sunt z_3 sau z_6 și (z_1, z_2) sau (z_4, z_5) . Cu considerațiile de mai sus, se observă că, pentru exemplul considerat, există patru sisteme cauzale, stabile, diferite cu trei poli și trei zerouri pentru care diagrama poli - zerouri a lui $C(z)$ este cea din figura 1.4 și, echivalent, pentru care răspunsul de amplitudine este același. Dacă $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ nu s-ar fi presupus reali, numărul de variante ar fi fost mai mare. Mai mult, dacă nu se fac restricții asupra numărului de poli și zerouri pentru $H(z)$, numărul de variante pentru $H(z)$ ar putea fi nelimitat. Pentru a arăta aceasta, se presupune că $H(z)$ are un factor de forma $\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$, adică

$H(z) = H_1(z) \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$. Factorul de această formă se numește *factor trece tot*, deoarece are răspunsul în amplitudine egal cu unitatea pe cercul unitate. În aceste condiții

$$\begin{aligned} C(z) &= H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z) \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} H_1^*(1/z^*) \frac{z - a}{1 - a^*z} = \\ &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \end{aligned} \quad (1.61)$$

adică factorul trece tot se anulează în $C(z)$ și prin urmare, nu poate fi identificat din diagrama poli zerouri a lui $C(z)$. În concluzie, dacă numărul polilor și zerourilor lui $H(z)$ este nespecificat, atunci pentru $C(z)$ dat, orice alegere arbitrară a lui $H(z)$ poate fi cascadată cu un număr arbitrar de factori trece tot, cu polii în interiorul cercului unitate ($|a| < 1$).

1.6. Calculul răspunsului în frecvență al sistemelor discrete, liniare, invariante în timp

Răspunsul în frecvență $H(\omega)$ al unui SDLIT poate fi calculat cu ajutorul transformatei Fourier a răspunsului la impuls al sistemului, ca în relația (1.54).

Dacă sistemul este caracterizat de o ecuație cu diferențe cu coeficienți constanți, de forma

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.62)$$

răspunsul în frecvență se poate obține prin evaluarea lui $H(z)$ dat de (1.54) pe cercul unitate, dacă $H(z)$ este convergent pe cercul unitate,

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.63)$$

Din (1.63) se observă că răspunsul în frecvență $H(\omega)$ al sistemului caracterizat de (1.62) depinde numai de coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$.

Din (1.63) derivă două cazuri particulare:

- a) Dacă $a_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, relația (1.63) se reduce la

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}, \quad (1.64)$$

sistemul fiind cu răspuns finit la impuls (FIR) [63]. Comparând (1.53) cu (1.64) rezultă că în cazul sistemelor FIR există relația

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, \dots, M \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (1.65)$$

- b) Dacă $b_k = 0$, $k = 1, \dots, M$, și $b_0 \neq 0$, sistemul este pur recursiv, cu răspuns infinit la impuls (IIR) și relația (1.63) devine

$$H(\omega) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.66)$$

O metodă alternativă de evaluare a răspunsului în frecvență al unui SDLIT, dat de (1.63) este *metoda geometrică*. Pentru explicarea acestei metode se notează cu z_1, z_2, \dots, z_M zerourile și cu p_1, p_2, \dots, p_N polii sistemului liniar invariant în timp. Cu aceste notări, (1.63) devine

$$H(\omega) = G \cdot e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2) \dots (e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2) \dots (e^{j\omega} - p_N)} \quad (1.67)$$

unde $G=b_0$ este câștigul sistemului. În continuare, se exprimă fiecare factor din (1.67) în formă polară

$$e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)} \quad (1.68)$$

$$\text{și} \quad e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \quad (1.69)$$

$$\text{unde} \quad V_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - z_k|, \quad \theta_k(\omega) \equiv \angle(e^{j\omega} - z_k) \quad (1.70)$$

$$\text{și} \quad U_k(\omega) \equiv |e^{j\omega} - p_k|, \quad \Phi_k(\omega) \equiv \angle(e^{j\omega} - p_k) \quad (1.71)$$

Modulul lui $H(\omega)$ se obține atunci cu relația

$$|H(\omega)| = |G| \frac{V_1(\omega) V_2(\omega) \dots V_M(\omega)}{U_1(\omega) U_2(\omega) \dots U_N(\omega)} \quad (1.72)$$

Acesta se mai poate calcula în decibeli, cu relația

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G| + 20 \sum_{k=1}^M \log_{10} V_k(\omega) - 20 \sum_{k=1}^N \log_{10} U_k(\omega) \quad (1.73)$$

Faza lui $H(\omega)$ este

$$\begin{aligned} \angle H(\omega) = & \angle G + \omega(N-M) + \theta_1(\omega) + \theta_2(\omega) + \dots + \theta_M(\omega) - \\ & - [\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \dots + \Phi_N(\omega)] \end{aligned} \quad (1.74)$$

Faza termenului de câștig G este 0 sau π , după cum G este pozitiv sau negativ.

În concluzie, dacă se cunosc zerourile și polii funcției de sistem $H(z)$, se poate evalua răspunsul în frecvență cu ajutorul relațiilor (1.72) și (1.74).

Interpretarea geometrică a mărimilor din relațiile (1.72) și (1.74) rezultă considerând polul p_k și zeroul z_k plasati în punctele A și B ale planului z , ca în figura 1.5a.

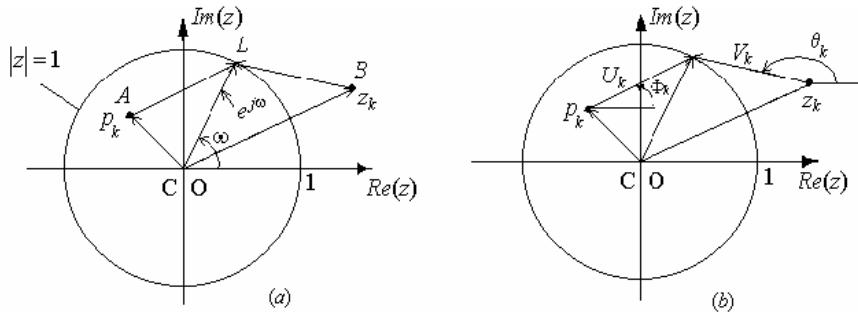


Figura 1.5. Interpretarea geometrică a contribuției unui pol și a unui zero

Fie L punctul de pe cercul unitate corespunzător frecvenței unghiulare ω . Fie, de asemenea, vectorii AL și BL cu originea în pol, respectiv în zero și extremitatea în punctul L . Din figura 1.5a rezultă

$$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AL} \quad (1.75)$$

$$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL} \quad (1.76)$$

Dar $\overrightarrow{CL} = e^{j\omega}$, $\overrightarrow{CA} = p_k$ și $\overrightarrow{CB} = z_k$, deci

$$\overrightarrow{AL} = e^{j\omega} - p_k \quad (1.77)$$

$$\text{și} \quad \overrightarrow{BL} = e^{j\omega} - z_k \quad (1.78)$$

Combinând relațiile (1.77) și (1.78) cu (1.68) și (1.69), rezultă

$$\overrightarrow{AL} = e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega) e^{j\Phi_k(\omega)} \quad (1.79)$$

$$\overrightarrow{BL} = e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega) e^{j\theta_k(\omega)} \quad (1.80)$$

Modulul $U_k(\omega)$ este lungimea segmentului AL , adică distanța de la polul p_k la punctul L , corespunzător lui $e^{j\omega}$, în timp ce modulul $V_k(\omega)$ este distanța de la zeroul z_k la punctul L .

Fazele $\Phi_k(\omega)$ și $\theta_k(\omega)$ sunt unghiurile vectorilor AL și BL cu axa reală pozitivă, aşa cum este ilustrat în figura 1.5b. Această interpretarea geometrică este utilă pentru că pune în evidență influența poziției polilor și zerourilor asupra funcției de transfer a SDLIT.

Dacă, de exemplu, un zerou z_k și un pol p_k sunt plasati pe cercul unitate, ca în figura 1.6, se observă că la $\omega = \angle z_k$, $V_k(\omega)$ este egal cu zero și, în consecință, și $|H(\omega)|$ devine zero. Similar, la $\omega = \angle p_k$, $U_k(\omega)$ devine zero și $|H(\omega)|$, infinit. Evaluarea fazei în aceste cazuri nu are sens.

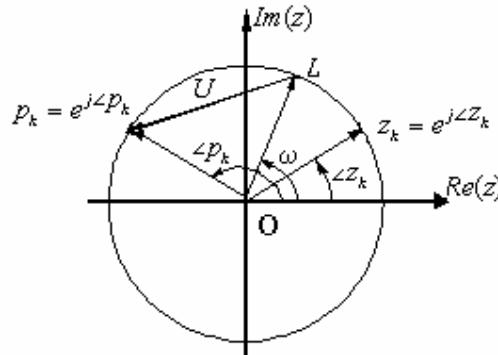


Figura 1.6. Un zerou pe cercul unitate determină $|H(\omega)| = 0$ la $\omega = \angle z_k$ și un pol pe cercul unitate are ca rezultat $|H(\omega)| = \infty$ la $\omega = \angle p_k$

Din cele prezentate până acum se desprind următoarele observații:

- Prezența unui zerou în apropierea cercului unitate va determina ca mărimea modulului răspunsului în frecvență, la frecvențe corespunzătoare punctelor de pe cercul unitate apropiate de acel punct, să fie mic, în timp ce prezența unui pol în apropierea cercului unitate va avea ca efect o valoare mare a modulului răspunsului în frecvență, la frecvențe apropiate de acel punct. Polii și zerourile au efecte contrare, astfel încât plasarea unui zerou în apropierea unui pol îi atenuază efectul, și invers. Prin

plasarea polilor și zerourilor se poate determina o varietate de forme pentru $|H(\omega)|$ și $\angle H(\omega)$, lucrul exploatat în proiectarea filtrelor digitale.

2. Singularitățile din origine nu afectează răspunsul de amplitudine, ci numai pe cel de fază.
3. Răspunsul de amplitudine este zero numai când funcția de sistem are un zero pe cercul unitate la frecvența respectivă.
4. Salturile de fază de π radiani se produc la fiecare trecere a frecvenței printr-un zerou aflat pe cercul unitate. Pentru a arăta acest lucru, se presupune că există un zerou la $z = e^{j\omega_0}$ și fie $\omega_0^- = \omega_0 - \varepsilon$ și $\omega_0^+ = \omega_0 + \varepsilon$, pentru un $\varepsilon > 0$, suficient de mic, situație redată în figura 1.7. Se observă că valoarea fază la $\omega = \omega_0^-$ este cu π radiani mai mică decât cea corespunzătoare lui $\omega = \omega_0^+$. Dacă în $z = e^{j\omega_0}$ există un zerou multiplu, de ordin M , când ω trece de la ω_0^- la ω_0^+ fază va avea un salt de $M\pi$ radiani. Evident, dacă M este un număr par, saltul va fi un multiplu de 2π radiani, caz în care, pentru valoarea principală a fazării nu se observă nici o schimbare.
5. Când ω variază de la 0 la π fază generată de fiecare zerou plasat strict în interiorul cercului unitate crește cu π radiani. Faza generată de fiecare pol plasat în interiorul cercului unitate descrește cu π radiani. Dacă numărul de astfel de zerouri este N_z și de poli N_p , creșterea netă de fază, când ω variază de la 0 la π , este de $(N_z - N_p)\pi$.

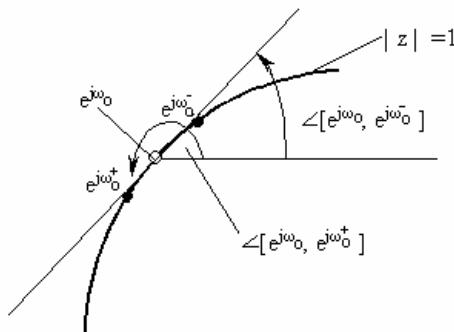


Figura 1.7. Evaluarea răspunsului de fază în jurul unui zerou plasat pe cercul unitate

1.7. Sisteme discrete, liniare, invariante în timp văzute ca filtre selective de frecvență

Un sistem liniar invariant în timp poate realiza o discriminare sau filtrare a diferitelor componente de frecvență a semnalului aplicat la intrarea sa. Natura acțiunii de filtrare este determinată de răspunsul în frecvență al filtrului $H(\omega)$, care, la rândul său, depinde de alegerea parametrilor sistemului $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$. Prin alegerea adecvată a coeficienților se pot proiecta filtre selective de frecvență care permit trecerea semnalelor cu spectrul în anumite benzi și atenuarea semnale ale căror componente de frecvență sunt în alte benzi.

În general, un sistem liniar invariant în timp modifică spectrul semnalului de intrare $X(\omega)$, în concordanță cu răspunsul său în frecvență $H(\omega)$, pentru a produce ieșirea $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$. În acest sens, $H(\omega)$ acționează ca o *funcție de ponderare* sau de *formare spectrală* asupra diferitelor componente de frecvență ale semnalului. În acest context orice sistem liniar, invariant în timp poate fi considerat ca un filtru care modifică componentele de frecvență ale semnalului de la intrarea sa și, în consecință, cele două noțiuni sunt sinonime. În prelucrarea numerică filtrarea este folosită în multe scopuri, cum ar fi: atenuarea zgomotului, modificarea spectrului în scopul egalizării canalelor de comunicații, detectia semnalelor, analiza spectrală e.t.c.

1.7.1. Caracteristicile filtrelor ideale

De obicei, filtrelle sunt clasificate în funcție de caracteristicile lor în domeniul frecvență. Filtrele selective de frecvență pot fi trece jos (FTJ), trece sus (FTS), trece bandă (FTB), oprește bandă (FOB), trece tot (FTT) și multibandă. Modulul răspunsului în frecvență și funcția de transfer a filtrelor ideale enumerate mai sus sunt arătate în figura 1.8. Aceste filtre ideale au câstig constant C (de obicei egal cu unitatea) în benzile de trecere și zero în benzile de oprire. Pentru FTJ și FTS, ω_c reprezintă frecvența de tăiere, iar pentru FTB și FOB, ω_1 și ω_2 reprezintă frecvențele capetelor benzilor de trecere, respectiv de oprire [69].

O altă caracteristică a unui filtru ideal este caracteristica de fază liniară. Fie un filtru digital cu funcția de transfer

$$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0}, & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (1.81)$$

unde C și n_0 sunt constante.

Din compararea relațiilor (1.81) cu (1.11), se pot scrie relațiile:

$$|H(\omega)| = C \quad (1.82)$$

și

$$\theta(\omega) = -\omega n_0 \quad (1.83)$$

Din (1.83) rezultă că faza este o funcție liniară de ω . Dacă la intrarea unui astfel de filtru se aplică semnalul $x[n]$ ale cărui componente de frecvență sunt cuprinse în domeniul $\omega_1 < \omega < \omega_2$, semnalul de ieșire are spectrul

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = CX(\omega)e^{-j\omega n_0}, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2 \quad (1.84)$$

Aplicând transformata Fourier inversă relației (1.84), se obține[63]

$$y[n] = Cx[n - n_0] \quad (1.85)$$

și, în consecință, ieșirea filtrului este o versiune scalată și întârziată a intrării. Întârzierea și scalarea nu sunt considerate distorsiuni ale semnalului.

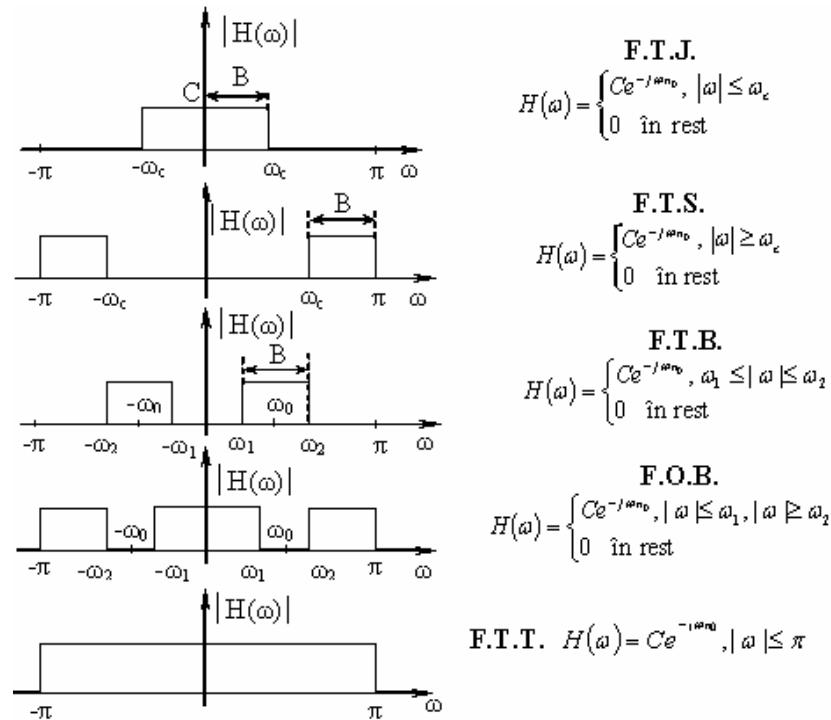


Figura 1.8. Modulul răspunsului în frecvență pentru câteva filtre selective de frecvență ideale, discrete

Derivata fazei în raport cu frecvența definește *întârzierea de grup* a filtrului

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (1.86)$$

Aceasta reprezintă întârzierea pe care o componentă de frecvență ω a semnalului, o suferă la trecerea prin filtru. Dacă $\theta(\omega)$ este o funcție liniară în ω , atunci $\tau_g(\omega) = n_0 = \text{constant}$, adică, toate componentele de frecvență ale semnalului suferă aceeași întârziere.

Orice abatere a răspunsului în frecvență de la forma ideală dată în (1.81) are ca rezultat distorsionarea semnalului. Dacă modulul răspunsului în frecvență al sistemului variază în banda de frecvențe ocupată de semnal, atunci semnalul suferă *distorsiuni de amplitudine*. Dacă răspunsul de fază al sistemului nu este liniar în banda de frecvențe a semnalului, atunci semnalul suferă *distorsiuni de fază*.

În concluzie, filtrele ideale au caracteristica de modul constantă, iar cea de fază, liniară în banda de trecere. În toate cazurile astfel de filtre sunt nerealizabile fizic, dar servesc ca idealizare matematică pentru filtrele practice ale căror caracteristici le aproximează destul de fidel pe cele ideale.

De exemplu, filtrul ideal trece jos are răspunsul la impuls

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c \pi n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \end{aligned} \quad (1.87)$$

Acest filtru nu este cauzal și nici absolut sumabil și, prin urmare, este instabil, nefind realizabil. Cu toate acestea, caracteristicile ideale de frecvență pot fi aproximate destul de fidel de filtre reale, realizabile practic, după cum se va vedea în Capitolul 2.

1.8. Proiectarea filtrelor digitale prin plasarea polilor și zerourilor în planul Z

În continuare se analizează posibilitatea proiectării unor filtre digitale simple (la care forma caracteristicii de amplitudine nu este riguros specificată), prin plasarea corespunzătoare a polilor și zerourilor în planul Z. În paragraful 1.6 s-a descris modul în care poziția polilor și zerourilor față de cercul unitate afectează răspunsul în frecvență al sistemului și s-a

prezentat o metodă grafică pentru calculul răspunsului în frecvență, cunoscută fiind diagrama poli-zerouri a sistemului.

Principiul de bază care caracterizează metoda plasării polilor și zerourilor în planul Z este de a plasa polii și zerourile în apropierea punctelor de pe cercul unitate corespunzătoare frecvențelor ce trebuie accentuate, respectiv atenuate sau suprimate. Mai mult, pentru un filtru cauzal trebuie îndeplinite următoarele condiții:

1. Toți polii trebuie să fie plasăti în interiorul cercului unitate, pentru ca filtrul să fie stabil.
2. Polii și zerourile complexe trebuie să apară în perechi conjugate, asigurându-se astfel coeficienți reali pentru filtru.

Se reamintește că funcția de sistem $H(z)$ a unui SDLIT poate fi exprimată sub forma

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.88)$$

unde b_0 este un factor de câstig, astfel ales, încât să rezulte

$$|H(\omega_0)| = 1 \quad (1.89)$$

unde ω_0 este o frecvență din banda de trecere a filtrului.

În cazul sistemelor cauzale, gradul polinomului de la numitor (N) trebuie să fie mai mare sau cel mult egal cu gradul polinomului de la numărător (M), astfel încât filtrul să aibă mai mulți poli nebanali decât zerouri [63]. Într-adevăr, dacă filtrul este cauzal, din teorema valorii inițiale rezultă

$$h[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} H^+(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.90)$$

Dacă $H^+(z)=H(z)$ este o fracție rațională, atunci gradul numărătorului, M , nu poate depăși gradul numitorului, N , adică $M \leq N$. Condiția este mai puțin severă decât în cazul sistemelor analogice, unde $M < N$ (inegalitate strictă).

1.8.1. Filtre trece jos, trece sus și trece bandă

În proiectarea filtrelor trece jos digitale, polii trebuie plasăti în apropierea cercului unitate corespunzător frecvențelor joase (în apropiere de $\omega = 0$), iar zerourile în apropiere sau pe cercul unitate în puncte

corespunzătoare frecvențelor înalte (aproape de $\omega = \pi$). Situația inversă este valabilă pentru filtrele trece sus. Figura 1.9 ilustrează diagramele poli – zerouri pentru trei FTJ și pentru trei FTS.

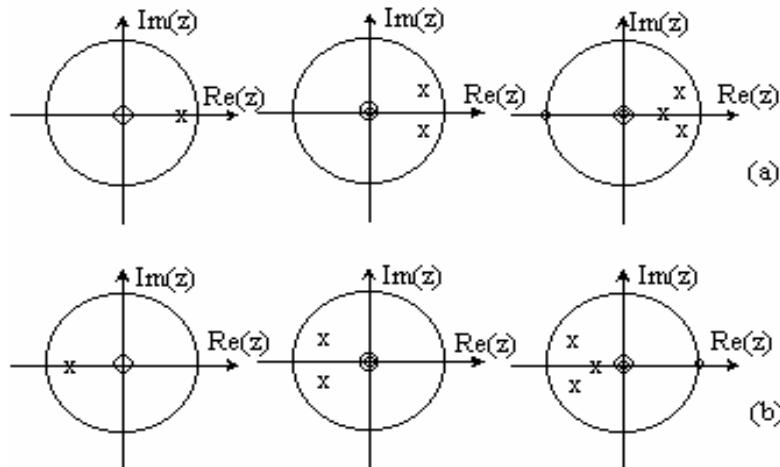


Figura 1.9. Diagrama poli – zerouri pentru trei a) FTJ și b) FTS, fiecare din acestea cu un pol real, doi poli complex conjugati și, respectiv, un pol real, doi poli complex conjugati și un zerou nebalansat

Modulul și faza răspunsului filtrului cu un singur pol, cu funcția de sistem

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \quad (1.91)$$

sunt ilustrate în fig. 1.10, pentru $a = 0,9$. Caracteristicile amplitudine – frecvență și fază – frecvență s-au obținut prin evaluarea funcției de sistem $H_1(z)$ pe cercul unitate.

Câștigul G s-a ales $1-a$, astfel încât la $\omega = 0$, $|H(0)|=1$. Un zerou suplimentar la $z = -1$ va atenua răspunsul filtrului la frecvențe înalte. Acest zerou determină funcția de transfer

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (1.92)$$

Caracteristicile de amplitudine și fază sunt date tot în figura 1.10. Se observă că $|H_2(\omega)|$ devine egal cu zero la $\omega = \pi$. Similar, se obțin FTS simple prin reflectarea poziției polilor și zerourilor FTJ față de axa imaginară a planului Z, obținându-se funcția de sistem

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}} \quad (1.93)$$

pentru un FTS cu un pol și un zerou. Caracteristicile de amplitudine și fază pentru FTS sunt identice cu cele ale FTJ translate cu π radiani.

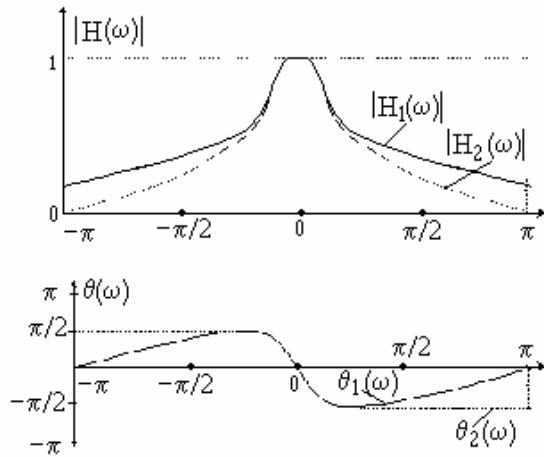


Figura 1.10. (a) Reprezentarea modului și (b) a fazei pentru un filtru cu un singur pol, $H_1(z)$, și un filtru cu un pol și un zerou $H_2(z)$

Exemplul 1.5.

Să se proiecteze un FTJ cu un pol dublu, astfel încât răspunsul în frecvență să satisfacă condiția $H(0)=1$ și $\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$.

Soluție. Funcția de sistem a filtrului este $H(z) = \frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$.

Trebuie determinați parametrii b_0 și p .

$$\text{La } \omega = 0 \quad H(0) = \frac{b_0}{(1-p)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad b_0 = (1-p)^2$$

$$\text{La } \omega = \frac{\pi}{4}$$

$$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(1-p)^2}{\left(1-pe^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1-p\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+jp\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}+\frac{jp}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\text{deci } \frac{(1-p)^4}{\left[\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{p^2}{2}\right]^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1 + p^2 - \sqrt{2}p \rightarrow p=0,32$$

$$\text{Prin urmare } H(z) = \frac{0,46}{(1-0,32z^{-1})^2}$$

Aceleași principii pot fi aplicate pentru proiectarea filtrelor trece bandă. FTB conțin una sau mai multe perechi de poli complex conjugăți plasati în apropierea cercului unitate, la frecvențe apropiate de banda de trecere a filtrului.

Exemplul 1.6.

Să se proiecteze un filtru trece bandă cu doi poli, cu centrul benzii de trecere la $\omega = \frac{\pi}{2}$, răspunsul în frecvență egal cu zero la $\omega = 0$ și $\omega = \pi$ și egal cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ la $\omega = \frac{4\pi}{9}$.

Soluție. Deoarece $|H(\omega)|$ este maxim la $\frac{\pi}{2}$, rezultă că polii

sistemului sunt $p_{1,2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$.

Zerourile sunt $z_1 = 1$ și $z_2 = -1$. În consecință, funcția de transfer este

$$H(z) = G \frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G \frac{z^2 - 1}{z^2 + r^2}$$

Factorul de câștig se determină din evaluarea răspunsului în frecvență $H(\omega)$ al filtrului la $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \frac{2}{1-r^2} = 1 \rightarrow G = \frac{1-r^2}{2}.$$

Valoarea lui r se determină prin evaluarea lui $H(\omega)$ la $\omega = \frac{4\pi}{9}$.

$$|H(4\pi/9)|^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4} \frac{2-2\cos(8\pi/9)}{1+r^4+2r^2\cos(8\pi/9)} = \frac{1}{2}, \text{ de unde } r^2 = 0,7 \text{ și}$$

$$H(z) = 0,15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0,7z^{-2}}.$$

Modulul și faza corespunzătoare răspunsului în frecvență sunt reprezentate în figura 1.11.

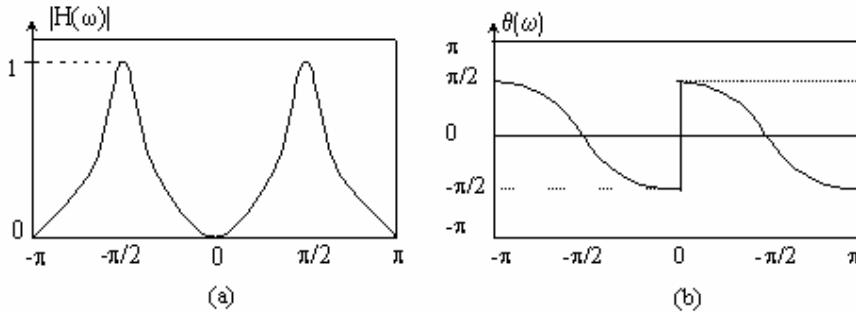


Figura 1.11. (a) Modulul și (b) faza funcției de transfer a filtrului trece bandă din exemplul 1.6.

Trebuie subliniat faptul că scopul principal al acestei metodologii de proiectare a filtrelor digitale simple prin plasarea polilor și zerourilor este de a evidenția efectul pe care îl au polii și zerourile asupra răspunsului în frecvență al sistemelor, ea nefiind o metodă potrivită pentru proiectarea filtrelor digitale cu caracteristici bine definite.

1.8.1.1. O transformare simplă a FTJ în FTS

Presupunând că s-a proiectat un FTJ cu răspunsul la impuls $h_{lp}[n]$, este posibilă conversia sa fie într-un FTB, fie FTS, cu ajutorul proprietății de translare de frecvență a transformatei Fourier [63].

În cele ce urmează, se prezintă o transformare simplă, care permite conversia unui FTJ într-un FTS, și invers. Dacă se notează cu $h_{lp}[n]$ răspunsul la impuls al unui FTJ, care are răspunsul în frecvență $H_{lp}(\omega)$, se poate obține un FTS prin translarea lui $H_{lp}(\omega)$ cu π radiani, (adică înlocuirea lui ω cu $\omega - \pi$).

$$H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi) \quad (1.94)$$

unde H_{hp} este răspunsul în frecvență al FTS.

Deoarece translația de frecvență cu π a funcției de transfer echivalează cu multiplicarea răspunsului la impuls cu $e^{j\pi m}$, răspunsul la impuls al FTS rezultă de forma

$$h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n] \quad (1.95)$$

Prin urmare, răspunsul la impuls al FTS se obține din răspunsul la impuls al FTJ prin schimbarea semnului eșantioanelor impare ale lui $h_{lp}[n]$. Evident, dacă este cunoscut răspunsul la impuls $h_{hp}[n]$ al FTS, răspunsul la impuls al FTJ se determină cu relația

$$h_{lp}[n] = (-1)^n h_{hp}[n] \quad (1.96)$$

Dacă FTJ este descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (1.97)$$

răspunsul său în frecvență este

$$H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.98)$$

Înlocuind ω cu $\omega - \pi$ în (1.98) se obține funcția de transfer a FTS

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k e^{-j\omega k}} \quad (1.99)$$

care corespunde ecuației cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x[n-k] \quad (1.100)$$

1.8.2. Rezonatoare digitale

Rezonatorul digital este un filtru trece bandă, cu doi poli complex conjugati plasati în apropierea cercului unitate, cum se arată în figura 1.12.a.

Numele de rezonator se referă la faptul că răspunsul de amplitudine are valoare mare în apropierea polilor. Poziția unghiulară a polilor determină frecvența de rezonanță. În proiectarea unui rezonator digital cu un maxim de rezonanță la sau în apropiere de $\omega = \omega_0$, se alege perechea de poli complex conjugati $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$, $0 < r < 1$. În plus, se selectează două zerouri. Deși există multe posibilități de alegere a poziției zerourilor, două cazuri prezintă interes mai special. Unul se referă la

plasarea zerourilor în origine și celălalt la plasarea zerourilor la $z = 1$ și $z = -1$. În acest ultim caz se elimină complet răspunsul filtrului la $\omega = 0$ și $\omega = \pi$.

Funcția de transfer a rezonatorului digital cu zerouri în origine este

$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})} \quad (1.101)$$

sau

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.102)$$

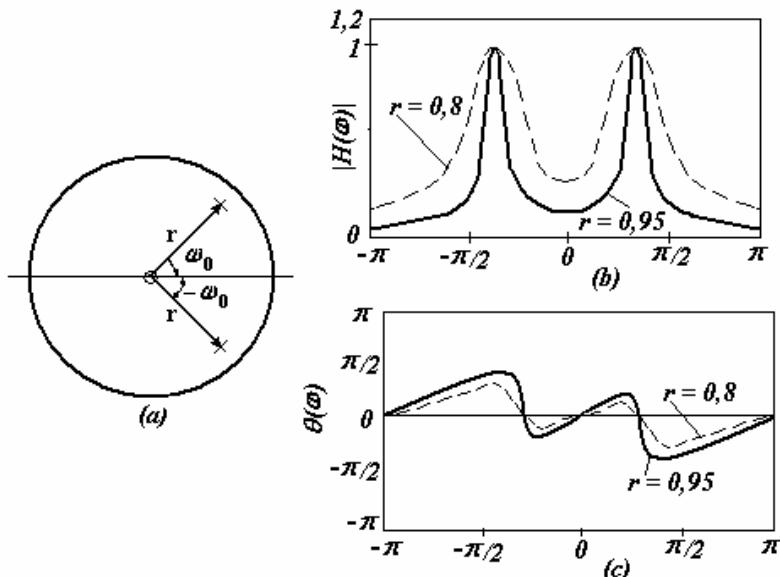


Figura 1.12 (a) Modelul poli –zerouri, (b) răspunsul de amplitudine, (c) răspunsul de fază al unui rezonator digital cu $r=0,8$ și $r=0,95$

Factorul de normalizare b_0 se alege astfel încât $|H(\omega_0)| = 1$. Din (1.101) rezultă

$$H(\omega_0) = \frac{b_0}{(1 - r)(1 - re^{-j2\omega_0})} \quad (1.103)$$

și, deci

$$|H(\omega_0)| = \frac{b_0}{(1 - r)\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos 2\omega_0}} = 1 \quad (1.104)$$

Factorul de normalizare este atunci

$$b_0 = (1-r)\sqrt{1+r^2 - 2r \cos 2\omega_0} \quad (1.105)$$

și $|H(\omega)|$ se poate exprima ca

$$|H(\omega)| = \frac{b_0}{u_1(\omega)u_2(\omega)} \quad (1.106)$$

iar faza

$$\phi(\omega) = 2\omega - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega) \quad (3.107)$$

unde $u_1(\omega)$ și $u_2(\omega)$ reprezintă modulele vectorilor orientați de la p_1 și p_2 la punctul ω pe cercul unitate, iar $\phi_1(\omega)$ și $\phi_2(\omega)$, fazele lor.

$$\begin{aligned} u_1(\omega) &= \sqrt{1+r^2 - 2r \cos(\omega_0 - \omega)} \\ u_2(\omega) &= \sqrt{1+r^2 - 2r \cos(\omega_0 + \omega)} \end{aligned} \quad (1.108)$$

Pentru o valoare oarecare a lui r , $u_1(\omega)$ atinge valoarea minimă $(1-r)$ la $\omega = \omega_0$. Produsul $u_1(\omega)u_2(\omega)$ atinge valoarea minimă la frecvența

$$\omega_r = \arccos \left(\frac{1+r^2}{2r} \cos \omega_0 \right), \quad (1.109)$$

care reprezintă *frecvența de rezonanță a filtrului*. Pentru r foarte apropiat de unitate, $\omega_r \approx \omega_0$, care este poziția unghiulară a polilor. De asemenea, se observă că dacă r se apropiște de unitate, maximul de la rezonanță devine mai abrupt, deoarece $u_1(\omega)$ variază semnificativ în apropierea lui ω_0 . O măsură cantitativă a ascuțimii caracteristicii rezonatorului este dată de lățimea de bandă la 3 dB a filtrului, care, pentru valori ale lui r apropiate de unitate, este [49].

$$\Delta\omega \approx 2(1-r) \quad (1.110)$$

În figurile 1.12b și 1.12c se prezintă răspunsul de modul și de fază pentru două rezonatoare digitale, unul cu $\omega_0 = \pi/3, r = 0,8$ și celălalt cu $\omega_0 = \pi/3, r = 0,95$.

Dacă zerourile sunt plasate la $z = 1, z = -1$, funcția de transfer a rezonatorului este

$$H(z) = G \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} = G \frac{1-z^{-2}}{1-(2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.111)$$

și răspunsul în frecvență

$$H(\omega) = b_0 \frac{1 - e^{-j2\omega}}{[1 - re^{j(\omega_0 - \omega)}][1 - re^{-j(\omega_0 + \omega)}]} \quad (1.112)$$

Zerourile din $z = \pm 1$ afectează atât răspunsul de amplitudine, cât și răspunsul de fază. Răspunsul de amplitudine este

$$|H(\omega)| = b_0 \frac{N(\omega)}{u_1(\omega)u_2(\omega)} \quad (1.113)$$

unde

$$N(\omega) = \sqrt{2(1 - \cos 2\omega)} \quad (1.114)$$

În figura 1.13 sunt reprezentate răspunsurile de amplitudine și de fază pentru un rezonator digital cu zerouri în $z=1$ și $z=-1$ și $r=0,8$ și $r=0,95$. Datorită prezenței zerourilor, frecvența de rezonanță și banda filtrului se modifică față de cele ale rezonatorului cu zerouri în origine.

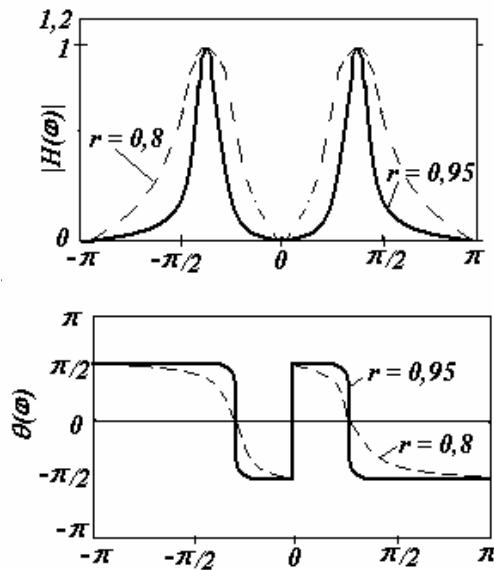


Figura 1.13. Răspunsul de amplitudine și de fază a unui rezonator digital cu zerouri în $z=1$ și $z=-1$ și $r=0,8$ și $r=0,95$

1.8.3. Filtre rejectoare (Notch)

Un *filtru rejector* sau *notch* este un filtru a cărui funcție de sistem conține unul sau mai multe zerouri pe cercul unitate. Caracteristica amplitudine – frecvență a unui astfel de filtru va prezenta “crestături” la

frecvențele corespunțătoare zerourilor, situație ilustrată în figura 1.14. Aceste filtre sunt utile în aplicații unde anumite componente de frecvență trebuie eliminate, cum se întâmplă de multe ori cu frecvența tensiunii de alimentare și armonicele acesteia.

Pentru a crea un nul în răspunsul în frecvență al filtrului la frecvența ω_0 , se introduce o pereche de zerouri complex conjugate pe cercul unitate la frecvența unghiulară ω_0 , adică $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$.

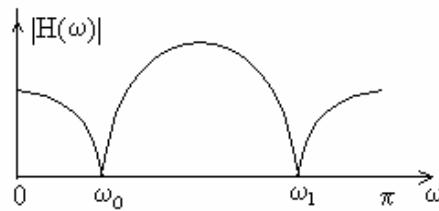


Figura 1.14 Răspunsul în frecvență al unui filtru „notch”

Funcția de sistem a unui filtru „notch” FIR este

$$H(z) = b_0 \left(1 - e^{j\omega_0} z^{-1} \right) \left(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1} \right) = b_0 \left(1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2} \right) \quad (1.115)$$

În cazul filtrelor notch FIR, banda din zona nulului sau a crestăturii este relativ întinsă și sunt atenuate și alte componente din jurul frecvenței de interes.

În figura 1.15 se prezintă răspunsul în frecvență pentru un filtru notch, care are un zerou la $\omega = \pi/4$.

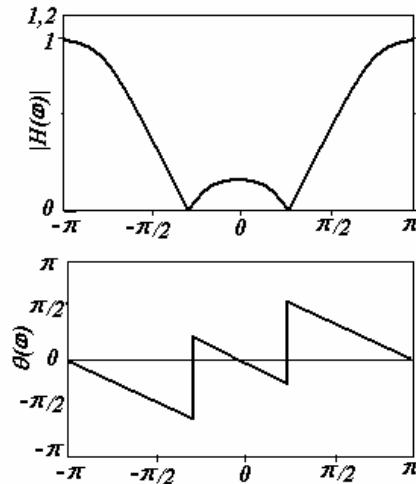


Figura 1.15. Caracteristica de modul și de fază a unui filtru notch cu un zerou la $\omega_0 = \pi/4$; $H(z) = G[1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$

Pentru a micșora banda din jurul nulului, se introduc poli în funcția de transfer, $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$, cu r apropiat de unitate, al căror efect este de rezonanță în vecinătatea nulului și astfel se reduce lățimea de bandă a crestăturii.

Funcția de transfer pentru filtrul realizat este

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (1.116)$$

Caracteristicile de modul și de fază pentru două filtre notch a căror funcție de sistem este dată de (1.116), unul cu $r = 0,85$ și celălalt cu $r = 0,95$, sunt prezentate în figura 1.16.

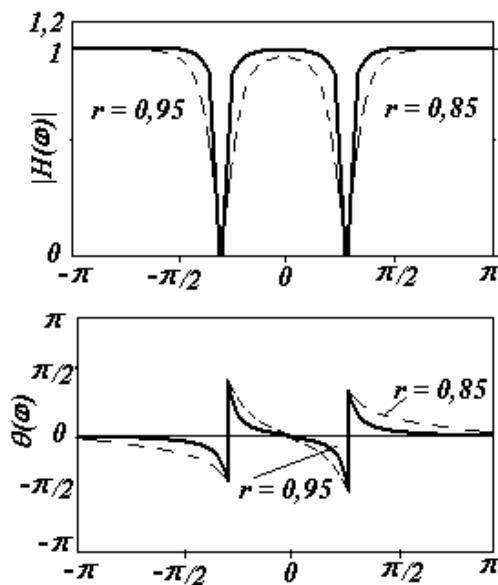


Figura 1.16. Caracteristicile de modul și de fază pentru două filtre notch cu funcția de

$$\text{sistem } H(z) = b_0 \frac{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \text{ pentru cazurile } r = 0,85 \text{ și } r = 0,95.$$

1.8.4. Filtre pieptene (Comb)

Simplificat, un *filtru pieptene* sau *comb* poate fi văzut ca unul *notch*, în care nulurile se produc periodic de-a lungul benzii de frecvență.

Pentru a ilustra un filtru pieptene simplu, fie un filtru FIR care calculează media alunecătoare, descris de ecuația cu diferențe [63]

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=1}^M x[n-k] \quad (1.117)$$

cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z^{-k} = \frac{1}{M+1} \frac{[1 - z^{-(M+1)}]}{(1 - z^{-1})} \quad (1.118)$$

și răspunsul în frecvență

$$H(\omega) = \frac{e^{-j\omega M/2}}{M+1} \frac{\sin \omega \left(\frac{M+1}{2} \right)}{\sin \omega / 2} \quad (1.119)$$

Din relația (1.118) se observă că filtrul are zerourile pe cercul unitate la

$$z_k = e^{j2\pi \frac{k}{M+1}} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1.120)$$

Polul $z = 1$ este anulat de zeroul de la $z = 1$, astfel încât filtrul nu conține poli în afara originii.

Reprezentarea caracteristicii de modul din relația (1.119) ilustrează că zerourile uniform spațiate din răspunsul în frecvență sunt la $\omega_k = 2\pi k/(M+1)$, $k = 1, 2, \dots, M$, situație arătată în figura 1.17, pentru $M=8$.

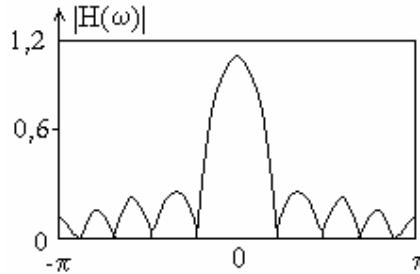


Figura 1.17. Răspunsul în amplitudine al unui filtru pieptene

Mai general, se poate obține un filtru pieptene, dintr-un filtru FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h[k] z^{-k} \quad (1.121)$$

prin înlocuirea lui z cu z^L , unde L este un întreg pozitiv. Noul filtru FIR are funcția de sistem

$$H_L(z) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-kL} \quad (1.122)$$

și răspunsul în frecvență

$$H_L(\omega) = \sum_{k=0}^M h[k]z^{-jkL\omega} = H(L\omega) \quad (1.123)$$

În consecință, răspunsul în frecvență $H_L(\omega)$ este o repetare de L ori a răspunsului $H(\omega)$ în domeniul $0 \leq \omega \leq 2\pi$, cum este ilustrat în figura 1.18.

Dacă se consideră filtrul FIR descris de (1.118), filtrul pieptene rezultat are funcția de transfer

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}} \quad (1.124)$$

și răspunsul în frecvență

$$H_L(\omega) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin[\omega L(M+1)/2]}{\sin(\omega L/2)} e^{-j\omega LM/2} \quad (1.125)$$

cu zerourile pe cercul unitate

$$z_k = e^{j2\pi k/L(M+1)} \quad (1.126)$$

pentru toate valorile întregi pentru k cu excepția lui $0, L, 2L, \dots, ML$.

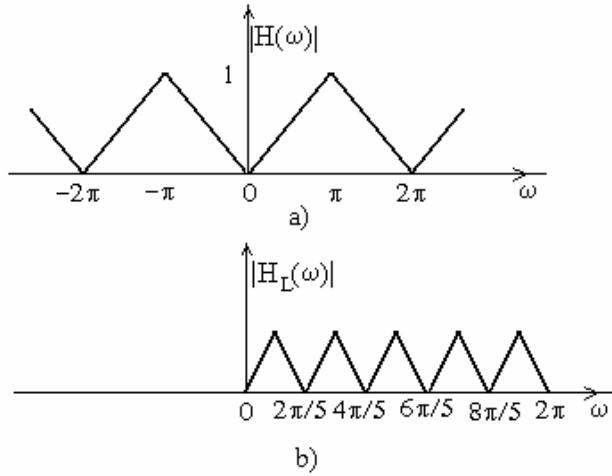


Figura 1.18. Filtru pieptene cu răspunsul în frecvență $H_L(\omega)$ obținut din $H(\omega)$.

1.8.5. Filtre trece tot

Un *filtru trece tot* (FTT) se definește ca un sistem care are modulul funcției de transfer constant pentru toate frecvențele, adică

$$|H(\omega)| = 1 \quad 0 \leq \omega \leq \pi \quad (1.127)$$

Cel mai simplu exemplu de filtru trece tot este un sistem de întârziere pură, descris de $H(z) = z^{-k}$. Un filtru trece tot, mult mai general, este caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1 \quad (1.128)$$

cu coeficienții $\{a_k\}$ reali. Dacă se definește polinomul

$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}, \quad a_0 = 1 \quad (1.129)$$

relația (1.128) se mai poate scrie

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} \quad (1.130)$$

Deoarece

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1 \quad (1.131)$$

sistemul descris de (1.130) este trece tot. Mai mult, dacă z_0 este un pol al lui $H(z)$, $1/z_0$ este un zerou al său (adică polii și zerourile sunt reciproce), cum se arată în figura 1.19.

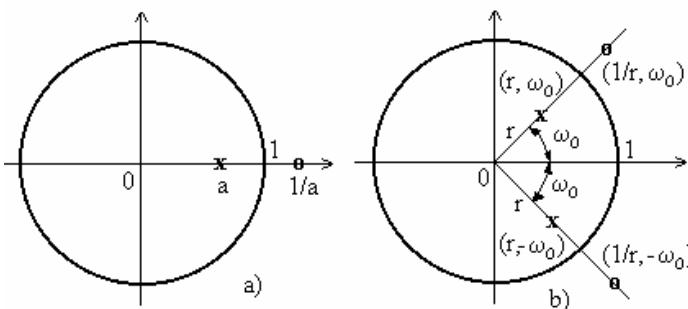


Figura 1.19. Modelul poli-zerouri al unui FTT a) de ordinul I b) de ordinul II

O formă mai generală pentru funcția de transfer a unui filtru trece tot cu coeficienți reali este

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_C} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k z^{-1})(1 - \beta_k^* z^{-1})} \quad (1.132)$$

unde α_k reprezintă polii reali, β_k și β_k^* , polii complex conjugăți, N_R , numărul de poli și zerouri reale, iar N_C , numărul perechilor de zerouri și poli complex conjugăți.

Se observă că fiecărui pol complex îi corespunde în factorul trece tot un zerou care este reciprocul conjugat al polului. Pentru sistemele cauzale și stabile [63], $-1 < \alpha_k < 1$ și $|\beta_k| < 1$.

Pentru un filtru trece tot cu un singur pol și un zerou, complecși, caracterizat de funcția de sistem

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}, \text{ cu } a = re^{j\theta}$$

și funcția de transfer

$$H_{ap}(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - re^{-j\theta} e^{j\omega}}{1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}},$$

răspunsul de fază este

$$\Theta_{ap}(\omega) = -\omega - 2\arctg \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (1.133)$$

și întârzierea de grup este

$$\tau_g = -\frac{d\Theta_{ap}(\omega)}{d\omega} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (1.134)$$

Se observă că pentru un sistem cauzal și stabil, $r < 1$ și, deci, $\tau_g \geq 0$. Deoarece întârzierea de grup a unui filtru trece tot de ordin superior este o sumă de termeni pozitivi, ca în relația (1.134), aceasta este întotdeauna pozitivă.

Filtrele trece tot au aplicații în egalizări de fază, pentru compensarea fazei necorespunzătoare aplicației, astfel încât răspunsul global să fie de fază liniară.

1.8.6. Oscilatoare digitale sinusoidale

Un *oscilator digital sinusoidal* poate fi văzut ca un rezonator cu o perche de poli complex conjugăți plasați pe cercul unitate. Un sistem de ordinul II, cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (1.135)$$

și parametrii $a_1 = -2r \cos \omega_0$, $a_2 = r^2$, are polii complex conjugați $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ și răspunsul la impuls [63]

$$h[n] = \frac{b_0 r^n}{\sin \omega_0} \sin((n+1)\omega_0 u[n]) \quad (1.136)$$

Pentru $r = 1$ și $b_0 = A \sin \omega_0$, rezultă

$$h[n] = A \sin((n+1)\omega_0 u[n]), \quad (1.136')$$

adică răspunsul la impuls al unui sistem de ordin II cu poli complex conjugați pe cercul unitate este un semnal sinusoidal, sistemul devenind un *generator sinusoidal digital*.

1.9. Sisteme inverse, deconvoluție și identificarea sistemelor

Răspunsul $y[n]$ al unui SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, la un semnal de intrare $x[n]$ este dat de convoluția dintre $h[n]$ și $x[n]$.

În unele probleme practice se dorește aflarea semnalului de intrare, cunoscându-se semnalul de ieșire al unui sistem cu caracteristici necunoscute. De exemplu, în transmisia datelor digitale la viteza mare pe canalele telefonice se știe că acestea distorsionează semnalul și cauzează interferență intersimboluri, ceea ce poate determina erori la refacerea datelor. În acest caz se pune problema proiectării unui sistem corector care, cascadat cu sistemul original, să furnizeze o ieșire care să corecteze distorsiunile canalului și, deci, să producă o replică a semnalului dorit. Acest sistem corector se numește *egalizor*. În contextul general al teoriei sistemelor liniare invariante în timp, sistemul corector se va numi *sistem invers*, deoarece, în principiu, răspunsul său în frecvență este invers celui al sistemului ce provoacă distorsiunile.

Mai mult, deoarece sistemul care introduce distorsiunile produce o ieșire $y[n]$ care este convoluția dintre $x[n]$ și $h[n]$, operația sistemului invers care cunoaște pe $y[n]$ și produce pe $x[n]$ se numește *deconvoluție*.

Dacă sistemul distorsiv este necunoscut, de obicei, este necesar, dacă este posibil, a-l excita cu un semnal cunoscut, apoi să se observe ieșirea și să se compare aceasta cu intrarea pentru a determina caracteristicile sistemului.

În problema descrisă, măsurarea răspunsului în frecvență al canalului se realizează transmitând un set de sinusoide de amplitudine egală și frecvențe diferite, cu faze specificate în banda canalului. Canalul va atenua și defaza fiecare din sinusoide. Din compararea semnalului recepționat cu cel transmis, receptorul obține informații despre răspunsul în frecvență al canalului, ce pot fi folosite în proiectarea sistemului invers.

Procesul de determinare a caracteristicilor unui sistem necunoscut fie $h[n]$, fie $H(\omega)$, prin măsurători efectuate aupra sistemului se numește *identificare de sistem*.

1.9.1. Inversarea sistemelor liniare, invariante în timp

Se spune că un sistem este *inversabil* dacă există o corespondență bijectivă între semnalele de la intrarea și ieșirea sa. Această definiție implică faptul că, dacă se cunoaște secvența de ieșire $y[n]$, $-\infty < n < \infty$, pentru un sistem inversabil H , atunci acestuia îl se poate determina în mod unic intrarea $x[n]$, $-\infty < n < \infty$. *Sistemul invers*, cu intrarea $y[n]$ și ieșirea $x[n]$ se notează H^{-1} . Conectarea în cascadă a sistemului cu sistemul invers este echivalentă cu sistemul identitate, deoarece

$$w[n] = H^{-1}\{y[n]\} = H^{-1}\{H[x[n]]\} = x[n] \quad (1.137)$$

după cum se ilustrează în figura 1.20.

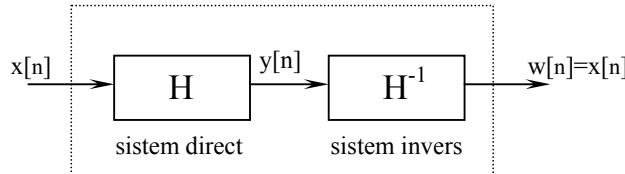


Figura 1.20 Cascada formată din sistemul direct H și sistemul invers H^{-1} .

În continuare se va urmări determinarea sistemului invers pentru clasa sistemelor discrete liniare invariante în timp. Fie un SDLIT, H , cu răspunsul la impuls $h[n]$ și fie $h_I[n]$ răspunsul la impuls al sistemului invers H^{-1} . Relația (1.137) este echivalentă cu ecuația

$$w[n] = h_I[n] * h[n] * x[n] = x[n] \quad (1.138)$$

care implică

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n] \quad (1.139)$$

Relația (1.139) poate fi folosită pentru determinarea lui $h_I[n]$, dacă se cunoaște $h[n]$. În domeniul timp, acest lucru este dificil de realizat. O soluționare mai simplă presupune transformarea lui (1.139) în domeniul Z și apoi de găsit H^{-1} , adică, aplicând transformata Z relației (1.139), rezultă

$$H(z)H_I(z) = 1 \quad (1.140)$$

de unde

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (1.141)$$

Dacă $H(z)$ este o funcție rațională

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.142)$$

atunci

$$H_I(z) = \frac{A(z)}{B(z)}, \quad (1.143)$$

ceea ce înseamnă că zerourile lui $H(z)$ devin poli pentru sistemul invers, și invers. Stabilitatea sistemului invers depinde de poziționarea zerourilor sistemului $H(z)$ și va fi discutată ulterior. Mai mult, dacă $H(z)$ este un sistem FIR, atunci $H_I(z)$ este un sistem numai cu poli și dacă $H(z)$ este numai cu poli, $H_I(z)$ este FIR.

Exemplul 1.7.

Să se determine inversul sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

$$\text{Soluție. } H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad RC : |z| > \frac{1}{2}.$$

Acest sistem este cauzal și stabil. Deoarece $H(z)$ este numai cu poli, inversul său va fi un sistem FIR, cu funcția de sistem $H_I(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$. Răspunsul său la impuls este $h_I[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$.

Exemplul 1.8.

Să se determine inversul sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1].$$

Soluție. Acesta este un filtru FIR, a cărui funcție de sistem este

$$H(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}, \quad RC : |z| > 0.$$

Sistemul invers are funcția de sistem

$$H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}},$$

adică $H_I(z)$ are un zerou în origine și un pol în $z = 1/2$. În acest caz există două regiuni posibile de convergență și, deci, două sisteme inverse posibile, după cum se arată în figura 1.21.

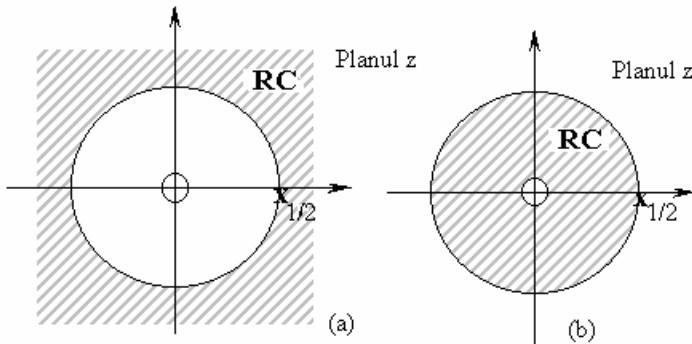


Figura 1.21. Două posibile regiuni de convergență pentru $H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$.

Dacă regiunea de convergență pentru $H_I(z)$ este $|z| > \frac{1}{2}$,

transformarea inversă conduce la răspunsul la impuls

$$h_I[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

care caracterizează un sistem cauzal și stabil.

Dacă, însă, regiunea de convergență se presupune a fi $|z| < \frac{1}{2}$,

sistemul invers are răspunsul la impuls

$$h_I[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

În acest caz sistemul invers este anticauzal și instabil. Din acest exemplu se observă că ecuația (1.139) nu poate fi rezolvată unic folosind

relația (1.143), dacă nu se specifică regiunea de convergență pentru funcția de sistem a sistemului invers.

Este posibil ca răspunsul la impuls $h[n]$ să nu aibă transformata Z exprimată într-o formă analitică. O alternativă la această situație este rezolvarea ecuației (1.139) cu ajutorul unui calculator numeric.

Deoarece (1.139) nu are, în general, soluție unică, se presupune că atât sistemul, cât și inversul său sunt cauzale, caz în care (1.139) se poate scrie ca

$$\sum_{k=0}^n h[k]h_I[n-k] = \delta[n] \quad (1.144)$$

Prin convenție, $h[n] = 0$ pentru $n < 0$. Pentru $n = 0$ se obține

$$h_I[0] = \frac{1}{h[0]} \quad (1.145)$$

Valorile lui $h_I[n]$ pentru $n \geq 1$ se pot obține recursiv din relația (1.144), sub forma

$$h_I[n] = -\sum_{k=1}^n \frac{h[k]h_I[n-k]}{h[0]} \quad (1.146)$$

Această relație recursivă poate fi implementată cu ușurință cu un calculator.

Există două probleme referitoare la relația (1.146), și anume:

1. Metoda nu este funcțională dacă $h[0] = 0$. Acest lucru poate fi remediat prin introducerea unei întârzieri potrivite în membrul drept al relației (1.144), adică înlocuirea lui $\delta[n]$ cu $\delta[n-m]$, unde $m = 1$, dacă $h[0] = 0$ și $h[1] \neq 0$ și.m.d.
2. Datorită recurenței, relația (1.146) poate produce erori de rotunjire care cresc cu n și, ca urmare, precizia lui $h[n]$ se deteriorează pentru n mare.

Exemplul 1.9.

Să se determine sistemul cauzal invers sistemului FIR descris de $h[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$.

Soluție. Deoarece $h[0] = 1$, $h[1] = -\alpha$ și $h[n] = 0$ pentru $n > 1$, se poate scrie

$$h_I[0] = \frac{1}{h[0]} = 1 \text{ și } h_I[n] = \alpha h_I[n-1], \quad n \geq 1, \text{ adică } h_I[1] = \alpha, \quad h_I[2] = \alpha^2,$$

... , $h_I[n] = \alpha^n$, care corespunde unui sistem IIR cauzal, cum era de așteptat.

1.9.2. Sisteme de fază minimă, maximă și mixtă

În multe cazuri este util a impune restricția ca sistemul invers să fie, de asemenea, stabil și cauzal.

Inversarea SDLIT este strâns legată de caracteristicile funcției de fază a sistemului. Pentru a ilustra acest lucru, fie două sisteme FIR, caracterizate de funcțiile de sistem

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1} \left(z + \frac{1}{2} \right) \quad (1.147)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1} \left(\frac{1}{2}z + 1 \right) \quad (1.148)$$

Sistemul descris de (1.147) are un zerou la $z = -\frac{1}{2}$ și răspunsul

la impuls $h[0]=1$, $h[1]=\frac{1}{2}$. Sistemul din (1.148) are un zerou la $z=-2$ și eșantioanele răspunsului la impuls $h[0]=\frac{1}{2}$, $h[1]=1$, care sunt egale cu cele care caracterizează sistemul din (1.147), dar în ordine inversă. Acest lucru se datorează faptului că zerourile lui $H_1(z)$ și $H_2(z)$ sunt inverse unele altora. În domeniul frecvență cele două sisteme sunt caracterizate de răspunsurile de amplitudine

$$|H_1(\omega)| = |H_2(\omega)| = \sqrt{\frac{5}{4} + \cos \omega} \quad (1.149)$$

și de fază

$$\theta_1(\omega) = -\omega + \arctg \frac{\sin \omega}{\frac{1}{2} + \cos \omega} \quad (1.150)$$

$$\theta_2(\omega) = -\omega + \arctg \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega} \quad (1.151)$$

Caracteristicile de modul ale celor două sisteme sunt identice datorită relației între zerourile lui $H_1(z)$ și $H_2(z)$. Răspunsurile de fază $\theta_1(\omega)$ și $\theta_2(\omega)$ sunt reprezentate în figura 1.22 a și b.

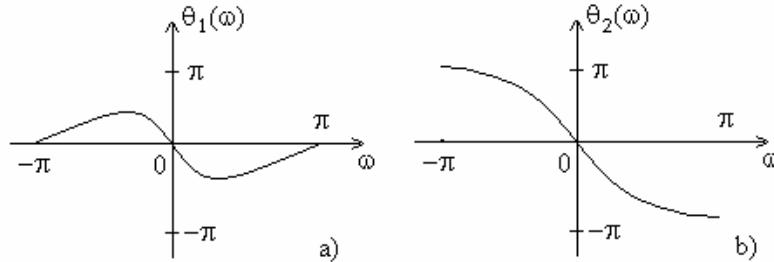


Figura 1.22. Răspunsul de fază al sistemelor descrise de a) (1.147) și b) (1.148)

Se observă cum caracteristica de fază $\theta_1(\omega)$ a sistemului cu zeroul în interiorul cercului unitate începe la 0 pentru $\omega = 0$ și se termină tot la 0 pentru $\omega = \pi$, astfel încât schimbarea netă de fază este $\theta_1(\pi) - \theta_1(0) = 0$. Pentru sistemul cu zeroul în afara cercului unitate schimbarea de fază este $\theta_2(\pi) - \theta_2(0) = \pi$. Primul sistem este de *fază minimă*, iar al doilea de *fază maximă*.

Aceste definiții pot fi extinse pentru sisteme FIR cu M zerouri. Răspunsul în frecvență al unui filtru FIR de lungime $M+1$ este

$$H(\omega) = b_0(1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega}) \dots (1 - z_M e^{-j\omega}) \quad (1.152)$$

unde b_0 - costantă arbitrară, iar $\{z_i\}$, $i = \overline{1, M}$ - zerourile filtrului.

Dacă toate zerorile filtrului, reale și/sau complex conjugate, sunt în interiorul cercului unitate, fiecare termen real sau pereche de termeni complex conjugăți din (1.152) va suferi o schimbare de fază egală cu 0 când ω variază de la 0 la π , adică

$$\angle H(\pi) - \angle H(0) = 0 \quad (1.153)$$

motiv pentru care sistemul este de *fază minimă*.

Dacă zerourile sunt în afara cercului unitate, fiecare zerou real va determină o schimbare de π radiani în răspunsul de fază, iar o pereche de zeroruri complex conjugate o schimbare de 2π radiani, adică

$$\angle H(\pi) - \angle H(0) = M\pi \quad (1.154)$$

sistemul fiind de *fază maximă*.

Deoarece derivata fazei este o măsură a întârzierii pe care componentele semnalului le suferă la trecerea prin filtru, un sistem de fază minimă implică o întârziere minimă.

Fie un sistem FIR cu coeficienți reali. Pătratul răspunsului de modul este

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}} \quad (1.155)$$

Această relație implică faptul că dacă un zerou z_k al sistemului se înlocuiește cu inversul său $\frac{1}{z_k}$, caracteristica de modul nu se schimbă.

Aceasta înseamnă că, dacă $|H(\omega)|^2$ este pătratul modulului răspunsului în frecvență al unui filtru FIR cu M zerouri, există 2^M configurații posibile pentru cele M zerouri. O configurație corespunde zerourilor din cercul unitate, care caracterizează un sistem de *fază minimă*, o configurație conține toate zerourile în afara cercului unitate și corespunde unui sistem de *fază maximă*, iar restul de $2^M - 2$ configurații corespund sistemelor de *fază mixtă*. Nu toate cele $2^M - 2$ configurații de fază mixtă corespund neapărat unor sisteme FIR cu coeficienți reali.

Proprietatea de fază minimă a sistemelor FIR poate fi extinsă și asupra sistemelor IIR caracterizate de funcții de sistem rationale.

Un sistem IIR, stabil și cauzal, caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.156)$$

este de *fază minimă* dacă *toți polii și zerourile sunt în interiorul cercului unitate*.

Pentru un sistem stabil și cauzal (toate rădăcinile lui $A(z)$ în interiorul cercului unitate) sistemul este de *fază maximă*, dacă *toate zerourile sale sunt în exteriorul cercului unitate și de fază mixtă sau neminimă, dacă unele zerouri, dar nu toate, sunt în exteriorul cercului unitate*.

Din cele prezentate până acum se evidențiază faptul că unui sistem cu poli și zerouri *stabil*, de fază minimă, îi se poate atașa un sistem invers stabil care este, de asemenea, de fază minimă.

$$H^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (1.157)$$

Aceasta înseamnă că proprietatea de fază minimă a lui $H(z)$ asigură stabilitatea sistemului invers și stabilitatea lui $H(z)$ implică proprietatea de fază minimă a lui $H^{-1}(z)$. Sistemelor stabile de fază mixtă și maximă le corespund sisteme inverse instabile.

Un alt mod de a caracteriza sistemele de fază minimă se referă la răspunsul de fază. În paragraful 1.1.1. s-a definit $\text{Arg}[H(\omega)]$ ca fiind *întregul răspuns de fază*. Dacă se cunoaște *valoarea principală* a fazei, se poate construi funcția de fază totală prin adăugarea sau scăderea valorii de

2π radiani în punctele de discontinuitate, după cum se arată în figura 1.1, procedură numită de *desfășurare a fazei*. În paragraful 1.6. s-a arătat că răspunsul de fază al filtrului este determinat de conținutul tuturor singularităților din planul Z. Când ω variază de la 0 la π , un pol din interiorul cercului unitate scade răspunsul de fază cu π radiani, în timp ce un zerou din interiorul cercului unitate crește fază cu π radiani. Dacă toate singularitățile sunt în interiorul cercului unitate, cum este cazul sistemelor cauzale și stabile de fază minimă, răspunsul de fază $\text{Arg}[H(\omega)]$, care este o funcție continuă de ω , are valoarea zero atât pentru $\omega=0$, cât și pentru $\omega=\pi$.

Zerourile de pe cercul unitate determină salturi de π radiani în răspunsul de fază. Dacă pe cercul unitate sunt μ_z zerouri, răspunsul de fază este $\mu_z \cdot \pi$ la $\omega=\pi$.

Dacă pentru un sistem se cunoaște $C(z) = H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$ și acel

sistem este de fază minimă, atunci $H(z)$ va avea polii și zerourile lui $C(z)$ din cercul unitate. Din $C(z)$ nu se poate determina în mod unic $H(z)$, deoarece orice alegere care are modulul răspunsului în frecvență dat poate fi cascădată cu o celulă trece tot arbitrară, fără a-i schimba modulul (vezi exemplul 1.2).

Aceasta se întâmplă deoarece dacă se schimbă un zerou al funcției de sistem a unei celule trece tot din $z=z_0$ în $z=1/z_0$, nu se schimbă răspunsul de amplitudine, ci numai cel de fază. Aceasta înseamnă că un răspuns de amplitudine dat poate avea asociate mai multe răspunsuri de fază. Din analiza de mai sus se poate da următoarea definiție pentru sistemele de fază minimă:

Pentru un răspuns de amplitudine dat, *sistemul de fază minimă* este sistemul cauzal pentru care răspunsul de fază corespunzător are valoarea cea mai mică pentru toate valorile lui z de pe cercul unitate.

În continuare sunt prezentate câteva aspecte care caracterizează sistemele de fază neminimă.

1.9.2.1. Descompunerea sistemului cu poli și zerouri, de fază neminimă

Un sistem poli zerouri de fază neminimă se poate descompune sub forma

$$H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z) \quad (1.158)$$

unde $H_{min}(z)$ este un sistem de fază minimă și $H_{ap}(z)$ este un sistem trece tot. Acest lucru rezultă ușor pentru clasa sistemelor cauzale și stabile cu funcție de transfer rațională $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$. Într-adevăr, dacă $B(z)$ are una sau mai multe rădăcini în afara cercului unitate, fie factorizarea $B(z) = B_1(z)B_2(z)$, unde $B_1(z)$ are toate rădăcinile în interiorul cercului unitate, iar $B_2(z)$ are toate rădăcinile în exteriorul cercului unitate. Atunci $B_2(z^{-1})$ are rădăcinile în interiorul cercului unitate.

Cu considerațiile de mai sus, sistemul cu funcția de sistem

$$H_{min}(z) = \frac{B_1(z) \cdot B_2(z^{-1})}{A(z)} \quad (1.159)$$

este de fază minimă, iar sistemul caracterizat de

$$H_{ap}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1})}, \quad (1.160)$$

este un sistem trece tot.

Cu (1.159) și (1.160) rezultă (1.158). Din (1.160) rezultă că $H_{ap}(z)$ este stabil, trece tot și de fază maximă.

1.9.2.2. Întârzierea de grup a sistemelor de fază neminimă

Pe baza descompunerii din relația (1.158), se poate exprima întârzierea de grup pentru sistemul caracterizat de $H(z)$, ca fiind

$$\tau_g(\omega) = \tau_g^{min}(\omega) + \tau_g^{ap}(\omega) \quad (1.161)$$

Deoarece $\tau_g^{ap}(\omega) \geq 0$ pentru $0 \leq \omega \leq \pi$, rezultă că

$\tau_g(\omega) \geq \tau_g^{min}(\omega)$, pentru $0 \leq \omega \leq \pi$. Din (1.161) se poate concluziona că dintre toate sistemele poli – zerouri care au același răspuns de amplitudine, sistemele de fază minimă au cea mai mică întârziere de grup.

1.9.2.3. Energia parțială a sistemelor de fază neminimă

Energia parțială a unui sistem cauzal, cu răspunsul la impuls $h[n]$ se definește ca

$$E[n] = \sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \quad (1.162)$$

Se poate arăta că dintre toate sistemele poli – zerouri care au același răspuns de amplitudine și aceeași energie totală $E(\infty)$, sistemele de fază minimă au cea mai mare energie parțială [25].

1.9.3. Identificarea sistemelor și deconvoluția

Se presupune că un SDLIT necunoscut este excitat cu semnalul de intrare $x[n]$ și se observă ieșirea $y[n]$. Din observarea secvenței de ieșire se dorește determinarea răspunsului la impuls al sistemului necunoscut sau funcția sa de sistem. Aceasta este o problemă de identificare de sistem, care, în funcție de natura secvențelor de intrare și ieșire, poate fi rezolvată prin următoarele metode:

1.9.3.1. Determinarea funcției de sistem

Ieșirea sistemului necunoscut, liniar și invariant în timp, este egală cu convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul său la impuls. În domeniul Z , aceasta se scrie ca

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (1.163)$$

$$\text{de unde} \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1.164)$$

$X(z)$ și $Y(z)$ fiind transformate în ale semnalelor de intrare, $x[n]$, și respectiv, de ieșire, $y[n]$. Rezultă atunci că această abordare este potrivită numai când există forme analitice pentru $X(z)$ și $Y(z)$.

Exemplul 1.10.

Un sistem cauzal produce secvența de ieșire $y[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 7/10, & n=1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

când este excitat de secvența de intrare $x[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -7/10, & n=1 \\ 1/10, & n=2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Să se determine răspunsul la impuls și ecuația cu diferențe a sistemului.

Soluție. Funcția de transfer poate fi determinată ușor prin considerarea transformatorilor Z pentru $x[n]$ și $y[n]$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{7}{10} \cdot z^{-1}}{1 - \frac{7}{10} \cdot z^{-1} + \frac{1}{10} \cdot z^{-2}} = \frac{1 + \frac{7}{10} \cdot z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \cdot z^{-1}\right)}$$

Deoarece sistemul este cauzal, regiunea sa de convergență este RC: $|z| > \frac{1}{2}$. Sistemul este, de asemenea stabil, deoarece polii săi sunt în interiorul cercului unitate. Ecuația cu diferențe corespunzătoare este

$$y[n] = \frac{7}{10}y[n-1] - \frac{1}{10}y[n-2] + x[n] + \frac{7}{10}x[n-1]$$

Răspunsul la impuls se obține din $H(z)$ prin transformare Z inversă

$$h[n] = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{5}\right)^n \right] \cdot u[n] \quad (1.165)$$

Se observă că relația (1.164) determină în mod unic sistemul necunoscut, dacă se cunoaște că acesta este cauzal. Metoda folosită în exemplul precedent este funcțională, dacă secvențele de intrare și ieșire sunt finite. Deoarece este foarte probabil ca răspunsul $\{y[n]\}$ să fie infinit, această abordare este nepractică.

1.9.3.2. Aflarea răspunsului la impuls direct în domeniul timp

Pentru un sistem cauzal, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, răspunsul la un semnal de intrare, $x[n]$, este dat de suma de conoluție

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \cdot x[n-k] \quad n \geq 0 \quad (1.166)$$

Din aceasta rezultă

$$h[0] = \frac{y[0]}{x[0]} \quad (1.167)$$

și

$$h[n] = \frac{y[n] - \sum_{k=0}^{n-1} h[k] \cdot x[n-k]}{x[0]} \quad n \geq 1 \quad (1.168)$$

Această relație recursivă necesită ca $x[0] \neq 0$. Dacă $\{h[n]\}$ este infinit în durată, această tratare nu este practică dacă nu se trunchiază $h[n]$. Datorită caracterului recursiv al relației (1.168), metoda poate fi ușor implementată cu ajutorul calculatorului.

Exemplul 1.11.

În condițiile exemplului 1.10, să se găsească răspunsul la impuls al sistemului, direct în domeniul timp.

Soluție. Cu datele din exemplul precedent, aplicând relațiile (1.167) și (1.168), se obține $h[0] = 1; h[1] = 7/5; h[2] = 22/25, \dots$, identice cu eșantioanele obținute cu relația (1.165). Într-adevăr, se observă necesitatea trunchierii lui $h[n]$.

1.9.3.3. Determinarea funcției de transfer a sistemului prin metode de corelație

O altă metodă de identificare a unui sistem necunoscut se bazează pe tehnici de corelație. Pentru aceasta, se calculează densitatea spectrală de energie, $S_{xx}(\omega)$, a semnalului de intrare $x[n]$ și densitatea spectrală de energie de intercorelație, $S_{yx}(\omega)$, dintre semnalul de intrare $x[n]$ și semnalul de ieșire $y[n]$. $S_{xx}(\omega)$ este transformata Fourier a secvenței de autocorelație, $r_{xx}[l]$, a semnalului de intrare $x[n]$, iar $S_{yx}(\omega)$ este transformata Fourier a secvenței de corelație $r_{yx}[l]$, dintre semnalul de intrare $x[n]$ și semnalul de ieșire $y[n]$ [34]. Pentru un SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, funcția de corelație intrare-ieșire este

$$\begin{aligned} r_{yx}[m] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot x[n-m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k] \cdot x[n-m] = \\ &\sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot x[n-m] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] \cdot x[p-m+k] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h[n] \cdot r_{xx}[m-k] = h[m] * r_{xx}[m] \end{aligned} \quad (1.169)$$

În domeniul frecvență se poate scrie

$$S_{yx}(\omega) = H(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) = H(\omega) |X(\omega)|^2 \quad (1.170)$$

de unde

$$H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} = \frac{S_{yx}(\omega)}{|X(\omega)|^2} \quad (1.171)$$

Dacă se alege intrarea $\{x[n]\}$ astfel încât densitatea sa spectrală de energie să fie constantă pentru toate valorile lui ω , adică $S_{xx}(\omega) = 1/K$, atunci relația (1.171) devine

$$H(\omega) = K S_{yx}(\omega) \quad (1.172)$$

Echivalent, valorile răspunsului la impuls $\{h[n]\}$ sunt egale cu valorile secvenței de corelație $\{r_{yx}[l]\}$, scalate cu valoarea K .

În unele cazuri, sistemul poate fi identificat prin calculul secvenței de autocorelație a ieșirii $y[n]$. Urmând un mers de calcul similar relației (1.169), rezultă

$$r_{yy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot y[n-m] = r_{hh}[m] * r_{xx}[m] \quad (1.173)$$

În domeniul frecvență se poate scrie

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{xx}(\omega) \quad (1.174)$$

Pentru un semnal de intrare cu densitatea spectrală de energie plată, se poate scrie

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot K \quad (1.175)$$

sau, echivalent, în domeniul Z, pentru K=1

$$S_{yy}(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (1.176)$$

Pentru $H(z)$ funcție rațională, $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, rezultă

$$S_{yy}(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \quad (1.177)$$

Numărătorul și numitorul relației (1.177) prezintă simetrie în oglindă a rădăcinilor. Pentru a determina $H(z)$, se determină rădăcinile lui D(z) și C(z), apoi acestea se grupează pentru a forma pe $H(z)$. Soluția ecuației (1.176) nu este unică. Corespunzător, în domeniul frecvență, această relație are un singur răspuns de amplitudine, spre deosebire de cel de fază, care nu este unic. O soluție unică se poate obține prin impunerea unor constrângeri suplimentare asupra fazei sistemului.

Exemplul 1.12.

Densitatea spectrală de energie a ieșirii unui SDLIT cauzal și stabil este $S_{yy}(\omega) = \frac{1,04 + 0,4 \cos \omega}{1,25 - \cos \omega}$. Sistemul este excitat cu un semnal a cărui densitate spectrală de energie este unitară. Să se determine funcția de transfer a sistemului.

Soluție. Cu ajutorul relațiilor trigonometrice, $S_{yy}(\omega)$ se scrie

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1,04 + 0,2(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1,25 - 0,5(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}. Înlocuind z = e^{j\omega} în relația anterioară și ținând cont de (1.176), se obține$$

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{1,04 + 0,2(z + z^{-1})}{1,25 - 0,5(z + z^{-1})} = -0,4 \left(\frac{z^2 + 5,2z + 1}{z^2 - 2,5z + 1} \right) =$$

$$= \frac{(z^{-1} + 0,2)(1 + 0,2z^{-1})}{(z^{-1} - 0,5)(1 - 0,5z^{-1})}$$

În condițiile problemei, există două soluții pentru $H(z)$. Pentru sistemul de fază minimă, funcția de transfer este $H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})}$, în timp ce, pentru sistemul de fază neminimă, $H(z) = \frac{(z^{-1} + 0,2)}{(1 - 0,5z^{-1})}$.

CAPITOLUL 6

EŞANTIONAREA SEMNALELOR ÎN DOMENIILE TIMP ȘI FRECVENTĂ

Cele mai multe semnale de interes practic sunt analogice. Pentru a le putea prelucra cu ajutorul procesoarelor numerice, acestea trebuie să fie transformate în secvențe, motiv pentru care se impune discretizarea variației lor în timp, prin eșantionare. Nu numai semnalele analogice pot fi eșantionate, ci și cele discrete. Procedeul de eșantionare a semnalelor discrete este urmat, de obicei, de operația de "decimare", prin care unele valori ale semnalului discret sunt ignorate, rezultând astfel un semnal cu o derulare "mai rapidă" decât a semnalului discret eșantionat.

O problemă importantă care va fi avută în vedere este reconstrucția semnalului din eșantioanele sale, reconstrucție posibilă, în anumite condiții, printr-o operație de filtrare. Stabilirea caracteristicilor filtrului de reconstrucție va face obiectul unui paragraf al acestui capitol.

Eșantionarea poate fi efectuată și asupra spectrului unui semnal. De exemplu, un semnal aperiodic (analogic sau discret), de energie finită, are spectrul continuu și calcularea sa în practică este posibilă numai într-un set finit de frecvențe discrete. Datorită observării spectrului la frecvențe discrete, evaluarea sa este cunoscută ca eșantionare în domeniul frecvență. Astfel de eșantionări în domeniul frecvență apar în analiza și estimarea spectrală. Obiectul prezentului capitol constă în analizarea eșantionării periodice sau uniforme a semnalelor sau a spectrului lor și reconstrucția semnalelor din eșantioanele lor cu ajutorul mijloacelor de analiză în domeniul frecvență introduse în capitolul 4.

6.1. Eșantionarea în domeniul timp și refacerea semnalelor analogice

6.1.1. Spectrul semnalului eșantionat ideal

Așa cum s-a precizat în capitolul 1, de obicei, se consideră eșantionarea periodică a semnalului analogic $x_a(t)$ la fiecare T secunde, care conduce la secvența de eșantioane

$$x[n] = x_a(nT), \quad n \in Z \quad (6.1)$$

Frecvența de eșantionare $F_s = \frac{1}{T}$ trebuie selectată adecvat pentru a nu rezulta eroare alias. În eșantionarea ideală, modelul de extragere a unui eșantion din semnal constă în înmulțirea semnalului cu un impuls Dirac, de arie unitară. Dacă se consideră cazul eșantionării uniforme, cu pasul de eșantionare $T=1/F_s$, modelul eșantionării ideale se extinde la înmulțirea semnalului analogic cu semnalul periodic $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, care este distribuția Dirac periodică [13]. Modelul matematic al eșantionării uniforme este prezentat în figura 6.1.

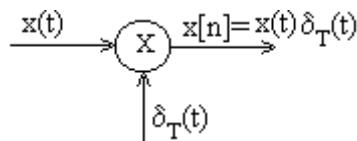


Figura 6.1 Modelul matematic al eșantionării uniforme a unui semnal analogic

Conform modelului, semnalul eșantionat are expresia

$$x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (6.1')$$

Fie $x_a(t)$ un semnal analogic aperiodic de energie finită, al cărui spectru este

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad (6.2)$$

Semnalul $x_a(t)$ poate fi refăcut din spectrul său prin transformata Fourier inversă

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \quad (6.3)$$

Se observă că pentru refacerea semnalului sunt necesare componente de frecvență dintr-un domeniu infinit.

Spectrul semnalului eșantionat $x[n]$ se calculează cu relația

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (6.4)$$

sau, echivalent

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \quad (6.4')$$

Semnalul $x[n]$ poate fi refăcut din spectrul $X(\omega)$ sau $X(f)$ prin transformarea inversă

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df \quad (6.5)$$

Pentru determinarea relației dintre spectrul semnalului analogic și al semnalului eșantionat, se folosește relația dintre variabilele independente t și n ale semnalelor $x_a(t)$ și $x[n]$, adică

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \quad (6.6)$$

Înlocuind (6.6) în (6.3) se obține

$$x[n] \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.7)$$

Din (6.7) și (6.5) rezultă

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.8)$$

Se reamintește că eșantionarea periodică implică o relație între frecvențele F și f , corespunzătoare semnalului analogic și eșantionat, de forma

$$f = \frac{F}{F_s} \quad (6.9)$$

Cu (6.9) relația (6.8) devine

$$\frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.10)$$

Integrala din membrul al doilea al relației (6.10) se poate exprima ca o sumă infinită de integrale pe câte un domeniu egal cu F_s .

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \quad (6.11)$$

Dacă se notează $F = F_1 + kF_s$ suma din membrul al doilea al relației (6.11) devine

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F_1 + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F_1 + kF_s}{F_s}} dF_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F_1 + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F_1}{F_s}} dF_1 = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F + kF_s) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \\
&= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Înănd cont de (6.13), relația (6.11) devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \right] e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} dF \tag{6.14}$$

Comparând (6.10) cu (6.14), rezultă

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \tag{6.15}$$

Relația (6.15) reprezintă legătura dintre spectrul $X(f)$ al semnalului eșantionat și spectrul $X_a(F)$ al semnalului analogic. Spectrul semnalului eșantionat este suma repetărilor periodice, cu perioada F_s , a spectrului semnalului analogic scalat cu F_s .

Spectrul semnalului eșantionat mai poate fi obținut prin aplicarea transformatei Fourier relației (6.1'), ținând cont de teorema convoluției spectrelor.

$$X(f) = F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \right\} = X_a(f) * F \{ \delta_T(t) \} \tag{6.16}$$

Spectrul distribuției Dirac periodice este [16]

$$F \{ \delta_T(t) \} = \frac{1}{T} \delta_{F_s}(F) = F_s \delta_{F_s}(F) \tag{6.17}$$

care este tot o distribuție Dirac periodică, cu perioada F_s , în domeniul frecvență și scalată cu $1/T$. Cu (6.17), relația (6.16) devine

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F) * \delta(F - nF_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F - nF_s) \tag{6.18}$$

În figura 6.2a este prezentat spectrul $X_a(F)$ al unui semnal de bandă nelimitată, cu suportul extins pe toată axa reală; în figura 6.2b este reprezentată distribuția Dirac periodică dată de relația (6.17), iar în figura 6.2c este reprezentat cu linie întreruptă semnalul periodic $F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$ și cu linie continuă spectrul semnalului eșantionat.

După cum se poate observa, oricât ar fi valoarea frecvenței de eșantionare, implicit a perioadei de eșantionare $T=1/F_s$ a unui semnal de bandă nelimitată, din spectrul $X(F/F_s)$ al semnalului eșantionat nu mai

poate fi recuperat spectrul inițial $X_a(F)$ din eșantioanele sale $x[n] = x_a(nT)$, $n \in Z$.

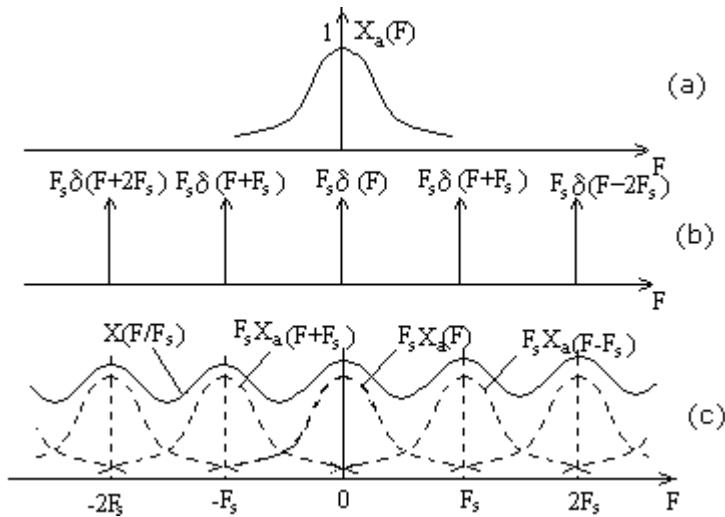


Figura 6.2. Efectul eșantionării ideale a unui semnal $x_a(t)$, cu spectrul $X_a(F)$ de bandă nelimitată, asupra spectrului semnalului eșantionat

6.1.2. Deducerea formulei ideale de interpolare pentru reconstrucția semnalelor analogice de bandă limitată

Fie $x_a(t)$ un semnal analogic de bandă limitată, reprezentat în figura 6.3a. Se observă că spectrul este zero pentru $|F| \geq B$. Această limitare atrage după sine faptul că $x_a(t)$ este un semnal cu suport nemărginit în timp. Expresia (6.15) a spectrului semnalului eșantionat rămâne aceeași. Pentru un ordin k lobii spectrali $X(F-kF_s)$ nu se suprapun dacă este îndeplinită condiția

$$B \leq F_s - B \text{ sau } 2B \leq F_s \quad (6.19)$$

Dacă frecvența de eșantionare F_s este mai mare ca $2B$, semnalul eșantionat și spectrul său $X(F/F_s) = X(f)$ sunt reprezentate în figura 6.3b. Lobii spectrali de diferite ordine nu se suprapun și relația dintre lobul central ($k=0$) din spectrul semnalului discret obținut după eșantionare și spectrul semnalului analogic este

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & |F| \leq \frac{F_s}{2} \\ 0 & |F| > \frac{F_s}{2} \end{cases} \quad (6.20)$$

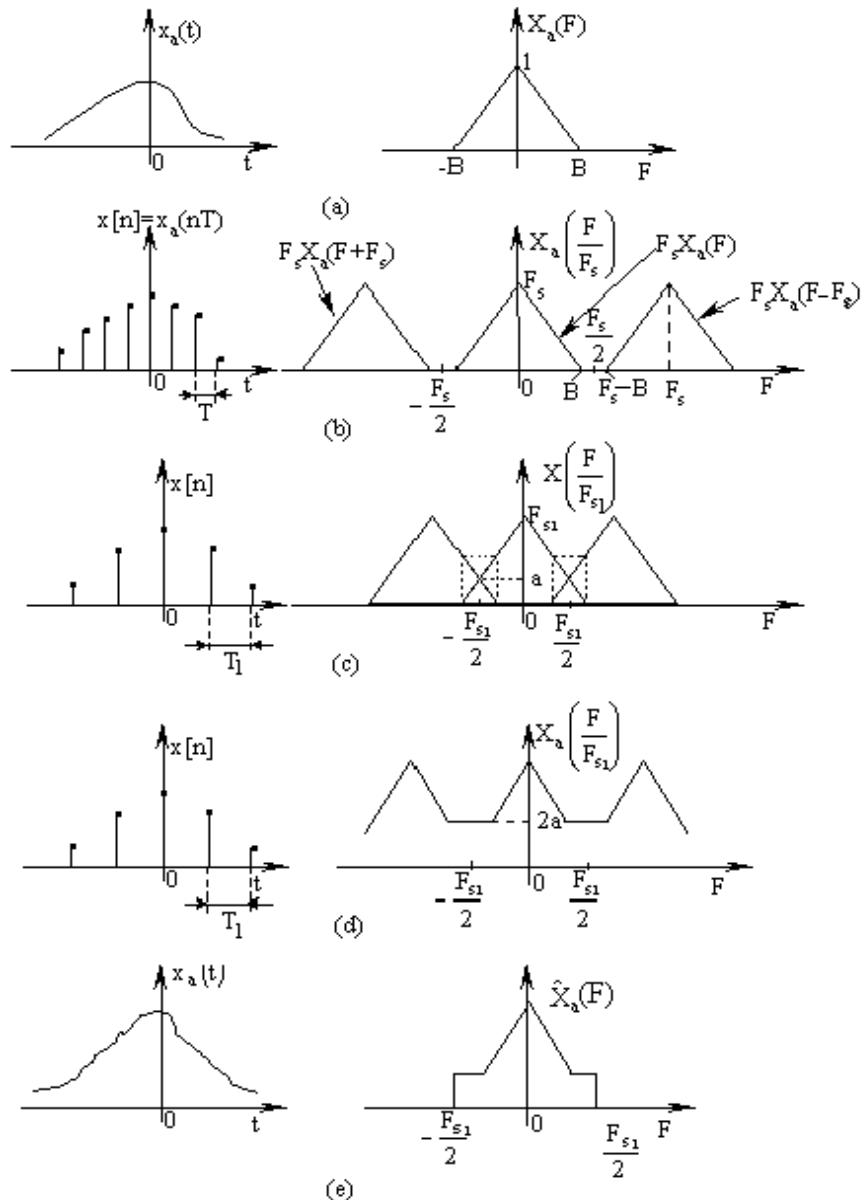


Fig. 6.3. Eșantionarea unui semnal analogic de bandă limitată și eroarea alias a componentelor spectrale în cazul subeșantionării

Transformata Fourier inversă a lui $X_a(F)$ este

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \quad (6.21)$$

Înlocuind (6.20), (6.4') și (6.9) în (6.21), rezultă

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n \frac{F}{F_s}} \right] e^{j2\pi F t} dF = \\ &= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F \left(t - \frac{n}{F_s} \right)} dF = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \end{aligned} \quad (6.22)$$

unde $x[n] = x_a(nT)$; $T=1/F_s$ – perioada de eşantionare. Relația (6.22) este cunoscută sub denumirea de *formula de reconstrucție* care implică funcția de interpolare

$$g(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)t} \quad (6.23)$$

translată corespunzător cu nT , $n=0, \pm 1, \pm 2\dots$ și ponderată cu valoarea eşantionului $x_a(nT)$. La $t = kT$, funcțiile $g(t - nT)$ sunt egale cu zero, cu excepția funcției $g(kT-kT) = g(0)$, care este egală cu unitatea. În consecință, $x_a(t)$ evaluat la $t = kT$ este chiar eşantionul $x_a(kT)$. Relația (6.22) se numește *formulă ideală de interpolare*.

Dacă, însă, frecvența de eşantionare F_{S1} este aleasă astfel încât $F_{S1} < 2B$ (subeşantionare), repetarea periodică a lui $X_a(F)$ are ca rezultat suprapunerea lobilor spectrali de diferite ordine, ca în figura 6.3c. Contribuția suprapunerilor spectrale din figura 6.3c este reprezentată în figura 6.3d. Aceasta înseamnă că spectrul $X(F/F_s)$ al semnalului discret conține aliasuri ale componentelor de frecvență ale spectrului semnalului analogic $X_a(F)$. Suprapunerea spectrelor de la capetele domeniului fundamental de frecvență $[-F_s/2; F_s/2]$ este ilustrată în figura 6.3c și d și reluată în figura 6.4, unde se observă pătrunderea unor “cozi” din spectrele adiacente domenilul fundamental (figurate în negrit în figură) în domeniul fundamental de frecvență, fapt ce determină eroarea alias.

Spectrul semnalului discret se obține prin reflectarea spectrului original care depășește intervalul $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$ în jurul acestor frecvențe,

motiv pentru care frecvența $F_s/2$ se numește frecvență de reflexie (*folding*).

Prin limitarea spectrului semnalului eșantionat la intervalul fundamental $[-F_s/2, F_s/2]$ se obține spectrul din figura 6.3e, care, datorită erorii alias, diferă de cel al semnalului analogic în domeniul $[-F_s/2, F_s/2]$ (figura 6.3a) și, în consecință, fenomenul alias care apare împiedică refacerea semnalului original $x_a(t)$ din eșantioanele sale. $\hat{x}_a(t)$ este semnalul refăcut. Deși semnalul eșantionat este de bandă limitată, ca urmare a unei frecvențe de eșantionare prea reduse, nu se mai poate reconstrui semnalul inițial din eșantioanele sale $\{x[n] = x_a(nT), n \in Z\}$.

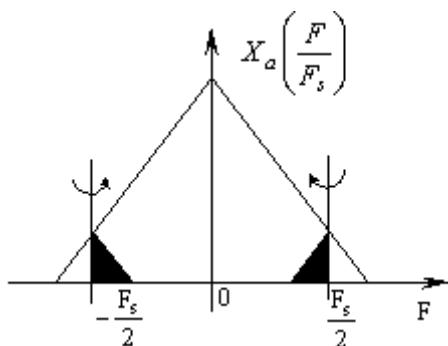


Figura 6.4. Ilustrarea erorii alias în jurul frecvenței de reflexie

Frecvența de eșantionare minimă care permite, încă, reconstruirea semnalului din eșantioanele sale, corespunde cazului în care lobii spectrali se ating, fără, însă, a se suprapune, adică $F_s=2B$. Această frecvență minimă, egală cu dublul frecvenței maxime din spectrul semnalului, B , se numește și *frecvență Nyquist*.

Rezultatele obținute până în acest punct pot fi sintetizate prin teorema eșantionării sau teorema WKS (Whittaker, Kotelnikov, Shannon).

Teorema eșantionării

Dacă semnalul analogic $x_a(t)$ este de bandă limitată, $X_a(F)=0$ pentru $|F|>B$, atunci $x_a(t)$ este unic determinat de mulțimea eșantioanelor sale $\{x[n] = x_a(nT), n \in Z\}$, dacă frecvența de eșantionare $F_s \geq 2B$. În ipotezele enunțate, semnalul inițial poate fi reconstruit utilizând relația de interpolare

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \quad (6.24)$$

Din relația (6.24) se observă că în punctele de eșantionare toți termenii sumei sunt nuli, cu excepția unuia, a cărui valoare este egală cu valoarea eșantionului. Între două puncte de eșantionare, semnalul se reconstruiește prin contribuția tuturor termenilor sumei.

6.1.3. Tehnici de reconstrucție a semnalului

În paragraful precedent s-a arătat că un semnal trece jos de bandă limitată poate fi reconstituit fară distorsiuni din eșantioanele sale, dacă frecvența de eșantionare este cel puțin egală cu frecvența Nyquist. Reconstrucția semnalului $x_a(t)$ a fost prezentată ca o problemă de interpolare, cu ajutorul funcției de interpolare ideale $g(t)$, dată de (6.23). Ca o alternativă, reconstrucția semnalului analogic din eșantioanele sale poate fi vazută ca un proces de filtrare liniară în care semnalul discret se aplică unui filtru analogic.

Relația dintre spectrul semnalului discret și al celui analogic de bandă limitată este (figura 6.3)

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \quad (6.25)$$

În acest caz nu există eroare alias și, deci, spectrul semnalului discret este identic (până la un factor de scală, F_s) cu spectrul semnalului analogic în intervalul fundamental de frecvențe $|F| \leq \frac{F_s}{2}$ sau $|f| \leq \frac{1}{2}$.

Acesta poate fi extras prin filtrare trece jos ideală.

Dacă filtrul de reconstrucție $H_r(F)$ are răspunsul în frecvență

$$H_r(F) = \begin{cases} T, & |F| < F_c \\ 0, & |F| > F_c \end{cases} \quad (6.26)$$

și, dacă frecvența de tăiere F_c a filtrului de reconstrucție satisfacă condiția

$$B \leq F_c \leq F_s - B \quad (6.27)$$

atunci spectrul semnalului refăcut $\hat{X}_a(F)$ este

$$\hat{X}_a(F) = H_r(F) X(F/F_s) \quad (6.28)$$

Dacă se aplică semnalul eșantionat $x[n]$ la intrarea filtrului ce are răspunsul în frecvență dat de (6.26) și care respectă condiția (6.27), atunci la ieșirea sa se obține semnalul $\hat{x}_a(t)$ care are spectrul $\hat{X}_a(F)$ egal cu spectrul semnalului $x_a(t)$, care a fost eșantionat. Egalitatea spectrelor atrage după sine egalitatea aproape peste tot a semnalelor [NC]

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \quad a.p.t. \quad (6.29)$$

Semnalul de la ieșirea filtrului de reconstrucție se obține cu ajutorul operației de conoluție între semnalul eșantionat aplicat la intrarea filtrului și funcția pondere a filtrului de reconstrucție. Funcția pondere a filtrului de reconstrucție este

$$h_r(t) = T \int_{-F_c}^{F_c} e^{j2\pi F t} dF = T \frac{\sin 2\pi F_c t}{\pi t} \quad (6.30)$$

Conform relației (6.29), la ieșirea filtrului rezultă semnalul analogic original

$$\begin{aligned} x_a(t) &= h_r(t) * x_a(nT) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) = \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) [h_r(t) * \delta(t - nT)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) h_r(t - nT) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Înlocuind (6.30) în (6.31), rezultă

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) T \frac{\sin 2\pi F_c (t - nT)}{\pi (t - nT)} = \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{2F_c}{F_s} \frac{\sin 2\pi F_c (t - nT)}{2\pi F_c (t - nT)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

În cazul $F_s=2B$, conform relației (6.27), frecvența de tăiere a filtrului de reconstrucție devine $F_c=B=F_s/2=1/2T$ și relația de reconstruire (6.32) se particularizează, devenind

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{2B}\right) \frac{\sin 2\pi B(t - n/2B)}{2\pi B(t - n/2B)} \quad (6.33)$$

Se observă că pentru frecvența de tăiere $F_c=F_s/2$, care este frecvența de tăiere maximă posibilă a filtrului trece jos, funcția pondere a filtrului de reconstrucție este egală cu funcția de interpolare ideală. Reconstrucția semnalului vazută ca un proces de filtrare este ilustrată în figura 6.5. În figura 6.6. se prezintă răspunsul în frecvență și răspunsul la impuls al filtrului trece jos ideal.

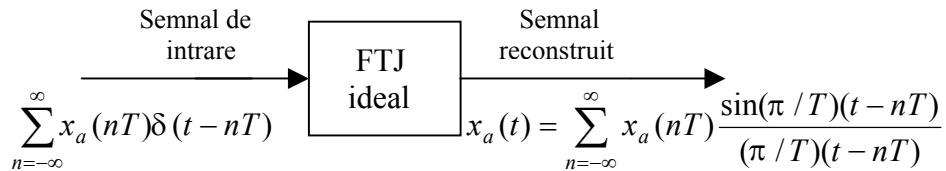


Figura 6.5. Reconstrucția semnalului ca un proces de filtrare

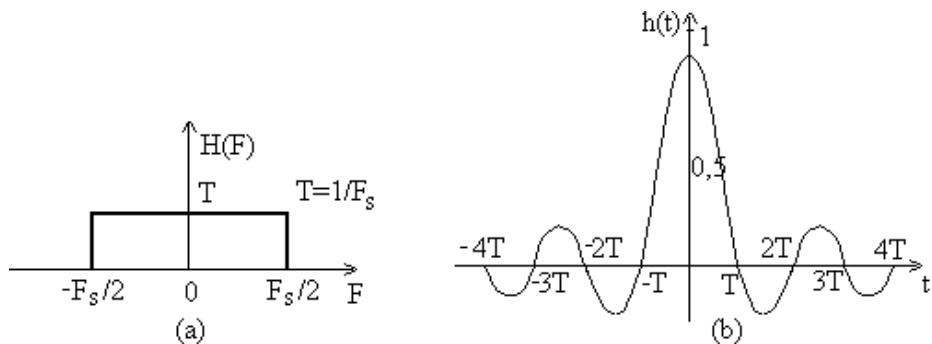


Figura 6.6. Răspunsul în frecvență (a) și la impuls (b) al FTJ

În figura 6.7 se prezintă semnalul analogic reconstruit prin suma (6.33). Se observă că în punctele de eșantionare toți termenii sumei sunt nuli, cu excepția unuia, a cărui valoare este egală cu valoarea eșantionului. Între două puncte de eșantionare, semnalul se reconstruiește prin contribuția tuturor termenilor sumei.

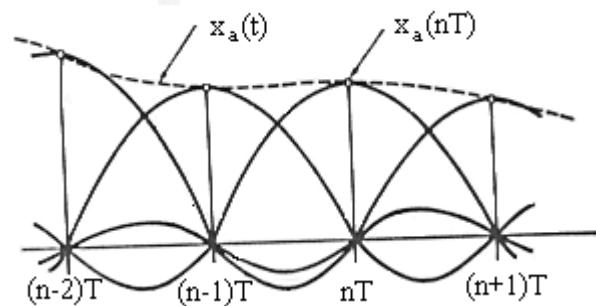


Figura 6.7. Semnalul $x_a(t)$ reconstruit prin suma (6.33)

Filtrul trece jos ideal de reconstrucție este necauzal și, deci, nerealizabil fizic. Reconstrucția obținută prin filtrare trece jos a semnalului eșantionat nu este singura posibilă. Există și alte metode de interpolare, dar ele sunt aproximări, pe când relațiile deduse până acum

sunt egalități. Semnalul reconstruit $\hat{x}_a(t)$ nu va mai fi egal cu $x_a(t)$, ci se poate scrie doar că $\hat{x}_a(t) \approx x_a(t)$.

În continuare vor fi prezentate numai câteva tehnici practice simple, bazate pe interpolare constantă și liniară, dar evident, neideale, care vor fi tratate drept operații de filtrare liniară.

Interpolarea de ordinul zero

Un interpolator de ordinul zero aproximează semnalul analogic printr-o serie de impulsuri rectangulare a căror înălțime este egală cu valoarea eșantionului de semnal. Figura 6.8a prezintă aproximarea semnalului analogic $x_a(t)$ printr-o interpolare de ordinul zero. După cum se observă, $\hat{x}_a(t)$ este un semnal în trepte de amplitudine egală cu valoarea eșantionului pe care o păstrează T secunde. La apariția următorului eșantion, semnalul sare la următoarea valoare pentru T secunde și. a. m. d. Dacă această procedură este văzută ca filtrare liniară, situație prezentată în figura 6.8b, răspunsul la impuls al interpolatorului de ordinul zero este

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.34)$$

Acesta este prezentat în figura 6.8c.

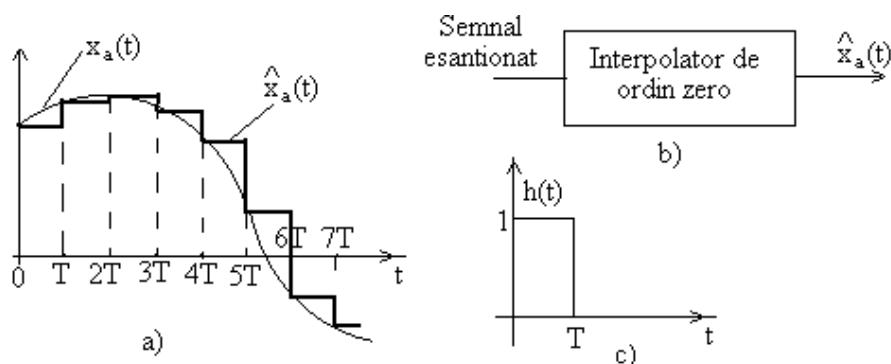


Figura 6.8. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul zero, b) interpretarea nterpolării ca filtrare liniară, c) răspunsul al impuls al interpolatorului de ordin zero

Răspunsul corespunzător în frecvență este

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi F t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi F t} dt = T \left(\frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \right) e^{-j\pi F T} \quad (6.35)$$

Răspunsurile de modul și fază ale filtrului $H(F)$ sunt date în figura 6.9. Pentru comparație, răspunsul în frecvență al interpolatorului ideal este suprapus (reprezentat punctat) peste caracteristica de modul a interpolatorului de ordinul zero.

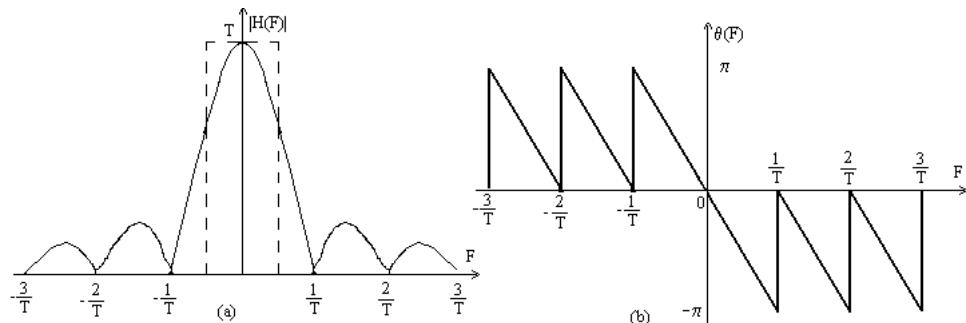


Figura 6.9. a) Caracteristica de modul b) caracteristica de fază a interpolatorului de ordinul zero

Se observă că interpolatorul de ordinul zero nu are o caracteristică cu panta de tăiere abruptă, lucru care se datorează alurii abrupte a lui $h(t)$. Ca urmare a acestui lucru, interpolatorul de ordinul zero permite trecerea frecvențelor alias nedorite (superioare lui $F_s/2$). Pentru a remedia această problemă, se obișnuiește a se filtra trece jos semnalul $\hat{x}_a(t)$, operație prin care acesta devine mai neted.

Interpolarea de ordinul întâi

În interpolarea de ordinul întâi se aproximează semnalul $x_a(t)$ cu segmente de dreaptă, care au panta determinată de eșantionul curent $x_a(nT)$ și cel precedent $x_a(nT-T)$. Ilustrarea acestei tehnici de reconstrucție este prezentată în figura 6.10a. Relația matematică între eșantioanele de intrare și semnalul de ieșire este

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT) + \frac{x_a(nT) - x_a(nT-T)}{T}(t - nT), \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (6.36)$$

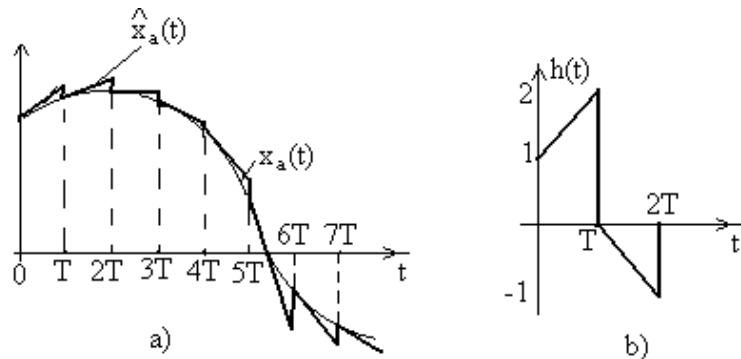


Figura 6.10. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul întâi b) răspunsul al impuls al interpolatorului de ordin întâi

Dacă interpolarea de ordinul întâi este vazută ca o filtrare liniară, răspunsul la impuls al interpolatorului este

$$h(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 1 - \frac{t}{T}, & T \leq t \leq 2T \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.37)$$

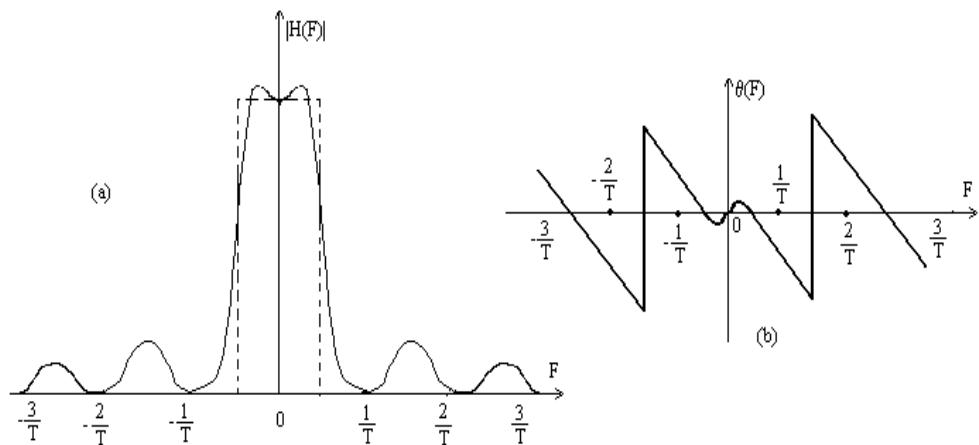


Figura 6.11. a) Caracteristica de modul b) caracteristica de fază a interpolatorului de ordinul întâi

Acesta este reprezentat în figura 6.10b. Răspunsul în frecvență al interpolatorului de ordinul întâi este

$$H(F) = T(1 + 4\pi F^2 T^2)^{1/2} \left(\frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \right) e^{j\theta(F)} \quad (6.38)$$

unde faza $\theta(F) = -\pi F T + \arctg(2\pi F T)$. Caracteristicile de modul și de fază sunt prezentate în figura 6.11a și b.

Deoarece, după cum se observă din figura 6.11a, și această tehnică de reconstrucție introduce distorsiuni datorită trecerii componentelor de frecvență mai mari decât $F_s/2$, interpolatorul de ordinul întâi este urmat de un FTJ care să atenueze frecvențele superioare frecvenței de folding. Vârfurile din $H(F)$ din interiorul benzii $|F| \leq F_s/2$ pot fi nedorite în multe aplicații, caz în care este posibilă modificarea răspunsului la impuls prin reducerea pantei cu un factor $\beta < 1$, fapt ce are ca rezultat obținerea unui răspuns la impuls $h(t)$ reprezentat în figura 6.12a. Răspunsul în frecvență corespunzător este [PM]

$$H(f) = T \left[1 - \beta + \beta (1 + j2\pi F T) \frac{\sin \pi F T}{\pi F T} e^{-j\pi F T} \right] \frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \quad (6.39)$$

Acesta este reprezentat în figura 6.12b pentru $\beta = 0,5, \beta = 0,3, \beta = 0,1$. Se observă reducerea vârfurilor pentru $\beta = 0,3$ și disparația lor pentru $\beta = 0,1$.

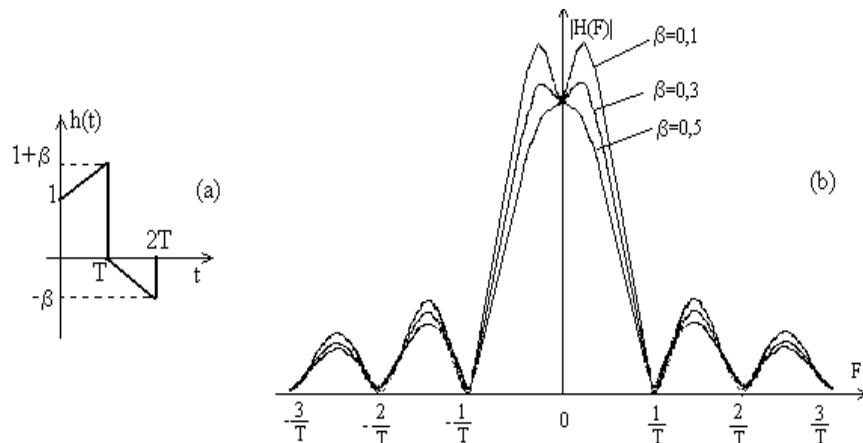


Figura 6.12. Răspunsul la impuls (a) și caracteristica de modul (b) ale interpolatorului de ordinul întâi modificat

Interpolarea liniară cu întârziere

Prin modul de operare a interpolatorului de ordinul întâi se efectuează o extrapolare liniară sau o predicție liniară a eșantionului

următor al semnalului pe baza eșantionului $x_a(nT)$ și $x_a(nT-T)$. Ca urmare, semnalul estimat $\hat{x}_a(t)$ prezintă salturi în punctele de eșantionare. Acestea pot fi evitate prin introducerea unei întârzieri de un eșantion în procesul de reconstrucție și punctele de eșantionare succesive pot fi conectate prin linii drepte. Semnalul rezultat prin acest tip de interpolare este

$$\hat{x}_a(t) = x_a(nT-T) + \frac{x_a(nT) - x_a(nT-T)}{T}(t-nT), \quad nT \leq t < (n+1)T \quad (6.40)$$

Această tehnică de interpolare este prezentată în figura 6.13. Se observă că la $t=nT$ $\hat{x}_a(nT) = x_a(nT-T)$ și la $t=nT+T$ $\hat{x}_a(nT+T) = x_a(nT)$.

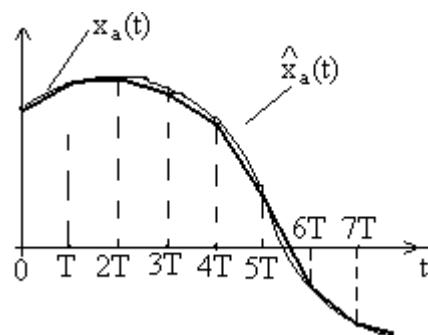


Figura 6.13. a) Aproximarea unui semnal analogic prin interpolare de ordinul întâi cu întârziere

Dacă această tehnică este vazută ca o operație de filtrare liniară, interpolatorul liniar cu întârziere de T secunde are răspunsul la impuls

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq t < T \\ 2 - \frac{t}{T}, & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.41)$$

Răspunsul în frecvență corespunzător este

$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi F t} dt = T \left(\frac{\sin \pi F T}{\pi F T} \right)^2 e^{-j\pi F T} \quad (6.42)$$

Răspunsul la impuls, caracteristica de modul și de fază ale interpolatorului liniar cu întârziere sunt prezentate în figura 6. 14. Se observă caderea abruptă a caracteristicii de modul și prezența unor lobi

mici pentru frecvențe mai mari decât F_s . În plus, datorită întârzierii, caracteristica de fază este liniară. Prin folosirea unui FTJ cu tăiere abruptă în jurul frecvenței de $F_s/2$ după acest interpolator, sunt reduse componente de frecvență înaltă din semnalul $\hat{x}_a(t)$.

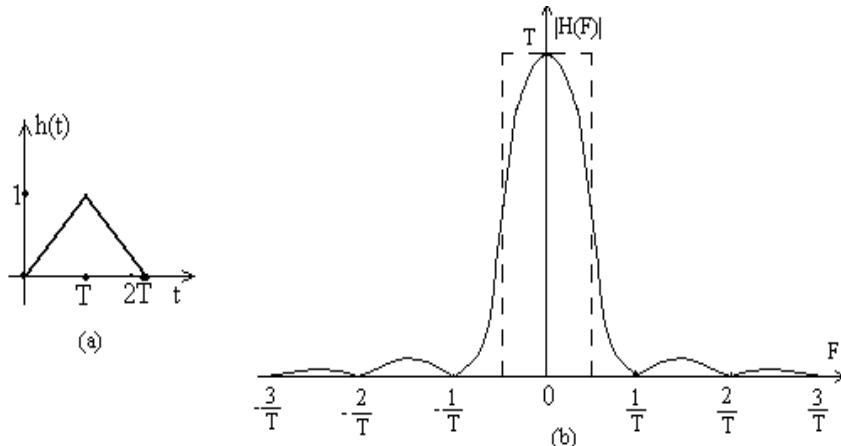


Figura 6.14. Răspunsul la impuls (a) și caracteristica de modul (b) ale interpolatorului de ordinul întâi cu întârziere

Exemplul 6.1.

Să se determine spectrul semnalului analog aperiodic $x_a(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ și spectrul semnalului discret obținut prin eșantionarea uniformă a semnalului analogic.

Soluție.

Spectrul semnalului analogic este

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi F t} dt = \int_0^0 e^{at} e^{-j2\pi F t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi F t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{j2\pi F t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi F t} dt = \frac{1}{a - j2\pi F} + \frac{1}{a + j2\pi F} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Presupunând semnalul analogic eșantionat cu frecvența de eșantionare $F_s = \frac{1}{T}$, se obține semnalul discret

$$x[n] = x_a(nT) = e^{-aT|n|} = (e^{-aT})^{|n|} \quad (6.44)$$

Spectrul semnalului discretizat prin eșantionare este

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{F}{F_s}\right) &= X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-aT})^{|n|} e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (e^{-aT})^{-n} e^{-j2\pi f n} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT})^n e^{-j2\pi f n} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi f} = \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi \frac{F}{F_s}}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

Acesta este periodic de perioadă F_s , datorită termenului $\cos 2\pi \frac{F}{F_s}$.

Spectrul $X_a(F)$ fiind de bandă nelimitată, eroarea alias nu mai poate fi evitată. Conform relației (6.18), spectrul semnalului reconstituit $\hat{x}_a(t)$ este

$$\hat{X}_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} \frac{1 - e^{-2aT}}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi \frac{F}{F_s}} = \\ = \frac{T(1 - e^{-2aT})}{1 + e^{-2aT} - 2e^{-aT} \cos 2\pi FT}, & |F| \leq \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0, & |F| > \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \end{cases} \tag{6.46}$$

Comparând spectrul semnalului neeșantionat (relația (6.43)) cu cel al semnalului eșantionat (relația (6.46)), rezultă că acestea pot să difere destul de mult, pentru o frecvență de eșantionare aleasă neadecvat.

În figura 6.15a se prezintă semnalul analogic original $x_a(t)$ și spectrul său pentru $a=1$. Semnalul eșantionat $x[n]$ și spectrul $X(F/F_s)$, pentru $F_s=1\text{Hz}$ sunt date în figura 6.15b. Se observă distorsiunea de tip alias ce apare în domeniul frecvență și diferența dintre semnalul refăcut $\hat{x}_a(t)$, reprezentat în figura 6.15c, pentru $F_s=1\text{Hz}$ și semnalul original. Prin creșterea frecvenței de eșantionare, se pot reduce substanțial distorsiunile alias, situație reprezentată în figura 6.15d, pentru frecvența de eșantionare $F_s=20\text{Hz}$.

Întărevăr, dacă în relația (6.46) T este considerat suficient de mic, astfel încât $|2aT| << 1$, numărătorul și numitorul pot fi descompuse în puteri ale

lui T până la ordinul doi, pentru $|F| \leq \frac{1}{2T}$ obținându-se

$$X_a(F) = \frac{T(1-e^{-2aT})}{1+e^{-2aT}-2e^{-aT}\cos 2\pi FT} \approx \frac{T[1-(1-2aT+2a^2T^2)]}{1+(1-2aT+2a^2T^2)-2(1-aT+\frac{1}{2}a^2T^2)(1-2\pi^2F^2T^2)} \quad (6.47)$$

unde, pentru $|\varphi| \ll 1$, s-au folosit aproximatiile: $e^\varphi \approx 1 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2$; $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$.

Neglijand termenii de ordin mai mare ca doi in (6.47), se obtine

$$\begin{aligned} X_a(F) &\approx \frac{2aT}{2-2aT+2a^2T^2-2+2aT-a^2T^2+4\pi^2F^2T^2} = \\ &= \frac{2aT^2}{a^2T^2+4\pi^2F^2T^2} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2F^2} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Pentru acest caz particular s-a aratat ca spectrul semnalului reconstituit se apropie de spectrul semnalului analogic de banda nelimitata, daca frecventa de esantionare creste suficient de mult.

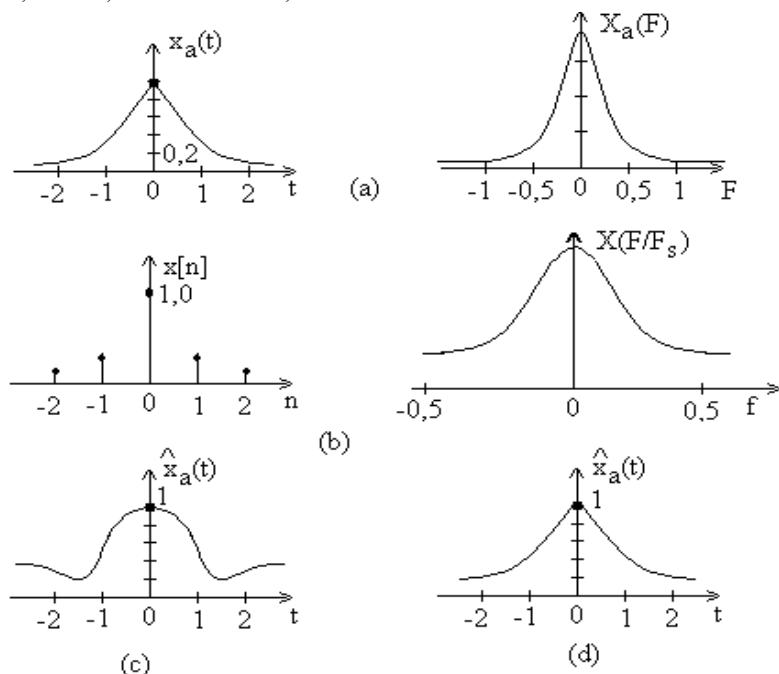


Figura 6.15. (a) Semnalul analogic $x_a(t)$ și spectrul său $X_a(F)$ pentru $a=1$; (b) $x[n] = x_a(nT)$ și spectrul său pentru $a=1$ și $F_s=1$ Hz; (c) semnalul reconstruit $\hat{x}_a(t)$ pentru $F_s=1$ Hz; (d) semnalul reconstruit $\hat{x}_a(t)$ pentru $F_s=20$ Hz.

6.1.4. Erori în eşantionarea ideală a unui semnal analogic

În acest paragraf se vor considera numai erorile determinate de suprapunerea lobilor spectrali. În figura 6.16 este prezentat un semnal de bandă nelimitată, eşantionat cu frecvență $F_s=1/T$. Lobii spectrali se întrepătrund, astfel încât, filtrând cu un FTJ ideal cu frecvență de tăiere $F_c=F_s/2$, în banda filtrului nu intră numai o parte din lobul central, ci și "cozi" spectrale ale lobilor vecini.

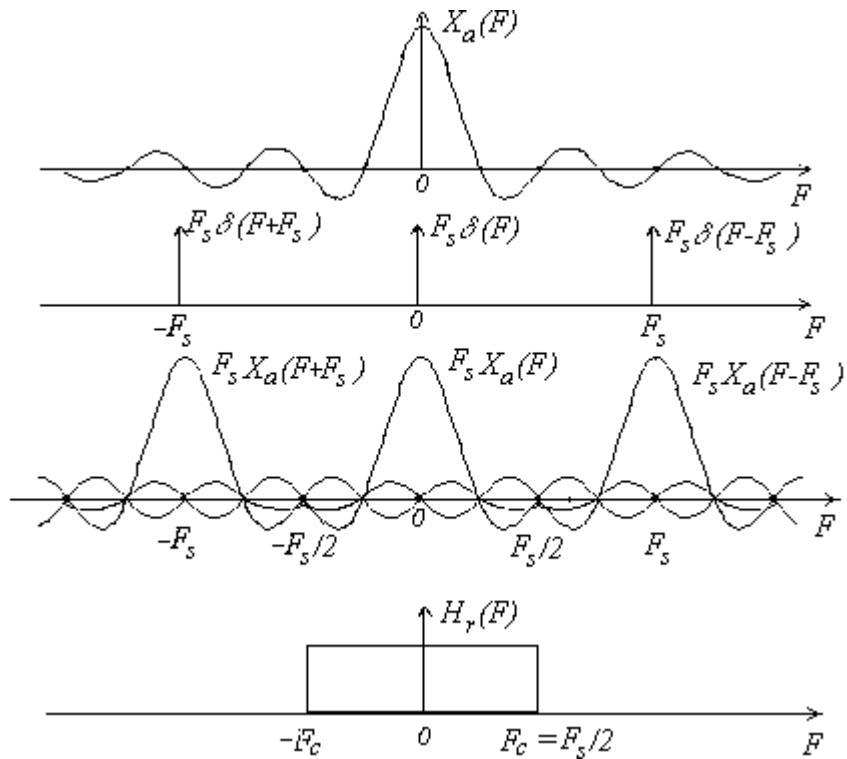


Figura 6.16. Semnalul de bandă nelimitată are lobii întrepătrunși. În intervalul de filtrare intră contribuția tuturor lobilor spectrali

Din figura 6.3 se observă că și în cazul semnalelor de bandă limitată pot apărea asemenea efecte, prin care "cozi" spectrale ale lobilor vecini intră în intervalul spectral de filtrare, determinând fenomenul de aliere sau eroare alias. Eroarea alias este definită cu relația

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) = x_a(t) - x_a(nT) * h_r(t) \quad (6.49)$$

Evaluarea acestei erori se efectuează pentru semnalul $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(F)$, al cărui spectru $X_a(F)$ are suportul nemărginit, utilizând relațiile de refacere a semnalului.

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF - \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(F - nF_s) e^{j2\pi F t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(-2n-1)F_s/2}^{(-2n+1)F_s/2} X_a(u) e^{j2\pi u t} e^{jn2\pi F_s t} du \end{aligned} \quad (6.50)$$

Cu transformarea $n \rightarrow -n$ și $u \rightarrow F$ și exprimarea primei integrale ca o sumă de integrale, relația (6.50) devine

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} e^{jn2\pi F_s t} dF - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} e^{-jn2\pi F_s t} dF = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \end{aligned} \quad (6.51)$$

Tinând seama de faptul că $|1 - e^{-jn2\pi F_s t}| \leq 2$, modulul erorii poate fi majorat, obținându-se

$$|e_a(t)| \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} |X_a(F)| = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)| e^{j2\pi F t} dF \quad (6.52)$$

Relația (6.51) se poate exprima în forme alternative care permit stabilirea unor margini superioare mai fine decât (6.52) pentru modulul erorii.

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \end{aligned} \quad (6.53)$$

Efectuând în prima sumă schimbarea de indice $n = -k$, inversarea limitelor integralei și revenind apoi la indicele n , se obține

$$\begin{aligned} e_a(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF - \\ &\quad (1 - e^{-jn2\pi F_s t}) \int_{-(2n+1)F_s/2}^{-(2n-1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF \end{aligned} \quad (6.54)$$

Efectuând în a doua integrală schimbarea de variabilă $F=-u$ și revenind apoi la variabila F se obține

$$\begin{aligned}
 e_a(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2j \sin(n\pi F_s t)) \left[e^{-jn\pi F_s t} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi F t} dF + \right. \\
 &\quad \left. + e^{jn2\pi F_s t} \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(-F) e^{-j2\pi F t} (-dF) \right] = \\
 &= 2j \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi F_s t) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi(F-F_s/2)t} dF - X_a(-F) e^{-j2\pi(F-F_s/2)t} dF \right]
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

Exprimând transformata Fourier $X_a(F)$ sub forma

$$X_a(F) = |X_a(F)| e^{j\theta(F)} \tag{6.56}$$

și ținând cont că $|X_a(F)|$ este o funcție pară, iar $\theta(F)$ impară, relația (6.55) devine

$$e_a(t) = 2j \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi F_s t) \int_{(2n-1)F_s/2}^{(2n+1)F_s/2} |X_a(F)| (e^{j[2\pi(F-F_s/2)t+\theta(F)]} - e^{-j[2\pi(F-F_s/2)t-\theta(F)]}) dF \right] \tag{6.57}$$

Prin majorări succesive în relația (6.57) se poate ajunge la diferite expresii ale marginii superioare ale erorii alias.

6.1.5. Eșantionarea ideală a semnalelor analogice periodice

Se consideră un semnal periodic, de perioadă T_p , al cărui spectru se întinde până la a N-a armonică (cea mai mare frecvență din spectrul semnalului periodic este NF_0 , unde $F_0=1/T$ este frecvența fundamentală). Un astfel de spectru este prezentat în figura 6.17a. Dacă se eșantionează semnalul cu frecvența F_s , aflată în relație armonică cu fundamentala, $F_s=(M/K)F_0$, $M, K \in N$, semnalul eșantionat rămâne periodic. Această eșantionare se numește de tip "corelat".

Dacă $x_p(t)=x_p(t+T)$, $x_p(t) \leftrightarrow \{c_k\}$, $k=-N, \dots, 0, \dots, N$, atunci

$$X_p(F) = \sum_{k=-N}^N 2\pi c_k \delta(F - kF_0) \tag{6.58}$$

După eșantionarea corelată cu frecvența $F_s=1/T$, se obține semnalul discret

$$x_p[n] = x_p(t) \delta_T(t) \tag{6.59}$$

al cărui spectru este

$$\begin{aligned}
X_p \left(\frac{F}{F_s} \right) &= F\{x_p(t)\delta_T(t)\} = X_p(F) * F\{\delta_T(t)\} = \\
&= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F - kF_0 - n \frac{M}{K} F_0)
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Din relația (6.60) se constată că spectrul semnalului discret obținut prin eșantionarea semnalului periodic este o repetare periodică, cu perioada $(M/K)F_0$ a spectrului de linii $\{c_k\}$ al semnalului periodic, scalat corespunzător. În figura 6.17b este prezentat spectrul semnalului periodic eșantionat.

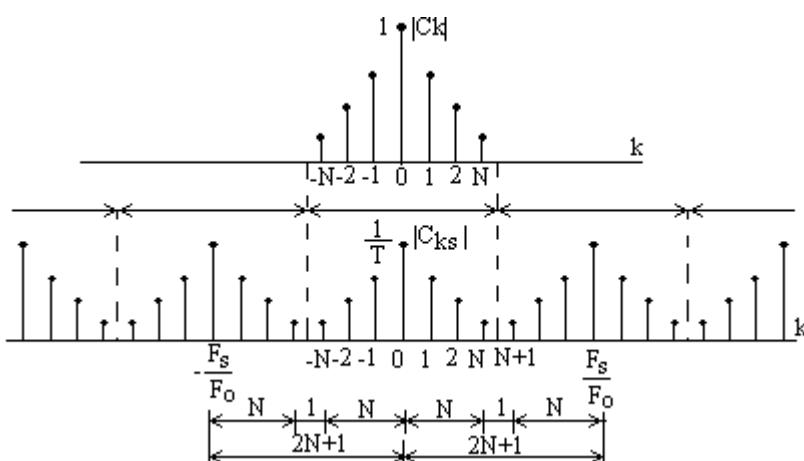


Figura 6.17. Spectrul unui semnal periodic (a), spectrul semnalului periodic eșantionat corelat (b)

Lobul spectral corespunzător lui $n=0$ se întinde pe semiaxa pozitivă a frecvențelor până la NF_0 , căreia îi corespunde termenul $2\pi c_N \delta(F - NF_0)$. Cea mai mică frecvență a unei componente spectrale din lobul corespunzător lui $n=1$ este $((M/K)-N)F_0$, căreia îi corespunde termenul $2\pi c_{-N} \delta(F + NF_0 - (M/K)F_0)$. Lobii spectrali corespunzători lui $n=0$ și $n=1$ nu se suprapun dacă

$$NF_0 < \left(\frac{M}{K} - N \right) F_0; \quad \frac{M}{K} > 2N \tag{6.61}$$

Dacă toate eșantioanele se prelucră în aceeași perioadă a semnalului ($K=1$), condiția (6.61) devine $M > 2N$, adică numărul de eșantioane prelevate trebuie să fie un întreg mai mare decât $2N$; $M \geq 2N + 1$.

Teorema eșantionării semnalelor periodice (1)

Dacă semnalul $x_p(t)$, periodic, de perioadă T_p , $F_0=1/T_p$, are spectrul limitat la a N-a armonică, atunci semnalul poate fi unic determinat din eșantioanele sale $\{x_p(kT_s) | 0 \leq k \leq M-1\}$, prelevate în decursul unei singure perioade T_p a fundamentalei, dacă $M \geq 2N+1$. La limită, din fundamentală se prelevează trei eșantioane. Dacă cea mai mare frecvență din spectrul semnalului este $B=NF_0$, atunci condiția de eșantionare fără erori devine

$$F_s = MF_0 \geq 2B + F_0 = (2N+1)F_0 \quad (6.62)$$

Se observă ca F_s este un multiplu întreg al lui F_0 . Diagrama spectrală din figura 6.17 ilustrează eșantionarea corelată ($F_s=MF_0$) a unui semnal periodic cu spectrul limitat. Pentru ca grupurile spectrale ale coeficienților să nu se suprapună, este necesar ca F_s să fie la limită $(2N+1)F_0$. În rest, frecvența de eșantionare poate fi mai mare, dar, pentru păstrarea periodicității și după eșantionare, este necesar ca F_s să fie în relație armonică cu F_0 . Dacă F_s și F_0 sunt în relație armonică,

$$F_s = \frac{M}{K} F_0, \quad K \neq 1, \text{ teorema eșantionării poate fi reformulată.}$$

Teorema eșantionării semnalelor periodice (2)

Dacă semnalul $x_p(t)$, periodic, de perioadă T_p , $F_0=1/T_p$, are spectrul limitat la a N-a armonică, atunci semnalul poate fi unic determinat din eșantioanele sale $\{x_p(kT_s) | 0 \leq k \leq [M/K]-1\}$, prelevate în decursul unei singure perioade T_p a fundamentalei, dacă $M > 2KN$. Din fundamentală se prelevează cel puțin două eșantioane distanțate la mai puțin de $T/2$, altfel ajungându-se la cazul eșantionării zero-urilor fundamentalei.

Eșantionarea semnalelor periodice de spectru limitat poate fi realizată și în următorul mod: în loc de a se reține câte un eșantion la T_p/M secunde într-o perioadă fundamentală, se pot preleva eșantioane adiacente din perioade succesive, situație ilustrată în figura 6.18, unde incrementul pasului de eșantionare s-a considerat T_p/M .

$$T = T_p + T_p / M \quad (6.63)$$

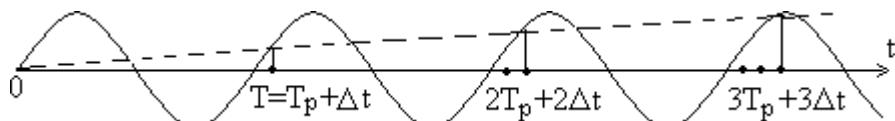


Figura 6.18. Eșantionarea unui semnal periodic de perioadă T_p cu pasul $T = T_p + \Delta t$, unde $\Delta t = T_p / M, M \in N$.

În acest caz prelucrarea durează M perioade. Este posibilă și o eșantionare mai rară, prin prelevarea eșantioanelor adiacente la un interval de K perioade T_p plus incrementul T_p/M , adică

$$T = KT_p + T_p / M \quad (6.64)$$

În acest caz prelevarea celor M eșantioane durează KMT_p secunde, adică KM perioade. Semnalul rezultat prin eșantionare are componente spectrale foarte apropiate de zero, cu atât mai apropiate cu cât K este mai mare. Prințipiu de eșantionare prezentat este folosit în osciloscoapele cu eșantionare, unde frecvența semnalului este coborâtă prin eșantionare după relația (6.64) la valori la care se pot utiliza amplificatoare obișnuite (cele de bandă foarte largă sunt mai dificil de construit).

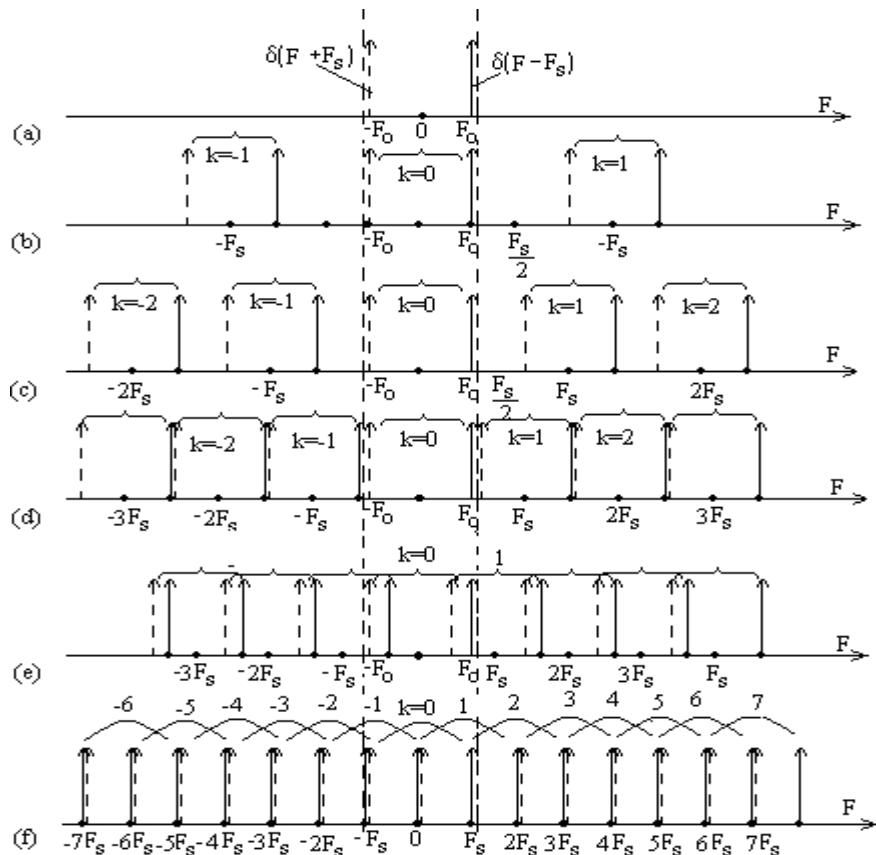


Figura 6.19. Spectrul unui semnal periodic (a), spectrul obținut prin eșantionarea unui semnal periodic cu respectarea teoremei eșantionării (b) și (c) și fără respectarea teoremei eșantionării (d), (e), (f).

În figura 6.19 sunt prezentate spectrele obținute prin eșantionarea unui cosinusoidă de frecvență F_0 . S-a considerat numai cazul eșantionării corelate, cu $F_s = (M/K)F_0$. În figura 6.19b și c sunt date spectrele obținute pentru $F_s = 4F_0 > 2F_0$ și $F_s = 3F_0 > 2F_0$. În banda de trecere a filtrului de reconstrucție, cu frecvență de tăiere F_c , $F_0 \leq F_c \leq F_s/2$ intră numai o pereche de linii spectrale, astfel că semnalul inițial poate fi reconstruit din eșantioanele sale. Componenta din stânga s-a figurat cu linie întreruptă. Dacă se eșantionează cu $F_s = 2F_0$, fară a respecta teorema eșantionării semnalelor periodice, care cere strict inegalitatea $F_s > 2F_0$ (și nu admite egalitatea ca în cazul semnalelor aperiodice) apare fenomenul de suprapunere a lobilor spectrului, adică o linie din stânga este suprapusă peste o linie din dreapta. Pentru frecvențe $F_s < 2F_0$, se prezintă două cazuri. Din figura 6.19e se observă că pentru $F_s = (3/2)F_0$ lobii spectrali de diverse ordine se întrepătrund. Pentru $F_s = F_0$ (figura 6.19f) se produce din nou suprapunerea liniilor spectrale. În concluzie, refacerea semnalului periodic inițial din eșantioanele sale, folosind un FTJ ideal, se poate realiza numai dacă $F_s > 2F_0$.

6.2. Eșantionarea semnalelor discrete

6.2.1. Spectrul semnalului discret eșantionat

În prelucrarea numerică a semnalelor există situații în care, pentru a crește viteza de lucru, se impune reducerea frecvenței semnalelor. Acest lucru se realizează prin eșantionarea semnalelor discrete, care constă în reținerea eșantioanelor acestuia la intervale care sunt un multiplu al unui întreg pozitiv M .

Fie semnalul $\delta_M[n]$, care este un tren de impulsuri cu perioada M .

$$\delta_M[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] \quad (6.65)$$

În spațiul semnalelor discrete acesta este echivalent distribuției Dirac periodice din spațiul semnalelor analogice, dar, spre deosebire de aceasta, este o funcție obișnuită.

Dacă $x[n]$ este un semnal discret, atunci semnalul discret eșantionat $x_1[n]$ este

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0; \pm M; \pm 2M \dots \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.66)$$

Acesta se obține prin produsul

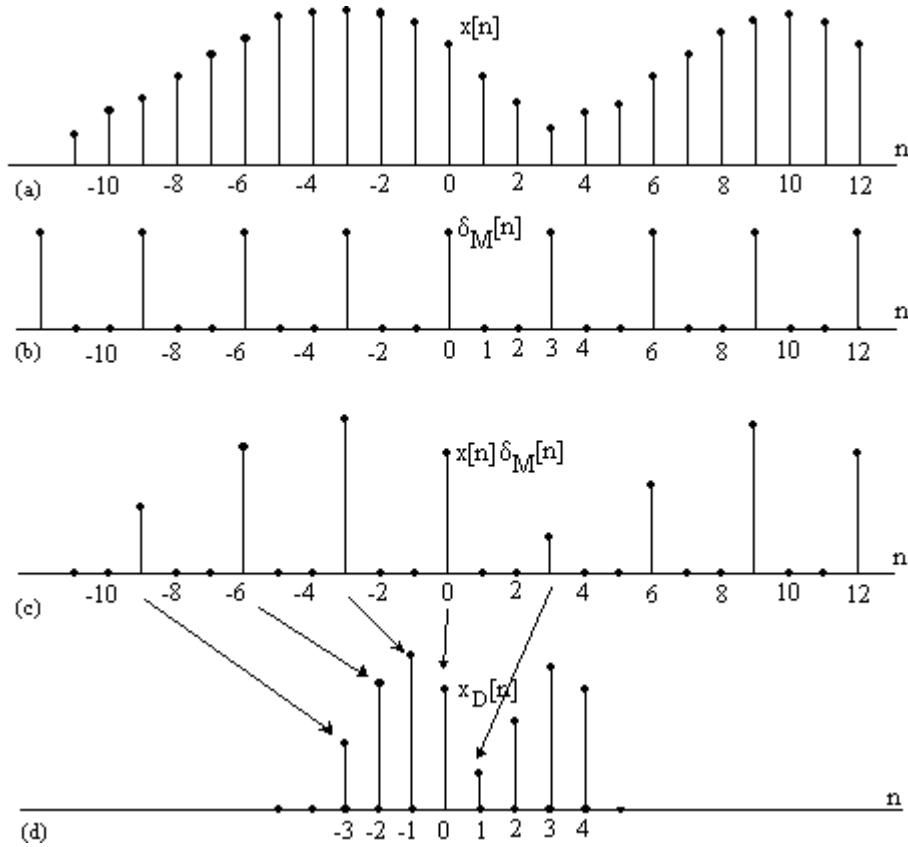


Figura 6.20. Semnalul discret $x[n]$ (a), semnalul $\delta_M[n]$ (b), semnalul discret eșantionat (c) și semnalul discret eșantionat și decimat (d)

$$x_1[n] = x[n]\delta_M[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kM] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM]\delta[n - kM] \quad (6.67)$$

În figura 6.20a este prezentat semnalul discret $x[n]$, în figura 6.20b - semnalul periodic $\delta_M[n]$, iar în figura 6.20c - semnalul discret $x_1[n]$ eșantionat cu pasul $M=3$. Acesta conține câte două valori nule (în general $M-1$) între două valori prelevate din $x[n]$. Se presupune că restricția la perioada principală a spectrului $X(\omega)$ are suportul $[-\omega_M, \omega_M]$, cu $\omega_M < \pi$. Spectrul semnalului $\delta_M[n]$ este

$$F\{\delta_M[n]\} = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.68)$$

Aplicând teorema produsului semnalelor (teorema convoluçãoi circulară în domeniul spectrului) rezultă spectrul semnalului eșantionat, $X_1(\omega)$.

$$X_1(\omega) = F\{x[n]\delta_M[n]\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \frac{2\pi}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s); \quad \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.69)$$

Convoluția circulară se efectuează pe o perioadă de lungime 2π . Suportul distribuției Dirac $\delta(\omega - k\omega_s)$ din acest interval se reduce la un

punct $\omega = k\omega_s$, în condiția $0 \leq k\omega_s < 2\pi$ sau $0 \leq \frac{2\pi k}{M} < 2\pi$, adică $0 \leq k < M$. Drept urmare, indicele k din (6.69) se limitează la $0 \leq k \leq M - 1$ și spectrul semnalului discret eșantionat $X_1(\omega)$ reprezintă prelungirea prin periodicitate a restricției la perioada principală

$$X_{1r}(\omega) = \frac{1}{M} X_r(\omega) * \sum_{k=0}^{M-1} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_r(\omega - k\omega_s); \omega_s = \frac{2\pi}{M} \quad (6.70)$$

unde $X_r(\omega)$ reprezintă restricția la aceeași perioadă principală a lui $X(\omega)$.

Deoarece $X(\omega)$ este periodic de perioadă 2π , din (6.70) se observă că prelungirea prin periodicitate cu perioada 2π a lui $X_r(\omega)$ este și periodică de perioadă ω_s , $X_1(\omega + \omega_s) = X_1(\omega)$.

În figura 6.21a s-a reprezentat spectrul semnalului discret $X(\omega)$, periodic de perioadă 2π , iar în figura 6.21b, spectrul semnalului eșantionat, periodic de perioadă $2\pi/M$, pentru $M=3$. Lobul spectral $k=0$ se întinde pe semiaxa $\omega > 0$ până la ω_M . Primul lob vecin axat pe ω_s are frecvența minimă $\omega_s - \omega_M$. Condiția de evitare a suprapunerii lobilor spectrali este $\omega_M \leq \omega_s - \omega_M$ adică

$$\omega_s \geq 2\omega_M, \omega_s = 2\pi/M \quad (6.71)$$

Relația (6.71) este asemănătoare cu (6.19) stabilită pentru semnale analogice.

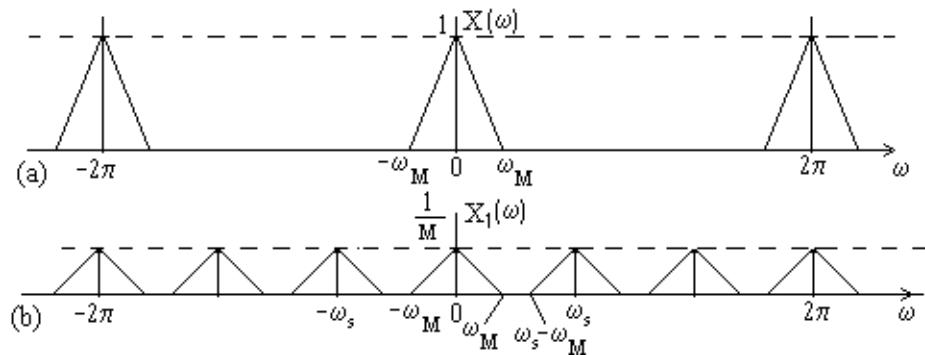


Figura 6.21. Spectrul unui semnal discret (a) și spectrul semnalului discret eșantionat pentru $M=3$ (b) cu respectarea relației (6.71)

Cum $\omega_M = T\Omega_M$, unde $\Omega_M = 2\pi B$ este pulsația maximă a semnalului analogic din care provine $x[n]$, iar T – pasul de eșantionare a semnalului analogic, rezultă

$$MT \leq \frac{\pi}{\Omega_M}; \quad T' \leq \frac{\pi}{\Omega_M}; \quad T' = MT \quad (6.72)$$

Aceasta înseamnă că semnalul discret $x[n]$ poate fi eșantionat cu pasul M fără să apară suprapunerea lobilor spectrali dacă semnalul analogic ar fi putut să fie eșantionat cu perioada $T'=MT$, respectându-se teorema WKS. În aceste condiții, semnalul analogic a fost, inițial, suprareșantionat. Dacă (6.71) nu este satisfăcută, apare suprapunerea lobilor spectrali vecini, situație prezentată în figura 6.22. Erorile care apar sunt de tip alias și semnalul discret inițial nu mai poate fi recuperat din spectrul semnalului discret eșantionat.

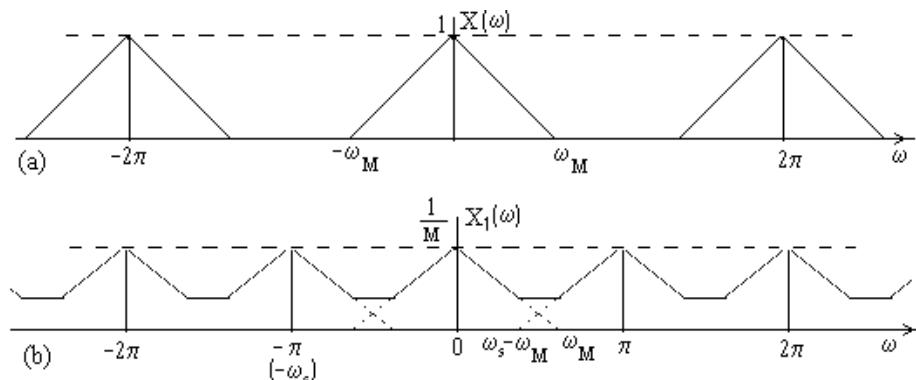


Figura 6.22. Spectrul unui semnal discret (a) și spectrul semnalului discret eșantionat fără respectarea relației (6.71), adică $\omega_s - \omega_M < \omega_M$ (b)

6.2.2. Reconstruirea semnalului discret din eșantioanele sale

Dacă, după eșantionare, lobii spectrali ai semnalului eșantionat nu se suprapun, este posibilă reconstruirea semnalului inițial din eșantioanele sale $x_1[n]$ prin filtrare trece jos ideală, efectuată cu un filtru de reconstrucție $H_r(\omega)$, după cum rezultă din figura 6.23.

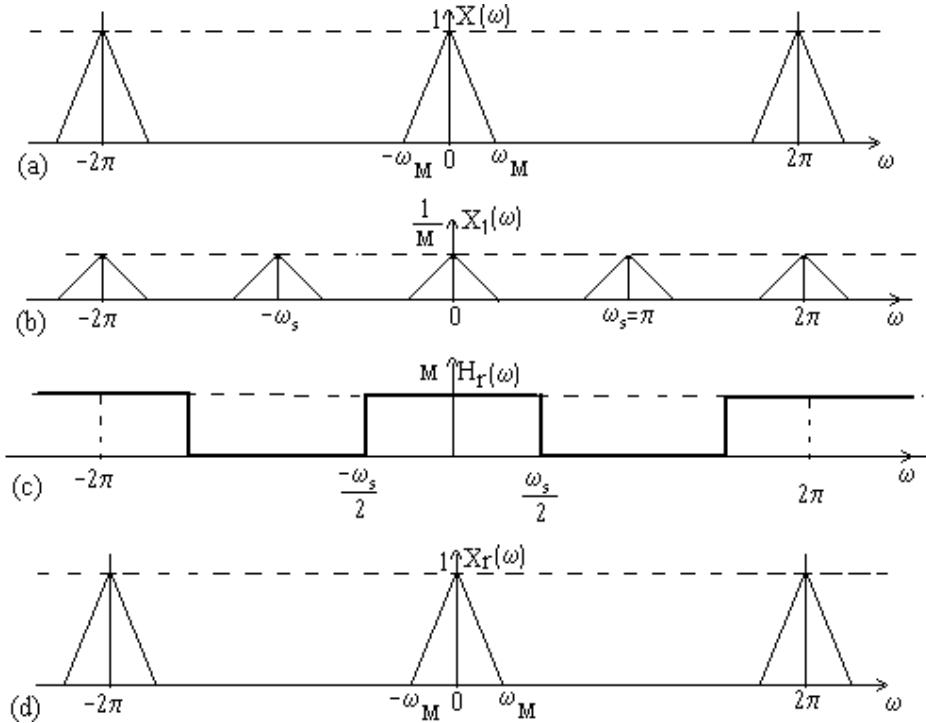


Figura 6.23. Reconstruirea semnalului discret din semnalul discret eșantionat prin filtrare trece jos ideală cu $\omega_c = \omega_s / 2$

Răspunsul în frecvență al filtrului este periodic de perioadă 2π și are expresia

$$H_r(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega - 2k\pi| \leq \omega_c; \quad \omega_M \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_M \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.73)$$

Răspunsul la impuls al filtrului de reconstrucție este

$$h_r[n] = \frac{\sin n\omega_c}{n\omega_c}; \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{M} \quad (6.74)$$

Semnalul filtrat $X_r(\omega)$ este

$$X_r(\omega) = H_r(\omega)X_1(\omega) \quad (6.75)$$

Semnalul refăcut este

$$x_r[n] = h_r[n] * x_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]h_r[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kM] \frac{\sin[(\pi/M)n - k\pi]}{(\pi/M)n - k\pi} \quad (6.76)$$

deoarece $x_1[k] = 0$ pentru $k \neq Mn$ și $x_1[kM] = x[kM]$.

6.2.3. Decimarea unui semnal discret

După eșantionarea unui semnal discret rezultă un semnal în care, între două valori reținute, sunt intercalate M-1 zerouri care nu aduc nici o informație despre semnalul $x[n]$ care a fost eșantionat. Acestea pot fi omise, rezultând un nou semnal, denumit "decimatul" semnalului eșantionat, notat $x_D[n]$. Din semnalul decimat se poate reconstrui semnalul nedecimat prin inserarea a M-1 zerouri între două valori consecutive. În figura 6.20d este reprezentat semnalul $x_D[n]$ rezultat prin decimarea semnalului discret eșantionat $x_1[n]$. Între semnalul discret decimat și cel eșantionat există relația

$$x_D[n] = x_1[nM] \quad (6.77)$$

unde M este factorul de decimare, număr natural. Factorul de decimare poate fi și rațional pozitiv, dar acest lucru nu face obiectul paragrafului de față, ci al domeniului referitor la prelucrarea multirate a semnalelor.

Spectrul semnalului decimat se determină aplicând transformata Fourier în timp discret

$$\begin{aligned} X_D(\omega) &= F\{x_D[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_D[n]e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[nM]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-j\omega n/M} = X_1\left(\frac{\omega}{M}\right) \end{aligned} \quad (6.78)$$

Ținând seama de (6.70), relația (6.78) conduce la restricția lui $X_D(\omega)$ la perioada principală

$$X_{Dr}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_1\left(\frac{\omega - k2\pi}{M}\right) \quad (6.79)$$

Se observă periodicitatea de perioadă 2π a spectrului semnalului eșantionat și decimat. Pentru $k=0$, lobul central $\frac{1}{M} X\left(\frac{\omega}{M}\right)$ se anulează la

argumentul $\frac{\omega}{M} = \omega_M$, deci $\omega = M\omega_M$. Prin urmare, lobii spectrali ai lui $X_D(\omega)$ au întinderea de M ori mai mare decât a lobilor semnalului inițial. În figura 6.24 sunt ilustrate spectrul semnalului inițial $X(\omega)$, spectrul semnalului eșantionat cu $M=2$, $X_1(\omega)$, și spectrul semnalului obținut după decimarea semnalului eșantionat $X_D(\omega)$.

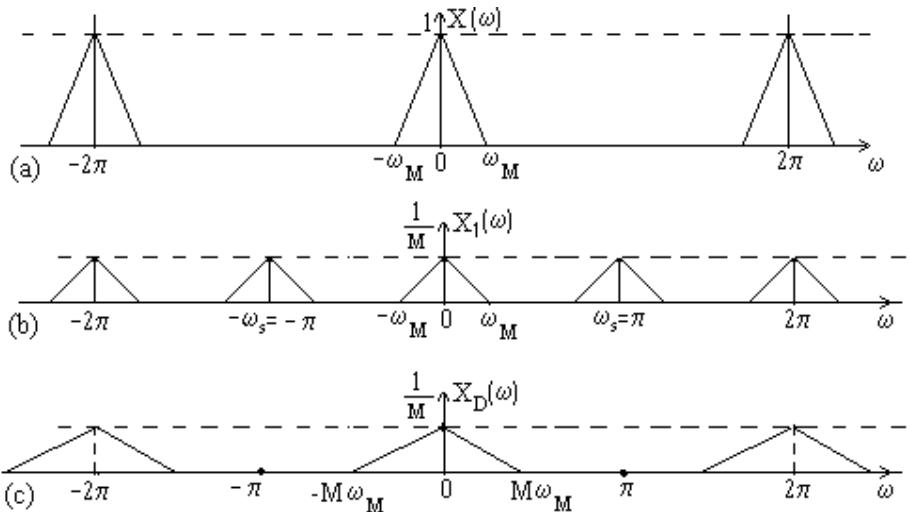


Figura 6.24. Spectrul semnalului discret (a), spectrul semnalului discret eșantionat (b) și spectrul semnalului decimat (c).

6.3. Eșantionarea spectrului unui semnal analogic aperiodic de durată finită

Așa cum s-a specificat în paragraful 4.1.2, semnalele analogice aperiodice, de energie finită au spectrul continuu. În cele ce urmează, se consideră eșantionarea periodică a spectrului unui astfel de semnal, urmărindu-se apoi refacerea semnalului din eșantioanele prelevate echidistant din spectrul său.

Fie $x_a(t)$ semnalul analogic aperiodic al căruia spectru continuu este $X_a(F)$. Se presupune că se prelevează eșantioane din $X_a(F)$ distanțe la δF Hertz, ca în figura 6.25. Se pune apoi problema refacerii lui $X_a(F)$ sau, echivalent, $x_a(t)$ din eșantioanele $X_a(k\delta F)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Din punct de vedere matematic, această problemă este duală eșantionării unui semnal continuu în domeniul timp. În urma eșantionării spectrului continuu

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad (6.80)$$

se obține

$$X_a(k\delta F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k\delta F t} dt \quad (6.81)$$

Se definește perioada de eșantionare

$$T_s = \frac{1}{\delta F} \quad (6.82)$$

Cu (6.82), relația (6.81) devine

$$X_a(k\delta F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T_s}} dt \quad (6.83)$$

care este analogă relației (6.7) pentru eșantionarea în domeniul timp. Ca și în cazul menționat, domeniul de integrare se împarte într-o sumă infinită de domenii de integrare, de lățime T_s , și se efectuează schimbarea de variabilă, astfel încât fiecare interval să fie translat în domeniul fundamental $-\frac{T_s}{2} \leq t \leq \frac{T_s}{2}$. Aceasta conduce la

$$X_a(k\delta F) = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s) \right] e^{-j2\pi k \frac{t}{T_s}} dt \quad (6.84)$$

care este duală relației (6.14).

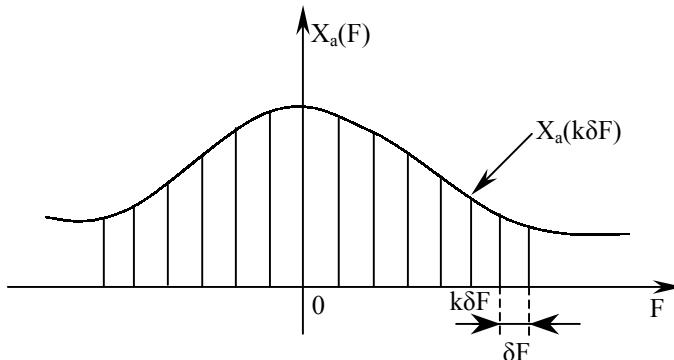


Fig 6.25. Eșantionarea uniformă a spectrului unui semnal analogic aperiodic

Semnalul

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t - nT_s) \quad (6.85)$$

este periodic, de perioadă $T_s = \frac{1}{\delta F}$ și, deci, poate fi descompus în serie

Fourier

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k \delta F t} \quad (6.86)$$

unde

$$c_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} x_p(t) e^{-j2\pi k \delta F t} dt \quad (6.87)$$

Comparând (6.87) cu (6.84), rezultă

$$c_k = \frac{1}{T_s} X_a(k\delta F) = \delta F X_a(k\delta F) \quad k \in Z \quad (6.88)$$

Din (6.88) se observă că eșantioanele spectrului $X_a(F)$ corespund (până la un factor de scală, δF) coeficienților Fourier ai semnalului periodic $x_p(t)$, de perioadă $T_s = \frac{1}{\delta F}$, dat de (6.85) și reprezentat în figura 6.26.

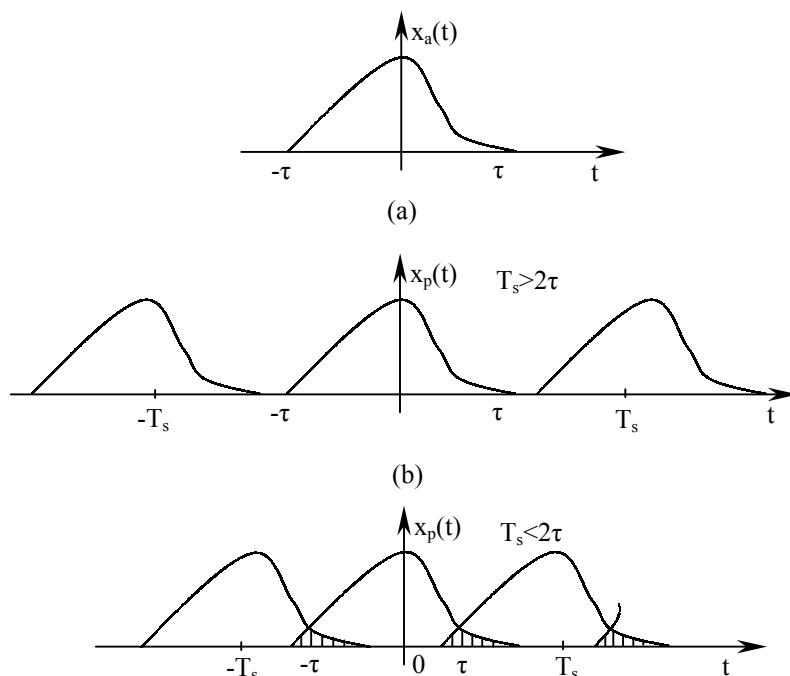


Fig 6.26. (a) Semnal aperiodic de durată finită, (b) semnalul periodic rezultat din eșantionarea spectrului unui semnal de energie finită limitat în timp; (c) ilustrarea aliasingului în domeniul timp

Din figură se observă că refacerea semnalului $x_a(t)$ din $x_p(t)$ este posibilă dacă $x_a(t)$ este limitat în timp la $|t| \leq \tau$ (adică $x_a(t) = 0$ pentru $|t| > \tau$, unde $\tau < \frac{T_s}{2}$). Dacă $\tau > \frac{T_s}{2}$, nu este posibilă refacerea exactă a lui $x_a(t)$, datorită suprapunerilor semnalului în domeniul timp.

Dacă semnalul analogic $x_a(t)$ este limitat în timp la $\tau \leq T_s / 2$ și eșantionarea spectrului se realizează cu o perioadă $T_s > 2\tau$, nu există eroare alias, iar spectrul semnalului poate fi refăcut fără pierderi din eșantioanele $X_a(k\delta F)$, utilizând formula de interpolare

$$X_a(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(k\delta F) \frac{\sin\left[\left(\frac{\pi}{\delta F}\right)(F - k\delta F)\right]}{\left(\frac{\pi}{\delta F}\right)(F - k\delta F)} \quad (6.89)$$

care este duală relației (6.22).

Cele prezentate în acest paragraf au în primul rând importanță teoretică, deoarece în cazurile practice, semnalul analogic este transformat în semnal discret, iar eșantionarea în domeniul frecvență se efectuează asupra spectrului semnalului discretizat. Acest lucru face obiectul paragrafului următor.

6.4. Eșantionarea spectrului unui semnal discret de durată finită

Semnalele discrete aperiodice, de energie finită au spectrul continuu și periodic. Fie un astfel de semnal $x[n]$ cu transformata Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (6.37)$$

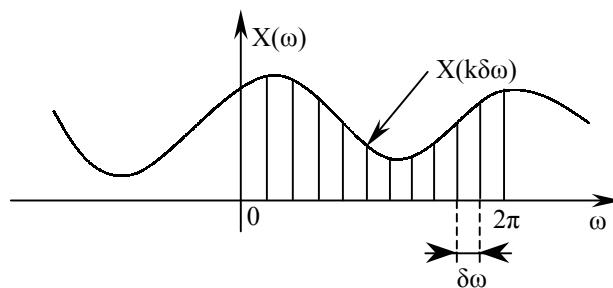


Fig. 6.27. Eșantionarea spectrului unui semnal discret aperiodic

Se eșantionează $X(\omega)$ la intervale echidistante, egale cu $\delta\omega$ radiani între două eșantioane succesive. Deoarece $X(\omega)$ este periodic de perioadă 2π , sunt necesare numai eșantioanele din intervalul fundamental de frecvență.

Se consideră N eșantioane echidistante în intervalul fundamental $0 \leq \omega < 2\pi$ spațiate la $\delta\omega = \frac{2\pi}{N}$, ca în figura 6.27.

Se evaluează (6.90) la $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$, obținându-se

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.91)$$

Suma din (6.91) se împarte într-un număr infinit de sume, fiecare conținând N termeni

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} + \dots = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x[n]e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \end{aligned} \quad (6.92)$$

Efectuând schimbarea de variabilă $n=p+mN$, schimbând ordinea de sumare și apoi revenind la indicele k , rezultă

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \right] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (6.93)$$

$$\text{Semnalul } x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \quad (6.94)$$

obținut prin repetarea lui $x[n]$ la fiecare N eșantioane este, evident, periodic, de perioadă N și poate fi dezvoltat în serie Fourier

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.95)$$

cu coeficienții

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.96)$$

Comparând (6.96) cu (6.93), rezultă

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.97)$$

și, deci

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \quad (6.98)$$

Relația (6.98) permite obținerea semnalului periodic $x_p[n]$ din eșantioanele spectrului $X(\omega)$, dar nu implică refacerea lui $X(\omega)$ sau $x[n]$ din eșantioanele spectrului. Pentru a arăta aceasta, trebuie considerată relația între $x[n]$ și $x_p[n]$. Dacă $x_p[n]$ este repetarea periodică a lui $x[n]$ ca în relația (6.94), atunci $x[n]$ se poate reface din $x_p[n]$ dacă nu există suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, adică dacă $x[n]$ este limitat în timp la mai puțin de perioada N a lui $x_p[n]$.

Acest lucru este ilustrat în figura 6.28, unde s-a considerat secvența de durată finită $x[n]$, diferită de zero în intervalul $0 \leq n \leq L - 1$.

Se observă că, dacă $N \geq L$,

$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (6.99)$$

astfel încât $x[n]$ se poate reface din $x_p[n]$ fără eroare.

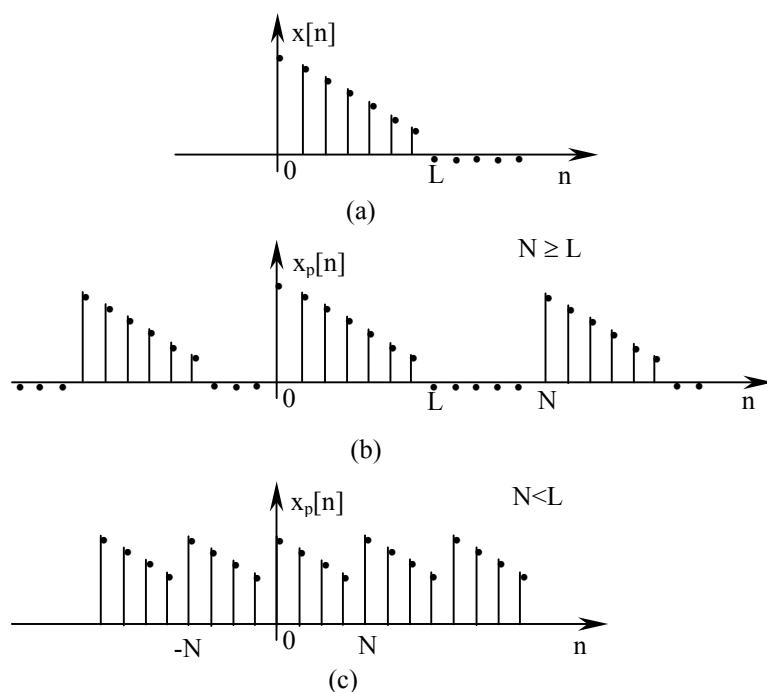


Fig. 6.28.a) Secvență aperiodică de lungime L , b) repetarea sa periodică pentru $N \geq L$ (fără eroare alias), c) cazul $N < L$ (eroare alias)

Dacă însă, $N < L$, nu este posibilă refacerea lui $x[n]$ din $x_p[n]$ datorită erorii alias în domeniul timp.

În concluzie, spectrul unui semnal discret aperiodic de durată L poate fi exact refăcut din eșantioanele sale prelevate la frecvențele $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, dacă $N \geq L$. Procedeul este următorul: întâi se calculează $x_p[n]$, $n=0,1,\dots,N-1$ din (6.98), apoi se definește funcția

$$x[n] = \begin{cases} x_p[n] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (6.100)$$

și, în final, se calculează $X(\omega)$ cu (6.90).

Ca și în cazul semnalelor analogice, este posibil să se exprime spectrul $X(\omega)$ direct în funcție de eșantioanele sale $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$, $k = 0,1,\dots,N$.

Se presupune $N \geq L$ și

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} ; \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.101)$$

și

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) e^{j2\pi k \frac{n}{N}} \right] e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)n} \right] \end{aligned} \quad (6.102)$$

Suma din interior reprezintă funcția de interpolare de bază, deplasată cu $2\pi k/N$ în frecvență. Dacă se definește

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \quad (6.103)$$

relația (6.102) se scrie

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) P\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \quad (6.104)$$

Funcția $P(\omega)$ are proprietatea că

$$P\left(\frac{2\pi}{N} k\right) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k = 0 \\ 0, & \text{pentru } k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.105)$$

Relația (6.104) va da exact valorile eșantioanelor $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ pentru $\omega = \frac{2\pi k}{N}$, iar la toate celelalte frecvențe va produce o combinație ponderată a eșantioanelor spectrului original.

6.5. Eșantionarea semnalelor trece bandă

Spectrul semnalelor considerate până acum era concentrat în benzii de frecvență care includeau și frecvența nulă. Aceste semnale sunt de tip "trece jos". O altă categorie de semnale utilizate în practică este cea a semnalelor "trece bandă", ale căror componente de frecvență sunt cuprinse într-un interval $B_1 \leq F \leq B_2$. Un semnal analogic $x_a(t)$ cu conținutul spectral concentrat într-o bandă îngustă din jurul unei frecvențe F_c poate fi reprezentat în general sub forma

$$x_a(t) = A(t) \cos[2\pi F_c t + \varphi(t)], \quad (6.106)$$

unde $A(t)$ este amplitudinea sau anvelopa semnalului și $\varphi(t)$ este faza semnalului.

Frecvența F_c poate fi una dintre frecvențele din banda ocupată de semnal. În general se preferă frecvența din centrul benzii semnalului și în modulația de amplitudine aceasta se numește frecvență purtătoare. Din relația (6.106) rezultă

$$\begin{aligned} x_a(t) &= A(t) \cos \varphi(t) \cos 2\pi F_c t - A(t) \sin \varphi(t) \sin 2\pi F_c t = \\ &= u_c(t) \cos 2\pi F_c t - u_s(t) \sin 2\pi F_c t \end{aligned} \quad (6.107)$$

unde, prin definiție

$$u_c(t) = A(t) \cos \varphi(t),$$

$$u_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$$

sunt componentele în quadratură ale semnalului $x_a(t)$. Se introduce anvelopa complexă $u(t)$ a semnalului analogic trece-bandă $x_a(t)$, ca fiind

$$u(t) = u_c(t) + j u_s(t) \quad (6.108)$$

Rezultă astfel

$$x_a(t) = \operatorname{Re}\{u(t)e^{j2\pi F_c t}\} \quad (6.109)$$

În continuare se va stabili legătura dintre spectrele semnalului trece bandă și a anvelopei sale complexe. Transformata Fourier a semnalului analogic este

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad (6.110)$$

și deoarece $\operatorname{Re}\{u(t)e^{j2\pi F_c t}\} = (1/2)[u(t)e^{j2\pi F_c t} + u^*(t)e^{-j2\pi F_c t}]$, rezultă

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u(t)e^{j2\pi F_c t} + u^*(t)e^{-j2\pi F_c t}] e^{-j2\pi F t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi(F-F_c)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^*(t)e^{-j2\pi(F+F_c)t} dt \end{aligned} \quad (6.111)$$

Dacă se notează cu $U(F)$ transformata Fourier a anvelopei complexe, din (6.111) se obține

$$X(F) = \frac{1}{2}[U(F - F_c) + U^*(-F - F_c)] \quad (6.112)$$

Se poate arăta [PM] că dacă semnalul $x_a(t)$ este un semnal trece bandă și dacă F_c este ales corespunzător, atunci semnalul anvelopă complexă are spectrul în jurul frecvenței zero, motiv pentru care $u(t)$ se mai numește semnalul echivalent de joasă frecvență asociat semnalului trece bandă $x_a(t)$. În general semnalul echivalent de joasă frecvență $u(t)$ este complex, în timp ce semnalul trece bandă $x_a(t)$ este real. Ultimul se poate obține din primul în domeniul timp cu relația (6.110) sau în domeniul frecvență cu relația (6.112).

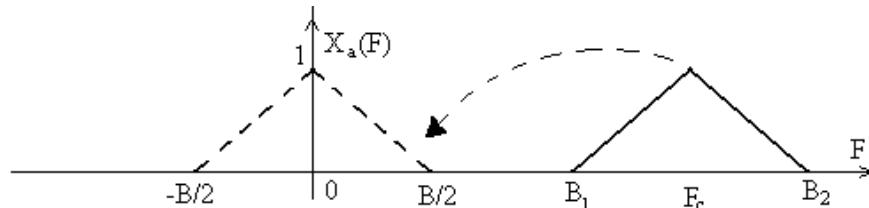


Figura 6.29. Spectrele semnalului analogic trece bandă și al semnalului de joasă frecvență corespunzător

S-a arătat că un semnal analogic cu frecvență maximă B poate fi reconstituit din eșantioanele sale dacă frecvența de eșantionare este mai mare decât frecvența Nyquist (dublul frecvenței maxime din spectru) $F_N = 2B$. Totuși, dacă semnalul este unul trece bandă având componente de frecvență între B_1 și B_2 , aplicarea directă a teoremei eșantionării impune o frecvență de eșantionare de cel puțin $2B_2$. Dacă

semnalul este de bandă îngustă, adică $B_2 > B_1 \gg B_2 - B_1$, atunci este avantajos să se transleze spectrul semnalului cu frecvența $F_c = (B_1 + B_2)/2$ și apoi să se eșantioneze semnalul echivalent de joasă frecvență. Aceasta se poate face multiplicând semnalul trece bandă cu purtătoarele în quadratură și filtrând semnalele rezultante cu filtre trece-jos având banda de trecere la $2F_c$, situație prezentată în figura 6.30.

Se presupune că frecvența cea mai înaltă din spectru

$$B_2 = F_c + \frac{B_2 - B_1}{2} = F_c + \frac{B}{2} \quad (6.113)$$

este un multiplu al benzii semnalului B, adică

$$F_c + \frac{B}{2} = kB, \quad (6.114)$$

unde $k \in N^*$. Acest lucru este întotdeauna posibil, eventual prin lărgirea benzii semnalului de analizat. Eșantionând semnalul trece bandă $x_a(t)$ cu

viteza de eșantionare $2B = \frac{1}{T}$, rezultă

$$\begin{aligned} x_a(nT) &= u_c(nT) \cos 2\pi F_c nT - u_s(nT) \sin 2\pi F_c nT = \\ &= u_c(nT) \cos \frac{\pi n(2k-1)}{2} - u_s(nT) \sin \frac{\pi n(2k-1)}{2}, \end{aligned} \quad (6.115)$$

deoarece $T = \frac{1}{F_s} = \frac{1}{2B}$.

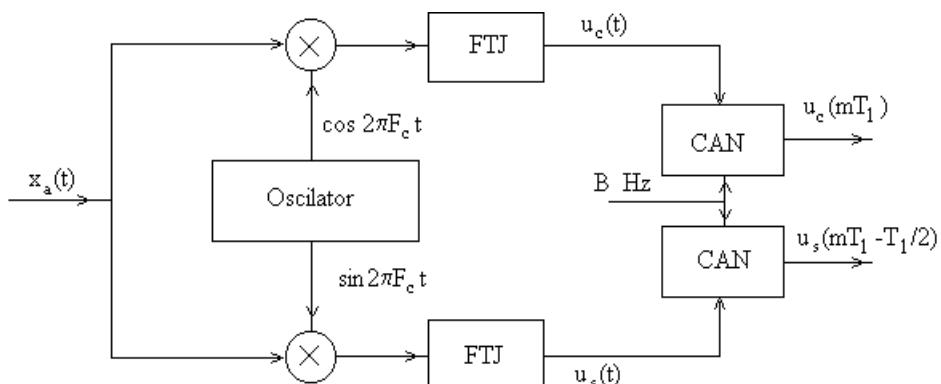


Figura 6.30. Eșantionarea unui semnal analogic trece bandă, prin transformarea lui într-un semnal de joasă frecvență echivalent

Fie $T_1 = 2T = \frac{1}{B}$. Se disting două cazuri

a) n par, adică $n=2m$, $m \in \mathbb{Z}$;

$$x_a(2mT) \equiv x_a(mT_1) = u_c(mT_1) \cos \pi m(2k-1) = (-1)^m u_c(mT_1) \quad (6.116)$$

b) n impar, adică $n=2m-1$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x_a(2mT - T) &\equiv x_a(mT_1 - \frac{T_1}{2}) = -u_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}) \sin \pi \frac{(2m-1)(2k-1)}{2} = \\ &= (-1)^{m+k+1} u_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}); \end{aligned} \quad (6.117)$$

Prin urmare, eșantioanele pare ale lui $x_a(t)$, prelevate cu frecvența de B eșantioane pe secundă, vor produce eșantioanele componente $u_c(t)$ din semnalul echivalent de joasă frecvență $u(t)$, în timp ce eșantioanele impare ale lui $x_a(t)$, prelevate tot cu frecvența de B eșantioane pe secundă, vor produce eșantioanele componente $u_s(t)$ din semnalul echivalent de joasă frecvență $u(t)$. Aceste eșantioane pot fi utilizate la reconstituirea semnalului echivalent de joasă frecvență. Pentru aceasta se aplică teorema eșantionării părților componente ale semnalului echivalent de joasă frecvență

$$u_c(t) = B \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_c(mT_1) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1)]}{\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1)} \quad (6.118)$$

$$u_s(t) = B \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1 + \frac{T_1}{2})]}{\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1 + \frac{T_1}{2})} \quad (6.119)$$

Înlocuind (6.118) și (6.119) în (6.107), se obține

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= u_c(t) \cos 2\pi F_c t - u_s(t) \sin 2F_c t = \\
&= B \cos 2\pi F_c t \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_c(mT_1) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1)]}{\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1)} - \\
&\quad - B \sin 2\pi F_c t \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1 + \frac{T_1}{2})]}{\frac{\pi}{T_1}(t-mT_1 + \frac{T_1}{2})}
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Regrupând termenii din membrul drept, rezultă

$$\begin{aligned}
x_a(t) &= B \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u_c(mT_1) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1)]}{\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1)} \cos 2\pi F_c t - \\
&\quad - Bu_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}) \frac{\sin[\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1 + \frac{T_1}{2})]}{\frac{\pi}{T_1}(t-nT_1 + \frac{T_1}{2})} \sin 2\pi F_c t]
\end{aligned} \tag{6.109}$$

CAPITOLUL 7

TRANSFORMATA FOURIER DISCRETĂ

Transformata Fourier discretă joacă un rol foarte important în multe aplicații ale prelucrării numerice de semnal, cum ar fi filtrarea liniară, analiza și estimarea spectrală. Motivul esențial al importanței sale rezidă în existența unor algoritmi eficienți de calcul ai acestei transformate.

7.1. Transformata Fourier discretă pentru secvențe de durată finită

Transformata Fourier a unei secvențe $x[n]$ de durată finită L se calculează cu relația

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (7.1)$$

Se presupune că $x[n] = 0$ în afara domeniului $0 \leq n \leq L-1$. Dacă se eșantionează $X(\omega)$ la frecvențele $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, unde $N \geq L$, eșantioanele rezultate sunt

$$X[k] = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.2)$$

Limita superioară a sumei s-a considerat $N - 1$, deoarece $x[n] = 0$ pentru $n \geq L$.

Relația (7.2) este cunoscută sub denumirea de *transformata Fourier discretă* (DFT) a semnalului $x[n]$.

$$\text{Relația} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.3)$$

definește *transformata Fourier discretă inversă* (IDFT) și permite refacerea semnalului $x[n]$ din eșantioanele spectrului. Dacă $L < N$, IDFT în N puncte va determina $x[n] = 0$ pentru $L \leq n \leq N - 1$.

Transformata Fourier discretă este definită pe o submulțime a mulțimii numerelor întregi cu valori în mulțimea numerelor complexe.

$$X[k] = |X[k]| e^{j\angle X[k]} \quad (7.4)$$

unde $|X[k]|$ reprezintă modulul transformatei Fourier discrete, iar $\angle X[k]$, faza sa. Relațiile (7.2) și (7.4) pot fi considerate ca transformări liniare ale secvențelor $x[n]$, respectiv, $X[k]$.

Se definesc vectorii coloană

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

și matricea

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & w_N & w_N^2 & \dots & \dots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \dots & \dots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \dots & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (7.6)$$

unde $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ este o rădăcină de ordin N a unității, numită *nucleul transformatei Fourier discrete*.

Cu aceste definiții, DFT în N puncte se exprimă în formă matriceală

$$\mathbf{X}_N = W_N \cdot \mathbf{x}_N \quad (7.7)$$

unde W_N este *matricea transformării liniare*.

Se observă că W_N este simetrică. Presupunând că W_N admite inversă, se poate scrie

$$\mathbf{x}_N = W_N^{-1} \mathbf{X}_N \quad (7.8)$$

care este IDFT.

Cu (7.5) și (7.6), relația (7.3) poate fi scrisă compact sub forma

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} W_N^* \mathbf{X}_N \quad (7.9)$$

unde W_N^* este conjugata lui W_N . Comparând (7.9) cu (7.8) rezultă

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^* \quad (7.10)$$

care implică

$$W_N \cdot W_N^* = N \cdot I_N \quad (7.11)$$

unde I_N este matricea unitate de ordin N . Prin urmare, matricea W_N din transformare este ortogonală și, mai mult, inversa sa există și este $\frac{W_N^*}{N}$.

Se observă că pentru calculul DFT, în fiecare punct sunt necesare N multiplicări complexe și $(N-1)$ adunări complexe, astfel încât pentru calculul DFT în N puncte sunt necesare N^2 multiplicări complexe și $N(N-1)$ adunări complexe. Datorită proprietăților de simetrie și periodicitate ale DFT s-au putut dezvolta algoritmi rapizi de calcul, cunoscuți ca algoritmi pentru transformata Fourier rapidă (FFT, Fast Fourier Transform) utilizati în calculul DFT și IDFT. Din acest motiv DFT și IDFT joacă un rol foarte important în procesarea digitală de semnal, cum ar fi analiza de frecvență, estimarea spectrală și filtrarea liniară.

7.1.1. Câteva proprietăți ale DFT

- 1) **Periodicitatea** Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[n+N] = x[n], \quad \forall n \in Z \quad (7.12)$$

și $X[k+N] = X[k], \quad \forall k \in Z \quad (7.12')$

- 2) **Liniaritatea** Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$\sum_j a_j x_j[n] \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} \sum_j X_j[k] \quad (7.13)$$

Această proprietate decurge direct din definiția transformatei Fourier discrete directe.

3) Deplasarea și simetria circulară în timp

Datorită proprietății de periodicitate, transformata Fourier discretă în N puncte a unei secvențe $x[n]$, de durată finită, $L \leq N$, este echivalentă cu transformata Fourier discretă în N puncte a unei secvențe periodice $x_p[n]$, de perioadă N , obținută prin repetarea periodică a lui $x[n]$

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \quad (7.14)$$

Prin deplasarea lui $x_p[n]$ cu k unități spre dreapta ($k > 0$), se obține secvența periodică

$$x'_p[n] = x_p[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-k-mN], k > 0 \quad (7.15)$$

Secvența aperiodică de lungime finită

$$x'[n] = \begin{cases} x_p[n], & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (7.16)$$

se obține din secvența originală $x[n]$ prin deplasare circulară. Relația între cele două secvențe este ilustrată în figura 7.1 pentru $N=4$ și $k=2$.

Deplasarea circulară cu k unități a unei secvențe poate fi reprezentată cu indexul modulo N

$$x'[n] = x[(n-k) \text{ modulo } N] = x[(n-k)_N] \quad (7.17)$$

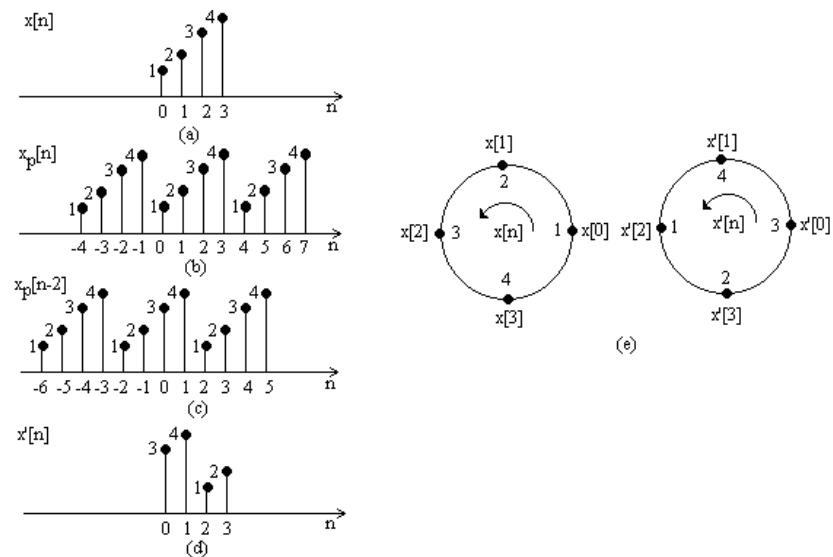


Figura 7.1. Deplasarea circulară a unei secvențe de lungime $N=4$. (a) secvența aperiodică $x[n]$, (b) repetarea periodică a secvenței $x[n]$, (c) deplasarea cu două unități spre dreapta a secvenței $x_p[n]$, (d) deplasarea circulară cu două unități spre dreapta a secvenței aperiodice $x[n]$, (e) deplasarea circulară ilustrată prin plasarea eșantioanelor secvenței pe circumferința unui cerc.

Pentru exemplul considerat,

$x'[0] = x[-2, (\text{mod } 4)] = x[2]$, $x'[1] = x[-1, (\text{mod } 4)] = x[3]$,
 $x'[2] = x[0, (\text{mod } 4)] = x[0]$, $x'[3] = x[1, (\text{mod } 4)] = x[1]$. Se observă că $x'[n]$ este chiar $x[n]$ deplasat circular cu două unități de timp, unde sensul trigonometric a fost ales arbitrar drept direcția pozitivă de deplasare. Deplasarea circulară a unei secvențe de lungime N este echivalentă cu deplasarea liniară a extensiei sale periodice, obținute prin repetarea periodică, cu perioada N, a secvenței $x[n]$, și invers. Periodicitatea ce rezultă din aranjarea celor N puncte ale secvenței pe circumferința unui cerc determină definiții echivalente ale simetriei pare, impare și relectării în timp a unei secvențe.

O secvență de lungime N este *circular pară* dacă este simetrică față de punctul 0 de pe cerc, adică $x[N-n] = x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$.

O secvență de lungime N este *circular impară* dacă este antisimetrică față de punctul 0 de pe cerc, adică $x[N-n] = -x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$.

Reflectarea sau inversarea în timp se realizează prin reflectarea eșantioanelor față de punctul 0.

$$x[(-n)_N] = x[N-n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.18)$$

4) Multiplicarea a două DFT și convoluția circulară Se presupun două secvențe de durată finită N, $x_1[n]$ și $x_2[n]$ ale căror transformate Fourier discrete sunt

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.19)$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}, \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.20)$$

Prin multiplicarea lor se obține o secvență $X_3[k]$, al cărei original este o secvență $x_3[n]$, tot de lungime N. În continuare, se va stabili o relație între $x_1[n]$, $x_2[n]$ și $x_3[n]$.

$$X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k], \quad k = \overline{0, N-1} \quad (7.21)$$

Aplicând IDFT relației (7.21), se obține

$$x_3[m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_3[k] e^{j 2\pi k m / N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_1[k] X_2[k] e^{j 2\pi k m / N} \quad (7.22)$$

Înlocuind (7.19) și (7.20) în (7.22), rezultă

$$\begin{aligned} x_3[m] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi kn/N} \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] e^{-j2\pi kl/N} \right] e^{j2\pi km/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \sum_{l=0}^{N-1} x_2[l] \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

În evaluarea relației (7.23) se folosește formula

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N, & \text{dacă } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a}, & \text{dacă } a \neq 1. \end{cases} \quad (7.24)$$

Dacă se notează $e^{j2\pi k(m-n-l)/N} = a$ (7.25)
se observă că $a = 1$ când $m - n - l$ este multiplu de N și $a^N = 1$. Rezultă atunci

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N} = \begin{cases} N, & \text{pentru } l = m - n + pN = ((m-n)_N) \quad p - \text{intreg} \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (7.26)$$

Înlocuind (7.26) în (7.23), se obține

$$x_3[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2((m-n)_N), \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.27)$$

Relația (7.27) este o sumă de convoluție, numită *convoluție circulară*, datorită indexului $(m-n)_N$. Convoluția circulară a două secvențe de lungime N se mai notează cu \bigcirc_N

5) Translația circulară în timp a unei secvențe

Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[(n-m)_N] \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} e^{-j2\pi km/N} X[k] \quad (7.28)$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} \text{DFT}\{x[(n-m)_N]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{m-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} + \\ &+ \sum_{n=m}^{N-1} x[(n-m)_N] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{p=-m}^{-1} x[p] e^{-j2\pi k(m+p)/N} + \sum_{p=0}^{N-m-1} x[p] e^{-j2\pi k(m+p)/N} = \\ &= e^{-j2\pi km/N} \left[\sum_{p=N-m}^{N-1} x[p] e^{-j2\pi kp/N} + \sum_{p=0}^{N-m-1} x[p] e^{-j2\pi kp/N} \right] = e^{-j2\pi km/N} X[k] \end{aligned}$$

6) Translația circulară în frecvență a unei secvențe

Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[n] e^{j2\pi nm/N} \xrightarrow{\text{DFT in } N \text{ puncte}} X[(k-m)_N] \quad (7.29)$$

Demonstrație

$$DFT\{x[n]e^{j2\pi mn/N}\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi mn/N} e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(k-m)n/N} = X[(k-m)_N]$$

7) Inversarea circulară în timp a unei secvențe Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x[-n] = x[N-n] \xrightarrow{DFT \text{ in } N \text{ puncte}} X[(-k)_N] = X[N-k] \quad (7.30)$$

Demonstrație

$$DFT\{x[N-n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[N-n]e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{m=N}^1 x[m]e^{-j2\pi k(N-m)/N} = \sum_{m=1}^N x[m]e^{-j2\pi k(N-m)/N}$$

dar $e^{-j2\pi k(N-m)/N} = e^{-j2\pi k(-m)/N} = e^{-j2\pi m(-k)/N} = e^{-j2\pi m(N-k)/N}$, astfel încât

$$DFT\{x[N-n]\} = \sum_{m=1}^N x[m]e^{-j2\pi k(N-k)/N} = X[N-k]$$

8) Conjugarea complexă Dacă $x[n]$ și $X[k]$ sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x^*[n] \xrightarrow{DFT \text{ in } N \text{ puncte}} X^*[(-k)_N] = X^*[N-k] \quad (7.31)$$

Demonstrație

$$\begin{aligned} DFT\{x^*[n]\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]e^{-j2\pi kn/N} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi kn/N} \right)^* = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(N-k)n/N} \right)^* = \\ &= X^*[(-k)_N] \end{aligned}$$

9) Convoluția circulară Dacă $x_1[n]$ și $X_1[k]$, $x_2[n]$ și $X_2[k]$, sunt perechi DFT în N puncte, atunci

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xrightarrow{DFT \text{ in } N \text{ puncte}} X_1[k]X_2[k] \quad (7.32)$$

Demonstrația acestei proprietăți a fost dată în paragraful 4.2.3, la proprietățile seriei Fourier discrete.

10) Proprietăți de simetrie Proprietățile de simetrie se obțin aplicând metodologia folosită în paragraful 4.2.9. Dacă un semnal prezintă proprietăți de simetrie în domeniul timp, este posibilă deducerea unor caracteristici ale semnalului în domeniul frecvență.

Secvența $x[n]$ și transformata sa Fourier discretă $X[k]$ se presupun complexe, adică

$$x[n] = x_R[n] + jx_I[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.33)$$

$$X[k] = X_R[k] + jX_I[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.34)$$

unde indicii R și I specifică partea reală, respectiv imaginată.

nlocuind (7.33) și $e^{-j2\pi kn/N} = \cos 2\pi kn/N - j \sin 2\pi kn/N$ în expresia DFT dată de (7.2) și separând părțile reale și imaginare, se obține

$$X_R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} [x_R[n] \cos 2\pi kn/N + x_I[n] \sin 2\pi kn/N] \quad (7.35)$$

$$X_I[n] = -\sum_{n=0}^{N-1} [x_R[n] \sin 2\pi kn/N - x_I[n] \cos 2\pi kn/N] \quad (7.36)$$

Similar, înlocuind (7.34) în expresia IDFT dată de (7.3), se obține

$$x_R[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_R[k] \cos 2\pi kn/N - X_I[k] \sin 2\pi kn/N] \quad (7.37)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_R[k] \sin 2\pi kn/N + X_I[k] \cos 2\pi kn/N] \quad (7.38)$$

În continuare, se vor considera câteva cazuri particulare:

a) Secvențe cu valori reale Dacă $x[n]$ este real, din (7.2) rezultă

$$X[N-k] = X^*[k] = X[-k] \quad (7.39)$$

În consecință, $|X[N-k]| = |X[k]|$ și $\angle X[N-k] = -\angle X[k]$. Deoarece $x_I[n] = 0$, $x_R[n] = x[n]$, (7.37) fiind o altă formă pentru IDFT.

b) Secvențe reale pare Dacă $x[n]$ este real și par, adică $x[N-n] = x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, din (7.36) rezultă $X_I[k] = 0$ și DFT se reduce la relația

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos 2\pi kn/N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.40)$$

care este reală și pară. IDFT se reduce la

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cos 2\pi kn/N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.41)$$

c) Secvențe reale impare Dacă $x[n]$ este real și impar, adică $x[n] = -x[N-n]$, $0 \leq n \leq N-1$, din (7.35) rezultă $X_R[k] = 0$ și DFT devine

$$X[k] = -j \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin 2\pi kn/N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (7.42)$$

care este pur imaginară și impară. IDFT se reduce la forma

$$x[n] = j \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \sin 2\pi kn/N, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.43)$$

d) Secvențe pur imaginare În acest caz $x[n] = jx_I[n]$ și relațiile (7.35) și (7.36) devin

$$X_R[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_I[n] \sin 2\pi kn / N \quad (7.44)$$

$$X_I[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_I[n] \cos 2\pi kn / N \quad (4.45)$$

Se observă că $X_R[k]$ este funcție pară și $X_I[k]$ impară. Dacă $x_I[n]$ este impar, atunci $X_I[k]=0$ și $X[k]$ este real. Dacă $x_I[n]$ este par, atunci $X_R[k]=0$ și $X[k]$ este pur imaginar.

Exemplul 7.1.

Să se efectueze convoluția circulară a secvențelor

$$x_1[n] = \{2, 1, 2, 1\} \text{ și } x_2[n] = \{1, 2, 3, 4\}$$

Soluție. Convoluția circulară poate fi efectuată grafic, plasând eșantioanele secvențelor pe un cerc. Înlocuind $N=4$ în (7.27) și ținând cont de figura 7.2 rezultă $x_3[0]=14$, $x_3[1]=16$, $x_3[2]=14$, $x_3[3]=16$, adică $x_3[n] = \{14, 16, 14, 16\}$.

Din exemplul considerat se observă că și convoluția circulară implică aceleași operații ca și cea liniară: reflectarea unei secvențe, deplasarea, multiplicarea și în final sumarea produselor. Diferența față de convoluția liniară constă în faptul că reflectarea și deplasarea se efectuează circular, prin calcularea indexului uneia din secvențe modulo N .

Convoluția circulară este comutativă, deci oricare din secvențe poate fi reflectată și deplasată modulo N față de celalaltă, fără modificarea rezultatului.

Exemplul 7.2.

Să se determine convoluția circulară $x_3[n] = x_1[n] \odot_4 x_2[n]$ din exemplul precedent, cu ajutorul DFT și IDFT.

Soluție.

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^3 x_1[n] e^{-j2\pi kn/4} = 2 + e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$X_1[0] = 6; \quad X_1[1] = 0; \quad X_1[2] = 2; \quad X_1[3] = 0.$$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^3 x_2[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 3 \cdot e^{-j\pi k} + 4 \cdot e^{-j3\pi k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$X_2[0] = 10; \quad X_2[1] = -2 + j \cdot 2; \quad X_2[2] = -2; \quad X_2[3] = -2 - j \cdot 2.$$

$$X_3[k] = X_1[k] \cdot X_2[k],$$

$$X_3[0] = 60; \quad X_3[1] = 0; \quad X_3[2] = -4; \quad X_3[3] = 0.$$

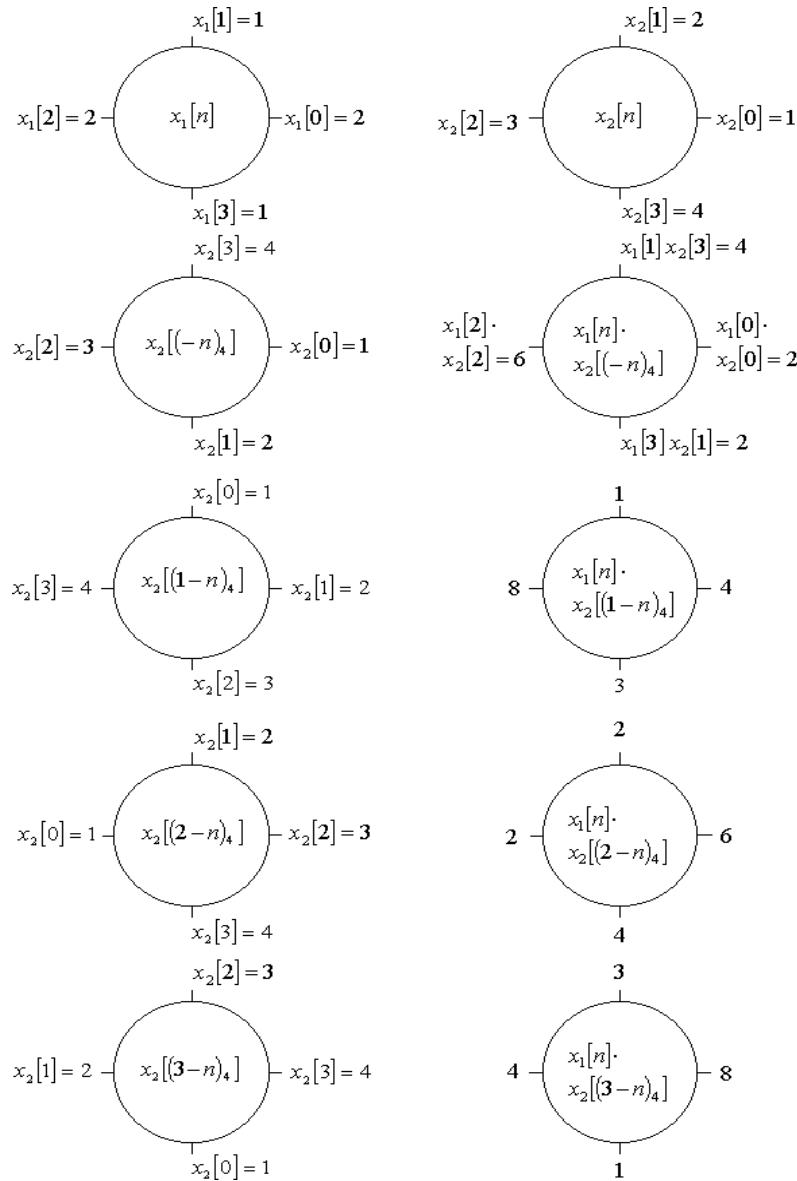


Figura 7.2 Convoluția circulară calculată grafic

$$x_3[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X_3[k] e^{j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (60 - 4 \cdot e^{j\pi n}); \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

$$x_3[0] = 14; \quad x_3[1] = 16; \quad x_3[2] = 14; \quad x_3[3] = 16 \text{ sau}$$

$$x_3[n] = \{14, 16, 14, 16\}, \text{ aşa cum era de aşteptat.}$$

↑

7.2. Relațiile transformatei Fourier discrete cu alte transformate

Transformata Fourier discretă (DFT) și inversa sa (IDFT) reprezintă mijloace importante utilizate în diverse aplicații de prelucrarea numerică a semnalelor. Importanța lor este dată și de multitudinea de algoritmi eficienți de calcul, cunoscuți sub numele de transformate Fourier rapide. Prin urmare, este important a se stabili relațiile care există între transformata Fourier discretă și celelalte modalități de prelucrare a semnalelor numerice.

7.2.1. Relația dintre transformata Fourier discretă și seria Fourier a unei secvențe periodice

Pentru comoditate se reamintesc relațiile pentru DFT și IDFT, și anume

$$\text{DFT: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.46)$$

$$\text{IDFT: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.47)$$

Un semnal periodic $x_p[n]$ de perioadă N poate fi descompus în serie Fourier

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.48)$$

unde coeficienții seriei Fourier sunt date de relația

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.49)$$

Din compararea relațiilor (7.46) și (7.47) cu (7.48) și (7.49) se observă că relația (7.49) care dă coeficienții seriei Fourier are forma unei

DFT. De fapt, dacă se definește o secvență $x[n]$, identică cu $x_p[n]$ pe o perioadă, DFT a acestei secvențe este

$$X[k] = N c_k \quad (7.50)$$

În plus, (7.48) are forma unei IDFT. Astfel, DFT furnizează o legătură importantă între caracterizarea în domeniul frecvență a secvențelor periodice și secvențelor aperiodice de durată finită. Relațiile anterioare sugerează că DFT poate fi văzută ca fiind spectrul discret al semnalului periodic $x_p[n]$. Într-o astfel de interpretare, o secvență de durată finită $x[n]$ de lungime N este văzută ca o singură perioadă a unei secvențe periodice

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] \quad (7.51)$$

Spectrul discret al semnalului $x_p[n]$ este

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} = N c_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.52)$$

și IDFT devine

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{j 2\pi k n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.53)$$

7.2.2. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Fourier a unei secvențe aperiodice

Fie $x[n]$ o secvență aperiodică, de energie finită, cu transformata Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j \omega n} \quad (7.54)$$

Aceasta este eșantionată în N puncte echidistante din întreg intervalul fundamental de pe axa frecvenței $\omega \in [-\pi, \pi]$, obținându-se eșantioanele spectrului

$$X[k] \equiv X(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.55)$$

Componentele spectrale $X[k], k = 0, 1, \dots, N-1$, sunt chiar coeficienții transformatei Fourier discrete ai secvenței periodice $x_p[n]$ obținute prin repetarea periodică a lui $x[n]$, cu perioada N , adică (7.51).

Astfel, $x_p[n]$ se obține din toate alias-urile lui $x[n]$ adunate în intervalul de la 0 la $N-1$.

Dacă $x[n]$ este de durată finită și de lungime $L \leq N$, atunci nu există eroare alias în domeniul timp și

$$x[n] = x_p[n], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.56)$$

În această situație se obține, într-adevăr, $x[n]$ prin aplicarea transformatei Fourier discrete inverse asupra eșantioanelor $X[k]$, unde $k = 0, 1, \dots, N-1$.

7.2.3. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Z

Fie $x[n]$ o secvență care are transformata Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.57)$$

și regiunea sa de convergență include cercul unitate.

Dacă $X(z)$ este eșantionată în puncte echidistante pe cercul unitate, astfel încât punctele de prelevare sunt $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, atunci

$$X[k] \equiv X(z) \Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.58)$$

Membrul drept al ecuației (7.58) este chiar transformata Fourier $X(\omega)$ evaluată la cele N frecvențe echidistante din intervalul fundamental.

Prin urmare, dacă $x[n]$ are o durată N sau mai mică, atunci secvența poate fi reconstituită cu ajutorul DFT în N puncte. În această situație favorabilă se poate determina în mod unic și transformata sa Z, exprimând $x[n]$ cu ajutorul IDFT

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] z^{-n} \quad (7.59)$$

Schimbând ordinea de sumare, rezultă

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi k n}{N}} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k n}{N}} z^{-n} \right] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \left[\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1} \right)^n \right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}
\end{aligned} \tag{7.60}$$

Astfel, $X(z)$ devine

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{j \frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \tag{7.61}$$

Prin urmare, dacă secvența $x[n]$ este de durată finită, atunci transformata sa Z poate fi calculată cu ajutorul eșantioanelor transformatei Z evaluate pe cercul unitate. O formulă analoagă se poate obține și pentru transformata Fourier discretă, prin evaluarea transformatei Z pe cercul unitate

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{1 - e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)}} \tag{7.62}$$

Egalitățile (7.61) și (7.62) sunt formule de interpolare de tip Lagrange și ele exprimă pe $X(\omega)$ în funcție de eșantioanele $X[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, egal distanțate în frecvență.

7.2.4. Relația dintre transformata Fourier discretă și coeficienții seriei Fourier a unui semnal analogic periodic

Fie $x_a(t)$ un semnal periodic definit în timp continuu. Dacă $T_p = \frac{1}{F_0}$ este perioada sa, atunci semnalul se descompune în serie Fourier

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j 2\pi k F_0 t}, \tag{7.63}$$

unde

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j 2\pi k F_0 t} dt \tag{7.64}$$

sunt coeficienții seriei Fourier.

Eșantionând $x_a(t)$ cu o frecvență de eșantionare F_s de N ori mai mare decât fundamentala semnalului periodic

$$F_s = \frac{N}{T_p} = \frac{1}{T} \quad (7.65)$$

se obține semnalul discret

$$x[n] \equiv x_a(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 n T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \quad (7.66)$$

Dar

$$e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k-mN)n}, \quad (7.67)$$

pentru orice $m \in \mathbf{Z}$.

Relația (7.66) poate fi descompusă într-o sumă infinită de sume de câte N termeni

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} = \dots + \sum_{k=-2N}^{-N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=N}^{2N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \\ &+ \sum_{k=2N}^{3N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} + \dots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=mN}^{mN+N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=mN}^{mN+N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N} n(k-mN)} \right] \end{aligned} \quad (7.68)$$

În membrul drept al ultimei egalități se face schimbarea de variabilă $k - mN = p$, apoi se schimbă ordinea de sumare și, în final, se revine la indicele k . Rezultă astfel

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^{N-1} c_{p+mN} e^{j\frac{2\pi}{N}(p+mN)n} \right] = \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{p+mN} \right] e^{j\frac{2\pi}{N} pn} = \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{p+mN} \right] e^{j\frac{2\pi}{N} pn} = \sum_{k=0}^{N-1} c'_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned} \quad (7.69)$$

unde

$$c'_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k-mN} \quad (7.70)$$

este spectrul obținut prin repetarea periodică a spectrului c_k la fiecare N eșantioane, adică este chiar o secvență alias a spectrului c_k .

Pe de altă parte

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.71)$$

În consecință, aplicând transformata Fourier inversă se obține

$$X[k] = N \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k-mN} = N c'_k, \quad (7.72)$$

altfel spus, transformata Fourier discretă furnizează liniile spectrale ale spectrului, afectate însă de efectul alias.

7.2.5. Relația dintre transformata Fourier discretă și transformata Fourier a unui semnal analogic aperiodic

Se consideră un semnal aperiodic $x_a(t)$, de energie finită, a cărui transformată Fourier este $X_a(F)$. Prin eșantionarea sa cu frecvență de eșantionare F_s , se obține semnalul discret

$$x[n] \equiv x_a(nT), \quad (7.73)$$

a cărui transformată Fourier este

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a((F - mF_s)); \quad (7.74)$$

sau, echivalent

$$X(f) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a((f - mF_s)); \quad (7.75)$$

$$X(\omega) = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a((\omega - 2\pi m)F_s) \quad (7.75')$$

Inevitabil, apar efecte alias care pot fi reduse prin prefiltrarea semnalului analogic înainte de eșantionare sau prin eșantionarea cu o frecvență mai înaltă. Dacă spectrul $X(\omega)$ este la rândul său eșantionat la N intervale de frecvență egal distanțate

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.76)$$

atunci

$$\begin{aligned} X[k] &\equiv X(\omega) \Big|_{\omega_k = \frac{2\pi k}{N}} = F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{2\pi k}{N} - 2\pi m\right)F_s\right) = \\ &= F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{kF_s}{N} - mF_s\right)\right), \end{aligned} \quad (7.77)$$

pentru $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Prin urmare, eșantioanele $\{X[k]\}_{k=0,1,\dots,N-1}$ pot fi văzute ca DFT a unei secvențe periodice $x_p[n]$, date de

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n - mN] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(nT - mNT) \quad (7.78)$$

Din relațiile anterioare rezultă că legătura dintre semnalul în timp discret obținut prin eșantionarea unui semnal analogic $x_a(t)$ cu frecvența de eșantionare F_s și spectrul corespunzător eșantionat cu $\frac{F_s}{N}$ este o transformată Fourier discretă în N puncte

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(nT - mNT) \xleftarrow{DFT \text{ in } N \text{ puncte}} F_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left(\left(\frac{kF_s}{N} - mF_s\right)\right) \quad (7.79)$$

Această pereche DFT indică prezența efectelor alias atât în domeniul timp cât și în domeniul frecvență. De asemenea, sugerează eventualele dificultăți ce pot apărea când se dorește calcularea spectrului unui semnal analogic cu ajutorul transformatei Fourier discrete, în funcție de alegerea mărimeilor F_s și N .

7.3. Metode de filtrare liniară bazate pe DFT

În paragraful 7.1 s-a definit transformata Fourier discretă ca versiunea eșantionată a transformantei Fourier $X(\omega)$ pentru secvența de durată finită $x[n]$. Eșantionarea a fost realizată în N frecvențe egal distanțate $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, rezultând

$$X[k] \equiv X(\omega) \Big|_{\omega_k=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.80)$$

Pentru secvența $x[n]$ s-a obținut transformata Fourier discretă

$$\text{DFT:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.81)$$

din care se refac secvența $x[n]$ cu ajutorul transformantei Fourier discrete inverse

$$\text{IDFT:} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.82)$$

Deoarece DFT furnizează o reprezentare discretă în domeniul frecvență a unei secvențe de durată finită, datorită proprietăților sale, ea este folosită ca un instrument de calcul în analiza sistemelor liniare și, în special, în filtrarea liniară.

S-a arătat că, dacă la intrarea unui sistem liniar al cărui răspuns în frecvență este $H(\omega)$ se aplică un semnal al cărui spectru este $X(\omega)$, el produce o ieșire cu spectrul

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (7.83)$$

din care, cu transformata Fourier inversă, se obține

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.84)$$

În această abordare a aflării răspunsului intervin funcții continue de ω . În consecință, aceste calcule nu pot fi realizate cu ajutorul unui calculator numeric, însă, datorită caracterului discret al DFT, această problemă poate fi surmontată. În multe aplicații se urmărește obținerea conoluției liniare a două secvențe, adică se dorește implementarea unui SDLIT care realizează operația de filtrare liniară a secvenței de intrare. Pentru a obține conoluția liniară a celor două secvențe cu ajutorul DFT, trebuie stabilite condițiile în care conoluția circulară produce același rezultat ca și cea liniară. Odată stabilite aceste condiții, implementarea conoluției liniare a două secvențe $x[n]$ și $h[n]$ cu ajutorul DFT se realizează parcurgând următorii pași:

- 1) Se calculează DFT în N puncte $X[k]$ și $H[k]$ pentru cele două secvențe;
- 2) Se calculează produsul $Y[k] = X[k]H[k]$; $0 \leq k \leq N-1$;
- 3) Se calculează $y[n] = x[n] \otimes h[n]$ ca IDFT a lui $Y[k]$, în N puncte.

7.3.1. Folosirea DFT în filtrarea liniară

În paragraful 7.1 s-a arătat că produsul a două DFT este echivalent cu conoluția circulară a secvențelor corespunzătoare din domeniul timp. Aceasta va fi egală cu conoluția liniară a celor două secvențe de lungime finită, în funcție de relația dintre numărul de puncte în care s-a calculat DFT și lungimile celor două secvențe.

Se presupune că secvența de intrare $x[n]$ este de lungime finită, L , și se aplică unui filtru FIR de lungime M , adică

$$\begin{aligned} x[n] &= 0 \quad \text{pentru } n < 0, n \geq L \\ h[n] &= 0 \quad \text{pentru } n < 0, n \geq M \end{aligned} \quad (7.85)$$

unde $h[n]$ este răspunsul la impuls al filtrului. Ieșirea filtrului, $y[n]$, poate fi determinată în domeniul timp cu ajutorul sumei de conoluție

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] \quad (7.86)$$

Deoarece $h[n]$ și $y[n]$ sunt de durată finită, conoluția lor va fi, de asemenea, o secvență de durată finită, de lungime $L+M-1$, produsul $h[k]x[n-k]$ fiind egal cu zero pentru toți k , dacă $n < 0$ și $n > M+L-2$.

Răspunsul în frecvență echivalent relației (7.86) este

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \quad (7.87)$$

$$\text{Dacă } Y[k] = Y(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = X(\omega) \cdot H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.88)$$

$$\text{Atunci} \quad Y[k] = X[k] \cdot H[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.89)$$

unde $\{X[k]\}$ și $\{H[k]\}$ sunt transformatele Fourier discrete ale secvențelor $x[n]$, respectiv, $h[n]$. În paragraful 6.4 s-a arătat că dacă transformată Fourier $Y(\omega)$ a unui semnal discret aperiodic este eșantionată în N puncte echidistante în intervalul fundamental, secvența rezultată reprezintă coeficienții seriei Fourier discrete a semnalului periodic

$$y_p[n] = \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n-mN], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (7.90)$$

Din (7.89) rezultă

$$y_p[n] = x[n] \otimes h[n] \quad (7.91)$$

Conform relației (7.90), se observă cum conoluția circulară a două secvențe de lungime finită este echivalentă cu conoluția liniară a secvențelor în condiții de suprapunere a eșantioanelor (eroare alias) în domeniul timp, datorită periodicității. De notat că dacă N este mai mare decât L și M , $X[k]$ și $H[k]$ reprezintă exact pe $x[n]$ și $h[n]$, în schimb $y_p[n]$ va fi egal cu $y[n]$ pentru toți n , numai dacă N este mai mare sau egal cu lungimea secvenței $y[n]$, adică $L+M-1$.

Dacă secvența $y[n]$ poate fi reprezentată unic în domeniul frecvență prin eșantionarea spectrului $Y(\omega)$ într-un set de frecvențe discrete, numărul eșantioanelor distincte trebuie să fie egal sau să depășească $L+M-1$. Așadar, pentru a reprezenta $y[n]$ în domeniul frecvență, este necesar ca DFT să fie de dimensiune $N \geq L+M-1$.

Deoarece secvențele $x[n]$ și $h[n]$ au durata mai mică decât N , ele se completează cu eșantioane egale cu zero până la N . Această creștere a lungimii secvențelor nu modifică spectrele $X(\omega)$ și $H(\omega)$, care sunt continue pentru secvențe aperiodice. Prin eșantionarea spectrului în N puncte echidistante, s-a crescut numărul de eșantioane ce reprezintă secvențele în domeniul frecvență față de numărul minim L sau M .

Deoarece numărul $N = L+M-1$ în care se calculează transformata Fourier discretă a ieșirii este suficient pentru a reprezenta $y[n]$ în domeniul frecvență, rezultă că multiplicarea, conform relației

(7.89), a transformatorilor Fourier discrete $X[k]$ și $H[k]$, calculate în N puncte, urmată de transformata Fourier discretă inversă trebuie să aibă drept rezultat secvența $y[n]$. Acest lucru implică echivalența dintre convoluția circulară în N puncte a secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ și convoluția liniară a secvențelor $x[n]$ și $h[n]$.

Cu alte cuvinte, crescând lungimile secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ la N puncte (prin completarea cu zerouri), efectuând convoluția circulară a secvențelor rezultate, și apoi transformarea inversă, se obține același rezultat ca în cazul convoluției liniare. În aceste condiții, transformata Fourier discretă poate fi folosită în realizarea filtrării liniare.

Exemplul 7.3.

Folosind DFT și IDFT să se determine răspunsul filtrului FIR, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n] = \{1, 2, 3\}$ la intrarea $x[n] = \{1, 2, 2, 1\}$.

Soluție. $L = 4$, $M = 3$. Convoluția liniară conduce la o secvență de lungime $N = L + M - 1 = 6$, ceea ce înseamnă că mărimea DFT-urilor trebuie să fie de cel puțin 6. În practică, metodele numerice folosite în calculul DFT impun ca N să fie o putere întreagă a lui 2 (cerință impusă de algoritmii FFT de calcul ai DFT). Cea mai mică putere întreagă a lui 2 mai mare sau egală cu 6 este $N = 8$.

$$X[k] = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/4} + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + e^{-j3\pi k/4}, \quad k = \overline{0, 7}$$

de unde

$$X[0] = 6; \quad X[1] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}; \quad X[2] = -1 - j;$$

$$X[3] = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$$

$$X[4] = 0; \quad X[5] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} - j \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}; \quad X[6] = -1 + j;$$

$$X[7] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} + j \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$$

pentru $H[k]$ se obține

$$H[k] = \sum_{n=0}^7 h[n] e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2e^{-j\pi k/4} + 3e^{-j\pi k/2}$$

de unde

$$\begin{aligned} H[0] &= 6; & H[1] &= 1 + \sqrt{2} - j(3 + \sqrt{2}); & H[2] &= -2 - j2; \\ H[3] &= 1 - \sqrt{2} + j(3 - \sqrt{2}) \\ H[4] &= 2; & H[5] &= 1 - \sqrt{2} - j(3 - \sqrt{2}); & H[6] &= -2 + j2; \\ H[7] &= 1 + \sqrt{2} + j(3 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Efectuând produsul $Y[k] = H[k]X[k]$, rezultă

$$\begin{aligned} Y[0] &= 36; & Y[1] &= -14,07 - j17,48; & Y[2] &= j4; & Y[3] &= 0,07 + j0,515 \\ Y[4] &= 0; & Y[5] &= 0,07 - j0,515; & Y[6] &= -j4; & Y[7] &= -14,07 + j17,48 \end{aligned}$$

Cu ajutorul IDFT, se obține

$$y[n] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 Y[k] e^{j2\pi kn/8}, \quad n = \overline{0,7}$$

adică, $y[n] = \{1,4,9,11,8,3,0,0\}$.

Deși multiplicarea a două DFT corespunde conoluției circulare în domeniul timp, se observă că prin completarea secvențelor $x[n]$ și $h[n]$ cu un număr suficient de zerouri, conoluția circulară conduce la același rezultat ca și conoluția liniară.

Dacă în exemplul anterior se efectuează conoluția circulară dintre

$$h[n] = \{1,2,3,0,0,0\} \quad \text{și}$$

$$x[n] = \{1,2,2,1,0,0\}$$

$$\text{se obține } y[n] = \sum_{k=0}^5 h[k] x[(n-k)_{\text{mod } 6}]$$

adică, $y[n] = \{1,4,9,11,8,3\}$.

Dacă $N \geq L + M - 1$, nu apare suprapunere (eroare alias) în domeniul timp, în caz contrar, secvența rezultată va conține suprapunerile ale unor componente.

Exemplul 7.4.

Să se repete exemplul 1, pentru $N=4$.

$$H[k] = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 3e^{-j\pi k}, \quad k = \overline{0,3}$$

de unde

$$H[0] = 6; \quad H[1] = -2 - j2; \quad H[2] = 2; \quad H[3] = -2 + j2.$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j2\pi kn/4} = 1 + 2 \cdot e^{-j\pi k/2} + 2 \cdot e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}$$

$$X[0] = 6; \quad X[1] = -1 - j; \quad X[2] = 0; \quad X[3] = -1 + j.$$

$\hat{Y}[k] = X[k]H[k]$, de unde

$$\hat{Y}[0] = 36; \hat{Y}[1] = j4; \hat{Y}[2] = 0; \hat{Y}[3] = -j4$$

Aplicând IDFT, se obține

$$\hat{y}[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \hat{Y}[k] e^{j2\pi kn/4} = \frac{1}{4} (36 + j4e^{j\pi n/2} - j4e^{j3\pi n/2})$$

adică, $\hat{y}[n] = \{9, 7, 9, 11\}$.

$$\text{Se verifică faptul că } h[n] \odot x[n] = \sum_{k=0}^3 h[k] x[(n-k)_{\text{mod } 4}] = \{9, 7, 9, 11\}.$$

Dacă se compară rezultatul $\hat{y}[n]$ obținut prin folosirea DFT și IDFT în 4 puncte cu $y[n]$ obținut prin folosirea DFT și IDFT în 8 puncte se observă diferențe datorită suprapunerilor sau interferenței componentelor.

$$\hat{y}[0] = y[0] + y[4] = 9$$

$$\hat{y}[1] = y[1] + y[5] = 7$$

$$\hat{y}[2] = y[2] = 9$$

$$\hat{y}[3] = y[3] = 11$$

Se observă că numai primele două componente sunt afectate de eroare alias, adică $\min\{L, M\} - 1$ componente.

7.3.2. Filtrarea secvențelor lungi de date

În paragraful precedent s-a prezentat procedura de obținere a răspunsului unui sistem cu răspuns finit la impuls la o intrare de lungime finită, adică a convoluçãoiei liniare cu ajutorul DFT. În aplicațiile practice care implică filtrarea liniară, secvențele de intrare $x[n]$ sunt de obicei foarte lungi. Chiar dacă teoretic s-ar putea stoca aceste secvențe, folosirea metodei descrise anterior ar implica calculul DFT într-un număr foarte mare de puncte, ceea ce nu este de obicei practicabil, datorită algoritmilor FFT folosiți în calculul DFT. Un alt motiv pentru care metoda anterioară nu este folosită este acela că prin recepționarea întregii secvențe de intrare se introduc întârzieri mari în răspuns, lucru care, în general, este de evitat. Soluția la aceste probleme este oferită de *convoluția bloc*, în care semnalul ce trebuie prelucrat este înpărțit în blocuri de lungime fixă, în funcție de disponibilitățile procesorului. Blocurile succesive sunt prelucrate cu ajutorul DFT, iar ieșirile sunt "alăturate" pentru a forma secvența totală de ieșire.

Există două metode de filtrare liniară a secvențelor lungi, bloc cu bloc, cu ajutorul DFT:

- metoda cu suprapunere și sumare;
- metoda cu suprapunere și salvare.

Pentru ambele metode se presupune că sistemul căruia se aplică datele este cauzal, cu răspuns finit la impuls, de lungime M , iar secvența de intrare cauzală este împărțită în blocuri de lungime L , cu $L >> M$.

Metoda cu suprapunere și sumare

Secvența de intrare poate fi reprezentată ca o sumă de secvențe, fiecare de lungime L

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \quad (7.92)$$

$$\text{unde } x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (7.93)$$

Deoarece conoluția este o operație liniară, invariantă în timp, rezultă că

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (7.94)$$

$$\text{unde } y_r[n] = x_r[n] * h[n] \quad (7.95)$$

Fiecare din termenii $y_r[n]$ are lungimea $(L+M-1)$, ceea ce înseamnă că, pentru a calcula conoluția liniară $x_r[n] * h[n]$ cu ajutorul DFT în N puncte, este necesar ca $N \geq L + M - 1$. Pentru aceasta, răspunsul la impuls se completează cu $L-1$ zerouri, iar blocurile de date cu $M-1$ zerouri, obținându-se

$$x'_1[n] = \{x[0], x[1], x[2], \dots, x[L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.96)$$

$$x'_2[n] = \{x[L], x[L+1], x[L+2], \dots, x[2L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.97)$$

$$x'_3[n] = \{x[2L], x[2L+1], x[2L+2], \dots, x[3L-1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M-1 \text{ zerouri}}\} \quad (7.98)$$

și așa mai departe. Împărțirea datelor de intrare în blocuri și combinarea blocurilor de date de ieșire este ilustrată în figura 7.3.

Cele două transformate Fourier discrete ale secvențelor $x[n]$ și $h[n]$, completate cu zerouri până la N , se multiplică pentru a forma

$$Y_m[k] = H[k]X'_m[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7.99)$$

Transformata Fourier discretă inversă a lui $Y_m[k]$ produce blocul $y_m[n]$ de lungime N , fără eroare alias, deoarece fiecare din secvențe a fost crescută până la N puncte prin adăugarea de zerouri.

Deoarece fiecare bloc de date se termină cu $M-1$ zerouri, ultimele $M-1$ puncte din fiecare bloc de ieșire trebuie suprapuse și sumate cu primele $M-1$ puncte ale blocului următor pentru a obține suma din (7.94), de unde și numele metodei. Secvența de ieșire va fi

$$y[n] = \{y_1[0], y_1[1], \dots, y_1[L-1], y_1[L] + y_2[0], y_1[L+1] + y_2[1], \dots, y_1[N-1] + y_2[M-1], y_2[M], y_2[M+1], \dots\} \quad (7.100)$$

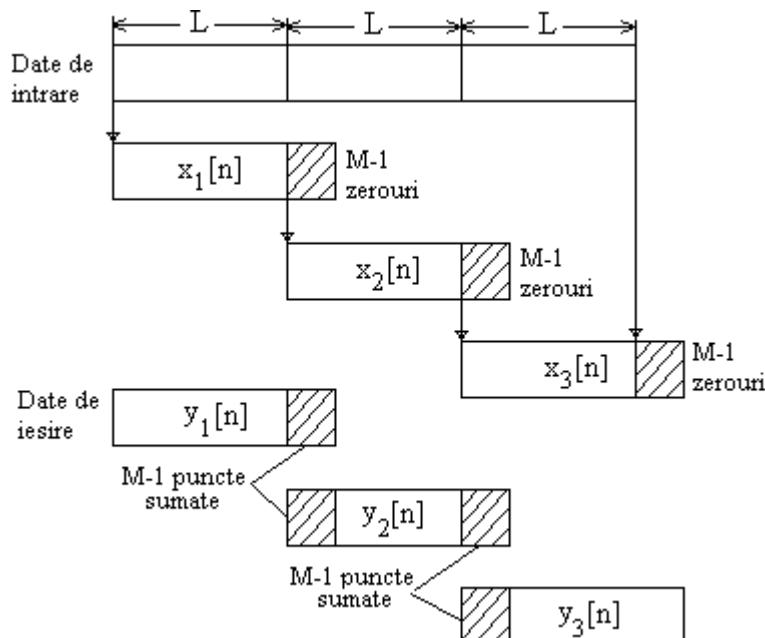


Figura 7.3. Filtrare liniară prin metoda cu suprapunere și sumare

Medoda cu suprapunere și salvare

Și în această metodă DFT și IDFT se calculează în $N = L + M - 1$ puncte. Mărimea blocului de date de intrare se crește până la $N = L + M - 1$. Fiecare bloc de date conține ultimele $M-1$ eșantioane ale blocului precedent de date, urmate de L eșantioane noi de date, pentru a forma secvența de lungime $N=L+M-1$.

Se calculează DFT în N puncte pentru fiecare bloc de date. Răspunsul la impuls al filtrului FIR este crescut în lungime prin adăugarea a $L-1$ zerouri și apoi se calculează DFT, iar secvența obținută este stocată.

Multiplicarea a două DFT în N puncte $\{H[k]\}$ și $\{X_m[k]\}$ pentru blocul "m" de date are ca rezultat

$$\hat{Y}_m[k] = H[k]X_m[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.101)$$

Apoi, prin calcularea IDFT în N puncte, rezultă

$$\hat{y}_m[n] = \{\hat{y}_m[0], \hat{y}_m[1], \dots, \hat{y}_m[M-1], \hat{y}_m[M], \dots, \hat{y}_m[N-1]\} \quad (7.102)$$

Acesta corespunde conoluției circulare a lui $x_m[n]$ și $h[n]$. Deoarece datele au lungimea N, iar răspunsul la impuls, lungimea M, primele $\min\{N, M\} - 1 = M - 1$ puncte $\hat{y}_m[n]$ sunt afectate de eroare alias și nu trebuie considerate. Ultimele L puncte ale lui $\hat{y}_m[n]$ sunt exact cele rezultate din conoluția liniară și, în consecință,

$$\hat{y}_m[n] = y_m[n], \quad \text{pentru } n = M, M+1, \dots, N-1 \quad (7.103)$$

Ultimele M-1 puncte ale fiecărei secvențe de intrare sunt salvate și acestea devin primele M-1 puncte ale secvenței următoare. La începerea procesării, primele M-1 puncte ale primului bloc de date sunt considerate zero. Astfel, blocurile de date sunt de forma

$$x_1[n] = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{M-1 \text{ puncte}}, \underbrace{x[0], x[1], \dots, x[L-1]\}} \quad (7.104)$$

$$x_2[n] = \underbrace{\{x[L-M+1], \dots, x[L-1]\}}_{\substack{M-1 \text{ puncte din datele} \\ \text{secvenței } x_1[n]}}, \underbrace{\{x[L], x[L+1], \dots, x[2L-1]\}}_{\substack{L \text{ date noi}}}} \quad (7.105)$$

$$x_3[n] = \underbrace{\{x[2L-M+1], \dots, x[2L-1]\}}_{\substack{M-1 \text{ puncte din datele} \\ \text{secvenței } x_2[n]}}, \underbrace{\{x[2L], x[L+1], \dots, x[3L-1]\}}_{\substack{L \text{ date noi}}} \quad (7.106)$$

și aşa mai departe.

Secvențele de date rezultate prin IDFT sunt date de (7.102), unde primele M-1 puncte nu sunt luate în calcul datorită erorii alias produse de acestea, iar cele L puncte rămase constituie rezultatul dorit din conoluția liniară. Operațiile de segmentare a datelor de intrare și concatenare a blocurilor obținute la ieșire pentru obținerea secvenței de ieșire sunt ilustrate în figura 7.4.

Din descrierea metodelor anterioare de filtrare a secvențelor lungi de date ar putea părea că folosirea DFT nu este numai o metodă indirectă, ci și una care presupune efectuarea multor calcule, deoarece datele de intrare trebuie transformate în domeniul frecvență cu ajutorul DFT, apoi multiplicate cu DFT a răspunsului la impuls al filtrului, iar în final rezultatul trebuie transformat în domeniul timp cu ajutorul IDFT.

Utilizând însă algoritmi rapizi de calcul ai DFT și IDFT, efortul de calcul este inferior celui necesar calculării secvenței de ieșire prin realizarea directă a sistemului FIR în domeniul timp (suma de conoluție). După cum s-a mai menționat, dacă $w_N = e^{-j2\pi/N}$, atunci

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

și

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] w_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (7.107)$$

Calcularea directă a lui $X[k]$ necesită N multiplicări complexe ($4N$ reale), $N-1$ adunări complexe ($4N-2$ reale), în total fiind necesare N^2 multiplicări complexe și $N^2 - N$ adunări complexe. Există două proprietăți de simetrie și periodicitate care reduc substanțial complexitatea calculelor. Acestea sunt:

$$w_N^{k+N/2} = -w_N^k \quad (7.108)$$

$$w_N^{k+N} = w_N^k \quad (7.109)$$

Transformata Fourier rapidă este un algoritm rapid de calcul pentru DFT, care folosește aceste proprietăți.

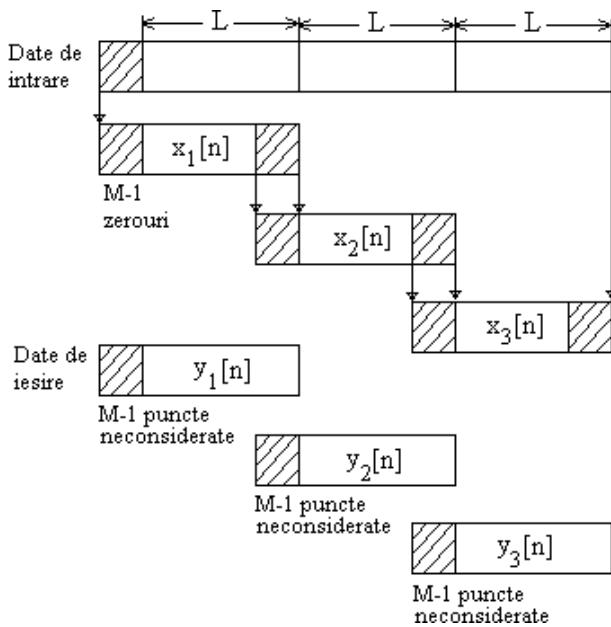


Figura 7.4. Filtrare liniară prin metoda cu suprapunere și salvare

7.4. Probleme propuse

7.1. Să se calculeze transformata Fourier discretă în N puncte pentru semnalele:

- a) $x[n] = \delta[n];$
- b) $x[n] = \delta[n - n_0], \quad 0 < n_0 < N;$
- c) $x[n] = a^n, \quad 0 \leq n \leq N-1;$
- d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 15 \end{cases};$
- e) $x[n] = e^{j(2\pi/N)k_0 n}, \quad 0 \leq n \leq N-1;$
- f) $x[n] = \cos \frac{2\pi}{N} k_0 n, \quad 0 \leq n \leq N-1;$
- g) $x[n] = \sin \frac{2\pi}{N} k_0 n, \quad 0 \leq n \leq N-1.$

7.2. Se consideră semnalul cu durată finită $x[n] = \{1, 2, 3, 1\}$

- a) să se calculeze transformata Fourier discretă în patru puncte prin rezolvarea sistemului de 4 ecuații liniare cu 4 necunoscute definit de formula transformatei Fourier discrete inverse;
- b) să se verifice rezultatul de la punctul a) prin calcularea DFT în 4 puncte, conform definiției.

7.3. a) Să se calculeze transformata Fourier $X(\omega)$ a semnalului

$$x[n] = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 0\}$$

b) Să se calculeze DFT în 6 puncte, $V(k)$, a semnalului

$$v[n] = \{3, 2, 1, 0, 1, 2\}$$

c) Care este legătura dintre $X(\omega)$ și $V(k)$? Să se explice.

7.4. Primele 5 valori ale transformatei Fourier discrete în 8 puncte a unei secvențe reale sunt $\{0.25, 0.125 - j0.3018, 0, 0.125 - j0.0518, 0\}$. Să se determine celelalte 3 valori.

7.5. Să se calculeze convoluția circulară în 8 puncte pentru secvențele următoare:

a) $x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$

$$x_2[n] = \sin \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7;$$

$$\text{b) } x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

$$x_2[n] = \cos \frac{3\pi}{8} n, \quad 0 \leq n \leq 7$$

7.6. Se dau secvențele:

$$x_1[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n \quad x_2[n] = \sin \frac{2\pi}{N} n \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Să se determine, în N puncte:

- a) convoluția circulară $x_1[n] \circledast x_2[n]$;
- b) corelația circulară dintre $x_1[n]$ și $x_2[n]$;
- c) autocorelația circulară a lui $x_1[n]$;
- d) autocorelația circulară a lui $x_2[n]$.

7.7. Să se calculeze expresia $\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] x_2^*[n]$

pentru următoarele perechi de secvențe:

- a) $x_1[n] = x_2[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad 0 \leq n \leq N-1$;
- b) $x_1[n] = \cos \frac{2\pi}{N} n, \quad x_2[n] = \sin \frac{2\pi}{N} n, \quad 0 \leq n \leq N-1$;
- c) $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-8], \quad x_2[n] = u[n] - u[n-N]$.

7.8. Să se determine DFT-ul în N puncte pentru secvențele:

$$x_c[n] = x[n] \cos \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

și

$$x_s[n] = x[n] \sin \frac{2\pi kn}{N}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

7.9. Să se determine convoluția circulară a secvențelor

$$x_1[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 3 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 1 & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 2 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 3 & \text{if } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 1 & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

7.10. Să se determine $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ cu ajutorul DFT și IDFT în patru puncte, unde $x_1[n]$ și $x_2[n]$ sunt secvențele din problema anterioară.

7.11. Cunoscând DFT-ul în opt puncte a secvenței

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

să se calculeze DFT pentru următoarelor secvențe:

a) $x_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 7 \end{cases}$

b) $x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & 2 \leq n \leq 5 \\ 0, & 6 \leq n \leq 7 \end{cases}$

7.12. Fie $X[k]$ transformata Fourier discretă în N puncte a secvenței $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$. Care este DFT în N puncte a secvenței $s[n] = X[n]$, $0 \leq n \leq N-1$?

7.13. Unui sistem liniar invariant în timp cu răspunsul în frecvență $H(\omega)$ i se aplică la intrare semnalul periodic $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$. Se calculează DFT-ul $Y[k]$ din eșantioanele $y[n]$, $0 \leq n \leq N-1$, ale secvenței de ieșire. Care este legătura dintre $Y[k]$ și $H(\omega)$.

CAPITOLUL 4

STRUCTURI PENTRU IMPLEMENTAREA SISTEMELOR DISCRETE

Acest capitol este dedicat implementării sistemelor discrete, liniare, invariante în timp. Există diferite configurații de structuri pentru implementarea sistemelor discrete cu răspuns finit (FIR) și infinit la impuls (IIR), dintre care se vor prezenta formele directe, structurile în cascadă, în paralel și cele lattice, ce prezintă robustețe la implementarea cu aritmetică finită. De asemenea, este descrisă în acest capitol implementarea în domeniul frecvență a unui sistem FIR, care are avantajul de a fi eficient din punct de vedere al calculelor, față de alte implementări pentru sistemele FIR.

O parte semnificativă a acestui capitol se referă la descrierea sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, în spațiul stărilor. Este prezentată, de asemenea, o analiză a sistemelor caracterizate cu ajutorul variabilelor de stare.

4.1. Considerații asupra implementării sistemelor discrete

Sistemele discrete, liniare, invariante în timp sunt caracterizate de ecuația cu diferențe cu coeficienți constanti descrisă de relația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.1)$$

O astfel de clasă de sisteme liniare invariante în timp sunt caracterizate de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.2)$$

Cu ajutorul ultimei caracterizări, se obțin zerourile și polii funcției de transfer, care depind de alegerea parametrilor sistemului $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ și care determină răspunsul în frecvență al sistemului.

În acest capitol se vor prezenta diferite metode de implementare a relațiilor (4.1) sau (4.2), care depind de forma în care aceste două caracterizări sunt aranjate. În general, relația (4.1) poate fi privită ca o procedură de calcul (un algoritm) pentru determinarea secvenței de ieșire $y[n]$ a sistemului, cunoscând secvența de intrare la momentele $n, n-1, n-M$ și condițiile inițiale pentru sistem [63]. Relația (4.1) poate fi aranjată într-un set echivalent de ecuații cu diferențe. Fiecare set de ecuații definește o procedură de calcul sau un algoritm pentru implementarea sistemului. Pentru fiecare set de ecuații se poate construi o diagramă bloc constând din interconexiuni de elemente de întârziere, elemente de multiplicare și sumare. Având în vedere cele prezentate, ar putea apărea întrebarea de ce nu sunt implementate direct cele două relații și ce beneficii decurg din rearanjarea acestora în diverse moduri. În acest capitol se urmărește să se răspunde la această întrebare, ținând cont că factorii importanți care determină alegerea unei structuri particulare sunt complexitatea calculului, necesarul de memorie și efectele lungimii finite a cuvintelor asupra performanțelor sistemului.

Complexitatea calculului se referă la numărul de operații aritmetice (în general, multiplicări și sumări) necesare pentru a calcula o valoare de ieșire $y[n]$ a sistemului.

Memoria necesară se referă la numărul de locații de memorie necesare pentru a stoca parametrii de sistem, intrări anterioare, ieșiri anterioare și orice valori intermediare necesare.

Efectele lungimii finite a cuvintelor sau efectele de precizie finită se referă la efectele de cuantizare ce sunt prezente în orice implementare digitală a sistemului, fie ea hardware sau software. Parametri unui sistem trebuie reprezentați cu precizie finită. Calculele care sunt executate în procesul de obținere a valorii unei ieșiri din sistem trebuie neapărat rotunjite sau trunchiate adecvat în limita preciziei date de calculator. Un alt considerent ce trebuie avut în vedere este tipul de aritmetică folosit, virgulă fixă sau mobilă. Toate aceste probleme sunt uzuale denumite *efectele lungimii finite a cuvintelor* și sunt extrem de importante, având influență în alegerea modului de implementare a unui sistem. Se va observa că diferite structuri de sistem, care sunt echivalente pentru precizie infinită, prezintă o comportare diferită, când mărimile care caracterizează sistemul sunt reprezentate cu precizie finită. Prin urmare,

este foarte important în practică a selecta o implementare care nu este foarte sensibilă la efectele lungimii finite a cuvintelor.

Deși factorii majori prezentați mai sus influențează alegerea modului de implementare a unui sistem, mai există și alți factori, destul de importanți, cum ar fi timpul necesar furnizării mărimii de interes. În acest sens, posibilitatea de procesare în paralel sau “pipeline”, poate juca un rol important în alegerea modului de implementare a sistemului.

În analiza de față a structurilor de implementare a sistemelor discrete, se vor avea în vedere cei trei factori importanți prezentați mai sus. Ocazional, vor fi incluși unii factori suplimentari care pot fi de o importanță majoră în unele implementări. În particular, în acest capitol se va urmări complexitatea calculelor și memoria necesară.

4.2. Implementarea sistemelor cu răspuns finit la impuls

Pentru a păstra unitatea de notații cu Capitolul 2, se consideră că, în general, un sistem FIR este descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n-k] \quad (4.3)$$

sau, echivalent, prin funcția de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] z^{-k} \quad (4.4)$$

Răspunsul la impuls al unui sistem FIR este identic cu coeficienții b_n , prin urmare, se poate scrie

$$h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.5)$$

În continuare se vor prezenta diferite metode de implementare a unui sistem FIR, începând cu cea mai simplă structură, numită *forma directă*. O a doua structură este forma în *cascadă*. A treia structură care va fi prezentată este cea cu *eșantionare în frecvență*. În final, se va prezenta structura *lattice*.

4.2.1. Implementarea în forma directă

Aceasta implementare rezultă imediat din ecuația cu diferențe nerecursivă dată de relația (4.3) sau, echivalent, prin suma de conoluție

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \quad (4.6)$$

Structura care implementează această relație este ilustrată în figura 4.1. Se observă că această structură necesită $M-1$ locații de memorie pentru cele $M-1$ intrări anterioare, și are o complexitate de M multiplicări și $M-1$ sumări pentru fiecare ieșire. Deoarece ieșirea constă dintr-o combinație liniară a intrării curente și a $M-1$ valori anterioare ale acesteia, structura din figura 4.1. reprezintă o *linie de întârziere* sau un *sistem transversal*. Din această cauză forma directă de implementare este adesea numită *filtru transversal* sau *filtru cu linie de întârziere*.

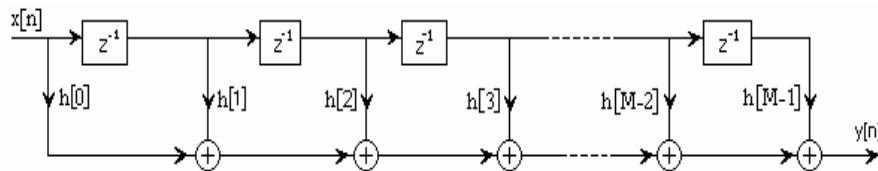


Fig. 4.1. Forma directă de implementare a sistemului FIR

În Capitolul 2 s-a arătat că răspunsul la impuls al unui sistem FIR de fază liniară satisfacă condiția

$$h[n] = \pm h[M-1-n] \quad (4.7)$$

Pentru un astfel de sistem numărul de multiplicări este redus de la M la $M/2$ pentru M par și la $(M+1)/2$ pentru M impar. În figura 4.2 este ilustrată posibilitatea de implementare a unui sistem FIR cu fază liniară pentru M impar.

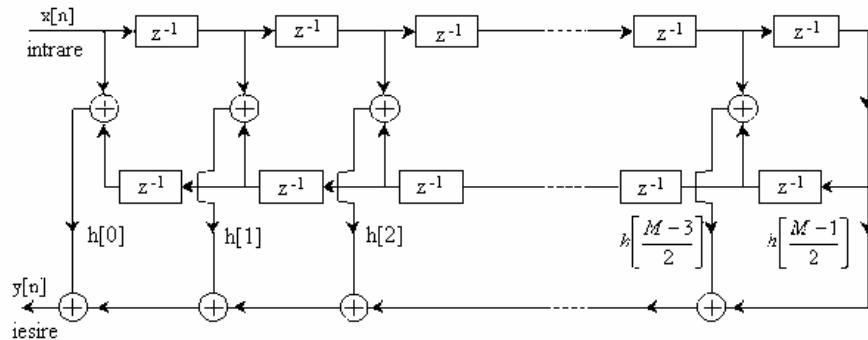


Figura 4.2. Forma directă de implementare a unui sistem FIR de fază liniară cu M impar

4.2.2. Implementarea în cascadă

Implementarea în cascadă presupune scrierea funcției de sistem dată de relația (4.4) sub forma unui produs de factori $H_k(z)$, $k = \overline{1, K}$.

$$H(z) = G \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (4.8)$$

unde, în cazul implementării cu module de ordinul doi,

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.9)$$

K fiind partea întreagă a lui $(M+1)/2$. Factorul de câștig G ar putea fi egal distribuit între cele K secțiuni ale filtrului, astfel că $G = G_1 G_2 \dots G_K$. Zerourile lui $H(z)$ sunt grupate în perechi ce produc sistemele de ordin doi de tip FIR caracterizate de relația (4.9). Întotdeauna se dorește a grupa perechi de rădăcini complex-conjugate astfel încât coeficienții $\{b_{ki}\}$, $i = 1, 2$, din relația (4.9) să fie reali. Rădăcinile reale pot fi împerecheate în orice manieră. Implementarea în cascadă cu secțiunea de bază de ordin doi este indicată în figura 4.3.

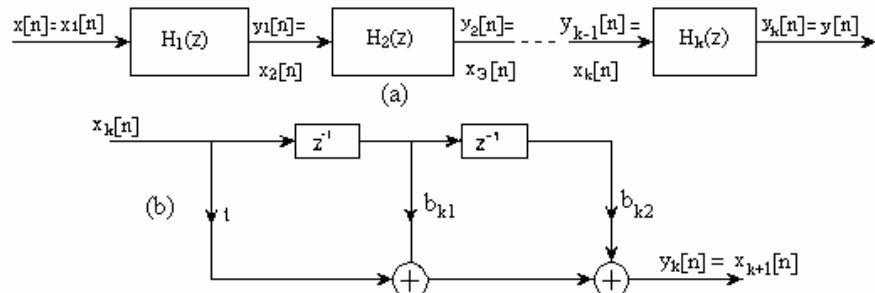


Figura 4.3. a) Realizarea în cascadă a unui sistem FIR, b) o secțiune de filtru FIR de ordinul doi

În cazul filtrelor FIR de fază liniară, simetria în $h[n]$ implică faptul că zerourile lui $H(z)$ prezintă, de asemenea, o formă de simetrie. În particular, dacă z_k și z_k^* sunt o pereche de zerouri complex-conjugate atunci $1/z_k$ și $1/z_k^*$ sunt, de asemenea, o pereche de zerouri complex-conjugate. Prin urmare, se obțin câteva simplificări formând secțiuni de ordinul patru pentru un sistem FIR, după cum urmează:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z^{-1}/z_k)(1 - z^{-1}/z_k^*) \\ &= 1 + c_{k1}z^{-1} + c_{k2}z^{-2} + c_{k3}z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \quad (4.10)$$

unde coeficienții $\{c_{k1}\}$ și $\{c_{k2}\}$ sunt funcții de zerourile z_k . Astfel, combinând cele două perechi de zerouri, pentru a forma o secțiune de ordin patru, numărul de multiplicări se reduce de la patru la două (cu un factor de 50%). Figura 4.4 ilustrează structura de bază a filtrului FIR cu funcția de sistem (4.10).

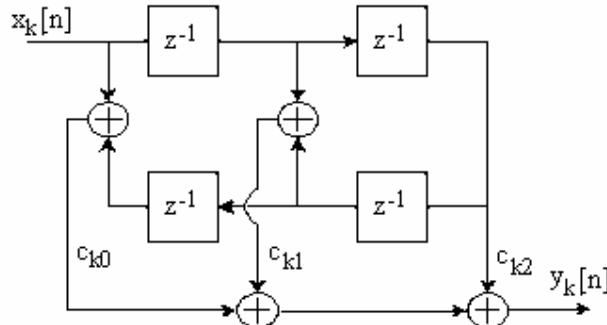


Figura 4.4. Secțiune de ordinul 4 în realizarea în cascadă a unui filtru FIR de fază liniară

4.2.3. Implementarea structurii cu eşantionare în frecvență

În implementarea cu eşantionare în frecvență a unui filtru FIR, parametrii ce caracterizează filtrul sunt valori ale răspunsului în frecvență dorit, în loc de răspunsul la impuls $h[n]$. Pentru a prezenta acest tip de structură se reamintește că răspunsul în frecvență dorit poate fi specificat pentru un anumit set de frecvențe egal depărtate, și anume:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), \quad \alpha = 0 \text{ sau } \frac{1}{2}$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar}$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2}-1, \quad M \text{ par}$$

Se alege $\alpha = \frac{1}{2}$ când răspunsul în frecvență în origine nu poate fi specificat, din motivele prezentate în paragraful 2.5. Dacă răspunsul în frecvență se exprimă sub formă

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n},$$

atunci valorile lui $H(\omega)$ la frecvențele $\omega_k = (2\pi/M)(k + \alpha)$ sunt

$$H(k + \alpha) = H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M}, k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.11)$$

Cazul $\alpha = 0$ corespunde transformatei Fourier discrete (DFT) în M puncte a secvenței $\{h[n]\}$.

Din relația (4.11) rezultă

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.12)$$

Pentru $\alpha = 0$, $\{h[n]\}$ reprezintă transformata Fourier discretă inversă (IDFT) a lui $\{H(k)\}$. Dacă se înlocuiește expresia lui $h[n]$ în expresia funcției de sistem, se obține

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha)e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \right] z^{-n} \quad (4.13)$$

Schimbând ordinea de sumare în (4.13), se obține

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H(k + \alpha) \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} (e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1})^n \right] = \\ &= \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Astfel, funcția de sistem, $H(z)$, este caracterizată de setul de eșantioane în frecvență $\{H(k + \alpha)\}$. Acest filtru FIR poate fi privit ca o cascadă de două filtre, $H(z) = H_1(z)H_2(z)$. Unul dintre ele este un filtru pieptene, cu funcția de sistem

$$H_1(z) = \frac{1}{M} (1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}) \quad (4.15)$$

Zerourile sale sunt poziționate în puncte egale depărtate pe cercul unitate

$$z_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Al doilea filtru, cu funcția de sistem

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k + \alpha)}{1 - e^{j2\pi(k+\alpha)/M} z^{-1}} \quad (4.16)$$

constă dintr-un banc paralel de filtre cu un singur pol

$$p_k = e^{j2\pi(k+\alpha)/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

Se observă că poziționarea polilor este identică cu poziționarea zerourilor și ambele apar la $\omega_k = 2\pi(k + \alpha)/M$, care sunt frecvențele la

care este specificat răspunsul în frecvență dorit. Acest tip de implementare este ilustrat în figura 4.5.

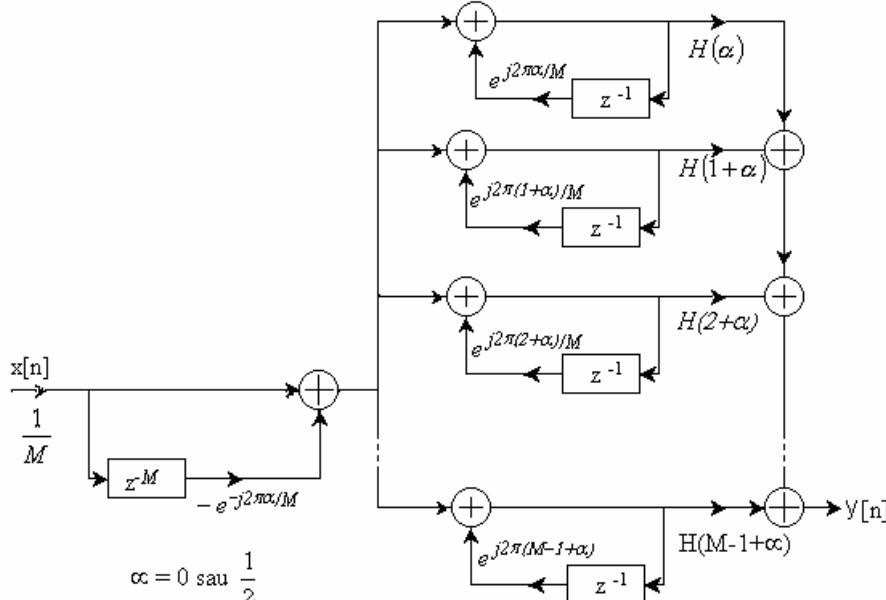


Figura 4.5. Implementarea cu eșantionare în frecvență pentru filtre FIR

Când caracteristica răspunsului în frecvență a filtrului FIR este de bandă îngustă, mulți dintre factorii de câstig $\{H(k + \alpha)\}$ vor fi zero. Prin urmare, filtrele rezonante corespunzătoare pot fi eliminate, reținându-se doar filtrele cu câstig nenul. Rezultatul este un filtru care necesită un număr mai mic de calcule (multiplicări și adunări) față de implementarea în formă directă, obținându-se astfel o implementare mult mai eficientă. În cazul când răspunsul la impuls este real, structura cu eșantionare în frecvență poate fi simplificată și mai mult, ținând seama de simetria în $H(k + \alpha)$, și anume, $H(k) = H^*(M - k)$ pentru $\alpha = 0$ și $H\left(k + \frac{1}{2}\right) = H^*\left(M - k - \frac{1}{2}\right)$ pentru $\alpha = \frac{1}{2}$. Aceste relații se deduc ușor din relația (4.11). Ca rezultat al acestei simetrii, o pereche de filtre cu un singur pol pot fi combinate pentru a forma un filtru cu doi poli cu coeficienți reali. Astfel, pentru $\alpha = 0$ funcția de transfer $H_2(z)$ se reduce la

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M-1)/2} \frac{A(k) + B(k)z^{-1}}{1 - 2 \cos(2\pi k / M)z^{-1} + z^{-2}}, \quad M \text{ impar} \quad (4.17)$$

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1-z^{-1}} + \frac{H(M/2)}{1+z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(M/2)-1} \frac{A(k)+B(k)z^{-1}}{1-2\cos(2\pi k/M)z^{-1}+z^{-2}}, \quad M \text{ par} \quad (4.17')$$

unde

$$\begin{aligned} A(k) &= H(k) + H(M-k) \\ B(k) &= H(k)e^{-j2\pi k/M} + H(M-k)e^{j2\pi k/M} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Expresii similare se pot obtine și pentru $\alpha = \frac{1}{2}$.

Exemplul 4.1.

Să se deseneze diagrama bloc pentru implementarea formei directe și cea cu eșantionare în frecvență, pentru $M = 32$ și $\alpha = 0$, pentru filtrul FIR de fază liniară, cu funcția de transfer

$$H\left(\frac{2\pi k}{32}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 3 \\ 0, & k = 4, 5, \dots, 15 \end{cases}$$

Să se compare complexitatea calculului pentru aceste două structuri.

Soluție. Deoarece filtrul este de fază liniară, răspunsul său la impuls prezintă o formă de simetrie care va conduce, în cazul implementării în forma directă, la reducerea numărului de multiplicări cu un factor de 2, adică de la 32 la 16. Numărul de sumatoare este 31. Diagrama bloc a formei directe de implementare este ilustrată în figura 4.6.

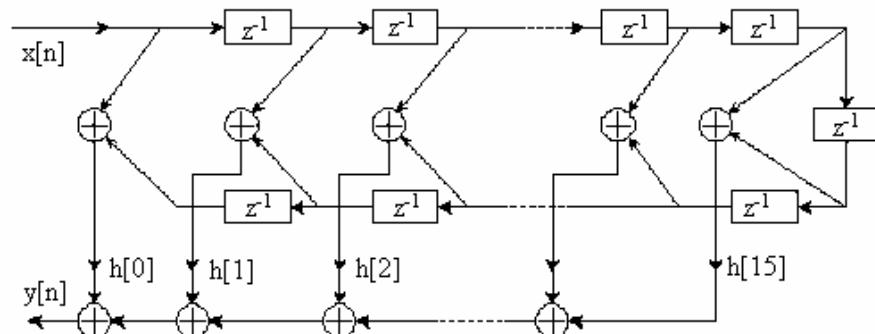


Figura 4.6. Implementarea în forma directă a filtrului FIR de fază liniară pentru $M=32$

În implementarea filtrului prin structura cu eșantionare în frecvență s-au folosit relațiile (4.15) și (4.17), în care s-au eliminat toți

termenii care au coeficienții cu câștig zero $\{H(k)\}$. Coeficienții cu câștig nenul sunt $H(k)$ și perechile corespunzătoare $H(M - k)$, pentru $k = 0, 1, 2, 3$. Diagrama bloc pentru acest tip de implementare este indicată în figura 4.7. Deoarece $H(0) = 1$, filtrul cu un singur pol nu necesită operații de multiplicare. Cele trei filtre cu doi poli necesită trei multiplișcări fiecare, deci, în total, nouă multiplișcări. Numărul total de sumări este 14. Prin urmare, implementarea cu eșantionare în frecvență a filtrului FIR este, din punct de vedere al calculului, mult mai eficientă decât forma directă de implementare.

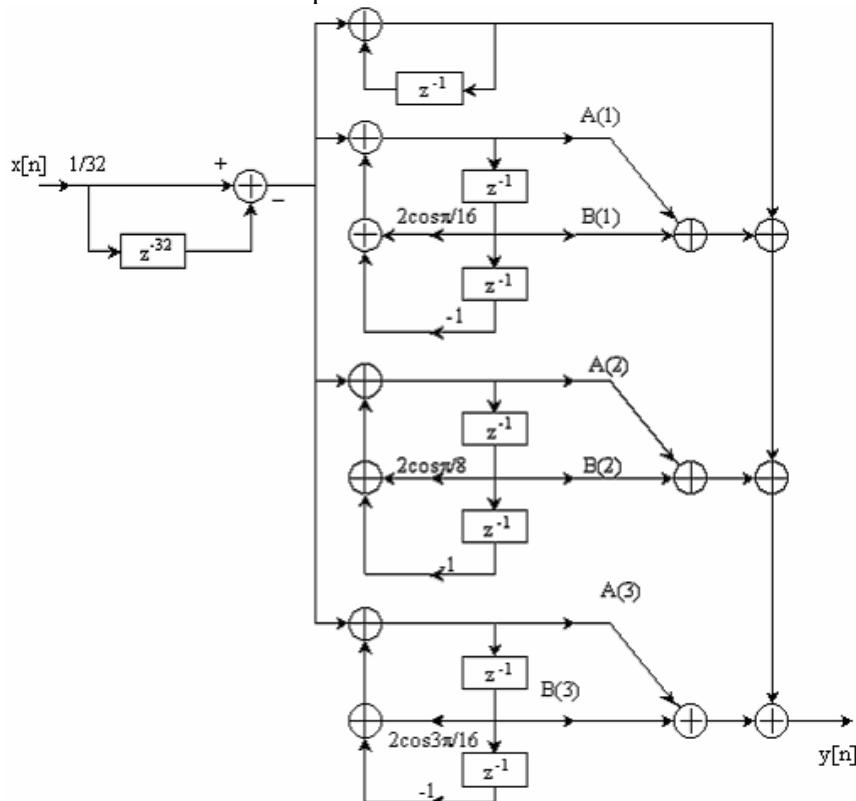


Figura 4.7. Implementarea cu eșantionare în frecvență a filtrului FIR din exemplul 4.1.

4.2.4. Structura lattice

În acest paragraf se introduce o altă structură de filtru FIR, numită *lattice*, des utilizată în implementarea filtrelor adaptive.

Se consideră o succesiune de filtre FIR cu funcțiile de transfer

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.19)$$

unde, prin definiție $A_m(z)$ este un polinom

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m \alpha_m[k]z^{-k} \quad m \geq 1, \quad (4.20)$$

și $A_0(z) = 1$. Răspunsul la impuls al filtrului de ordin m este $h_m[0] = 1$ și $h_m[k] = \alpha_m[k]$, $k = 1, 2, \dots, m$. Din considerante matematice se definește $\alpha_m[0] = 1$. Dacă $x[n]$ este secvența de intrare în filtrul $A_m(z)$ și $y[n]$ secvența de ieșire, se poate scrie

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad (4.21)$$

Două structuri de realizare a filtrelor FIR în forma directă sunt date în figura 4.8.

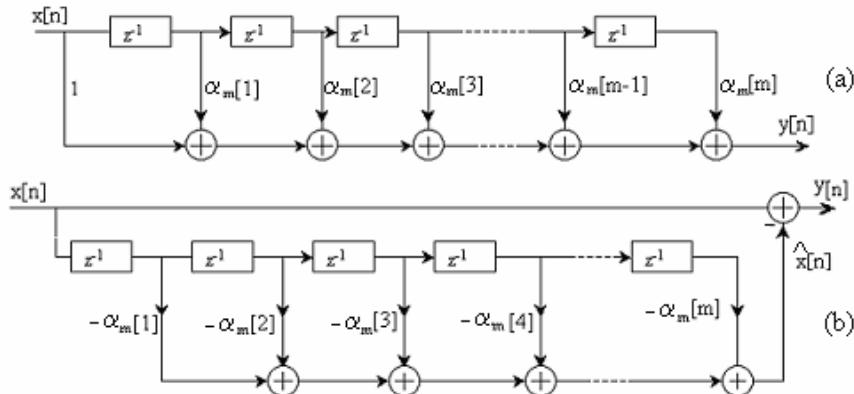


Figura 4.8. Forma directă de realizare pentru (a) un filtru FIR, (b) un filtru FIR predictor

Structurile din figura 4.8 sunt în strânsă legătură cu predicția liniară [16], unde

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad (4.22)$$

este valoarea prezisă a lui $x[n]$ pe baza a m intrări anterioare, $x[n-1]$, $x[n-2]$, ..., $x[n-m]$, iar $y[n] = x[n] - \hat{x}[n]$, dat de (4.21), reprezintă eroarea de predicție. Astfel, ieșirea filtrului FIR dată de relația (4.21) poate fi văzută ca eroarea între valoarea adevărată a semnalului $x[n]$ și valoarea prezisă $\hat{x}[n]$.

Se consideră un filtru de ordinul $m = 1$. Ieșirea unui astfel de filtru este

$$y[n] = x[n] + \alpha_1[1]x[n-1] \quad (4.23)$$

În figura 4.9 se prezintă un filtru lattice de ordinul întâi sau un filtru lattice cu o singură treaptă. Dacă în această structură se excită ambele intrări cu $x[n]$ și se selectează ieșirea de pe ramura de sus, se obține exact semnalul dat de relația (4.23), dacă se alege $K_1 = \alpha_1[1]$. Parametrul K_1 din structura lattice este denumit *coeficient de reflexie*.

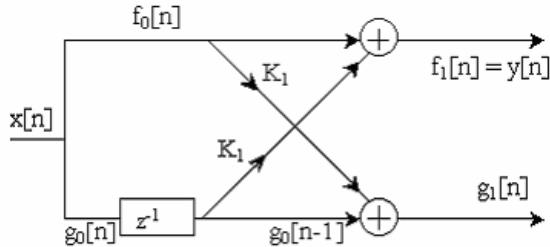


Figura 4.9. Filtru lattice cu o treaptă

Pentru această structură se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} f_0[n] &= g_0[n] = x[n] \\ f_1[n] &= f_0[n] + K_1 g_0[n-1] = x[n] + K_1 x[n-1] \\ g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] = K_1 x[n] + x[n-1] \end{aligned} \quad (4.24)$$

În continuare, se consideră un filtru FIR pentru care $m = 2$. În acest caz ieșirea structurii în formă directă este

$$y[n] = x[n] + \alpha_2[1]x[n-1] + \alpha_2[2]x[n-2] \quad (4.25)$$

Conectând în cascadă două trepte de structuri lattice ca în figura 4.10, este posibil să se obțină ieșirea ca în relația (4.25).

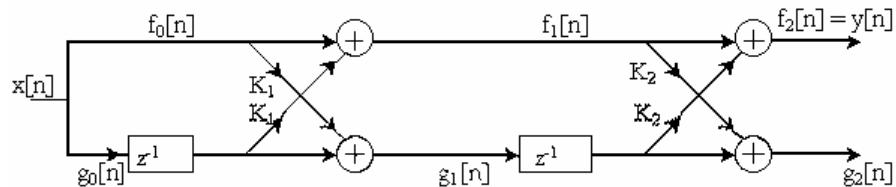


Figura 4.10. Filtru lattice cu două trepte

Ieșirea din prima treaptă este dată de relația (4.24), iar ieșirea din treapta a două este

$$\begin{aligned} f_2[n] &= f_1[n] + K_2 g_1[n-1] \\ g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Înlocuind $f_1[n]$ și $g_1[n]$ din relația (4.24) în relația (4.26) se obține

$$\begin{aligned} f_2[n] &= x[n] + K_1 x[n-1] + K_2 [K_1 x[n-1] + x[n-2]] \\ &= x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Relația (4.27) este identică cu ieșirea filtrului FIR în forma directă dată de (4.25), dacă între coeficienți există relațiile

$$\alpha_2[2] = K_2 \quad \alpha_2[1] = K_1(1 + K_2) \quad (4.28)$$

sau, echivalent

$$K_2 = \alpha_2[2] \quad K_1 = \frac{\alpha_2[1]}{1 + \alpha_2[2]} \quad (4.29)$$

Astfel, coeficienții de reflexie ai structurii lattice, K_1 și K_2 , pot fi obținuți din coeficienții $\{\alpha_m[k]\}$ ai formei directe de implementare.

Continuând proceful de cascadare a structurilor lattice, se poate demonstra prin inducție echivalența dintre filtrul FIR de ordin m implementat în forma directă și filtrul lattice de ordin m sau cu m trepte.

Filtrul lattice este descris, în general, de următorul sistem de ecuații recursive:

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n] \quad (4.30)$$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.31)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.32)$$

Ieșirea filtrului cu $(M-1)$ trepte corespunde ieșirii filtrului FIR de ordin $(M-1)$. Prin urmare

$$y[n] = f_{M-1}[n].$$

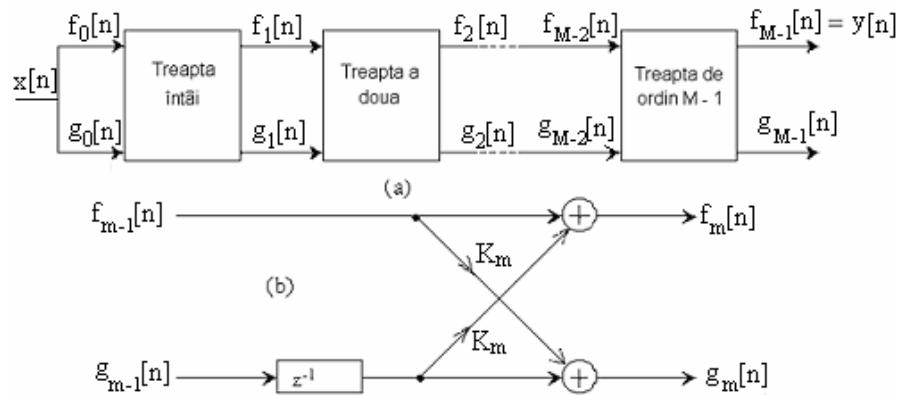


Figura 4.11. (a) Filtru lattice cu $M-1$ trepte, (b) Structura unei trepte

Figura 4.11 ilustrează un filtru lattice cu $M-1$ trepte într-o diagramă bloc, împreună cu structura unei trepte, caracterizată de relațiile (4.31) și (4.32).

Ca urmare a echivalenței între un filtru FIR în formă directă și un filtru lattice, ieșirea $f_m[n]$ a unui filtru lattice de ordin m poate fi exprimată sub forma

$$f_m[n] = \sum_{k=0}^m \alpha_m[k]x[n-k] \quad \alpha_m[0]=1 \quad (4.33)$$

Deoarece relația (4.33) este o sumă de conoluție, transformata sa Z este

$$F_m(z) = A_m(z)X(z), \text{ unde } A_m(z) = Z\{\alpha_m[n]\} \quad (4.34)$$

sau, echivalent

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \quad (4.34')$$

Cealaltă ieșire a structurii lattice, $g_m[n]$, ar putea fi, de asemenea, exprimată sub forma unei sume de conoluție ca în relația (4.33), utilizând un alt set de coeficienți, notați $\{\beta_m[k]\}$. Din relația (4.24) se observă cum coeficienții filtrului care produce ieșirea $f_1[n]$ sunt $\{1, K_1\} = \{1, \alpha_1[1]\}$ în timp ce coeficienții filtrului cu ieșirea $g_1[n]$, sunt $\{K_1, 1\} = \{\alpha_1[1], 1\}$. Se observă că aceste două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă. Dacă se consideră filtrul cu două trepte, cu ieșirea dată de relația (4.27), atunci $g_2[n]$ ar putea fi exprimat sub forma

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ &= K_2 [x[n] + K_1 x[n-1]] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\ &= K_2 x[n] + K_1 (1 + K_2) x[n-1] + x[n-2] \\ &= \alpha_2[2]x[n] + \alpha_2[1]x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

În consecință, coeficienții filtrului sunt $\{\alpha_2[2], \alpha_2[1], 1\}$, iar pentru filtrul ce produce ieșirea $f_2[n]$ sunt $\{1, \alpha_2[1], \alpha_2[2]\}$. Aici, din nou, cele două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă.

Din dezvoltarea de mai sus se observă că ieșirea $g_m[n]$ a filtrului lattice de ordin m ar putea fi exprimată cu ajutorul sumei de conoluție

$$g_m[n] = \sum_{k=0}^m \beta_m[k]x[n-k] \quad (4.35)$$

unde coeficienții filtrului, $\{\beta_m[k]\}$, sunt asociați cu acel filtrul care produce ieșirea $f_m[n] = y[n]$, dar care operează în ordine inversă.

Se presupune în continuare că valorile $x[n], x[n-1], \dots, x[n-m+1]$, sunt utilizate pentru predicția liniară a eșantionului de semnal $x[n-m]$ [47]. Valoarea prezisă este

$$\hat{x}[n-m] = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m[k]x[n-k] \quad (4.36)$$

unde coeficienții $\beta_m[k]$ ai filtrului predictor sunt chiar coeficienții $\{\alpha_m[k]\}$ luați în ordine inversă, prin urmare

$$\beta_m[k] = \alpha_m[m-k] \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (4.37)$$

Predicția efectuată pe baza relației (4.36) se numește *predicție inversă* sau *înapoi*, adică datele circulă în sens invers prin predictorul cu coeficienții $\{-\beta_m[k]\}$. Față de acesta, filtrul cu funcția de transfer $A_m(z)$, dată de (4.34') efectuează o *predicție directă* sau *înainte*.

În domeniul transformatei Z, relația (4.35) devine

$$G_m(z) = B_m(z)X(z), \text{ unde } B_m(z) = Z\{\beta_m[n]\} \quad (4.38)$$

Rezultă atunci

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (4.39)$$

$B_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{\beta_m(k)\}$, care se poate scrie

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m \beta_m[k]z^{-k} \quad (4.40)$$

Înlocuind (4.37) în (4.40) se obține

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^m \alpha_m[m-k]z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^m \alpha_m[l]z^{l-m} = z^{-m} \sum_{l=0}^m \alpha_m[l]z^l = z^{-m}A_m(z^{-1}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Din relația (4.41) rezultă că zerourile filtrului FIR cu funcția de transfer $B_m(z)$ sunt reciproce zerourilor lui $A_m(z)$. Din acest motiv $B_m(z)$ este numit polinom *reciproc* sau *invers* al lui $A_m(z)$.

Aplicând transformata Z relațiilor recursive (4.30) ÷ (4.32), se obține

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (4.42)$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.43)$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.44)$$

Împărțind fiecare ecuație prin $X(z)$, se obțin rezultatele dorite, sub forma

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (4.45)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.46)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.47)$$

Astfel, o treaptă lattice, este descrisă în domeniul Z de o ecuație matriceală de forma

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

4.2.4.1. Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului în formă directă

Coefficienții filtrului FIR realizat în formă directă $\{\alpha_m[k]\}$ pot fi obținuți din coeficienții $\{K_i\}$ ai structurii lattice, folosind următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (4.49)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.50)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (4.51)$$

Soluția este obținută recursiv, începând cu rangul $m = 1$. Astfel se obține o succesiune de $(M-1)$ filtre FIR, fiecare din ele pentru o valoare a lui m . Procedura este ilustrată în exemplul următor.

Exemplul 4.2.

Se dă un filtru lattice cu trei trepte având coeficienții $K_1 = \frac{1}{4}$, $K_2 = \frac{1}{2}$, $K_3 = \frac{1}{3}$. Să se determine coeficienții filtrului FIR în formă directă.

Soluție. Problema se rezolvă recursiv, utilizând relația (4.50) începând cu $m = 1$.

$$\text{Astfel, } A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}.$$

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu o singură treaptă, sunt $\alpha_1[0] = 1$, $\alpha_1[1] = K_1 = 1/4$.

$$\text{Deoarece } B_m(z) \text{ este reciprocul lui } A_m(z), \text{ rezultă } B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}.$$

Se adaugă a doua treaptă structurii lattice. Pentru $m=2$, din (4.50) rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu două trepte sunt $\alpha_2[0]=1, \alpha_2[1]=3/8, \alpha_2[2]=1/2$. Din (4.51) rezultă atunci

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

În final, prin adăugarea celei de-a treia trepte în structura lattice, rezultă polinomul

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

și, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienții

$$\alpha_3[0] = 1, \alpha_3[1] = \frac{13}{24}, \alpha_3[2] = \frac{5}{8}, \alpha_3[3] = \frac{1}{3}$$

În general, structura lattice cu parametrii K_1, K_2, \dots, K_m , corespunde unei clase de m filtre FIR în formă directă cu funcțiile de sistem $A_1(z), A_2(z), \dots, A_m(z)$. Este interesant de observat că o caracterizare a acestei clase de filtre FIR în formă directă necesită $m(m+1)/2$ coeficienți, în timp ce o caracterizare lattice necesită doar m coeficienți de reflexie $\{K_i\}$. Motivul pentru care structura lattice produce o reprezentare mult mai compactă pentru clasa de filtre FIR de ordin m se datorează faptului că adăugarea treptelor la structura lattice nu modifică parametrii treptelor anterioare, în timp ce coeficienții funcției de sistem $A_m(z)$ sunt total diferiți de coeficienții unui filtru FIR de ordin inferior, cu funcția de sistem $A_{m-1}(z)$.

O formulă pentru determinarea recursivă a coeficienților $\{\alpha_m[k]\}$ ai filtrului poate fi obținută din polinoamele date în relațiile (4.49)÷(4.51).

Din relația (4.50) se obține

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^m \alpha_m[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[k] z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}[m-1-k] z^{-(k+1)} \quad (4.52)$$

Prin egalarea coeficienților de puteri egale a lui z^{-1} și reamintind că $\alpha_m[0]=1$ pentru $m = 1, 2, \dots, M-1$, se obțin ecuațiile recursive dorite pentru coeficienții filtrului FIR sub forma

$$\alpha_m[0] = 1 \quad (4.53)$$

$$\alpha_m[m] = K_m \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m[k] &= \alpha_{m-1}[k] + K_m \alpha_{m-1}[m-k] = \alpha_{m-1}[k] + \alpha_m[m] \alpha_{m-1}[m-k] \\ 1 \leq k \leq m-1, m &= 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.2.4.2. Conversia coeficienților filtrului FIR din forma directă în coeficienți ai structurii lattice

Dacă se cunosc coeficienții filtrului FIR pentru implementarea în formă directă sau, echivalent, polinomul $A_m(z)$ și se dorește determinarea coeficienților corespunzători structurii lattice, de ordin m , atunci $K_m = \alpha_m[m]$. Pentru a obține coeficientul K_{m-1} sunt necesare polinoamele $A_{m-1}(z)$ deoarece, în general, K_m este obținut din polinomul $A_m(z)$ pentru $m=M-1, M-2, \dots, 1$. Prin urmare, trebuie calculate succesiv polinoamele $A_m(z)$, începând de la $m=M-1$ până la $m=1$.

Relația recursivă dorită pentru polinoame se determină ușor din (4.46) și (4.47).

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)] \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad m = M-1, M-2, \dots, 1 \quad (4.56)$$

Astfel se calculează toate polinoamele de grad inferior $A_m(z)$ începând cu $A_{M-1}(z)$ și se obțin coeficienții doriti ai structurii lattice din relația $K_m = \alpha_m[m]$. Se observă că procedura prezentată este operațională atât timp cât $|K_m| \neq 1$ pentru $m = 1, 2, \dots, M-1$.

Din ecuația recursivă (4.56), se poate obține o formulă pentru calculul recursiv al coeficienților K_m , începând cu $m=M-1$ până la $m=1$.

Pentru $m=M-1, M-2, \dots, 1$ se obține

$$K_m = \alpha_m[m] \quad \alpha_{m-1}[0] = 1 \quad (4.57)$$

$$\alpha_{m-1}[k] = \frac{\alpha_m[k] - K_m \beta_m[k]}{1 - K_m^2} = \frac{\alpha_m[k] - \alpha_m[m] \alpha_m[m-k]}{1 - \alpha_m^2[m]}, \quad 1 \leq k \leq m-1 \quad (4.58)$$

de asemenea, recursiv.

Ecuația recursivă (4.58) nu poate fi folosită, dacă $|K_m| = 1$. Dacă aceasta se întâmplă, înseamnă că polinomul $A_{m-1}(z)$ are o rădăcină pe cercul unitate. Aceasta poate fi factorizată în polinomul $A_{m-1}(z)$ și procesul iterativ dat de relația (4.58) se reia pentru sistemul de ordin redus.

Exemplul 4.3.

Să se determine coeficienții structurii lattice corespunzătoare filtrului FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

Soluție. Mai întâi se observă că $K_3 = \alpha_3[3] = \frac{1}{3}$. Mai departe,

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

Relația de decrementare din (4.56), cu $m = 3$, conduce la

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

Prin urmare, $K_2 = \alpha_2[2] = 1/2$ și $B_2(z) = 1/2 + (3/8)z^{-1} + z^{-2}$. Repetând decrementarea recursivă, se obține

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$$

Astfel, $K_1 = \alpha_1[1] = \frac{1}{4}$.

4. 3. Implementarea sistemelor cu răspuns infinit la impuls

În această secțiune se consideră diferite structuri de sisteme de tip IIR descrise prin ecuația cu diferențe (4.1) sau, echivalent, prin funcția de sistem (4.2). Ca și în cazul sistemelor FIR, există mai multe tipuri de structuri de implementare, inclusiv structura *în formă directă*, structura *în cascadă*, *în paralel*, structura *lattice numai cu poli* și structura *lattice cu poli și zerouri*.

4.3.1. Implementarea în formă directă

Funcția de sistem dată în relația (4.2) ce caracterizează un sistem IIR, poate fi văzută ca o cascadă de două sisteme, astfel încât

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (4.59)$$

unde $H_1(z)$ conține toate zerourile lui $H(z)$ iar $H_2(z)$ conține toți polii lui $H(z)$, adică

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (4.60)$$

și

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (4.61)$$

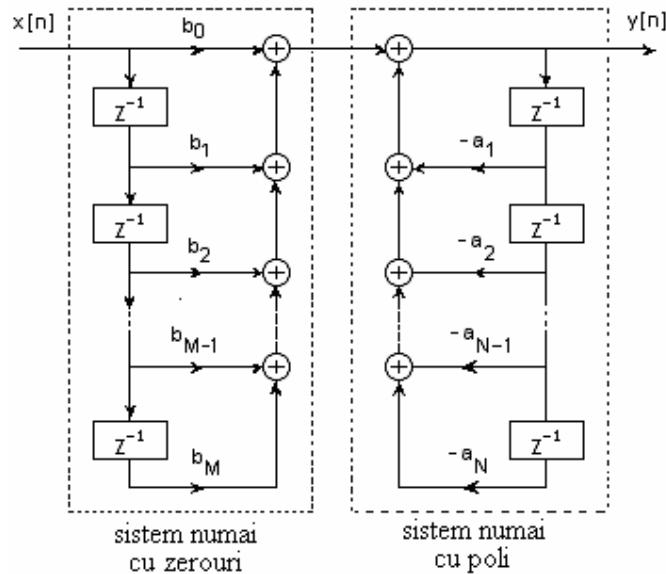


Figura 4.12. Implementarea sistemului IIR în formă directă I

$H_1(z)$ este un sistem FIR, iar implementarea sa în formă directă a fost prezentată în figura 4.1. Conectând sistemul numai cu poli $H_2(z)$ în cascadă cu $H_1(z)$, se obține implementarea în *formă directă I*, ilustrată în figura 4.12. Această implementare necesită $M+N+1$ multiplicări, $M+N$ sumări, și $M+N$ locații de memorie.

Dacă filtrul numai cu poli, $H_2(z)$, este plasat înaintea filtrului numai cu zerouri, $H_1(z)$, se obține o structură mai compactă. Se reamintește că ecuația cu diferențe pentru un filtru numai cu poli este

$$w[n] = -\sum_{k=1}^N a_k w[n-k] + x[n] \quad (4.62)$$

Dacă $w[n]$ este intrarea sistemului numai cu zerouri, atunci ieșirea sa este

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k w[n-k] \quad (4.63)$$

Se observă că ambele relații (4.62) și (4.63) implică versiuni întârziate ale secvenței $\{w[n]\}$. Prin urmare, este necesară doar o singură linie de întârziere sau un singur set de locații de memorie pentru a stoca valori trecute ale lui $\{w[n]\}$. Structura rezultată care implementează (4.62) și (4.63) este numită implementarea în *forma directă II* și este ilustrată în figura 4.13.

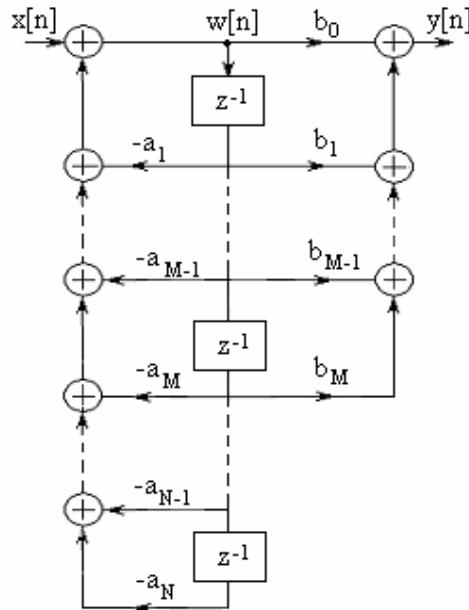


Figura 4.13. Implementarea sistemului IIR în forma directă II

Această structură necesită $M+N+1$ multiplicatoare, $M+N$ sumatoare, și maximul dintre $\{M, N\}$ de locații de memorie. Implementarea care

minimizează numărul de locații de memorie se numește *canonică*. Forma directă II este *canonică*.

Structurile din figurile 4.12 și 4.13 sunt amândouă numite implementări în “formă directă” deoarece ele se obțin direct din funcția de sistem $H(z)$ fără nici o rearanjare a acesteia. Din nefericire, ambele implementări sunt, în general, extrem de sensitive la cuantizarea parametrilor și nu sunt recomandate în aplicații practice, problemă detaliată în Capitolul 5.

4.3.2. Grafuri de semnal și structuri transpuze

Un graf de semnal oferă o alternativă echivalentă de reprezentare a structurilor de diagramă bloc și este utilizat pentru a ilustra diferite implementări ale sistemelor. Elementele de bază ale unui graf sunt *nodurile* și *ramurile*. Un *graf de semnal* are la bază un set de *ramuri orientate* ce se conectează la *noduri*. Prin definiție, semnalul care ieșe dintr-o ramură este egal cu semnalul care intră în ramură înmulțit cu câștigul ramurii. Suma algebraică a semnalelor din toate ramurile conectate la un nod al unui graf de semnal este egală cu zero.

Pentru fixarea ideilor, se va considera un sistem cu două zerouri și cu doi poli ca în diagrama bloc din figura 4.14a, structură echivalentă cu cea din figura 4.14.b. Diagrama bloc a sistemului poate fi convertită într-un graf de semnal ca în figura 4.14c. Se observă că graful de semnal conține cinci noduri etichetate de la 1 la 5. Nodurile care conțin sumatoare se numesc *de sumare*, iar cele în care se conectează două sau mai multe ramuri și nu conțin sumatoare, se numesc *de branșare*. Ambele tipuri de noduri se reprezintă la fel în graf. Două dintre noduri, (1,3), sunt noduri de sumare, în timp ce celelalte noduri reprezintă puncte de branșare din graf. Transmitanțele ramurilor sunt indicate pe ramurile grafului. Se observă că o întârziere este indicată prin transmitanță z^{-1} . Când transmitanța ramurii este unitară, ea rămâne neetichetată. Nodul corespunzător intrării în sistem se numește *nod sursă* iar nodul corespunzător semnalului de ieșire, *nod receptor*. Se mai observă că graful de semnal conține aceleași informații de bază ca și implementarea diagramei bloc a unui sistem. Singura diferență aparentă este că atât sumatoarele cât și punctele de branșare a ramurilor sunt reprezentate prin noduri în graf.

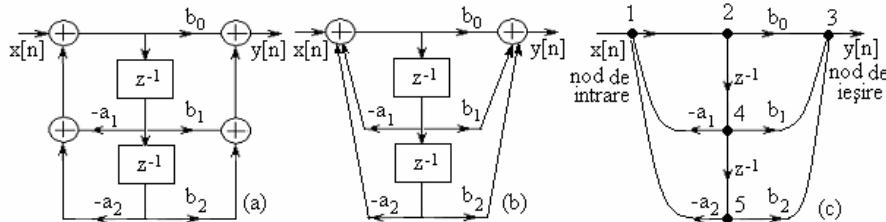


Figura 4.14. (a), (b) Filtru de ordinul 2 și (c) graful de semnal corespunzător

Un rezultat de bază din teoria grafurilor se referă la transformarea unui graf de semnal în altul fără a modifica relațiile funcționale intrare- ieșire. O tehnică utilizată în obținerea structurilor echivalente pentru sisteme IIR și FIR este dată de *teorema reversibilității grafului* [48]. Această teoremă enunță faptul că dacă se inversează direcțiile tuturor transmitanțelor ramurilor, nodurile de sumare se schimbă în noduri de branșare, și invers, și se inversează intrarea cu ieșirea în graful de semnal, funcția de sistem rămâne neschimbată. Structura rezultată este denumită *structură sau formă transpusă*.

De exemplu, transpunerea grafului de semnal din figura 4.14c, este ilustrată în figura 4.15a. Implementarea diagramei bloc corespunzătoare a formei transpuse este ilustrată în figura 4.15b.

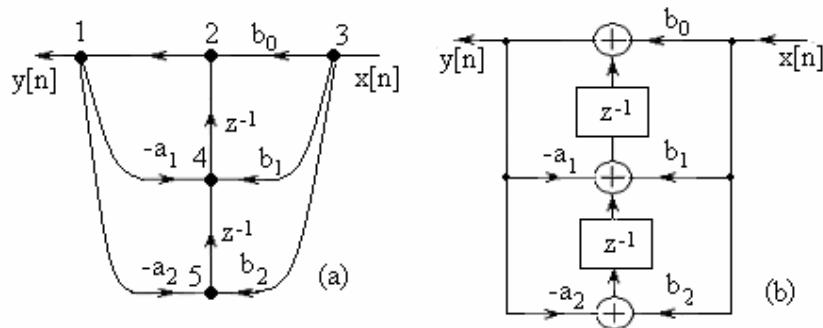


Figura 4.15. (a) Graful de semnal al structurii transpusă și (b) implementarea sa

În continuare se va aplica teorema de transpunere formei directe II, inversându-se toate direcțiile ramurilor din figura 4.13, schimbând nodurile de branșare cu sumatoare și sumatoarele cu noduri de branșare, și în final, interschimbând intrarea și ieșirea. Aceste operații duc la structura formei directe II transpusă, ca în figura 4.16a. Această figură poate fi

redesenată ca în figura 4.16b în care se indică intrarea la stânga și ieșirea la dreapta.

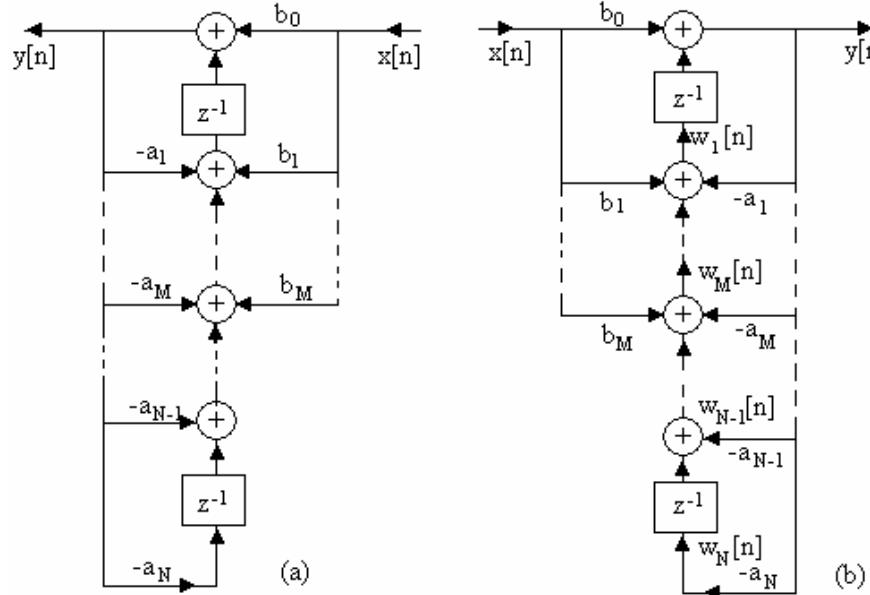


Figura 4.16 a, b, Structura în forma directă II transpusă

Această formă transpusă a structurii în forma directă II poate fi descrisă de următorul sistem de ecuații cu diferențe, pentru $N > M$:

$$y[n] = w_1[n-1] + b_0 x[n] \quad (4.64)$$

$$w_k[n] = w_{k+1}[n-1] - a_k y[n] + b_k x[n] \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.65)$$

$$w_k[n] = w_{k+1}[n-1] - a_k y[n], \quad k = M+1, \dots, N-1 \quad (4.66)$$

$$w_N[n] = -a_N y[n]$$

Sistemul de ecuații cu diferențe (4.64) ÷ (4.66) este echivalent cu o singură ecuație cu diferențe:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (4.67)$$

Se observă că transpusa structurii în formă directă II necesită un număr de multiplicatoare, sumatoare și locații de memorie egal cu cel al structurii în formă directă originală. Performanțele structurilor directe și transpuse pot fi diferite în implementarea cu precizie finită, acestea depinzând de valorile particulare ale parametrilor, după cum se va arăta în Capitolul 5.

Un sistem FIR se obține din relația (4.67) impunând $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, N$. Acesta poate fi implementat în formă directă transpusă prezentată în figura 4.17, ce se obține din figura 4.16b impunând $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, N$. Implementare în formă transpusă poate fi descrisă prin sistemul de ecuații cu diferențe

$$w_M[n] = b_M x[n] \quad (4.68)$$

$$w_k[n] = w_{k+1}[n-1] + b_k x[n] \quad k = M-1, M-2, \dots, 1 \quad (4.69)$$

$$y[n] = w_1[n-1] + b_0 x[n] \quad (4.70)$$

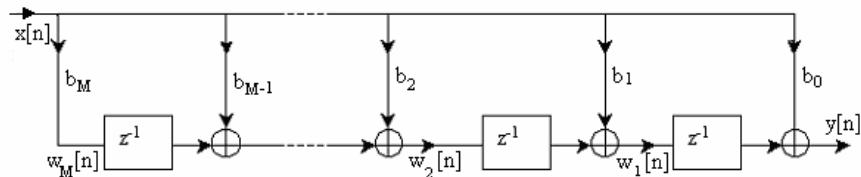


Figura 4.17. Structura transpusă pentru un filtru FIR

În tabelul 4.1 sunt prezentate câteva structuri în formă directă și ecuațiile cu diferențe corespunzătoare pentru un sistem IIR cu doi poli și două zerouri având funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (4.71)$$

Acesta este blocul de bază în implementarea sistemelor IIR de ordin înalt. Din cele trei structuri în formă directă prezentate în Tabelul 4.1, structura în formă directă II este cea mai utilizată datorită numărului mic de locații de memorie necesar pentru implementare.

Tabelul 4.1

	Structuri	Ecuații de implementare
Forma directă I		$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$

Forma directă II 	$w[n] = -a_1 w[n-1]$ $-a_2 w[n-2] + x[n]$ $y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1]$ $+ b_2 w[n-2]$
Forma directă II transpusă 	$y[n] = b_0 x[n] + w_1[n-1]$ $w_1[n] = b_1 x[n] - a_1 y[n]$ $+ w_2[n-1]$ $w_2[n] = b_2 x[n] - a_2 y[n]$

4.3.3. Implementarea în cascadă a sistemelor IIR

Se consideră un sistem IIR cu funcția de sistem dată de relația (4.2). De asemenea, se consideră că $N \geq M$. Sistemul poate fi divizat într-o cascadă de subsisteme de ordin doi, astfel încât $H(z)$ poate fi exprimat ca

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (4.72)$$

unde K este partea întreagă a lui $(N+1)/2$. $H_k(z)$ are forma generală

$$H_k(z) = \frac{1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (4.73)$$

iar b_0 este factorul de câștig.

Ca și în cazul sistemelor FIR implementate în cascadă, factorul de câștig poate fi egal distribuit celor K secțiuni ale filtrului astfel că se poate scrie

$$b_0 = b_{10}b_{20}b_{30}, \dots, b_{K0}.$$

Coeficienții $\{a_{ki}\}$ și $\{b_{ki}\}$ din subsistemele de ordinul al doilea sunt reali. Aceasta implică faptul că în formarea subsistemelor de ordinul al doilea din (4.73), trebuie grupate perechile de poli și zerouri complex conjugate. Cu toate acestea, împerecherea a doi poli complex conjugăți sau reali cu o pereche de zerouri complex-conjugate sau reale, pentru a forma un subsistem poate fi făcută arbitrar. Prin urmare, factorul pătratic de la numărătorul sau numitorul relației (4.73), ar putea conține o pereche de rădăcini reale sau o pereche de rădăcini complex-conjugate. Dacă $N > M$, unele subsisteme de ordinul al doilea ar putea avea unii coeficienți de la numărător nuli. Dacă N este impar, unul dintre subsisteme, să zicem $H_k(z)$, trebuie să aibă $a_{k2} = 0$, astfel că subsistemul este de ordinul întâi. Pentru a păstra o anumită modularitate în implementarea lui $H(z)$, este preferabil de utilizat subsistemele de ordinul al doilea în structurile cascadă și de a avea coeficienți nuli în unele dintre subsisteme.

Fiecare din subsistemele de ordinul al doilea cu funcția de sistem (4.73), poate fi implementat fie în forma directă I, fie în forma directă II sau în forma directă II transpusă. Deoarece există mai multe moduri de împerechere a polilor și zerourilor lui $H(z)$ într-o cascadă de secțiuni de ordinul al doilea, și mai multe moduri de ordonare a subsistemelor rezultante, este posibil să se obțină o varietate de implementări în cascadă. Deși toate implementările în cascadă sunt echivalente pentru precizie infinită, diferențele tipuri de implementări pot dări semnificativ când sunt implementate cu aritmetică de precizie finită.

Forma generală a unei structuri în cascadă este ilustrată în figura 4.18. Folosind structura în forma directă II pentru fiecare subsistem, algoritmul de calcul pentru implementarea sistemului IIR cu funcția de sistem $H(z)$, este descris de următorul sistem de ecuații

$$y_0[n] = x[n] \quad (4.74)$$

$$w_k[n] = -a_{k1}w_k[n-1] - a_{k2}w_k[n-2] + y_{k-1}[n] \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.75)$$

$$y_k[n] = w_k[n] + b_{k1}w_k[n-1] + b_{k2}w_k[n-2] \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.76)$$

$$y[n] = b_0y_K[n] \quad (4.77)$$

Acest sistem de ecuații dă o descriere completă a unei structuri în cascadă implementată cu module în forma directă II.

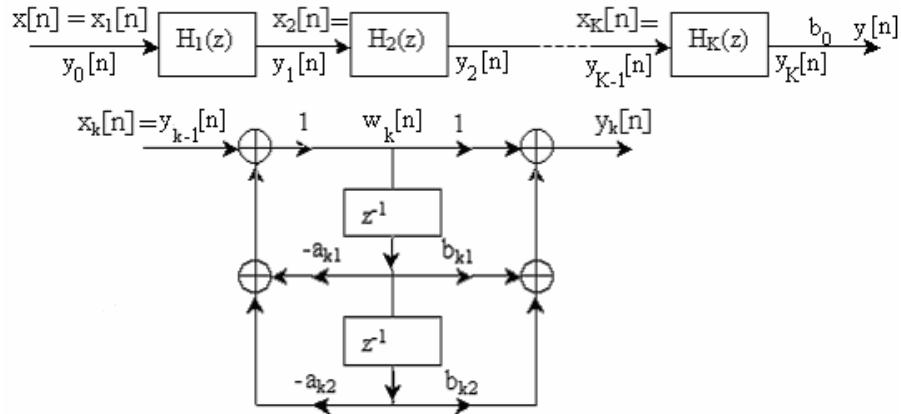


Figura 4.18. Structura în cascadă cu secțiuni de ordinul II și realizarea în forma directă II a fiecărei secțiuni

4.3.4. Implementarea în paralel

Implementarea în paralel a unui sistem IIR poate fi obținută efectuând o dezvoltare în fracții simple a lui $H(z)$. Din nou se presupune că $N \geq M$ și că polii sunt distincți. Prin această dezvoltare în fracții simple, se obține

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} \quad (4.78)$$

unde $\{p_k\}$ sunt polii, $\{A_k\}$ sunt coeficienții (reziduurile) în dezvoltarea în fracții simple, constanta C este $C = b_N / a_N$ dacă $N=M$ și nulă dacă $N>M$.

Implementarea relației (4.78) se realizează cu un banc paralel de filtre cu un singur pol. Unii dintre polii lui $H(z)$ pot avea valori complexe. În acest caz, coeficienții A_k corespunzători au, de asemenea, valori complexe. Pentru a evita operațiile cu numere complexe, se pot combina perechi de poli complex conjugăți pentru a forma subsisteme de ordinul al doilea cu coeficienți reali. Fiecare din aceste subsisteme are funcția de sistem

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (4.79)$$

unde coeficienții $\{b_{ki}\}$ și $\{a_{ki}\}$ sunt reali. Funcția generală $H(z)$ poate fi scrisă sub forma

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^K H_k(z) \quad (4.80)$$

unde K este partea întreagă a lui $(N+1)/2$. Când N este impar unul dintre sistemele $H_k(z)$ este cu un singur pol ($b_{k1} = a_{k2} = 0$). Relația (4.80) conduce la structura din figura 4.19a.

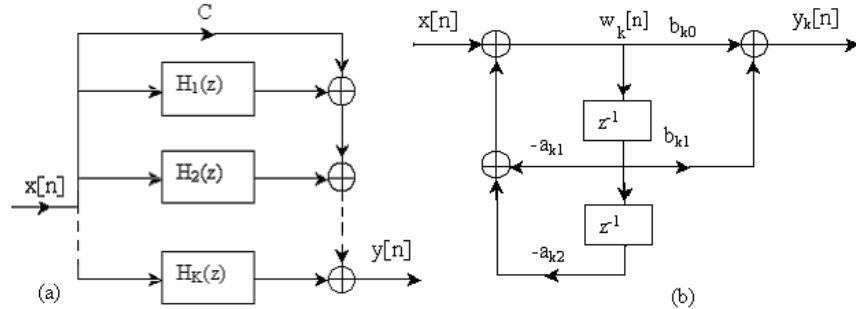


Figura 4.19. (a) Structura în paralel pentru un sistem IIR, (b) Secțiune de ordinul al doilea pentru realizarea în paralel a sistemelor IIR

Secțiunile de ordinul doi individuale, care sunt blocurile constructive de bază pentru $H(z)$, pot fi implementate în oricare din formele directe sau transpuse. Structura în formă directă II este ilustrată în figura 4.19b. Cu această structură ca bloc constructiv de bază, implementarea în paralel a sistemului IIR este descrisă de următorul sistem de ecuații:

$$w_k[n] = -a_{k1}w_k[n-1] - a_{k2}w_k[n-2] + x[n] \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.81)$$

$$y_k[n] = b_{k0}w_k[n] + b_{k1}w_k[n-1], \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.82)$$

$$y[n] = Cx[n] + \sum_{k=1}^K y_k[n] \quad (4.83)$$

Exemplul 4.4.

Să se determine implementările în cascadă și în paralel pentru sistemul descris de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{10 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right) \left(1 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{8}z^{-1}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right] \left[1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}\right]}$$

Soluție. Implementarea în cascadă se obține ușor din această formă a funcției de sistem. O posibilă împerechere de poli și zerouri este următoarea

$$H_1(z) = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}}, H_2(z) = \frac{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

și, prin urmare,

$$H(z) = 10H_1(z)H_2(z)$$

Implementarea în cascadă este ilustrată în Fig. 9.20a.

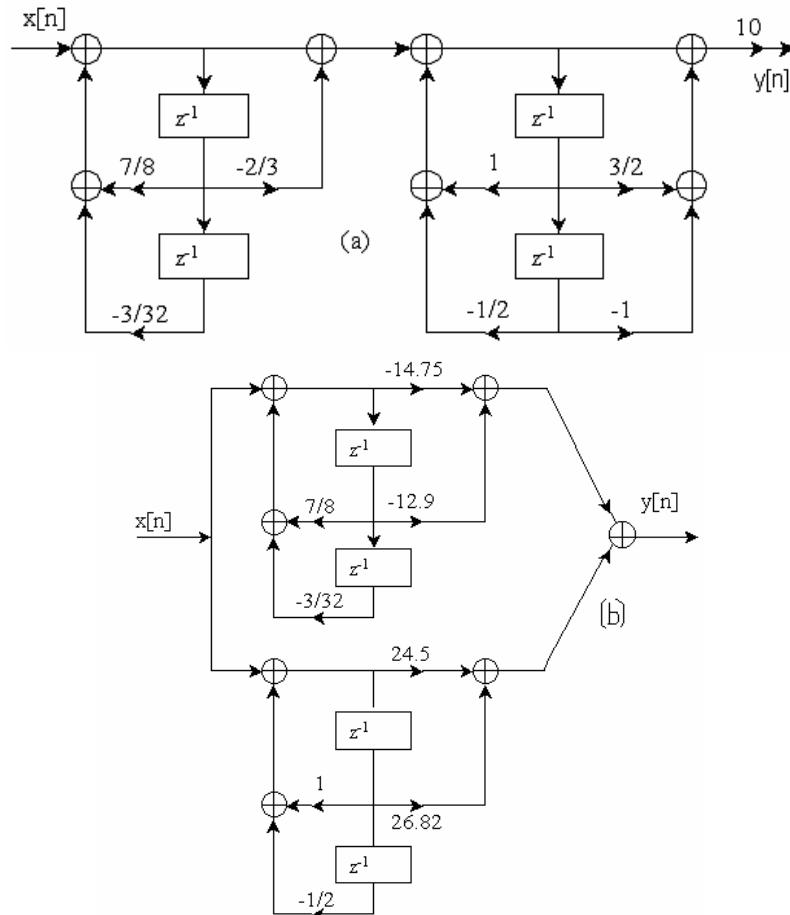


Figura 4.20. Realizările (a) în cascadă și (b) în paralel pentru exemplul 4.4.

Pentru a obține implementarea în paralel, $H(z)$ trebuie dezvoltat în fracții parțiale. Astfel,

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{8}z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)z^{-1}} + \frac{A_3^*}{1 - \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)z^{-1}}$$

unde A_1, A_2, A_3 , și A_3^* rezultă $A_1 = 2,93$, $A_2 = -17,68$, $A_3 = 12,25 - j14,57$, $A_3^* = 12,25 + j14,57$. Recombinând perechile de poli, se obține

$$H(z) = \frac{-14,75 - 12,90z^{-1}}{1 - \frac{7}{8}z^{-1} + \frac{3}{32}z^{-2}} + \frac{24,50 + 26,82z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Implementarea în paralel este ilustrată în figura 4.20b.

4.3.5. Structuri lattice numai cu poli pentru implementarea sistemelor IIR

În paragraful 4.2.4 s-a dezvoltat o structură de filtru lattice, echivalentă cu un filtru FIR, iar în această secțiune se extinde dezvoltarea la sistemele IIR.

Fie un sistem numai cu poli cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k]z^{-k}} = \frac{1}{A_N(z)} \quad (4.84)$$

Implementarea în formă directă a acestui sistem este ilustrată în figura 4.21. Ecuația cu diferențe pentru acest sistem IIR este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]y[n-k] + x[n] \quad (4.85)$$

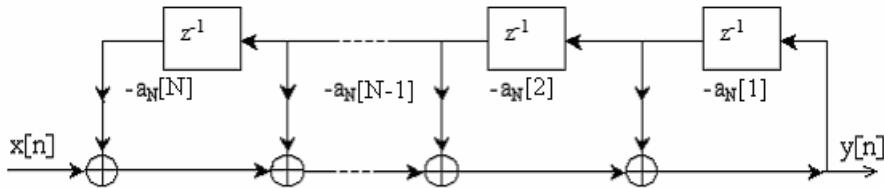


Figura 4.21. Implementarea în formă directă a unui sistem numai cu poli

Dacă în relația (4.85) se inversează intrarea cu ieșirea, se obține

$$x[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]x[n-k] + y[n] \quad (4.86)$$

sau, echivalent,

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^N a_N[k]x[n-k] \quad (4.86')$$

Se observă că ecuația (4.86') descrie un sistem FIR cu funcția de sistem $H(z) = A_N(z)$. Așadar, un sistem poate fi obținut din celălalt interschimbând intrarea cu ieșirea. Pe baza acestei observații, se poate folosi structura lattice numai cu zerouri descrisă în paragraful 4.2.4, pentru a obține o structură lattice pentru un sistem IIR numai cu poli, interschimbând rolul intrării cu cel al ieșirii. Mai întâi, pentru filtrul lattice numai cu zerouri ilustrat în figura 4.11 se redefineste intrarea ca fiind

$$x[n] = f_N[n] \quad (4.87)$$

$$\text{iar ieșirea ca} \quad y[n] = f_0[n], \quad (4.88)$$

învers decât pentru un filtrul lattice numai cu zerouri. Aceste definiții impun ca valorile $\{f_m[n]\}$ să se calculeze în ordine descrescătoare $[f_N[n], f_{N-1}[n], \dots]$. Calculul poate fi realizat rearanjând ecuația recursivă din (4.31) de unde se determină soluția pentru $f_{m-1}[n]$ în funcție de $f_m[n]$, adică

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1] \quad m = N, N-1, \dots, 1$$

Ecuația (4.32) pentru $g_m[n]$ rămâne neschimbată.

Rezultatul acestor schimbări este următorul sistem de ecuații:

$$f_N[n] = x[n] \quad (4.89)$$

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (4.90)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \dots, 1 \quad (4.91)$$

$$y[n] = f_0[n] = g_0[n] \quad (4.92)$$

care corespunde structurii ilustrate în figura 4.22.

Pentru a demonstra că setul de ecuații (4.89) ÷ (4.92) descrie un sistem IIR numai cu poli, se consideră, pentru început, cazul în care $N = 1$. Ecuațiile (4.89) ÷ (4.92) se reduc la

$$x[n] = f_1[n]$$

$$f_0[n] = f_1[n] - K_1 g_0[n-1]$$

$$\begin{aligned} g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \\ y[n] &= f_0[n] = x[n] - K_1 y[n-1] \end{aligned} \quad (4.93)$$

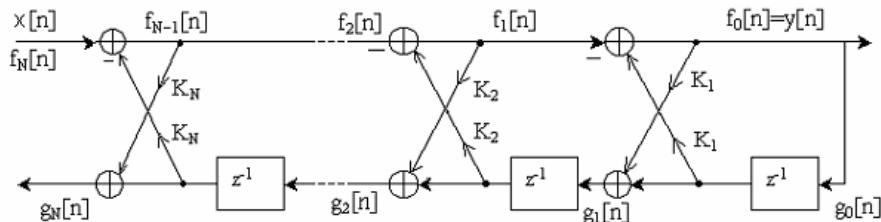


Figura 4.22. Structura lattice pentru un filtru IIR numai cu poli
Ecuația pentru $g_1[n]$ poate fi exprimată ca

$$g_1[n] = K_1 y[n] + y[n-1] \quad (4.94)$$

Se observă că ultima relație din sistemul (4.93) reprezintă un sistem IIR numai cu poli, de ordinul întâi, în timp ce (4.94) reprezintă un sistem FIR de ordinul întâi. Polul este rezultatul reacției ce a fost introduse de soluționarea lui $\{f_m[n]\}$ în ordine descendente. Această reacție este arătată în figura 4.23a.

În continuare, se consideră cazul $N=2$, care corespunde structurii din figura 4.23b.

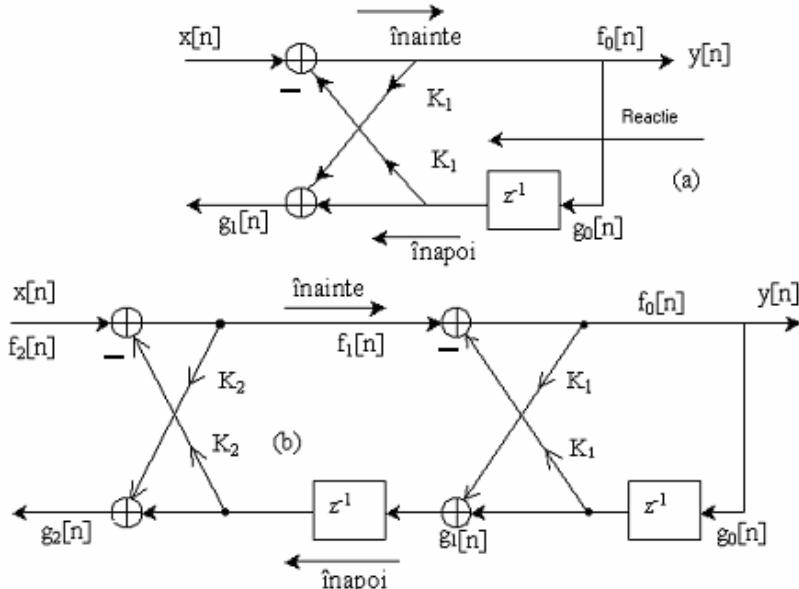


Figura 4.23. Implementarea structurii lattice pentru un sistem IIR a) cu un pol și b) cu doi poli

Ecuațiile corespunzătoare acestei structuri sunt

$$\begin{aligned}
 f_2[n] &= x[n] \\
 f_1[n] &= f_2[n] - K_2 g_1[n-1] \\
 g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\
 f_0[n] &= f_1[n] - K_1 g_0[n-1] \\
 g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] \\
 y[n] &= f_0[n] = g_0[n]
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

După câteva substituții simple, se obține

$$y[n] = -K_1(1+K_2)y[n-1] - K_2y[n-2] + x[n] \tag{4.96}$$

$$g_2[n] = K_2y[n] + K_1(1+K_2)y[n-1] + y[n-2] \tag{4.97}$$

Ecuația cu diferențe (4.96) reprezintă un sistem IIR cu doi poli iar relația (4.97) este ecuația intrare-ieșire pentru un sistem FIR cu două zerouri. Se observă cum coeficienții pentru sistemul FIR sunt identici cu cei din sistemul IIR, cu excepția faptului că apar în ordine inversă.

Concluziile de mai sus sunt valabile pentru orice N . Într-adevăr, cu definiția lui $A_m(z)$ dată în (4.34'), funcția de sistem pentru sistemul numai cu poli este

$$H_a(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_m(z)} = \frac{1}{A_m(z)} \tag{4.98}$$

Similar, funcția de sistem pentru sistemul numai cu zerouri (FIR) este

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} = B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) \tag{4.99}$$

unde s-au folosit relațiile (4.38) ÷ (4.44). Astfel, coeficienții lui $H_b(z)$ care caracterizează sistemul FIR sunt identici cu coeficienții lui $A_m(z)$, exceptând faptul că apar în ordine inversă.

Este interesant de observat că structura lattice numai cu poli are o cale numai cu zerouri cu intrarea $g_0[n]$ și ieșirea $g_N[n]$, identică cu calea corespunzătoare numai cu zerouri în structura lattice numai cu zerouri. Polinomul $B_m(z)$, reprezintă funcția de sistem pentru calea numai cu zerouri comună ambelor structuri lattice, numită obișnuit funcție de sistem *înapoi* sau *invers*. Structurile lattice numai cu zerouri și numai cu poli sunt caracterizate de aceeași parametri lattice K_1, K_2, \dots, K_N . Cele două structuri lattice diferă doar prin interconexiunile grafurilor de semnal. În consecință, algoritmii pentru conversia coeficienților $\{\alpha_m[k]\}$

ai implementării în formă directă a unui sistem FIR în parametri lattice, și invers, se aplică la fel și structurii numai cu poli. Se reamintește că rădăcinile polinomului $A_N(z)$ sunt localizate în interiorul cercului unitate, dacă și numai dacă coeficienții lattice K_m îndeplinesc condiția $|K_m| < 1$, pentru toți $m=1,\dots,N$.

În aplicațiile practice structura lattice numai cu poli a fost utilizată pentru a modela tractul vocal uman și stratificarea pământului. În astfel de cazuri coeficienții lattice $\{K_m\}$, au semnificația fizică de a fi identici cu coeficienții reflectați în mediul fizic. Acesta este motivul pentru care coeficienții lattice sunt adeseori numiți *coeficienți de reflexie*. În astfel de aplicații, un model stabil pentru un mediu necesită coeficienți de reflexie subunitari obținuți din măsurători asupra semnalelor de ieșire din mediu.

4.3.6. Structuri lattice cu poli și zerouri pentru implementarea sistemelor IIR

Structura lattice numai cu poli reprezintă blocul constructiv de bază pentru structuri de tip lattice care implementează sistemele IIR care conțin atât poli cât și zerouri. Se consideră în continuare un sistem IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M c_M[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_N[k]z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}, \quad (4.100)$$

unde notația pentru numărător a fost modificată pentru a evita confuzia cu polinomul $B(z)$ prezentat anterior. De asemenea se consideră că $N \geq M$.

În structura în formă directă II, sistemul din (4.100) este descris de ecuațiile cu diferențe

$$w[n] = -\sum_{k=1}^N a_N[k]w[n-k] + x[n] \quad (4.101)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M c_M[k]w[n-k] \quad (4.102)$$

Se observă că relația (4.101) reprezintă relația funcțională intrare – ieșire a unui sistem IIR numai cu poli, iar (4.102) reprezintă relația funcțională intrare – ieșire a unui sistem numai cu zerouri. De asemenea, ieșirea sistemului numai cu zerouri este o combinație liniară de ieșiri

întârziate ale sistemului numai cu poli. Acest lucru se observă ușor la structura în formă directă II redesenată în figura 4.24 pentru $N=M$.

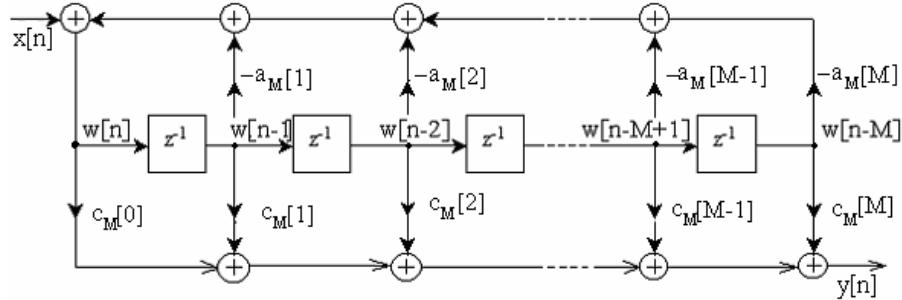


Figura 4.24. Forma directă II de implementare a unui sistem IIR pentru $N=M$

Deoarece zerourile rezultă prin formarea unor combinații liniare din ieșirile anterioare, se poate construi un sistem IIR cu poli și zerouri utilizând structura lattice numai cu poli ca bloc constructiv de bază. S-a specificat deja că $g_m[n]$ este o combinație liniară a ieșirii curente și a celor anterioare. Sistemul

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z)$$

este un sistem numai cu zerouri. Orice combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ este, de asemenea, un sistem numai cu zerouri. Astfel, o structură lattice numai cu poli cu parametrii $K_m, 1 \leq m \leq N$, căreia îl se adaugă o scară care realizează o combinație liniară de $\{g_m[n]\}$ cu ponderile v_m are ca rezultat un sistem IIR cu poli și zerouri, a cărui structură lattice-scară este indicată în figura 4.25, pentru $M = N$. Ieșirea sa este

$$y[n] = \sum_{m=0}^M v_m g_m[n] \quad (4.103)$$

unde $\{v_m\}$ sunt coeficienții ce determină zerourile sistemului. Înținând seama de (4.103), funcția de sistem corespunzătoare sistemului cu poli și zerouri este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^M v_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (4.104)$$

Dacă $X(z) = F_N(z)$ și $F_0(z) = G_0(z)$, relația (4.104) poate fi scrisă ca

$$H(z) = \sum_{m=0}^M v_m \frac{G_m(z)}{G_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_N(z)} = \sum_{m=0}^M v_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M v_m B_m(z)}{A_N(z)} \quad (4.105)$$

Dacă se compară (4.100) cu (4.105), rezultă că

$$C_M(z) = \sum_{m=0}^M v_m B_m(z) \quad (4.106)$$

Din această relație se pot determina coeficienții $\{v_m\}$. Astfel s-a demonstrat cum coeficienții numărătorului polinomial $C_M(z)$ determină coeficienții scării $\{v_m\}$, având în vedere că numitorul polinomial $A_N(z)$, prin coeficienții săi, determină coeficienții lattice $\{K_m\}$.

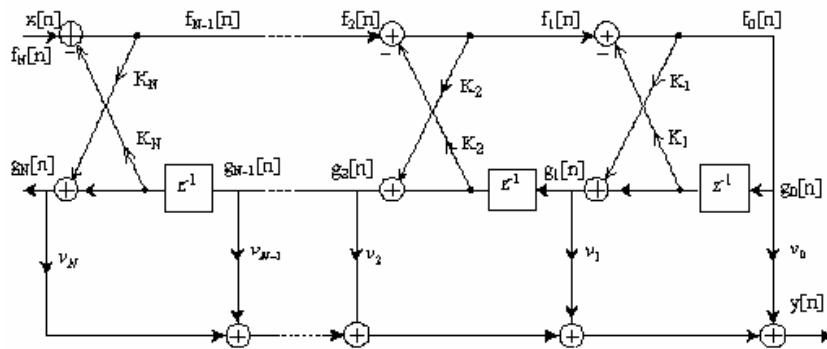


Figura 4.25. Structura lattice scără pentru realizarea unui sistem cu poli și zerouri

Cunoscându-se polinoamele $C_M(z)$ și $A_N(z)$, cu $N \geq M$, sunt determinați mai întâi parametrii structurii lattice numai cu poli, așa cum a fost descris mai înainte, cu algoritmul de conversie prezentat în paragraful 4.2.4, ce convertește coeficienții formei directe de implementare în coeficienți lattice. Cu ajutorul relației recursive de decrementare date de (4.56) se obțin coeficienții lattice $\{K_m\}$ și apoi polinoamele $B_m(z)$, $m = 1, 2, \dots, N$.

Coeficienții scării sunt determinați din relația (4.106), după cum urmează:

$$C_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} v_k B_k(z) + v_m B_m(z) \quad (4.107)$$

sau, echivalent,

$$C_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z) \quad (4.108)$$

Astfel, $C_m(z)$ poate fi calculat recursiv din polinoamele inverse $B_m(z)$, $m = 1, 2, \dots, M$. Deoarece $\beta_m[m] = 1$ pentru toți m , coeficienții $v_m, m = 0, 1, \dots, M$ pot fi determinați observând că

$$v_m = c_m[m] \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (4.109)$$

Rescriind (4.108) în forma

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - v_m B_m(z) \quad (4.110)$$

și calculând această relație recursivă în sens invers pentru m ($m = M, M-1, \dots, 2$), se obțin coeficienții $c_m[m]$ și, prin urmare, parametrii scării, conform relației (4.109).

Structurile filtrelor lattice-scară prezentate mai sus, necesită un minimum de memorie dar nu și un număr minim de multiplicări. Deși există structuri lattice cu un singur multiplicator pe treaptă, structurile lattice cu două multiplicatoare pe fiecare treaptă, descrise anterior sunt cele mai folosite în aplicațiile practice. În concluzie, modularitatea, stabilitatea structurii datorată coeficienților $\{K_m\}$ și robustețea în ceea ce privește efectele lungimii finite a cuvintelor, fac structurile lattice foarte atractive în multe aplicații practice, care includ sistemele de procesare a vocii, filtrarea adaptivă și procesarea semnalelor geofizice.

4. 4. Implementarea și analiza sistemelor discrete, liniare, invariante în timp pe baza variabilelor de stare

Până acum, analiza sistemelor liniare, invariante în timp a fost limitată la o descriere externă cu ajutorul unei relații funcționale intrare- ieșire. Cu alte cuvinte, sistemul a fost caracterizat de ecuații matematice ce leagă semnalul de intrare de semnalul de ieșire. În această secțiune se introduc concepțele de bază despre descrierea internă a sistemelor discrete, liniare, invariante în timp, cauzale. Descrierea internă a sistemului implică o legătură între semnalele de intrare și de ieșire și, de asemenea, un set adițional de variabile numite *variabile de stare*. Astfel, ecuațiile matematice ce descriu un sistem, sunt ușual divizate în două părți:

1. Un set de ecuații matematice ce pun în evidență relația dintre variabilele de stare ale sistemului și semnalul de intrare;

2. Un al doilea set de ecuații matematice ce stabilesc legătura între variabilele de stare și intrarea curentă cu semnalul de ieșire.

Variabilele de stare dă informații despre toate semnalele interne ale sistemului. Ca urmare, descrierea internă dă informații mai detaliate despre sistem în comparație cu descrierea intrare-ieșire. Cu toate că analiza internă este aplicată în special la sisteme discrete, liniare, invariante în timp, cauzale cu o singură intrare și o singură ieșire, tehniciile de analiză pot fi aplicate și sistemelor neliniare, sistemelor variante în timp și sistemelor cu intrări și ieșiri multiple.

Descrierea aleasă (prin relație funcțională intrare – ieșire sau descrierea cu ajutorul variabilelor de stare) depinde de problemă, de informațiile disponibile, precum și de întrebările cărora trebuie date răspunsuri. În continuare se prezintă tehnici de analiză a sistemelor în spațiul stărilor și sunt dezvoltate structuri pe baza variabilelor de stare destinate implementării sistemelor discrete, liniare, invariante în timp.

4.4.1. Conceptul de stare

După cum s-a observat deja, determinarea ieșirii unui sistem necesită prezența semnalului de intrare și un set de condiții inițiale. Dacă un sistem nu este relaxat la un moment inițial, fie acesta n_0 , cunoașterea semnalului de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, nu este suficientă pentru a determina în mod unic ieșirea $y[n]$, pentru $n \geq n_0$. Acest lucru este posibil numai dacă sunt cunoscute condițiile inițiale ale sistemului la $n = n_0$. Setul de condiții inițiale este denumit *starea* sistemului la momentul $n = n_0$.

Definiție. Starea unui sistem la momentul n_0 este cantitatea de informație ce trebuie furnizată la momentul n_0 , care, împreună cu semnalul de intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, determină în mod unic ieșirea pentru toți $n \geq n_0$.

Cu această definiție, conceptul de stare conduce la o descompunere a sistemului în două părți, o parte cu memorie și o parte fără memorie. Informația stocată în locațiile de memorie constituie setul de condiții inițiale și este denumită *starea sistemului*. Ieșirea curentă a sistemului devine o funcție de valoarea curentă a intrării și de starea curentă. Dacă valoarea curentă a intrării este cunoscută, este necesar un

mecanism pentru a actualiza starea sistemului. Prin urmare, starea sistemului la momentul $n_0 + 1$ trebuie să depindă de starea sistemului la momentul n_0 și de valoarea semnalului de intrare $x[n]$, la $n = n_0$.

Următorul exemplu ilustrează abordarea descrierii interne a unui sistem. Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] + 2x[n-1] \quad (4.111)$$

Figura 4.26a arată implementarea în formă directă II a acestui sistem. Se observă că sistemul conține doar un singur element de întârziere, care este, de fapt, o celulă de memorie. Ieșirea $v[n]$ a elementului de întârziere reprezintă valoarea *prezentă* a memoriei, având în vedere că intrarea $v[n+1]$ a elementului de întârziere semnifică valoarea *următoare* ce trebuie memorată. De fapt, această celulă de memorare include toată memoria necesară pentru calculul ieșirii curente $y[n]$. Pentru a verifica acest lucru, se scriu ecuațiile pentru implementarea indicată în figura 4.26a. Acestea sunt

$$v[n+1] = \frac{1}{2}v[n] + x[n] \quad (4.112)$$

$$y[n] = v[n+1] + 2v[n] \quad (4.113)$$

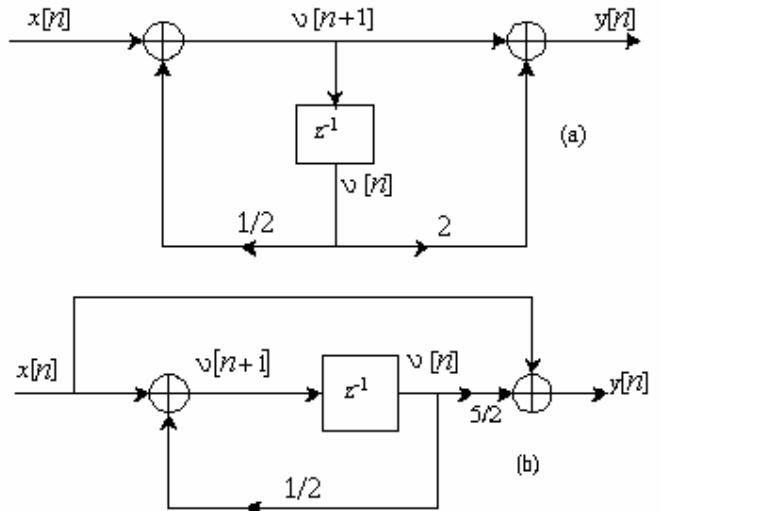


Figura 4.26. a) Implementarea în formă directă II, b) o implementare pe baza variabilelor de stare a sistemului descris de relația (4.111)

Înlocuind (4.112) în (4.113), se obține

$$y[n] = \frac{5}{2}v[n] + x[n]$$

care este o ecuație care descrie un sistem fără memorie. Din altă perspectivă, (4.112) reprezintă un mecanism pentru reactualizarea conținutului celulei de memorie, utilizând conținutul curent al acesteia și valoarea curentă a intrării.

Perechea de ecuații

$$v[n+1] = \frac{1}{2}v[n] + x[n] \quad (4.114)$$

$$y[n] = \frac{5}{2}v[n] + x[n] \quad (4.115)$$

furnizează o descriere completă a sistemului. Variabila $v[n]$, care include toată informația anterioară este denumită *variabilă de stare* și reprezintă chiar starea sistemului. Dacă există doar o singură variabilă de stare, ecuația de stare este unidimensională iar valoarea sa la orice moment de timp este reprezentată ca un punct într-un spațiu unidimensional. Se mai observă, de asemenea, că ecuațiile (4.114) și (4.115) împart sistemul în două părți componente: un subsistem dinamic (cu memorie) și un subsistem static (fără memorie), care furnizează o descriere internă a acestui sistem. Această descriere produce o implementare alternativă echivalentă a sistemului, așa cum este indicată în figura 4.26b.

Descrierea internă se poate aplica și sistemelor cauzale ce sunt variante în timp și/sau neliniare. Pentru a ilustra acest lucru, se consideră un sistem care calculează dispersia unui semnal. Sistemul poate fi descris de ecuația

$$y[n] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [x[k] - \mu[n]]^2 \quad (4.116)$$

unde

$$\mu[n] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \quad (4.117)$$

este valoarea sa medie. Dezvoltând patratul din relația (4.116) și utilizând relația (4.117), se obține

$$y[n] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^2[k] - \mu^2[n] \quad (4.118)$$

Pentru a obține o descriere internă, se definesc următoarele variabile:

$$v_1[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k] \quad (4.119)$$

$$v_2[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x^2[k] \quad (4.120)$$

Apoi, combinând aceste relații cu (4.118) și (4.117), se obține

$$y[n] = -\frac{1}{n^2} v_1^2[n] + \frac{1}{n} v_2[n] \quad (4.121)$$

care descrie un sistem fără memorie, ce exprimă ieșirea în funcție de variabilele de stare curente. Reactualizarea acestor variabile poate fi făcută cu ajutorul ecuațiilor

$$v_1[n+1] = v_1[n] + x[n] \quad (4.122)$$

$$v_2[n+1] = v_2[n] + x^2[n] \quad (4.123)$$

Ecuația (4.123) este neliniară, iar (4.121) este neliniară și variantă în timp.

În general, descrierea internă a sistemelor cauzale conține două seturi de ecuații matematice:

- un set de ecuații, denumit *ecuații de stare*, ce exprimă variabilele de stare de la momentul $n+1$ în funcție de variabilele de stare și intrarea la momentul n ;
- o ecuație, denumită *ecuație de ieșire*, ce exprimă ieșirea la momentul n în funcție de variabilele de stare și intrarea la același moment de timp.

În particular, pentru un sistem cauzal cu N variabile de stare $v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n]$, descrierea internă poate fi exprimată prin următoarele două seturi de ecuații:

Ecuațiile de stare

$$v_i[n+1] = f_i[v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n], x[n]], \quad i=1,2,\dots,N \quad (4.124)$$

Ecuația de ieșire

$$y[n] = g[v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n], x[n]] \quad (4.125)$$

Cele N variabile de stare $v_i[n]$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, pot fi considerate componente unui vector de dimensiune N , iar vârful acestui vector la un moment n poate fi văzut ca un punct în spațiul N -dimensional denumit *spațiu de stare*. Locul geometric al vârfului vectorului la diferite momente de timp determină o traiectorie a vectorului variabilelor de stare. Figura 4.27 ilustrează o traiectorie pentru starea unui sistem de ordinul al doilea, într-un spațiu bidimensional. În general, ecuațiile de stare descriu partea

dinamică a sistemului, în timp ce ecuația de ieșire descrie partea statică (fără memorie) a acestuia. Numărul N al variabilelor de stare exprimă *ordinul* sistemului.

Cu toate că descrierea internă poate fi ușor generalizată la sisteme cu intrări și ieșiri multiple (**Multiple Input Multiple Output, MIMO**), abordarea acestei probleme se va limita doar la sisteme cu o singură intrare și o singură ieșire (**Single Input Single Output, SISO**).

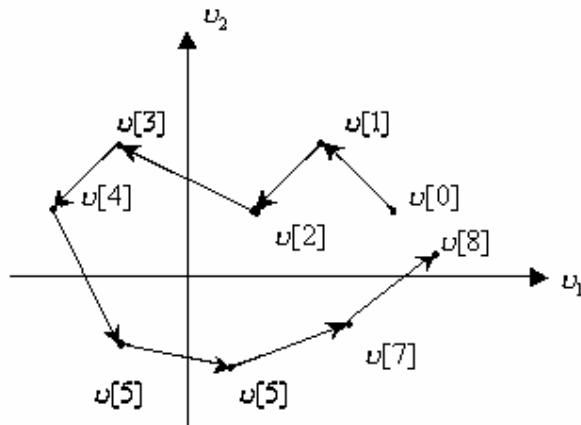


Figura 4.27. Traiectoria stării unui sistem de ordinul al doilea

4.4.2. Descrierea în spațiul stărilor a sistemelor caracterizate de ecuații cu diferențe

În această secțiune se vor obține ecuațiile de stare pentru sistemele discrete descrise de ecuații liniare cu diferențe cu coeficienți constanți, cu o intrare și o ieșire. Pentru aceasta se consideră un sistem de ordinul al treilea, rezultatul fiind ușor de generalizat pentru sistemele de orice ordin N arbitrar, finit.

Fie un sistem discret, liniar, invariant în timp, cauzal, caracterizat de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^3 a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^3 b_k x[n-k] \quad (4.126)$$

Implementarea sistemului în formă directă II este indicată în figura 4.28a. Ca variabile de stare, se vor utiliza ieșirile celulelor de memorie ale sistemului. Ieșirea elementului de întârziere reprezintă valoarea prezentă memorată în celulă, iar intrarea reprezintă valoarea

următoare ce urmează a fi memorată. În consecință, cu ajutorul figurii 4.28a, se poate scrie

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= v_2[n] \\ v_2[n+1] &= v_3[n] \\ v_3[n+1] &= -a_3v_1[n] - a_2v_2[n] - a_1v_3[n] + x[n] \end{aligned} \quad (4.127)$$

Se observă că expresiile variabilelor de stare pentru sistemul de ordinul al treilea descris de ecuația (4.126), implică trei ecuații cu diferențe de ordinul întâi date de (4.127). În general, un sistem de ordin N poate fi descris de N ecuații cu diferențe de ordinul întâi.

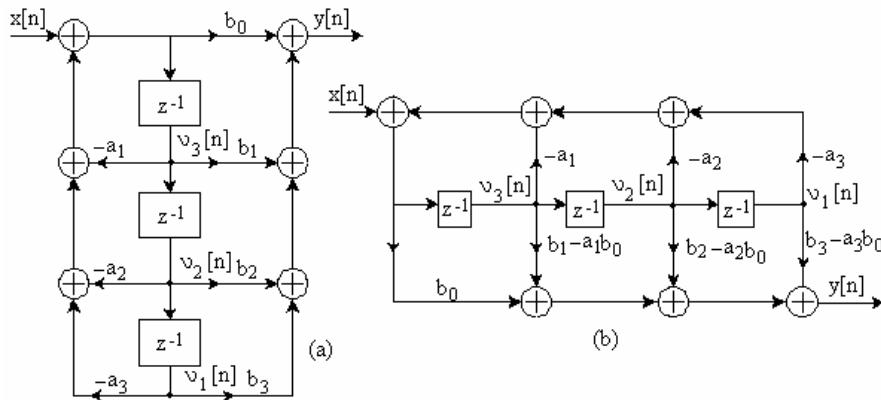


Figura 4.28 Realizarea (a) în forma directă II și (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (4.126)

Ecuația de ieșire, ce exprimă pe $y[n]$ în funcție de variabilele de stare și de valoarea prezentă a intrării, $x[n]$, poate fi, de asemenea, obținută din figura 4.28a.

$$y[n] = b_0v_3[n+1] + b_1v_2[n] + b_2v_1[n] + b_3v_0[n] \quad (4.128)$$

Înlocuind $v_3[n+1]$ din (4.127) în (4.128), ecuația de ieșire devine

$$\begin{aligned} y[n] &= (b_3 - b_0a_3)v_1[n] + (b_2 - b_0a_2)v_2[n] + \\ &+ (b_1 - b_0a_1)v_3[n] + b_0x[n] \end{aligned} \quad (4.128')$$

Pe baza relațiilor (4.127) și (4.128') rezultă implementarea sistemului în spațiul stărilor din figura 4.28b.

O descriere alternativă în spațiul stărilor pentru sistemul caracterizat de relația (4.126) poate fi obținută folosind structura în formă directă II transpusă, desenată în figura 4.29a.

Dacă se utilizează variabilele de stare indicate din această figură, se obține

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= b_3x[n] - a_3y[n] \\ v_2[n+1] &= v_1[n] + b_2x[n] - a_2y[n] \\ v_3[n+1] &= v_2[n] + b_1x[n] - a_1y[n] \end{aligned} \quad (4.129)$$

Ecuatăia de ieșire este

$$y[n] = b_0x[n] + v_3[n] \quad (4.130)$$

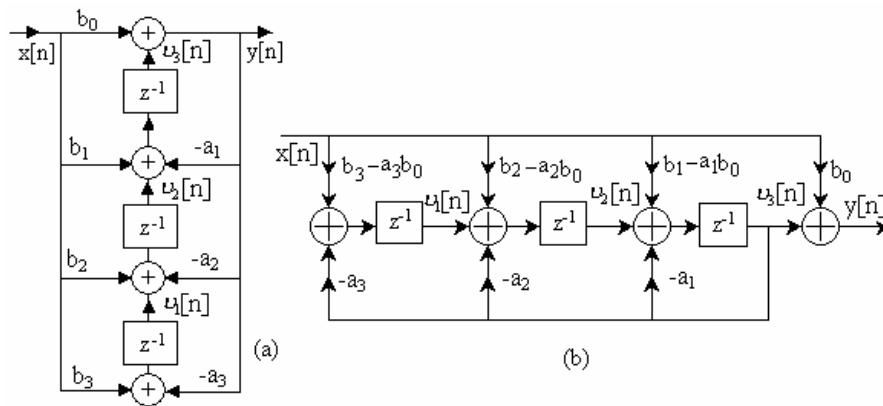


Figura 4.29 Realizarea (a) în forma directă II transpusă și (b) în spațiul stărilor a sistemului descris de relația (4.126)

Eliminând $y[n]$ dat de (4.130) din (4.129), rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= -a_3v_3[n] + (b_3 - b_0a_3)x[n] \\ v_2[n+1] &= v_1[n] - a_2v_3[n] + (b_2 - b_0a_2)x[n] \\ v_3[n+1] &= v_2[n] - a_1v_3[n] + (b_1 - b_0a_1)x[n] \end{aligned} \quad (4.131)$$

Pe baza relațiilor (4.130) și (4.131) rezultă implementarea în spațiul stărilor din figura 4.29b.

Dacă ordinul sistemului crește, atunci și descrierea în spațiul stărilor devine mai complexă. Cu toate acestea, introducând notații matriceale, se pot exprima ecuațiile de stare într-o formă mult mai compactă, care simplifică manipularea lor și permite utilizarea algebrei matriceale pentru analiza în spațiul stărilor.

Matriceal, relațiile (4.127) și (4.128') se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad (4.132)$$

$$y[n] = [(b_3 - b_0 a_3)(b_2 - b_0 a_2)(b_1 - b_0 a_1)] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \quad (4.133)$$

Aceste ecuații sunt cunoscute sub denumirea de *implementarea în spațiul stărilor de tipul 1*.

Similar, relațiile (4.131) și (4.130) pot fi exprimate în formă matriceală, astfel:

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x[n] \quad (4.134)$$

$$y[n] = [0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \quad (4.135)$$

Această descriere se numește *implementare în spațiul stărilor de tipul 2*.

Cele două seturi de ecuații (4.132), (4.133) și (4.134), (4.135) descriu complet sistemul, împărțindu-l, aşa cum s-a precizat, în două părți componente, una cu memorie și una fără.

Generalizând exemplul anterior, se poate observa ușor faptul că sistemul descris de ecuația

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (4.136)$$

poate fi descris în formă matriceală, de o realizare în spațiul stărilor, liniară, invariantă în timp.

Pentru un sistem cu N variabile de stare $v_1[n], v_2[n], \dots, v_N[n]$, se definește starea $\mathbf{v}[n]$ sub forma unui vector coloană N -dimensional

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ \vdots \\ v_N[n] \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

De asemenea, fie \mathbf{F} o matrice $N \times N$, \mathbf{q} și \mathbf{g} vectori coloană N -dimensionali, definiți ca

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

unde $\{f_{ij}\}$, $\{q_k\}$, $\{g_k\}$ sunt constante și, fie d , o constantă scalară.

Cu aceste notări ecuația de stare și cea de ieșire pot fi scrise, după cum urmează:

Ecuția de stare

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}\mathbf{x}[n] \quad (4.139)$$

Ecuția de ieșire

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (4.140)$$

Orice sistem discret ale cărui intrare $x[n]$, ieșire $y[n]$ și stare $\mathbf{v}[n]$, pentru toți $n \geq n_0$, sunt relaționate cu ecuațiile de mai sus, este *liniar* și *invariant în timp*. Dacă cel puțin una din mărimele \mathbf{F} , \mathbf{q} , \mathbf{g} și d depinde de timp, sistemul este variant în timp.

Implementarea de tipul 1 liniară și invariantă în timp se obține, alegând

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0 \quad (4.141)$$

iar implementarea de tipul 2 se obține cu alegerea:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} & \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & d &= b_0
 \end{aligned} \tag{4.142}$$

Relațiile (4.139)-(4.140) descriu un *model în spațiul stărilor liniar și invariant în timp*, care poate fi reprezentat printr-o diagramă bloc matriceală ca în figura 4.30. În această figură liniile duble reprezintă mărimi vectoriale iar blocurile, coeficienți ai mărimilor vectoriale sau matriceale.

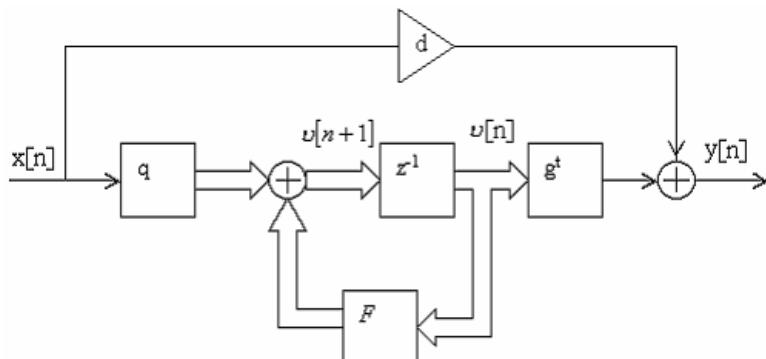


Figura 4.30. Descrierea generală în spațiul stărilor a unui sistem liniar, invariant în timp

Există mai multe variante de selectare a variabilelor de stare și de structuri în spațiul stărilor care sunt echivalente pentru același sistem. Motivul pentru care se studiază o varietate de modele și, prin urmare, de structuri, este de a le găsi pe acelea care sunt cel mai puțin sensitive la aritmetică lungimii finite a cuvintelor sau necesită o implementare mai puțin complexă, problemă tratată în Capitolul 5.

Exemplul 4.5.

Să se determine implementarea diagramei bloc a sistemului descris de următorul model în spațiul stărilor:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,35 & 0,55 \\ -0,45 & 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= [3 \quad 1] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + x[n] \end{aligned}$$

Soluție. Scriind ecuația de mai sus explicit, rezultă

$$v_1[n+1] = 1,35v_1[n] + 0,55v_2[n] + 0,5x[n]$$

$$v_2[n+1] = -0,45v_1[n] + 0,35v_2[n] + 0,5x[n]$$

$$y[n] = 3v_1[n] + v_2[n] + x[n]$$

Ecuațiile conduc la diagrama bloc din figura 4.31.

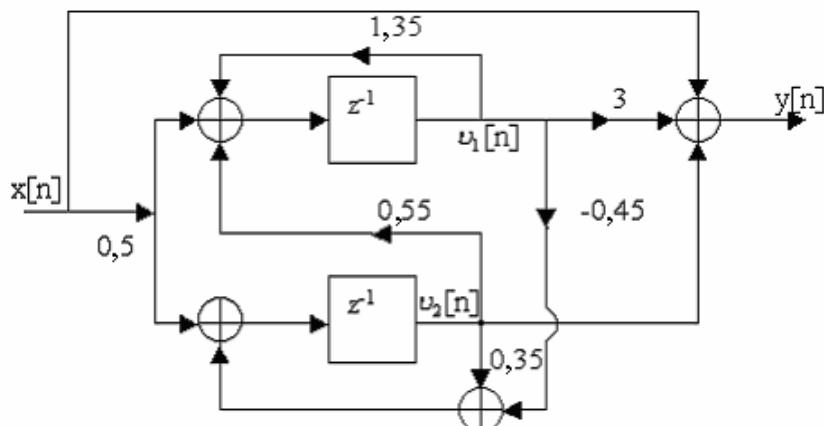


Figura 4.31. Implementarea sistemului din exemplul 4.5

Exemplul 4.6.

Să se determine forma directă II, forma directă II transpusă, realizările în spațiul stărilor de tipul 1 și 2 pentru sistemul descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = 3y[n-1] - 2y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

Soluție. Comparând această ecuație cu (4.136), se obțin următoarele parametruii

$$N = 2 \quad a_1 = -3 \quad a_2 = 2 \quad b_0 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 0$$

Modificând corespunzător figurile 4.28 și 4.29 se obțin implementările în forma directă II și forma directă II transpusă din figura 4.32a și b.

Pentru a obține structurile interne, mai întâi se observă că din (4.141) rezultă pentru structura de tip 1

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad d = 1$$

Apoi, din (4.139) și (4.140) rezultă

$$v_1[n+1] = v_2[n]$$

$$v_2[n+1] = -2v_1[n] + 3v_2[n] + x[n]$$

$$y[n] = -2v_1[n] + 4v_2[n] + x[n]$$

Acstea ecuații conduc la implementarea din figura 4.34c.

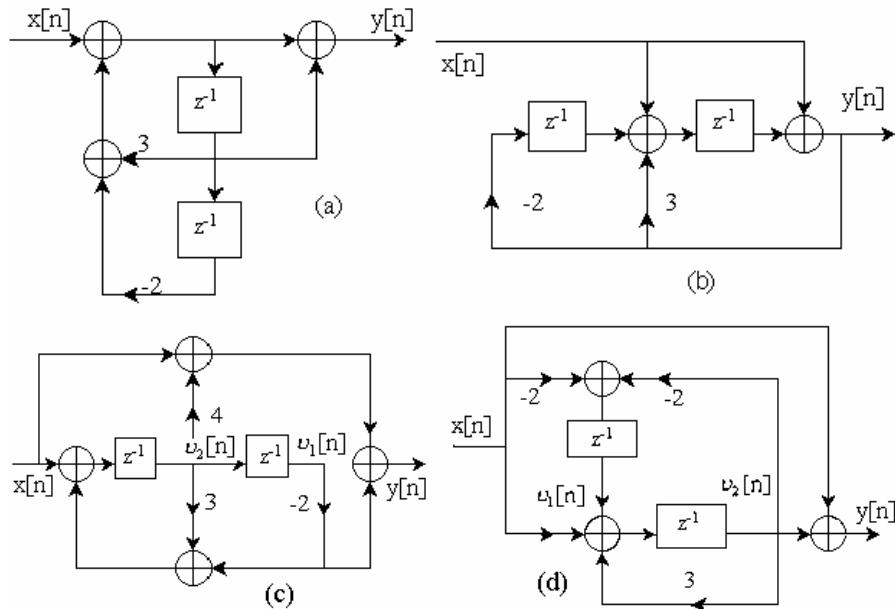


Figura 4.32. Realizarea (a) în forma directă II, (b) în forma directă II transpusă, (c) în spațiul stărilor de tipul 1, (d) în spațiul stărilor de tipul 2, pentru sistemul din exemplul 4.6.

Similar, pentru structura de tipul 2, rezultă

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = 1$$

sau

$$\begin{aligned}\nu_1[n+1] &= -2\nu_2[n] - 2x[n] \\ \nu_2[n+1] &= \nu_1[n] + 3\nu_2[n] + 4x[n] \\ y[n] &= \nu_2[n] + x[n]\end{aligned}$$

care conduc la implementarea din figura 2.32d. Se observă că toate implementările sunt diferite.

4.4.3. Soluția ecuațiilor cu diferențe în spațiul stărilor

Există diverse metode pentru rezolvarea ecuațiilor cu diferențe în spațiul stărilor. În cele ce urmează se va obține o soluție recursivă care face uz de faptul că ecuațiile în spațiul stărilor reprezintă un sistem de ecuații cu diferențe de ordinul întâi.

Pentru un model intern uni-dimensional ecuațiile de stare sunt

$$\nu[n+1] = f\nu[n] + qx[n] \quad (4.143)$$

$$y[n] = g\nu[n] + dx[n] \quad (4.144)$$

unde f, q, g și d sunt coeficienții scalari, fiecăruiai ai sistemului. Problema este de a determina ieșirea $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, cunoscându-se intrarea $x[n]$, $n \geq n_0$ și starea inițială $\nu[n_0]$. Rezolvând ecuația (4.143) recursiv, rezultă:

$$\begin{aligned}\nu[n_0 + 1] &= f\nu[n_0] + qx[n_0] \\ \nu[n_0 + 2] &= f\nu[n_0 + 1] + qx[n_0 + 1] = f^2\nu[n_0] + fqx[n_0] + qx[n_0 + 1] \\ \nu[n_0 + 3] &= f\nu[n_0 + 2] + qx[n_0 + 2] = \\ &= f^3\nu[n_0] + f^2qx[n_0] + fqx[n_0 + 1] + qx[n_0 + 2] \\ &\dots \\ \nu[n_0 + m] &= f^m\nu[n_0] + f^{m-1}qx[n_0] + f^{m-2}qx[n_0 + 1] + \dots \\ &\quad + fqx[n_0 + m - 2] + qx[n_0 + m - 1]\end{aligned}$$

Cu notația $n = n_0 + m$, rezultă $m = n - n_0$, iar ecuația de mai sus devine

$$\begin{aligned}\nu[n] &= f^{n-n_0}\nu[n_0] + f^{n-n_0-1}qx[n_0] + f^{n-n_0-2}qx[n_0 + 1] + \dots \\ &\quad + fqx[n-2] + qx[n-1]\end{aligned}$$

Astfel, pentru orice $n > n_0$, se obține

$$\nu[n] = f^{n-n_0}\nu[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} f^{n-1-k}qx[k] \quad (4.145)$$

Ecuația de ieșire se obține înlocuind (4.145) în (4.144). Aceasta conduce la

$$y[n] = g f^{n-n_0} v[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} g f^{n-1-k} q x[k] + d x[n] \quad (4.146)$$

care reprezintă răspunsul total al sistemului.

Dacă se alege starea inițială $v[n_0] = 0$, din (4.146) se obține *răspunsul de stare zero* al sistemului [63]

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=n_0}^{n-1} g f^{n-1-k} q x[k] + d x[n] \quad (4.147)$$

Dacă, însă, se impune $x[n] = 0$ în (4.146) pentru $n \geq n_0$, se obține *răspunsul de intrare zero* [63]

$$y_{zi}[n] = g f^{n-n_0} v[n_0] \quad (4.148)$$

Răspunsul total dat de (4.146) este suma răspunsurilor date de (4.147) și (4.148)

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (4.149)$$

Aceste rezultate pot fi ușor generalizate pentru modelul N -dimensional [48]

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}\mathbf{x}[n] \quad (4.150)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}^T \mathbf{v}[n] + d \mathbf{x}[n] \quad (4.151)$$

Într-adevăr, cunoscându-se $\mathbf{v}[n_0]$, pentru $n > n_0$ se poate scrie

$$\mathbf{v}[n_0 + 1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n_0] + \mathbf{q}\mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{v}[n_0 + 2] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n_0 + 1] + \mathbf{q}\mathbf{x}[n_0 + 1]$$

$$= \mathbf{F}^2 \mathbf{v}[n_0] + \mathbf{F} \mathbf{q} \mathbf{x}[n_0] + \mathbf{q} \mathbf{x}[n_0 + 1]$$

Dacă se continuă ca în cazul unidimensional, se obține pentru $n > n_0$

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q} \mathbf{x}[k] \quad (4.152)$$

Matricea \mathbf{F}^0 este definită ca matricea unitate de dimensiune $N \times N$. Matricea \mathbf{F}^{i-j} este adesea notată $\Phi(i-j)$, adică

$$\Phi(i-j) = \mathbf{F}^{i-j} \quad (4.153)$$

pentru orice $i \geq j$ întregi. Această matrice este numită *matricea de tranziție* a sistemului.

Ieșirea sistemului se obține substituind (4.152) în (4.151) și ținând cont de (4.153). Rezultatul acestei substituții este

$$\begin{aligned}
y[n] &= \mathbf{g}^t \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q}x[k] + dx[n] \\
&= \mathbf{g}^t \Phi[n-n_0] \mathbf{v}[n_0] + \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t \Phi[n-1-k] \mathbf{q}x[k] + dx[n]
\end{aligned} \quad (4.154)$$

Cu acest rezultat general, se poate determina ieșirea pentru două cazuri particulare. Răspunsul de intrare zero al sistemului este

$$y_{zi}[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{F}^{n-n_0} \mathbf{v}[n_0] = \mathbf{g}^t \Phi[n-n_0] \mathbf{v}[n_0] \quad (4.155)$$

Răspunsul de stare zero al sistemului este

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathbf{g}^t \Phi[n-1-k] \mathbf{q}x[k] + dx[n] \quad (4.156)$$

Exemplul 4.7.

Să se calculeze răspunsul de stare zero pentru sistemul descris de

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-2 \quad 4] \mathbf{v}[n] + x[n]$$

dacă la intrare se aplică semnalul treaptă unitate.

$$Soluție. Semnalul de intrare este x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Deoarece se dorește obținerea răspunsului de stare zero, se va impune vectorul de stare inițial egal cu zero

$$\mathbf{v}[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Atunci

$$y[0] = [-2 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x[0] = 1$$

$$\mathbf{v}[1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y[1] = [-2 \quad 4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x[1] = 5$$

$$\mathbf{v}[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y[2] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x[2] = 15$$

Continuând această procedură iterativă, se obține
 $y[3] = 47$, $y[4] = 113$ și aşa mai departe.

Exemplul 4.8.

Să se calculeze răspunsul sistemului FIR

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

la un semnal oarecare $x[n]$, $n \geq 0$.

Soluție. Descrierea internă a sistemului este

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [1 \ 2] \mathbf{v}[n] + x[n]$$

unde $v_1[n] = x[n-2]$ și $v_2[n] = x[n-1]$. Din ecuația de stare rezultă

$$\mathbf{v}[1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[0]$$

$$\mathbf{v}[2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[0] + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[1]$$

Se obține $\mathbf{F}^n = 0$ pentru $n \geq 2$. Prin urmare starea inițială $\mathbf{v}[0]$ nu mai afectează starea sistemului după doi pași. Acest lucru este evident deoarece sistemul FIR are o memorie finită egală cu 2. În consecință, influența stării inițiale asupra stărilor viitoare și asupra ieșirilor dispare după doi pași. Pentru $n_0 = 0$, ecuația (4.154) conduce la ieșirea

$$y[n] = \mathbf{g}' \mathbf{F}^n \mathbf{v}[0] + \mathbf{g}' \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} x[0] + \dots + \mathbf{g}' \mathbf{F} \mathbf{q} x[n-2] + \mathbf{g}' \mathbf{q} x[n-1] + d x[n]$$

Deoarece $\mathbf{F}^n = 0$ pentru $n \geq 2$, ieșirea devine

$$y[n] = \mathbf{g}' \mathbf{F} \mathbf{q} x[n-2] + \mathbf{g}' \mathbf{q} x[n-1] + d x[n] \quad n \geq 2$$

Substituind valorile pentru \mathbf{g} , \mathbf{F} , \mathbf{q} și d , ecuația de mai sus se reduce la

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad n \geq 2$$

care este descrierea intrare-ieșire a sistemului FIR.

Ca o generalizare a rezultatelor din exemplul de mai sus, pentru un sistem FIR de ordinul N , $\mathbf{F}^n = 0$ pentru $n \geq N$ și, în consecință, starea inițială a sistemului afectează doar primele N ieșiri.

Exemplul 4.9.

Să se calculeze răspunsul la treapta unitate a sistemului

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [1 \ 1] v[n] + 2x[n]$$

Soluție. Cele două componente din ecuația de stare sunt

$$v_1[n+1] = \frac{1}{2}v_1[n] + x[n], \quad v_2[n+1] = \frac{1}{3}v_2[n] + x[n]$$

Acesta este un sistem de două ecuații independente care pot fi ușor rezolvate recursiv, ca în cazul uni-dimensional. Într-adevăr, din (4.145) pentru $n > 0$, rezultă

$$v_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_1[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} x[k]$$

$$v_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_2[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} x[k]$$

Ieșirea sistemului este

$$\begin{aligned} y[n] &= v_1[n] + v_2[n] + 2x[n] = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n v_1[0] + \left(\frac{1}{3}\right)^n v_2[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} + 2 \quad n > 0 \end{aligned}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_1[0] + \left(\frac{1}{3}\right)^n v_2[0] + 2(1 - 2^{-n}) + \frac{3}{2}(1 - 3^{-n}) + 2 \quad n > 0$$

Se observă că soluția a putut fi obținută în formă compactă, deoarece matricea \mathbf{F} este diagonală. Dacă matricea \mathbf{F} este diagonală, sistemul N – dimensional poate fi descris în spațiul stărilor de N ecuații unidimensionale independente. Astfel, ecuațiile de stare devin ecuații cu diferențe de ordinul întâi, ușor de rezolvat.

4.4.4. Relații de legătură între descrierea intrare-ieșire și descrierea în spațiul stărilor a SLDIT

Din prezentarea anterioară s-a văzut că nu există numai o singură posibilitate în ceea ce privește alegerea variabilelor de stare ale unui

sistem cauzal. Valori diferite ale vectorului de stare conduc la structuri diferite pentru implementarea acelorași sisteme. În general, relațiile intrare ieșire nu descriu în mod unic structura internă a sistemului.

Pentru a demonstra această afirmație, se consideră un sistem SISO (o singură intrare și o singură ieșire), N-dimensional, având reprezentarea în spațiul stărilor

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \quad (4.157)$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (4.158)$$

Fie \mathbf{P} orice matrice $N \times N$ a cărei inversă, \mathbf{P}^{-1} , există. Se definește un nou vector de stare $\hat{\mathbf{v}}[n]$

$$\hat{\mathbf{v}}[n] = \mathbf{P}\mathbf{v}[n] \quad (4.159)$$

de unde

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{P}^{-1}\hat{\mathbf{v}}[n] \quad (4.160)$$

Dacă relația (4.157) este multiplicată la dreapta cu \mathbf{P} , se obține

$$\mathbf{P}\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{P}\mathbf{q}x[n]$$

Utilizând (4.159) și (4.160), ecuația de stare de mai sus devine

$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = (\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[n] + (\mathbf{P}\mathbf{q})x[n] \quad (4.161)$$

Similar, cu ajutorul relației (4.160), ecuația de ieșire (4.158) devine

$$y[n] = (\mathbf{g}^t \mathbf{P}^{-1})\hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \quad (4.162)$$

Se definesc parametrii matriceali de sistem $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{g}}$, sub forma:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} \quad (4.163)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t \mathbf{P}^{-1}$$

Cu aceste definiții, ecuațiile de stare pot fi exprimate ca

$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}[n] + \hat{\mathbf{q}}x[n] \quad (4.164)$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{g}}^t \hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n] \quad (4.165)$$

Prin compararea relațiilor (4.157) și (4.158) cu (4.164) și (4.165), se observă că printr-o simplă transformare liniară a variabilelor de stare, se generează un nou set de ecuații de stare și o ecuație de ieșire, în care intrarea $x[n]$ și ieșirea $y[n]$ sunt neschimbate. Deoarece există un număr infinit de alegeri ale matricei de transformare \mathbf{P} , există un număr infinit de ecuații de stare și structuri pentru un sistem. Unele dintre aceste structuri sunt diferite, în timp ce altele sunt apropiate ca structură, diferind doar prin factorii de scalare.

Unei implementări în spațiul stărilor a unui sistem i se asociază conceptul de *implementare minimală*. O implementare internă se spune că este *minimală* dacă dimensiunea spațiului stărilor (a numărului variabilelor de stare) este cea mai mică din toate realizările posibile. Deoarece fiecare variabilă de stare reprezintă o cantitate ce trebuie stocată și reactualizată la fiecare moment n , rezultă că o implementare minimală este aceea care necesită cel mai mic număr de celule de întârziere. Se reamintește faptul că implementarea în formă directă II necesită cel mai mic număr de celule de memorie și, în consecință, o realizare în spațiul stărilor a acesteia are ca rezultat o implementare minimală. Similar, un sistem FIR realizat ca o structură în formă directă conduce la o implementare minimală internă, dacă valorile registrelor de stocare sunt definite ca variabile de stare. Implementarea în forma directă I a unui sistem IIR conduce la o implementare minimală.

În continuare se va determina răspunsul la impuls al sistemului descris în spațiul stărilor. Prin definiție, răspunsul la impuls $h[n]$ al unui sistem este răspunsul de stare zero al sistemului la excitația $x[n] = \delta[n]$ [63].

Prin urmare, acesta poate fi obținut din ecuația (4.154) dacă se impune $n_0 = 0$ (momentul când se aplică intrarea), $v[0] = 0$ și $x[n] = \delta[n]$. Astfel, răspunsul la impuls al sistemului descris de (4.157) și (4.158) este dat de relația

$$h[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} u[n-1] + d\delta[n] = \mathbf{g}^t \Phi[n-1] \mathbf{q} u[n-1] + d\delta[n] \quad (4.166)$$

Pentru o descriere internă dată este ușor de determinat răspunsul la impuls din relația (4.166). Invers, însă, nu este ușor, deoarece există un număr infinit de implementări interne pentru o aceeași descriere intrare-iesire.

Exemplul 4.10.

Secvența Fibonacci este dată de $\left\{ \begin{matrix} 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \\ \uparrow \end{matrix} \right\}$

Să se determine al șaptesprezecelea termen fără a calcula termenii anteriori.

Soluție. Secvența Fibonacci poate fi scrisă ca fiind răspunsul la impuls al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

Într-adevăr impunând $y[-1] = y[-2] = 0$, și $x[n] = \delta[n]$, se obține $h[0] = 1$, $h[1] = 1$, $h[2] = 2$, $h[3] = 3$, $h[4] = 5$ și aşa mai departe.

Realizarea în spațiul stărilor de tipul 1 este descrisă de

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = 1$$

Din (4.166), rezultă

$$h[17] = \mathbf{g}' \mathbf{F}^{16} \mathbf{q}$$

Calculând \mathbf{F}^2 , \mathbf{F}^4 , \mathbf{F}^8 și \mathbf{F}^{16} , se obține

$$\mathbf{F}^{16} = \begin{bmatrix} 610 & 987 \\ 987 & 1597 \end{bmatrix}$$

de unde rezultă $h[17] = 2584$.

4.4.4.1. Sistemul transpus

Transpusa matricei de sistem \mathbf{F} este se notează cu \mathbf{F}^t și se obține prin schimbarea coloanelor sale în linii.

Înțând cont de relațiile (4.157)-(4.158), se definește sistemul transpus, ca fiind caracterizat de relațiile

$$\mathbf{v}'[n+1] = \mathbf{F}^t \mathbf{v}'[n] + \mathbf{g}x[n] \quad (4.167)$$

$$y'[n] = \mathbf{q}' \mathbf{v}'[n] + dx[n] \quad (4.168)$$

Conform relației (4.166), răspunsul la impuls al acestui sistem este dat de

$$h'[n] = \mathbf{q}' (\mathbf{F}^t)^{n-1} \mathbf{g}u[n-1] + d\delta[n] \quad (4.169)$$

Din algebra matricială se știe că $(\mathbf{F}^t)^{n-1} = (\mathbf{F}^{n-1})^t$. Prin urmare

$$h'[n] = \mathbf{q}' (\mathbf{F}^{n-1})^t \mathbf{g}u[n-1] + d\delta[n] \quad (4.169')$$

Deoarece termenul $\mathbf{q}' (\mathbf{F}^{n-1})^t \mathbf{g}$ este scalar, el este egal cu transpusul său, adică

$$[\mathbf{q}' (\mathbf{F}^{n-1})^t \mathbf{g}]^t = \mathbf{g}' (\mathbf{F}^t)^{n-1} \mathbf{q}$$

ceea ce conduce la identitatea relațiilor (4.166) și (4.169') și, deci, $h'[n] = h[n]$. Astfel un sistem SISO și transpusul său au același răspuns la impuls și, prin urmare, aceeași relație de legătură intrare-ieșire.

Realizările în spațiul stărilor de tipul 1 și tipul 2, descrise de relațiile (4.132)–(4.135), sunt structuri transpuze care provin de la aceeași relație de legătură intrare-ieșire (4.126).

Exemplul 4.11.

Să se deseneze diagrama bloc pentru sistemul transpus din Exemplul 4.5 cu realizarea din figura 4.31.

Soluție. Inversând direcția semnalului în toate ramurile și înlocuind nodurile de branșare cu noduri de sumare, și invers, în diagrama bloc din figura 4.31, se obține diagrama bloc din figura 4.33a.

Sistemul transpus este caracterizat de ecuațiile

$$\begin{bmatrix} v_1'[n+1] \\ v_2'[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,35 & -0,45 \\ 0,55 & 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'[n] \\ v_2'[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [0,5 \quad 0,5] \begin{bmatrix} v_1'[n] \\ v_2'[n] \end{bmatrix} + x[n]$$

care conduc direct la diagrama bloc reprezentată în figura 4.33b.

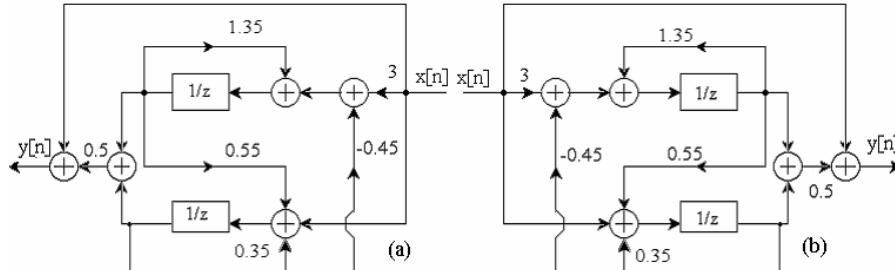


Figura 4. 33. (a) Sistemul transpus al celui din figura 4.31, (b) Realizarea sistemului din exemplul 4.11.

S-a folosit structura transpusă deoarece furnizează o metodă simplă de generare a unei noi structuri. Totuși, cîteodată această nouă structură poate dифe ри numai printr-un factor de multiplicare sau poate fi identică cu cea originală.

4.4.4.2. Sistemul diagonal

O soluție compactă a ecuațiilor în spațiul stărilor se obține, dacă matricea de sistem \mathbf{F} este diagonală. Aceasta implică găsirea unei matrice \mathbf{P} , astfel încât $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$ să fie diagonală. Diagonalizarea matricei \mathbf{F} poate fi realizată mai întâi determinând valorile proprii și vectorii proprii ai matricei.

Fie λ o valoare proprie a lui \mathbf{F} . Un vector nenul \mathbf{u} este un vector propriu asociat matricei \mathbf{F} , dacă

$$\mathbf{F}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (4.170)$$

Pentru a determina valorile proprii ale lui \mathbf{F} , se observă că

$$(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0 \quad (4.171)$$

Ecuația are o soluție nenulă (neterivială) \mathbf{u} , dacă matricea $\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}$ este singulară ($(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})$ neinversabilă), și anume, dacă

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (4.172)$$

Determinantul din relația (4.172), conduce la polinomul caracteristic al matricei \mathbf{F} . Pentru o matrice \mathbf{F} de ordin $N \times N$, polinomul caracteristic este de grad N și, prin urmare, are N rădăcini notate cu λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Rădăcinile pot fi distințe sau nu. În orice caz, pentru fiecare rădăcină λ_i , se poate determina un vector \mathbf{u}_i , numit vectorul propriu corespunzător valorilor proprii λ_i , din ecuația

$$\mathbf{F}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i$$

Acești vectori proprii sunt ortogonali, adică $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0$, pentru $i \neq j$.

Dacă se formează o matrice \mathbf{U} ale cărei coloane sunt vectorii proprii $\{\mathbf{u}_i\}$,

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{Bmatrix},$$

atunci matricea $\mathbf{F} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U}$ este diagonală.

Se observă faptul că valorile proprii ale matricei \mathbf{F} sunt identice cu rădăcinile polinomului caracteristic. De exemplu, sistemul care generează secvența Fibonacci este caracterizat de ecuația cu diferențe omogenă

$$y[n] - y[n-1] - y[n-2] = 0 \quad (4.173)$$

Soluția ecuației omogene are forma

$$y_h[n] = \lambda^n$$

Substituția acestei soluții în (4.173) conduce la polinomul caracteristic

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

care este exact același polinom caracteristic obținut din determinantul matricei $(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I})$.

Deoarece implementarea sistemului cu ajutorul variabilelor de stare nu este unică, nici matricea \mathbf{F} nu este unică. Totuși, valorile proprii

ale sistemului sunt unice, astfel că ele sunt invariante la orice transformare liniară, nesingulară, a matricei \mathbf{F} . În consecință, polinomul caracteristic corespunzător matricei \mathbf{F} , poate fi determinat fie evaluând determinantul matricei $(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I})$, fie din ecuația cu diferențe ce characterizează sistemul.

În concluzie, descrierea internă realizează o caracterizare alternativă a sistemului, care este echivalentă cu o descriere intrare-iesire. Un avantaj al descrierii sistemului în spațiul stărilor este că oferă un plus de informații în legătură cu variabilele interne ale sistemului, informații care nu se obțin ușor din descrierea intrare-iesire. Formularea variabilelor de stare pentru un sistem liniar invariant în timp permite reprezentarea sistemul printr-un sistem de ecuații cu diferențe de ordinul întâi, independente. Această independență poate fi realizată prin intermediul unei transformări care poate fi obținută prin găsirea valorilor proprii și vectorilor proprii ai sistemului.

Exemplul 4.12.

Să se găsească o formulă explicită pentru secvența Fibonacci din Exemplul 4.10.

Soluție. În Exemplul 4.10 s-a stabilit că secvența Fibonacci poate fi considerată ca fiind răspunsul la impulsul al sistemului care satisfac următoarele ecuații în spațiul stărilor:

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [1 \ 1] \mathbf{v}[n] + x[n]$$

Aici se dorește să se determine un sistem echivalent

$$\hat{\mathbf{v}}[n+1] = \hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}}[n] + \hat{\mathbf{q}}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t \hat{\mathbf{v}}[n] + dx[n]$$

astfel încât matricea $\hat{\mathbf{F}}$ să fie diagonală. Conform relației (4.163), două sisteme sunt echivalente dacă

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} \quad \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{q} \quad \hat{\mathbf{g}}^t = \mathbf{g}^t \mathbf{P}^{-1}$$

Fiind dată matricea \mathbf{F} , problema este de a determina o matrice \mathbf{P} astfel încât $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{P}^{-1}$ să fie o matrice diagonală.

Întâi se calculează determinantul din (4.172), de unde rezultă valorile proprii.

$$\det(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Corespunzător acestor valori proprii, din (4.170) rezultă vectorii proprii

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Se observă că $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 = 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0$ (vectorii proprii sunt ortogonali). Matricea \mathbf{U} , ale cărei coloane sunt vectori proprii ai matricei \mathbf{F} , este

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Matricea $\mathbf{U}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U}$ este diagonală. Într-adevăr, se observă ușor că

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

și deoarece matricea de transformare este $\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1}$ atunci

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Astfel, matricea diagonală $\hat{\mathbf{F}}$ are forma $\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, unde

elementele diagonale sunt valorile proprii ai polinomului caracteristic.

$$\text{Mai mult, } \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{P} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \text{ și } \hat{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{g}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

Răspunsul la impuls al acestui sistem diagonal echivalent este

$$h[n] = \hat{\mathbf{g}}^T \hat{\mathbf{F}}^{n-1} \hat{\mathbf{q}} u[n-1] + d \delta[n] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] u[n-1] + \delta[n]$$

care este formula generală pentru secvența Fibonacci.

O expresie alternativă poate fi găsită observând că secvența Fibonacci poate fi considerată ca fiind răspunsul de intrare zero al sistemului descris de ecuația cu diferențe

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

cu condițiile inițiale $y[-1] = 1$, $y[-2] = -1$. Din implementarea în spațiul stărilor de tip 1 s-a observat că $v_1[0] = y[-2] = -1$ și $v_2[0] = y[-1] = 1$.

Prin urmare

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1[0] \\ \hat{v}_2[0] \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} v_1[0] \\ v_2[0] \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{bmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

iar răspunsul de intrare zero este

$$y_{zi}[n] = \hat{\mathbf{g}}' \hat{\mathbf{F}}^n \hat{\mathbf{v}}[0] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} u[n],$$

care este o formă mai cunoscută a secvenței Fibonacci, în care primul termen al secvenței este zero. Prin urmare, secvența este $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$.

4.4.5. Analiza SDLIT în spațiul stărilor în domeniul Z

Analiza în spațiul stărilor din paragraful anterior a fost realizată în domeniul timp, dar aceasta poate fi realizată și în domeniul Z.

Fie ecuația de stare

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n] \quad (4.174)$$

ce este echivalentă cu un sistem de N ecuații cu diferențe de ordinul întâi

$$\begin{aligned} v_1[n+1] &= f_{11}v_1[n] + f_{12}v_2[n] + \dots + f_{1N}v_N[n] + q_1x[n] \\ v_2[n+1] &= f_{21}v_1[n] + f_{22}v_2[n] + \dots + f_{2N}v_N[n] + q_2x[n] \\ &\dots \\ v_N[n+1] &= f_{N1}v_1[n] + f_{N2}v_2[n] + \dots + f_{NN}v_N[n] + q_Nx[n] \end{aligned} \quad (4.175)$$

$$v_N[n+1] = f_{N1}v_1[n] + f_{N2}v_2[n] + \dots + f_{NN}v_N[n] + q_Nx[n]$$

Presupunând că starea inițială a sistemului este zero, transformata Z a acestui sistem de ecuații este

$$\begin{bmatrix} zV_1(z) \\ zV_2(z) \\ \vdots \\ zV_N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2N} \\ \vdots & & & \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} X(z) \quad (4.176)$$

unde $V_i(z)$ este transformata Z a lui $v_i[n]$, $i=1, 2, \dots, N$.

Se definește vectorul $\mathbf{V}(z)$ ca

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

Relația (4.176) poate fi exprimată matriceal, în forma

$$z\mathbf{V}(z) = \mathbf{F}\mathbf{V}(z) + \mathbf{q}X(z) \quad (4.178)$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} (z\mathbf{I} - \mathbf{F})\mathbf{V}(z) &= \mathbf{q}X(z) \\ \mathbf{V}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q}X(z) \end{aligned} \quad (4.179)$$

Transformata Z inversă a relației (4.179), conduce la soluția pentru ecuația de stare în domeniul timp.

Ecuația de ieșire este dată de relația

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n] \quad (4.180)$$

sau, echivalent, în domeniul Z

$$Y(z) = \mathbf{g}^t \mathbf{V}(z) + dX(z) \quad (4.181)$$

Utilizând soluția dată de relația (4.179), se poate elimina vectorul de stare $\mathbf{V}(z)$ din relația (4.181) și se obține

$$Y(z) = [\mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d]X(z), \quad (4.182)$$

care este transformata Z a răspunsului de stare zero al sistemului. Funcția de sistem se obține din (4.182), sub forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}\mathbf{q} + d \quad (4.183)$$

Se observă că ecuația de stare dată de (4.179), ecuația de ieșire dată de (4.182) și funcția de sistem dată de (4.183), au toate în comun factorul $(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$, care este o mărime fundamentală ce este legată de transformata Z a matricei de tranziție a sistemului. Această mărime se poate calcula astfel:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{g}^t \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} u[n-1] + d \delta[n]] z^{-n} \\
&= \mathbf{g}^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}^{n-1} z^{-n} \right) \mathbf{q} + d
\end{aligned} \tag{4.184}$$

Termenul din paranteză poate fi scris ca

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}^{n-1} z^{-n} &= z^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{F} z^{-1} + \mathbf{F}^2 z^{-2} + \dots) = \\
&= z^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{F} z^{-1})^{-1} = (z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}
\end{aligned} \tag{4.185}$$

Dacă se înlocuiește rezultatul din relația (4.185) în (4.184), se obține expresia lui $H(z)$ ca în relația (4.183). Deoarece matricea de tranziție este dată de $\Phi[n] = \mathbf{F}^n$ transformata Z a lui $\Phi[n]$ este

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^n z^{-n} = \mathbf{I} + \mathbf{F} z^{-1} + \mathbf{F}^2 z^{-2} + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{F} z^{-1})^{-1} = z(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \tag{4.186}$$

Relația (4.186) reprezintă o metodă simplă de determinare a matricei de tranziție cu ajutorul transformatei Z . Se reamintește că

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})} \tag{4.187}$$

unde $\text{adj}(\mathbf{M})$ este matricea adjunctă a lui \mathbf{M} , iar $\det(\mathbf{M})$ determinantul matricei A . Înlocuind (4.187) în (4.183), rezultă

$$H(z) = \mathbf{g}^t \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \mathbf{F})}{\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})} \mathbf{q} + d \tag{4.188}$$

În consecință, numitorul $A(z)$ al funcției de transfer $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$,

ce conține polii funcției de sistem este

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{F}), \tag{4.189}$$

dar $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{F})$ este chiar polinomul caracteristic al lui \mathbf{F} și rădăcinile sale, care sunt polii sistemului, sunt valorile proprii ale matricei \mathbf{F} .

Exemplul 4.13.

Să se determine funcția de sistem $H(z)$, răspunsul la impuls $h[n]$ și matricea de tranziție $\Phi[n]$ a sistemului care generează secvența Fibonacci. Acest sistem este descris în spațiul stărilor de ecuațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] &= [1 \ 1] \mathbf{v}[n] + x[n] \end{aligned} \quad (4.190)$$

Soluție. Pentru a determina $H(z)$ și $h[n]$, se calculează $(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$.

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix}$$

Prin urmare

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1} [1 \ 1] \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

Inversând $H(z)$, se obține $h[n]$ sub forma

$$h[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] u[n]$$

Se observă că polii lui $H(z)$ sunt $p_1 = (1+\sqrt{5})/2$ și $p_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Deoarece $|p_1| > 1$, sistemul care generează secvența Fibonacci este instabil.

Matricea de tranziție $\Phi[n]$ are transformata Z

$$z(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} z^2 - z & z \\ z & z^2 \end{bmatrix}$$

Prin inversarea expresiei de mai sus, rezultă

$$\Phi[n] = \begin{bmatrix} \phi_{11}[n] & \phi_{12}[n] \\ \phi_{21}[n] & \phi_{22}[n] \end{bmatrix}$$

unde

$$\phi_{11}[n] = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u[n]$$

$$\phi_{12}[n] = \phi_{21}[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u[n]$$

$$\phi_{22}[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] u[n]$$

Răspunsul la impuls $h[n]$ poate fi, de asemenea, calculat din (4.166) utilizând matricea de tranziție $\Phi[n]$.

Metoda de analiză indicată în Exemplul 4.13 se aplică mai ales la calcularea răspunsului de stare zero al sistemului, deoarece s-a folosit transformata Z bilaterală. Dacă se dorește să se determine răspunsul total al sistemului, considerând starea inițială nenulă, fie aceasta $v[n_0]$, trebuie folosită transformata Z unilaterală. Astfel, fiind dată o stare inițială $v[n_0]$ și o intrare $x[n]$ pentru $n \geq n_0$, se poate determina vectorul de stare $v[n]$ pentru $n \geq n_0$ și ieșirea $y[n]$ pentru $n \geq n_0$, prin intermediul transformatei Z unilaterale.

Fără a pierde din generalitate, se presupune $n_0 = 0$. Apoi, fiind dată intrarea $x[n]$ pentru $n \geq 0$ și un sistem cauzal, descris de ecuația de stare din (4.174), transformata Z unilaterală a ecuației de stare este

$$zV^+(z) - zv[0] = FV^+(z) + qX(z)$$

sau, echivalent,

$$V^+(z) = z(zI - F)^{-1}v[0] + (zI - F)^{-1}qX(z) \quad (4.191)$$

Se observă că $X^+(z) = X(z)$, deoarece $x[n]$ s-a presupus cauzal.

Similar, transformata Z aplicată ecuației de ieșire dată de relația (4.180) este

$$Y^+(z) = g'V^+(z) + dX(z) \quad (4.192)$$

Înlocuind $V^+(z)$ din relația (4.191) în (4.192), se obține

$$Y^+(z) = zg'(zI - F)^{-1}v[0] + [g'(zI - F)^{-1}q + d]X(z) \quad (4.193)$$

Primul termen din membrul drept ai relației (4.193), reprezintă răspunsul de intrare zero datorat condițiilor inițiale, iar cel de-al doilea, răspunsul de stare zero. Prin inversarea relației (4.193) se obține răspunsul total al sistemului în domeniul timp.

Exemplul 4.14.

Să se determine răspunsul sistemului Fibonacci pentru $n \geq 0$ având starea inițială

$$v[0] = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluție. Răspunsul de stare zero al acestui sistem a fost determinat în Exemplul 4.13, astfel încât se va determina doar răspunsul de intrare zero, care va fi sumat cu răspunsul de stare zero.

Transformata Z unilaterală a răspunsului de intrare zero este

$$Y_{zi}^+(z) = z \mathbf{g}^t(z\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{v}[0] = \frac{z}{z^2 - z - 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

Transformata inversă a lui $Y_{zi}^+(z)$ este

$$y_{zi}[n] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u[n]$$

CAPITOLUL 2

PROIECTAREA FILTRELOR DIGITALE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

Un *filtru digital* sau *numeric* este un sistem discret care scalează și/sau defazează în mod selectiv componentele spectrale ale semnalului discret de intrare, oferind la ieșire un semnal discret optim pentru scopul dorit. Scopul filtrării este de a îmbunătăți calitatea semnalului (de a reduce sau înlătura zgomotul), de a extrage informații sau de a separa două sau mai multe semnale combinate.

Filtrarea numerică este preferată celei analogice datorită unuia sau mai multora din *următoarele avantaje*:

1. Filtrele numerice pot avea caracteristici imposibil de realizat cu filtrele analogice, (de exemplu, fază perfect liniară, în cazul filtrelor FIR).
2. Spre deosebire de filtrele analogice, performanțele celor digitale nu variază cu variabilele mediului, de exemplu, temperatura. Aceasta elimină necesitatea calibrării periodice.
3. Răspunsul în frecvență poate fi ajustat automat prin implementarea filtrelor cu procesoare programabile, motiv pentru care se folosesc în filtrarea adaptivă, mai eficient decât cele analogice.
4. Diferite semnale de intrare pot fi filtrate de un singur filtru digital, fără modificarea structurii hard, prin multiplexare.
5. Atât datele filtrate cât și cele nefiltrate pot fi stocate pentru o prelucrare ulterioară.
6. Folosind avantajele tehnologiei VLSI, aceste filtre pot fi realizate la dimensiuni mici, putere mică, preț scăzut.
7. În practică, precizia unui filtru analogic este limitată, atenuarea în banda de oprire pentru filtrele active fiind în jur de $60 \div 70$ dB, lafiltrele digitale, aceasta este limitată numai de lungimea cuvântului folosit, ajungându-se în mod curent la 80-100 dB.

8. Performanțele filtrelor digitale sunt repetabile de la procesor la procesor, fără necesitatea reglajelor.
9. Filtrele digitale pot fi folosite la frecvențe foarte scăzute, unde cele analogice nu sunt utilizabile, acoperind un larg domeniu de frecvențe prin simpla schimbare a frecvenței de eșantionare.

Dezavantajele importante ale filtrării digitale față de cea analogică sunt:

1. Limitarea vitezei. Lățimea de bandă a semnalelor pe care le poate prelucra un filtru digital în timp real este mult mai mică în comparație cu cele analogice. În funcționarea în timp real, conversia analog/digitală (A/D) și digital/analogică (D/A) introduce restricții de viteză. Timpul de conversie al CAD și CDA limitează frecvența maximă care poate fi procesată. În plus, viteza operației depinde de viteza procesorului digital și de numărul de operații pe care trebuie să le execute.
2. Efectele lungimii finite în reprezentarea numerelor. Filtrele digitale suferă de zgomotul de quantizare al CAD și de cel de rotunjire, apărut în timpul calculelor, care conduc la degradarea performanțelor acestora.
3. Timp mare de proiectare și dezvoltare. Timpul de proiectare și implementare hard este mult mai mare în comparație cu cel necesar filtrelor analogice. Unele programe de proiectare asistată de calculator pot însă realiza ușor acest lucru.

2.1. Considerații generale asupra cauzalității și implicațiile ei

În Capitolul 1 s-au prezentat caracteristicile filtrelor ideale și s-a arătat că astfel de filtre sunt necauzale și, prin urmare, nerealizabile fizic. În continuare, problema cauzalității și implicațiile ei este tratată în detaliu.

Se consideră un FTJ ideal, al cărui răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (2.1)$$

Răspunsul său la impuls se determină cu transformata Fourier inversă

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}, & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

O reprezentare a lui $h[n]$ pentru $\omega_c = \pi/4$ este dată în figura 2.1.

Acum filtrele sunt necauzal și, deci, nu poate fi realizat practic. În plus, $h[n]$ nu este absolut sumabil și, în consecință, este instabil. Cu cât lățimea de bandă a filtrului crește, răspunsul la impuls devine mai îngust, și invers. Pentru $\omega_c = \pi$ filtrul devine trece tot (FTT) și răspunsul său la impuls devine impulsul unitate.

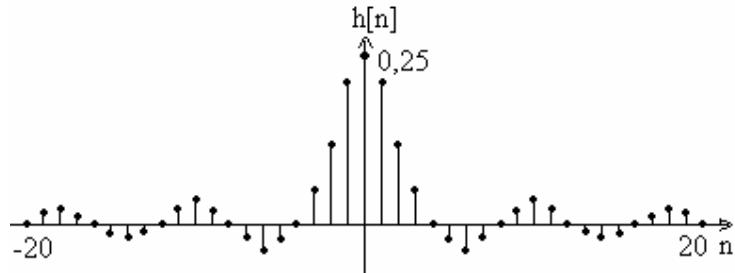


Figura 2.1. Răspunsul la impuls al unui FTJ ideal

Dacă răspunsul la impuls este întârziat cu n_0 eșantioane, răspunsul în frecvență devine

$$h[n - n_0] \xleftarrow{F} H(\omega)e^{-j\omega n_0} \quad (2.3)$$

Se observă că acest filtru are faza liniară. Oricum, nici o valoare finită a întârzierii nu va avea ca rezultat un filtru cauzal. O soluție posibilă de realizare ar fi de a introduce o întârziere n_0 mare în $h[n]$ și a impune $h[n] = 0$, pentru $n < n_0$. Evident, filtrul obținut nu va fi ideal. Deși analiza de mai sus s-a referit la un filtru trece jos ideal, concluziile obținute sunt valabile și pentru celelalte tipuri de filtre ideale [30].

Condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le satisfacă răspunsul în frecvență al unui filtru, pentru a fi cauzal sunt statuate de teorema Paley - Wiener, enunțată în continuare. Demonstrația acesteia depășește cadrul prezentului material, motiv pentru care nu este prezentată [68].

Dacă $h[n]$ este de energie finită și $h[n] = 0$ pentru $n < 0$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln|H(\omega)|| d\omega < \infty \quad (2.4)$$

Reciproc, dacă $|H(\omega)|$ este de pătrat integrabil și dacă integrala din (2.4) este finită, atunci se poate asocia lui $|H(\omega)|$ un răspuns de fază

$\theta(\omega)$, astfel încât filtrul rezultat, cu răspunsul în frecvență $|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$, să fie cauzal.

O concluzie importantă ce rezultă din această teoremă este că modulul $|H(\omega)|$ poate fi zero la unele frecvențe, dar nu poate fi zero pe un domeniu de frecvențe, deoarece integrala devine infinită. În consecință, orice filtru ideal este necauzal.

Cauzalitatea implică existența unei relații între părțile reală, $H_R(\omega)$, și imaginară, $H_I(\omega)$, ale lui $H(\omega)$. Pentru a ilustra această dependență, se descompune $h[n]$ în partea sa pară, $h_e[n]$, și impară, $h_o[n]$, adică

$$h[n] = h_e[n] + h_o[n] \quad (2.5)$$

unde $h_e[n] = \frac{1}{2}[h[n] + h[-n]]$ (2.6)

și $h_o[n] = \frac{1}{2}[h[n] - h[-n]]$ (2.7)

Dacă $h[n]$ este cauzal, este posibilă refacerea acestuia din partea sa pară, $h_e[n]$, pentru $0 \leq n < \infty$ sau din partea sa impară, $h_o[n]$, pentru $1 \leq n < \infty$, lucru care se va arăta în continuare. Din (2.6) rezultă

$$h[n] = 2h_e[n]u[n] - h_e[0]\delta[n], \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

și din (2.7) rezultă

$$h[n] = 2h_o[n]u[n] + h[0]\delta[n], \quad n \geq 0 \quad (2.9)$$

Deoarece $h_o[n] = 0$ pentru $n=0$, nu se poate reface $h[0]$ din $h_o[n]$ și, deci, $h[0]$ trebuie cunoscut. Din (2.8) și (2.9) se observă că pentru $n \geq 1$, există o relație foarte puternică între $h_o[n]$ și $h_e[n]$, adică $h_o[n] = h_e[n]$. Dacă $h[n]$ este absolut sumabil (stabil în sens MIME [63]), răspunsul în frecvență există și

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \quad (2.10)$$

În plus, dacă $h[n]$ este real și cauzal, proprietățile de simetrie ale transformatei Fourier implică [63]

$$\begin{aligned} h_e[n] &\longleftrightarrow H_R(\omega) \\ h_o[n] &\longleftrightarrow H_I(\omega) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Atât timp cât $h[n]$ este complet determinat de $h_e[n]$, rezultă că $H(\omega)$ este complet determinat dacă se cunoaște $H_R(\omega)$. Similar, $H(\omega)$

este complet determinat dacă se cunoaște $H_I(\omega)$ și $h[0]$. Aceasta implică o legătură între $H_R(\omega)$ și $H_I(\omega)$ pentru sisteme cauzale. Cu alte cuvinte, în cazul sistemelor discrete, liniare, cauzale răspunsul de amplitudine și răspunsul de fază ale sistemului sunt dependente. Fiind dat $H_R(\omega)$, pentru o secvență $h_e[n]$ reală, pară, absolut sumabilă se poate determina $H(\omega)$.

Exemplul 2.1.

Fie un sistem liniar invariant în timp, stabil, cu răspunsul la impuls real și par. Să se determine $H(\omega)$ dacă

$$H_R(\omega) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 - 2a \cos \omega + a^2}, \quad |a| < 1.$$

Soluție. Se determină întâi $h_e[n]$.

$$H_R(\omega) = H_R(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}, \cos \omega = \left. \frac{z + z^{-1}}{2} \right|_{z=e^{j\omega}}.$$

$$H_R(z) = \frac{1 - a(z + z^{-1})/2}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2} = \frac{z - a(z^2 + 1)/2}{(z - a)(1 - az)}$$

Se observă că polii sunt $p_1=a$ și $p_2=1/a$. Sistemul fiind stabil, cercul unitate este cuprins în regiunea de convergență, care va fi un inel circular cuprins între p_1 și p_2 care conține cercul unitate $|a| < |z| < 1/|a|$. În consecință, $h_e[n]$ este o secvență bilaterală în care polul $p_1=a$ determină o parte cauzală, iar polul $p_2=1/a$, o parte necauzală. Aplicând transformata Z inversă lui $H_R(z)$, se obține

$$h_e[n] = \frac{1}{2} a^{|n|} + \frac{1}{2} \delta[n] \quad (2.12)$$

Înlocuind (2.12) în (2.8), rezultă relația

$$h[n] = a^n u[n]$$

a cărei transformată Fourier este

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Relația între părțile reală și imaginară ale componentelor transformatei Fourier pentru o secvență absolut sumabilă, cauzală și reală se poate obține plecând de la relația (2.8), căreia i se aplică transformata Fourier.

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= H_R(\omega) + jH_I(\omega) = F\{2h_e[n]u[n] - h_e[n]\delta[n]\} = \\
2F\{h_e[n]\} * F\{u[n]\} - h_e[0] &= 2H_R(\omega) * U(\omega) - h_e[0] = \quad (2.13) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)U(\omega - \lambda)d\lambda - h_e[0]
\end{aligned}$$

unde $U(\omega)$ este transformata Fourier a treptei unitate $u[n]$ [35].

$$\begin{aligned}
U(\omega) &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{e^{-\frac{j\omega}{2}} \left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}} \right)} = \pi\delta(\omega) + \frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}} = \\
&= \pi\delta(\omega) + \frac{\cos \frac{\omega}{2} + j \sin \frac{\omega}{2}}{2j \sin \frac{\omega}{2}} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} - j \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Înlocuind (2.14) în (2.13) și identificând părțile imaginare rezultă relația dintre $H_I(\omega)$ și $H_R(\omega)$

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda) \operatorname{ctg} \frac{\omega - \lambda}{2} d\lambda \quad (2.15)$$

de unde se observă că $H_I(\omega)$ este unic determinat de $H_R(\omega)$ prin (2.15).

Integrala din (2.15) se numește *transformata Hilbert directă*.

În concluzie, cauzalitatea are implicații foarte importante în proiectarea filtrelor selective de frecvență, și anume:

1. Răspunsul în frecvență $H(\omega)$ nu poate fi zero, decât cu excepția unui număr finit de puncte.
2. Modulul $|H(\omega)|$ nu poate fi constant în orice domeniul finit de frecvențe și tranzitia de la banda de trecere la cea de oprire nu poate fi infinit de abruptă (aceasta este o consecință a fenomenului Gibbs, care rezultă din trunchierea lui $h[n]$ pentru a se obține cauzalitatea) [38]
3. Părțile reală și imaginară ale lui $H(\omega)$ sunt interdependente, ele fiind legate prin transformata Hilbert directă. În consecință, modulul $|H(\omega)|$ și faza $\theta(\omega)$ a lui $H(\omega)$ nu pot fi alese arbitrar.

În paragrafele următoare se va face referire numai la clasa SDLIT cauzale descrisă de ecuația cu diferențe

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.16)$$

al căror răspuns în frecvență este

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (2.17)$$

2.2. Tipuri de filtre digitale

Filtrele digitale pot fi împărțite în două clase, *filtre cu răspuns finit la impuls* (RFI) sau FIR (Finite Impulse Response) și *filtre cu răspuns infinit la impuls* (RII) sau IIR (Infinite Impulse Response). Oricare din aceste două tipuri poate fi reprezentat prin răspunsul la impuls $h[n]$, ($n \in N$ pentru filtre cauzale).

Intrarea și ieșirea filtrului sunt legate prin suma de conoluție, dată de relația

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \quad (2.18)$$

pentru filtre FIR și

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (2.19)$$

pentru filtre IIR.

Evident, pentru filtrele IIR răspunsul la impuls este de durată infinită și pentru filtrele FIR răspunsul la impuls are numai M valori. În practică, pentru filtrele IIR nu se folosește forma (2.19), pentru că lungimea filtrului este teoretic infinită, ci se folosește ecuația cu diferențe, în formă recursivă [63]

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (2.20)$$

unde a_k , b_k sunt coeficienții filtrului, iar M și N reprezintă gradul polinomului numărătorului, respectiv numitorului funcției de transfer. Ecuația (2.18) este ecuația cu diferențe pentru filtre FIR și (2.20) este ecuația cu diferențe pentru filtre IIR.

O altă reprezentare pentru filtrele FIR și IIR se poate face folosind funcțiile de sistem

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]z^{-k} \quad (2.21)$$

pentru filtrele FIR și

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.22)$$

pentru filtre IIR, care rezultă prin aplicarea transformatei Z relațiilor (2.18), respectiv (2.20).

2.3. Filtre realizabile fizic, selective de frecvență

Cerințele filtrelor digitale sunt în mod obișnuit specificate în domeniul frecvență și sunt exprimate prin amplitudinea sau/și faza sau întârzierea răspunsului dorit. În cazul filtrului trece jos (FTJ), răspunsul în amplitudine dorit este de obicei dat de

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_p] \\ 0 & \text{pentru } \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases} \quad (2.23)$$

unde ω_p și ω_s reprezintă frecvențele unghiulare corespunzătoare capătului benzii de trecere și începutului benzii de oprire.

Deși pentru un filtru real sunt de dorit caracteristicile filtrelor ideale prezentate în secțiunea 1.7.1, acestea nu sunt absolut necesare în multe din aplicațiile practice. Renunțând la condițiile pe care trebuie să le posede un filtru ideal, este posibil a se obține un filtru a cărui caracteristică să se apropie de cea ideală și să satisfacă cerințele de proiectare. Relaxarea condițiilor se referă la acceptarea faptului ca modulul $|H(\omega)|$ să nu fie constant în întreaga bandă de trecere, un riplu mic fiind acceptabil. Similar, nu este absolut necesar ca $|H(\omega)|$ să fie zero în banda de oprire, unde, de asemenea, este tolerabil un riplu mic.

În caracteristica de amplitudine, trecerea de la banda de trecere la cea de oprire determină *banda de tranziție* sau *regiunea de tranziție* a filtrului.

Modulul normalizat al funcției de transfer al unui filtru trece jos realizabil fizic este prezentat în figura 2.2, sub forma unei scheme de toleranță. Semnificația mărimilor de pe figură este următoarea:

ω_p - definește frecvența corespunzătoare capătului benzii de trecere (limita superioară a benzii de trecere);

ω_s - definește frecvența corespunzătoare începutului benzii de oprire (limita inferioară a benzii de oprire);

$\omega_s - \omega_p$ - definește lățimea benzii de tranziție;

δ_p - reprezintă riplul din banda de trecere, modulul $|H(\omega)|$ variind între $1 \pm \delta_p$;

δ_s - reprezintă riplul din banda de oprire.

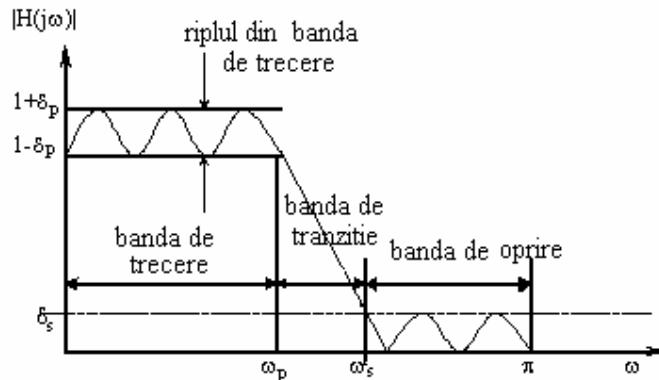


Figura 2.2. Limitele de toleranță pentru aproximarea răspunsului în amplitudine a unui filtru trece jos real

Lățimea benzii de trecere determină în mod obișnuit *lățimea de bandă* a filtrului. Se dorește ca în *banda de trecere a filtrului*, intervalul $[0, \omega_p]$, să fie păstrate componentele de semnal, iar cele rejectate să fie în intervalul $[\omega_s, \pi]$, numit *bandă de oprire a filtrului*. Caracteristica filtrului trece jos reprezintă răspunsul în amplitudine acceptabil când aceasta se află în limitele $1 \pm \delta_p$ în banda de trecere și mai mic sau egal cu δ_s în banda de oprire. Pentru a face posibilă aproximarea cât mai apropiată de funcția dorită, specificațiile includ o bandă de tranziție, $\omega_s - \omega_p$, care nu este zero, ca în cazul ideal, în care răspunsul filtrului scade de la valoarea 1 în banda de trecere la zero în banda de oprire.

În cazul filtrelor cu coeficienți reali, datorită simetriei și periodicității răspunsului în amplitudine $|H(\omega)|$, este suficient să se specifică cerințele filtrului numai pentru intervalul $0 \leq \omega \leq \pi$.

În practică, se folosește de multe ori o scală logaritmică pentru modulul $|H(\omega)|$, reprezentându-se $20\log_{10} |H(\omega)|$, cu unitatea de

măsură dB . În loc de δ_p se poate indica abaterea maximă a atenuării în banda de trecere

$$\Delta A_p = 20 \log_{10} \left(\frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \right) [\text{dB}] \quad (2.24)$$

și, similar, în loc de δ_s , se poate specifica atenuarea maximă în banda de oprire

$$\Delta A_s = -20 \log_{10} (\delta_s) [\text{dB}] \quad (2.25)$$

Ambele cantități sunt pozitive.

În unele aplicații, este necesar să se mențină forma semnalului de la intrare, lucrul care se realizează dacă răspunsul de fază al filtrului este aproximativ liniar în banda de trecere $[0, \omega_p]$, adică $\text{Arg}H(\omega) = \theta(\omega)$ este o funcție liniară de ω în intervalul $[0, \omega_p]$, adică

$$\theta(\omega) = \tau_0 \omega + \tau_1, \quad (2.26)$$

unde τ_0 și τ_1 pot fi arbitrați.

Pentru a analiza liniaritatea fazelor, în loc de răspunsul de fază, se poate folosi întârzierea de grup, definită cu relația

$$\tau_g = -\frac{d \text{Arg}H(\omega)}{d\omega} \quad (2.27)$$

sau întârzierea de fază, definită cu relația

$$\tau_p = -\frac{\text{Arg}H(\omega)}{\omega} \quad (2.28)$$

De multe ori, acestea au o formă de reprezentare mai simplă decât a răspunsului de fază și sunt adesea mai ușor de interpretat.

Fie $H_d(\omega)$ funcția dorită, $W(\omega)$ funcția de ponderare a erorii de aproximare și $E_p(\omega)$ valoarea funcției eroare ponderată, definite după cum urmează:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} H_{dp}(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_p \\ 0 & \text{pentru } \omega \in X_s \end{cases} \quad (2.29)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} W_p(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_p \\ \frac{\delta_p}{\delta_s} W_s(\omega) & \text{pentru } \omega \in X_s \end{cases} \quad (2.30)$$

și

$$E_p(\omega) = W(\omega)[H(\omega) - H_d(\omega)] \quad (2.31)$$

unde X_p și X_s indică reuniunea benzilor de trecere și, respectiv, de oprire.

În cazul cel mai general, există mai multe benzi de trecere și de oprire pentru filtru, și eroarea de aproximare acceptabilă depinde de ω în fiecare bandă. În acest caz, specificațiile pot fi declarate ca

$$H_{dp}(\omega) - \varepsilon_p(\omega) \leq |H(\omega)| \leq H_{dp}(\omega) + \varepsilon_p(\omega) \quad \text{pentru } \omega \in X_p \quad (2.32)$$

$$|H(\omega)| \leq \varepsilon_s(\omega) \quad \text{pentru } \omega \in X_s \quad (2.33)$$

unde

$$\varepsilon_p(\omega) = \frac{\delta_p}{W_p(\omega)} \quad (2.34)$$

este deviația permisă față de răspunsul dorit din banda de trecere, $H_{dp}(\omega)$ și

$$\varepsilon_s(\omega) = \frac{\delta_s}{W_s(\omega)} \quad (2.35)$$

este deviația față de zero, admisă în regiunea benzii de oprire.

Cu ajutorul relațiilor (2.29), (2.30), (2.31), (2.34) și (2.35) în limitele benzilor de trecere și de oprire, specificațiile din relațiile (2.32), (2.33) pot fi descrise astfel:

$$-\delta_p \leq W_p(\omega)[|H(\omega)| - H_{dp}(\omega)] \leq \delta_p \quad \text{pentru } \omega \in X_p \quad (2.36)$$

$$W_s(\omega)|H(\omega)| \leq \delta_s \quad \text{pentru } \omega \in X_s \quad (2.37)$$

Specificațiile din ecuațiile (2.36) și (2.37) pot fi combinate pentru a obține următoarea formă unificată, care este utilizată în multe tehnici de proiectare a filtrelor

$$|E_p(\omega)| \leq \bar{\varepsilon} \quad \text{pentru } \omega \in X = X_p \cup X_s \quad (2.38)$$

cu

$$\bar{\varepsilon} = \delta_p \quad (2.39)$$

Dacă valoarea absolută maximă a funcției eroare ponderată este mai mică sau egală cu $\bar{\varepsilon}$ în X , atunci $|H(\omega)|$ va îndeplini criteriul de gabarit.

De exemplu, în cazul filtrelor trece bandă, specificațiile sunt ușual declarate ca

$$1 - \delta_p \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_p \quad \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \quad (2.40)$$

$$|H(\omega)| \leq \delta_s \quad \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \quad (2.41)$$

Acstea condiții pot fi scrise în forma unificată dată de relația (2.38), utilizând relațiile:

$$X = [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \quad (2.42)$$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \\ 0 & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \end{cases} \quad (2.43)$$

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \omega \in [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \\ \frac{\delta_p}{\delta_s} & \text{pentru } \omega \in [0, \omega_{s1}] \cup [\omega_{s2}, \pi] \end{cases} \quad (2.44)$$

și relația (2.39).

În orice problemă de proiectare de filtre, trebuie să se specifice:

1. Riplul maxim tolerabil în banda de trecere;
2. Riplul maxim tolerabil în banda de oprire;
3. Frecvența de capăt a benzii de trecere ω_p ;
4. Frecvența corespunzătoare începutului benzii de oprire ω_s .

Măsura în care $H(\omega)$ aproximează specificațiile impuse depinde în bună parte de criteriul folosit în alegerea coeficienților $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, ca și de numărul acestor coeficienți.

2.3.1. Etape în proiectarea filtrelor digitale

Proiectarea unui filtru digital presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Specificarea cerințelor filtrului;
2. Calculul coeficienților filtrului, (aproximarea funcției de transfer);
3. Stabilirea unui criteriu de calitate pentru răspunsul filtrului obținut în comparație cu răspunsul dorit;
4. Realizarea filtrului într-o structură potrivită, care realizează această funcție de transfer. Realizarea presupune cuantizarea coeficienților la un număr finit de biți și efectuarea operațiilor aritmetice cu o precizie finită;
5. Analiza efectelor lungimii finite asupra performanțelor filtrului;
6. Implementare soft și/sau hard.

Aceste etape nu sunt independente și unele dintre ele pot fi reluate iterativ.

2.4. Filtre cu răspuns finit la impuls de fază liniară

Unul dintre cele mai simple tipuri de filtre ce poate fi proiectat este filtrul FIR de fază liniară. Așa cum va rezulta ulterior, numai filtrele FIR pot avea fază liniară, condiție cerută în multe aplicații practice, cum ar fi comunicațiile digitale.

Un filtru FIR de lungime M are răspunsul în frecvență, respectiv funcția de transfer de forma

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} b_n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad (2.45)$$

unde coeficienții filtrului, $\{b_n\}$, sunt valorile răspunsului la impuls al filtrului, adică

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.46)$$

Funcția de transfer $H(\omega)$, periodică în frecvență cu perioada 2π , poate fi exprimată în mai multe moduri, după cum urmează:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (2.47)$$

Trecerile prin zero ale funcției de transfer conduc la salturi de fază de π radiani, așa încât $\theta(\omega)$ are discontinuități în acele puncte. Din acest motiv se preferă următoarea formă pentru funcția de transfer:

$$H(\omega) = \pm |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = H_R(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.48)$$

$$\text{unde } \theta(\omega) = \varphi(\omega) + \theta_R(\omega), \theta_R(\omega) = \text{Arg}\{H_R(\omega)\} \quad (2.49)$$

Principalele proprietăți ale funcției de transfer sunt:

1. În cazul în care filtrul FIR are coeficienții $h[n]$ reali (așa cum se întâmplă în majoritatea situațiilor ce prezintă interes din punct de vedere practic), caracteristica de modul $|H(\omega)|$ este o funcție pară, iar cea de fază $\varphi(\omega)$ sau $\theta(\omega)$ este o funcție impară.

2. Funcția $H_R(\omega)$ din relația (2.48) denumită *funcție de transfer de fază zero* este o funcție reală și continuă, putând lua atât valori pozitive cât și negative. Funcția $\varphi(\omega)$ este, de asemenea, o funcție continuă.

3. Funcția $\theta(\omega)$ prezintă salturi de π radiani la frecvențele la care $H_R(\omega)$ are treceri prin zero, numite *frecvențe de rejecție*. Acestea pot fi ușor identificate pe caracteristica de fază.

4. În proiectarea filtrelor FIR se preferă exprimarea funcției de transfer în forma (2.48), datorită continuității funcțiilor $H_R(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ în intervalul fundamental $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Condiția de fază liniară se obține prin impunerea unei condiții de simetrie *pară* sau *pozitivă* asupra răspunsului la impuls al filtrului, numită uneori, simplu, *condiție de simetrie*, adică

$$h[n] = h[M - 1 - n] \quad (2.50)$$

sau a unei condiții de simetrie *impară* sau *negativă* asupra răspunsului la impuls al filtrului, adică

$$h[n] = -h[M - 1 - n] \quad (2.51)$$

numită și *condiție de antisimetrie*.

În continuare, se va arăta că, dacă răspunsul la impuls al filtrului îndeplinește una din condițiile din (2.50) sau (2.51), filtrul are faza liniară.

Filtru de tipul 1. Simetrie pozitivă (pară), M impar

$$\begin{aligned} h[0] &= h[M - 1], \\ h[1] &= h[M - 2] \\ &\vdots \\ h\left[\frac{M-1}{2}\right] &= h\left[\frac{M-1}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tinând seama de relațiile (2.45) și (2.52) răspunsul în frecvență devine

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + h[2]e^{-j2\omega} + \dots + h\left[\frac{M-1}{2}\right]e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} + \\ &+ \dots + h[M-2]e^{-j(M-2)\omega} + h[M-1]e^{-j(M-1)\omega} = \\ &= e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[h\left[\frac{M-1}{2}\right] + h[0] \left(e^{j\frac{M-1}{2}\omega} + e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \right) + \dots + h\left[\frac{M-3}{2}\right] (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \right] = \\ &= e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right] = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} H_R(\omega) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Termenul din paranteză este real pentru toate valorile lui ω și se notează cu $H_R(\omega)$, adică

$$H_R(\omega) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \quad (2.54)$$

Realizând schimbarea indicelui de sumare

$$m = \frac{M-1}{2} - n \quad (2.55)$$

și apoi revenind la indicele n , expresia funcției de transfer devine

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \cos(\omega n) + h\left[\frac{M-1}{2}\right] \right\} \quad (2.56)$$

Introducând notațiile

$$a[0] = h\left[\frac{M-1}{2}\right]; \quad a[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \quad \text{cu } n = \overline{1, \frac{M-1}{2}} \quad (2.57)$$

se poate scrie

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(\omega n) \quad (2.58)$$

Tinând cont de relațiile (2.47) ÷ (2.49), din (2.53), (2.54) și (2.58), rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(\omega n); \quad \varphi(\omega) = -\frac{M-1}{2}\omega$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ -\frac{M-1}{2}\omega + \pi, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Filtru de tipul 2. Simetrie pară, M par

$$h[0] = h[M-1]$$

$$h[1] = h[M-2]$$

$$\dots$$

$$h\left[\frac{M}{2}-1\right] = h\left[\frac{M}{2}\right] \quad (2.60)$$

Urmând aceeași etape de calcul, se obține

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \left[2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \right] \quad (2.61)$$

Termenul din paranteză este real și se notează cu $H_R(\omega)$, adică

$$H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.62)$$

Întrucât $(M-1)/2 \notin \mathbb{Z}$ se operează schimbările de indice de sumare

$$m = \frac{M}{2} - n \quad \text{și} \quad m \rightarrow n \quad (2.63)$$

cu care, funcția de transfer devine

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} 2h\left[\frac{M}{2} - n\right] \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (2.64)$$

Cu notația

$$b[n] = 2h\left[\frac{M}{2} - n\right] \quad \text{pentru} \quad n = 1, \overline{\frac{M}{2}} \quad (2.65)$$

rezultă

$$H(\omega) = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (2.66)$$

Tinând cont de relațiile (2.47) ÷ (2.49), din (2.61), (2.62) și (2.66) rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} b[n] \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]; \quad \varphi(\omega) = -\frac{M-1}{2}\omega,$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} -\frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ -\frac{M-1}{2}\omega + \pi, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Se observă că, atât pentru M impar cât și pentru M par, $\theta(\omega)$ și $\varphi(\omega)$ sunt același, fiind funcții liniare de ω .

Filtru de tipul 3. Simetrie impară, M impar

$$\begin{aligned} h[0] &= -h[M-1] \\ h[1] &= -h[M-2] \\ &\dots \\ h\left[\frac{M-1}{2}\right] &= -h\left[\frac{M-1}{2}\right] = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} = h[0] + h[1]e^{-j\omega} + \dots + h\left[\frac{M-1}{2}\right]e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} + \dots \\
&\dots + h[M-2]e^{-j(M-2)\omega} + h[M-1]e^{-j(M-1)\omega} = e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} [h[0]\left(e^{j\frac{M-1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M-1}{2}\omega}\right) + \\
&\dots + h\left[\frac{M-3}{2}\right](e^{j\omega} - e^{-j\omega})] = j e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\begin{aligned}
&= j e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} H_R(\omega) = e^{j\left(\frac{M-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}\right)} H_R(\omega) \\
\text{unde } &H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n] \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Efectuând schimbarea de indice din (2.55) și notând

$$c[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \quad \text{cu} \quad n = 1, \frac{M-1}{2} \tag{2.71}$$

funcția de transfer devine

$$H(\omega) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(\omega n) \tag{2.72}$$

În acest caz

$$\begin{aligned}
H_R(\omega) &= \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(\omega n); \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega \\
\theta(\omega) &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega, & \text{dacă } H_R(\omega) < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Filtru de tipul 4. Simetrie impară, M par

$$\begin{aligned}
h[0] &= -h[M-1] \\
&\dots \\
h\left[\frac{M}{2}-1\right] &= -h\left[\frac{M}{2}\right]
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Urmând un mers de calcul similar cu cel de la filtrul de tipul 3, rezultă

$$H(\omega) = j e^{-j \frac{M-1}{2} \omega} H_R(\omega) = e^{j \left(-\frac{M-1}{2} \omega + \frac{\pi}{2} \right)} H_R(\omega) \quad (2.75)$$

unde

$$H_R(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h[n] \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.76)$$

Cu schimbarea indicelui de sumare ca în (2.63), rezultă

$$H(\omega) = e^{j \left(\frac{\pi - M-1}{2} \omega \right)} \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.77)$$

unde

$$d[n] = 2h \left[\frac{M}{2} - n \right] \quad \text{pentru } n = 1, \dots, \frac{M}{2}. \quad (2.78)$$

În acest caz

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin \omega \left(n - \frac{1}{2} \right); \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2} \omega \quad (2.79)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2} \omega, & \text{dacă } H_R \geq 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{M-1}{2} \omega, & \text{dacă } H_R < 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Se constată că și pentru cazul în care răspunsul la impuls prezintă simetrie impară răspunsul de fază este o funcție liniară de ω .

Aceste formule generale obținute pentru răspunsul în frecvență pot fi folosite în proiectarea filtrelor FIR de fază liniară al căror răspuns la impuls prezintă simetrie pară sau impară. Lungimea filtrului, M , este funcție de caracteristicile filtrului (lățimea benzii de tranziție, riplurile din benzile de trecere și oprire), și în literatura de specialitate există relații empirice cu ajutorul cărora se determină această mărime [32].

În toate cazurile considerate răspunsul de fază s-a exprimat în forma

$$\varphi(\omega) = \beta \frac{\pi}{2} - \alpha \omega \quad (2.81)$$

unde $\alpha = \frac{M-1}{2}$, $\beta=0$ pentru răspuns la impuls simetric și $\beta=1$ pentru

răspuns la impuls antisimetric. Cu alte cuvinte, pentru filtrele de tipul 1 și 2 caracteristica de fază este cu trecere prin origine, iar pentru filtrele de

tipul 3 și 4, caracteristica de fază este o dreapta care nu mai trece prin origine. În toate cazurile timpul de întârziere de grup normat este

$$t_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \alpha \quad (2.81')$$

Observații.

1. Pentru filtrele de tipul 1 și 3, cu M impar, funcția $H_R(\omega)$, are un corespondent fizic în timp și anume

$$h_R[n] = F^{-1} \left\{ H(\omega) e^{\frac{j(M-1)\omega}{2}} \right\} = h \left[n + \frac{M-1}{2} \right] \quad (2.82)$$

$h_R[n]$ fiind o secvență necauzală, simetrică la tipul 1, respectiv antisimetrică la tipul 3 în raport cu ordonata. Pentru filtrele de tipul 2 și 4 nu mai există acest corespondent fizic, deoarece în acest caz, $(M-1)/2$ nefiind întreg, nu mai este permisă deplasarea dată de relația (2.82).

2. Din expresiile (2.59), (2.67), (2.73) și (2.79) se observă că funcția de transfer de fază zero $H_R(\omega)$ este o funcție pară pentru filtrele de tipul 1 și 2, respectiv impară pentru filtrele de tipul 3 și 4, care nu are componentă continuă pentru tipurile 3, 4.
3. Analizând expresiile (2.59), (2.67), (2.73) și (2.79) ale funcțiilor de fază zero $H_R(\omega)$ în cele patru cazuri se constată că funcția de fază zero este periodică de perioadă 2π pentru filtrele de tipul 1 sau 3, în schimb pentru filtrele de tipul 2 sau 4, perioada este 4π și $H_R(\omega)$ prezintă simetrie de rotație (pe a doua jumătate a perioadei repetă evoluția dar cu semn schimbat). Această observație este utilă la proiectarea filtrelor pentru impunerea corectă a condițiilor în domeniul frecvență.

În Tabelul 2.1 sunt prezentate în rezumat cele 4 tipuri de filtre FIR de fază liniară împreună cu anumite particularități semnificative care justifică utilizarea sau neutilizarea fiecărui în realizarea unor anumite tipuri de caracteristici de filtrare: filtre trece jos (FTJ), trece sus (FTS), trece bandă (FTB), oprește bandă (FOB), transformator Hilbert (TRH) și diferențială (DIF).

Alegerea condiției de simetrie sau antisimetrie pentru răspunsul la impuls depinde de aplicație.

Tabelul 2.1

FIR cu fază liniară de tipul:	Lungimea M	Secvența $h[n]$	$H_R(\omega)$	$\phi(\omega)$	Valoarea lui $H_R(\omega)$, $ H(\omega) $ și $H(\omega)$ la:		Este indicată la proiectarea:	Nu poate fi folosit la proiectarea:
					$\omega = 0$	$\omega = \pi$		
1	impară	$h[n]=h[M-1-n]$	$\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(n\omega)$	$-\frac{M-1}{2}\omega$	fără constrângeri	fără constrângeri	FTJ,FTS FTB FOB	TRH DIF
2	pară	$h[n]=h[M-1-n]$	$\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$	$-\frac{M-1}{2}\omega$	fără constrângeri	0	FTJ FTB	FTS, FOB TRH DIF
3	impară	$h[n]=-h[M-1-n]$ $h[(M-1)/2]=0$	$\sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(n\omega)$	$\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega$	0	0	FTB TRH DIF	FTJ FTS FOB
4	pară	$h[n]=-h[M-1-n]$	$\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$	$\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega$	0	fără constrângeri	FTS,FTB TRH DIF	FTJ FOB

De exemplu, pentru răspuns la impuls cu simetrie impară și M impar, din (2.73) rezultă $H_R(0) = 0$ și $H_R(\pi) = 0$ și, în consecință, relația (2.73) nu va fi potrivită pentru proiectarea de FTJ sau FTS. Similar, pentru răspuns la impuls cu simetrie impară și M par, $H_R(0) = 0$, caz în care, această condiție nu va putea fi folosită în proiectarea unui FTJ FIR de fază liniară. În schimb, condiția de simetrie pară permite obținerea unui FTJ cu răspuns diferit de 0 la $\omega = 0$.

$$H_R(0) = h\left[\frac{M-1}{2}\right] + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h[n], M \text{ impar}, \quad (2.83)$$

$$H_R(0) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-1} h[n], M \text{ par}, \quad (2.84)$$

Fiecare din condițiile (2.54), (2.62), (2.70) și (2.76) constituie un set de ecuații liniare din care pot fi determinați coeficienții filtrului.

În cazul filtrelor al căror răspuns la impuls prezintă *simetrie pară* este necesară specificarea răspunsului în frecvență în $\frac{M+1}{2}$ puncte pentru M impar și $\frac{M}{2}$ pentru M par. Deși valorile lui ω pot fi alese arbitrar, de obicei acestea se aleg ca puncte echidistante în domeniul $0 \leq \omega \leq \pi$. Astfel, dacă

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi k}{M}, k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ k &= 0, 1, \dots, \frac{M}{2}-1, \quad M \text{ par} \end{aligned} \quad (2.85)$$

și se definește

$$a_{kn} = 2 \cos \omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right), \text{ și } a_{kn} = 1 \text{ pentru } n = \frac{M-1}{2} \text{ și toți } k \quad (2.86)$$

ecuațiile liniare (2.54) și (2.62) pentru filtre FIR cu răspuns la impuls simetric devin

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a_{kn} h[n], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2} \text{ pentru } M \text{ impar} \quad (2.87)$$

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} a_{kn} h[n], \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2}-1, \text{ pentru } M \text{ par.} \quad (2.88)$$

În cazul răspunsului la impuls cu *simetrie impară* este necesară specificarea răspunsului în frecvență în $\frac{M-1}{2}$ puncte pentru M impar și $\frac{M}{2}$ puncte pentru M par. Deoarece (2.70) și (2.76) implică $H_R(0) = 0$ independent de alegerea lui $h[n]$, evident, punctul $\omega = 0$ nu va putea fi folosit în specificarea răspunsului în frecvență. Pentru M impar nu este nici o problemă, deoarece se poate specifica $H_R(\omega)$ în $(M-1)/2$ puncte echidistante în domeniul fundamental de frecvență, de forma $\omega_k = 2\pi k / M$ pentru $k = 1, 2, \dots, (M-1)/2$. Când M este par sunt necesare $M/2$ frecvențe, astfel încât, dacă nu se poate folosi $\omega = 0$, se va folosi $\omega = \pi$. În acest caz se definesc frecvențele ω_k

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi k}{M}, \quad k = 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ &\quad k = 1, \dots, \frac{M}{2}, \quad M \text{ par} \end{aligned} \quad (2.89)$$

O alternativă în alegerea frecvențelor ω_k care înlătură complet răspunsul nul la $\omega = 0$ (și $\omega = \pi$) este

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{2\pi(k+1/2)}{M}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \\ &\quad k = 0, 1, \dots, \frac{M}{2}-1, \quad M \text{ par} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Acest set de frecvențe se obține din (2.85) prin deplasarea fiecărei frecvențe cu $\frac{\pi}{M}$.

Se definesc coeficienții

$$b_{kn} = 2 \sin \omega_k \left(\frac{M-1}{2} - n \right) \quad (2.91)$$

Cu (2.91), ecuațiile liniare (2.70) și (2.76) devin

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} b_{kn} h[n], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}, \quad M \text{ impar} \quad (2.92)$$

$$H_R(\omega_k) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} b_{kn} h[n], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad M \text{ par} \quad (2.93)$$

Exemplul 2.2.

Să se determine răspunsul la impuls $h[n]$ al filtrului FIR de fază liniară de lungime $M=4$ pentru care $H_R(0)=1$ și $H_R\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Soluție. Din (2.88) rezultă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_{00}h[0] + a_{01}h[1] = H_R(0) = 1 \\ a_{10}h[0] + a_{11}h[1] = H_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

în care $a_{00} = 2$, $a_{01} = 2$, $a_{10} = -\sqrt{2}$, $a_{11} = \sqrt{2}$.

În formă matriceală se poate scrie compact

$$[A][h] = [H_R]$$

$$\text{unde } [A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad [h] = \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \end{bmatrix}, \quad [H_R] = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Soluția este

$$h[0] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) = 0,0732232 = h[3]$$

$$h[1] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 1) = 0,4267766 = h[2]$$

Răspunsul în frecvență al acestui filtru este

$$H(\omega) = H_R(\omega)e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

$$\text{unde } H_R(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[(\sqrt{2} - 1)\cos\frac{3\omega}{2} + (\sqrt{2} + 1)\cos\frac{\omega}{2} \right]$$

În exemplul de mai sus, s-a considerat un filtru de lungime foarte mică. În practică, în funcție de aplicație, sunt necesare filtre FIR a căror lungime este mult mai mare (ordinul zecilor), situație în care $h[n]$ poate fi calculat numai cu ajutorul calculatorului.

Observație. Pentru filtrele FIR cu fază liniară, pentru orice M (par sau impar), există o singură valoare a întârzierii de grup normate, și anume

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \alpha = \frac{M-1}{2} \quad (2.94)$$

În figura 2.3 este reprezentată alura răspunsurilor la impuls pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară.

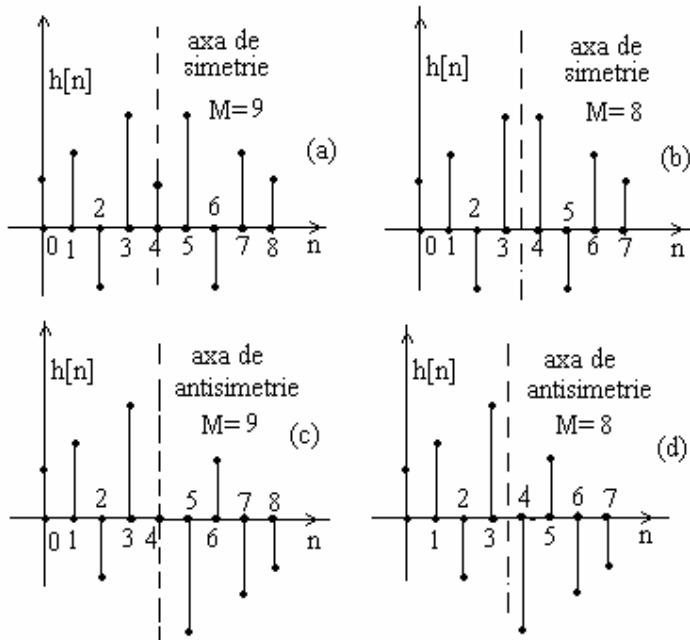


Figura 2.3. Răspunsurile la impuls pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară:
(a) tipul 1; (b) tipul 2; (c) tipul 3; (d) tipul 4.

2.4.1. Zerourile funcției de transfer a filtrului FIR cu fază liniară

Condiția de simetrie sau antisimetrie a răspunsului la impuls $h[n]$, care determină fază liniară a filtrului FIR, implică și o poziționare particulară a zerourilor funcției de transfer $H(z)$ a acestuia. Înlocuind în

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} \quad (2.95)$$

z cu z^{-1} , se obține

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^n \quad (2.96)$$

Efectuând schimbarea indicelui de sumare $m=M-1-n$ și utilizând condiția de simetrie pozitivă din (2.50) rezultă următoarea relație valabilă pentru filtrele FIR de tipul 1 și 2.

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{M-1-n} = z^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = z^{M-1} H(z) \quad (2.97)$$

Procedând similar pentru filtrele de tipul 3 și 4 cu utilizarea condiției de antisimetrie (2.51), se găsește relația

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[M-1-n]z^{M-1-n} = -z^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = -z^{M-1} H(z) \quad (2.98)$$

Reunind (2.97) și (2.98) rezultă că funcția de transfer a oricărui filtru FIR cu fază liniară satisfacă relația

$$H(z^I) = \pm z^{M-1} H(z) \quad (2.99)$$

Din relația (2.99) rezultă următoarele concluzii:

1. Dacă z_i este un zerou al lui $H(z)$, atunci și $1/z_i$ este de asemenea un zerou al acestuia;
2. Deoarece, în general, coeficienții $h[n]$ ai polinomului $H(z)$ sunt reali, zerourile complexe ale acestuia apar în perechi conjugate. Ca urmare, sunt posibile următoarele configurații de zerouri exprimate în coordonate polare ale acestora.

$$\text{a)} \quad z_1 = r_1 e^{j\theta_1}, \text{ cu } r_1 \neq 1, \theta_1 \neq 0, \theta_1 \neq \pi$$

Caracterul real al coeficienților determină existența zeroului $z_2 = z_1^* = r_1 e^{-j\theta_1}$ iar liniaritatea fazei, conform relației (2.99), implică existența zerourilor z_3 și z_4 , simetrice față de cercul unitate

$$z_3 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1} e^{-j\theta_1} \quad \text{și} \quad z_4 = \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_1} e^{j\theta_1}$$

Acestei configurații îi corespunde factorul elementar $H_1(z)$ în funcția de sistem $H(z)$:

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \prod_{i=1}^4 (1 - z^{-1} z_i) = 1 - 2 \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \cos \theta_1 z^{-1} + \\ &\quad + \left(r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} + 4 \cos \theta_1 \right) z^{-2} - 2 \left(r_1 + \frac{1}{r_1} \right) \cos \theta_1 z^{-3} + z^{-4} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Evident, secvența $h_1[n] = Z^I\{H_1(z)\}$ este simetrică. Constelația celor patru zerouri este dată în figura 2.4 cu marcarea între paranteze a coordonatelor polare.

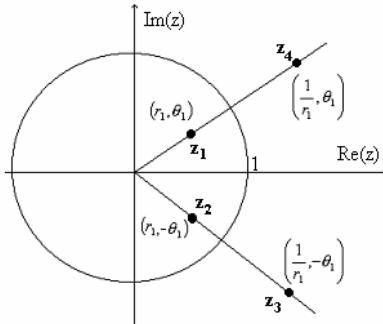


Figura 2.4. Pozițiile zerourilor pentru $r_1 \neq 1$ și $\theta \neq 0, \theta \neq \pi$

b) $r_1 = 1$ și $\theta_1 \neq 0, \theta_1 \neq \pi$

Prezența zeroului $z_1 = e^{j\theta_1}$ implică automat și zeroul $z_2 = e^{-j\theta_1}$ care este complex conjugatul lui z_1 . Fiind pe cercul unitate, zerourile z_1 și z_2 reprezintă și propriile lor simetrice față de cercul unitate. Factorul elementar corespunzător în $H(z)$ va fi

$$H_1(z) = (1 - z^{-1}e^{j\theta_1})(1 - z^{-1}e^{-j\theta_1}) = 1 - 2\cos\theta_1 z^{-1} + z^{-2}$$

c) $r_1 \neq 1$ și $\theta_1 = 0$

Zeroul $z_1 = r_1$ fiind real, implică doar simetricul său față de cercul unitate $z_2 = 1/r_1$ și, deci, factorul elementar

$$H_1(z) = (1 - z^{-1}r_1)\left(1 - z^{-1}\frac{1}{r_1}\right) = 1 - \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)z^{-1} + z^{-2}$$

d) $r_1 \neq 1$ și $\theta_1 = \pi$

Analog cazului c), se obține

$$z_1 = -r_1 \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{r_1} \text{ și } H_1(z) = 1 + \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)z^{-1} + z^{-2}$$

e) $r_1 = 1$ și $\theta_1 = 0$ sau $r_1 = -1$ și $\theta_1 = \pi$

Zeroul $z_1 = 1$ (sau $z_1 = -1$) este simultan propriul lui conjugat și simetric față de cercul unitate. Factorii elementari corespunzători acestora sunt

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} \text{ respectiv } H_1(z) = 1 + z^{-1}.$$

Utilizând relațiile

$$H(\omega)|_{\omega=0} = H(z)|_{z=1}; \quad H(\omega)|_{\omega=\pi} = H(z)|_{z=-1} \quad (2.101)$$

și corelând particularitățile funcției $H(\omega)$ din Tabelul 2.1 cu configurațiile de zerouri posibile ale funcției $H(z)$ de fază liniară, se desprind următoarele observații:

Întrucât zerourile menționate la a), b), c), d) apar în număr par, în cazul filtrelor cu lungime pară (tipurile 2 și 4), care implică ordinul $M-1$ impar pentru sistem, este necesară prezența factorilor de tipul e) cu ordin de multiplicitate impar. Astfel, lafiltrele de tipul 2 este obligatorie prezența zeroului $z=-1$ cu multiplicitate impară pentru a realiza anularea lui $H(\omega)$ la $\omega=\pi$, în timp ce lafiltrele de tipul 4 este obligatorie prezența zeroului $z=1$ cu multiplicitate impară pentru a realiza anularea lui $H(\omega)$ la $\omega=0$. Lafiltrele de tipul 3, cu ordinul $M-1$ par, este obligatorie prezența simultană a zerourilor $z=1$ și $z=-1$ pentru a anula $H(\omega)$ în $\omega=0$ și $\omega=\pi$. Imparitatea funcției $H_R(\omega)$ necesită multiplicitate impară atât pentru $z=1$, cât și pentru $z=-1$. La *tipul 1*, cu ordinul $M-1$ par, apariția zerourilor în $z=1$ și $z=-1$ nu este obligatorie. Se pot introduce, dacă alura caracteristicii de filtrare necesită anularea ei la frecvențele 0 și/sau π , dar atunci obligatoriu cu multiplicitate pară pentru fiecare, aceasta pentru a respecta ordinul par al filtrului și paritatea caracteristicii $H_R(\omega)$.

Tinând seama de aceste observații, în figura 2.5 se prezintă constelațiile tipice ale zerourilor celor patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară.

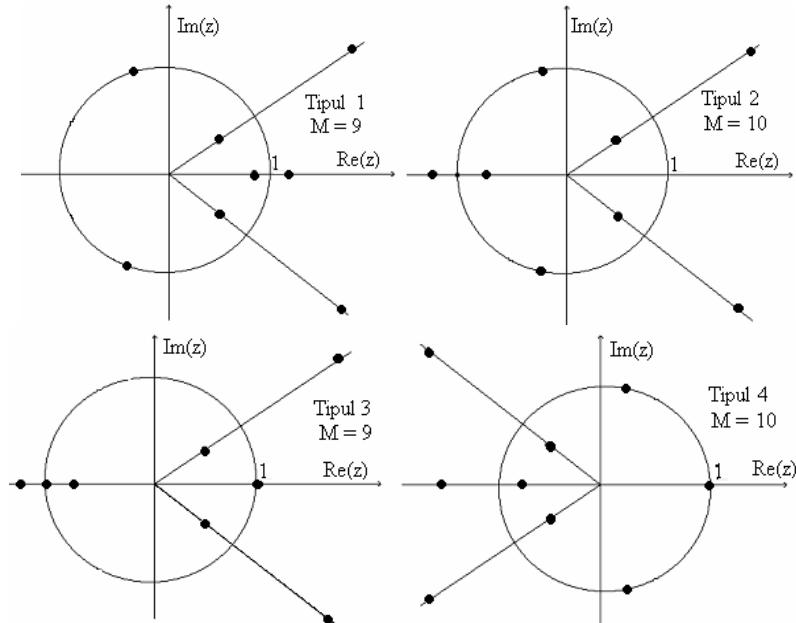


Figura 2.5. Constelațiile tipice de zerouri pentru cele 4 tipuri de filtre FIR cu faza liniară

2.5. Proiectarea filtrelor FIR cu fază liniară prin metoda fereastrelor

În această metodă se începe cu specificarea răspunsului dorit în frecvență, $H_d(\omega)$, care este o funcție periodică de perioadă 2π și se poate dezvolta în serie Fourier

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] e^{-j\omega n} \quad (2.102)$$

Răspunsul la impuls se deduce cu transformata Fourier inversă

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.103)$$

Răspunsul la impuls $h_d[n]$ este, în general, infinit ca durată și trebuie trunchiat la un număr de puncte $n=M-1$ pentru a obține un filtru FIR de lungime M . Funcția de transfer a filtrului numeric FIR ce trebuie sintetizat este

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad (2.104)$$

Efectuând identificarea între termenii sumelor care reprezintă funcția de transfer dorită și cea reală a filtrului FIR, rezultă

$$h[n] = h_d[n], \quad n = 0, \dots, M-1 \quad (2.105)$$

Lungimea filtrului se presupune cunoscută, cel puțin aproximativ, din cerințele de proiectare. Decizia asupra tipului de filtru ales se ia considerând restricțiile sintetizate în Tabelul 2.1.

Întrucât se dorește ca filtrul rezultat să aibă caracteristica de amplitudine impusă $|H_d(\omega)|$ și caracteristica de fază liniară, în $H_d(\omega)$ se

include și factorul de fază liniară $e^{j(\beta\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega)}$, unde $\beta = 0$ pentru filtre de tipul 1 și 2 și $\beta = 1$ pentru filtre de tipul 3 și 4. Astfel,

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{j(\beta\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega)} \quad (2.106)$$

În cazul filtrelor de tipul 1 și 2 $H_{dR}(\omega)$ este o funcție pară de ω , iar pentrufiltrele de tipul 3 și 4, impară. Alegerea unui filtru de tipul 3 sau 4 se justifică numai dacă $H_d(0) = 0$.

Funcția de fază zero $H_{dR}(\omega)$ din (2.106) se poate alege ca fiind funcția de fază zero a filtrului ideal pe care îl aproximează sau, în cazul filtrelor de tipul 1 și 2, când aceasta prezintă simetrie pară,

$$H_{dR}(\omega) = |H_d(\omega)|, \omega \in [-\pi, \pi] \quad (2.107)$$

iar în cazul filtrelor de tipul 3 și 4, când aceasta prezintă simetrie impară,

$$H_{dR}(\omega) = \begin{cases} |H_d(\omega)|, & \omega \in [0, \pi] \\ -|H_d(\omega)|, & \omega \in [-\pi, 0], \\ 0, & \omega = 0 \end{cases} \quad (2.108)$$

În concluzie, pentru filtrelor de tipul 1 și 2

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \quad (2.109)$$

iar pentru filtrelor de tipul 3 și 4

$$H_d(\omega) = H_{dR}(\omega) e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \quad (2.110)$$

După stabilirea lui $H_d(\omega)$, se descompune acesta în serie Fourier pentru a rezulta secvența infinită $h_d[n]$. Coeficienții filtrului sintetizat se aleg ca în relația (2.105). Trunchierea răspunsului la impuls poate fi privită și ca o înmulțire a secvenței de lungime infinită cu o fereastră temporală de lungime M , notată $w[n]$, adică

$$h[n] = h_d[n]w[n] \quad (2.111)$$

cu proprietatea

$$w[n] = 0, \text{ pentru } n \notin [0, M-1] \quad (2.112)$$

Produsul algebric în timp discret din (2.111) îi corespunde în frecvență, convoluția transformelor Fourier. Datorită periodicității de 2π a transformelor Fourier, convoluția se efectuează pe un interval egal cu perioada fundamentală, egal cu 2π .

$$H(\omega) = F\{h[n]\} = \frac{1}{2\pi} H_d(\omega) * W(\omega) \quad (2.113)$$

care, evident, nu coincide, în general, cu $H_d(\omega)$.

În cazul sintezei filtrelor cu fază liniară, funcția fereastră $w[n]$ trebuie să îndeplinească condiția de simetrie

$$w[n] = w[M-1-n] \quad (2.114)$$

adică este un răspuns la impuls de tipul 1 sau 2, în funcție de paritatea lui M și

$$W(\omega) = W_R(\omega) e^{-j\frac{M-1}{2}\omega} \quad (2.115)$$

unde $W_R(\omega)$ este funcția de fază zero a ferestrei.

Relația (2.113) devine

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\lambda) W(\omega - \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) e^{j\left(\frac{\beta\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\lambda\right)} W_R(\omega - \lambda) e^{-j\frac{M-1}{2}(\omega - \lambda)} d\lambda = \\ &= e^{j\left(\frac{\beta\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega\right)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) W_R(\omega - \lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.116)$$

Rezultă că trunchierea filtrului FIR de fază liniară conduce la o funcție de transfer de fază zero, $H_R(\omega)$, dată de conoluția periodică, continuă dintre răspunsul dorit de fază zero și funcția de transfer de fază zero a ferestrei, adică

$$H_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\lambda) W_R(\omega - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} H_{dR}(\omega) * W_R(\omega) \quad (2.117)$$

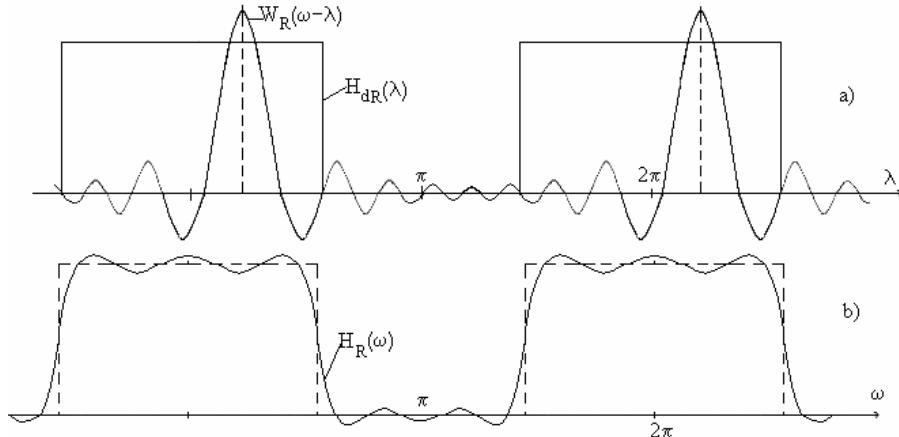


Figura 2.6. a) Operația de conoluție implicată de trunchierea răspunsului la impuls ideal, b) Aproximarea răspunsului în frecvență al filtrului rezultat din trunchierea răspunsului la impuls ideal

Din relația (2.117) rezultă că dacă $W_R(\omega)$ este un puls foarte îngust centrat pe $\omega = 0$ (ideal, o funcție Delta) în comparație cu $H_{dR}(\omega)$, atunci $H_R(\omega)$ aproximează foarte fidel pe $H_{dR}(\omega)$. Aceasta implică

funcția fereastra de lungime M foarte mare (ideal $w[n]=1$ pentru toți n , deci lipsa trunchierii, caz în care $W(\omega)$ este un tren periodic de impulsuri de perioadă 2π). Pe de altă parte, lungimea M a fereștrei ar trebui să fie cât mai mică pentru reducerea complexității calculului. În figura 2.6 sunt ilustrate $H_{dR}(\omega)$, $W_R(\omega)$ și convoluția periodică dintre ele, $H_R(\omega)$.

Exemplul 2.3.

Să se proiecteze două FTJ cu fază liniară cu lungimea $M=38$, respectiv $M=39$, frecvența de tăiere fiind $F_c=5$ kHz, iar frecvența de eșantionare $F_s=40$ kHz.

Soluție. Frecvența de tăiere normată este

$$\omega_c = 2\pi \frac{F_c}{F_s} = 2\pi \frac{5}{40} = \frac{\pi}{4} \quad (2.118)$$

Cu definiția lui $H_{dR}(\omega)$ pentru FTJ ideal, $H_{dR}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$,

care este o funcție pară, utilizând (2.109) și (2.103), cu valorile din enunț, se obține răspunsul la impuls cu lungimea infinită

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dR}(\omega) e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} e^{j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} d\omega = \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \operatorname{sinc} \left[\left(n - \frac{M-1}{2}\right) \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned} \quad (2.119)$$

unde s-a folosit funcția $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$.

Trunchierea răspunsului necauzal $h_d[n]$ conform relației (2.105) permite determinarea celor M valori ale răspunsului la impuls $h[n]$, pentru $n=0,1,\dots,M-1$, reprezentând coeficienții filtrului FIR proiectat. Secvențele $h[n]$ obținute sunt date în figura 2.7.

Particularizând relațiile din Tabelul 2.1 care dau caracteristicile funcției de transfer $H(\omega)$, rezultă

pentru $M=39$

$$\varphi(\omega) = -19\omega; \quad H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{19} a[n] \cos(n\omega) \quad \text{unde}$$

$$a[0] = h\left[\frac{M-1}{2}\right] = \frac{1}{4}; \quad a[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] = \frac{1}{2}\text{sinc}\frac{n\pi}{4}, \quad n = \overline{1,19}$$

pentru $M=38$

$$\varphi(\omega) = -\frac{37}{2}\omega; \quad H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{19} b[n] \cos\left(\frac{2n-1}{2}\omega\right) \quad \text{unde}$$

$$b[n] = 2h\left[\frac{M}{2} - n\right] = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{4}\right)$$

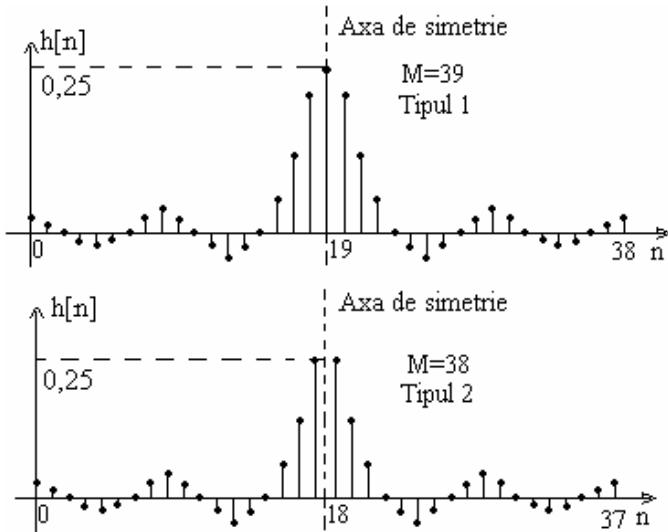


Figura 2.7. Răspunsurile la impuls ale FTJ din exemplul 2.3.

Reprezentările grafice ale funcției de fază zero și modulului funcției de transfer sunt prezentate în figura 2.8, (a) și (c) pentru $M=39$ și (b) și (d) pentru $M=38$. Se pot remarca proprietățile de simetrie pară ale tuturor caracteristicilor și, de asemenea, simetria de rotație, de perioadă 4π și trecerea prin zero la $\omega=\pm\pi$ a funcției $H_R(\omega)$ a filtrului de tipul 2 (figura 2.8b).

Observații

1. Metoda ferestrelor de timp se mai numește și *metoda dezvoltării în serie Fourier* deoarece relația (2.104) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a funcției $H(\omega)$, periodică, de perioadă 2π .
2. Proiectarea poate fi făcută și fără a introduce factorul de fază liniară, ca în relația (2.109), determinând răspunsul la impuls, de lungime infinită, corespunzător funcției de fază zero a filtrului ideal

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) \quad (2.120)$$

Acest răspuns, simetric față de ordonată, se trunchiază simetric pentru a avea de asemenea faza zero și lungimea M . În acest caz, răspunsul trunchiat este

$$h_M^{(t)}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c n) & \text{pentru } -\frac{M-1}{2} \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.121)$$

Se deplasează apoi secvența la dreapta cu $(M-1)/2$ pentru a realiza cauzalitatea filtrului, obținând secvența

$$h_M[n] = h_M^{(t)}\left[n - \frac{M-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left[\left(n - \frac{M-1}{2}\right)\omega_c\right], & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.122)$$

care este, evident, aceeași cu cea obținută prin prima procedură bazată pe relațiile (2.103) și (2.109).

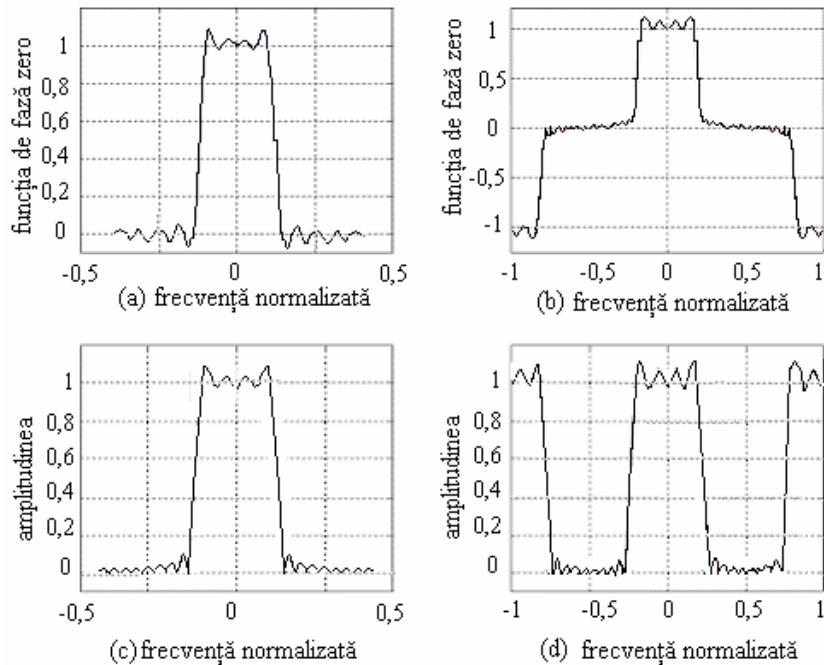


Figura 2.8 Caracteristicile în domeniul frecvență ale FTJ din exemplu dat, $M = 39$ (a și c); $M = 38$ (b și d).

Această metodă este operațională pentru filtrele de lungime impară (tipurile 1 și 3), în schimb, pentru cele de lungime pară (tipurile 2 și 4) ea devine incomodă, secvența de lungime pară neputând fi obținută printr-o simplă deplasare dintr-o altă secvență simetrică sau antisimetrică în raport cu originea deoarece $(M-1)/2 \notin \mathbb{Z}$, motiv pentru care este recomandabil să se determine coeficienții filtrului cu relațiile (2.103) și (2.106), asocierea factorului de fază liniară din (2.106) având două avantaje mari:

- se operează cu $H(\omega)$, de perioadă 2π pentru toate tipurile de filtre;
- trunchierea asigură localizarea răspunsului de lungime finită M , direct pe suportul $0 \leq n \leq M-1$.

2.5.1. Tipuri de ferestre

Pentru ferestrele uzuale, caracteristica de amplitudine are un lob principal, centrat pe $\omega = 0$, și un număr de lobi secundari cu tendințe de descreștere.

Efectul trunchierii asupra caracteristicii obținute, cunoscut sub numele de *fenomen Gibbs*, [63] se poate constata în special în zonele de tranziție rapidă a caracteristicii. Se constată două aspecte:

1. Apariția unei benzii de tranziție de lățime finită, care este cu atât mai mare, cu cât lărgimea lobului principal al ferestrei este mai mare;
2. Apariția unor ripluri sau oscilații atât în banda de trecere cât și în cea de oprire a căror amplitudine și viteză de scădere sunt determinate de amplitudinea și vîțea de scădere a lobilor secundari ai spectrului ferestrei. Aceste ripluri cresc către marginile benzilor de trecere și oprire, în apropierea punctelor de discontinuitate ale caracteristicii ideale.

În concluzie, pentru a se obține o bandă de tranziție cât mai îngustă și ripluri cât mai reduse, funcția fereastra utilizată trebuie să îndeplinească următoarelor cerințe:

1. Funcția de transfer de fază zero a ferestrei să aibă lobul principal cât mai îngust și lobi secundari cât mai mici;
2. Lobul principal să conțină cea mai mare parte din energia ferestrei;
3. Energia lobilor secundari să fie cât mai uniform distribuită între aceștia.

La limită, aceste condiții ar fi îndeplinite de

$$W_R(\omega) = 2\pi\delta(\omega) \quad (2.123)$$

rezultat fără valoare practică, deoarece în acest caz $w[n] = 1$, constant pentru orice n , deci lipsește fereastra. În general, cele trei cerințe nu pot fi satisfăcute de nici o fereastră deoarece cerințele 1 și 2 sunt contradictorii.

Din considerentele prezentate anterior rezultă modalitatea de specificare a caracteristicii de amplitudine a filtrului sub forma unor cote de gabarit. Astfel, în cazul proiectării unui filtru trece jos, în banda de trecere funcția de fază zero oscilează în jurul valorii ideale 1, *riplul maxim* fiind notat cu δ_p , iar în banda de oprire, în jurul valorii ideale 0, *riplul maxim* fiind notat cu δ_s , cum se arată în figura 2.20.

Dacă se reprezintă modulul funcției de fază zero și se duc paralele la abscisă prin $1-\delta_p$, respectiv δ_s , intersecțiile acestora cu graficul definesc banda de trecere efectivă $\omega \in [0, \omega_p]$ (B.T.) și banda de oprire efectivă (B.O.) $\omega \in [\omega_s, \pi]$, cu semnificația din figura 2.9. Zona situată între ω_p și ω_s reprezintă banda de tranziție a filtrului (B. Tr.). Zonele interzise sunt hașurate pe figură.

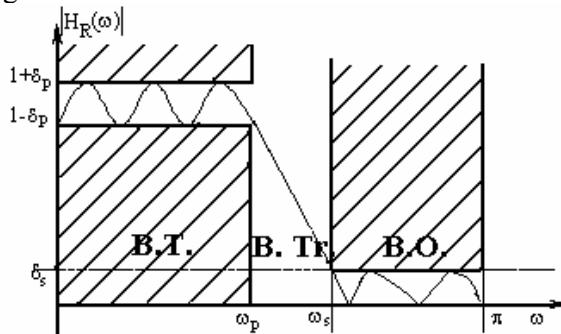


Figura 2.9. Caracterizarea modulului funcției de fază zero a unui FTJ sub forma unor cote de gabarit

2.5.1.1. Fereastra dreptunghiulară

Fereastra dreptunghiulară cauzală este definită prin relația

$$w_D[n] = \begin{cases} 1, & n \in [0, M-1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.124)$$

Transformata Fourier a acesteia conduce la expresia

$$W_D(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \frac{\sin((M/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} \quad (2.125)$$

de unde rezultă termenul de fază zero

$$W_{DR}(\omega) = \frac{\sin((M/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} = S_a(\omega) \quad (2.126)$$

Funcția $W_{DR}(\omega)$ este pară, de perioadă 2π pentru M impar, respectiv 4π cu simetrie de rotație pentru M par și

$$W_{DR}(\omega)|_{\omega=0} = M; \quad W_{DR}(\omega)|_{\omega=\pi} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } M = 2k \\ (-1)^k & \text{pentru } M = 2k + 1 \end{cases} \quad (2.127)$$

$$W_{DR}(\omega_k) = 0 \Rightarrow \omega_k = k \frac{2\pi}{M} \text{ cu } k \in \mathbb{Z} - \{pM\}, p \in \mathbb{Z}.$$

Frecvențele la care se anulează $W_{DR}(\omega)$ reprezintă *nuluri spectrale*.

În figura 2.10 este reprezentată funcția de fază zero $W_{DR}(\omega)$ pentru $M=11$, care seamănă cu o sinusoidă amortizată având un lob principal cu lățimea $4\pi/M$, dublă față de cea a lobilor secundari. Lobul principal se definește, în general, ca regiunea dintre primele nuluri aflate de o parte și de cealaltă a originii. Cu creșterea lui M , lățimea lobului principal descrește, iar înălțimea sa crește. La fel se întâmplă și pentru lobii laterali, aria de sub fiecare rămânând constantă.

Conform relației (2.117), valoarea lui $H_R(\omega)$ pentru filtrul FIR cu M impar este dată, în cazul unui filtru trece jos cu răspunsul dorit $H_d(\omega)=1$ și, corespunzător, $H_{dR}(\omega)=H_d(\omega)=1$, pentru $\omega \in [-\omega_c, \omega_c]$, de integrala

$$H_R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(\omega - \lambda) d\lambda \quad \text{pentru } \omega \in [-\pi, \pi] \quad (2.128)$$

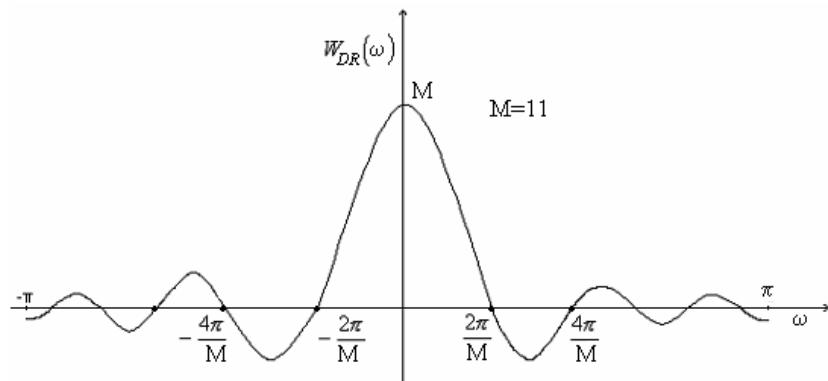


Figura 2.10 Funcția de transfer de fază zero a ferestrei dreptunghiulare

Interpretarea relației (2.128) se face grafic în figura 2.11.

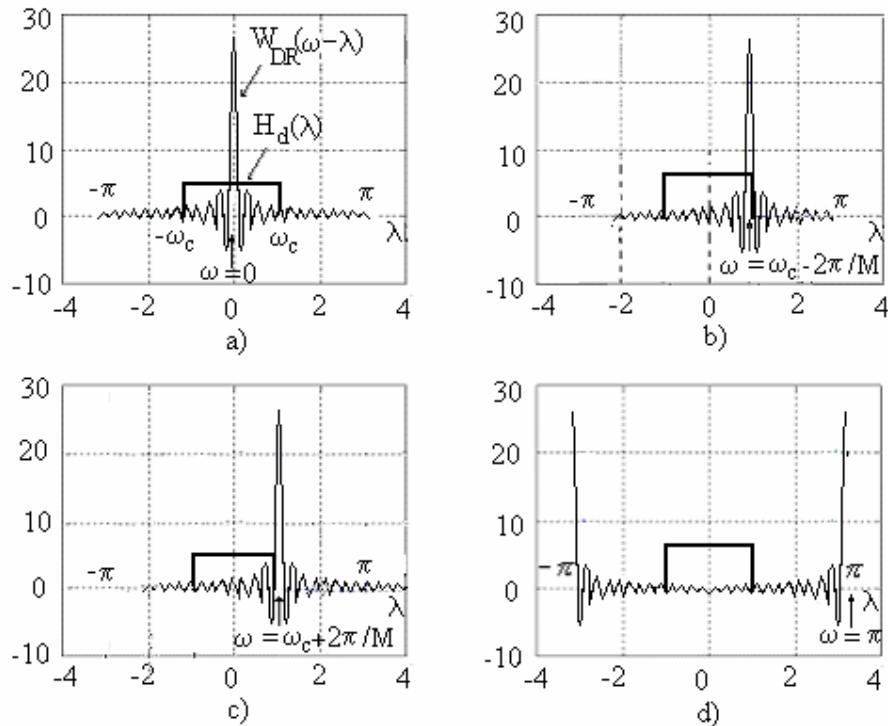


Figura 2.11 Explicarea fenomenului Gibbs prin convoluție

Pe măsură ce $W_{DR}(\omega - \lambda)$ trece peste o discontinuitate a lui $H_d(\lambda)$, cu creșterea lui ω , integrala din (2.117) va oscila, după cum fiecare lob din $W_{DR}(\omega - \lambda)$ traversează discontinuitatea. Deoarece aria de sub fiecare lob rămâne constantă, cu creșterea lui M , oscilațiile devin mai rapide, dar nu descresc în amplitudine. Aceste oscilații se numesc *fenomen Gibbs* și se datorează trunchierii seriei Fourier [63].

Pentru a aprecia valoarea integralei (2.128) și a pune în evidență efectul Gibbs, se examinează variația lui $H_R(\omega)$ pe intervalul $(0, \pi)$, aceasta fiind o funcție pară obținută ca rezultat al convoluçãoiei a două funcții pare. Se consideră patru situații semnificative $\omega=0$, $\omega=\omega_c-2\pi/M$; $\omega=\omega_c+2\pi/M$; $\omega=\pi$ ($\omega_c=10\pi/M$, $M=25$) [28]. Astfel, pentru $\omega=0$, din figura 2.11a rezultă

$$\begin{aligned}
H_R(\omega)_{\omega=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(-\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_{DR}(\omega) d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{DR}(\omega) d\omega - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} W_{DR}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} W_{DR}(\omega) d\omega \right] = \quad (2.129) \\
&= w_{DR}[0] - \sigma = 1 - \sigma
\end{aligned}$$

Din relația (2.129) se observă că valoarea funcției $H_R(\omega)$ la $\omega=0$ este dată de suma ariilor (cu tot cu semn) lobului principal și lobilor laterali ce cad în dreptul benzii de trecere a filtrului sau, altfel spus, la $\omega=0$ valoarea integralei se obține scăzând din 1 suma ariilor lobilor secundari ce nu cad în dreptul benzii de trecere. De aici rezultă că atât timp cât lobul principal al ferestrei baleiază zona de trecere a filtrului ideal, valoarea funcției $H_R(\omega)$, corespunzătoare secvenței trunchiate, oscilează în jurul valorii 1, mărimea oscilațiilor fiind dictată de suma ariilor lobilor secundari ce nu intră în intervalul $(-\omega_c, \omega_c)$.

Valoarea cea mai mare a lui $H_R(\omega)$ în banda de trecere (deci și riplul maxim) se obține la frecvența $\omega=\omega_c-2\pi/M$, care corespunde poziției ferestrei din figura 2.11b, pentru care aria mare dată de (2.128) se datorează excluderii primului lob lateral din dreapta (cu arie mare negativă). Odată cu intrarea lobului principal în dreptul benzii de oprire, numai lobii secundari rămân în dreptul intervalului $(-\omega_c, \omega_c)$, astfel că valoarea lui $H_R(\omega)$, egală cu suma ariilor acestor lobi, oscilează în jurul valorii 0. Cea mai mare oscilație în banda de oprire se obține la $\omega=\omega_c+2\pi/M$, când primul lob lateral stânga, cu arie negativă mare, rămâne în dreptul benzii de trecere, situație corespunzătoare figurii 2.11c. Cea mai mică oscilație se obține la $\omega=\pi$, deoarece acum numai lobii secundari cei mai mici au rămas în dreptul zonei de trecere, cum se arată în figura 2.11d.

La frecvența de tăiere teoretică ($\omega=\omega_c$), jumătate din lobul principal a ieșit din intervalul $(-\omega_c, \omega_c)$, astfel că valoarea lui $H_R(\omega)$ este aproximativ $1/2$, deoarece integrala din $W_{DR}(\omega)$ pe un interval de lățime 2π este unitară și poate fi considerată aproximativ egală cu integrala lobului principal.

Observații.

- Riplurile, atât cele din banda de trecere, cât și cele din banda de oprire, sunt datorate lobilor secundari.

- Distanța dintre frecvențele unghiulare la care apar riplurile maxime din banda de trecere și banda de oprire este egală cu lățimea lobului principal al ferestrei

$$\omega_c + \frac{2\pi}{M} - \left(\omega_c - \frac{2\pi}{M} \right) = \frac{4\pi}{M} \quad (2.130)$$

Ca atare, lățimea zonei de tranziție, mai mică decât distanța dintre cele două frecvențe, este dictată de lățimea lobului principal. Creșterea lungimii M a filtrului reduce zona de tranziție, împingând riplurile maxime din cele două benzi spre frecvența teoretică de tăiere, neputându-le însă reduce sub 8,9% [28].

Explicarea fenomenului Gibbs efectuată mai sus evidențiază cerințele funcției fereastră prezentate la începutul paragrafului 2.5.1.

Acestea conduc la următoarele performanțe pentru filtrul proiectat:

1. Zonă de tranziție îngustă;
2. Ripluri mici ale răspunsului în frecvență;
3. Uniformizarea riplurilor, în scopul evitării situației în care energia lobilor secundari este concentrată în principal în primii lobi secundari.

În figura 2.12 sunt prezentate caracteristicile de amplitudine, în modul și normate, în decibeli, pentru fereastra dreptunghiulară cu $M= 25$, iar în figura 2.13 aceleași caracteristici ale FTJ proiectat prin ponderarea cu această fereastră, cu frecvența de tăiere $\omega_c=2\pi/5$, pe abscisă fiind luată frecvența normalizată.

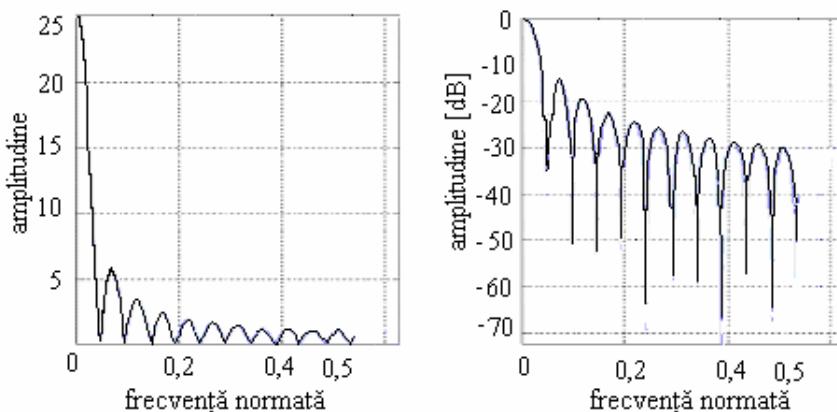


Figura 2.12 Răspunsul în frecvență al ferestrei dreptunghiulare cu $M = 25$

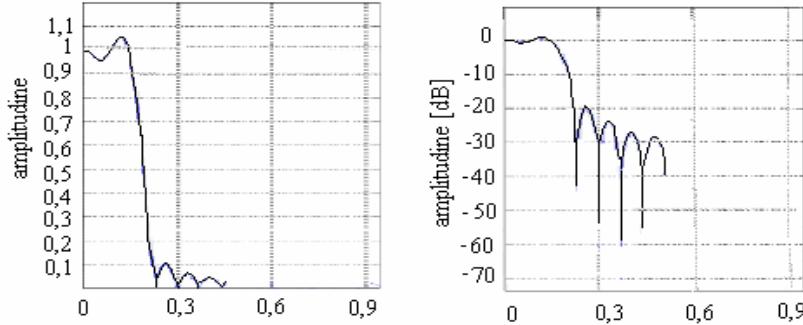


Figura 2.13. Răspunsul în frecvență al FTJ cu $\omega_c/2\pi = 0,2$ ponderat cu fereastra dreptunghiulară cu $M = 25$

Normarea lui $|W_D(\omega)|$ se face în raport cu valoarea sa maximă M , obținută la $\omega=0$. Amplitudinile lobilor secundari nu pot fi reduse prin creșterea lui M . Se presupune M suficient de mare, încât $\sin(M\omega/2)$ variază mult mai rapid decât $\sin(\omega/2)$. Maximul (în modul) se obține când $\sin(M\omega/2) = \pm 1$. Prima frecvență la care este îndeplinită această condiție este $M\omega/2 = \pi + \pi/2$, deci $\omega = 3\pi/M$. Amplitudinea normată a primului lob secundar este

$$\left| \frac{W_D(\omega)}{W_D(0)} \right|_{\omega=\frac{3\pi}{M}} = \frac{1}{M} |W_{DR}(\omega)|_{\omega=\frac{3\pi}{M}} = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{\sin(3\pi/2M)} \right|_{N \rightarrow \infty} \approx \frac{2}{3\pi} \approx 0,2 \quad (2.131)$$

deci amplitudinea normată, în dB, este $20 \lg(2/(3\pi)) \approx -13$ dB pentru M foarte mare (figura 2.12). Aceasta implică o atenuare minimă de doar 21 dB în banda de oprire și o variație maximă a atenuării în banda de trecere de 1,6 dB pentru FTJ proiectat (figura 2.13).

Reducerea riplurilor în cele două benzi se poate realiza utilizând alte tipuri de ferestre, mai puțin abrupte decât cea dreptunghiulară.

2.5.1.2. Familia de ferestre Hamming

O relația prin care se definește familia de ferestre Hamming este

$$w_H[n] = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha)\cos\frac{2\pi n}{M-1}, & \text{pentru } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.132)$$

Se observă că $w_H[0] = W_H[M-1] = 2\alpha - 1$ și $w_H\left[\frac{M-1}{2}\right] = 1$.

Dacă $\alpha=0,54$ fereastra este denumită *Hamming propriu - zisă*, iar dacă $\alpha=0,5$ este denumită *Hanning* (sau *fereastra lui von Hann*, mai corect).

Determinarea spectrului $W_{HR}(\omega)$ se poate face exprimând $w_{HR}[n]$ ca produsul dintre o fereastră dreptunghiulară necauzală $w_{DR}[n]$ și semnalul periodic $x[n]$

$$x[n] = \alpha + (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{M-1}, \quad (2.133)$$

adică

$$w_{HR}[n] = w_{DR}[n]x[n] = w_{DR}[n] \left[\alpha + (1-\alpha) \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right] \quad (2.134)$$

Multiplicării în domeniul timp a semnalelor $w_{DR}[n]$ și $x[n]$ îi corespunde în domeniul frecvență convoluția circulară a transformatelor lor Fourier, $W_{DR}(\omega)$ și $X(\omega)$. Cum $x[n]$ se compune dintr-un termen constant și unul în cosinus de frecvență unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{M-1}$, transformata sa Fourier se poate exprima ca o sumă de trei funcții Delta, după cum urmează:

$$X(\omega) = \alpha\pi\delta(\omega) + \frac{1-\alpha}{2}\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M-1}\right) + \frac{1-\alpha}{2}\pi\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M-1}\right) \quad (2.135)$$

Din convoluția spectrelor rezultă spectrul ferestrei, de forma

$$W_{HR}(\omega) = \alpha W_{DR}(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} W_{DR}\left(\omega - \frac{2\pi}{M-1}\right) + \frac{1-\alpha}{2} W_{DR}\left(\omega + \frac{2\pi}{M-1}\right) \quad (2.136)$$

Se observă că spectrul ferestrei Hamming este format din suma a trei termeni care reprezintă, fiecare, versiuni ale spectrului ferestrei rectangulare, $W_{DR}(\omega)$, scalate și deplasate pe pozițiile impulsurilor Delta, situație ilustrată în figura 2.14. Deplasările determinate de impulsurile din funcția cosinus poziționează lobii laterali ai spectrului $W_{DR}(\omega)$, astfel încât aceștia tind să se anuleze, ceea ce conduce la reducerea mărimii lobilor laterali ai spectrului rezultat, $W_{HR}(\omega)$.

Prin însumarea termenilor dispar zerourile ferestrei dreptunghiulare de la $\pm 2\pi/M$, rezultând un lob principal cu lățimea dublă față de cea a lobului principal al ferestrei dreptunghiulare. Amplitudinile lobilor secundari sunt considerabil mai mici comparativ cu cele ale lobilor secundari ai ferestrei dreptunghiulare. În plus, între $4\pi/(M-1)$ și $6\pi/(M-1)$ (și simetric în stânga) s-a creat prin însumare un zero pentru $W_{HR}(\omega)$,

scindând astfel în două primul lob secundar, care este de obicei cel mai puternic. Pentru $\alpha=0,54$ (fereastra Hamming), 99,96% din energia totală a ferestrei este conținută în lobul principal, iar lobul secundar cel mai puternic are amplitudinea cu 41 dB mai mică decât lobul principal. Pentru filtrele proiectate prin metoda ferestrei cu ponderare Hamming, creșterea lățimii lobului principal determină creșterea lățimii zonei de tranziție, în timp ce descreșterea amplitudinilor lobilor laterali determină ripluri mai mici în zona de oprire și în zona de trecere.

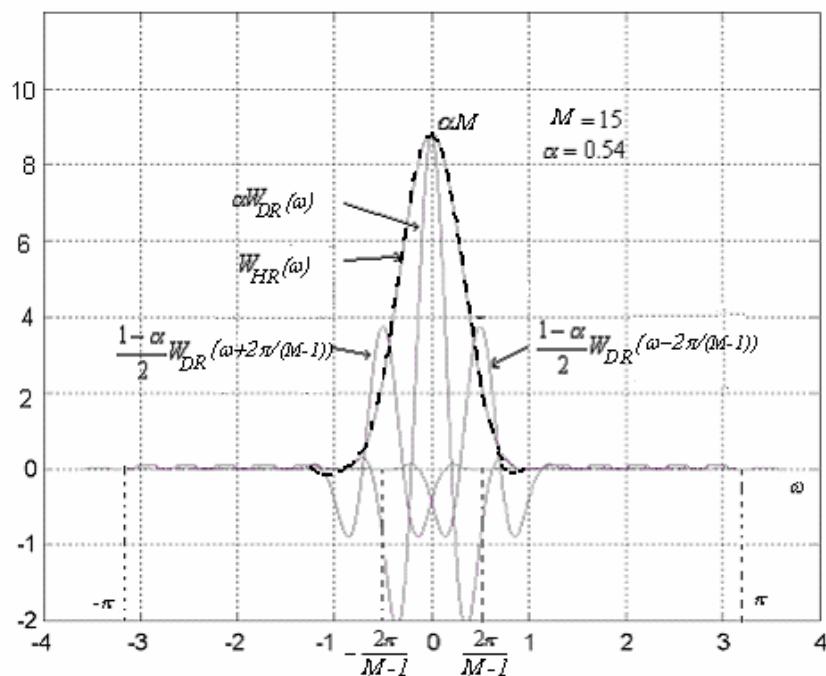


Figura 2.14. Funcția de fază zero a ferestrei Hamming.

2.5.1.3. Fereastra Kaiser

În 1974 Kaiser [24] a propus o nouă fereastră, care îi poartă numele, bazată pe aproximările în timp discret ale aşa-numitei clase de funcții sferoidale (funcții cu suport finit în timp, dar cu energie minimă posibilă localizată în afara unui interval de frecvență selectat).

Fereastra Kaiser este definită ca

$$w_K[n] = \begin{cases} I_0\left[\beta\sqrt{1-\left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2}\right] & \text{pentru } 0 \leq n \leq M-1 \\ \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)} & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.137)$$

unde $\alpha = \frac{M-1}{2}$ și $I_0(x)$ este funcția Bessel modificată de ordinul zero, ce poate fi calculată cu ajutorul seriei de puteri

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} \right]^2 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \quad (2.138)$$

În proiectările de filtre FIR cu această fereastră sunt disponibili doi parametri M și β , prin alegerea cărora se poate ajusta banda de tranziție și nivelul lobilor secundari ai spectrului. Obișnuit, parametrul β ia valori în plaja [4, 9] și pentru $x \in [0, \beta]$ sunt suficienți circa 20 termeni în suma (2.138) pentru a obține eșantioanele lui $w_K[n]$ cu destulă acuratețe.

Nu există o expresie compactă pentru transformata Fourier $W_K(\omega)$, dar aceasta nu este necesară în proiectarea filtrului.

Pe măsură ce valoarea lui β crește, atenuarea minimă în banda de oprire a filtrului proiectat crește, de asemenea, prețul plătit fiind lărgirea benzii de tranziție. Parametrul flexibil β poate fi ales astfel încât să se realizeze atenuarea minimă dorită în banda de oprire a filtrului, după care lungimea M poate fi aleasă pentru a satisface lățimea $\Delta f = \omega/(2\pi)$ a benzii de tranziție. Pentru $\beta=0$, se obține fereastra rectangulară.

Kaiser a determinat empiric formule pentru determinarea cu precizie satisfăcătoare a parametrilor β și M în funcție de atenuarea minimă din banda de oprire și lățimea benzii de tranziție, $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$, a FTJ proiectat. Astfel, cunoscând valoarea lui $A_s = -20 \lg \delta_s$, în dB, parametrul β este dat de relația [32]

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A_s - 8,7) & \text{pentru } A_s > 50dB \\ 0,5842(A_s - 21)^{0,4} + 0,07886(A_s - 21) & \text{pentru } 21dB < A_s < 50dB \\ 0 & \text{pentru } A_s < 21dB \end{cases} \quad (2.139)$$

Kaiser a găsit [24] următoarea formulă pentru estimarea lungimii M a fereștrei:

$$M - 1 = \frac{A_s - 8}{14,36\Delta f} \quad (2.140)$$

Dacă răspunsul în frecvență al filtrului astfel obținut nu satisface restricțiile impuse pentru A_s și Δf , se măresc puțin valorile lui β și M , verificând din nou răspunsul. În general prin două sau trei încercări, după calculul preliminar al lui β și M , se ajunge la soluția bună.

În Tabelul 2.2 sunt prezentate performanțele fereștrei Kaiser în funcție de parametrul β .

Tabelul 2.2.

Parametrul β	Lățimea lobului principal [dB]	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Performanțele FTJ proiectat	
			Factorul $D=\Delta f M$	Atenuarea minimă [dB]
2	$4\pi/M$	-19	1,5	29
3	$6\pi/M$	-24	2,0	37
4	$8\pi/M$	-30	2,6	45
5	$10\pi/M$	-37	3,2	54
6	$12\pi/M$	-44	3,8	63
7	$14\pi/M$	-51	4,5	72
8	$16\pi/M$	-59	5,1	81
9	$18\pi/M$	-67	5,7	90
10	$20\pi/M$	-74	6,4	99

Exemplul 2.4.

Să se determine parametrii β și M ai fereștrei Kaiser necesari proiecției unui FTJ cu riplul din banda de oprire $\delta_s = 0,001$, știind că frecvențele benzilor de trecere și de oprire sunt $\omega_p = 0,4\pi$, respectiv $\omega_s = 0,6\pi$.

Soluție. Se determină mai întâi lățimea zonei de tranziție normate Δf :

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{0,6\pi - 0,4\pi}{2\pi} = 0,1. A_s = -20 \lg \delta_s = -20 \cdot \lg(0,001) = 60dB$$

Apoi se calculează parametrul β cu relația (2.139) și M cu (2.140).

$$\beta = 0,1102(60 - 8,7) = 5,653, M = \left\lceil \frac{60 - 8}{14,36 \cdot 0,1} + 1 \right\rceil = 37$$

Relația (2.140) mai poate fi scrisă în forma

$$A_s = 8 + 14,36(M-1)\Delta f \approx 8 + 14,36D \quad \text{cu } D = M\Delta f$$

Cum D depinde de doi factori, M și Δf , înseamnă că există două situații, una cu lungime mare a filtrului și bandă de tranziție îngustă, respectiv lungime mică și tranziție largă, ce conduc la același factor D , obținându-se aceeași valoare pentru atenuarea minimă din banda de oprire a filtrului proiectat.

2.5.1.4. Fereastra Bartlett

Fereastra Bartlett este o fereastră triunghiulară definită cu relația [2]

$$w_B[n] = 1 - \frac{2}{M-1} \left| n - \frac{M-1}{2} \right|, \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (2.141)$$

Fereastra triunghiulară poate fi definită și cu alte relații, rezultatele fiind apropiate pentru lungimi mari ale filtrului. Această fereastră are performanțe scăzute în sinteza filtrelor FIR, fiind utilizată mult în domeniul analizei spectrale a semnalelor. Lățimea lobului principal este aceeași ca în cazul ferestrelor Hamming ($8\pi/M$), dar lobii secundari sunt mult mai mari. [28].

2.5.1.5. Fereastra Blackman

Din cele prezentate până acum s-a văzut necesitatea de a realiza ferestre cu tranziții lente în timp, pentru a asigura un nivel scăzut al lobilor secundari, dar și cu o lățime mare a lobului principal. Fereastra *Blackman* se obține tot din familia de ferestre în cosinus ridicat, ca ferestrele Hamming și Hanning prin adăugarea unui termen suplimentar față de fereastra Hamming care conduce la lărgirea și mai mult a lobului principal. O posibilitate de a defini fereastra Blackman este dată de relația

$$w_{BL}[n] = 0,42 - 0,5 \cos\left[\frac{2\pi}{M-1}n\right] + 0,08 \cos\left[\frac{4\pi}{M-1}n\right], 0 \leq n \leq M-1 \quad (2.142)$$

Din analiza spectrului acestei ferestre, obținut într-un mod similar celui prezentat la fereastra Hamming, se observă că lățimea lobului principal este de trei ori mai mare decât în cazul ferestrei dreptunghiulare ($12\pi/(M-1)$), iar amplitudinea lobilor secundari prezintă o atenuare de 58 dB față de cel principal [28].

Alte două tipuri de ferestre folosite în practică sunt
Fereastra Lanczos, definită ca [48]

$$w_l[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left[2\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)/(M-1)\right]}{2\pi\left(n - \frac{M-1}{2}\right)/(M-1)} \end{cases}^L, L > 0$$

Fereastra Tukey [48]

$$w[n] = \begin{cases} 1, & \left|n - \frac{M-1}{2}\right| \leq \alpha \frac{M-1}{2}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{n - (1+\alpha)(M-1)/2}{(1-\alpha)(M-1)/2} \pi \right) \right], & \alpha \frac{M-1}{2} \leq \left|n - \frac{M-1}{2}\right| \leq \frac{M-1}{2} \end{cases}$$

În Tabelul 2.3 sunt centralizate funcțiile pondere împreună cu funcțiile de transfer de fază zero corespunzătoare ale ferestrelor prezentate. În tabelul 2.4 sunt redată performanțele ferestrelor exprimate prin lățimea lobului principal și atenuarea relativă în dB a primului lob lateral. De asemenea, sunt prezentate performanțele FTJ cu fază liniară proiectat prin metoda ferestrelor, performanțe exprimate prin lățimea zonei de tranziție sau, echivalent, prin factorul D și atenuarea minimă în zona de oprire.

Tabelul 2.3

Tipuri de ferestre utilizate în proiectarea filtrelor FIR

Nr. crt.	Denumirea ferestrei	Definiția ferestrei cauzale $w[n]$ $0 \leq n \leq M-1; M$ par sau impar	Funcția de fază zero $W_R(\omega)$
1	Dreptunghiulară	1	$W_{DR}(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$
2	Triunghiulară (Bartlett)	$1 - \frac{2}{M-1} \left n - \frac{M-1}{2}\right $	$\frac{1}{M} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega M}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}; M$ impar
3	Hanning (Hann)	$0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$	$0,5W_{DR}(\omega) + 0,25W_{DR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,25W_{DR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1})$
4	Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$	$0,54W_{DR}(\omega) + 0,23W_{DR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,23W_{DR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1})$
5	Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$	$0,42W_{dR}(\omega) + 0,25W_{dR}(\omega + \frac{2\pi}{M-1}) + 0,25W_{dR}(\omega - \frac{2\pi}{M-1}) + 0,04W_{dR}(\omega + \frac{4\pi}{M-1}) + 0,04W_{dR}(\omega - \frac{4\pi}{M-1})$
6	Kaiser	$\frac{I_0\left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{n-\alpha}{\alpha}\right)^2}\right]}{I_0(\beta)}, \alpha = \frac{M-1}{2}$	Nu există formulă compactă

Tabelul 2.4

Proprietățile ferestrelor din Tabelul 2.3

Nr. crt.	Tipul ferestrei	Lățimea lobului principal	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Performanțele FTJ cu fază liniară proiectat		
				Lățimea benzii tranzitie $\Delta\omega$	Factorul $D = \frac{\Delta\omega}{2\pi} M = \Delta f M$	Atenuarea minimă în zona de oprire [dB]
1	Dreptunghiulară	$\frac{4\pi}{M}$	-13	$\frac{1,84\pi}{M}$	0,92	-21
2	Triunghiulară	$\frac{8\pi}{M - 1}$	-25	$\frac{3,68\pi}{M}$	1,84	-25
3	Hanning	$\frac{8\pi}{M - 1}$	-31	$\frac{6,22\pi}{M}$	3,11	-44
4	Hamming	$\frac{8\pi}{M - 1}$	-41	$\frac{6,64\pi}{M}$	3,32	-54
5	Blackman	$\frac{12\pi}{M - 1}$	-58	$\frac{11,2\pi}{M}$	5,6	-74
6	Kaiser cu $\beta=7,865$	$\frac{2\pi\beta}{M} = \frac{15,73\pi}{M}$ (reglabil cu β)	-57 (reglabil cu β)	$\frac{10,12\pi}{M}$ (reglabil cu β)	5,06 (reglabil cu β)	-80 (reglabil cu β)

Din cele prezentate până acum se desprind următoarele observații:

1. Cu excepția ferestrei Kaiser, pentru care factorul D este reglabil cu ajutorul parametrului β , pentru celealte ferestre factorul D este fix, ceea ce justifică denumirea de ferestre fixe pentru acestea. Din acest motiv la ferestrele fixe există o valoare fixă a atenuării minime în banda de oprire a filtrului proiectat, specifică fiecărei ferestre, în timp ce la fereastra Kaiser se poate obține orice valoare a atenuării minime prin alegerea adecvată a lui β ;
2. Performanțele filtrelor proiectate cu ferestrele dreptunghiulară, Hamming, Blackman pot fi obținute folosind ferestre Kaiser cu $\beta=0$, $\beta=5,4414$, respectiv, $\beta=8,885$;
3. În cazul în care FTJ proiectat are benzile de trecere și oprire egale, riplurile δ_p și δ_s în cele două benzi sunt egale. Când benzile nu sunt egale riplurile diferă puțin și nu pot fi controlate independent. Riplul δ_s rezultă cu precizie din A_s impus la proiectare, în schimb δ_p va rezulta automat în funcție de δ_s și raportul benzilor de trecere și oprire.

Lipsa posibilității unui control simultan asupra riplurilor din cele două benzi reprezintă o limitare a metodei ferestrelor.

2.5.2. Exemple și concluzii la metoda ferestrelor

În figurile 2.15, 2.16, 2.17, 2.18 sunt prezentate funcțiile pondere $w[n]$ pentru tipurile de ferestre prezentate, precum și caracteristicile de amplitudine în dB ale ferestrelor și filtrelor trece jos (de lungime $M=51$ cu frecvența de tăiere normată $\omega_c=\pi/4$), proiectate cu ferestrele Hamming, Blackman și Kaiser.

Din aceste reprezentări se pot observa performanțele ferestrelor și filtrelor proiectate:

1. Valorile în dB ale atenuării primului lob secundar al ferestrelor Hamming, Blackman și Kaiser cu $\beta=10$, sunt: -43 dB, -58 dB, și -74 dB;
2. Atenuările minime din banda de oprire pentrufiltrele proiectate cu aceste ferestre sunt: 54 dB, 74 dB, 100 dB.

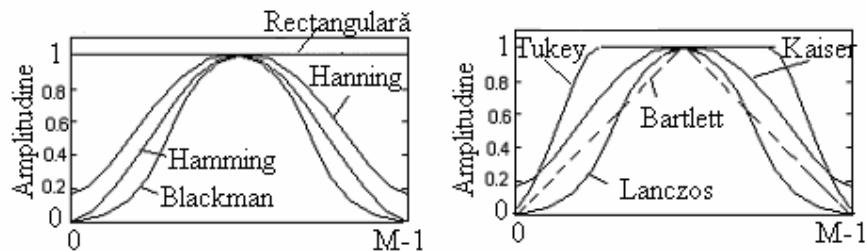


Figura 2.15. Diferite tipuri de ferestre

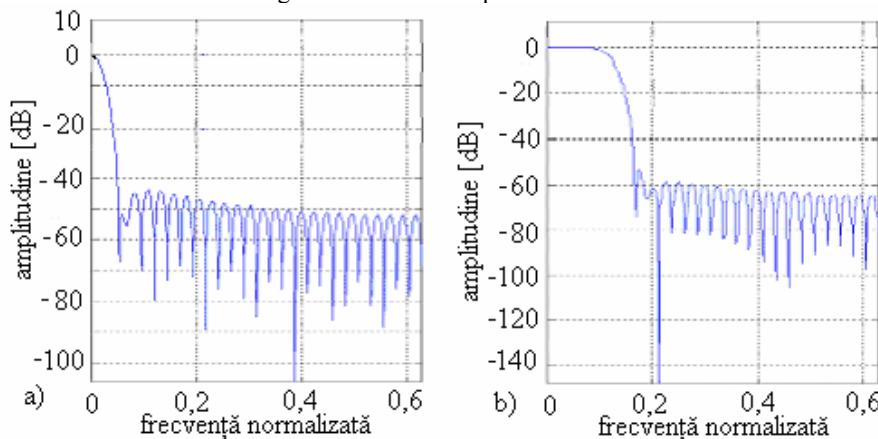


Figura 2.16. Caracteristicile de frecvență în dB ale a) ferestrei Hamming și b) filtrului proiectat cu fereastră Hamming, pentru $M=51$ și $f_c=0,125$

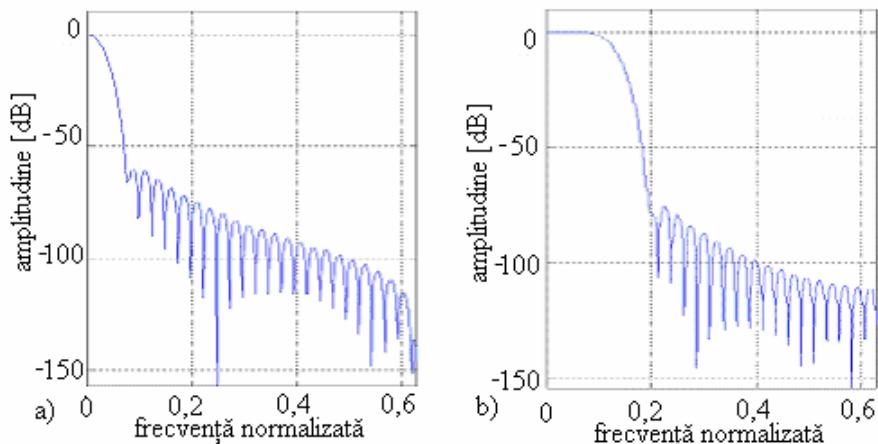


Figura 2.17. Caracteristicile de amplitudine în dB ale a) ferestrei Blackman și b) filtrului proiectat cu fereastră Blackman, pentru $M=51$ și $f_c=0,125$

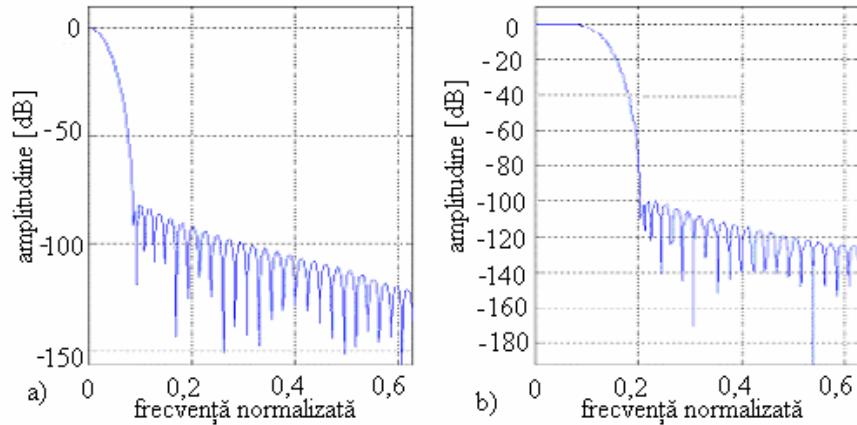


Figura 2.18. Caracteristicile de amplitudine în dB ale a) ferestrei Kaiser și b) filtrului proiectat cu fereastra Kaiser, pentru $M=51$ și $f_c=0,125$, $\beta=10$.

Avantajele metodei ferestrelor sunt date de:

- Simplitate;
- Obținerea de formule compacte pentru calculul coeficienților;
- Nu necesită proceduri de optimizare.

Dezavantajele metodei ferestrelor constau în:

- Necesitatea unei exprimări analitice compacte pentru răspunsul în frecvență impus la proiectare, adică pentru funcția dorită $H_d(\omega)$. În lipsa acestei exprimări nu se obține o expresie compactă pentru coeficienții neponderați $h_d[n]$, utilizarea ferestrelor devenind dificilă.
- Flexibilitatea relativ mică în proiectare, în sensul imposibilității specificării cu exactitate a frecvențelor limită ale benzilor de trecere și oprire efective ω_p și ω_s . La proiectare se impune frecvența teoretică de tăiere ω_c a lui $H_d(\omega)$, dar ponderarea cu o funcție fereastră are ca efect împărtierea discontinuității în domeniul frecvență, ca efect al convoluçãoiei dintre spectrul dorit și cel al ferestrei, efect ce depinde de tipul ferestrei utilizate. Deși în multe aplicații efectul de împărtiere poate fi compensat prin alegerea lui ω_c ca medie aritmetică a lui ω_p și ω_s , în cazul filtrelor cu tranziție abruptă controlul lui ω_p și ω_s nu este asigurat cu precizie satisfăcătoare.

2.6. Metoda eșantionării în frecvență

În proiectarea filtrelor FIR prin metoda eșantionării în frecvență se specifică răspunsul în frecvență dorit $H_d(\omega)$ într-un set de M frecvențe uniform distanțate în intervalul $[0, 2\pi]$, fie acestea

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2\pi}{M}(k + \alpha), k = 0, 1, \dots, (M-1)/2, \quad M \text{ impar} \\ &\qquad k = 0, 1, \dots, [(M/2)-1], \quad M \text{ par} \\ \alpha &= 0 \text{ sau } 1/2,\end{aligned}\tag{2.143}$$

și din aceste specificații se calculează răspunsul la impuls al filtrului sintetizat, care să îndeplinească cerințele de proiectare. Suportul teoretic al acestei metode îl constituie Transformata Fourier Discretă.

Împunând identitate între răspunsul filtrului dorit și cel sintetizat la frecvențele specificate, se poate scrie

$$\begin{aligned}H[k + \alpha] &= H\left(\frac{2\pi}{M}(k + \alpha)\right) = H_d(\omega) \Big|_{\omega=(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} = \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j(k+\alpha)\frac{2\pi n}{M}}; \quad k = \overline{0, M-1}\end{aligned}\tag{2.144}$$

Relația (2.144) reprezintă un sistem de M ecuații cu M necunoscute, $\{h[n]\}$, $n = 0, 1, \dots, M-1$. Pentru a obține soluția în formă compactă a acestui sistem, se înmulțesc ambii membri ai relației (2.144)

cu $e^{j2\pi k \frac{m}{M}}$ și se sumează după k de la 0 la $M-1$. Coeficienții $h[n]$ ai filtrului în funcție de termenii $H[k + \alpha]$ sunt

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi n}{M}}; \quad n = \overline{0, M-1}\tag{2.145}$$

Se observă că pentru $\alpha = 0$, relația (2.144) reprezintă Transformata Fourier Discretă (DFT) a sevenței $h[n]$, iar relația (2.145) se reduce la Transformata Fourier Discretă Inversă (IDFT). Avantajul celui de-al doilea tip de alegere a eșantioanelor în frecvență, care corespunde lui $\alpha = \frac{1}{2}$ ar putea apărea în situația în care acest set de valori

pentru ω ar duce la o precizie mai strânsă a limitelor benzii de trecere și oprire efective, în sensul plasării unor eșantioane cât mai spre marginile acestor benzi.

Funcția de sistem $H(z)$ a filtrului proiectat este

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}n} \right) z^{-n} \quad (2.146)$$

Interschimbând ordinea de sumare și efectuând sumarea după n , se obține

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} z^{-1} \right)^n \right] = \\ &= \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H[k + \alpha]}{1 - e^{j(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.146')$$

Evaluând funcția de sistem pe cercul de unitate, se obține

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H[k + \alpha] e^{j(\alpha - \frac{k+\alpha}{M})\pi}}{M} \frac{\sin \frac{M}{2} \left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)} \quad (2.147)$$

Cu notația

$$P(\omega, k + \alpha) = \frac{1}{M} \frac{\sin \frac{M}{2} \left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right)} = \frac{1}{M} S_a \left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - k \frac{2\pi}{M} \right) \quad (2.148)$$

funcția de transfer $H(\omega)$ se poate exprima în forma

$$H(\omega) = e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} H[k + \alpha] e^{j(\alpha - \frac{k+\alpha}{M})\pi} (-1)^k P(\omega, k + \alpha) \quad (2.149)$$

Pentru a evidenția cum se obține răspunsul în frecvență al filtrului sintetizat în funcție de eșantioanele prescrise pentru răspunsul dorit, se consideră, de exemplu, că se dorește proiectarea unui filtru FIR de fază liniară de tipul 1 sau 2, caz în care eșantioanele $H[k + \alpha]$ vor fi de forma

$$H[k + \alpha] = H_R(\omega) e^{-j\omega\frac{M-1}{2}} \Big|_{\omega=(k+\alpha)\frac{2\pi}{M}} = H_R[k + \alpha] e^{-j(k+\alpha)\frac{\pi(M-1)}{M}} \quad (2.150)$$

unde $H_R[k + \alpha]$ reprezintă eșantioanele $H_d[k + \alpha]$ ale funcției de transfer de fază zero a modelului ideal, $H_R[k + \alpha] = H_d[k + \alpha]$.

În aceste condiții, înlocuind (2.150) în (2.149), rezultă

$$H(\omega) = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] P(\omega, k + \alpha) \quad (2.149')$$

de unde se obține funcția de fază zero a filtrului proiectat

$$\begin{aligned} H_R(\omega) &= \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] P(\omega, k + \alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} H_d[k + \alpha] \frac{1}{M} S_a\left(\omega - \frac{2\pi\alpha}{M} - \frac{2\pi k}{M}\right) \end{aligned} \quad (2.151)$$

Relația (2.151) precizează modul în care se obține răspunsul în frecvență $H_R(\omega)$ prin interpolarea răspunsului în frecvență eșantionat, și anume: fiecare eșantion $H_d[k + \alpha]$ ponderează o funcție $S_a(\omega)$ centrată, în domeniul frecvență, pe eșantionul $k + \alpha$. Prin sumarea celor $M-1$ funcții $S_a(\omega)$ ponderate, rezultă funcția de transfer de fază zero a filtrului proiectat. aşa cum este ilustrat în figura 2.19.

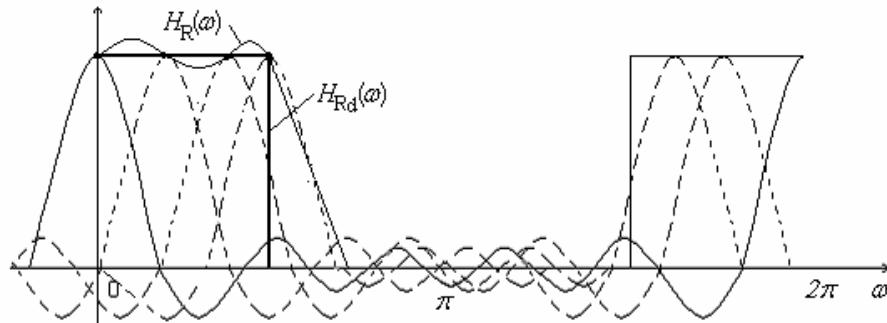


Figura 2.19. Răspunsul de fază zero al filtrului dorit și cel real

La frecvențele considerate se va obține identitate între caracteristica rezultată și cea dorită, adică eroarea de aproximare este zero la $\omega = (k + \alpha)2\pi / M$, dar nu există control direct asupra erorilor ce apar la alte frecvențe, rezultând oscilații atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire, cum se arată în figura 2.19. Amplitudinea acestor oscilații poate

fi mare, dacă se impune o bandă de tranziție foarte mică (mai mică decât $2\pi/M$). Riplurile pot fi reduse dacă se acceptă o bandă de tranziție mai largă sau se impun valori intermediare între banda de trecere și cea de oprire. O altă soluție este de a lăsa nespecificate valorile unor eșantioane din banda de tranziție, care devin variabile auxiliare ce vor fi utilizate într-o procedură de optimizare pe calculator a soluției, procedură ce urmărește minimizarea erorii dintre caracteristica dorită și cea sintetizată.

Dacă $h[n]$ este real, eșantioanele caracteristicii de frecvență satisfac condiția de simetrie

$$H[h + \alpha] = H^*[M - k - \alpha] \quad (2.152)$$

care, împreună cu condiția de simetrie pentru $h[n]$ poate reduce specificațiile de frecvență de la M la $(M-1)/2$ puncte pentru M impar și la $M/2$ puncte pentru M par.

Experimental s-a constatat că [31]:

- Un eșantion în zona de tranziție, folosit ca variabilă auxiliară, conduce la o atenuare minimă în banda de oprire de ordinul 45 ÷ 55 dB;
- Două eșantioane în zona de tranziție conduc la o valoare a atenuării minime în intervalul 65 ÷ 75 dB;
- Trei eșantioane în zona de tranziție asigură o atenuare minimă ce ajunge la 85 ÷ 95 dB.

Metoda eșantionării în frecvență este aplicabilă pentru filtre cu orice caracteristică de fază, prin generarea secvenței $H[k + \alpha]$ și aplicarea transformatei Fourier discrete inverse. Metoda eșantionării în frecvență poate fi combinată cu metoda fereastrelor, ponderarea secvenței $h[n]$ cu o fereastră $w[n]$ de tip Hamming, Blackman sau Kaiser reducând foarte mult riplurile în cele două benzi ale filtrului.

2.7. Proiectare filtrelor optimale echiriplu FIR de fază liniară

Metoda de proiectare descrisă în acest paragraf este formulată ca o problemă de aproximare Cebîșev. Aproximarea de tip Cebîșev este văzută ca un criteriu de proiectare optim, în sensul că eroarea de aproximare ponderată dintre răspunsul în frecvență dorit și cel obținut este întinsă uniform peste banda de trecere și cea de oprire și apoi se minimizează eroarea maximă.

Filtrele obținute prin folosirea acestui criteriu sunt cunoscute sub denumirea de *filtre optimale*.

În tabelul 2.1 au fost prezentate funcțiile de transfer de fază zero pentru cele 4 tipuri de filtre FIR cu fază liniară. Cu ajutorul identităților trigonometrice, fiecare dintre ele poate fi adusă la forma

$$H_R(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \quad (2.153)$$

unde $P(\omega)$ este o combinație liniară de termeni în $\cos(n\omega)$, iar $Q(\omega)$ o funcție specifică fiecărui din cele patru tipuri de filtre.

Pentru filtre FIR de tipul 1 (răspuns la impuls simetric și M impar)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(n\omega), \quad a[n] = \begin{cases} h \left[\frac{M-1}{2} \right], & n = 0 \\ 2h \left[\frac{M-1}{2} - n \right], & n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \end{cases} \quad (2.154)$$

de unde rezultă direct

$$Q(\omega) = 1; \quad P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} a[n] \cos(n\omega) \quad (2.155)$$

Pentru filtre FIR de tipul 2 (răspuns la impuls simetric și M par)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega, \quad b[n] = 2h \left[\frac{M}{2} - n \right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.156)$$

Considerând $n=0, \dots, M/2-1$ în identitatea

$$\bar{b}[n] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{b}[n] \left\{ \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega \right\} \quad (2.157)$$

și adunând membru cu membru cele $M/2$ egalități, se obține identitatea

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{b}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} b[n] \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

$$\text{cu } b[1] = \frac{1}{2} \bar{b}[1] + \bar{b}[0]; \quad (2.158)$$

$$b[n] = \frac{1}{2} (\bar{b}[n] + \bar{b}[n-1]), \quad n = 2, 3, \dots, \frac{M}{2}-1; \quad b\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{1}{2} \bar{b}\left[\frac{M}{2}-1\right]$$

Cu ajutorul relației (2.158), relația (2.156) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{b}[n] \cos(n\omega) \quad (2.159)$$

Comparând (2.159) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right); P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{b}[n] \cos(n\omega) \quad (2.160)$$

Pentru filtre FIR de tipul 3 (răspuns la impuls antisimetric și M impar)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin(n\omega); c_n = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2} \quad (2.161)$$

Dând lui n valorile $n=0, \dots, (M-3)/2$ în identitatea trigonometrică

$$\bar{c}[n] \sin \omega \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{c}[n] \{ \sin(n+1)\omega - \sin(n-1)\omega \} \quad (2.162)$$

și adunând membru cu membru cele $(M-1)/2$ egalități, se obține identitatea

$$\begin{aligned} \sin \omega \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) &= \sum_{n=1}^{\frac{M-1}{2}} c[n] \sin \omega n \text{ cu } c[1] = \bar{c}[0] - \frac{1}{2} \bar{c}[2]; \\ c[n] &= \frac{1}{2} (\bar{c}[n-1] - \bar{c}[n+1]), \quad n = 2, 3, \dots, \frac{M-5}{2}; \\ c\left[\frac{M-3}{2}\right] &= \frac{1}{2} \bar{c}\left[\frac{M-5}{2}\right], \quad c\left[\frac{M-1}{2}\right] = \frac{1}{2} \bar{c}\left[\frac{M-3}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.163)$$

Cu ajutorul relației (2.163), relația (2.161) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \sin \omega \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) \quad (2.164)$$

Comparând (2.164) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \sin \omega; P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} \bar{c}[n] \cos(n\omega) \quad (2.165)$$

Pentru filtre FIR de tipul 4 (răspuns la impuls antisimetric și M par)

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega, \quad d[n] = 2h\left[\frac{M}{2} - n\right], \quad n = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.166)$$

Dând lui n valorile $n=0, \dots, M/2 - 1$ în identitatea trigonometrică

$$\bar{d}[n] \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(n\omega) = \frac{1}{2} \bar{d}[n] \left\{ \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega \right\} \quad (2.167)$$

și adunând membru cu membru cele $M/2$ egalități, se obține identitatea

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} d[n] \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

cu $d[1] = \bar{d}[0] - \frac{1}{2}\bar{d}[1]; d[n] = \frac{1}{2}(\bar{d}[n-1] - \bar{d}[n]), n = 2, 3, \dots, \frac{M}{2}-1; \quad (2.168)$

$$d\left[\frac{M}{2}\right] = \frac{1}{2}\bar{d}\left[\frac{M}{2}-1\right]$$

Cu ajutorul relației (2.168), relația (2.166) poate fi scrisă în forma

$$H_R(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) \quad (2.169)$$

Comparând (2.169) cu (2.153) rezultă

$$Q(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right); P(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} \bar{d}[n] \cos(n\omega) \quad (2.170)$$

Funcțiile $Q(\omega)$ și $P(\omega)$ pentru cele patru tipuri de filtre FIR cu fază liniară

$$\text{sunt } Q(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru tipul 1} \\ \cos \frac{\omega}{2}, & \text{pentru tipul 2} \\ \sin \omega, & \text{pentru tipul 3} \\ \sin \frac{\omega}{2}, & \text{pentru tipul 4} \end{cases}; \quad P(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.171)$$

cu $\alpha_n = a[n], b[n], c[n], d[n]$, pentru filtrele de tipul 1, 2, 3 și, respectiv, 4.

Parametrii α_n ai filtrului sunt dependenți de răspunsul la impuls al acestuia. Limita superioară a sumei, L , este $L=(M-1)/2$ pentru tipul 1, $L=(M-3)/2$ pentru tipul 3 și $L=(M/2)-1$ pentru tipurile 2 și 4. Exprimarea funcției $H_R(\omega)$ în forma (2.153) permite tratarea unitară a celor 4 tipuri de filtre FIR cu fază liniară.

În plus față de specificațiile făcute asupra funcției de fază zero a filtrului proiectat, se definește funcția de fază zero, $H_{dR}(\omega)$, a răspunsului dorit și funcția de ponderare a erorii de aproximare, $W(\omega)$. Răspunsul dorit în frecvență, $H_{dR}(\omega)$, cu valori reale, este considerat egal cu unitatea în banda de trecere și zero în banda de oprire.

Funcția de ponderare a erorii, $W(\omega)$, permite impunerea unor valori diferite ale erorii în diferite benzi de frecvență (de exemplu, în benzile de trecere și oprire ale filtrului).

În particular, este convenabil a normaliza $W(\omega)$ la unitate în banda de oprire și a impune $W(\omega) = \frac{\delta_s}{\delta_p}$ în banda de trecere, adică

$$W(\omega) = \begin{cases} K = \frac{\delta_s}{\delta_p}, & \omega \text{ în banda de trecere} \\ 1, & \omega \text{ în banda de oprire} \end{cases} \quad (2.172)$$

Astfel, cu relația (2.153) și considerând eroarea $E(\omega)$

$$E(\omega) = H_{dR}(\omega) - H_R(\omega), \quad (2.173)$$

eroarea ponderată $E_p(\omega)$ va fi

$$E_p(\omega) = W(\omega)E(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \left[\frac{H_{dR}(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \quad (2.174)$$

Notând

$$\hat{W}(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \text{ și } \hat{H}_{dR}(\omega) = \frac{H_{dR}(\omega)}{Q(\omega)} \quad (2.175)$$

eroarea ponderată devine

$$E_p(\omega) = \hat{W}(\omega)[\hat{H}_{dR}(\omega) - P(\omega)] \quad (2.176)$$

Pentru un filtru FIR cu fază liniară de tipul 1, pentru care $Q(\omega)=1$, semnificația termenilor introdusi este

$$\hat{H}_{dR}(\omega) = H_{dR}(\omega); P(\omega) = H_R(\omega); \hat{W}(\omega) = W(\omega) \quad (2.177)$$

În cazul aproximării *în sens Cebîșev* a caracteristicii ideale $H_d(\omega)$, funcția de transfer de fază zero a filtrului proiectat, $H_R(\omega)$, trebuie să oscileze ca în figura 2.20, astfel încât minimele și maximele să fie la egală distanță de caracteristica ideală.

Eroarea neponderată $E(\omega)$ satisfacă condițiile

$$E(\omega) \in [-\delta_p, \delta_p] \text{ pentru } \omega \in \text{B.T.} \quad (2.178)$$

$$E(\omega) \in [-\delta_s, \delta_s] \text{ pentru } \omega \in \text{B.O.}$$

Eroarea ponderată $E_p(\omega)$ va avea extretele în banda de trecere

$$E_{p,ex}(\omega) = \frac{\delta_s}{\delta_p} (\pm \delta_p) = \pm \delta_s \quad (2.179)$$

În felul acesta, extretele lui $E_p(\omega)$ au aceeași valoare în B.T. și în B.O., proiectarea devenind mai comodă, încrât un singur parametru, δ_s , controlează eroarea în cele două benzi.

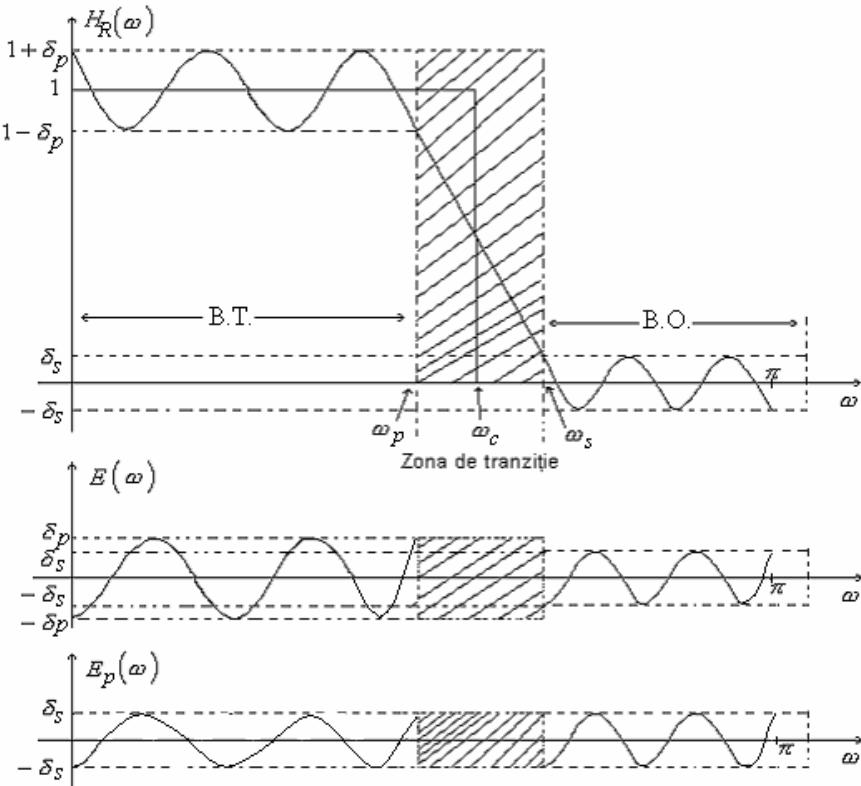


Figura 2.20 Funcția de transfer de fază zero și funcțiile eroare și eroare ponderată de tip Cebîșev.

Observație. Funcțiile eroare și eroare ponderată prezintă valori extreme și la frecvențele limită ale celor două benzi (ω_p , respectiv ω_s), ce nu sunt puncte de extrem pentru $H_R(\omega)$.

Conform relației (2.176), problema aproximării în sens Cebîșev a caracteristicii dorite $H_d(\omega)$ poate fi formulată ca problema găsirii coeficienților polinomului $P(\omega)$, astfel încât să se realizeze *minimizarea maximelor modulului erorii ponderate* $E_p(\omega)$ în benzile de trecere și oprire efective, adică

$$|E_p(\omega)| = \min_{(\text{coef } \alpha_i)} \{\max_{\omega \in S} |E_p(\omega)|\}; \quad (2.180)$$

unde S reprezintă reuniunea benzilor de frecvență peste care se face optimizarea. Soluția acestei probleme aparține lui Parks și McClellan care aplică teorema alternanței, teoremă ce va fi enunțată, fără a fi, însă, și demonstrată [39].

Teorema alternanței afirmă următoarele:

Dacă $P(\omega)$ este o combinație liniară de $L+1$ funcții cosinusoidale

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.181)$$

atunci condiția necesară și suficientă ca $P(\omega)$ să realizeze cea mai bună aproximare în sens Cebîșev a unei funcții continue $\hat{H}_{dR}(\omega)$ într-un domeniu compact S aparținând intervalului $[0, \pi]$, este ca funcția eroare ponderată $E_p(\omega)$ să prezinte cel puțin $L+2$ frecvențe de extrem în S .

Aceasta înseamnă că trebuie să existe $L+2$ frecvențe ω_i distințe

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{L+1} < \omega_{L+2}$, astfel încât

$$\begin{cases} E_p(\omega_i) = -E_p(\omega_{i+1}) & \text{cu } i = \overline{1, L+2} \\ |E_p(\omega_i)| = \max_{\omega \in S} \{E_p(\omega)\} \end{cases} \quad (2.182)$$

Relația (2.182) conține $L+2$ ecuații ce permit, cel puțin teoretic, găsirea celor $L+1$ coeficienți α_n ai polinomului $P(\omega)$ și, de asemenea, valoarea maximă a modulului erorii ponderate.

Este important a cunoaște *numărul maxim* de puncte de extrem ale funcției de transfer de fază zero $H_R(\omega)$ pentru un filtru FIR cu fază liniară, deoarece extretele lui $H_R(\omega)$ sunt, de asemenea, puncte de extrem și pentru eroarea $E_p(\omega)$. Adăugând la acest număr acele puncte de extrem ale erorii ponderate $E_p(\omega)$, ce nu sunt extreme pentru $H_R(\omega)$, se poate determina numărul maxim de extreme ale erorii $E_p(\omega)$.

În continuare se va ilustra procedura de determinare a numărului maxim de extreme pentru filtrul de tipul 1, pentru care

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega) \quad (2.183)$$

conținând $L+1 = (M+1)/2$ funcții cosinusoidale $\{\cos(n\omega)\}$.

Funcția $H_R(\omega)$ poate fi transformată într-o funcție polinomială în $\cos \omega$ de forma

$$\cos(n\omega) = \sum_{k=0}^n \beta_{kn} (\cos \omega)^k \quad (2.184)$$

Introducând (2.184) în (2.183), rezultă

$$H_R(\omega) = \sum_{n=0}^L \alpha_n \sum_{k=0}^n \beta_{kn} (\cos \omega)^k = \sum_{n=0}^L \alpha'_n (\cos \omega)^n \quad (2.185)$$

Numărul de puncte de extrem pentru $H_R(\omega)$ se obține din egalarea cu zero a primei sale derivate. Aceasta este

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = -\sum_{n=1}^L (n \alpha'_n) (\cos \omega)^{n-1} \sin \omega = -\sum_{m=0}^{L-1} (m+1) \alpha'_{m+1} (\cos \omega)^m \sin \omega \quad (2.186)$$

unde s-a efectuat schimbarea de variabilă $n-1=m$.

Notând $d_m = -(m+1) \alpha'_{m+1}$ și revenind apoi la indicele n , derivata devine

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = (\sin \omega) \sum_{n=0}^{L-1} d_n (\cos \omega)^n \quad (2.187)$$

Efectuând în (2.187) schimbarea de variabilă

$$x = \cos \omega \quad (2.188)$$

derivata se poate scrie sub forma

$$\frac{dH_R(\omega)}{d\omega} = F(x) = F_1(x)F_2(x) \quad (2.189)$$

unde

$$F_1(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad F_2(x) = \sum_{n=0}^{L-1} d_n x^n \quad (2.190)$$

Derivata se anulează în punctele în care se anulează funcțiile $F_1(x)$ și $F_2(x)$. Funcția $F_1(x)$ se anulează în punctele $x=1$ și $x=-1$ care sunt corespondentele punctelor $\omega=0$ și $\omega=\pi$ prin transformarea (2.188). Funcția $F_2(x)$, fiind o funcție polinomială de gradul $L-1$, poate avea cel mult $L-1$ zerouri reale în intervalul $x \in (-1, 1)$. Aceasta înseamnă că $H_R(\omega)$ poate avea cel mult $L+1$ puncte de extrem în intervalul închis $\omega \in [0, \pi]$. Pentru filtrul FIR cu fază liniară de tipul 1, numărul de extreme ale funcției $H_R(\omega)$ în intervalul $\omega \in [0, \pi]$, notat cu N_e trebuie să satisfacă relația

$$N_e \leq L+1 = \frac{M-1}{2} + 1 = \frac{M+1}{2} \quad (2.191)$$

Raționând în mod similar pentru filtrele de tipul 2, 3 și 4, rezultă

$$\begin{aligned} N_e &\leq \frac{M}{2} \quad \text{pentru filtrele de tipul 2 și 4} \\ N_e &\leq \frac{M-1}{2} \quad \text{pentru filtrele de tipul 3} \end{aligned} \tag{2.192}$$

Din figura 2.20, se poate constata că dacă aproximarea Cebîșev este realizată într-o reuniune de benzi din intervalul închis $\omega \in [0, \pi]$, atunci funcția eroare poate avea câte un extrem la fiecare margine de bandă, care însă nu este extrem pentru $H_R(\omega)$. Există o excepție de la această regulă în situația în care marginile benzilor sunt în $\omega=0$ sau în $\omega=\pi$, unde $H_R(\omega)$ are de obicei extrem. Astfel, se poate afirma că funcția eroare pentru un filtru trece jos cu răspuns finit la impuls de tipul 1, cu benzile de interes $[0, \omega_p]$ și $[\omega_s, \pi]$ va avea maximum $(M+1)/2 + 2 = (M+5)/2 = L+3$ extreme, în timp ce pentru un filtru trece bandă, tot de tipul 1, cu domeniul de aproximare $S=[0, \omega_s] \cup [\omega_{p1}, \omega_{p2}] \cup [\omega_{s2}, \pi]$, funcția eroare va avea $(M+1)/2 + 4 = (M+9)/2 = L+5$ extreme. Filtrele în a căror proiectare intervin mai mult de $L+2$ alternări se numesc filtre *extra riplu*, iar când în proiectare se consideră numărul maxim de alternanțe, filtrul se numește *filtru cu riplu maximal*.

Cunoașterea numărului maxim de puncte de extrem ale funcției eroare este importantă, deoarece procedurile de proiectare a filtrolor optimale diferă în funcție de numărul de extreme pe care îl realizează, număr ce trebuie să fie cel puțin egal cu cel solicitat de teorema alternanței, $L+2$, și cel mult egal cu numărul maxim posibil. În cazul filtrului trece bandă de tipul 1, cu benzile menționate mai sus, numărul de puncte de extrem poate fi $L+2, L+3, L+4$ sau $L+5, L+1$ fiind numărul de coeficienți ai lui $P(\omega)$.

Există mai multe proceduri de proiectare a filtrolor optimale, dintre care cea mai folosită este *metoda de schimb Remez*, ce va fi prezentată în continuare.

Teorema alternanței reprezintă suportul teoretic al acestei metode și garantează unicitatea soluției problemei de aproximare Cebîșev.

Se alege un set inițial de frecvențe presupuse a fi cele $L+2$ frecvențe de extrem ale funcției eroare ponderată $E_p(\omega)$. În funcție de filtrul proiectat, unele din aceste frecvențe au o localizare bine precizată. De pildă, în cazul unui filtru trece jos de tipul 1, din setul inițial vor face parte frecvențele: $0, \omega_p, \omega_s, \pi$ (ca figura 2.20). La frecvențele setului inițial eroarea ponderată, dată de relația (2.176), este forțată să aibă valoarea maximă $\delta=\delta_s$, semnul alternând conform relației

$$\hat{W}(\omega_k)[\hat{H}_{dR}(\omega_k) - P(\omega_k)] = (-1)^k \delta \quad \text{pentru } k = \overline{0, L+1} \quad (2.193)$$

Acstea $L+2$ ecuații cu $L+2$ necunoscute (α_n , cu $n=0, \dots, L$ și δ) pot fi exprimate în forma

$$P(\omega_k) + (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} = \hat{H}_{dR}(\omega_k) \quad \text{cu } k = \overline{0, L+1} \quad (2.194)$$

sau, echivalent

$$\sum_{n=0}^L \alpha_n \cos(n\omega_k) + (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} = \hat{H}_{dR}(\omega_k) \quad \text{cu } k = \overline{0, L+1} \quad (2.195)$$

În formă matriceală sistemul liniar (2.195) se scrie

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \dots & \cos(L\omega_0) & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \dots & \cos(L\omega_1) & \frac{(-1)}{\hat{W}(\omega_1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos(\omega_L) & \dots & \cos(L\omega_L) & \frac{(-1)^L}{\hat{W}(\omega_L)} \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \dots & \cos(L\omega_{L+1}) & \frac{(-1)^{L+1}}{\hat{W}(\omega_{L+1})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_L \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{dR}(\omega_0) \\ \hat{H}_{dR}(\omega_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{H}_{dR}(\omega_L) \\ \hat{H}_{dR}(\omega_{L+1}) \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

Inițial, nu se cunosc nici frecvențele de extrem ω_k , nici parametrii α_n și δ . Aflarea acestora cu ajutorul algoritmului Remez începe prin a presupune un set de frecvențe de extrem ω_k . Determinarea coeficienților α_n prin rezolvarea sistemului (2.196) ar fi utilă dacă, într-adevăr, toate frecvențele ω_k presupuse ar fi frecvențe de extrem ale erorii, ceea ce, evident, nu este adevărat. Din acest motiv se determină din sistem doar parametrul δ rezultat din forțarea funcției $H_R(\omega)$ de a trece prin cele $L+2$ puncte de coordonate precizate. Din sistem rezultă δ cu regula lui Cramer

$$\delta = \frac{\Delta\delta}{\Delta} = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} \gamma_k \hat{H}_{dR}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} \gamma_k \frac{(-1)^k}{\hat{W}(\omega_k)}}, \quad (2.197)$$

γ_k fiind minorii cu tot cu semn ai determinantului principal Δ , dezvoltat după ultima coloană.

Notând cu Δ_1 determinantul primei matrice din membrul stâng al relației (2.196), la care ultima coloană a fost înlocuită prin coloana

$[\cos((L+1)\omega_0), \cos((L+1)\omega_1), \dots, \cos((L+1)\omega_{L+1})]^T$ și ținând cont de faptul că minorii γ_k și Δ_1 pot fi aduși la o formă Vandermonde, se poate scrie [28]

$$\frac{\gamma_k}{\Delta_1} = C \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(\cos \omega_k - \cos \omega_i)} \quad (2.198)$$

unde C este o constantă. Împărțind prin $C\Delta_1$ numărătorul și numitorul fracției (2.197) și folosind notația

$$a_k = \frac{\gamma_k}{C\Delta_1} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(\cos \omega_k - \cos \omega_i)} \quad (2.199)$$

parametrul δ devine

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^{L+1} a_k \hat{H}_{dR}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^{L+1} a_k \frac{(-1)^k}{\hat{W}(\omega_k)}} \quad (2.200)$$

După calcularea lui δ ar trebui evaluate valorile lui $P(\omega)$ și, deci, $E_p(\omega)$ pe tot domeniul de aproximare S pentru a verifica dacă setul de frecvențe ω_k ales inițial reprezintă punctele de extrem ale erorii $E_p(\omega)$. Evaluarea lui $P(\omega)$ ar necesita calculul coeficienților α_n din (2.196), operație dificilă și, în același timp, inutilă deoarece este puțin probabil ca prima alegere a celor $L+2$ frecvențe ω_k să fie cea mai bună. Evaluarea rapidă a lui $P(\omega)$ se poate face pe o altă cale, știind că $P(\omega)|_{\cos \omega=x}$ este un polinom de ordinul L în x , unic determinat de restricția de a trece prin $L+1$ puncte de coordonate precizate. Expresia analitică a acestuia poate fi determinată cu ajutorul metodei de interpolare Lagrange.

Polinomul $P(x) = \sum_{n=0}^L \alpha'_n x^n$ este unic determinat de condiția ca funcția polinomială să treacă prin $L+1$ puncte de coordonate $(x_k, P(x_k))$ cu $k=0, \dots, L$. Expresia analitică a lui $P(x)$ ce satisfac această restricție este [48]

$$P(x) = \frac{\sum_{k=0}^L \frac{P(x_k)\beta_k}{x - x_k}}{\sum_{k=0}^L \frac{\beta_k}{x - x_k}} \quad \text{cu } \beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^L \frac{1}{x_k - x_i} \quad (2.201)$$

Relația (2.201) este valabilă în cazul de față cu particularizările

$$x = \cos \omega; \quad x_k = \cos \omega_k$$

$$P(\omega_k) = \hat{H}_{dR}(\omega_k) - (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_k)} \quad \text{cu } k = \overline{0, L} \quad (2.202)$$

Expresia (2.201) este cunoscută sub denumirea de *formula de interpolare a lui Lagrange în formă baricentrică*. După evaluarea lui δ , pentru determinarea unică a lui $P(\omega)$ sunt necesare numai $L+1$ puncte, în loc de $L+2$ puncte.

Evident, din condițiile (2.194), $P(\omega)$ trece și prin al $(L+2)$ -lea punct, neluat în considerare în forma baricentrică (2.201). Evaluarea lui $E_p(\omega)$ dat de (2.176), pe domeniul S , se realizează utilizând pentru $P(\omega)$ forma baricentrică (2.201), precum și un set dens de frecvențe $\omega_s \in S$. Ca regulă generală, se apreciază că se realizează o bună evaluare a lui $E_p(\omega)$ dacă setul de frecvențe $\omega_s \in S$ conține $8M$ frecvențe, adică de 16 ori gradul lui $P(x)$.

După această evaluare se constată că nu toate frecvențele ω_k ale setului inițial sunt extreme pentru $E_p(\omega)$, în sensul că valorile maxime absolute ale lui $E_p(\omega)$ sunt mai mari decât δ , exceptând frecvențele $\omega=0$, $\omega=\pi$, $\omega=\omega_p$ și $\omega=\omega_s$, așa cum se observă în figura 2.21.

În această situație se localizează noile puncte de extrem ale lui $E_p(\omega)$, notate $\omega_k^{(2)}$ pe figură (cele ale setului inițial au fost notate $\omega_k^{(1)}$). Pentru acest nou set de frecvențe de extrem se repetă etapele parcurse, determinând $\delta^{(2)}$ și noile valori $E_p^{(2)}(\omega_s)$ etc.

Procedura este repetată până când punctele $\omega_k^{(i)}$ devin cu adevărat extretele lui $E_p(\omega)$, ceea ce se traduce printr-o modificare nesemnificativă a poziției frecvențelor de extrem în noul ciclu, adică

$$\left| \omega_k^{(i+1)} - \omega_k^{(i)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{pentru } k = \overline{0, L+1} \quad (2.203)$$

unde ε este o abatere foarte mică impusă la proiectare.

În eventualitatea că $E_p(\omega)$ are după una din iterații mai mult de $L+2$ puncte de extrem, atunci se rețin după iterația următoare acele $L+2$ frecvențe la care $E_p(\omega)$ are cele mai mari valori (în valoare absolută).

Astfel, în cazul proiectării unui FTJ de tipul 1, numărul maxim de extreme ale funcției $E_p(\omega)$ fiind $L+3$, al $(L+3)$ -lea extrem, cu valoarea cea mai mică va fi eliminat.

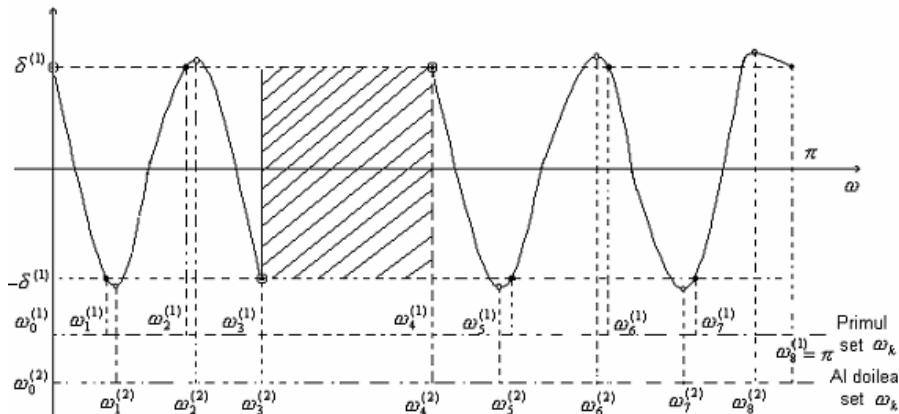


Figura 2.21 Funcția eroare ponderată, forțată să ia valorile $\pm \delta^{(1)}$ la frecvențele $\omega_k^{(1)}$ cu $k = 0, \dots, L+1 = 8$

În general, sunt necesare 4 până la 8 iterații, pentru a obține soluția optimă în cazul proiectării unui FTJ. În proiectările de filtre cu mai multe benzi de trecere și oprire, numărul de iterații este mai mare, fiind necesare de două până la trei ori mai multe iterații față de proiectarea unui FTJ.

Cu relațiile (2.153) și (2.48) se calculează eșantioanele $H[k]$, după care, aplicând transformarea Fourier inversă discretă, se găsește secvența

$$h[n] = \mathbf{F}^{-1}\{H[k]\} \quad (2.204)$$

Algoritmul iterativ Remez parcurge următoarele etape:

1. Se alege un set inițial de $L+2$ puncte de extrem $\omega^{(1)} = \{\omega_0^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \dots, \omega_{L+1}^{(1)}\}$ aparținând domeniului de aproximare S.
2. Se determină valoarea $\delta^{(1)}$ prin rezolvarea sistemului liniar (2.193) ce forțează eroarea ponderată să ia în cele $L+2$ puncte această valoare, cu semnul alternând de la un punct de extrem la altul.
3. Se evaluatează $P(\omega_k)$ la frecvențele alese și apoi se calculează $P(\omega)$ prin interpolare Lagrange, după care se evaluatează eroarea ponderată $E_p^{(1)}(\omega)$, reținând pentru noul ciclu de iterație cele $L+2$ frecvențe de extrem unde eroarea înregistrează cele mai mari extreme în valoare absolută, cu condiția ca semnul erorii să alterneze în punctele selectate.

4. Dacă $|\omega_k^{(i+1)} - \omega_k^{(i)}| \leq \varepsilon$ pentru orice $k=0, 1, \dots, L+1$ (ε fiind o abatere foarte mică impusă la proiectare), atunci procesul iterativ este opri, trecând la etapa a 5-a. În caz contrar, se alege noul set de frecvențe de extrem $\omega^{(i+1)}$ și se reiau etapele 2 și 3.

5. Se calculează coeficienții $h[n]$ ai filtrului.

Prin alegerea setului de frecvențe la iterația $(i+1)$ ca fiind frecvențele în care se obțin valorile de extrem ale erorii rezultante la iterația (i) , eroarea $\delta^{(i+1)}$ va crește față de $\delta^{(i)}$, iar în final va converge către limita sa superioară ce corespunde soluției aproximării de tip minimax.

2.7.1. Relații pentru estimarea lungimii filtrului

În practică numărul de coeficienți ai filtrului este necunoscut. În general, nu pot fi stabilite relații analitice între lungimea filtrului proiectat, M , și datele impuse la proiectare referitoare la frecvențele limită ω_p și ω_s precum și la riplurile permise în cele două benzi: δ_p , respectiv δ_s . Totuși, pe baza rulării a numeroase exemple, au fost stabilite câteva formule empirice pentru stabilirea ordinului filtrului optimal în funcție de performanțele dorite.

Estimarea lungimii unui FTJ (Hermann [17])

$$M = \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta f} - f(\delta_p, \delta_s) \Delta f + 1 \quad (2.205)$$

unde Δf este lățimea benzii de tranziție, normalizată cu frecvența de eșantionare.

$$\begin{aligned} D_\infty(\delta_p, \delta_s) &= \log_{10} \delta_s [a_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_2 \log_{10} \delta_p + a_3] + \\ &+ [a_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + a_5 \log_{10} \delta_p + a_6] \\ f(\delta_p, \delta_s) &= 11,01217 + 0,51244 [\log_{10} \delta_p - \log_{10} \delta_s] \\ a_1 &= 5,309 \cdot 10^{-3}; a_2 = 7,114 \cdot 10^{-2}; a_3 = -4,761 \cdot 10^{-1}; \\ a_4 &= -2,66 \cdot 10^{-1}; a_5 = -5,941 \cdot 10^{-1}; a_6 = -4,278 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

δ_p este riplul sau deviația în banda de trecere și δ_s este riplul sau deviația în banda de oprire.

Estimarea lungimii unui FTB (Mintzer și Liu [43])

$$M = \frac{C_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta f} + g(\delta_p, \delta_s) \Delta f + 1 \quad (2.206)$$

unde

$$C_\infty(\delta_p, \delta_s) = \log_{10} \delta_s [b_1 (\log_{10} \delta_p)^2 + b_2 \log_{10} \delta_p + b_3] + \\ + [b_4 (\log_{10} \delta_p)^2 + b_5 \log_{10} \delta_p + b_6] \\ g(\delta_p, \delta_s) = -14,6 \log_{10} \left(\frac{\delta_p}{\delta_s} \right) - 16,9$$

$$b_1 = 0,01201; b_2 = 0,09664; b_3 = -0,51325;$$

$$b_4 = 0,00203; b_5 = -0,5705; b_6 = -0,44314$$

și Δf este lățimea benzii de tranziție, normalizată cu frecvența de eșantionare.

2.7.2. Proiectarea diferențatoarelor FIR prin metoda Remez

Diferențatoarele sunt folosite în multe sisteme analogice și digitale pentru a obține derivata unui semnal. Un diferențiator ideal are răspunsul în frecvență proporțional cu frecvența. Răspunsul în frecvență al unui diferențiator digital ideal este

$$H_d(\omega) = j\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (11.207)$$

Răspunsul la impuls corespunzător lui $H_d(\omega)$ este

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega = \frac{\cos \pi n}{n}; \quad (11.208)$$

$$-\infty < n < \infty, n \neq 0$$

Se observă că diferențiatorul ideal are răspunsul la impuls antisimetric, adică $h_d[n] = -h_d[-n]$ și, deci, $h_d[0] = 0$. Ca urmare, se vor considera filtrele FIR de fază liniară de tipul 3 și 4 prezentate anterior, pentru care $h[n] = -h[M-1-n]$. Ambele tipuri de filtre satisfac condiția $H_R(0) = 0$, pe care trebuie să o îndeplinească diferențiatorul.

Este imposibil de obținut un diferențiator pentru toată banda cu un filtru FIR cu număr impar de coeficienți, deoarece $H_R(\pi) = 0$. În practică aceste diferențatoare de bandă largă sunt foarte rar folosite. În cele mai multe cazuri, caracteristica răspunsului dorit în frecvență trebuie să fie liniară numai într-un domeniu limitat de frecvențe, $0 \leq \omega \leq 2\pi f_p$, unde f_p este lățimea de bandă a diferențiatorului. În domeniul $2\pi f_p \leq \omega \leq \pi$, răspunsul dorit poate fi neindicat sau se impune să fie zero.

În proiectarea diferențiatorului FIR pe baza criteriului de aproximare Cebîșev, funcția de ponderare $W(\omega)$ este specificată ca fiind

$$W(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi f_p \quad (11.209)$$

pentru ca riplul relativ în B.T. să fie constant. Oricum, funcția de ponderare $W(\omega)$ asigură faptul că eroarea relativă

$$\delta = \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi f_p} \{W(\omega)[\omega - H_R(\omega)]\} = \max_{0 \leq \omega \leq 2\pi f_p} \left[1 - \frac{H_R(\omega)}{\omega} \right] \quad (11.210)$$

este fixă în B.T. a diferențiatorului.

Parametrii importanți ai unui diferențiator sunt: lungimea M , lățimea de bandă f_p , mărimea relativă δ a erorii de aproximare. Relațiile dintre acești parametri pot fi reprezentate parametric. În particular, valoarea $20 \log_{10} \delta$ funcție de f_p cu M parametru este arătată în figura 2.22a pentru M par și în figura 2.22b pentru M impar. Aceste rezultate, datorate lui Rabiner și Schafer [53] sunt utile în alegerea lungimii filtrului.

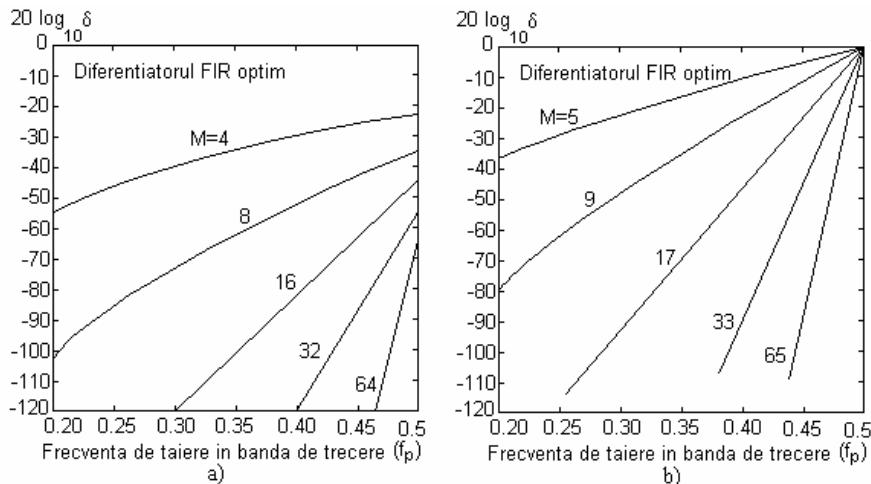


Figura 2.22 Valoarea $20 \log_{10} \delta$ pentru parametrul a) M par și b) M impar

Comparând cele două figuri, rezultă că diferențiatorul pentru M par prezintă o eroare de aproximare semnificativ mai mică decât cea obținută cu diferențiatorul cu M impar. Dacă $f_p > 0,45$, nu pot fi folosite diferențiatorele cu M impar pentru că răspunsul în frecvență la

$\omega = \pi$, ($f = 1/2$) este zero. Când $f_p < 0,45$, se pot folosi și acestea, dar cu performanțe mai slabe decât diferențatoarele cu M par, din punctul de vedere al erorii de aproximare. În concluzie, în practică se preferă diferențatoare cu lungime pară. În acest caz însă, întârzierea introdusă de un filtru FIR cu fază liniară este de $(M-1)/2$, care nu este un întreg pentru M par. În multe aplicații practice acest lucru nu este important, dar acolo unde este, se folosește M impar. Se poate proiecta un diferențiator cu fază liniară și răspuns finit la impuls și folosind metoda eșantionării în frecvență.

2.7.3. Proiectarea transformatorului Hilbert (T.H.)

Un transformator Hilbert ideal este un filtru care trece tot care introduce o deplasare cu 90° a fazelor componentelor spectrale ale semnalului de la intrare. Răspunsul în frecvență al unui T.H. ideal este

$$H_d(\omega) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega \leq \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (2.211)$$

Transformatorul Hilbert este frecvent folosit în sisteme de comunicații și procesarea de semnal, ca de exemplu în generarea semnalelor modulate cu bandă laterală unică, procesarea semnalului radar, procesarea semnalului vocal. Răspunsul la impuls al unui T.H. ideal este dat de relația

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega - \int_0^{\pi} -j e^{j\omega n} d\omega \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n/2)}{\pi}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.212)$$

Așa cum era de așteptat, $h_d[n]$ este infinit în durată și necauzal. Se observă că $h_d[n]$ este antisimetric, situație în care partea reală a răspunsului în frecvență este $H_R(\omega) = 0$ la $\omega=0$, atât pentru M impar, cât și pentru M par și la $\omega = \pi$, pentru M impar.

Din cele prezentate rezultă că este imposibil să se proiecteze un T.H. digital care trece tot. Din fericire, în aplicațiile practice de procesare de semnal, nu este necesar un T.H. care trece tot. Lățimea de bandă trebuie să acopere numai banda semnalului ce trebuie defazat. În consecință, răspunsul de fază zero dorit este

$$H_{dR}(\omega) = 1 \quad 2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u \quad (2.213)$$

unde f_l și f_u sunt, respectiv, frecvențele de tăiere inferioară și superioară. Răspunsul la impuls $h_d[n]$ al T.H. ideal, conform relației (2.212), este zero pentru n par. În proiectare, această proprietate se folosește împreună cu condițiile de simetrie. Fie, în particular, filtru FIR de tipul 3, pentru care

$$H_R(\omega) = \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin(\omega n) \quad (2.214)$$

și se presupune că $f_l = 0,5 - f_u$. Aceasta asigură o B.T. simetrică față de frecvența de mijlocul domeniului de frecvență $f=0,25$. Dacă există această simetrie în răspunsul în frecvență, $H_R(\omega) = H_R(\pi - \omega)$ și relația (2.214) devine

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin(\omega n) &= \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin n(\pi - \omega) = \\ &= - \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] \sin \omega n \cos \pi n = \sum_{n=1}^{(M-1)/2} c[n] (-1)^{n+1} \sin \omega n \end{aligned} \quad (2.215a)$$

sau, echivalent

$$\sum_{n=1}^{(M-1)/2} [1 - (-1)^{n+1}] c[n] \sin \omega n = 0 \quad (2.215b)$$

adică $c[n]$ trebuie să fie egal cu zero pentru $n = 0, 2, 4, \dots$. Relația între $c[n]$ și răspunsul la impuls $h[n]$ este

$$c[n] = 2h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] \quad (2.216a)$$

sau, echivalent

$$h\left[\frac{M-1}{2} - n\right] = \frac{1}{2} c[n] \quad (2.216b)$$

Dacă $c[n]$ este egal cu zero pentru $n = 0, 2, 4$ atunci (2.216b) devine

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots \text{ pentru } (M-1)/2 \text{ par} \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \text{ pentru } (M-1)/2 \text{ impar} \end{cases} \quad (2.217)$$

Din nefericire, relația (2.217) este valabilă numai pentru M impar, nu și pentru M par. Aceasta înseamnă că pentru valori comparabile pentru M , este preferabil cazul cu M impar, deoarece complexitatea calculului este aproximativ pe jumătate față de M par. Când proiectarea T.H. este

realizată pe baza criteriului de aproximare Cebîșev, folosind algoritmul Remez, se selectează coeficienții filtrului pentru a minimiza eroarea maximă de aproximare.

$$\delta = \max_{2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u} [H_{dR}(\omega) - H_R(\omega)] = \max_{2\pi f_l \leq \omega \leq 2\pi f_u} [1 - H_R(\omega)], \quad (2.218)$$

adică funcția de ponderare s-a luat egală cu unitatea și optimizarea s-a realizat pe o singură bandă de frecvență, (banda de trecere a filtrului). Rabiner și Schafer [53] au studiat caracteristicile T.H. pentru M par și M impar. Dacă proiectarea filtrului este limitată la un răspuns în frecvență simetric, există trei parametri de interes, M , δ , f_l . În figura 2.23 s-a reprezentat $20 \log_{10} \delta$ funcție de f_l și M -parametru.

Se observă că pentru valori comparabile ale lui M , nu există avantaje ale performanțelor obținute pentru M par sau impar, dar complexitatea calculelor în implementarea filtrului cu M impar este de aproximativ două ori mai scăzută decât pentru M par. Așadar, M impar este preferabil în practică.

Există o relație aproximativă de estimare a uneia din cele trei parametri ai filtrului, când sunt specificați ceilalți [48]

$$Mf_l = -0,61 \log_{10} \delta \quad (2.219)$$

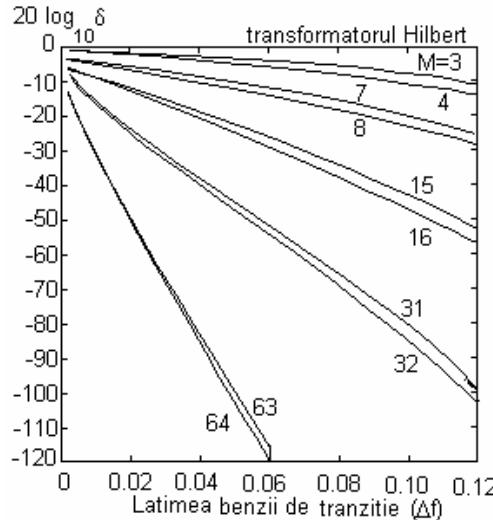


Figura 2.23 Valoarea $20 \log_{10} \delta$ pentru diverse parametri M reprezentată în funcție de lățimea benzii de tranzitie

T.H. poate fi, de asemenea, proiectat folosind metoda ferestrelor sau a eșantionării în frecvență. Diferențele ce apar între coeficienții obținuți sunt mici, dar metoda optimală dă rezultatele cele mai bune în proiectare.

CAPITOLUL 3

PROIECTAREA FILTRELOR DIGITALE CU RĂSPUNS INFINIT LA IMPULS

Filtrele digitale cu răspuns infinit la impuls (RII), ce vor fi denumite în continuare filtre IIR (*Infinite Impulse Response*), constituie blocuri importante în multe sisteme de prelucrare numerică a semnalelor. Ele sunt recomandate în situațiile în care trebuie realizate benzi de tranzitie foarte înguste, precum și atunci când sunt necesare atenuări foarte mari în banda de oprire. Deoarece prezintă reacție, filtrele IIR necesită mai puține celule de întârziere, prețul plătit fiind neliniaritatea fazei și eventuale probleme de stabilitate.

3.1. Introducere

Un filtru IIR poate fi caracterizat în domeniul timp prin *ecuația cu diferențe*

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.1)$$

Aplicând transformată Z ecuației (3.1), rezultă

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z) \quad (3.2)$$

Funcția de transfer a filtrului este

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.3)$$

Impunând în relația (3.1) intrarea $x[n] = \delta[n]$, se obține răspunsul la impuls al filtrului IIR cauzal

$$h[n] = \begin{cases} b_n - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], & n \in [0, M] \\ - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k], & n > M \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

În continuare filtrele vor fi considerate stabile, adică răspunsul lor la impuls este absolut sumabil [63]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (3.5)$$

condiție care, în planul Z conduce la necesitatea ca cercul unitate să fie inclus în domeniul de convergență. Dacă se impune și condiția de cauzalitate pentru filtru, care, în domeniul Z conduce la necesitatea ca regiunea de convergență să fie exteriorul unui cerc, rezultă că toți polii filtrului cauzal și stabil se situează în interiorul cercului unitate.

Răspunsul la impuls al filtrului poate fi calculat și ca transformata Z inversă a funcției de sistem [63]

$$h[n] = Z^{-1}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z) z^{n-1} dz \quad (3.6)$$

unde C este un contur închis în planul complex, parcurs în sens orar, care conține originea.

Prin evaluarea funcției de transfer $H(z)$ pe cercul unitate, se obține răspunsul în frecvență al filtrului

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-jk\omega}} = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.7)$$

Răspunsul de modul al filtrului este

$$|H(\omega)| = \frac{|B(\omega)|}{|A(\omega)|}, \quad a_0 = 1 \quad (3.8)$$

Așa cum a fost prezentat în Capitolul 1, polii funcției de transfer vor determina maxime ale răspunsului în frecvență, cu atât mai pronunțate, cu cât se află mai aproape de cercul unitate, iar zerourile vor determina minime, eventual anulări ale răspunsului în frecvență, dacă se află pe

cercul unitate. Ca urmare, filtrele IIR permit realizarea unor maxime ascuțite, benzi de trecere foarte înguste și, la fel, benzi de tranziție foarte înguste. Asemenea performanțe s-ar putea realiza și cu filtre FIR, dar cu prețul unor lungimi foarte mari.

Un dezavantaj al filtrelor IIR îl constituie faptul că aceste filtre nu pot avea fază perfect liniară. Caracteristica de fază a filtrului poate fi scrisă ca

$$\theta(\omega) = \theta_B(\omega) - \theta_A(\omega) \quad (3.9)$$

unde $\theta_A(\omega)$ și $\theta_B(\omega)$ reprezintă argumentele funcțiilor $A(\omega)$ și $B(\omega)$.

În capitolul precedent s-a arătat că funcția de sistem a unui filtru de fază liniară prezintă o formă de simetrie a zerourilor sale, în sensul că aceasta are zerourile în perechi reciproce, z_i și z_i^{-1} . Dacă zerourile numărătorului funcției de transfer prezintă o astfel de simetrie, fază acestuia este perfect liniară. Pentru ca filtrul să aibă fază liniară, ar trebui ca și fază numitorului să fie liniară, dar acest lucru nu este posibil, deoarece prezența rădăcinilor reciproce la numitor nu mai asigură stabilitatea filtrului cauzal.

Metodele de proiectare ale filtrelor IIR sunt de două feluri:

- *Metode indirecte*, în care un filtru analogic prototip este transformat în echivalentul lui numeric;
- *Metode directe*, în care coeficienții filtrului se determină pe baza minimizării unui criteriu de eroare.

În Capitolul 1 s-a arătat necesitatea îndeplinirii condiției $M \leq N$, unde M este gradul numărătorului, iar N , gradul numitorului. Dacă $M > N$, filtrul poate fi considerat ca fiind format prin conectarea în cascadă a unui filtru IIR de ordin N cu un filtru FIR de ordin $M - N$. Toate tehnicele de proiectare a filtrelor IIR pornesc de la premiza $M \leq N$, ordinul filtrului fiind, deci, egal cu numărul de poli ai funcției de sistem $H(z)$.

3.2. Proiectarea indirectă a filtrelor IIR

3.2.1. Specificarea performanțelor

Procedura cel mai frecvent utilizată pentru proiectarea unui filtru digital IIR constă în transformarea unui filtru analogic într-unul digital, cu performanțe echivalente. Această abordare prezintă avantajul utilizării cunoștințelor și metodelor folosite în proiectarea filtrelor analogice.

Metoda indirectă se bazează pe existența unor transformări care conservă proprietățile selective ale modelului analogic, transformând un filtru optimal analogic într-altul optimal digital. Pornind de la specificațiile referitoare la performanțele filtrului digital, proiectarea acestuia necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Transformarea specificațiilor dorite a fi realizate de către filtrul digital în specificațiile impuse filtrului analogic prototip;
2. Obținerea funcției de transfer a filtrului analogic prototip astfel încât să fie satisfăcute specificațiile impuse filtrului digital;
3. Transformarea funcției de transfer a filtrului analogic în funcția de transfer echivalentă a filtrului digital.

La proiectarea filtrelor digitale de tip FIR sau IIR specificarea performanțelor se referă la abaterile maxime ale caracteristicii de modul în benzile de trecere (B.T.) și oprire (B.O.), precum și frecvențele limită ale acestor benzi. La proiectarea clasică a filtrelor analogice, unii dintre acești parametri de performanță sunt definiți puțin diferit. Astfel, în mod ușual, lafiltrele analogice, prin convenție, se consideră că în zona de trecere efectivă caracteristica de modul variază între valoarea maximă 1 și valoarea minimă $1 - \Delta_p$, în timp ce în zona de oprire, variază între 0 și Δ_s , ca în figura 3.1a.

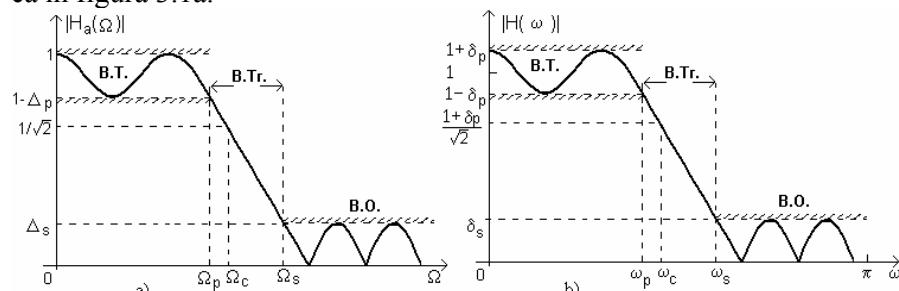


Figura 3.1. Specificarea performanțelor pe caracteristica de modul a funcției de transfer a filtrului trece jos (a) analogic și (b) digital

Pentru filtrelor digitale FIR sau IIR se notează cu δ_p , respectiv δ_s , abaterile caracteristicii de modul a funcției de transfer de la valorile sale nominale (1 în B.T., 0 în B.O.) astfel că acest răspuns în frecvență oscilează între $1 + \delta_p$ și $1 - \delta_p$, în B.T. respectiv între 0 și δ_s în B.O., ca în figura 3.1b.

Frecvențele menționate în figura 3.1a au următoarele semnificații: Ω_p , Ω_s , Ω_c reprezintă, în ordine, frecvența de trecere efectivă, frecvența de

oprire efectivă și frecvența de tăiere pentru filtrul analogic, exprimate în radiani/s. Frecvențele unghiulare ω_p , ω_s , ω_c din figura 3.1.b au aceleași semnificații pentru filtrul digital (doar că sunt normate în raport cu frecvența de eșantionare F_s). Relația între frecvențe din domeniul analogic și digital este dată de [63]

$$\omega = \Omega T; \quad f = \frac{F}{F_s}; \quad T = \frac{1}{F_s} \quad (3.10)$$

ceea ce implică

$$F \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2} \right] \Leftrightarrow f \in [-0,5; 0,5] \Leftrightarrow \omega \in [-\pi, \pi] \quad (3.11)$$

Parametrii din figura 3.1a pot fi exprimați în funcție de cei din figura 3.1b, și invers. Relația dintre frecvențele analogice, Ω , și discrete, ω , depinde de corespondența dintre planele s și Z , pe când convertirea valorilor de pe ordonată presupune normarea celor din fig.3.1b cu $1+\delta_p$, și apoi identificarea cu cele din figura 3.1a (sau multiplicarea cu $1+\delta_p$, a celor din figura 3.1a). Rezultă astfel

$$\Delta_p = \frac{2\delta_p}{1+\delta_p}; \quad \Delta_s = \frac{\delta_s}{1+\delta_p} \quad (3.12)$$

respectiv

$$\delta_p = \frac{\Delta_p}{2-\Delta_p}; \quad \delta_s = \frac{2\Delta_s}{2-\Delta_p} \quad (3.13)$$

De obicei, aceste performanțe sunt date în dB, sub forma variației maxime a atenuării în banda de trecere efectivă și a atenuării minime în banda de oprire efectivă,

$$\begin{aligned} \Delta A_p &= 20 \lg \frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = -20 \lg (1-\Delta_p) \\ \Delta A_s &= -20 \lg \delta_s = -20 \lg \frac{2\Delta_s}{2-\Delta_p} \cong -20 \lg \Delta_s \end{aligned} \quad (3.14)$$

Prezentarea pe scurt a filtrelor trece jos analogice de tip Butterworth, Bessel, Cebîșev și eliptice este dată în Anexa 3a.

Funcția de transfer de ordinul N a unui filtru analogic este [12]

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i s^i}{\sum_{i=0}^N \alpha_i s^i}; \quad N > M \quad (3.15)$$

în care α_i, β_i sunt coeficienții funcției de transfer. Aceasta este legată de răspunsul la impuls prin transformata Laplace

$$H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (3.16)$$

Filtrul analogic poate fi descris și de ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$\sum_{i=0}^N \alpha_i \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^M \beta_i \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (3.17)$$

Răspunsul în frecvență, $H_a(j\Omega)$, se obține prin evaluarea funcției de transfer pe axa imaginară a planului s .

Proiectarea unui filtru analogic constă în determinarea coeficienților α_i, β_i care conduc la minimizarea unui criteriu de eroare dintre funcția dorită și cea realizată sau, altfel spus, între *funcția de aproximat* și *funcția dorită*. De obicei, se lucrează cu $|H_a(j\Omega)|^2$ (și nu cu $|H_a(j\Omega)|$) pentru că prima are coeficienți reali.

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{B(-s)}{A(-s)} = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{E(-s^2)}{G(-s^2)} \quad (3.18)$$

Din (3.18) se observă că singularitățile lui $H_a(s)H_a(-s)$ în planul s sunt simetrice față de axa $j\Omega$.

Funcția de transfer a filtrului analogic, $H_a(s)$, se determină astfel:

-polii lui $H_a(s)$ sunt zerourile lui $G(-s^2)$, localizate în semiplanul stâng, restricție impusă de stabilitatea filtrului;

-zerourile lui $H_a(s)$ se obțin din zerourile lui $E(-s^2)$ prin distribuirea acestora din urmă în mod egal între $B(s)$ și $B(-s)$, fără a separa perechile de zerouri complex conjugate, pentru a obține $H_a(s)$ cu coeficienți reali. Determinarea lui $B(s)$ nu este unică. Dacă pentru zerourile lui $B(s)$ se aplică aceeași regulă de alocare ca și în cazul polilor, funcția de transfer obținută este *de fază minimă*. Spre deosebire de poli, zerourile pot fi localizate și pe axa $j\Omega$.

Fiecare din aceste trei caracterizări echivalente ale unui filtru analogic conduce la metode diferite de conversie a filtrului analogic în unul digital. Pentru ca tehniciile de conversie să fie eficiente, acestea trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

1. Axa $j\Omega$ a planului s să fie transformată în conturul cercului unitate în planul Z , ceea ce va determina o relație directă între frecvențele variabile în cele două domenii.
2. Semiplanul stâng al planului s să fie transformat în interiorul cercului unitate al planului Z , astfel încât filtrelor analogice stabile să le corespundă filtre digitale stabile.

3.2.2. Metoda transformării ecuației diferențiale

Una din cele mai simple căi de transformare a unui filtru analogic în unul digital constă în înlocuirea diferențialelor din expresia (3.17) prin diferențe finite [28], obținând astfel *ecuația cu diferențe finite* care aproximează ecuația diferențială dată.

$$y[n] + \sum_{k=1}^N \alpha_k \Delta^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{k=0}^M \beta_k \Delta^{(k)}\{x[n]\} \quad (3.19)$$

unde $x[n]$ și $y[n]$ reprezintă secvențele de intrare și ieșire ale filtrului digital, iar $\Delta^{(k)}\{x[n]\}$, $\Delta^{(k)}\{y[n]\}$ reprezintă *diferențele de ordinul k* [63] ale acestora, obținute prin substituțiile următoare:

$$y_a(t) \Big|_{t=nT} \Leftrightarrow y[n], \frac{d^{(k)} y_a(t)}{dt^k} \Big|_{t=nT} \Leftrightarrow \Delta^{(k)}\{y[n]\} \quad (3.20)$$

unde $y_a(t)$ este răspunsul filtrului analogic, T este perioada de eșantionare, iar $\frac{d^{(k)} y_a(t)}{dt^k}$ este derivata de ordinul (k) a răspunsului filtrului analogic în raport cu timpul.

Diferențele înapoi de ordinul 1, respectiv k , sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}\{y[n]\} &= \frac{y[n] - y[n-1]}{T} \\ \Delta^{(k)}\{y[n]\} &= \Delta^{(1)}\{\Delta^{(k-1)}\{y[n]\}\} = \frac{\Delta^{(k-1)}\{y[n]\} - \Delta^{(k-1)}\{y[n-1]\}}{T}, k = 2, N \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicând transformata Z relațiilor (3.21), se poate scrie

$$\begin{aligned} Z\{\Delta^{(1)}\{y[n]\}\} &= \frac{1-z^{-1}}{T} Y(z) \\ Z\{\Delta^{(k)}\{y[n]\}\} &= \frac{1-z^{-1}}{T} Z\{\Delta^{(k-1)}\{y[n]\}\} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k Y(z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aplicând transformata Z ambilor membri ai ecuației cu diferențe (3.19) și utilizând transformatele Z ale diferențelor date de (3.22), se obține funcția de transfer a filtrului digital de forma

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M \beta_i \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^i}{1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^i} \quad (3.23)$$

Expresia (3.23) arată că obținerea lui $H(z)$ din $H_a(s)$ se face prin substituția

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \quad (3.24)$$

Diferențiatorul analogic cu ieșirea $\frac{dy_a(t)}{dt}$ are funcția de transfer

$$H(s) = s, \text{ în timp ce sistemul digital care produce ieșirea } \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

are funcția de sistem $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$. Corespondența dintre cele două domenii, s și Z , este dată de relația (3.24).

Diferențele $\Delta^{(k)}\{y[n]\}$ evaluate cu relațiile (3.21) poartă denumirea de *diferențe înapoi*. Dacă, în schimb, diferențele $\Delta^{(k)}\{y[n]\}$ se evaluatează cu relațiile

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}\{y[n]\} &= \frac{y[n+1] - y[n]}{T} \\ \text{și } \Delta^{(k)}\{y[n]\} &= \frac{\Delta^{(k-1)}\{y[n+1]\} - \Delta^{(k-1)}\{y[n]\}}{T}, \text{ pentru } k = \overline{2, N}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

acestea poartă denumirea de *diferențe înainte*.

Repetând procedura de trecere de la ecuațiile cu diferențe finite la funcția $H(z)$ utilizând diferențele înainte, rezultă că aceasta se obține din $H_a(s)$ prin substituția

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3.26)$$

Pentru a examina modul în care se transformă planul Z în planul s , și invers, prin transformările (3.24) și (3.26) și dacă sunt satisfăcute cerințele 1 și 2, se înlocuiește în prima relație $s = \sigma + j\Omega$. Pentru $\sigma = 0$ se obține transformarea axei $\{j\Omega\}$

$$z = \frac{1}{1-sT} \Big|_{\sigma=0} = \frac{1}{1-j\Omega T} = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j \frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2} = \operatorname{Re}(z) + j \operatorname{Im}(z) \quad (3.27)$$

Eliminând ΩT din $\operatorname{Re}(z)$ și $\operatorname{Im}(z)$ se obține relația

$$\operatorname{Re}^2(z) - \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}^2(z) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z) - \frac{1}{2})^2 + \operatorname{Im}^2(z) = (\frac{1}{2})^2 \quad (3.28)$$

sau, echivalent

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \quad (3.29)$$

Astfel, axa $\{j\Omega\}$ a planului s se transformă în cercul cu centru în $C(1/2, 0)$, de rază $1/2$, descris de (3.29) și reprezentat în figura 3.2.

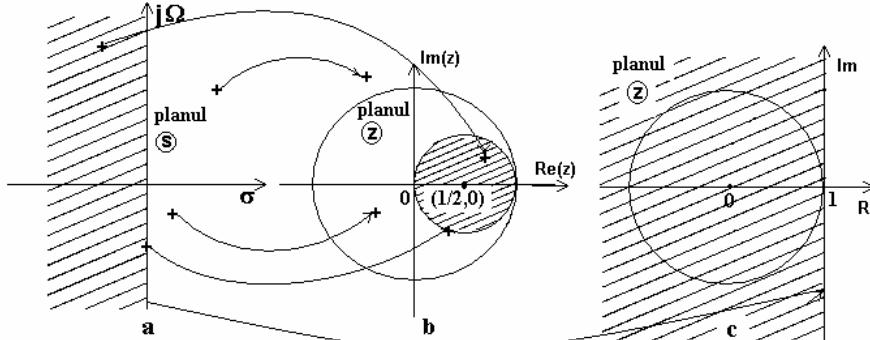


Figura 3.2. Transformarea planului s (a) în planul Z prin utilizarea diferenței înapoi (b), respectiv diferenței înainte (c) în aproximarea ecuației diferențiale

Pentru a stabili corespondența dintre planul s și planul Z , se înlocuiește $s = \sigma + j\Omega$ în ecuația cercului (3.29), rezultând

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1+sT}{1-sT} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1+\sigma T)^2 + (\Omega T)^2}{(1-\sigma T)^2 + (\Omega T)^2}}; \quad (3.30)$$

Dacă $\sigma < 0 \Rightarrow \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$

Relațiile (3.30) evidențiază faptul că semiplanul stâng al planului s trece în interiorul cercului de rază $1/2$ iar semiplanul drept în exteriorul acestui cerc. Cum acest cerc este localizat în interiorul cercului unitate, rezultă că transformarea (3.24) conservă condiția de stabilitate a filtrului analogic. Transformarea prezentată nu asigură îndeplinirea cerinței de transformare a axei imaginare a planului s în conturul cercului unitate, însă pentru valori foarte mici ale lui T , o zonă a axei $\{j\Omega\}$ (pentru care $|\Omega T|$ este foarte mic) va fi transformată în arcul de cerc situat în jurul lui $z=1$, care corespunde, în domeniul frecvențelor discrete, lui $\omega = \Omega T = 0$. Astfel, răspunsul în frecvență al filtrului analogic se conservă la frecvențe joase, pe o zonă de frecvență cu atât mai întinsă cu cât perioada de eșantionare este mai mică. Ca atare, transformarea dă rezultate relativ bune la discretizarea unui filtru analogic trece jos și nesatisfăcătoare pentru alte tipuri de filtre.

Pentru transformarea (3.26) se poate scrie

$$z = 1 + sT; \operatorname{Re}(z) = 1 + \sigma T; \operatorname{Im}(z) = \Omega T; |z|^2 = (1 + \sigma T)^2 + (\Omega T)^2, \quad (3.31)$$

Aceste relații evidențiază faptul că axa $\{j\Omega\}$ se transformă în dreapta $\operatorname{Re}(z) = 1$ ce separă semiplanele $\operatorname{Re}(z) < 1$ și $\operatorname{Re}(z) > 1$ care reprezintă imaginile semiplanelor stâng ($\sigma < 0$), respectiv drept ($\sigma > 0$) ale planului s , ca în figura 3.2c. Din (3.31) se observă că este posibil ca filtre analogice stabile, cu polii $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ cu $\sigma_k < 0$, să nu se transforme în filtre digitale stabile, dacă

$$(1 + \sigma_k T)^2 + (\Omega_k T)^2 > 1 \quad (3.32)$$

Prin urmare, transformarea (3.26) nu satisfac cerințele 1 și 2, nefiind o metodă generală bună pentru convertirea unui filtru analogic în unul digital. Ca și în cazul transformării (3.24), caracteristicile de selectivitate sunt conservate doar la $|\Omega T|$ foarte mic (porțiunea din dreapta $\operatorname{Re}(z) = 1$ din vecinătatea punctului de tangență cu cercul unitate).

3.2.3. Metoda invarianței răspunsului la impuls

În această metodă se urmărește a se proiecta un filtru digital IIR al cărui răspuns la impuls $h[n]$, este versiunea eșantionată, cu perioada T , a răspunsului la impuls al filtrului analogic, $h_a(t)$.

$$h[n] = h_a(nT) \quad (3.33)$$

Se reamintește [63] că dacă un semnal continuu $x_a(t)$ cu spectrul $X_a(F)$ este eșantionat periodic cu frecvența $F_s = 1/T$ eșantioane pe secundă, spectrul semnalului eșantionat este repetarea periodică a spectrului scalat $F_s X_a(F)$ cu perioada F_s , adică

$$X(f) = F_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a[(f - k)F_s] \quad (3.34)$$

unde $f = F/F_s$ este frecvența normalizată. Eroarea alias apare dacă frecvența de eșantionare F_s este mai mică decât dublul celei mai mari frecvențe, F_B , din spectrul $X_a(F)$.

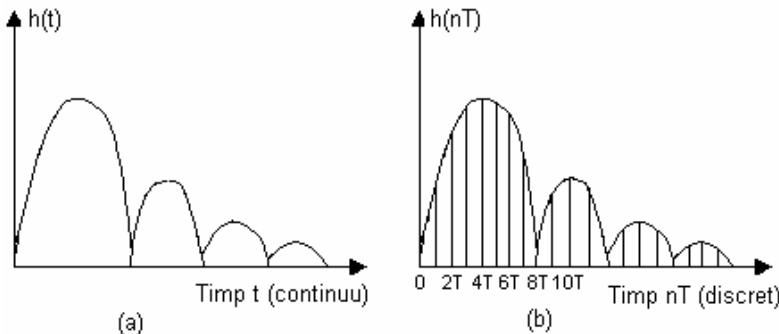


Figura 3.3 Comparație între răspunsul la impuls al a) filtrul analogic și b) filtrul digital echivalent

Particularizând (3.34) pentru eșantionarea răspunsului la impuls al filtrului analogic cu răspunsul în frecvență $H_a(F)$, filtrul digital care îndeplinește relația (3.33) are răspunsul în frecvență

$$H(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(f - k)F_s] \quad (3.35)$$

sau, echivalent

$$H(\omega) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a[(\omega - 2\pi k)F_s] \quad (3.36)$$

cu $\omega = \Omega T$, sau

$$H(\Omega T) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left[\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \quad \text{cu } \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.37)$$

În figura 3.4 se arată schematic răspunsul în frecvență al unui filtru analogic trece jos și răspunsul filtrului digital corespunzător. Se observă că răspunsul filtrului digital se apropie de cel al filtrului analogic, dacă perioada de eșantionare T este suficient de mică pentru a evita sau minimiza eroarea alias. Se observă, de asemenea, că metoda invariantei răspunsului la impus nu este potrivită pentru proiectarea de filtre trece sus, din cauza erorii alias ce apare în spectru în urma eșantionării.

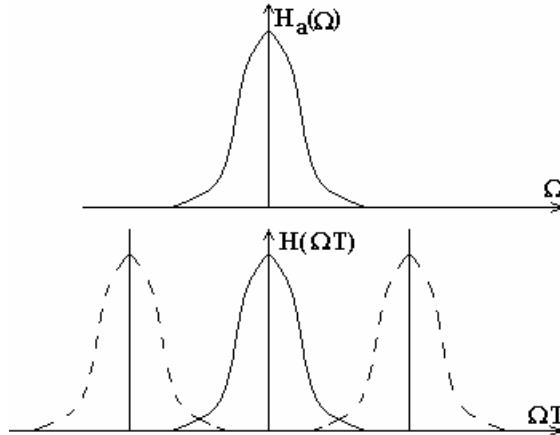


Figura 3.4 Răspunsul în frecvență $H_a(\Omega)$ al filtrului analogic și cel al filtrului digital corespunzător cu eroare alias

Observație. Dacă $H_a(\Omega)$ este de bandă limitată și satisfacă condiția

$$H_a(\Omega) = 0 \quad \text{pentru} \quad |\Omega| \geq \Omega_B \quad (3.38)$$

atunci, prin alegerea unei frecvențe de eșantionare $F_s \geq 2F_B$, în relația (3.37) nu există suprapunerile ale repetărilor adiacente și, ca atare, se poate scrie

$$TH(\omega) = H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad \text{pentru} \quad |\omega| \leq \pi, \quad (3.39)$$

adică, nesuprapunerea repetărilor periodice (garantată de condiția (3.38)) asigură că filtrul digital obținut prin metoda invariației răspunsului la impuls va avea exact același răspuns în frecvență ca și filtrul analogic prototip. În realitate funcțiile de transfer ale filtrelor analogice nu satisfac decât cu aproximarea condiția (3.38), replici ale spectrului din domeniul fundamental existând pe toată axa frecvențelor, ceea ce conduce la fenomenul alias, astfel că relația (3.39) va fi adevărată cu o anumită aproximare.

Unul din dezavantajele majore ale acestei metode de discretizare a răspunsului la impuls al filtrului analogic prototip constă în faptul că ea se aplică numai pentrufiltrele al căror răspuns la impuls satisface (chiar cu o anumită aproximare) condiția de semnal de bandă limitată (3.38), putând fi aplicată la proiectarea filtrelor trece jos și trece bandă, nu și la proiectarea celor trece sus, oprește bandă și trece tot.

În proiectarea filtrelor digitale prin metoda invarianței răspunsului la impuls cerințele filtrului discret sunt transformate în specificații ale filtrului analogic din relația (3.39), în ipoteza unei erori alias neglijabile, prin aplicarea relației

$$\Omega = \omega / T \quad (3.40)$$

După obținerea unui filtru analogic potrivit specificațiilor, acesta este transformat în unul digital cu funcția de sistem $H(z)$, după o procedură care necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Se descompune $H_a(s)$ în fracții simple

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{s - p_k} \quad (3.41)$$

2. Se determină $h_a(t)$ ca transformata Laplace inversă a lui $H_a(s)$

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N c_k L^{-1} \left\{ \frac{1}{s - p_k} \right\} = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k t} \sigma(t) \quad (3.42)$$

$\sigma(t)$ fiind semnalul treaptă unitate.

3. Se determină funcția pondere a filtrului digital prin eșantionarea periodică a lui $h_a(t)$

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N c_k e^{p_k nT} u[n] \text{ cu } u[n] = \sigma(nT) \quad (3.43)$$

4. Se calculează funcția de transfer $H(z)$ ca transformata Z a secvenței $h[n]$.

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^N c_k e^{p_k n T} \right) z^{-n} = \\
&= \sum_{k=1}^N c_k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{p_k T} z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Efectuând calculele, se obțin coeficienții $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ ai filtrului digital. Comparând (3.41) cu (3.44) se poate spune că $H(z)$ se obține din $H_a(s)$ exprimată ca sumă de fracții elementare prin substituția

$$\frac{c_k}{s - p_k} \rightarrow \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \tag{3.45}$$

Pentru $H_a(s)$ cu coeficienți reali, polii complecsi apar în perechi conjugate: $s_{k1,2} = -\alpha_k \pm j\Omega_k$. Comoditatea lucrului cu valori reale implică descompunerea în fracții elementare de ordinul 2 (prin combinarea fracțiilor de ordinul 1 care conțin poli conjugati) și apoi substituirea acestora în $H(z)$.

Între transformata Z a secvenței $h[n]$ și transformata Laplace a semnalului eşantionat există relația

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT)e^{-snT} \Big|_{e^{sT} = z} = L\{h_a(nT)\} \Big|_{e^{sT} = z}. \tag{3.46}$$

Prin urmare, corespondența între planele s și Z în cazul metodei invariantei răspunsului la impuls este realizată de transformarea

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \tag{3.47}$$

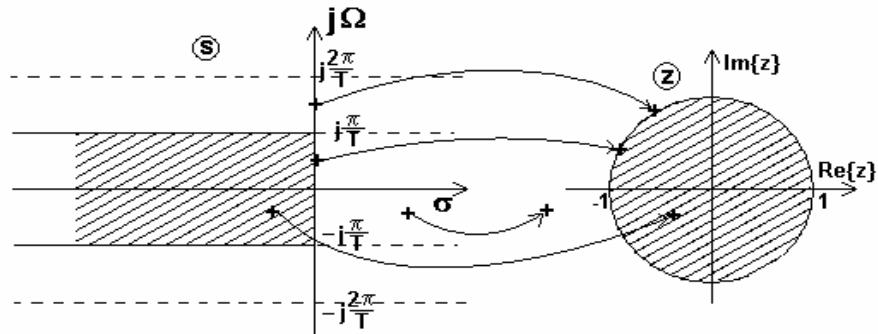


Figura 3.5. Transformarea planului s în planul Z prin metoda invariației răspunsului la impuls.

Particularitățile acestei transformări, evidențiate în figura 3.5, sunt următoarele:

1. Unui punct $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$ din planul Z îi corespunde în planul s o infinitate de puncte $s_k = \frac{1}{T} \ln r_1 + j \left(\frac{\varphi_1}{T} + \frac{2k\pi}{T} \right)$, $k \in Z$, situate pe paralela

la ordonată $\sigma = (1/T) \ln r_1$. Aceasta înseamnă că fiecare fâșie a planului s , de lățime $2\pi/T$, acoperă în întregime planul Z .

2. Partea din semiplanul stâng a fiecărei fâșii se transformă în interiorul cercului unitate din planul Z , iar cea din semiplanul drept în exteriorul acestuia.

3. Fiecare interval de pe axa $\{j\Omega\}$ de forma

$$(2k-1)\frac{\pi}{T} \leq \Omega < (2k+1)\frac{\pi}{T}, k \in Z \quad (3.48)$$

se transformă în conturul cercului unitate $z = e^{j\omega}$ cu $\omega \in [-\pi, \pi]$.

Comparând ecuația (3.41) cu (3.44), se observă că polul $s = p_k$ din planul s se transformă în polul $e^{p_k T}$ din planul Z , iar coeficienții dezvoltării în fracții simple ai lui $H_a(s)$ și $H(z)$ sunt egali. Dacă filtrul analogic este stabil, adică $\operatorname{Re}\{p_k\} < 0$ atunci $|e^{p_k T}| < 1$, deci polul corespunzător din filtrul numeric este în interiorul cercului unitate și filtrul numeric va fi stabil.

În timp ce polii din planul s se transformă în alți poli în planul Z , conform relației $z_k = e^{p_k T}$, este important de subliniat că procedeul invariantei răspunsului la impuls nu corespunde unei simple transformări a planului s în planul Z . În particular, zerourile funcției de transfer a filtrului digital sunt funcție de polii și coeficienții c_k ai dezvoltării în fracții simple și, în general, ele nu se transformă în același mod ca polii. Metoda invariantei răspunsului la impuls dă rezultate pentru filtrele T.J. și T.B. de tip Butterworth, Bessel și Cebîșev, prezintând avantajul că menține caracteristica de atenuare și fază ale filtrului analogic.

Observație. Uneori, pentru a transforma filtrul analogic ce urmează a fi proiectat într-un sistem de bandă limitată prin reducerea erorii alias, se utilizează un *filtru de gardă* în cascadă cu cel dorit (acesta fiind un F.T.J. cu atenuare foarte mare în zona de oprire și constantă în zona de trecere).

Metoda invariației răspunsului la impuls îndeplinește cerințele 1 și 2, în măsura în care eroarea alias poate fi neglijată.

Exemplul 3.1.

Să se transforme un filtru analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 9}$$

într-unul digital IIR, prin metoda invarianței răspunsului la impuls.

Soluție. Filtrul are un zerou la $s=-0,1$ și o pereche de poli complex conjugăți $p_{1,2} = -0,1 \pm j3$, poziționați ca în figura 3.6.

Pentru proiectarea filtrului IIR nu trebuie determinat răspunsul la impuls $h_a(t)$, ci se determină direct $H(z)$ din descompunerea în fracții simple a lui $H_a(s)$.

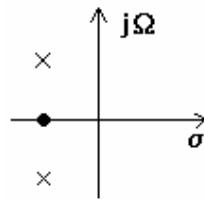


Figura 3.6. Localizarea polilor și a zeroului

$$H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 - j3} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 0,1 + j3};$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{j3T} z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - e^{-0,1T} e^{-j3T} z^{-1}}$$

Cei doi poli complex conjugăți pot fi combinați pentru a forma un filtru cu doi poli, cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1 - (e^{-0,1T} \cos 3T) z^{-1}}{1 - (2e^{-0,1T} \cos 3T) z^{-1} + e^{-0,2T} z^{-1}}$$

Modulul caracteristicii de frecvență a acestui filtru este dată în figura 3.7a pentru $T=0,1$ și $T=0,5$. Pentru comparație, în figura 3.7b se prezintă răspunsul în frecvență al filtrului analogic.

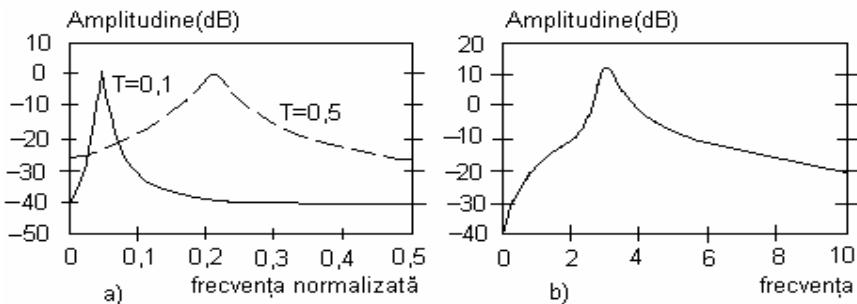


Figura 3.7 Răspunsul în frecvență pentru a) filtrul digital b) filtrul analogic din exemplul 3.1

Se observă că eroarea alias este mai semnificativă la $T=0,5$ decât la $T=0,1$. De asemenea, se observă deplasarea frecvenței de rezonanță cu schimbarea lui T și micșorarea erorii alias pentru valori mici ale lui T .

Concluzii cu privire la metoda invariantei răspunsului la impuls

1. Răspunsul la impuls al filtrului numeric $h[n]$ este identic cu cel al filtrului analogic, $h(t)$, la momentele discrete $t = nT$, $n = 0,1,\dots$, conform figurii 3.3.

2. Eșantionarea în timp afectează răspunsul în frecvență al filtrului numeric obținut prin această metodă.

3. Spectrul filtrului numeric, caracterizat de funcția de sistem $H(z)$, va fi același cu al filtrului analogic original, caracterizat de funcția de transfer $H(s)$, dar acesta se repetă la multiplii ai frecvenței de eșantionare. Oricum, dacă se iau suficiente eșantioane din răspunsul la impuls al filtrului original analogic și dacă acesta este de bandă limitată înainte de aplicarea metodei invariantei răspunsului la impuls, eroarea de tip alias va fi mică. Metoda poate fi folosită pentru F.T.J. cu tăiere foarte abruptă, cu alias mic, dacă frecvența de eșantionare este suficient de mare, dar nu este potrivit pentru F.T.S. sau F.T.B., fără folosirea filtrului de gardă (anti – alias).

3.2.4. Metoda transformării biliniare

Metoda transformării biliniare este în prezent unul dintre cele mai eficiente procedee de proiectare a filtrelor IIR în raport cu următoarele două criterii: răspunsul în frecvență să aproximeze cât mai fidel filtrul analogic de referință și să se mențină simplitatea în proiectare.

Metoda se bazează pe integrarea ecuațiilor diferențiale și folosirea aproximării numerice. Se consideră, sub formă generală, funcția de transfer a sistemului

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \quad (3.49)$$

unde $X_a(s), Y_a(s)$ sunt transformatele Laplace ale semnalelor de intrare, $x_a(t)$, și, respectiv, de ieșire, $y_a(t)$. Funcția de transfer a filtrului analogic poate fi descompusă în fracții simple, motiv pentru care, în continuare, analiza se efectuează pentru un filtru liniar analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{b}{s+a} \quad (3.50)$$

Ecuația diferențială care caracterizează filtrul liniar analogic este atunci de forma

$$\frac{dy_a(t)}{dt} + ay_a(t) = bx_a(t) \quad (3.51)$$

Răspunsul $y_a(t)$ se poate determina cu relația

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(\tau) d\tau + y_a(t_0) \quad (3.52)$$

unde $y'_a(t)$ este derivata răspunsului $y_a(t)$. Din aproximarea integralei (3.52) prin metoda trapezelor, rezultă pentru $t=nT$ și $t_0=nT-T$

$$y_a(nT) = \frac{T}{2}[y'_a(nT) + y'_a(nT-T)] + y_a(nT-T) \quad (3.53)$$

Relația (3.51), evaluată la $t=nT$, este

$$y'_a(nT) = -ay_a(nT) + bx_a(nT) \quad (3.54)$$

Din înlocuirea relației (3.54) în (3.53) rezultă

$$y_a(nT) = \frac{T}{2}[-ay_a(nT) + bx_a(nT) - ay_a(nT-T) + bx_a(nT-T)] + y_a(nT-T) \quad (3.55)$$

cu notațiile $y[n]=y_a(nT)$, $x[n]=x_a(nT)$, $y[n-1]=y_a(nT-T)$, $x[n-1]=x_a(nT-T)$, relația (3.55) devine

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)y[n] - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)y[n-1] = \frac{bT}{2}(x[n] + x[n-1]) \quad (3.56)$$

Transformata Z a acestei ecuații cu diferențe este

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right)Y(z) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z) = \frac{bT}{2}(1 + z^{-1})X(z) \quad (3.57)$$

Funcția de transfer a filtrului digital echivalent este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1+aT/2-(1-aT/2)z^{-1}} \quad (3.58)$$

sau

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} + a} \quad (3.59)$$

Se observă că $H(z)$ se poate obține din $H_a(s)$, folosind substituția

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad (3.60)$$

adică

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (3.61)$$

Transformarea inversabilă din relația (3.60) se numește *transformare biliniară*.

Deși obținerea transformării biliniare s-a efectuat pentru o ecuație diferențială de ordinul 1, relația (3.61) este adevărată indiferent de ordinul N al ecuației diferențiale sau, echivalent, al sistemului analogic, întrucât acesta este echivalent cu conectarea în paralel a N sisteme de ordinul 1.

Rezolvând (3.60) în raport cu z , rezultă

$$z = \left(1 + \frac{T}{2}s\right) / \left(1 - \frac{T}{2}s\right) \quad (3.62)$$

Când $s = j\Omega$ relația (3.62) devine

$$z = \left(\frac{2}{T} + j\Omega\right) / \left(\frac{2}{T} - j\Omega\right) \quad (3.63)$$

Din această ecuație rezultă că $|z|=1$. Pentru $\Omega=0$, rezultă $z=1$, iar pentru $\Omega=\infty$, $z=-1$. Dacă în (3.62), se înlocuiește $s=\sigma+j\Omega$ se obține

$$z = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega} \quad (3.64)$$

astfel încât, dacă $\sigma < 0$ (semiplanul stâng) se obține $|z| < 1$, iar dacă $\sigma > 0$ (semiplanul drept), se obține $|z| > 1$.

Analog, dacă se scrie variabila z în formă polară, $z = re^{j\omega}$, și apoi se înlocuiește în (3.60), rezultă

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T} \frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1} = \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j \frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega} \right) = \sigma + j\Omega \end{aligned} \quad (3.65)$$

Prin identificare, se obține

$$\sigma = \frac{2}{T} \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 + 2r\cos\omega} \quad (3.66)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{2r\sin\omega}{1 + r^2 + 2r\cos\omega} \quad (3.67)$$

Pentru $r < 1$, rezultă $\sigma < 0$ și dacă $r > 1$, rezultă $\sigma > 0$, deci semiplanul stâng se transformă în interiorul cercului unitate, și semiplanul drept în exteriorul cercului unitate. Pentru $r = 1$, rezultă $\sigma = 0$ și

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (3.68)$$

sau, echivalent

$$\omega = 2 \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Omega T}{2} \quad (3.69)$$

În figura 3.8 se arată corespondența dintre planul s și planul Z prin transformarea biliniară. Întreaga axă $j\Omega$ a planului s se transformă în conturul cercului unitate; semiplanul stâng al planului s se transformă în interiorul cercului unitate iar semiplanul drept în exteriorul cercului unitate.

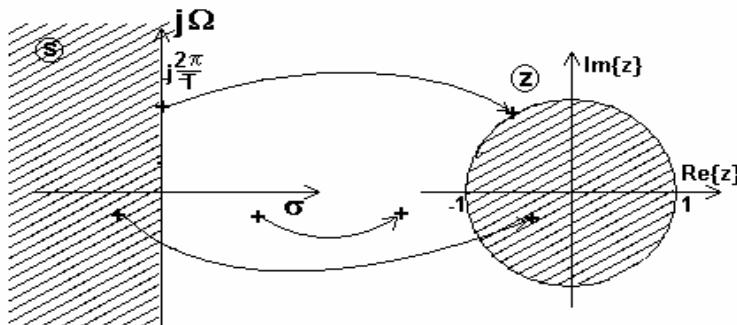


Figura 3.8. Corespondența dintre planul s și planul Z prin transformarea biliniară

Se observă că utilizarea transformării biliniare oferă posibilitatea proiecțării de filtre numerice stabile, plecând de la filtre analogice stabile. Alt avantaj este acela că se înlătură suprapunerea spectrală întâlnită la utilizarea metodei invariantei răspunsului la impuls, deoarece transformă întreaga axă imaginară a planului s în conturul cercului unitate. Prețul plătit este introducerea unor distorsiuni pe axa frecvențelor, datorită faptului că axa infinită $j\Omega$ se comprimă în conturul cercului unitate. Relația neliniară dintre frecvențele variabile din cele două domenii, exprimată prin relația (3.69), este reprezentată în figura 3.9. Această metodă se folosește numai în aplicații care tolerează asemenea distorsiuni sau atunci când ele pot fi compensate. Există o largă clasă de filtre pentru care se poate compensa neliniaritatea pronunțată dată de relația (3.69). Se observă că relația între frecvența analogică Ω și frecvența discretă ω este aproape liniară pentru valori mici ale lui ω , dar devine neliniară pentru valori mari ale lui ω , conducând la distorsiuni în răspunsul în frecvență al filtrului digital.

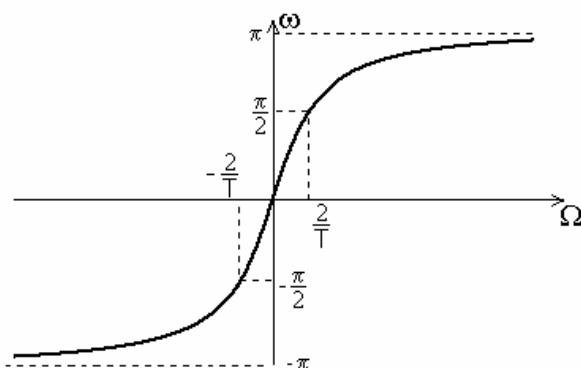


Figura 3.9. Relația între frecvența analogică și cea digitală în transformarea biliniară

De asemenea, este interesant de observat că, prin transformarea biliniară, punctului $s=\infty$ îi corespunde $z=-1$. În consecință, un FTJ analogic cu un singur zero la $s=\infty$ are ca rezultat un filtru digital care are un zero la $z=-1$.

Pași folosiți în aplicarea metodei transformării biliniare

1. Se definesc, conform aplicației, frecvențele caracteristice ale filtrului numeric.

2. Se calculează frecvența sau frecvențele corespunzătoare filtrului analogic, cu relația $\Omega_k = (2/T)\operatorname{tg}(\omega_k T/2)$.
3. Se proiectează filtrul analogic cu funcția de transfer $H_a(s)$ care îndeplinește specificațiile de frecvență $\{\Omega_k\}$, de la punctul 2.
4. Se determină apoi funcția de transfer $H(z)$ a filtrului numeric dorit.

Exemplul 3.2.

Să se transforme un filtru analogic cu funcția de transfer

$$H_a(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 0,1)^2 + 16}$$

într-un filtru digital IIR prin transformarea biliniară. Filtrul digital trebuie să aibă frecvența de rezonanță la $\omega_r = \pi/2$.

Soluție. Frecvența de rezonanță a filtrului analogic este $\Omega_r = 4$. Această frecvență trebuie să fie transformată în $\omega_r = \pi/2$ prin selectarea valorii parametrului T din relația (3.69). Rezultă $T=1/2$ și, deci, conform relației (3.60), se poate scrie

$$s = 4 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Filtrul digital rezultat are funcția de transfer

$$H(z) = \frac{0,128 + 0,006z^{-1} - 0,122z^{-2}}{1 + 0,0006z^{-1} + 0,975z^{-2}}$$

Înținând cont că termenul $0,0006z^{-1}$ e foarte mic în comparație cu ceilalți termeni, acesta se neglijeză și rezultă că $H(z)$ are polii $p_{1,2} = 0,987e^{\pm j\pi/2}$ și zerouri la $z_1 = -1, z_2 = 0,95$. În acest exemplu parametrul T a fost ales astfel încât frecvența de rezonanță a filtrului analogic să corespundă cu frecvența de rezonanță a filtrului digital.

De obicei, proiectarea filtrului începe cu specificațiile în domeniul digital. Aceste specificații în frecvență sunt transformate în domeniul analogic, prin relația (3.68). Filtrul analogic este proiectat pentru aceste specificații și convertit într-un filtru digital prin transformarea biliniară (3.60). În această procedură parametrul T dispare din expresia lui $H(z)$, astfel încât poate avea o valoare arbitrară (fie $T=1$). Următorul exemplu ilustrează acest lucru.

Exemplul 3.3.

Să se proiecteze un FTJ cu un singur pol, cu lățimea de bandă de $0,2\pi$ la 3dB, prin transformarea biliniară aplicată filtrului analogic $H(s) = \Omega_c / (s + \Omega_c)$, unde Ω_c este lățimea de bandă a filtrului analogic la 3dB.

Soluție. Filtrul digital are câștigul de -3dB la $\omega_c = 0,2\pi$. În domeniul frecvențelor filtrului analogic, $\omega_c = 0,2\pi$ corespunde frecvenței $\Omega_c = \frac{2}{T} \operatorname{tg}(0,1\pi) = 0,65/T$, rezultând funcția de transfer a filtrului analogic

$$H(s) = \frac{0,65/T}{s + 0,65/T}$$

Aplicând transformarea biliniară pentru a converti filtrul analogic în filtrul digital dorit, rezultă

$$H(z) = \frac{0,245(1+z^{-1})}{1-0,509z^{-1}}$$

Răspunsul în frecvență al filtrului digital este

$$H(\omega) = \frac{0,245(1+e^{-j\omega})}{1-0,509e^{-j\omega}}$$

La $\omega=0$, $H(0)=1$ și la $\omega=0,2\pi$, $|H(0,2\pi)|=0,707$, care este răspunsul dorit.

3.2.5. Metoda transformării în Z adaptate

Această metodă se bazează pe exprimarea funcției de transfer a filtrului analogic $H_a(s)$ în formă factorizată și constă în transformarea directă a polilor și zerourilor din planul s în planul Z. Metoda transformării în Z adaptate transformă un pol $s_k = p_k$ din planul s în polul $z_{p_k} = e^{p_k T}$ în planul z, adică transformă factorul s-p_k în factorul $1-z^{-1}e^{p_k T}$. Similar, un zero $s_k = z_k$ se transformă în $z_{z_k} = e^{z_k T}$.

Presupunând funcția de transfer a filtrului analogic factorizată în forma

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (3.70)$$

unde z_k și p_k sunt zerourile și, respectiv, polii filtrului analogic, funcția de sistem a filtrului digital este

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{p_k T} z^{-1})} \quad (3.71)$$

unde T este perioada de eşantionare.

Pentru o pereche de poli complex conjugăți transformarea factorilor devine

$$\begin{aligned} (s + \alpha + j\Omega_0)(s + \alpha - j\Omega_0) &= (s + \alpha)^2 + \Omega_0^2 \\ \rightarrow 1 - 2z^{-1}e^{-\alpha T} \cos(\Omega_0 T) + e^{-2\alpha T} z^{-2} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Polii funcției de transfer $H(z)$ a filtrului digital astfel obținut sunt identici cu cei obținuți prin metoda invarianței răspunsului la impuls, în schimb zerourile sunt diferite. Deși foarte comodă, metoda nu este folosită datorită faptului că erorile de tip alias sunt mult mai puternice decât la metoda invarianței răspunsului la impuls.

3.2.6. Proiectarea FTS, FTB, FOB prin transformări de frecvență

Până acum s-a insistat în principal asupra proiectării FTJ, IIR. Dacă se dorește proiectarea unui FTS, FTB, FOB, aceasta se face cu un model de FTJ, căruia i se aplică o transformare de frecvență. O posibilitate este de a realiza transformarea de frecvență în domeniul analogic și apoi să se convertească filtrul analogic într-un filtru digital, făcând corespondența dintre planul s și planul Z . O altă cale este de a transforma întâi filtrul TJ analogic într-un FTJ digital și apoi de a transforma FTJ digital în filtrul dorit printr-o transformare de frecvență direct în domeniul discret. În general aceste metode produc rezultate diferite, cu excepția transformării biliniare, când proiectările sunt identice.

3.2.6.1. Transformări de frecvență în domeniul analogic

Transformările de frecvență în domeniul analogic sunt transformări generale care permit obținerea filtrelor trece sus, trece bandă

și oprește bandă pornind de la un filtru trece jos proiectat. Ele realizează schimbarea caracteristicilor de selectivitate printr-o simplă substituire a variabilei s în expresia funcției de transfer $H_a(s)$. Se notează cu s și s' variabilele frecvență complexă pentru filtrul trece jos și cel derivat din acesta.

a) Se presupune că este proiectat un FTJ cu frecvență tăiere Ω_c și se dorește convertirea sa în altul, tot trece jos, cu frecvență de tăiere Ω'_c . Transformarea care realizează acest lucru este [48]

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c}{\Omega'_c} s \quad (\text{TJ în TJ}) \quad (3.73)$$

Funcția de transfer a FTJ obținut este

$$H_t(s) = H_p[(\Omega_c / \Omega'_c)s], \quad (3.74)$$

unde $H_p(s)$ este funcția de transfer a filtrului prototip, cu frecvență de tăiere Ω_p .

b) Dacă se dorește conversia unui FTJ în unul TS cu frecvență de tăiere Ω'_p transformarea necesară este [48]

$$s \rightarrow \frac{\Omega_c \Omega'_c}{s} \quad (\text{TJ în TS}) \quad (3.75)$$

Funcția de transfer a FTS este $H_h(s) = H_p(\Omega_c \Omega'_c / s)$

c) Transformarea unui FTJ analogic cu frecvență tăiere Ω_c în banda de trecere a filtrului, în unul TB cu frecvență de tăiere inferioară Ω_{cl} și cea superioară Ω_{cu} , poate fi realizată întâi prin transformarea FTJ în alt FTJ cu frecvență de tăiere $\Omega'_c = 1$ și apoi realizând transformarea [48]

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \quad (\text{TJ în TB}) \quad (3.76)$$

Echivalent, se poate obține același rezultat într-un singur pas, prin transformarea [48]

$$s \rightarrow \Omega_c \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \quad (\text{TJ în TB}) \quad (3.77)$$

Se obține astfel

$$H_b(s) = H_p \left(\Omega_c \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{cu}}{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})} \right). \quad (3.78)$$

d) Transformarea unui FTJ analogic cu frecvență de tăiere Ω_c într-un FOB se face prin transformarea inversă a relației (3.76), cu factorul Ω_c servind la normalizarea frecvenței de tăiere a FTJ. Astfel, transformarea este [48]

$$s \rightarrow \Omega_c \frac{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})}{s^2 + \Omega_{cu} \Omega_{cl}} \quad (\text{TJ în OB}) \quad (3.79)$$

ceea ce conduce la

$$H_{bs}(s) = H_p \left(\Omega_c \frac{s(\Omega_{cu} - \Omega_{cl})}{s^2 + \Omega_{cu} \Omega_{cl}} \right) \quad (3.80)$$

Programele de proiectare a filtrelor analogice utilizează transformarea bipătratică generală [48]

$$s \rightarrow \frac{c_0 + c_1 s + c_2 s^2}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2} \quad (3.81)$$

care, prin particularizarea coeficienților c_i , d_i , permite realizarea tuturor transformărilor anterioare.

3.2.6.2. Transformări de frecvență în domeniul digital

Ca și în domeniul analogic, transformările de frecvență pot fi aplicate și unui FTJ digital pentru a-l transforma într-un FTB, FOB, FTS. Transformarea implică înlocuirea variabilei z^{-1} cu o funcție rațională $g(z^{-1})$, care trebuie să satisfacă următoarele proprietăți [48]:

1. Corespondența $z^{-1} \rightarrow g(z^{-1})$ trebuie să transpună punctele din interiorul cercului unitate din planul z , în el însuși.
2. Cercul unitate trebuie să-i corespundă tot cercul unitate. Condiția (2) implică faptul că pentru $r=1$,

$$e^{-j\omega} = g(e^{-j\omega}) \equiv g(\omega) = |g(\omega)| e^{j\arg[g(\omega)]} \quad (3.82)$$

Rezultă, deci, că trebuie ca $|g(\omega)|=1$ pentru toți ω . Corespondența este de tipul trece tot, adică de forma

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \quad (3.83)$$

unde $|a_k| < 1$, pentru a asigura faptul că un filtru stabil este transformat în alt filtru stabil. Din relația generală (3.83) se obține setul de transformări digitale pentru transformarea unui FTJ digital, cu frecvența de tăiere ω_c , în alt FTJ, în unul TB, OB sau TS.

Astfel, transformarea TJ→TJ este dată de corespondența [48]

$$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (3.84)$$

cu: $a = \frac{\sin[(\omega_c - \omega'_c)/2]}{\sin[(\omega_c + \omega'_c)/2]}$, Ω'_c - frecvența de tăiere a noului filtru.

$$\text{Transformarea TJ} \rightarrow \text{TS} \quad [48] \quad z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}} \quad (3.85)$$

cu: $a = -\frac{\cos[(\omega_c + \omega'_c)/2]}{\cos[(\omega_c - \omega'_c)/2]}$, Ω'_c - frecvența de tăiere a noului filtru.

$$\text{Transformarea TJ} \rightarrow \text{TB} \quad [48] \quad z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1} \quad (3.86)$$

cu: $a_1 = 2\alpha K/(K+1)$; $a_2 = (K-1)/(K+1)$, $\alpha = \frac{\cos[(\omega_{cu} + \omega_{cl})/2]}{\cos[(\omega_{cu} - \omega_{cl})/2]}$,

$K = ctg \frac{(\omega_{cu} - \omega_{cl})}{2} \tg \frac{\omega_c}{2}$, ω_{cl} - frecvența inferioară de tăiere a filtrului dorit, ω_{cu} - frecvența superioară de tăiere a filtrului dorit.

$$\text{Transformarea TJ} \rightarrow \text{OB} \quad [48] \quad z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-1} - a_1 z^{-1} + 1} \quad (3.87)$$

Cu $a_1 = 2\alpha/(K+1)$; $a_2 = (1-K)/(K+1)$, $\alpha = \frac{\cos[(\omega_{cu} + \omega_{cl})/2]}{\cos[(\omega_{cu} - \omega_{cl})/2]}$,

$K = tg \frac{(\omega_{cu} - \omega_{cl})}{2} \tg \frac{\omega_c}{2}$, ω_{cl} - frecvența inferioară de tăiere a filtrului dorit, ω_{cu} - frecvența superioară de tăiere a filtrului dorit.

În realizarea transformărilor de frecvență trebuie avut grijă de tipul filtrului care trebuie să fie proiectat.

S-a arătat că metoda invarianței răspunsului la impuls nu este adecvată pentru proiectarea FTS și a multor FTB, datorită efectului de aliere spectrală. În consecință, nu se va efectua o transformare de frecvență analogică, urmată de o conversie a rezultatului în domeniul digital, folosind această corespondență. În schimb, este mai bine să a se realiza conversia dintr-un FTJ analogic în unul digital prin metoda invarianței răspunsului la impuls și abia apoi să a se realizeze transformarea de frecvență în domeniul digital. Astfel se evită problema erorii alias.

În cazul transformării biliniare, unde aliasingul nu este o problemă, nu contează când are loc transformarea de frecvență, în domeniul analogic sau în cel digital, în acest caz rezultatele fiind identice.

3.3. Tehnici directe de proiectare a filtrelor digitale IIR

Ca o alternativă la tehnica transformării unui filtru analogic în unul digital există metoda proiectării filtrelor IIR digitale direct în domeniul timp sau Z , fără a face referire la cele analogice.

Metodele de proiectare din această categorie se bazează pe optimizare numerică și, în principiu, permit obținerea de filtre digitale ce aproximează orice tip de răspuns în domeniul timp sau frecvență.

Proiectarea directă a filtrelor IIR presupune următoarele etape:

- 1) Considerarea unei funcții raționale $H(z)$ de forma (3.3) cu ordinele M și N ale polinoamelor $B(z)$ și $A(z)$ fixate;

- 2) Alegerea unui criteriu de minimizare a erorii adecvat aplicației concrete. Eroarea se poate referi fie la modulul funcției de transfer, fie la fază acesteia, fie simultan la cele două caracteristici, în cazul aproximării în domeniul frecvență, sau la răspunsul la impuls $h[n]$, în cazul aproximării în domeniul timp.

- 3) Utilizarea unui algoritm, în general iterativ, pentru determinarea coeficienților $\{a_k\}, \{b_k\}$ ai lui $H(z)$ sau a secvenței $h[n]$, astfel încât eroarea dintre răspunsul dorit și cel realizat să fie minimizată.

În continuare vor fi prezentate câteva metode de proiectare directă a filtrelor IIR, în care specificațiile și proiectarea sunt în domeniul timp.

3.3.1. Metoda de aproximare Padé

În această metodă se presupune că răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$. Filtrul ce urmează a fi proiectat are funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \quad (3.88)$$

unde $h[n]$ este răspunsul la impuls. Filtrul are $L = M + N + 1$ parametri, și anume, coeficienții $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, ce pot fi aleși astfel încât să minimizeze un criteriu de eroare.

Criteriul celor mai mici pătrate este adesea folosit în problemele de optimizare. În acest caz se minimizează suma pătratelor erorilor

$$E = \sum_{n=0}^U [h_d[n] - h[n]]^2 \quad (3.89)$$

în raport cu parametrii $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ ai filtrului, unde U este o limită superioară prestabilită pentru sumare, aleasă astfel încât eroarea de aproximare a funcției de transfer sau a răspunsului la impuls să fie în limitele impuse de datele de proiectare.

În general, $h[n]$ este o funcție neliniară de parametrii filtrului și minimizarea lui E implică rezolvarea unui sistem de ecuații neliniare. Dacă limita superioară se selectează ca fiind $U = L - 1$, este posibil să adapte perfect răspunsul dorit $h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M + N$. Aceasta se poate realiza în felul următor: filtrul ce urmează a fi proiectat este descris de ecuația cu diferențe

$$\begin{aligned} y[n] = & -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_N y[n-N] + \\ & + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_M x[n-M] \end{aligned} \quad (3.90)$$

Dacă intrarea în filtru este impulsul unitate, adică $x[n] = \delta[n]$, rezultă că $y[n] = h[n]$, adică

$$\begin{aligned} h[n] = & -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + \\ & + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \dots + b_M \delta[n-M] \end{aligned} \quad (3.91)$$

Deoarece $\delta[n-k] = 0$ pentru $n \neq k$, relația (3.91) devine

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.92)$$

Pentru $n > M$, relația (3.91) devine

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \dots - a_N h[n-N] \quad (3.93)$$

Ecuatiile (3.92) și (3.93) pot fi folosite în determinarea coeficienților filtrului $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$. Se impune $h[n] = h_d[n]$ pentru $0 \leq n \leq M+N$ și se folosește sistemul de ecuații (3.93) pentru a determina $\{a_k\}$. Apoi, aceștia se introduc în (3.92), pentru a determina coeficienții $\{b_k\}$. Astfel, se obține o potrivire perfectă între $h[n]$ și $h_d[n]$ pentru primele L valori ale răspunsului la impuls. Această tehnică se numește, de obicei, *aproximarea Padé* [49].

Măsura în care această metodă permite obținerea de filtre acceptabile depinde, în parte, de numărul de coeficienți selectați. Evident, cu cât acesta este mai mare, cu atât va fi mai bună aproximarea. Aceasta este un dezavantaj important al metodei, și anume, filtrul rezultat va avea mulți poli și multe zerouri, motiv pentru care folosirea sa în practică este limitată.

Exemplul 3.4.

Se presupune că răspunsul la impuls dorit este $h_d[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Să se determine parametrii filtrului cu funcția de sistem $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$, folosind aproximarea Padé.

Soluție. În acest exemplu simplu $H(z)$ se poate potrivi perfect cu $H_d(z)$ selectând $b_0 = 2$, $b_1 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2}$. Același lucru se poate obține și cu aproximarea Padé, după cum este ilustrat în continuare.

Cu intrarea $\delta[n]$, se obține

$$h[n] = -a_1 h[n-1] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1]$$

pentru $n > 1$, $h[n] = -a_1 h[n-1]$ sau, impunând $h[n] = h_d[n-1]$,

$$h_d[n] = -a_1 h_d[n-1].$$

Înlocuind $h_d[n]$ în ultima relație, se obține

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = -a_1 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}.$$

Pentru a determina b_0 și b_1 se folosește relația (3.92), de asemenea, cu condiția $h[n]=h_d[n]$.

$$\text{Se obține } h_d[n] = \frac{1}{2} h_d[n-1] + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1].$$

$$\text{Pentru } n=0 \rightarrow 2=b_0, \quad n=1 \rightarrow 1=\frac{1}{2}2+b_1 \rightarrow b_1=0, \text{ deci } H(z)=H_d(z).$$

Acest exemplu arată că aproximarea Padé are ca rezultat o potrivire perfectă cu $H_d(z)$, când funcția de sistem dorită este o funcție rațională și se cunoaște numărul de poli și zerouri din funcția de sistem. Aceasta nu este, în general, cazul în practică, deoarece $h_d[n]$ se determină din specificațiile răspunsului dorit în frecvență, $H_d(\omega)$. O soluție de a obține o aproximare bună a filtrului dorit cu metoda Padé este de a încerca diverse valori pentru M și N până când răspunsul în frecvență al filtrului rezultat converge la răspunsul în frecvență dorit cu o eroare de aproximare acceptabil de mică.

3.3.2. Proiectarea filtrelor digitale IIR folosind metoda celor mai mici pătrate

În această metodă se adoptă un model pentru sistem și se determină parametrii modelului care minimizează în sensul celor mai mici pătrate eroarea dintre răspunsul sistemului real și răspunsul dorit.

Se presupune din nou că $h_d[n]$ este specificat pentru $n \geq 0$. Se începe cu cazul simplu, în care filtrul numeric ce urmează a fi proiectat conține numai poli, adică

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3.94)$$

Fie conectarea în cascadă a filtrului dorit $H_d(z)$ cu filtrul invers $\frac{1}{H(z)}$, care este un filtru numai cu zerouri, ca în figura 3.10. Se

presupune că la intrarea cascadei din figura 3.10 se aplică excitația $\delta[n]$, astfel încât intrarea în sistemul invers este $h_d[n]$ și ieșirea $y[n]$. Ideal, ieșirea dorită este $y_d[n] = \delta[n]$. Ieșirea reală, $y[n]$, se obține astfel:

$$Y(z) = H_d(z) \cdot \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{b_0} H_d(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) \quad (3.95)$$

sau, în domeniul timp

$$y[n] = \frac{1}{b_0} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right) \quad (3.96)$$

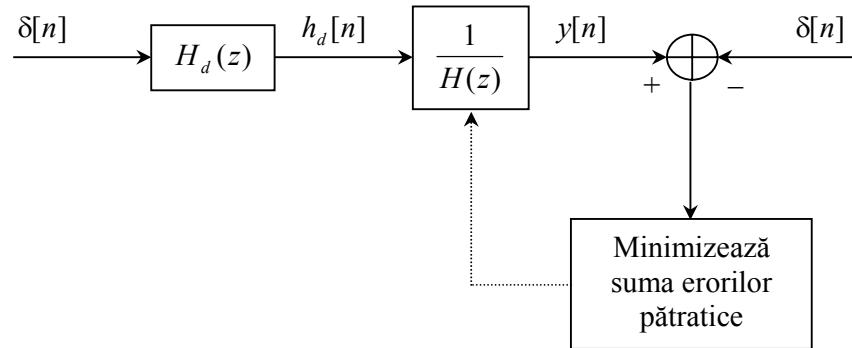


Figura 3.10 Proiectarea filtrului invers prin metoda celor mai mici pătrate

Condiția $y_d[0] = y[0] = 1$ este satisfăcută prin alegerea $b_0 = h_d[0]$. Pentru $n > 0$, $y[n]$ reprezintă eroarea dintre ieșirea dorită $y_d[n] = 0$ și ieșirea reală. Parametrii $\{a_k\}$ vor fi selectați astfel încât să minimizeze suma păratelor secvenței de eroare:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} y^2[n] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2}{h_d^2[0]} \quad (3.97)$$

Minimul acestei mărimi se obține pentru coeficienții $\{a_k\}$ rezultați din egalarea cu zero a derivatei lui E în raport cu $\{a_k\}$, de unde se obține un sistem de ecuații liniare.

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d^2[n] + 2h_d[n] \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-l] \right) \right)^{-1}}{h_d^2[0]} = 0 \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \left(2h_d[n]h_d[n-k] + \sum_{l=1}^N a_l h_d[n-k]h_d[n-l] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k]h_d[n-l] \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow r_{dd}[k,0] + \sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \\
&\quad \sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = -r_{dd}[k], \quad k = 1, 2, \dots, N \tag{3.98}
\end{aligned}$$

unde $r_{dd}[k,l]$ este secvența de autocorelație a lui $\{h_d[n]\}$, definită ca

$$r_{dd}[k,l] = \sum_{n=1}^{\infty} h_d[n-k]h_d[n-l] \tag{3.99}$$

Pentru secvențe staționare

$$r_{dd}[k,l] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n]h_d[n+k-l] = r_{dd}[k-l] \tag{3.99'}$$

$$r_{dd}[k,0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n]h_d[n-k] = r_{dd}[k] \tag{3.99''}$$

Sistemul de ecuații (3.98) poate fi scris matriceal

$$[\mathbf{R}_{dd}] [\mathbf{a}] = [\mathbf{r}_{dd}] \tag{3.100}$$

unde $[\mathbf{R}_{dd}]$ este matricea de corelație, cu elementele $\{r_{dd}[k-l]\}$, de dimensiune $N \times N$, $[\mathbf{a}]$ este vectorul $N \times 1$ al coeficienților filtrului și $[\mathbf{r}_{dd}]$ este un vector $N \times 1$ cu elementele $\{-r_{dd}[k]\}$. Dacă există $[\mathbf{R}_{dd}]^{-1}$, din (3.100) rezultă

$$[\mathbf{a}] = [\mathbf{R}_{dd}]^{-1} [\mathbf{r}_{dd}] \tag{3.101}$$

Metoda descrisă se numește *metoda celor mai mici pătrate de proiecțare a filtrului invers*.

Pentru o problemă de proiecțare particulară, răspunsul la impuls dorit $h_d[n]$ este specificat pentru un număr finit de puncte; fie acesta $0 \leq n \leq L$, cu $L \gg N$. Într-un astfel de caz, secvența de corelație $r_{dd}[k]$ se poate calcula din secvența finită $h_d[n]$ cu relația

$$\hat{r}_{dd}[k-l] = \sum_{n=0}^{L-|k-l|} h_d[n]h_d[n+k-l], \quad 0 \leq k-l \leq N \quad (3.102)$$

aceste valori putând fi folosite pentru a forma pe $[R_{dd}]$ și $[r_{dd}]$. Astfel, sistemul de ecuații liniare (3.100) devine

$$[\hat{R}_{dd}][a] = [\hat{r}_{dd}] \quad (3.103)$$

$$[a] = [\hat{R}_{dd}]^{-1}[\hat{r}_{dd}] \quad (3.104)$$

O metodă alternativă de rezolvare a problemei de aproximare a filtrului numai cu poli se bazează pe conceptul de *predicție liniară* pe baza minimizării erorii în sensul celor mai mici pătrate [49]. După cum se arată în Figura 3.11, ieșirea filtrului numai cu poli la un impuls $\delta[n]$ este

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + b_0 \delta[n] \quad (3.105)$$

sau, echivalent

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_0 \delta[n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.106)$$

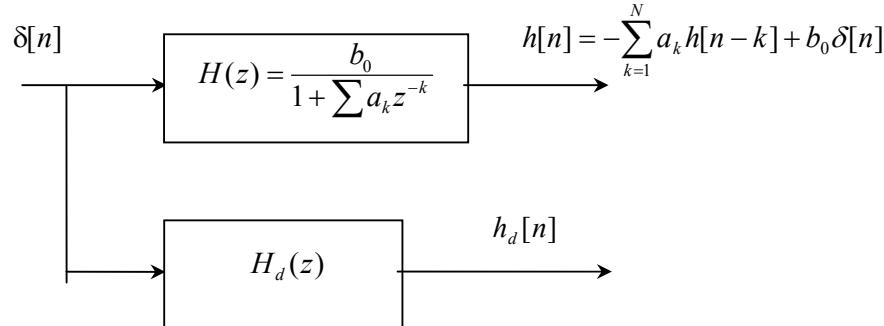


Figura 3.11. Proiectarea filtrului prin metoda celor mai mici pătrate bazată pe predicția liniară

Răspunsul dorit este $h_d[n]$. Dacă și acesta ar fi furnizat de un filtru numai cu poli, atunci

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] + b_0 \delta[n], \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.106')$$

Deoarece $h[0] = b_0$, se impune $b_0 = h_d[0]$. Pentru $n \geq 1$, (3.106) devine

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] \quad (3.107)$$

cu condiția inițială $h[n] = 0$ pentru $n < 0$.

În ipoteza că $H_d(z)$ este un filtru numai cu poli, atunci

$$h_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (3.108)$$

dar aceasta nu se întâmplă de obicei. Combinația liniară din membrul drept al relației (3.108) poate fi considerată ca un estimat al lui $h_d[n]$, adică

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n \geq 1 \quad (3.109)$$

$\hat{h}_d[n]$ se numește *valoarea predicției liniare* a lui $h_d[n]$. Suma pătratelor erorii de predicție dintre $h_d[n]$ și $\hat{h}_d[n]$ este

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (3.110)$$

Expresia din relația (3.110) este chiar aceeași funcție de eroare rezultată din setul de ecuații (3.98), ceea ce înseamnă că predicția liniară pe baza metodei celor mai mici pătrate conduce la același rezultat ca metoda celor mai mici pătrate de proiecțare a filtrului invers.

3.3.3. Metoda Prony

Metoda predicției pe baza celor mai mici pătrate poate fi extinsă la o aproximare a lui $H_d(z)$ care conține poli și zerouri. Dacă filtrul $H(z)$ care aproximează $H_d(z)$ are atât poli cât și zerouri, atunci răspunsul său la un impuls $\delta[n]$ devine

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k], \quad n \geq 0 \quad (3.111)$$

sau, echivalent,

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + b_n, \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.112)$$

și

$$h[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h[n-k], \quad n > M \quad (3.113)$$

Dacă $H_d(z)$ este un filtru cu poli și zerouri, răspunsul său la $\delta[n]$ ar trebui să satisfacă aceleasi ecuații (3.111) ÷ (3.113), lucru care în general nu se întâmplă. Pe baza relației (3.113) se definește valoarea de predicție liniară a lui $h_d[n]$, ca fiind

$$\hat{h}_d[n] = -\sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k], \quad n > M \quad (3.114)$$

Ca și în cazul filtrului numai cu poli, suma pătratelor erorii de predicție este

$$E_1 = \sum_{n=M+1}^{\infty} (h_d[n] - \hat{h}_d[n])^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(h_d[n] + \sum_{k=1}^N a_k h_d[n-k] \right)^2 \quad (3.115)$$

Minimizarea lui E_1 în raport cu coeficienții $\{a_k\}$ conduce la sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{l=1}^N a_l r_{dd}[k,l] = -r_{dd}[k,0], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.116)$$

unde

$$r_{dd}[k,l] = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_d[n-k] h_d[n-l] \quad (3.117)$$

Ecuațiile (3.116), care dau estimații coeficienților $\{a_k\}$, notați $\{\hat{a}_k\}$, se reduc la aproximarea filtrului numai cu poli, când M se impune a fi zero. Parametrii $\{b_k\}$ ce determină zerourile filtrului se obțin din relația (3.112), unde $h[n] = h_d[n]$, prin înlocuirea valorilor $\{\hat{a}_k\}$ obținute din (3.116).

$$b_n = h_d[n] + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k h_d[n-k], \quad 0 \leq n \leq M \quad (3.118)$$

În concluzie, parametrii $\{\hat{a}_k\}$ ce determină polii se obțin prin metoda celor mai mici pătrate, în timp ce parametrii $\{b_k\}$, care determină zerourile, se obțin ca în metoda de aproximare Padé. Această tehnică pentru determinarea polilor și zerourilor lui $H(z)$ se numește *metoda Prony*.

Metoda celor mai mici pătrate furnizează estimații buni pentru parametrii polilor. Metoda Prony poate să nu fie eficace pentru estimarea parametrilor $\{b_k\}$, deoarece aceștia nu rezultă din aplicarea unui criteriu de minimizare a erorii.

3.3.4. Metoda Shanks

O altă metodă, în care ambele seturi de parametri, $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$, se determină pe baza minimizării erorii de aproximare în sensul celor mai mici pătrate a fost propusă de *Shanks* (1967) [61]. Parametrii $\{a_k\}$ sunt calculați prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate, ca în relația (3.116), prezentată anterior. Aceasta produce estimații $\{\hat{a}_k\}$ ce permit sintetizarea filtrului numai cu poli

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}_k z^{-k}} \quad (3.119)$$

Răspunsul acestui filtru la $\delta[n]$ este

$$v[n] = -\sum_{k=1}^N \hat{a}_k v[n-k] + \delta[n], \quad n \geq 0 \quad (3.120)$$

Secvența $\{v[n]\}$ este folosită pentru a excita un filtru numai cu zerouri, cu funcția de sistem

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (3.121)$$

După cum se arată în figura 3.12, răspunsul acestuia este

$$\hat{h}_d[n] = \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (3.122)$$

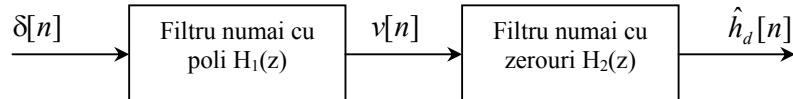


Figura 3.12. Folosirea metodei celor mai mici pătrate pentru determinarea polilor și zerourilor unui filtru

Se poate defini o secvență de eroare

$$e[n] = h_d[n] - \hat{h}_d[n] = h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \quad (3.123)$$

și, în consecință, parametrii $\{b_k\}$ pot fi, de asemenea, determinați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, și anume, prin minimizarea relației

$$E_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_d[n] - \sum_{k=0}^M b_k v[n-k] \right)^2 \quad (3.124)$$

în raport cu $\{b_k\}$. Astfel, se obține un sistem de ecuații liniare pentru parametrii $\{b_k\}$, în forma

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{vv}[k, l] = r_{hv}[l, 0], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (3.125)$$

unde

$$r_{vv}[k, l] = \sum_{n=0}^{\infty} v[n-k] v[n-l] \quad (3.126)$$

$$r_{hv}[l, 0] = \sum_{n=0}^{\infty} h_d[n] v[n-l] \quad (3.127)$$

3.3.5. Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

Până acum, criteriul de minimizare a erorii în sensul celor mai mici pătrate s-a folosit în proiectarea filtrelor cu poli și zerouri. O abordare similară va fi folosită pentru a determina filtrul invers FIR, pe baza metodei celor mai mici pătrate pentru un filtru dorit.

Sistemul invers al unui SDLIT, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$ și funcția de sistem $H(z)$, se definește ca fiind sistemul al căruia răspuns la impuls, $h_I[n]$, și funcție de sistem, $H_I(z)$, satisfac relațiile

$$h[n]^* h_I[n] = \delta[n] \quad (3.128)$$

$$H(z) \cdot H_I(z) = 1 \quad (3.129)$$

În general $H_I(z)$ este cu răspuns infinit la impuls, cu excepția cazului când $H(z)$ are numai poli, și $H_I(z)$ este cu răspuns finit la impuls. În multe aplicații practice este de dorit a restricționa filtrul invers să fie FIR și o metodă simplă de a obține acest lucru este de a trunchia $h_I[n]$, caz în care eroarea pătratică totală de aproximare devine

$$E_t = \sum_{n=M+1}^{\infty} h_I^2[n] \quad (3.130)$$

unde $M + 1$ este lungimea filtrului trunchiat și E_t este energia “cozii” răspunsului la impuls $h[n]$.

Criteriul de minimizare a erorii de aproximare în sensul celor mai mici pătrate poate fi folosit la optimizarea celor $M + 1$ coeficienți ai filtrului FIR. Fie $d[n]$ secvența de ieșire dorită a filtrului de lungime $M + 1$ și fie $h[n]$ secvența de intrare. Atunci, dacă $y[n]$ este secvența de ieșire din filtrul invers, cum se arată în figura 3.13, secvența de eroare dintre secvența dorită și cea reală este

$$e[n] = d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \quad (3.131)$$

unde b_k sunt coeficienții filtrului.

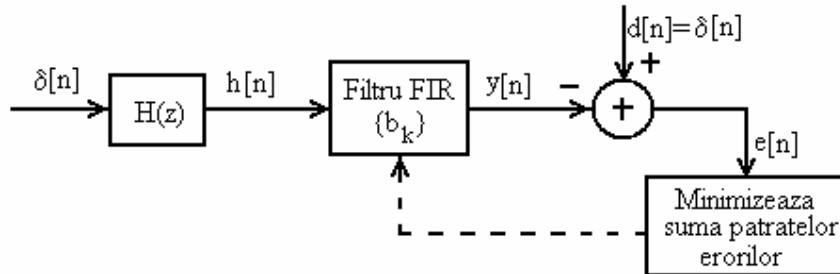


Figura 3.13. Filtrul FIR invers obținut prin metoda celor mai mici pătrate

Suma pătratelor secvenței de eroare este

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d[n] - \sum_{k=0}^M b_k h[n-k] \right]^2 \quad (3.132)$$

Prin minimizarea lui E în raport cu coeficienții filtrului, rezultă sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}[k-l] = r_{dh}[l], \quad l = 0, 1, \dots, M \quad (3.133)$$

unde $r_{hh}[l]$ este funcția de autocorelație a lui $h[n]$, presupus staționar, definită ca

$$r_{hh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]h[n-l] \quad (3.134)$$

și $r_{dh}[l]$ este secvența de corelație dintre răspunsul dorit $d[n]$, de asemenea presupus staționar, și secvența de intrare $h[n]$, definită ca

$$r_{dh}[l] = \sum_{n=0}^{\infty} d[n]h[n-l] \quad (3.135)$$

Filtrul FIR optim în sensul celor mai mici pătrate, care satisfac ecuațiile liniare (3.133) se numește *filtru Wiener*. Cum filtrul FIR optim în sensul celor mai mici pătrate, urmează să aproximeze filtrul invers, răspunsul dorit este $d[n] = \delta[n]$, caz în care corelația dintre $d[n]$ și $h[n]$ este

$$r_{dh}[l] = \begin{cases} h[0], & l = 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (3.136)$$

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR obținut cu metoda celor mai mici pătrate se obțin din soluția ecuației liniare (3.133), care se scrie matriceal

$$\begin{bmatrix} r_{hh}[0] & r_{hh}[1] & \dots & r_{hh}[M] \\ r_{hh}[1] & r_{hh}[0] & \dots & r_{hh}[M-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{hh}[M] & & & r_{hh}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Matricea este simetrică și are elementele de pe fiecare diagonală egale, adică este Toeplitz, caz în care poate fi inversată eficient cu algoritmul Levison - Durbin care necesită un număr de operații proporțional cu M^2 în loc de M^3 , cum rezultă de obicei [49].

Înlocuind (3.133) în (3.132), rezultă valoarea minimă a sumei pătratelor erorilor obținută cu filtrul FIR optim

$$E_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} d^2[n] - \sum_{k=0}^M b_k r_{dh}[k] \quad (3.138)$$

În cazul când filtrul FIR este filtrul invers obținut pe baza metodei celor mai mici pătrate, $d[n] = \delta[n]$ și $r_{dh}[n] = h[0]\delta[n]$. Prin urmare,

$$E_{\min} = 1 - h[0] b_0 \quad (3.139)$$

Exemplul 3.5.

Să se determine filtrul FIR invers, de lungime 2, folosind metoda celor mai mici pătrate, al sistemului care are răspunsul la impuls

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -\alpha, & n = 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

unde $|\alpha| < 1$. Să se compare soluția obținută folosind metoda celor mai mici pătrate cu inversul aproximat prin trunchierea lui $h_I[n]$.

Soluție. Deoarece sistemul are funcția de sistem $H(z) = 1 - \alpha z^{-1}$, filtrul invers este IIR și $H_I(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$ sau, echivalent,

$h_I[n] = \alpha^n u[n]$. Dacă acesta este trunchiat după n termeni, energia reziduală este

$$E_t = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{2n} (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots) = \frac{\alpha^{2n}}{1 - \alpha^2}$$

Din (3.137) rezultă că filtrul FIR obținut prim metoda celor mai mici pătrate, de lungime 2, satisfacă ecuațiile

$$\begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cu soluția $b_0 = \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$, $b_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$. Pentru comparație, filtrul invers trunchiat de lungime 2 are coeficienții $b_0 = 1$, $b_1 = \alpha$.

Eroarea obținută prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate este

$E_{\min} = \frac{\alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$, față de $E_t = \frac{\alpha^4}{1 - \alpha^2}$, pentru filtrul invers aproximat prin trunchiere. Se observă că $E_t > E_{\min}$, astfel încât filtrul FIR invers obținut cu metoda celor mai mici pătrate are performanțe superioare.

În acest exemplu răspunsul la impuls $h[n]$ al sistemului este de fază minimă. Într-un astfel de caz, se selectează răspunsul dorit $d[0]=1$ și $d[n]=0$ pentru $n \geq 1$. Dacă sistemul nu este de fază minimă, ar trebui introducă o întârziere în răspunsul dorit pentru a obține un filtru bun, care să aproximeze cât mai fidel răspunsul dorit. Valoarea întârzierii potrivite depinde de caracteristica lui $h[n]$. În acest caz se poate calcula eroarea filtrului obținut prin metoda celor mai mici pătrate pentru diferite întârzieri și apoi se selectează filtrul care produce cea mai mică eroare, ca în exemplul 3.6.

Exemplul 3.6.

Să se determine filtrul FIR invers, de lungime 2, folosind metoda celor mai mici pătrate, al sistemului cu răspunsul la impuls

$$h[n] = \begin{cases} -\alpha, & n=0 \\ 1, & n=1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{unde } |\alpha| < 1.$$

Soluție. Acesta este un sistem de fază maximă. Dacă se selectează $d[n] = [1 \ 0]$ se obține aceeași soluție ca în exemplul 3.5, cu eroarea minimă obținută prin metoda celor mai mici pătrate egală cu

$$E_{\min} = 1 - h[0]b_0 = 1 + \alpha \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$$

Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $E_{\min} > 1$, care reprezintă un filtru invers neperformant. Dacă $-1 < \alpha < 0$ atunci $E_{\min} < 1$.

În particular, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, $E_{\min} = 1,57$, iar pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$E_{\min} = 0,81$, care este totuși o valoare foarte mare pentru eroarea pătratică.

Dacă se presupune că răspunsul dorit este $d[n] = \delta[n-1]$, coeficienții filtrului obținuți din (3.137) sunt

$$\begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 + \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(1) \\ b(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_0 = \frac{1}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}, \quad b_1 = \frac{-\alpha^3}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}.$$

Valoarea minimă a erorii obținute prin metoda celor mai mici pătrate, dată de relația (3.138), este

$$E_{\min} = 1 - b_0 r_{dh}[0] - b_1 r_{dh}[1] = 1 - b_0 h[1] - b_1 h[0] =$$

$$1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 + \alpha^4} + \frac{\alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4} = 1 - \frac{1 - \alpha^4}{1 + \alpha^2 + \alpha^4}$$

În particular, dacă se presupune $\alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow E_{\min} = 0,21$. În

consecință, răspunsul dorit $d[n] = \delta[n-1]$ are ca rezultat un filtru invers mult mai bun. Îmbunătățiri suplimentare se obțin prin creșterea lungimii filtrului invers.

În general, când răspunsul dorit este prevăzut să conțină o întârziere D , atunci secvența de corelație este

$$\begin{aligned} r_{dh}[l] &= \sum_{n=0}^{\infty} d[n]h[n-l] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n-D]h[n-l] = \\ &= h[D-l], \quad l = 0,1 \dots M \end{aligned} \quad (3.140)$$

În acest caz, ecuațiile liniare (10.137) devin

$$\sum_{k=0}^M b_k r_{hh}[k-l] = h[D-l] \quad l = 0,1 \dots M \quad (3.141)$$

Expresia erorii, în cazul minimizării acesteia în sensul celor mai mici pătrate, dată în general de (3.138), devine

$$E_{\min} = 1 - \sum_{k=0}^M b_k h[D-k] \quad (3.142)$$

și este cea mai mică în comparație cu erorile rezultate din alte metode de aproximare.

3.4. Alegerea între filtrele FIR și IIR

Alegerea dintre cele două tipuri de filtre depinde de avantajele oferite de fiecare dintre ele și cerințele de proiectare.

1. Filtrul FIR poate avea răspunsul de fază perfect liniar, deci filtrul nu introduce nici o distorsiune de fază. Această cerință este importantă în transmisiiile de date, biomedicină, procesare de imagini. Caracteristica fază - frecvență a filtrelor IIR este neliniară, mai ales la capetele benzii de trecere.
2. Filtrele FIR pot fi realizate totdeauna nerecursiv [63], fapt care le asigură stabilitatea. Stabilitatea filtrelor IIR nu e garantată întotdeauna.
3. Efectele folosirii unui număr limitat de biți în zgromotul de rotunjire și în eroarea de cuantizare a coeficienților sunt mai puțin severe pentrufiltrele FIR decât pentrufiltrele IIR și nu le afectează stabilitatea [21].
4. Filtrele FIR necesită mai mulți coeficienți pentru o bandă de tranziție la fel de îngustă ca a filtrelor IIR, deci, pentru o specificare a răspunsului în amplitudine, timpul necesar unui filtru FIR pentru procesare și stocare este mai mare.

5. Filtrele analogice pot fi transformate în echivalente digitale IIR, respectând specificații similare. Aceasta nu este posibil pentru un filtru FIR, acesta neavând corespondent analogic.
6. Filtrele FIR *cu fază liniară* prezintă un dezavantaj major constând în faptul că, în anumite aplicații, lungimea M a filtrului ce satisfac cerințele de proiectare este mare. Aceasta implică în mod evident o întârziere de grup normată mare, egală cu $(M-1)/2$, ceea ce poate fi un impediment în acele aplicații din telecomunicații pentru care ecourile semnalelor transmise nu pot fi tolerate. De asemenea, în sistemele de control cu reacție, o întârziere mare în bucla de reacție este în general inaceptabilă.

În concluzie,

- Se folosesc filtre IIR, când se cere numai o caracteristică cu tăiere abruptă, în special folosind caracteristici eliptice, astfel rezultând mai puțini coeficienți decât în cazul filtrelor FIR.
- Se folosesc filtre FIR, când numărul de coeficienți nu este prea mare și nu sunt tolerate distorsiuni de fază.

Anexa 3a

Filtre analogice clasice folosite în proiectarea filtrelor IIR digitale

În continuare vor fi prezentate succint câteva filtre analogice prototip întâlnite mai frecvent în aplicații. Se va face referire numai la FTJ, trecerea la celelalte tipuri de filtre efectuându-se prin transformări de frecvență. După cum se știe, filtrul trece jos ideal nu este realizabil fizic [14], [26], [66], de aceea, caracteristica sa se poate doar aproxima. Există mai multe posibilități de aproximare [9]:

- Aproximare de tip maxim plat a caracteristicii amplitudine – frecvență, care conduce la o familie de filtre din care fac parte filtrelle Butterworth.
- Aproximarea de tip maxim plat a timpului de întârziere de grup, care conduce la o familie de filtre din care fac parte filtrelle Bessel.
- Aproximarea cu ripluri egale în banda de trecere și comportare monotonă în banda de oprire (filtre de tip Cebîșev I).
- Aproximarea cu ripluri egale în banda de oprire și comportare monotonă în banda de trecere (filtre de tip Cebîșev II).
- Aproximarea cu ripluri egale atât în banda de trecere, cât și în banda de oprire (filtre Cauer sau eliptice).

3a.1. Filtre Butterworth

Filtrele Butterworth [66] sunt FTJ caracterizate de funcția de transfer care conține numai poli:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^{2N}} \quad (3a.1)$$

unde Ω_c este frecvența de tăiere (frecvența la -3dB), N – ordinul filtrului, Ω_p marginea benzii de trecere, iar $(1 - \Delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$ este valoarea lui $|H(\Omega)|^2$ la capătul benzii de trecere.

Deoarece $H(s)H(-s)$ evaluat la $s = j\Omega$ este chiar $|H(\Omega)|^2$, rezultă

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2 / \Omega_c^2)^N} \quad (3a.2)$$

Polii lui $H(s)H(-s)$ sunt plasăti pe un cerc de rază Ω_c , în puncte egal distanțate.

$$s_k = \Omega_c e^{j\pi/2} e^{j(2k+1)\pi/2N}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.3)$$

Figura 3a.1 ilustrează poziția polilor unui filtru Butterworth pentru $N=4$ și $N=5$.

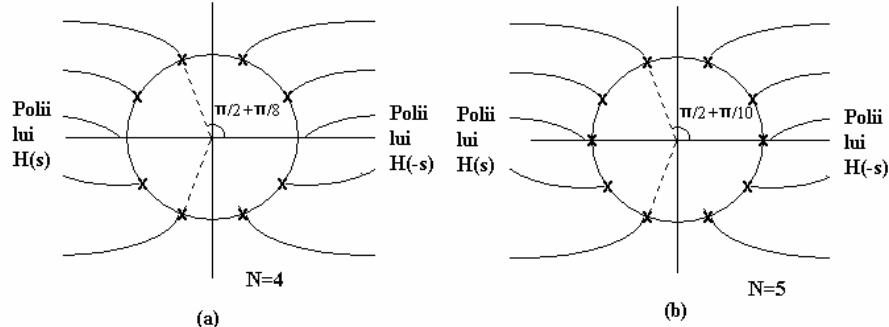


Figura 3a.1 Pozițiile polilor unui filtru Butterworth, $N=4$, $N=5$.

Filtrul Butterworth realizează o caracteristică de tip maxim plat la $\Omega=0$ în sensul că primele $2N-1$ derive sunt nule la $\Omega=0$ [28].

În figura (3a.2) este reprezentat răspunsul de amplitudine pentru câteva valori ale ordinului N al funcției de transfer. Se observă caracterul monoton al caracteristicii atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire.

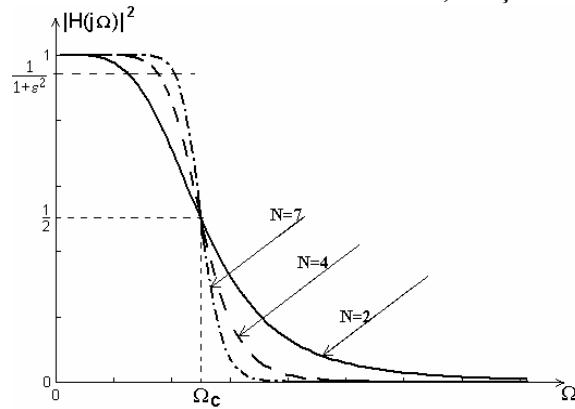


Figura 3a.2. Pătratul modulului normalizat al funcției de transfer a unui FTJ de tip Butterworth, pentru diverse valori ale ordinului filtrului

Se remarcă următoarele particularități:

- La $\Omega = \Omega_c$, indiferent de ordinul N, pătratul modului normalizat este $\frac{1}{2}$;
- Creșterea lui N atrage după sine:
 - îngustarea zonei de tranziție;
 - aproximarea mai bună a cerințelor FTJ ideal în sensul că $|H(\Omega)| \approx 0$, respectiv $|H(\Omega)| \approx 1$ într-o porțiune mai mare din B.O., respectiv din B.T.;
- Caracteristica $|H(\Omega)|^2$ realizează o aproximare de tip maxim plat și la $\Omega \rightarrow \infty$, pentru această frecvență toate derivatele fiind nule;

Determinarea ordinului N care îndeplinește cerința de atenuare Δ_s la o frecvență specificată Ω_s , arătată în figura 3a.3, se face cu ajutorul relației (3a.1). Astfel, la $\Omega = \Omega_s$

$$\Delta_s^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^{2N}} \quad (3a.4)$$

de unde rezultă

$$N = \frac{\lg[(1/\Delta_s^2) - 1]}{2 \lg(\Omega_s / \Omega_c)} = \frac{\lg(\delta / \varepsilon)}{\lg(\Omega_s / \Omega_p)} \quad (3a.5)$$

unde, prin definiție $\Delta_s = 1/\sqrt{1+\delta^2}$. Astfel, filtrul Butterworth este complet caracterizat de parametrii N, Δ_s, ε și raportul Ω_s / Ω_p .

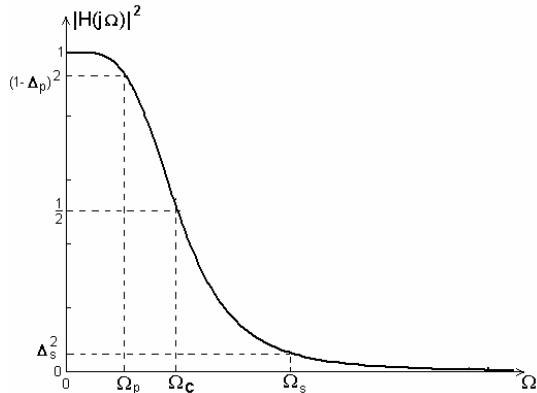


Figura 3a.3. Specificarea restricțiilor la proiectarea FTJ analogic de tip Butterworth

3a.2. Filtre Bessel

Ca și filtrele Butterworth, filtrele Bessel au funcția de transfer de tipul numai cu poli, adică:

$$H(s) = \frac{K}{B_N(s)} \quad (3a.6)$$

unde $B_N(s)$ este polinomul Bessel de ordinul N [1]. Acesta poate fi exprimat în forma

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \quad (3a.7)$$

unde coeficienții $\{a_k\}$ sunt dați de expresia

$$a_k = \frac{(2N-k)!}{2^{N-k} k!(N-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3a.8)$$

Polinoamele Bessel pot fi generate recursiv cu ajutorul relației [49]

$$B_N(s) = (2N-1)B_{N-1}(s) + s^2 B_{N-2}(s) \quad (3a.9)$$

cu inițializarea:

$$B_0(s) = 1, \quad B_1(s) = s + 1 \quad (3a.10)$$

O caracteristică importantă a filtrelor Bessel este aceea că au răspunsul de fază liniar în banda de trecere a filtrului. În figura 3a.4 se prezintă, comparativ, caracteristicile amplitudine – frecvență și fază - frecvență pentru filtrele Butterworth și Bessel de ordinul 4. Banda de tranziție a filtrului Bessel este mare, comparativ cu alte tipuri de filtre. Din păcate, metodele de transformare ale filtrelor analogice în filtre digitale, nu conservă caracteristica de fază liniară a filtrelor Bessel analogice.

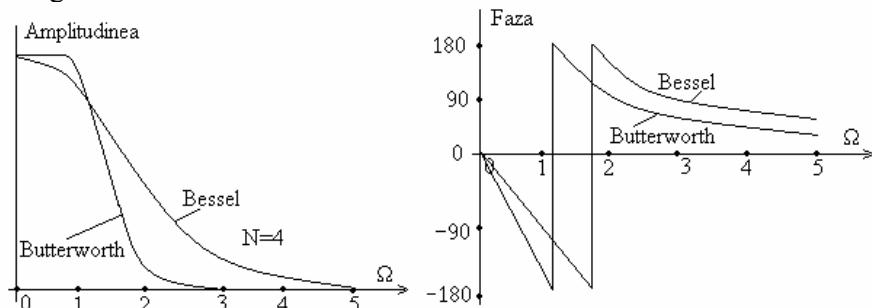


Figura 3a.4. Răspunsul de modul și de fază pentru filtrele Butterworth și Bessel de ordinul $N=4$.

3a.3 Filtre Cebîșev de tipul I

Filtrele Cebîșev de tipul I sunt filtre numai cu poli, a căror caracteristică de modul prezintă ripluri egale în banda de trecere, iar în banda de oprire caracteristica este monoton descrescătoare. Filtrele Cebîșev sunt filtre optimale, în sensul că, pentru o bandă de trecere dată și o atenuare specificată în banda de oprire, au cea mai mică regiune de tranziție, $\Omega_s - \Omega_p$, dintre toate filtrele care au numai poli finiți.

Pătratul modulului funcției de transfer este dat de relația

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)} \quad (3a.11)$$

unde ε este un parametru al filtrului ce depinde de riplul din banda de trecere, iar $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordinul N definit cu relația

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & \text{pentru } |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases} \quad (3a.12)$$

Polinoamele Cebîșev pot fi generate cu relația recursivă

$$C_{N+1}(x) = 2x C_N(x) - C_{N-1}(x), \quad N > 1, \text{ cu } C_0(x) = 1, C_1(x) = x \quad (3a.13)$$

Din definiția (3a.12) se observă că

1. $|C_N(x)| \leq 1, |x| \leq 1$ și toti N.
2. $|C_N(x)| > 1, |x| > 1$ și toti N.
3. $|C_N(\pm 1)| = 1$.
4. Toate rădăcinile polinomului $C_N(x)$ sunt în intervalul $-1 \leq x \leq 1$.

$C_N^2(1) = 1$, iar $C_N^2(0)$ este 0 sau 1, după cum N este impar, respectiv par.
În consecință,

$$|H(\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{și} \quad |H(0)|^2 = \begin{cases} 1, & \text{pentru N impar} \\ \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, & \text{pentru N par} \end{cases} \quad (3a.14)$$

Tinând cont de relațiile (3a.12) și (3a.14) rezultă reprezentările grafice pentru $|H(\Omega)|$ din figurile 3a.5a pentru N impar, respectiv 3a.5b pentru N par, ambele oscilând între 1 și $1/(1+\varepsilon^2)^{1/2}$ în banda de trecere.

În banda de oprire, caracteristica monoton descrescătoare a modulului funcției de transfer realizează o aproximare de tip maxim plat a valorii ideale zero, deoarece toate derivatele sale se anulează pentru $\Omega \rightarrow \infty$. Panta de cădere a caracteristicii este cu atât mai mare cu cât ordinul filtrului este mai mare, iar pentru două filtre de același ordin panta este mai abruptă pentru cel cu ripluri mai mari în banda de trecere.

Performanțele filtrului sunt complet determinate de parametrul ε ce fixează mărimea riplului în banda de trecere și de ordinul N ce determină lățimea benzii de tranziție.

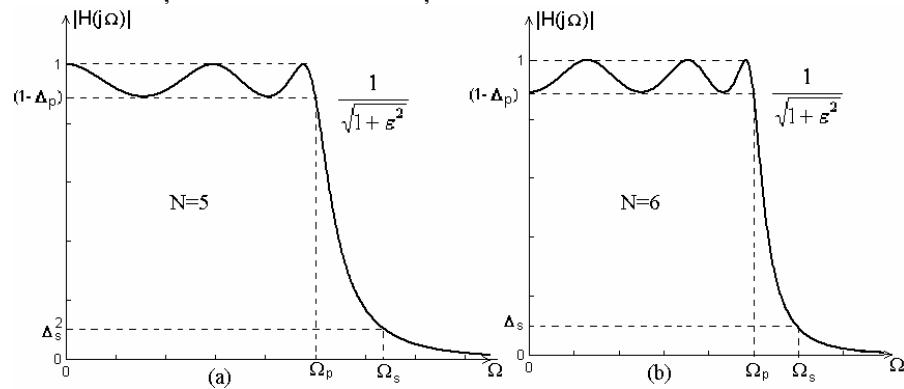


Figura 3a.5 Modulul funcției de transfer pentru filtrul analogic TJ Cebîșev de tipul I
(a) pentru $N=5$ și (b) pentru $N=6$

Parametrul ε se determină din riplul Δ_p impus la proiectare, astfel:

$$(1 - \Delta_p)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Leftrightarrow \varepsilon^2 = \frac{1}{(1 - \Delta_p)^2} - 1 \quad (3a.15)$$

Pentru găsirea ordinului N se impune condiția ca la frecvența limită a benzii de oprire (Ω_s), modulul funcției de transfer să ia valoarea Δ_s .

$$\begin{aligned} |H(\Omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2 (\Omega_s / \Omega_p)} = \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \{\cosh[N \cosh^{-1}(\Omega_s / \Omega_p)]\}^2} = \Delta_s^2 \end{aligned} \quad (3a.16)$$

Din relația de mai sus rezultă

$$N = \frac{\cosh^{-1}[(\sqrt{1/\Delta_s^2 - 1})/\varepsilon]}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} = \frac{\cosh^{-1}(\delta/\varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s/\Omega_p)} \quad (3a.17)$$

unde, prin definiție $\Delta_s = 1/\sqrt{1+\delta^2}$.

Polii filtrului Cebîșev de tip I se află pe o elipsă în planul s , cu axa mare

$$r_1 = \Omega_p \frac{\beta^2 + 1}{2\beta} \quad (3a.18)$$

$$\text{și axa mică} \quad r_2 = \Omega_p \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} \quad (3a.19)$$

$$\text{unde} \quad \beta = \left[\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} + 1}{\varepsilon} \right]^{1/N} \quad (3a.20)$$

Pentru un filtru de ordin N , poziția polilor se determină mai ușor, localizând întâi polii pentru un filtru echivalent Butterworth de ordinul N pe un cerc de rază r_1 sau r_2 ca în figura 3a.6.

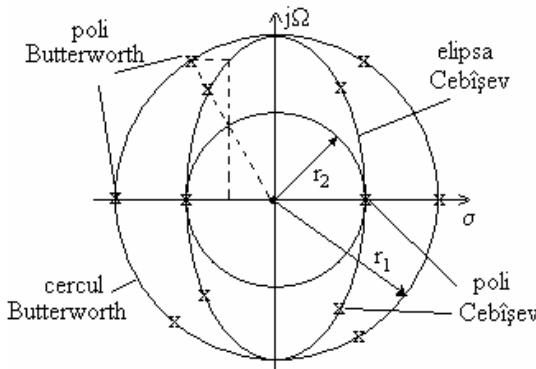


Figura 3a.6 Determinarea poziției polilor pentru un filtru Cebîșev de ordin $N=3$

Dacă se notează unghiul polilor filtrului Butterworth cu

$$\phi_k = \pi/2 + (2k+1)\pi/2N \quad (3a.21)$$

atunci polii filtrului Cebîșev se află pe o elipsă de coordonate (x_k, y_k) , $k=0,1,\dots,N-1$, unde

$$\begin{aligned} x_k &= r_2 \cos \phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_k &= r_1 \sin \phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3a.22)$$

3a.4. Filtre Cebîșev de tipul II

Funcția de transfer a filtrului Cebîșev II conține atât poli cât și zerouri și caracteristica sa amplitudine – frecvență are o comportare monotonă în banda de trecere și prezintă ripluri egale în banda de oprire. Zerourile sunt pe axa imaginară a planului s .

Pătratul modulului funcției de transfer pentru filtrul trece jos Cebîșev de tipul II este

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{C_N^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)}{\frac{C_N^2 \left(\frac{\Omega_s}{\Omega} \right)}{1 - \Delta_p}} \right]} \quad (3a.23),$$

unde $C_N(x)$ este polinomul Cebîșev de ordin N și Ω_s este frecvență începutului benzii de oprire.

Caracteristica amplitudine frecvență a filtrului Cebîșev II este reprezentată în figura 3a.7a pentru $N=5$ și în 3a.7b pentru $N=6$.

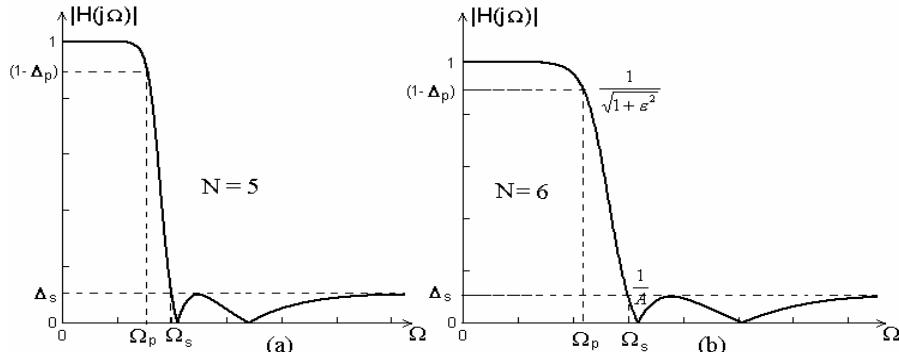


Figura 3a.7 Modulul funcției de transfer pentru filtrul analogic TJ Cebîșev de tipul II
(a) pentru $N=5$ și (b) pentru $N=6$

Zerourile filtrului sunt localizate pe axa imaginară la

$$s_k = j \frac{\Omega_s}{\sin \phi_k}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.24)$$

Polii sunt localizați în puncte de coordonate (v_k, w_k) , unde

$$v_k = \frac{\Omega_s x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.25)$$

$$w_k = \frac{\Omega_s y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3a.26)$$

unde coordonatele $\{x_k\}$ și $\{y_k\}$ sunt definite de relațiile (3a.22), cu β dat de relația

$$\beta = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \Delta_s^2}}{\Delta_s} \right]^{1/N} \quad (3a.27)$$

Δ_s fiind riplul din banda de oprire.

Din cele prezentate până acum se observă că filtrele Cebîșev sunt complet caracterizate de parametrii N, Δ_s, ε și raportul Ω_s / Ω_p . Date fiind specificațiile ε, Δ_s și raportul Ω_s / Ω_p , ordinul filtrului se determină din condiția $|H(j\Omega_s)| = \Delta_s$.

$$N = \frac{\lg[(\sqrt{1 - \Delta_s^2} + \sqrt{1 - \Delta_s^2(1 + \varepsilon^2)}) / \varepsilon \Delta_s]}{\lg[(\Omega_s / \Omega_p) + \sqrt{(\Omega_s / \Omega_p)^2 - 1}]} = \frac{\cosh^{-1}(\delta / \varepsilon)}{\cosh^{-1}(\Omega_s / \Omega_p)} \quad (3a.28)$$

Observație. La aceleași specificații de proiectare, filtrele Cebîșev rezultă cu număr de poli mai mic decât filtrele Butterworth. Dacă, însă, se compară un filtru Butterworth cu unul Cebîșev, având aceeași număr de poli și aceleași specificații în B.T. (Banda de Trecere) și B.O. (Banda de Oprire), filtrul Cebîșev are o bandă de tranziție mai mică.

3a.5. Filtre eliptice

Filtrele eliptice (denumite și *filtre Cauer*) au o caracteristică de modul cu ripluri egale în ambele benzi, de trecere și oprire, motiv pentru care li se mai spune și *filtre echiriplu*. Aproximarea în sens Cebîșev a cerințelor filtrului trece jos ideal este extinsă la ambele benzi.

Pătratul modulului funcției de transfer are forma

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_N^2(\Omega)} \quad (3a.29)$$

unde $F_N(\Omega)$ este funcția rațională Cebîșev sau funcția eliptică iacobiană, introdusă pentru prima dată de Cauer în teoria circuitelor liniare, și tabulată de Zverev (1967) [69] iar ε este un parametru ce depinde de riplul din banda de trecere. Funcția $F_N(\Omega)$ se exprimă astfel:

$$F_N(\Omega) = \begin{cases} C_1 \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \Omega_0^4/\Omega_i^2} & \text{pentru } N \text{ par} \\ C_2 \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega^2 - \Omega_i^2}{\Omega^2 - \Omega_0^4/\Omega_i^2} \Omega & \text{pentru } N \text{ impar} \end{cases} \quad (3a.30)$$

Din relația precedentă se observă că funcția $F_N(\Omega)$ are polii și zerourile nebaneale în număr egal, polii fiind plasați simetric față de zerouri în raport cu frecvența Ω_0 , definită ca medie geometrică a frecvențelor limită ale benzilor de trecere și oprire

$$\Omega_0^2 = \Omega_p \Omega_s \quad (3a.31)$$

Zerourile filtrului eliptic se găsesc pe axa $j\Omega$ a planului s .

În figura 3a.8 este reprezentat pătratul modulului funcției de transfer pentru un filtru eliptic de ordinul $N=4$ și $N=5$.

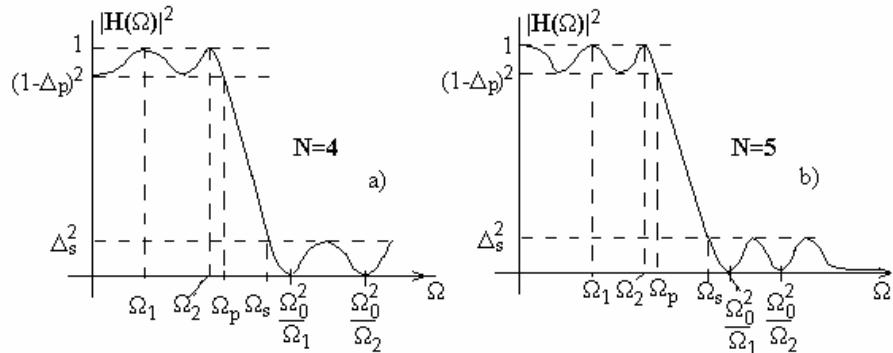


Figura 3a.8. Caracteristicile de modul ale filtrelor eliptice trece jos analogice : a) $N=4$,
b) $N=5$

Din relațiile (3a.29) și (3a.30) se observă că

$$\begin{aligned} F_N(\Omega) = 0 \Rightarrow |H(\Omega)|^2 = 1 &\Rightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega_i, N \text{ par} \\ \Omega = 0 \text{ și } \Omega = \Omega_i, N \text{ impar} \end{cases} \\ F_N(\Omega) \rightarrow \infty \Rightarrow |H(\Omega)|^2 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega_0^2/\Omega_i, N \text{ par} \\ \Omega = \Omega_0^2/\Omega_i \text{ și } \Omega \rightarrow \infty, N \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (3a.32)$$

Acstea relații conduc la următoarele observații:

a) pentru N par $|H(\Omega)|^2$ prezintă $N/2$ maxime (de valoare 1) în banda de trecere și $N/2$ minime (de valoare 0) în banda de oprire; pentru N impar sunt $(N-1)/2+1=(N+1)/2$ maxime în B.T. și tot $(N+1)/2$ minime în B.O.

b) numărul total al extremelor locale (minime și maxime) este $2N$ pentru $\Omega \in [0, \infty]$, N extreme în B.T. și tot N extreme în B.O.

Egalitatea numărului de extreme din cele două benzi este un dezavantaj al filtrelor eliptice în sensul că din punct de vedere al minimizării erorii maxime (la aproximarea Cebîșev) ar fi de dorit ca distribuirea extremelor erorii între cele două benzi să se facă proporțional cu ponderile benzilor în intervalul de aproximare considerat.

Ordinul filtrului necesar îndeplinirii specificațiilor referitoare la riplul din banda de trecere, Δ_p , riplul din banda de oprire, Δ_s și raportul Ω_c / Ω_s este dat de relația [58]:

$$\begin{aligned} N &= \frac{K(\Omega_p / \Omega_s) K\left(\sqrt{1 - \Delta_s^2(1 + \varepsilon^2)} / \sqrt{1 - \Delta_s^2}\right)}{K(\varepsilon \Delta_s / \sqrt{1 - \Delta_s^2}) K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p / \Omega_s)^2}\right)} = \\ &= \frac{K(\Omega_p / \Omega_s) K\left(\sqrt{1 - (\varepsilon / \delta)^2}\right)}{K(\varepsilon / \delta) K\left(\sqrt{1 - (\Omega_p / \Omega_s)^2}\right)} \end{aligned} \quad (3a.33)$$

unde $K(\cdot)$ este *integrala eliptică complexă* de prima specă, definită ca

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{(1 - x^2 \sin^2 \Phi)^{1/2}} \quad (3a.34)$$

Proiectarea cea mai eficientă se produce când eroarea de aproximare este întinsă în mod egal peste bandă de trecere și bandă de oprire. Filtrele eliptice intrunesc aceste condiții și, în comparație cu celelalte tipuri de filtre, pentru aceleași specificații date, rezultă cu ordinul cel mai mic. Echivalent, pentru un set de specificații și un ordin dat,filtrele eliptice au cea mai mică bandă de tranziție. Filtrele eliptice sunt considerate optimale (întocmai ca filtrelle FIR proiectate cu metoda de schimb Remez), în sensul că, pentru un același ordin N și aceleași frecvențe limită Ω_p, Ω_s , realizează cele mai mici ripluri Δ_p, Δ_s , comparativ cu toate celelalte tipuri de filtre.

Răspunsul în fază al filtrelor eliptice este puternic neliniar în banda de trecere, în special spre capetele acesteia, în comparație cu celelalte tipuri de filtre, motiv pentru care filtrele Butterworth și Cebîșev se preferă în aplicații care necesită o caracteristică de fază bună.

CAPITOLUL 5

EFECTELE LUNGIMII FINITE A CUVINTELOR ÎN FILTRAREA DIGITALĂ

5. 1. Introducere

Teoria filtrelor digitale s-a bazat pe presupunerea că atât semnalele, cât și parametrii filtrelor pot avea orice valoare finită. În realitate, datorită limitării lungimilor cuvintelor din orice sistem digital, sunt permise numai valori discrete ale amplitudinii semnalelor, respectiv coeficienților. Luând în considerație aceste valori discrete în relațiile care caracterizeazăfiltrele, vor rezulta ecuații neliniare, care, în general, nu vor putea fi riguros prelucrate.

Implementarea sistemelor discrete, fără a considera efectele lungimii finite a cuvintelor, inerente în orice implementare digitală, a condus la obținerea unor caracteristici liniare. De fapt, au fost analizate sisteme modelate liniar, dar ale căror realizări digitale sunt implicit neliniare. Această problemă reprezintă un dezavantaj major al filtrelor digitale și, prin urmare, analiza efectelor lungimii finite a cuvintelor asupra performanțelor filtrelor constituie o etapă importantă în proiectarea filtrelor digitale.

În cazul filtrelor recursive, caracteristicile neliniare rezultate din operația de cuantizare din multiplicatoare, pot cauza un comportament oscilatoriu la ieșirea filtrelor, chiar și în absența semnalului de intrare. Mai mult, în sumătoare poate apărea depășirea aritmetică care produce, de asemenea, oscilații la ieșire.

În cazul calculatoarelor care lucrează cu lungimi mari ale cuvintelor (adică au un număr mare de biți disponibili pentru reprezentarea numerelor), efectele cuantizării pot fi nesemnificative. Acestea cresc cu descreșterea numărului de biți. Din acest motiv sunt necesare modele matematice care să permită estimarea efectelor lungimii finite a cuvintelor asupra performanțelor filtrelor. Un model simplu este

cel care se bazează pe presupunerea că erorile de cuantizare sunt mici în comparație cu nivelul semnalului sau al parametrului, adică este o cuantizare „fină” în care erorile pot fi tratate ca zgomot și problema devine liniară [23].

Principalele tipuri de erori de cuantizare care apar în filtrarea digitală sunt:

1. Erori de cuantizare ale semnalului de intrare în conversia analog – digitală (A/D);
2. Erori rezultate din cuantizarea coeficienților filtrelor digitale;
3. Erori rezultate din rotunjirea produselor;
4. Depășirea aritmetică;
5. Oscilații cu cicluri limită.

Dintre aceste tipuri de efecte, erorile de cuantizare ale semnalului de intrare au loc în afara filtrului, înaintea calculelor interne, restul efectelor sunt interne filtrului și influențează metoda prin care sistemul va fi implementat.

De exemplu, pentru un filtru digital de ordinul întâi

$$y[n] = Ay[n-1] + x[n] \quad (5.1)$$

eroarea de tipul 1 se referă la cuantizarea intrării $x[n]$, eroarea de tipul 2 apare în reprezentarea parametrului A iar cea de tipul 3 apare la formarea produsului $Ay[n-1]$, necesar la fiecare iterație.

Elementul de bază dintr-un calculator numeric este circuitul cu două stări echiprobabile, căruia i se asociază o informație de 1 bit. N astfel de dispozitive pot fi cascadate pentru a forma un registru care conține N biți de informație. Implementarea unui filtru digital recursiv de ordinul întâi descris de ecuația (5.1) și redată în figura 5.1, ilustrează cele mai importante operații ce trebuie efectuate.

Ieșirea anterioară $y[n-1]$ este stocată în registrul de ieșire sub forma unui număr pe N biți. Aceasta este multiplicat cu numărul pe N biți care reprezintă coeficientul A care a fost stocat în registrul pentru coeficienți. Produsul $Ay[n-1]$ (după rotunjire la N biți) este adunat la intrarea curentă $x[n]$ (de asemenea un număr pe N biți) pentru a forma ieșirea actuală $y[n]$ care este stocată pentru multiplicare cu A în iterată următoare. Întreaga procedură începe cu o valoare inițială $y[-1]$ stocată în registrul de ieșire. Aceasta poate fi sau nu, egală cu zero. Filtrele de ordin superior pot fi implementate într-un mod similar.

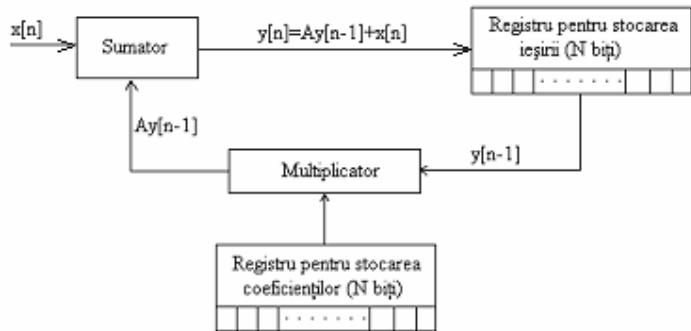


Figura 5.1. Implementarea unui filtru recursiv de ordinul întâi

Diferitele structuri de implementare ale unui sistem descris de ecuații cu diferențe cu coeficienți constanti sunt echivalente dacă furnizează aceeași ieșire pentru o intrare dată, presupunând calculele interne ca fiind efectuate cu precizie infinită. Acestea nu sunt echivalente când sunt realizate cu precizie finită.

Trei factori importanți contribuie la alegerea unei anumite realizări a filtrelor:

- complexitatea calculelor,
- necesarul de memorie,
- efectele lungimii finite a cuvintelor.

Efectul lungimii finite a cuvintelor reprezintă un factor important în implementarea sistemelor digitale de prelucrare a semnalelor și trebuie luat în calcul la realizarea filtrelor digitale, deoarece limitarea numărului de biți conduce la degradarea performanțelor filtrelor digitale. Înainte de a examina aceste efecte, se va prezenta o scurtă introducere în aritmetică digitală.

5.2. Reprezentarea numerelor

În procesarea digitală a semnalelor analogice, eșantioanele semnalului analogic sunt reprezentate în format digital. În principiu, procesul de conversie A/D implică eșantionarea semnalului analogic și reprezentarea eșantioanelor ca secvențe de biți care definesc amplitudinea cuantizată a semnalului. Principala caracteristică a aritmeticii digitale constă în numărul limitat (de obicei fix) de biți folosiți în reprezentarea numerelor. Această constrângere are ca rezultat precizia finită a

calculelor, care conduce la erori și efecte neliniare în comportamentul filtrelor digitale.

În cadrul reprezentării binare a numerelor reale sunt mai multe metode prin care un eșantion al unui semnal analogic poate fi reprezentat în format binar. Clasa reprezentărilor binare poate fi împărțită în reprezentările în virgulă fixă, virgulă mobilă și virgulă mobilă cu blocuri.

5.2.1. Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Reprezentarea numerelor în virgulă fixă este generalizarea reprezentării zecimale, în care numerele din stânga virgulei reprezintă partea întreagă a numărului, iar cele din dreapta virgulei, partea fracționară.

$$x = (b_{-a} \cdots b_{-1} b_0, \cdots b_b)_r = \sum_{i=-a}^b b_i r^{-i} \quad 0 \leq b_i \leq (r-1) \quad (5.2)$$

unde b_i reprezintă cifra, r – baza, $a+1$ – numărul de cifre ale părții întregi și b – numărul de cifre ale părții fracționare.

Datorită vitezei și costului scăzut al părții hard asociate, reprezentarea în virgulă fixă este deseori preferată în computere mai puțin performante și în circuite dedicate care lucrează în timp real. Cea mai cunoscută reprezentare este cea pentru care $r=2$, în care numerele b_i se numesc *numere binare* sau *biți* și pot lua valorile {0,1}, obținându-se *codul binar natural direct*. „Virgula binară” dintre b_0 și b_1 nu există fizic în calculator. Circuitele logice ale acestuia sunt proiectate astfel încât calculele să aibă ca rezultat numere ce corespund poziției virgulei binare. Totuși, în cele ce urmează, se va folosi virgula pentru a sublinia caracterul fracționar al numărului reprezentat.

Folosind un format întreg pe n biți ($a=n-1$, $b=0$), se pot reprezenta întregi fără semn cuprinși în domeniul $0 \div (2^n - 1)$. De obicei se folosește formatul fracționar ($a=0$, $b=n-1$), cu virgula binară între b_0 și b_1 , care permite reprezentarea numerelor în domeniul $0 \div (1 - 2^{-n})$.

Indiferent dacă codul binar reprezintă o fracție, un întreg, sau ambele, primul bit din stânga este numit cel mai semnificativ bit (most significant bit, MSB) iar bitul cel mai din dreapta, cel mai puțin semnificativ bit (least significant bit, LSB). În reprezentarea unei fracții, MSB are o pondere de $2^{-1}=1/2$ iar LSB are o pondere de $2^{-b}=1/2^b$, unde b este numărul de biți pe care este reprezentată fracția. Ponderea $2^{-b}=1/2^b$ desemnată de LSB este numită și *rezoluție*.

Orice întreg sau număr cu parte întreagă și fracționară poate fi reprezentat în format fracționar prin factorizarea termenului r^a în relația (5.2). În această notație un cuvânt de cod de $a+1$ biți, cum ar fi 10011, corespunde numărului întreg

$$A = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 2 + 16 = 19$$

Pe de altă parte, numărul 0,10011 reprezintă o fracție corespunzătoare numărului zecimal

$$B = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{19}{32}$$

Se observă că o deplasare a virgulei binare spre stânga cu n poziții corespunde unei împărțiri a numărului cu 2^n , iar o deplasare a virgulei binare spre dreapta cu n poziții corespunde unei înmulțiri a numărului cu 2^n .

Pentru a transforma un număr zecimal în corespondentul său binar, se procedează astfel: se divide în mod repetat numărul zecimal din stânga virgulei la 2, reținându-se restul. Aceasta, scris în ordine inversă (de la dreapta spre stânga) este reprezentarea binară a părții întregi. Partea din dreapta virgulei se multiplică în mod repetat cu 2, înălțurând de fiecare dată partea zecimală și reținând partea întreagă. Scriind aceasta în ordine normală, (de la stânga la dreapta), se obține reprezentarea binară a părții fracționare.

Exemplul 5.1.

Să se transforme numărul zecimal 627,625 în format binar.

Soluție.

Partea întreagă		Partea zecimală	
$627 : 2 = 313$	1	$0.625 \times 2 = 1.250$	1
$313 : 2 = 156$	1	$0.250 \times 2 = 0.500$	0
$156 : 2 = 78$	0	$0.500 \times 2 = 1.000$	1
$78 : 2 = 39$	0	$0.000 \times 2 = 0.000$	0
$39 : 2 = 19$	1		
$19 : 2 = 9$	1		
$9 : 2 = 4$	1		
$4 : 2 = 2$	0		
$2 : 2 = 1$	0		
$1 : 2 = 0$	1		

Prin urmare $(627,625)_{10} = (1001110011,101)_2$

Operațiile cu numere binare se execută similar celor zecimale.

1. Adunarea
 $0 + 0 = 0$
 $0 + 1 = 1$
 $1 + 0 = 1$
 $1 + 1 = 0$ se transportă 1
2. Scăderea
 $0 - 0 = 0$
 $1 - 0 = 1$
 $0 - 1 = 1$ se importă 1
 $1 - 1 = 0$
3. Împărțirea
 $0 \times 0 = 0$
 $1 \times 0 = 0$
 $0 \times 1 = 0$
 $1 \times 1 = 1$
4. Împărțirea
 $1 : 1 = 1$
 $0 : 1 = 0$
 împărțirea la 0 nu este definită.

Aritmetica în virgulă fixă este potrivită atât pentru operații cu numere întregi, cât și fracționare.

Dacă este necesară rotunjirea produsului a două numere, este mai bine a se limita reprezentarea în virgulă fixă a numerelor fracționare, decât a celor care au atât parte întreagă, cât și fracționară, deoarece reducerea numărului de biți ai părții întregi ar cauza erori mari.

În conversia semnalelor analogice bipolare, este necesar un bit adițional pentru a purta informația de semn. De obicei cel mai semnificativ bit este rezervat semnului numărului, cu convenția ca zero să indice un număr pozitiv, iar unu, un număr negativ. Rezultatul este un *cod bipolar*. Există mai multe posibilități de reprezentare a codurilor bipolare binare, alegerea dintre acestea făcându-se în funcție de avantajele și dezavantajele pe care le prezintă fiecare pentru aplicația respectivă. Patru metode sunt frecvent folosite pentru reprezentarea numerelor bipolare. În continuare se va considera că numerele sunt reprezentate pe $N=b+1$ biți, din care unul pentru semn.

Formatul mărime cu semn sau semn – valoare este cea mai simplă metodă pentru reprezentarea numerelor cu semn în format digital. Un zero în poziția MSB reprezintă un număr pozitiv, iar un unu în aceeași poziție

reprezintă un număr negativ. Restul de b biți reprezintă *modulul* sau *amplitudinea* numărului.

În cazul numerelor fracționare, reprezentarea mărime cu semn pentru un număr pozitiv $x \geq 0$ este de forma

$$(x)_{ms} = 0.b_1b_2\dots b_b, \quad (5.3)$$

iar pentru numărul negativ $x_N = -x = -0.b_1b_2\dots b_b$, de forma

$$(x_N)_{ms} = 1.b_1b_2\dots b_b, \quad (5.4)$$

Așa cum s-a precizat deja, virgula nu există fizic în reprezentarea numărului, dar, în cele ce urmează va fi utilizată pentru a specifica numerele fracționare. Se observă că în acest format zero are două reprezentări: 0,0...0 și 1,00...0.

Valoarea zecimală a unui număr fracționar pozitiv este

$$(x)_{ms} = \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i}, \quad (5.5)$$

iar a unui număr fracționar negativ este

$$(x_N)_{ms} = -\sum_{i=1}^b b_i 2^{-i}. \quad (5.6)$$

Modulul unui număr fracționar reprezentat în formatul mărime cu semn este dat de

$$|x| = |x_N| = \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i}. \quad (5.7)$$

Reprezentarea în *complement față de unu* este identică celei în reprezentarea mărime cu semn pentru numere pozitive, dar diferă prin modul cum sunt formate numerele negative. În acest format, un număr negativ este obținut prin complementarea numărului pozitiv corespunzător.

În cazul formatului fracționar, numerele pozitive se reprezintă ca în relația (5.3), iar cele negative $x_N = -x = -0.b_1b_2\dots b_b$ sub forma

$$(x_N)_{1C} = \overline{0.b_1b_2\dots b_b} = \overline{1.b_1b_2\dots b_b} \quad (5.8)$$

Plecând de la relația (5.8), reprezentarea în complement față de unu a unui număr negativ fracționar mai poate fi exprimată în forma

$$(x_N)_{1C} = 1 \times 2^0 + \sum_{i=1}^b (1-b_i) 2^{-i} = 2 - 2^{-b} - |x| \quad (5.9)$$

Se observă ambiguitate în reprezentarea lui zero, ca 0,0...0 sau 1,1...1.

Modulul numărului negativ $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de unu este

$$|x_N| = 1 - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} - 2^{-b} \quad (5.10)$$

Valoarea zecimală a numărului negativ $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de unu este

$$(x_N)_{1C} = -1 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b} \quad (5.11)$$

Spre exemplu, reprezentarea lui $-3/8$ este 1,100, care este complementul față de unu al lui 0,011 (3/8).

Reprezentarea în *complement față de doi* este identică cu formatul mărime cu semn în cazul numerelor pozitive. Prin urmare numerele pozitive sunt reprezentate cu un zero în poziția bitului de semn. Pentru a obține reprezentarea în complement față de doi a unui număr negativ, se scrie modulul acestuia în formatul mărime cu semn, se inversează bițiile acestei reprezentări și se adună o unitate logică în poziția LSB.

Similar, un număr fracționar pozitiv se reprezintă sub forma (5.3), iar numărul fracționar negativ $x_N = -x = -0, b_1 b_2 \cdots b_b$, sub forma

$$(x_N)_{2c} = \bar{0}, \bar{b}_1 \bar{b}_2 \cdots \bar{b}_b + 0,0 \cdots 01 \quad (5.12)$$

Semnul “+” indică adunarea modulo 2 care ignoră bitul de transport, dacă acesta este prezent în MSB.

Plecând de la relația (5.12), reprezentarea în complement față de doi a unui număr fracționar negativ mai poate fi exprimată în forma

$$(x_N)_{2C} = 1 + \sum_{i=1}^b (1 - b_i) 2^{-i} + 2^{-b} = 2 - |x|, \quad (5.12')$$

adică, un număr fracționar negativ este complementul față de doi al numărului pozitiv corespunzător, care se obține scăzând numărul pozitiv din 2, reprezentat în binar. De aici provine denumirea formatului.

Din (5.9) și (5.12') rezultă

$$(x_N)_{2C} = (x_N)_{1C} + 2^{-b} \quad (5.13)$$

Valoarea zecimală a unui număr $b_0, b_1 b_2 \cdots b_b$ reprezentat în complement față de doi, este

$$(x_{2C})_{10} = -b_0 2^0 + \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (5.14)$$

unde $b_0 = 0$, pentru numere pozitive și $b_0 = 1$, pentru numere negative.

Modului numărului negativ reprezentat în complement față de doi este

$$|x_N| = 1 - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} \quad (5.15)$$

De exemplu, reprezentarea în complement față de doi a numărului $-3/8$ se obține din complementarea lui $0,011$ ($3/8$), rezultând $1,100$, și apoi adăugând $0,001$. Rezultatul final este $1,101$.

Codul binar deplasat sau offsetul binar este similar codului binar direct, obținându-se din acesta prin deplasarea în domeniul valorilor negative cu jumătate din întreaga scală. Cu $b+1$ biți se pot reprezenta 2^{b+1} numere. Pentru un cod bipolar există $2M$ numere, cu $M=2^b$, cuprinse în intervalul $-2^b \div (2^b - 1)$ pentru numere întregi și în intervalul $-1 \div (1 - 2^{-b})$ pentru numere fraționare. În acest format cel mai mic număr negativ este reprezentat de un număr format din $b+1$ biți de zero iar cel mai mare număr pozitiv este format din $b+1$ biți de unu. În acest caz zero are o singură reprezentare și, prin urmare, se evită ambiguitatea întâlnită la formatul mărimii cu semn. Marele dezavantaj al acestei notații este dat de posibilele erori ce pot apărea la citirea MSB-ului, în loc de unu, zero sau invers, rezultând o eroare de amplitudine mare.

Dacă se compară formatul complement față de doi și offsetul binar, se constată că ele diferă prin MSB și, prin urmare, este ușor să se trece de la o reprezentare la alta.

În Tabelul 5.1 sunt date codurile bipolare prezentate pentru reprezentarea numerelor întregi pe 4 biți, dintre care unul pentru semn.

TABEL 5.1 Coduri bipolare

Număr	Formatul mărimii cu semn	Offset binar	Complement față de doi	Complement față de unu
7	0111	1111	0111	0111
6	0110	1110	0110	0110
5	0101	1101	0101	0101
4	0100	1100	0100	0100
3	0011	1011	0011	0011
2	0010	1010	0010	0010
1	0001	1001	0001	0001
0	0000	1000	0000	0000

0	1000	1000	0000	1111
-1	1001	0111	1111	1110
-2	1010	0110	1110	1101
-3	1011	0101	1101	1100
-4	1100	0100	1100	1011
-5	1101	0011	1011	1010
-6	1110	0010	1010	1001
-7	1111	0001	1001	1000
-8	-	0000	-	-

În Tabelul 5.2 sunt date, comparativ, diferite reprezentări ale numerelor fracționare pentru o lungime de 3 biți a cuvintelor.

Tabelul 5.2

Număr binar	Echivalentul zecimal folosind reprezentarea		
	Mărime și semn	Complement față de 1	Complement față de 2
0,11	3 / 4	3 / 4	3 / 4
0,10	2 / 4	2 / 4	2 / 4
0,01	1 / 4	1 / 4	1 / 4
0,00	0	0	0
1,00	- 0	- 3 / 4	- 4 / 4 = - 1
1,01	-1 / 4	- 2 / 4	- 3 / 4
1,10	- 2 / 4	- 1 / 4	- 2 / 4
1,11	- 3 / 4	- 0	- 1 / 4

Din tabel se observă, aşa cum s-a mai specificat, că există două reprezentări pentru zero în format mărime cu semn și complement față de 1 și nici o reprezentare pentru -1. Formatul complement față de 2 are o singură reprezentare pentru 0 și poate reprezenta numere cuprinse între -1 și $1 - 2^{-2}$ sau, în general, între -1 și $1 - 2^{-(N-1)}$ pentru un registru de N biți. Reprezentarea în *complement față de 2* este adesea utilizată în implementarea filtrelor digitale datorită ușurinței efectuării operațiilor de adunare și scădere, caz în care descăzutul se adună cu complementul față de doi a scăzătorului.

Diferența dintre numărul maxim și cel minim ce poate fi reprezentată se numește *domeniu dinamic*.

Exemplul 5.2.

Folosind reprezentarea în complement față de 2 pe 4 biți să se efectueze operațiile a) A - B și b) B - A unde A = 0,250 și B = 0,625

Soluție

a)	zecimal	complement față de 2
	0,250 -	0,010 +
	<u>0,625</u>	<u>1,011</u>
	-0,375	1,101 = -0,375

b)	0,650 -	0,101 +
	<u>0,250</u>	<u>1,110</u>
	0,375	0,011 = 0,375

Se observă că în reprezentarea în complement față de 2 bitul de transport în poziția cea mai semnificativă este neglijat.

Adunarea și scăderea în complement față de 1 sunt similare, dar bitul de transport din poziția cea mai semnificativă este deplasat în poziția celui mai puțin semnificativ bit.

De exemplu, $\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$. În formatul complement față de unu, transportul din MSB, dacă este prezent, este purtat spre LSB. Astfel, calculul $\frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$ devine $0,100 \oplus 1,100 = 0,000 \oplus 0,001 = 0,001$.

Adunarea și scăderea în sistemul mărime cu semn sunt mai complexe și, ca urmare, acesta este folosit mai mult la multiplicare, care se efectuează prin multiplicarea modulelor și stabilind semnul produsului.

Exemplul 5.3.

Să se multiplice numerele 0,625 și 0,250 folosind reprezentarea mărime cu semn.

Soluție.

Zecimal	Mărime cu semn
0,625	0,101
<u>0,250</u>	<u>0,010</u>
0000	000
3125	101
<u>1250</u>	<u>000</u>
0,156250	0,001010 = 0,156250

Multiplicarea în aritmetică complement față de 1 și față de 2 este mai dificilă și necesită un hard sau algoritmi speciali.

Dacă rezultatul unei operații aritmetice depășește numărul maxim ce poate fi reprezentat pe b biți, apare *depășirea*. În procesarea digitală se folosește, de obicei, formatul fracționar, numeralele care reprezintă mărimile ce intervin în procesare și rezultatele operațiilor aritmetice sunt scalate, astfel încât modulul lor să nu depășească valoarea 1.

La multiplicarea numerelor fracționare, nu există probleme de depășire în cele trei aritmetici. Depășirea poate apărea numai când suma numerelor fracționare este mai mare decât 1. Dacă depășirea apare într-o etapă intermediară a adunării, în final nu va exista depășire, cu condiția ca valoarea absolută a rezultatului final să fie subunitară.

Exemplul 5.4.

Să se adune $0,3125 + 0,7500 + (-0,6250)$ folosind aritmetică în complement față de 1 pe cinci biți.

Soluție.

zecimal	complement față de 1	
0,3125	0,0101	
$+0,7500$	$0,1100$	
<hr/>	<hr/>	
1,0625	1,0001	→ incorect, MSB = 1 implică număr negativ
$-0,6250$	$1,0101$	
<hr/>	<hr/>	
0,4375	0,0111	→ ultimul 1 se datorează transportului

Exemplul 5.5.

Să se exprimă fracțiile $\frac{7}{8}$ și $-\frac{7}{8}$ în formatele: mărime cu semn, complement față de 1 și complement față de 2.

Soluție. $x = \frac{7}{8}$, este reprezentat ca $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}$, care, în formatul mărime cu semn conduce la $x = 0,111$, iar $x = -\frac{7}{8}$ este reprezentat ca $x = 1,111$. Reprezentarea în complement față de unu și față de doi a lui $x = \frac{7}{8}$ este aceeași ca formatul mărime cu semn, adică $x = 0,111$. Reprezentarea în complement față de unu a lui $x = -\frac{7}{8}$ este $x_{1C} = 1,000$ și în complement față de doi este $x_{2C} = 1,000 + 0,001 = 1,001$.

Deși sunt posibile o mare varietate de alte reprezentări în virgulă fixă, cele descrise anterior sunt cele mai utilizate în practică. Cele mai multe procesoare de semnal în virgulă fixă folosesc aritmetică în complement față de doi. Aritmetică complementului față de doi este de fapt aritmetică modulo- 2^{b+1} (adică orice număr care depășește domeniul, este redus la acest domeniu, prin scăderea celui mai apropiat multiplu de 2^{b+1}).

La adunarea sau scăderea a două numere în virgulă fixă, fiecare de b biți lungime (cu un bit adițional de semn), rezultatul este un număr de b biți. Dacă rezultatul adunării depășește cel mai mare număr care poate fi reprezentat pe b biți, apare depășirea. Singura metodă pentru evitarea acestei probleme este creșterea numărului de biți din acumulator și, prin urmare, creșterea gamei dinamice care poate fi acoperită.

În general, înmulțirea a două numere în virgulă fixă, fiecare în lungime de b biți, are ca rezultat un produs de lungime $2b$ biți. În aritmetică cu virgulă fixă, produsul este de obicei trunchiat sau rotunjit la b biți, ceea ce conduce la o eroare de trunchiere sau rotunjire cauzată de eliminarea celor mai puțin semnificativi b biți.

Depășirea în cazul adunării numerelor în reprezentarea în aritmetică în virgulă fixă este un dezavantaj cauzat de domeniul dinamic redus. Aritmetică în virgulă mobilă nu prezintă acest dezavantaj.

5.2.2. Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

Reprezentarea în virgulă fixă a numerelor, permite acoperirea unui domeniu dinamic, $x_{\max} - x_{\min}$ cu o rezoluție

$$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m-1}, \quad (5.16)$$

unde $m=2^{b+1}$ este numărul de nivele, iar $b+1$ numărul de biți. O caracteristică de bază a reprezentării în virgulă fixă este că rezoluția este fixă. În plus, Δ crește direct proporțional cu creșterea domeniului dinamic.

Reprezentarea în virgulă mobilă poate fi folosită ca o metodă de acoperire a unui domeniu dinamic mai larg. Reprezentarea în virgulă mobilă cel mai des întâlnită în practică constă dintr-o mantisă M , care este partea fracționară a numărului și se încadrează în domeniul $1/2 \leq M < 1$, înmulțită cu factorul exponential 2^E unde exponentul E este un întreg pozitiv sau negativ. Un număr X , este reprezentat ca: $X = M \cdot 2^E$.

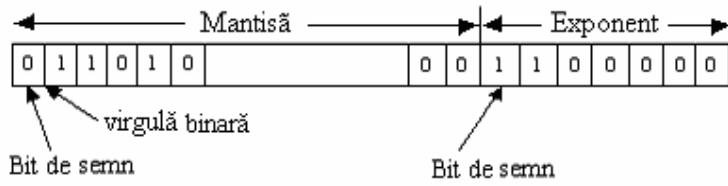


Figura 5.2 Reprezentarea în virgulă mobilă

Mantisa și exponentul necesită fiecare câte un bit de semn pentru reprezentarea numerelor pozitive sau negative. Deoarece mantisa este o fracție cu semn, se poate folosi oricare din reprezentările în virgulă fixă descrise anterior.

De exemplu, numărul $X_1=5$ este reprezentat de următoarea mantisă și exponent:

$$M_1=0,101000$$

$$E_1=011$$

în timp ce numărul $X_2=\frac{3}{8}$ este reprezentat de următoarea mantisă și exponent:

$$M_2=0,110000$$

$$E_2=101$$

Dacă cele două numere se înmulțesc, mantisele sunt înmulțite și exponenții adunați. Prin urmare produsul celor două numere date mai sus este:

$$X_1 \cdot X_2 = M_1 \cdot M_2 \cdot 2^{E_1+E_2} = (0,011110) \cdot 2^{010} = (0,111100) \cdot 2^{001}$$

Împărțirea a două numere reprezentate în virgulă mobilă se efectuează prin împărțirea mantiselor și scăderea exponenților.

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot 2^{(E_2-E_1)}$$

Adunarea a două numere în virgulă mobilă necesită ca exponenții să fie egali. Aceasta se poate obține deplasând virgula binară a mantisei celui mai mic număr spre stânga și compensând prin creșterea corespunzătoare a exponentului. Atunci numărul X_2 poate fi exprimat în forma

$$M_2=0,000011$$

$$E_2=011$$

Cu $E_1=E_2$, se pot aduna cele două numere X_1 și X_2 . Rezultatul este

$$X_1 + X_2 = (0,101011) \cdot 2^{011}$$

Se observă că operația de deplasare, impusă de egalarea exponentilor lui X_2 și X_1 , poate conduce la o precizie mai mică în reprezentarea lui X_2 . În exemplul anterior, mantisa pe șase biți a fost suficient de lungă pentru a se face deplasarea a patru biți la dreapta pentru M_2 , fără a pierde nici unul. Totuși o deplasare a cinci biți va cauza pierderea unui singur bit iar deplasarea a șase biți va conduce la mantisa $M_2=0,000000$; de aceea aceasta va trebui rotunjită după deplasare astfel încât $M_2=0,000001$.

Eroarea de depășire apare la multiplicarea a două numere în virgulă mobilă când suma exponentilor depășește domeniul dinamic al reprezentării în virgulă fixă a exponentului.

Comparând reprezentarea în virgulă fixă cu cea în virgulă mobilă, cu același număr total de biți, rezultă că reprezentarea în virgulă mobilă permite acoperirea unui domeniu mai larg prin varierea rezoluției în acel interval. Rezoluția scade odată cu creșterea mărimii numerelor succesive. Cu alte cuvinte, distanța succesivă dintre două numere reprezentate în virgulă mobilă crește odată cu creșterea numerelor în mărime. Astfel, pentru acoperirea același domeniu dinamic cu ambele reprezentări, în virgulă fixă și virgulă mobilă, reprezentarea în virgulă mobilă oferă rezoluție fină pentru numere mici, dar rezoluție slabă pentru numere mari, spre deosebire de reprezentarea în virgulă fixă, care oferă o rezoluție uniformă în reprezentarea numerelor.

De exemplu, pentru un calculator care lucrează pe 32 biți, este posibilă reprezentarea a 2^{32} numere. Dacă se dorește reprezentarea întregilor pozitivi începând cu zero, cel mai mare număr întreg ce poate fi reprezentat este: $2^{32}-1=4.294.967.295$. Distanța dintre două numere succesive (rezoluția) este 1. Altfel, se poate folosi bitul cel mai din stânga ca bit de semn și ceilalți 31 de biți rămași pentru valoare. Într-un astfel de caz reprezentarea în virgulă fixă permite acoperirea domeniului

$$-(2^{31}-1) = -2.147.483.647 \text{ la } (2^{31}-1) = 2.147.483.647$$

tot cu o rezoluție de 1. Dacă, însă, se alocă 10 biți pentru partea fracționară, 21 de biți pentru partea întreagă și un bit pentru semn, această reprezentare permite acoperirea domeniului dinamic:

$$-(2^{31}-1) \cdot 2^{-10} = -(2^{21}-2^{-10}) \text{ la } (2^{31}-1) \cdot 2^{-10} = 2^{21}-2^{-10} \text{ adică} \\ \text{de la } -2.097.151,999 \text{ la } 2.097.151,999$$

În acest caz, rezoluția este 2^{-10} . Prin urmare domeniul dinamic a fost scăzut cu un factor de aproximativ 1000 (2^{10} mai exact), în timp ce rezoluția a crescut cu același factor.

Pentru comparație, se presupune că cei 32 biți ai cuvântului sunt folosiți pentru a reprezenta numere în virgulă mobilă astfel: mantisa pe 23 de biți plus un bit de semn și exponentul cu 7 biți plus un bit de semn. Cel mai mic număr, în modul, va avea reprezentarea:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{semn} & & 23 \text{ biți} & & \text{semn} & & 7 \text{ biți} \\ 0, & & 100\ldots0 & & 1 & & 1111111 = \frac{1}{2} \times 2^{-127} \approx 0,3 \times 10^{-38} \end{array}$$

În celalătă extremă, cel mai mare număr care poate fi reprezentat cu acest format în virgulă mobilă este:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{semn} & & 23 \text{ biți} & & \text{semn} & & 7 \text{ biți} \\ 0, & & 11\ldots1 & & 0 & & 1111111 = (1-2^{-23}) \times 2^{127} \approx 1,7 \times 10^{38} \end{array}$$

S-a obținut un domeniu dinamic de aproximativ 10^{76} , dar cu o rezoluție variabilă, adică rezoluție fină pentru numere mici și rezoluție slabă pentru numere mari.

5.2.3. Reprezentarea în virgulă mobilă pe bloc

Acest mod de reprezentare a numerelor este un hibrid între sistemele cu virgulă fixă și cele cu virgulă mobilă. În acest caz, în loc ca fiecare număr să fie reprezentat individual, ca în cazul sistemelor cu virgulă mobilă, un bloc sau un sir de numere are un exponent fix asociat. Acest exponent fix este obținut din examinarea tuturor numerelor din bloc și reprezentarea celui mai mare număr ca un număr cu virgulă mobilă cu o mantisă normalizată. Avantajul unui astfel de sistem constă în folosirea unui singur exponent pentru un bloc mare de numere. Astfel sistemul este potrivit pentru implementarea algoritmilor ce necesită un volum mare de calcule.

5.3. Efectele cuantizării în conversia A/D a semnalelor

Operațiile de bază îndeplinite de un convertor A/D sunt:

1. Să eșantioneze semnalul în mod periodic și cu rată de eșantionare suficient de mare pentru a evita eroarea alias;
2. Să cuantizeze amplitudinea eșantioanelor într-un set discret de nivele.

Prin urmare, dintr-un semnal analogic $x_a(t)$ eșantionat cu frecvența $F_s=1/T$, unde T este perioada de eșantionare, va rezulta o secvență $x[n]=x_a(nT)$, a cărei amplitudine este cuantizată, rezultând secvența

$$x_q[n] \equiv Q[x[n]] \quad (5.17)$$

unde $x_q[n]$ reprezintă semnalul cuantizat, iar $Q[\bullet]$ operația de cuantizare.

Dacă un semnal al cărui domeniu dinamic este R urmează a fi reprezentat pe $N=b+1$ biți, numărul nivelor de cuantizare ce pot fi reprezentate este de 2^{b+1} . În reprezentarea în virgulă fixă b biți dau 2^b valori ale amplitudinii iar un bit dă informația de semn. Distanța dintre

două nivele adiacente sau pasul de cuantizare este $\Delta = \frac{R}{2^{b+1}}$ [63].

În reprezentarea în virgulă fixă a numerelor fracționare, dacă domeniul dinamic depășește ± 1 , de multe ori este necesară scalarea semnalului, caz în care pasul de cuantizare al semnalului scalat este redus corespunzător la $\Delta_1 = \frac{2}{2^N} = 2^{-b}$.

Exemplul 5. 6.

Să se determine nivelele de cuantizare ale unui semnal continuu cu domeniul dinamic $\pm 20V$ după ce a fost eșantionat și apoi procesat cu un convertor A/D pe $N=4$ biți.

Soluție. Pasul de cuantizare pentru semnalul nescalat este $\Delta = \frac{40}{2^4} = 2,5V$. Pasul de cuantizare pentru semnalul scalat la domeniul ± 1 este $\Delta_1 = \frac{2}{2^4} = 0,125V$ care este $2^{-b} = 2^{-3}$, adică valoarea corespunzătoare unui 1 în poziția bitului cel mai puțin semnificativ.

5.3.1. Cuantizarea semnalului de intrare. Erori rezultate din rotunjire și trunchiere

În executarea calculelor folosind aritmetică în virgulă fixă sau mobilă, apare problema cuantizării numerelor prin trunchiere sau rotunjire de la o reprezentare pe un anumit număr de biți b_n (posibil a fi, la limită, și infinit în cazul unui eșantion al unui semnal analogic) la o alta, pe un număr mai mic de biți, b . Dacă valoarea semnalului se află între două nivele, aceasta poate fi aproximată fie prin cel mai apropiat nivel superior,

fie prin cel mai apropiat nivel inferior. Efectul cuantizării este că introduce o eroare a cărei valoare depinde de numărul de biți din numărul original și de numărul de biți de după cuantizare.

Sunt trei metode de cuantizare frecvent folosite:

- *Rotunjirea*, caz în care valoarea semnalului este aproximată de cel mai apropiat nivel de cuantizare.
- *Trunchierea*, caz în care valoarea semnalului este aproximată de cel mai mare nivel care este inferior sau egal valoric cu eșantionul semnalului.
- *Trunchierea semn – valoare*, care este asemănătoare cu trunchierea pentru numere pozitive, dar valorile negative ale semnalului sunt approximate de cel mai apropiat nivel de cuantizare mai mare sau egal cu semnalul.

Acstea descrieri se aplică cuantizării în aritmetică în virgulă fixă. Cele două metode de trunchiere rezultă din tratările diferite ale numerelor negative în reprezentările: mărime cu semn, complement fată de 1, complement fată de 2.

La un moment dat, nT , eroarea datorată cuantizării este

$$E_i = Q_i[x[n]] - x_a(nT) = x_{qi} - x_a \quad (5.18)$$

unde $i = r$ în cazul rotunjirii și $i = t$ în cazul trunchierii, $x_a = x_a(nT)$ reprezintă valoarea necuantizată a semnalului reprezentată pe $b_n + 1$ biți, iar $Q_i[x[n]] = x_{qi}$, valoarea cuantizată a semnalului reprezentată pe $b + 1$ biți.

Rotunjirea

În cazul rotunjirii

$$E_r = Q_r[x[n]] - x_a(nT) = x_{qr} - x_a \text{ și } \frac{-\Delta}{2} \leq E_r \leq \frac{\Delta}{2}, \Delta = 2^{-b} \quad (5.19)$$

Relația neliniară dintre x_{qr} și x_a este reprezentată în figura 5.3 unde x_a este un semnal cu amplitudine continuă ($b_n = \infty$).

În reprezentarea în virgulă fixă, eroarea de rotunjire satisfacă relația (5.19), indiferent de aritmetică folosită pentru reprezentarea numerelor negative, deoarece rotunjirea este independentă de semn, ea depinzând numai de mărimea numărului.

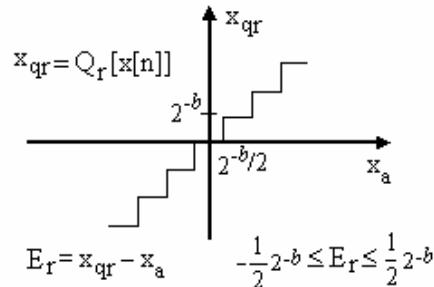


Figura 5.3 Relația dintre valorile cuantizate și necuantizate în cazul rotunjirii

În reprezentarea în virgulă mobilă, mantisa este cea trunchiată sau rotunjită.

$$\text{Dacă } x_a = M_a \cdot 2^E \quad (5.20)$$

$$\text{și } Q_r[x[n]] = M \cdot 2^E \quad (5.21)$$

$$\text{atunci } E_r = Q_r[x[n]] - x_a = (M - M_a)2^E \quad (5.22)$$

$$\text{Dar pentru rotunjire } -\Delta/2 \leq M - M_a \leq \Delta/2 \quad (5.23)$$

și atunci din relația (5.19) rezultă

$$-2^E \Delta/2 \leq E_r \leq 2^E \Delta/2, \quad (5.24)$$

care dă eroarea absolută în virgulă mobilă datorată cuantizării mantisei.

Se definește eroarea relativă ε , astfel încât

$$Q_r[x[n]] = x_a(1 + \varepsilon) \quad (5.25)$$

Datorită rezoluției neuniforme, eroarea corespunzătoare reprezentării în virgulă mobilă este proporțională cu numărul, adică

$$E_r = \varepsilon \cdot x_a \quad (5.26)$$

și relația (5.24) devine

$$-2^E \Delta/2 \leq \varepsilon x_a \leq 2^E \Delta/2 \quad (5.27)$$

sau

$$-2^E \Delta/2 \leq \varepsilon M_a 2^E \leq 2^E \Delta/2 \quad (5.28)$$

adică

$$-\Delta/2 \leq \varepsilon M_a \leq \Delta/2 \quad (5.29)$$

Mantisa satisfacă relația

$$\frac{1}{2} \leq M_a < 1 \quad (5.30)$$

Dacă $M_a = \frac{1}{2}$, din (5.29) se obține domeniul maxim al erorii relative ca fiind

$$-\Delta \leq \varepsilon \leq \Delta \quad (5.31)$$

Trunchierea

Dacă metoda de cuantizare este trunchierea, numărul este aproximat în aritmetică în virgulă fixă, prin cel mai mare nivel care este mai mic sau egal cu valoarea semnalului. Trunchierea numerelor pozitive, negative și relația neliniară dintre x_{qt} și x_a sunt reprezentate în figura 5.4, unde x_a este un semnal cu amplitudine continuă.

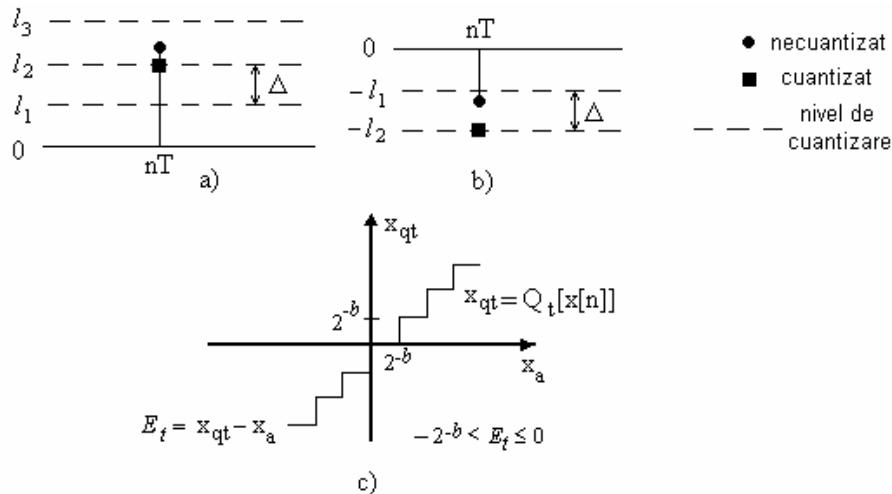


Figura 5.4. Relația dintre valorile cuantizate și necuantizate în cazul trunchierii
a) pentru numere pozitive, b) pentru numere negative, c) caracteristica de trunchiere în complement față de 2

Eroarea de trunchiere $E_t = Q_t[x[n]] - x_a$ este negativă sau zero.

$$-\Delta < E_t \leq 0 \quad (5.32)$$

Acest lucru este valabil pentru toate numerele pozitive reprezentate în formatul mărime cu semn, complement față de 1 și complement față de 2.

În continuare se examinează trunchierea numerelor negative reprezentate în diverse formate. Fie întâi reprezentarea în *complement față de 2*. Se consideră că numărul ce urmează a fi trunchiat este reprezentat

pe $b_n + 1$ biți (la limită, se poate considera că $b_n = \infty$ pentru eșantioane ale unui semnal analogic). Modulul acestui număr negativ este

$$A_1 = 1 - \sum_{i=1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} \quad (5.33)$$

Dacă acesta este trunchiat la b biți, modulul numărului devine

$$A = 1 - \sum_{i=1}^b b_i \cdot 2^{-i} \quad (5.34)$$

Diferența de mărime a modulului numărului negativ rezultată prin trunchiere este

$$A - A_1 = \sum_{i=1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i \cdot 2^{-i} = \sum_{i=b+1}^{b_n} b_i \cdot 2^{-i} \geq 0 \quad (5.35)$$

Deoarece modulul crește prin trunchiere, numărul negativ reprezentat în complement față de 2 devine mai mic. Valoarea maximă a modulului erorii se obține când toți coeficienții b_i sunt egali cu 1, caz în care

$$A - A_1 = 2^{-b} - 2^{-b_n} < \Delta, \quad (5.36)$$

deoarece $\Delta = 2^{-b}$. Prin urmare, în reprezentarea în complement față de 2, eroarea se situează în domeniul

$$-\Delta < E_i \leq 0 \quad (5.37)$$

Situația descrisă anterior este reprezentată în figura 5.4.

În cazul reprezentării numerelor negative în *complement față de 1* pe $b_n + 1$ biți, modulul numărului negativ este

$$A_1 = 1 - \sum_{i=1}^{b_n} b_i 2^{-i} - 2^{-b_n} \quad (5.38)$$

Prin trunchierea la $b+1$ biți, modulul numărului negativ devine

$$A = 1 - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} - 2^{-b}, \quad (5.39)$$

astfel încât diferența acestora este

$$\begin{aligned} A - A_1 &= \sum_{i=1}^{b_n} b_i 2^{-i} - \sum_{i=1}^b b_i 2^{-i} + 2^{-b_n} - 2^{-b} = \\ &= \sum_{i=b+1}^{b_n} b_i 2^{-i} - (2^{-b} - 2^{-b_n}) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

Modulul numerelor negative descrește prin trunchiere, adică, de fapt, acestea cresc. Situația este ilustrată în Figura 5.5. care reprezintă

trunchierea în reprezentarea semn - valoare. Prin urmare, domeniul în care poate lua valori eroarea ce apare prin trunchierea numerelor negative reprezentate în complement față de 1 este

$$0 \leq E_t < \Delta \quad (5.41)$$

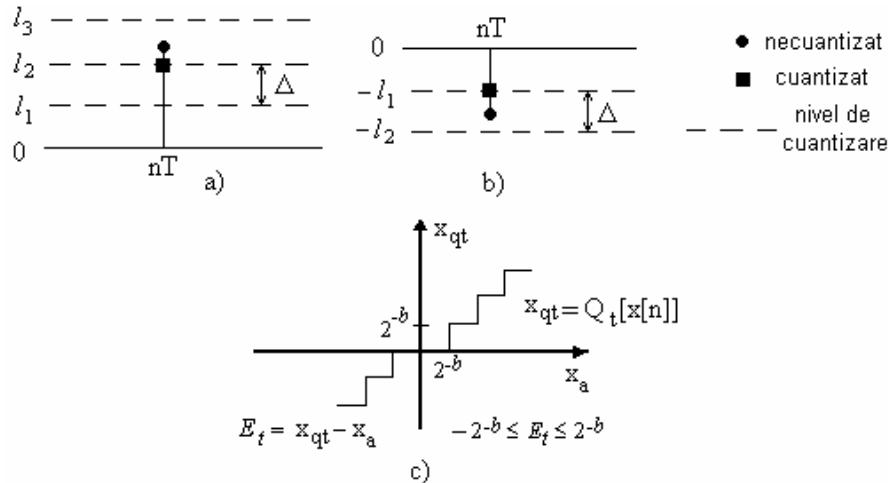


Figura 5.5. Relația dintre valorile cuantizate și necuantizate în cazul trunchierii semn - valoare a) numere pozitive, b) numere negative, c) caracteristica de trunchiere în semn - valoare

În reprezentarea numerelor negative în formatul *mărime cu semn*, biții care reprezintă modulul numărului negativ sunt aceeași cu cei corespunzători numărului pozitiv, diferind numai bitul de semn. Aceasta înseamnă că prin trunchierea unui număr negativ modulul acestuia scade, iar valoarea trunchiată este dată de cel mai apropiat nivel de cuantizare care nu este mai mic decât numărul, situație reprezentată în Figura 5.5.

În continuare se va considera trunchierea mantisei în cazul reprezentării în *virgulă mobilă*.

$$E_t = Q_t[x[n]] - x_a = (M - M_a)2^E \quad (5.42)$$

În reprezentarea în *complement față de 2* a mantisei

$$-\Delta < M - M_a \leq 0 \quad (5.43)$$

$$\text{sau} \quad -2^E \Delta < E_t \leq 0 \quad (5.44)$$

Deoarece $E_t = \varepsilon x_a$, se obține

$$-2^E \Delta < \varepsilon x_a \leq 0 \quad (5.45)$$

sau $-2^E \Delta < \varepsilon M_a 2^E \leq 0$ (5.46)

care implică $-\Delta < \varepsilon M_a \leq 0$ (5.47)

Dacă $M_a = \frac{1}{2}$ se obține domeniul maxim al erorii relative ε , ca fiind

$$-2\Delta < \varepsilon \leq 0 \quad (5.48)$$

Dacă $M_a = -\frac{1}{2}$, domeniul erorii relative este

$$0 \leq \varepsilon < 2\Delta \quad (5.49)$$

În reprezentarea în *complement fătă de 1*, eroarea de trunchiere pentru valori pozitive ale mantisei este:

$$-\Delta < M - M_a \leq 0 \quad (5.50)$$

sau $-2^E \Delta < E_t \leq 0$ (5.51)

Cu $E_t = \varepsilon x_a = \varepsilon M_a 2^E$ (5.52)

și $M_a = \frac{1}{2}$ se obține domeniul maxim al erorii relative pentru M_a pozitiv, ca fiind

$$-2\Delta < \varepsilon \leq 0 \quad (5.53)$$

Pentru valori negative ale mantisei, eroarea este

$$0 \leq M - M_a < \Delta \quad (5.54)$$

sau $0 \leq E_t < 2^E \Delta$ (5.55)

Pentru $M_a = -\frac{1}{2}$, domeniul maxim pentru eroarea relativă este

$$-2\Delta < \varepsilon \leq 0, \quad (5.56)$$

aceeași ca și pentru M_a pozitiv.

Acest lucru este valabil, de asemenea, și pentru cazul în care mantisa este reprezentată în formatul *mărime cu semn*.

5.3.2. Model statistic pentru cuantizarea fină

În calculele aritmetice ce implică cuantizare prin trunchiere sau rotunjire, este convenabil să se adopte o metodă statistică pentru caracterizarea erorilor rezultate. Cuantizorul poate fi modelat prin

introducerea unui zgomot aditiv $e[n]$ ce se suprapune peste semnalul $x[n]$, cu respectarea unor ipoteze ce vor fi specificate în cele ce urmează, adică

$$Q[x[n]] = x_q[n] = x[n] + e[n] \quad (5.57)$$

unde $e[n] = E_r$ pentru rotunjire și $e[n] = E_t$ pentru trunchiere, iar modelul este ilustrat în figura 5.6.

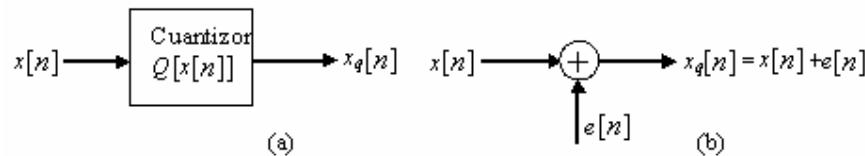


Figura 5.6. Modelul zgomotului aditiv pentru procesul liniar de cuantizare:
(a) sistemul real; (b) model de cuantizare

Cum $x[n]$ poate fi orice număr care se încadrează în domeniul cuantizorului, eroarea de cuantizare este ușual modelată ca o variabilă aleatoare care se încadrează în limitele specificate anterior pentru erori. Mai mult, în practică, $b_n >> b$, deci mărimea 2^{-b_n} poate fi neglijată în relațiile precedente. În aceste condiții, erorile de cuantizare ale numerelor reprezentate în virgulă fixă și virgulă mobilă se încadrează în intervalele prezentate în Tabelul 5.3.

Tabelul 5.3 Intervalele erorii de cuantizare

Tipul cuantizării	Tipul de aritmetică	Numere reprezentate cu virgulă fixă	Numere reprezentate cu virgulă mobilă
Rotunjire	-Semn-valoare -Complement față de 1 -Complement față de 2	$-2^{-b-1} \leq E_r \leq 2^{-b-1}$	$-2^{-b} \leq \varepsilon \leq 2^{-b}$
Trunchiere	Complement față de 2	$-2^{-b} < E_t \leq 0$	$-2^{-b+1} < \varepsilon \leq 0, x > 0$ $0 \leq \varepsilon < 2^{-b+1}, x < 0$
Trunchiere semn-valoare	-Complement față de 1 -Semn-valoare	$-2^{-b} < E_t \leq 0, x > 0$ $0 \leq E_t < 2^{-b}, x < 0$	$-2^{-b+1} < \varepsilon \leq 0$

În aceste condiții, funcțiile densitate de probabilitate pentru erorile de rotunjire și trunchiere pentru formatele de reprezentare în virgulă fixă prezentate sunt ilustrate în figura 5.7 [49]. Se observă că în cazul trunchierii în formatul complement față de doi, valoarea medie a erorii are o deplasare de $2^{-b}/2$, în timp ce pentru celelalte cazuri ilustrate anterior, eroarea are o valoare medie nulă.

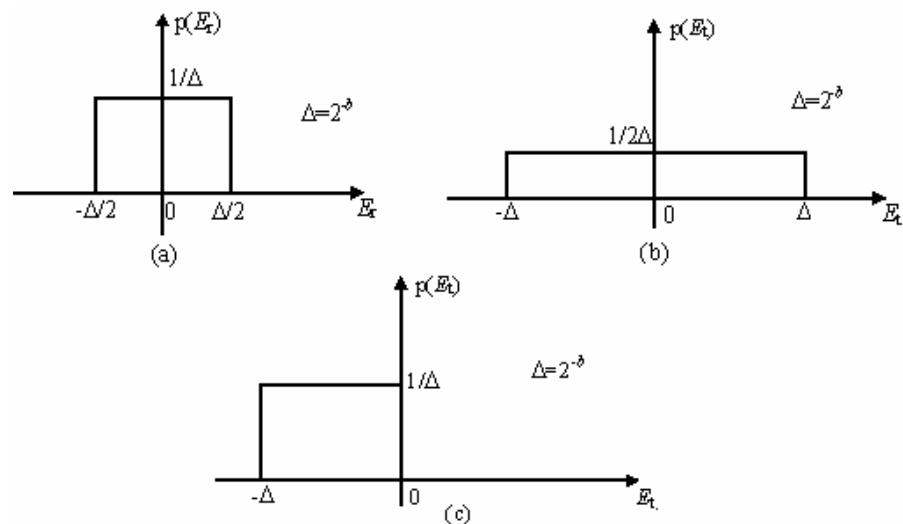


Figura 5.7 Caracterizarea statistică a erorilor de cuantizare. Funcțiile densitate de probabilitate ale (a) erorii de rotunjire; (b) erorii de trunchiere în formatul semn-valoare; (c) erorii de trunchiere în formatul complement față de doi

Analiza rezultatelor din Tabelul 5.3 și a expresiilor densităților de repartiție pentru erorile de rotunjire și trunchiere conduce la concluzia că rotunjirea este preferată altor metode de cuantizare, din următoarele motive[34]:

- semnalul de eroare este independent de tipul de aritmetică;
- media semnalului eroare este zero;
- nici o altă metodă de cuantizare nu conduce la o dispersie mai mică.

Cuantizarea reprezintă o operație neliniară și ireversibilă.

Efectele erorii de cuantizare datorate rotunjirii pot fi evidențiate dacă $e[n]$ se consideră o secvență aleatoare care satisface următoarele proprietăți:

1. Eroarea $e[n]$ este uniform distribuită în domeniul $[-\Delta/2, \Delta/2]$,
2. Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este o secvență de zgomot alb staționar, pentru care $e[n]$ și $e[m]$, pentru $m \neq n$, sunt necorelate.
3. Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este necorelată cu semnalul $x[n]$.

Ipotezele de mai sus sunt îndeplinite când pasul de cuantizare este mic și semnalul $x[n]$ traversează mai multe nivele de cuantizare între două eșantioane succesive. Efectul zgomotului aditiv, $e[n]$, asupra semnalului dorit poate fi studiat evaluând raportul semnal-zgomot (SNR) care, pe scară logaritmică (în decibeli), este

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_x}{P_n} \quad (5.58)$$

unde P_x este puterea semnalului, iar P_n este puterea zgomotului de cuantizare.

Dacă eroarea de cuantizare este uniform distribuită în domeniul $(-\Delta/2, \Delta/2)$, aşa cum este reprezentat în figura 5.7a, valoarea medie a erorii este zero și dispersia (puterea zgomotului de cuantizare) este

$$P_n = \sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e) de = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (5.59)$$

Prin urmare, SNR este

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \frac{P_x}{P_n} = 10 \cdot \log_{10} P_x + 10 \cdot \log_{10} (12 \times 2^{2b}) \quad (5.60)$$

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} P_x + 10,8 + 6b \quad (5.61)$$

Această expresie pentru SNR indică faptul că fiecare bit folosit în convertorul A/D sau cuantizor, mărește raportul semnal/zgomot de cuantizare cu 6 dB sau reduce puterea zgomotului de cuantizare cu 6 dB.

De exemplu, dacă se stabilește nivelul puterii zgomotului de cuantizare la -70 dB față de nivelul puterii semnalului, trebuie folosit un cuantizor pe 10 biți (sau convertor pe 10 biți).

Pentru a analiza efectul zgomotului de cuantizare asupra răspunsului unui sistem discret, liniar, invariant în timp, se consideră un astfel de sistem caracterizat de funcția pondere $h[n]$, la intrarea căruia se aplică semnalul cuantizat $x_q[n] = x[n] + e[n]$. Datorită liniarității sistemului, ieșirea sa este suma răspunsurilor sistemului la semnalul necuantizat $x[n]$ și la eroarea de cuantizare $e[n]$. Notând semnalul de

ieșire datorat zgomotului sau erorii de cuantizare cu $z[n]$, conform figurii 5.8, se poate scrie

$$z[n] = \sum_{k=0}^n h[k]e[n-k] \quad (5.62)$$

relație din care poate fi determinată dispersia zgomotului de ieșire cauzat de eroarea de cuantizare.

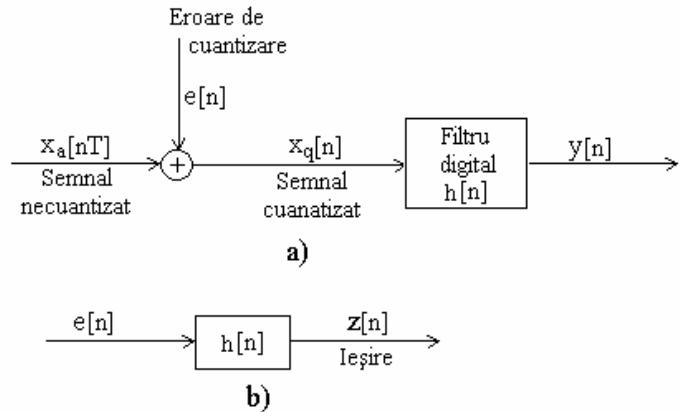


Figura 5.8. Model pentru eroarea datorată cuantizării semnalului de intrare
a) Modelul de eroare, b) ieșirea datorată zgomotului de cuantizare
b)

În cazul cuantizării prin rotunjire, ținând seama de ipotezele asumate pentru eroare și de relația (5.59), dispersia fiecărui termen din suma (5.62) este

$$\sigma_e^2 h^2[k] = \frac{\Delta^2}{12} h^2[k] \quad (5.63)$$

Deoarece dispersia unei sume de variabile aleatoare independente este egală cu suma dispersiilor lor, rezultă că, în ipoteza că erorile de cuantizare s-au presupus independente la diferite momente de timp, dispersia ieșirii $z[n]$ este

$$\sigma_{0z}^2[n] = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^n h^2[k] \quad (5.64)$$

Dispersia crește până la o valoare de regim permanent cu condiția ca filtrul să fie stabil. Dispersia de regim permanent se calculează cu relația

$$\sigma_{ozss}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{0z}^2[n] = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \quad (5.65)$$

O altă formă pentru expresia dispersiei de regim permanent a ieșirii poate fi obținută cu ajutorul funcției de sistem a filtrului, $H(z)$, în felul următor:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (5.66)$$

$$H(z^{-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]z^m \quad (5.67)$$

Prin urmare,

$$H(z)H(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m]z^{m-k} \quad (5.68)$$

Multiplicând ambii membri cu z^{-1} și integrând după z pe un contur închis ce conține originea în planul z , rezultă

$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz = \int_c \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m]z^{m-k-1} dz \quad (5.69)$$

Când conturul c este în regiunea de convergență pentru $H(z)$ și $H(z^{-1})$, se poate schimba ordinea de sumare și integrare din membrul drept. Se observă că cercul unitate este inclus în domeniul rezultat din intersecția regiunilor de convergență pentru $H(z)$ și $H(z^{-1})$, cu condiția ca $H(z)$ să fie stabil. Astfel se justifică alegerea cercului unitate drept contur de integrare. Relația (5.69) devine

$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} h[k]h[m] \int_c z^{m-k-1} dz \quad (5.70)$$

Deoarece conturul de integrare conține originea planului Z , conform teoremei lui Cauchy [48]

$$\int_c z^{m-k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} \quad (5.71)$$

Cu (5.71), relația (5.70) devine

$$\int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz = 2\pi j \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \quad (5.72)$$

și, deci,

$$\sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] = \frac{1}{2\pi j} \int_c H(z)H(z^{-1})z^{-1} dz \quad (5.73)$$

Din (5.65) și (5.73) rezultă următoarea expresie pentru dispersia de regim permanent

$$\sigma_{ozss}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{\substack{\text{polii din} \\ \text{cercul unitate}}} \text{reziduurile lui } H(z)H(z^{-1})z^{-1}, \quad (5.74)$$

expresie care, de multe ori, este mai ușor de evaluat decât (5.65).

Exemplul 5. 7.

Să se determine dispersia de regim permanent a zgomotului de la ieșirea unui sistem cauzal, stabil, de ordinul întâi, datorat cuantizării semnalului de intrare.

Soluție. Ecuația cu diferențe care caracterizează sistemul este $y[n] = Ay[n-1] + x[n]$, cu $|A| < 1$. Răspunsul la impuls al acestui sistem este $h[n] = A^n u[n]$. Din (5.65) rezultă dispersia zgomotului de ieșire

$$\sigma_{oz}^2[n] = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=0}^n A^{2k} = \frac{\Delta^2}{12} \frac{1 - A^{2(n+1)}}{1 - A^2}$$

Dispersia de regim permanent, când $n \rightarrow \infty$, este $\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{12(1 - A^2)}$.

$H(z) = \frac{1}{1 - Az^{-1}}$, cu un pol în $z = A$, și $H(z^{-1}) = \frac{1}{1 - Az}$ cu un pol în $z = \frac{1}{A}$ în afara cercului unitate. Conform relației (5.74) rezultă

$$\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum \left(\text{reziduurile lui } \frac{z}{z - A} \cdot \frac{1}{1 - Az} \cdot z^{-1} \Big|_{z=A} \right) = \frac{\Delta^2}{12(1 - A^2)}$$

identică, evident, cu expresia obținută anterior.

Pentru sisteme de ordin superior este mai ușor a se folosi relația (5.74) decât (5.65) din cauza complexității expresiei răspunsului la impuls.

5.4. Erori cauzate de cuantizarea coeficientilor filtrelor

5.4.1. Efectul cuantizării parametrilor filtrului asupra stabilității. Analiza sensibilității la cuantizarea coeficienților filtrelor IIR

Pentru a asigura stabilitatea unui filtru recursiv cauzal, toți polii acestuia trebuie să fie în interiorul cercului unitate din planul Z. În multe

cazuri este de dorit ca un pol sau o pereche de poli să fie în apropierea cercului unitate. Dacă în acest caz pasul de cuantizare este atât de mare încât reprezentarea polilor să fie pe sau în afara cercului unitate, filtrul astfel implementat devine instabil.

Fie, de exemplu, un filtru de ordinul întâi

$$y[n] = A y[n-1] + x[n] \quad (5.75)$$

și fie $N = b+1$, numărul bițiilor disponibili reprezentării coeficientului A care, pentru un filtru stabil, este cuprins în domeniul $-1 < A < 1$.

Mărimea pasului de cuantizare este $\Delta = 2^{-b}$. Dacă $\varepsilon = 1 - A$ este distanța de la pol la cercul unitate, cea mai mică valoare a lui ε care poate fi precis reprezentată este $\Delta = 2^{-b}$. Pentru asigurarea stabilității trebuie ca pasul de cuantizare să fie mai mic sau egal cu distanța de la pol la cercul unitate, $\Delta \leq \varepsilon$, adică $2^{-N+1} \leq (1 - A)$, de unde rezultă

$$N \geq -\frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} 2} + 1 = -\frac{\log_{10}(1 - A)}{\log_{10} 2} + 1 \quad (5.76)$$

Exemplul 5. 8.

a) Fie $A = e^{-aT}$, unde $a = 1 \text{ rad/s}$, $T = 10^3$ secunde. Dacă se folosește trunchierea ca metodă de cuantizare, să se determine numărul minim de biți, N , necesar reprezentării lui A , astfel încât să nu rezulte instabilitate.

b) Dacă sunt disponibili 9 biți și $T = 10^3$ secunde, să se găsească a , astfel încât filtrul să fie stabil.

Soluție. a) $1 - A = 1 - e^{-aT} \approx aT$, prin urmare, $N \geq -\frac{\log_{10} aT}{\log_{10} 2} + 1 = 11$ biți

$$\text{b) } 9 = -\frac{\log_{10}(10^{-3} \cdot a)}{0.3} + 1 \text{ care necesită } a = 4 \text{ rad/secundă.}$$

Pentru filtrele de ordin superior localizarea polilor depinde, în general, de mai mulți coeficienți. Pentru a ilustra efectul cuantizării coeficienților asupra localizării polilor și, implicit, asupra caracteristicii de frecvență, fie un filtru IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (5.77)$$

Filtrul IIR cu coeficienți cuantizați are funcția de sistem

$$\bar{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \bar{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \bar{a}_k z^{-k}} \quad (5.78)$$

unde coeficienții cuantizați $\{\bar{b}_k\}$ și $\{\bar{a}_k\}$ pot fi exprimați în funcție de coeficienții necuantizați $\{b_k\}$ și $\{a_k\}$ prin relațiile

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &= a_k + \Delta a_k & k = 1, 2, \dots, N \\ \bar{b}_k &= b_k + \Delta b_k & k = 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (5.79)$$

$\{\Delta b_k\}$ și $\{\Delta a_k\}$ reprezentând erorile de cuantizare ale coeficienților.

Numitorul lui $H(z)$ poate fi exprimat în forma

$$D(z) = 1 + \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1}) \quad (5.80)$$

unde $\{p_k\}$ sunt polii lui $H(z)$. Similar, se poate descompune numitorul lui $\bar{H}(z)$ în forma

$$\bar{D}(z) = \prod_{k=1}^N (1 - \bar{p}_k z^{-1}) \quad (5.81)$$

unde $\bar{p}_k = p_k + \Delta p_k$, $k=1, 2, \dots, N$, și Δp_k este eroarea sau perturbația care rezultă din cuantizarea coeficienților filtrului.

În continuare, se urmărește să se exprime perturbația totală Δp_i a polului p_i , în funcție de eroarea de cuantizare $\{\Delta a_k\}$ a coeficienților. Perturbația Δp_i poate fi exprimată ca [48]

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k \quad (5.82)$$

unde $\frac{\partial p_i}{\partial a_k}$ reprezintă variația poziției polului p_i determinată de variația coeficientului a_k . Astfel, eroarea totală este exprimată ca o sumă a erorilor datorate schimbărilor în fiecare din coeficienții $\{a_k\}$.

Derivatele parțiale $\partial p_i / \partial a_k$, $k=1, 2, \dots, N$, pot fi obținute diferențind $D(z)$ în funcție de fiecare $\{a_k\}$, după cum urmează [48]:

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = \left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right) \quad (5.83)$$

Din (5.83) rezultă

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{(\partial D(z) / \partial a_k)_{z=p_i}}{(\partial D(z) / \partial z)_{z=p_i}} \quad (5.84)$$

Numărătorul relației (5.84) este

$$\left(\frac{\partial D(z)}{\partial a_k} \right)_{z=p_i} = z^{-k} \Big|_{z=p_i} = p_i^{-k} \quad (5.85)$$

Numitorul relației (5.84) este

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D(z)}{\partial z} \right)_{z=p_i} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\prod_{l=1}^N (1 - p_l z^{-1}) \right] \right\}_{z=p_i} = \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{p_k}{z^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (1 - p_l z^{-1}) \right\}_{z=p_i} = \frac{1}{p_i^N} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Prin urmare, relația (5.84) poate fi exprimată sub forma

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l)} \quad (5.87)$$

Înlocuind rezultatul din (5.87) în (5.82) rezultă eroarea totală de perturbație Δp_i în forma

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l)} \Delta a_k \quad (5.88)$$

Această expresie oferă o măsură a sensibilității polului p_i la o schimbare a coeficienților $\{a_k\}$.

Un rezultat analog se poate obține pentru sensibilitatea zerorilor la erorile cauzate de cuantizarea parametrilor $\{b_k\}$.

Termenii $(p_i - p_l)$ din numitorul relației (5.88) reprezintă vectori, în planul Z , orientați de la polii $\{p_l\}$ la polul $\{p_i\}$. Dacă polii sunt foarte grupați, ca în cazul unui filtru de bandă îngustă reprezentat în figura 5.9, lungimile $|p_i - p_l|$ vor fi mici pentru polii din vecinătatea lui p_i . Aceste lungimi mici vor contribui la erori mari și va rezulta o perturbație Δp_i mare. Eroarea Δp_i poate fi minimizată prin maximizarea lungimii $|p_i - p_l|$.

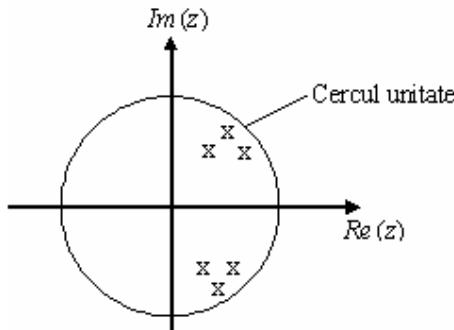


Figura 5.9 Poziții ale polilor unui filtru IIR trece bandă

Acest lucru se poate realiza prin implementarea filtrelor de ordin mare cu celule cu un singur pol sau cu doi poli. Fltrele cu un singur pol (și un singur zero) au valori complexe pentru coeficienți și necesită operații aritmetice în complex pentru realizarea lor. Această problemă poate fi evitată combinând polii și zerourile complex conjugate, pentru a forma secțiuni de filtru de ordin doi cu coeficienți reali. Deoarece polii complex conjugăți sunt suficient de depărtați, eroarea de cuantizare Δp_i este minimizată și, în consecință, filtrul cu coeficienții cuantizați rezultat aproximează mai bine caracteristica răspunsului în frecvență a filtrului cu coeficienții necuantizați.

Exemplul 5.9.

Un filtru digital de ordinul doi are polii reali p_1 și p_2 . Aceasta este implementat în forma directă. Se cere:

- Din relația generală (5.82) să se scrie o relație pentru modificarea poziției polilor datorată modificărilor coeficienților ecuației cu diferențe corespunzătoare.
- Dacă $p_1 = 0,98$ și $p_2 = 0,94$, care este numărul minim de biți necesar ca filtrul să rămână stabil în urma cuantizării coeficienților? Metoda de cuantizare se presupune a fi rotunjirea.

Soluție. a) Din (5.87) rezultă $\frac{\partial p_i}{\partial a_k} = \frac{p_i^{2-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^2 (p_i - p_l)}$, $k = 1, 2$ și $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial p_1}{\partial a_1} = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \quad \frac{\partial p_1}{\partial a_2} = \frac{1}{p_1 - p_2}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial a_1} = \frac{p_2}{p_2 - p_1} \quad \frac{\partial p_2}{\partial a_2} = \frac{1}{p_2 - p_1}$$

variația totală în poziția polilor este

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k$$

$$\text{adică } \Delta p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial p_1}{\partial a_2} \Delta a_2 = \frac{1}{p_1 - p_2} [p_1 \Delta a_1 + \Delta a_2]$$

$$\text{și } \Delta p_2 = \frac{\partial p_2}{\partial a_1} \Delta a_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a_2} \Delta a_2 = \frac{1}{p_2 - p_1} [p_2 \Delta a_1 + \Delta a_2]$$

b) Este necesar să determinăm Δa_1 și Δa_2 . Numitorul funcției de transfer a filtrului are forma $(z - p_1)(z - p_2) = z^2 - a_1 z + a_2$, unde $a_1 = p_1 + p_2$ și $a_2 = p_1 p_2$. Pentru asigurarea stabilității trebuie ca $-2 < a_1 < 2$ și $-1 < a_2 < 1$ [63]. În aritmetică în virgulă fixă coeficientul a_1 poate fi scalat pentru a se obține un număr fracționar, deși pentru coeficienții filtrului virgula binară este adesea mutată spre dreapta pentru a adapta coeficienții la mărimi mai mari ca unitatea. În orice caz se poate calcula pasul de cuantizare și numărul de biți, $N=b+1$.

Pentru a_1 , $\Delta = \frac{4}{2^N}$ și pentru rotunjire $\Delta a_1 = \frac{\Delta}{2} = \frac{2}{2^N}$

S-ar putea alege același pas de cuantizare și pentru a_2 , caz în care ar fi necesari $N - 1$ biți deoarece domeniul lui a_2 este jumătate din cel pentru a_1 . În schimb, s-ar putea adopta N biți pentru ambele registre, pentru a_1 și a_2 și pasul de cuantizare pentru a_2 să fie $\frac{2}{2^N} = \frac{\Delta}{2}$, astfel încât, pentru rotunjire $\Delta a_2 = \Delta/4 = \frac{1}{2^N}$.

Pentru ultima alegere, din expresia menționată anterior pentru schimbarea poziției polului rezultă

$$\Delta p_1 = \frac{1}{0,98 - 0,94} [(0,98)2 + 1,0]/2^N = 74/2^N \quad \text{și}$$

$$\Delta p_2 = \frac{1}{0,94 - 0,98} [(0,94)2 + 1,0]/2^N = -72/2^N$$

Polul p_1 , fiind mai apropiat de cercul unitate este posibil să cauzeze instabilitatea filtrului, dacă nu este reprezentat adecvat. Pentru stabilitate, trebuie să fie îndeplinită relația $1 - p_1 = 0,02 > \Delta p_1 = 74/2^N$ sau $2^N > 3700$, care implică $N=12$ biți lungimea minimă a registrului.

Pentru a completa analiza, este necesar a considera și cazul polilor complex conjugăți în expresia funcției de transfer (5.77). Numitorul acesteia se poate scrie

$$1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{i=1}^q (1 - p_i z^{-1}) \prod_{k=1}^s [1 - 2r_k (\cos \theta_k) z^{-1} + r_k^2 z^{-2}] \quad (5.89)$$

unde $s = \frac{N-q}{2}$, cu q poli simpli și s perechi de poli complex conjugăți.

Diferențiind (5.89) în raport cu a_l , cu $1 \leq l \leq N$ se determină sensibilitatea la cuantizarea coeficienților $\frac{\partial p_m}{\partial a_l}$, $1 \leq m \leq q$ și $\frac{\partial r_g}{\partial a_l}$, și $\frac{\partial \theta_g}{\partial a_l}$, $1 \leq g \leq s$. După câteva prelucrări matematice rezultă pentru polii simpli p_m , $1 \leq m \leq q$ [58]

$$\frac{\partial p_m}{\partial a_l} = \frac{p_m^{-l+1}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^q (1 - p_i p_m^{-1}) \prod_{k=1}^s [1 - 2r_k (\cos \theta_k) p_m^{-1} + r_k^2 p_m^{-2}]} , \quad (5.90)$$

și pentru polii complecsi $r_g e^{\pm j\theta_g}$, $1 \leq g \leq s$

$$\frac{\partial r_g}{\partial a_l} = \frac{-r_g^{-l+1} \sin[(l-1)\theta_g]}{2C_g \sin \theta_g} \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial a_l} = \frac{r_g^{-l} \{ \sin[(l-2)\theta_g] - \cos \theta_g \sin[(l-1)\theta_g] \}}{2C_g \sin^2 \theta_g} \quad (5.92)$$

unde

$$C_g = \prod_{i=1}^q (1 - p_i z^{-1}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq g}}^N (1 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2}) \Big|_{z=r_g e^{j\theta_g}} \quad (5.93)$$

Deviațiile totale sunt

$$\Delta p_i = \sum_{l=1}^N \frac{\partial p_m}{\partial a_l} \Delta a_l \quad l = 1, \dots, q \quad (5.94)$$

$$\Delta r_g = \sum_{l=1}^N \frac{\partial r_g}{\partial a_l} \Delta a_l \quad g = 1, \dots, s \quad (5.95)$$

$$\Delta \theta_g = \sum_{l=1}^N \frac{\partial \theta_g}{\partial a_l} \Delta a_l \quad g = 1, \dots, s \quad (5.96)$$

Din nou se observă că, dacă polii sunt grupați, ca în cazul filtrelor de bandă îngustă, polii realizării în forma directă sunt sensibili la erorile de cuantizare a coeficienților și, cu cât este mai mare numărul de poli grupați, cu atât și sensibilitatea este mai mare.

Este interesant de observat modul în care influențează structura de implementare a filtrului erorile cauzate de cuantizarea coeficienților. Pentru a ilustra acest lucru, fie un filtru cu doi poli complex conjugăți, caracterizat de funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.97)$$

Filtrul are polii la $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$. Când este realizat ca în figura 5.10, există doi coeficienți: $a_1 = -2r \cos \theta$ și $a_2 = r^2$. Cu precizie infinită este posibil să obținem un număr infinit de poziții ale polilor. Evident, cu precizie finită (adică a_1 și a_2 cuantizați), pozițiile posibile ale polilor sunt în număr finit.

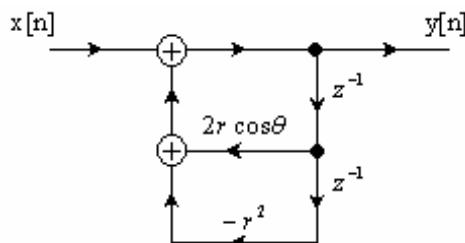


Figura 5.10. Realizare directă a unui filtru cu doi poli

De exemplu, pentru $b=3$, sunt posibile 7 valori nenule pentru a_1 și a_2 . În figura 5.11 sunt reprezentate pozițiile posibile ale polilor, numai pentru primul cadran al planului z . Sunt posibile 40 de poziții ale polilor în acest caz. Neuniformitatea în poziția polilor este datorată faptului că se cuantizează r^2 iar polii se găsesc pe un arc de cerc de rază r . Pentru o anumită cuantizare a coeficienților, polii se află pe o grilă din planul z

definită de intersecția cercurilor concentrice corespunzătoare cuantizării lui r^2 și liniilor verticale corespunzătoare cuantizării lui $2r\cos\theta$. De importanță particulară este setul rar de poli, pentru θ apropiat de zero și, datorită simetriei, pentru θ în apropierea lui π . Această situație va fi critic nefavorabilă pentru filtrele trece jos și filtrele trece sus care au în mod normal polii grupați în jurul frecvenței unghiulare $\theta=0$ și, respectiv, $\theta=\pi$.

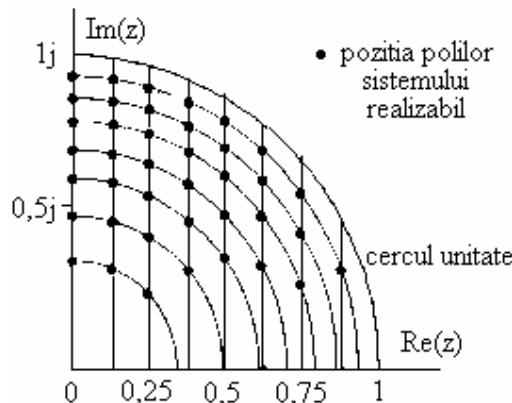


Fig. 5.11 Poziții posibile ale polilor structurii de ordinul doi în planul Z , pentru cuantizarea pe trei biți

O alternativă în realizarea filtrelor cu doi poli este forma cuplată, reprezentată în figura 5.12.

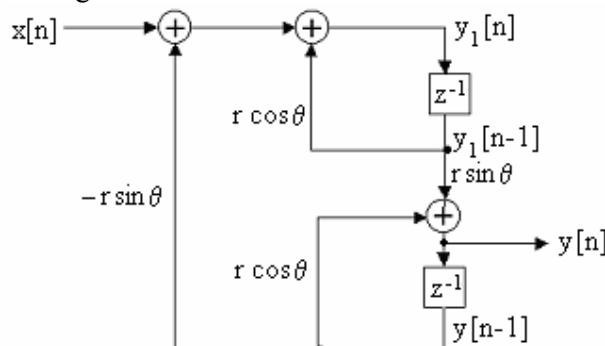


Figura 5.12. Realizare în forma cuplată a filtrului IIR cu doi poli

Cele două ecuații cuplate sunt:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] + (r \cos \theta) \cdot y_1[n-1] - (r \sin \theta) \cdot y[n-1] \\ y[n] &= (r \sin \theta) \cdot y_1[n-1] + (r \cos \theta) \cdot y[n-1] \end{aligned} \quad (5.98)$$

Transformând aceste ecuații în domeniul Z, se poate scrie

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{(r \sin \theta) z^{-1}}{1 - (2r \cos \theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (5.99)$$

În forma cuplată se observă că sunt de asemenea doi coeficienți, $\alpha_1 = r \sin \theta$ și $\alpha_2 = r \cos \theta$. Deoarece ambii sunt liniari în r , pozițiile posibile ale polilor sunt acum puncte egale spațiate pe un caroaj dreptunghiular, ca în figura 5.13.

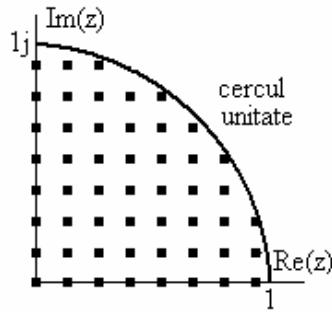


Figura 5.13. Poziții posibile ale polilor filtrului cu doi poli, realizat în forma cuplată din figura 5.12

Ca urmare, poziționarea polilor este acum uniform distribuită în interiorul cercului, lucru mult mai favorabil decât realizarea precedentă, mai ales pentru filtrele trece jos. Prețul plătit pentru această distribuire uniformă a poziției polilor este o creștere a volumului de calcule. Realizarea în formă cuplată necesită patru multiplicări, câte două pentru fiecare ieșire, în timp ce realizarea din figura 5.10 necesită doar două multiplicări. Este interesant de observat faptul că pentru o anumită lungime a coeficienților, forma directă permite o plasare mai adecvată a polilor cu r apropiat de unitate și θ mare, pe când forma cuplată este mai avantajoasă pentru θ mic.

Deoarece sunt diverse metode de a realiza secțiunile de ordin doi ale filtrelor, este, de asemenea, clar că sunt multe posibilități pentru localizarea polilor în cazul coeficienților cuantizați. Ideal ar fi să se selecteze o structură care conduce la un set dens de puncte în regiunea unde se află polii. Din nefericire nu există o metodă simplă și sistematică pentru determinarea realizării filtrului care să ducă la rezultatul dorit.

Având dat un filtru IIR de ordin înalt care trebuie implementat ca o combinație de secțiuni de ordinul doi, va trebui să se decidă între o structură în cascadă și una în paralel, adică între realizarea

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (5.100)$$

și realizarea

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{k0} + c_{k1}z^{-1}}{1 + a_{k1}z^{-1} + a_{k2}z^{-2}} \quad (5.101)$$

Dacă filtrul IIR are zerouri pe cercul unitate, cum este cazul filtrelor eliptice și Cebyșev de tipul doi, fiecare secțiune de ordin doi din configurația în cascadă din (5.100) conține o pereche de zerouri complex conjugate. Coeficienții $\{b_{ki}\}$ din (5.100) determină în mod direct pozițiile acestor zerouri, iar cuantizarea lor trebuie să le deplaseze de pe cercul unitate. Senzitivitatea răspunsului sistemului la eroarea de cuantizare este ușor și direct controlabilă prin alocarea unui număr suficient de biți pentru reprezentarea coeficienților cuantizați $\{b_{ki}\}$ cu o precizie specificată. Astfel va exista control direct asupra polilor și zerourilor care rezultă din procesul de cuantizare. De fapt, se poate evalua efectul perturbării rezultante din cuantizarea coeficienților $\{b_{ki}\}$, cu o anumită precizie cerută.

Realizarea în paralel a lui $H(z)$, conform relației (5.101), asigură un control direct doar asupra polilor sistemului. Coeficienții numărătorului $\{c_{k0}\}$ și $\{c_{k1}\}$ sunt obținuți prin descompunerea în fracții simple a lui $H(z)$. Prin urmare polii influențează indirect localizarea zerourilor, prin combinarea tuturor termenilor din descompunerea în fracții simple a lui $H(z)$ și, în consecință, este mult mai dificil a se determina efectul erorii de cuantizare datorat coeficienților $\{c_{ki}\}$, în localizarea zerourilor sistemelor.

Cuantizarea parametrilor $\{c_{ki}\}$ poate produce o perturbație semnificativă a pozițiilor zerourilor și, de obicei, va fi suficient de mare în implementările cu virgulă fixă pentru a deplasa zerourile de pe cercul unitate. Aceasta este o situație foarte neplăcută, care poate fi însă remediată folosind o reprezentare în virgulă mobilă. În orice caz, structura în cascadă este mult mai robustă în prezența cuantizării coeficienților și trebuie să fie alegerea preferată în aplicații practice, mai ales unde este folosită reprezentarea în virgulă fixă.

5.4.2. Cuantizarea coeficienților filtrelor FIR

Așa cum s-a arătat și în secțiunea precedentă, analiza senzitivității aplicată polilor unui sistem se aplică direct și zerourilor filtrelor IIR. Prin urmare, o expresie asemănătoare cu relația (5.88) se poate obține pentru zerourile unui filtru FIR. Pentru a minimiza senzitivitatea la cuantizarea coeficienților, va trebui ca filtrul FIR cu un număr mare de zerouri să fie implementat ca o cascadă de secțiuni de ordinul unu și doi.

Un aspect important în practică îl reprezintă filtrele FIR cu răspuns liniar de fază. Realizările directe ale unor astfel de filtre mențin proprietatea de fază liniară chiar și în cazul cuantizării coeficienților. Aceasta rezultă din observația că funcția de sistem a unui filtru FIR de fază liniară satisfac proprietatea

$$H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1}), \quad (5.102)$$

indiferent dacă coeficienții sunt sau nu, cunțitați.

Prin urmare, cuantizarea coeficienților filtrului FIR afectează doar caracteristica de amplitudine.

Din practică se știe că pentru a reprezenta coeficienții unui filtru FIR de fază liniară de lungime moderată ($M=32 \div 256$) sunt necesari cel puțin 10 biți, dar, dacă este posibil, se preferă a se folosi 12 până la 14 biți. Cu creșterea lungimii filtrului trebuie să crească și numărul de biți pentru reprezentarea coeficienților, pentru a menține aceeași eroare în răspunsul în frecvență al filtrului. Se presupune, de exemplu, că fiecare coeficient al filtrului este rotunjit la $(b+1)$ biți. Prin urmare, eroarea de rotunjire se încadrează în domeniul: $-2^{-b}/2 < e_r[n] < 2^{-b}/2$.

Valoarea cuantizată a răspunsului la impuls poate fi reprezentată ca $h_q[n] = h[n] + e_r[n]$ și eroarea în răspunsul în frecvență este

$$E_M(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e_r[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (5.103)$$

Presupunând că $e_r[n]$ este o variabilă aleatoare uniform distribuită în intervalul $[-2^{-b}/2, 2^{-b}/2]$ cu valoarea medie zero, $E_M(\omega)$ va fi, de asemenea, de medie zero. Presupunând, în continuare, că $e_r[n]$ poate fi modelată ca o secvență de zgomot alb staționar, secvența erorilor $e_r[n]$, $0 \leq n \leq M-1$, are eșantioanele necorelate. Prin urmare, dispersia erorii în răspunsul în frecvență $E_M(\omega)$ este suma dispersiilor celor M termeni $e_r[n]$

$$\sigma_E^2 = \frac{2^{-2b}}{12} M \quad (5.104)$$

Ecuația (5.104) subliniază faptul că dispersia erorii crește liniar cu lungimea filtrului M . Deviația standard a erorii $E_M(\omega)$ este

$$\sigma_E = \frac{2^{-b}}{\sqrt{12}} \sqrt{M} \quad (5.105)$$

Prin urmare, pentru fiecare creștere de patru ori a lui M , precizia în reprezentarea coeficienților filtrului trebuie crescută cu un bit, pentru a menține deviația standard fixă. Din practică se constată că pentru a avea o deviație standard acceptabilă se folosesc 12, 13 biți. Dacă lungimea filtrului, M , este mai mare decât 256 sau numărul de biți folosiți pentru reprezentarea coeficienților este mai mic de 12, atunci filtrul trebuie implementat ca o cascadă de secțiuni de filtre de lungimi mai mici.

Într-o realizare în cascadă, de forma

$$H(z) = G \cdot \prod_{k=1}^K H_k(z) \quad (5.106)$$

secțiunile de ordinul doi sunt:

$$H_k(z) = 1 + b_{k1}z^{-1} + b_{k2}z^{-2}. \quad (5.107)$$

Coefficienții au forma $b_{k1} = -2r_k \cos \theta_k$ și $b_{k2} = r_k^2$. Cuantizarea lui b_{k1} și b_{k2} conduce la localizarea zerourilor ca în figura 5.11, cu excepția faptului că grid-ul se extinde în afara cercului unitate.

Ecuația (5.102) arată că zerourile lui $H(z^{-1})$ sunt identice cu cele ale lui $H(z)$. Dacă $H(z)$ are un zero complex $z = r_k \cdot e^{j\theta_k}$ atunci $H(z)$ trebuie să aibă și o “imagine oglindă” a acestuia, adică zeroul $z^{-1} = (1/r_k) \cdot e^{-j\theta_k}$. Pe de altă parte, dacă răspunsul la impuls este real, zerourile complexe ale lui $H(z)$ apar în perechi conjugate. Problema care apare în acest caz este menținerea proprietății de fază liniară, deoarece perechea de zerouri cuantizate $z_{3,4} = (1/r_k) \cdot e^{\pm j\theta_k}$ poate să nu fie imaginea în oglindă a perechii de zerouri cuantizate $z_{1,2} = r_k \cdot e^{\pm j\theta_k}$.

Această problemă poate fi evitată prin rearanjarea termenilor corespunzători imaginii în oglindă. Se pot scrie astfel coeficienții imaginii în oglindă, sub forma

$$\left(1 - \frac{2}{r_k} \cos \theta_k z^{-1} + \frac{1}{r_k^2} z^{-2} \right) = \frac{1}{r_k^2} \left(r_k^2 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + z^{-2} \right) \quad (5.108)$$

Factorul $\{1/r_k^2\}$ poate fi combinat cu câștigul total G , sau poate fi distribuit în secțiunile de filtru de ordin doi. Termenul din (5.108) conține exact aceeași parametri ca și factorul $(1 - 2r_k \cos \theta_k z^{-1} + r_k^2 z^{-2})$ și, prin urmare, zerourile apar acum în perechi imagine oglindă chiar dacă coeficienții sunt cuantizați.

5.5. Erori cauzate de cuantizarea produselor. Caracterizarea statistică a efectelor cuantizării în realizarea în virgulă fixă a filtrelor digitale

Multiplicarea a două numere reprezentate pe b biți fiecare, exceptând bitul de semn, are ca rezultat un număr reprezentat pe $2b$ biți. În practică, datorită lungimii finite a registrilor cu care se lucrează, se impune exprimarea produselor prin b biți semnificativi, astfel încât, inevitabil, cuantizarea este asociată cu formarea produsului. Indiferent de tipul de cuantizare folosit, s-a înțeles că acesta să se numească *rotunjirea produsului*. Efectul acestei cuantizări asupra performanțelor filtrului depinde de modul de implementare a acestuia.

Se presupune că eroarea de rotunjire asociată formării produsului este independentă de la o iterare la alta, astfel încât poate fi folosit modelul cuantizării fine, sursele de zgomot fiind introduse în sistem după multiplicatoare. Astfel, multiplicatorul este modelat cu o operație în precizie infinită urmată de o sursă de zgomot aditiv $e[n]$, să încât rezultatul final să fie egal cu un nivel de cuantizare, exact cum s-a procedat la caracterizarea erorii de cuantizare la conversia A/D a unui semnal analogic.

Se începe cu caracterizarea zgomotului de rotunjire într-un filtru cauzal, cu un singur pol, care este implementat în aritmetică cu virgulă fixă și este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q_r[av[n-1]] + x[n] \quad (5.109)$$

Efectul rotunjirii produsului $av[n-1]$ este modelat cu o secvență de zgomot $e[n]$ adunată la produsul necuantizat $av[n-1]$, care este

$$Q_r[av[n-1]] = av[n-1] + e[n] \quad (5.110)$$

Cu acest model pentru eroarea de cuantizare, sistemul considerat este descris de ecuația liniară cu diferențe

$$v[n] = av[n-1] + x[n] + e[n] \quad (5.111)$$

Sistemul corespunzător este ilustrat în diagrama bloc din figura 5.14.

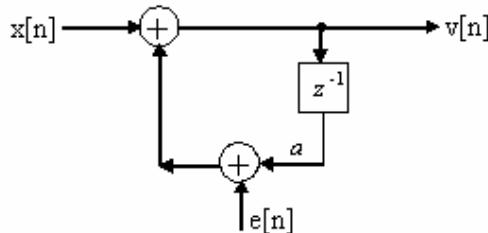


Figura 5.14. Modelul zgomotului aditiv pentru eroarea de cuantizare a produsului pentru un filtru cu un singur pol

Secvența de ieșire a filtrului $v[n]$, poate fi separată în două componente. Prima este răspunsul sistemului, $y[n]$, la secvența de intrare $x[n]$, iar a doua este răspunsul sistemului, $z[n]$, la zgomotul aditiv de cuantizare $e[n]$. Secvența de ieșire se exprimă ca o sumă a acestor două componente, adică

$$v[n] = y[n] + z[n] \quad (5.112)$$

Înlocuind $v[n]$ din (5.112) în (5.111), se obține

$$y[n] + z[n] = ay[n-1] + az[n-1] + x[n] + e[n] \quad (5.113)$$

Pentru a simplifica analiza, se fac următoarele presupuneri în legătură cu eroarea $e[n]$:

1. Pentru orice n , secvența de eroare $\{e[n]\}$ este uniform distribuită în intervalul $\left(-\frac{1}{2}2^{-b}, \frac{1}{2}2^{-b}\right)$. Aceasta implică valoarea medie a lui $\{e[n]\}$ egală cu zero, și dispersia

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \quad (5.114)$$

2. Eroarea $\{e[n]\}$ este o secvență staționară de zgomot alb și, ca urmare, $e[n]$ și $e[m]$ sunt necorelate pentru $n \neq m$.
3. Secvența de eroare $\{e[n]\}$ este necorelată cu semnalul $\{x[n]\}$.

Ultima presupunere permite separarea ecuației cu diferențe (5.113) în două ecuații independente:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad (5.115)$$

$$z[n] = az[n-1] + e[n] \quad (5.116)$$

Ecuația cu diferențe (5.115) reprezintă relația de intrare-ieșire pentru sistemul dorit, iar cea din (5.116) reprezintă relația pentru eroarea de cuantizare la ieșirea sistemului.

Pentru a completa analiza se face apel la două relații importante. Prima este relația pentru valoarea medie a ieșirii $z[n]$ pentru un filtru liniar, invariant în timp, cu răspunsul la impuls $h[n]$, când este excitat de o secvență $e[n]$ cu media m_e . Rezultatul este [48]

$$m_z = m_e \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \quad (5.117)$$

sau, echivalent,

$$m_z = m_e H(0) \quad (5.118)$$

unde $H(0)$ valoarea răspunsului în frecvență $H(\omega)$ la $\omega = 0$.

Deoarece eroarea de cuantizare datorată rotunjirii are media zero, valoarea medie a erorii la ieșire este $m_z = 0$.

A doua relație importantă este expresia pentru secvența de autocorelație a ieșirii $z[n]$ a unui filtru cu răspunsul la impuls $h[n]$ la secvența aleatoare de intrare $e[n]$. Aceasta este [63]

$$\gamma_{zz}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l]\gamma_{ee}[k-l+n] \quad (5.119)$$

unde $\gamma_{ee}[n]$ este funcția de autocorelație a secvenței de intrare $e[n]$.

În cazul particular când secvența aleatoare este zgomot alb, secvența de autocorelație $\gamma_{ee}[n]$ este un impuls scalat cu dispersia σ_e^2 , adică [34]

$$\gamma_{ee}[n] = \sigma_e^2 \delta[n] \quad (5.120)$$

După substituția relației (5.120) în (5.119), se obține secvența de autocorelație de la ieșirea filtrului excitat cu zgomot alb

$$\gamma_{zz}[n] = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} h[k]h[k+n] \quad (5.121)$$

Dispersia σ_z^2 a zgomotului de ieșire este obținută evaluând $\gamma_{zz}[n]$ la $n = 0$, adică [34]

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2[k] \quad (5.122)$$

sau, cu ajutorul teoremei lui Parseval [63], expresia alternativă

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega \quad (5.123)$$

În cazul filtrului cu un singur pol, răspunsul la impuls este

$$h[n] = a^n u[n] \quad (5.124)$$

Dispersia erorii la ieșirea filtrului rezultă

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2} \quad (5.125)$$

Se observă că puterea zgomotului σ_z^2 la ieșirea filtrului este mărită față de puterea zgomotului de la intrare, σ_e^2 , cu factorul $1/(1-a^2)$. Acest factor crește odată cu apropierea polului de cercul unitate.

Fie, în continuare, un filtru recursiv de ordinul doi:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \quad (5.126)$$

În calculul ieșirii sunt implicate patru multiplicări, dacă a_1, a_2, b_0 și b_1 nu sunt egali cu unitatea. Zgomotul de rotunjire asociat cu fiecare multiplicare este $e_i[n]$, $i = \overline{0,3}$.

Se consideră întâi realizarea în forma directă I, ca în figura 5.15.

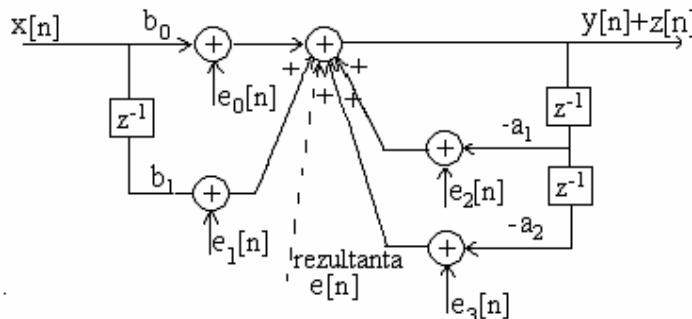


Fig. 5.15. Zgomotul de rotunjire la multiplicare pentru un filtru de ordinul doi în forma directă I

Deoarece toate sursele de zgomot se adună în același punct, acestea pot fi înlocuite cu o sursă de zgomot echivalentă

$$e[n] = \sum_{i=0}^3 e_i[n] \quad (5.127)$$

Se observă că în implementarea în forma directă I, zgomotul trece numai prin partea de sistem ce conține numai poli, adică zerourile nu au nici un efect asupra zgomotului din ieșire.

În cazul rotunjirii, când pasul de cuantizare este constant, dispersia unei surse de zgomot este

$$\sigma_{e_i}^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (5.128)$$

Presupunând erorile de cuantizare independente, dispersia zgomotului rezultat este suma dispersiilor componentelor

$$\sigma_{e_i}^2 = \sum_{i=0}^3 \sigma_{e_i}^2 = \frac{\Delta^2}{3} \quad (5.129)$$

Pentru cazul general al formei directe I, când sistemul are $M+1$ multiplicări pentru zerouri și N multiplicări pentru poli cu coeficienți diferiți de 0 și 1, dispersia surselor de zgromot este

$$\sigma_e^2 = (M + N + 1) \frac{\Delta^2}{12} \quad (5.130)$$

Porțiunea din filtru prin care trece zgomotul de rotunjire este arătată în figura 5.16. Ieșirea $z[n]$ datorată zgomotului formează o parte a ieșirii cuantizate.

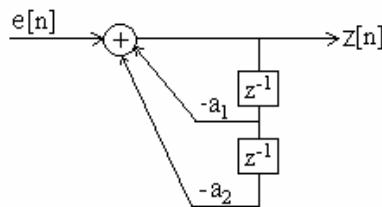


Figura 5.16. Portiunea din filtrul recursiv afectată de zgomotul de rotunjire pentru realizarea în forma directă I.

Pentru figura 5.16 se poate scrie

$$\frac{Z(z)}{E(z)} = H'(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.131)$$

Evident, această funcție de transfer diferă de cea a filtrului care include și zerouri, care este

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.132)$$

Conform relației (5.74), dispersia totală de regim permanent și ieșirii datorate zgromotului de rotunjire este

$$\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{3} \sum_{\substack{\text{polii din} \\ \text{cercul unitate}}} \text{reziduurile lui } H'(z)H'(z^{-1})z^{-1} \quad (5.133)$$

cu $H'(z)$ dat de (5.131).

În cazul formei directe I dispersia totală de regim permanent a zgomotului datorat rotunjirii multiplicărilor este

$$\begin{aligned}\sigma_{0zss}^2 &= (M+N+1) \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint H'(z) H'(z^{-1}) z^{-1} dz = \\ &= (M+N+1) \frac{\Delta^2}{12} \sum_n \|h'[n]\|^2\end{aligned}\quad (5.134)$$

unde $H'(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$ este partea care conține toți polii sistemului.

În continuare, se consideră implementarea canonica (forma directă II) a filtrului descris de (5.126), caz în care erorile de rotunjire pot fi reprezentate ca surse de zgomot poziționate ca în figura 5.17.

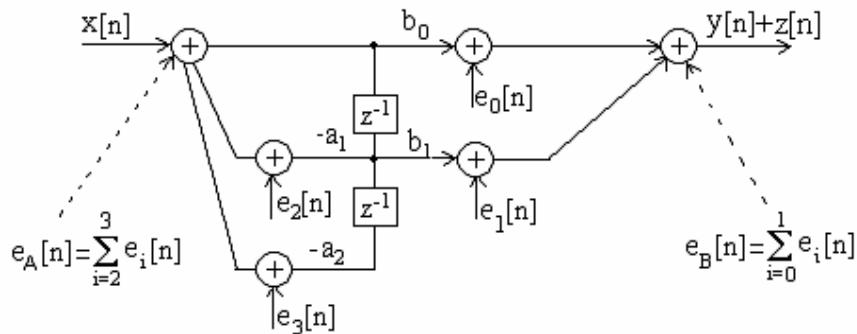


Figura 5.17. Zgomotul de rotunjire al produselor pentru un filtru recursiv implementat în forma canonica

Se

observă că semnalurile de eroare $e_A[n] = \sum_{i=2}^3 e_i[n]$ cu dispersia $\frac{\Delta^2}{6}$, trece

prin tot filtru, în timp ce $e_B[n] = \sum_{i=0}^1 e_i[n]$ cu dispersia $\frac{\Delta^2}{6}$ este un zgomot

adunat direct la ieșire. În acest caz dispersia de regim permanent a ieșirii datorată zgomotului de rotunjire a produselor este suma dispersiilor zgomotelor determinate de cele două semnale de eroare $e_A[n]$ și $e_B[n]$.

$$\sigma_{0zss}^2 = \frac{\Delta^2}{6} \left[1 + \sum_{\substack{\text{polii din interiorul} \\ \text{cercurii unitate}}} \text{reziduurile lui } H(z) H(z^{-1}) z^{-1} \right] \quad (5.135)$$

cu $H(z)$ dat de (5.132).

Pentru cazul general al formei directe II pentru filtrul IIR, când coeficienții acestuia sunt diferenți de 0 și 1, dispersia de regim permanent a zgomotului de ieșire este

$$\begin{aligned} \sigma_{0zss}^2 &= N \frac{\Delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz + (M+1) \frac{\Delta^2}{12} = \\ &= N \frac{\Delta^2}{12} \sum_n \|h[n]\|^2 + (M+1) \frac{\Delta^2}{12} \end{aligned} \quad (5.136)$$

Fără a considera valori numerice pentru coeficienți, numai din compararea relațiilor (5.134) și (5.136), nu este posibil să decidem care dintre aceste forme de implementare produce un zgomot de ieșire mai mic datorat erorii de cuantizare a produselor.

Exemplul 5.10.

Să se determine dispersia de regim permanent a zgomotului de ieșire, datorat rotunjirii aritmetice, a filtrului cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

implementat în

- a) formă directă I
- b) formă directă II

dacă $r=0,9$, $\theta = \pi/4$, $b_0 = 1,1$, $b_1 = 0,3$ și pasul de cuantizare Δ .

Soluție. a) Din figura 5.15 și 5.16 rezultă că dispersia de regim permanent a zgomotului de ieșire este

$$\begin{aligned} \sigma_{0zss}^2 &= \frac{\Delta^2}{3} \sum_{\substack{\text{polii din cercul} \\ \text{unitate ai lui } H'(z)}} \text{reziduurile lui } H'(z) H'(z^{-1}) z^{-1} = \\ &= \frac{\Delta^2}{3} \frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1} = 1,92 \Delta^2 \end{aligned}$$

$$\text{cu } H'(z) = \frac{1}{1 - 2r \cos \theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

b) Din figura (5.17) rezultă

$$\begin{aligned}\sigma_{0zss}^2 &= \frac{\Delta^2}{6} + \frac{\Delta^2}{6} \sum_{\text{polii lui } H(z)} \text{reziduurile lui } H(z) H(z^{-1}) z^{-1} = \\ &= \frac{\Delta^2}{6} \left[1 + \frac{(b_0^2 + b_1^2)(1+r^2) - 4b_0 b_1 r \cos \theta}{(r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1)(1-r^2)} \right] = 1,07 \Delta^2\end{aligned}$$

Se observă că forma directă II (canonică) produce un zgomot de ieșire mai mic pentru valorile date ale parametrilor decât forma directă I și că valorile b_0 și b_1 nu afectează dispersia zgomotului de ieșire în forma directă I.

Ecuatiile (5.134) și (5.136) arată că structurile în forma directă I și II sunt afectate diferit de cuantizarea produselor în implementarea ecuațiilor cu diferențe corespunzătoare. În general, alte structuri echivalente, cum ar fi cele în cascadă, în paralel, lattice și formele transpusă vor avea dispersii totale ale zgomotului la ieșire diferite de cele din structurile în formă directă. Nu se poate spune care sistem va avea dispersia de zgomot la ieșire cea mai mică, dacă nu se cunosc valorile coeficienților.

Îmbunătățirea performanței de zgomot a sistemelor numerice este posibilă folosind sumatoare și acumulatoare pe un număr mai mare de biți. Această soluție presupune însă o complicare semnificativă a realizării "hard" a schemei.

5.6. Oscilații cu ciclu-limită în sisteme recursive

În secțiunile anterioare au fost analizate erorile care apar în operațiile aritmetice realizate de un filtru digital. Prezența unuia sau a mai multor cuantizoare în implementarea unui filtru digital, conduce la un dispozitiv neliniar a cărui caracteristică poate fi semnificativ diferită de cea a filtrului ideal. Efectele neliniare datorate aritmeticii cu precizie finită, îngreunează analiza performanțelor unui filtru digital. Pentru a efectua o analiză a efectului cuantizării, s-a adoptat o caracterizare statistică a erorilor de cuantizare, ceea ce a condus în final la un model liniar pentru filtru.

În sistemele recursive, neliniaritatea datorată efectuării operațiilor matematice în aritmetică finită poate cauza oscilații periodice la ieșire, chiar dacă secvența de intrare este zero sau o valoare constantă, nenulă. Astfel de oscilații în sistemele recursive sunt numite *cicluri limită* și pot fi direct atribuite erorii de rotunjire sau trunchiere la multiplicare. Aceste

oscilații pot fi reduse folosind registre pe mai mulți biți. Al doilea tip de oscilații numit *oscilații de depășire* poate apărea când intrarea cuantizorului depășește domeniul dinamic. Aceste oscilații au, de obicei, amplitudine mare și nu pot fi reduse prin creșterea numărului de biți.

5.6.1. Cicluri limită datorate rotunjirii

Fenomenul ciclurilor limită este diferit de comportamentul zgomotului cauzat de cuantizare. Efectele cuantizării se identifică cu zgomotul când nivelul semnalului este mare și foarte variabil, făcând eroarea de cuantizare, la orice moment de timp, aproape independentă de erorile anterioare. Când nivelul semnalului este scăzut, erorile cauzate de cuantizare devin corelate. Ciclurile limită sunt periodice, dar nu neapărat sinusoidale. Ele sunt susceptibile să apăre acolo unde există reacție în filtru; filtrele IIR au întotdeauna mecanisme de reacție în interiorul lor, deci astfel de oscilații pot apărea la ieșirea lor. Spre deosebire de acestea, filtrele FIR nu conțin mecanisme de reacție și, în consecință, ele nu vor prezenta oscilații la ieșire. Acesta este un avantaj al filtrelor FIR față de cele IIR. Tratarea generală a comportării pe cicluri limită a filtrelor digitale este dificilă, motiv pentru care se vor analiza structurile de ordinul 1 și 2.

Pentru a ilustra caracteristica unei oscilații de ciclu limită, se consideră un sistem cu un singur pol, descris de ecuația liniară cu diferențe

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \quad (5.137)$$

în care polul este situat la $z=a$. Sistemul ideal este prezentat în figura 5.18a.

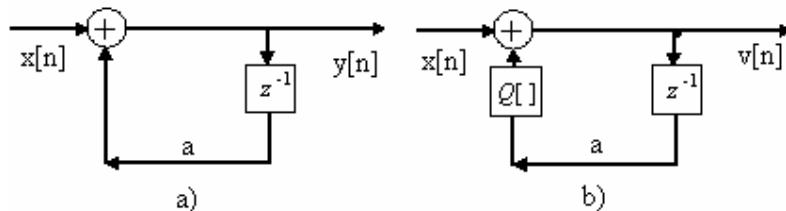


Figura 5.18. a) Sistemul recursiv ideal cu un singur pol b) Sistemul neliniar real

Sistemul real, care este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q[av[n-1]] + x[n] \quad (5.138)$$

este realizat ca în figura 5.18b.

Se presupune că sistemul real din figura 5.18b este implementat cu o aritmetică în virgulă fixă cu patru biți pentru amplitudine și un bit pentru semn. Cuantizarea care se face după multiplicare este presupusă a rotunji produsul prin adaos. În Tabelul 5.4 se prezintă răspunsul sistemului real pentru patru poziții diferite ale polului $z=a$ și intrarea $x[n]=\beta\delta[n]$, unde $\beta=15/16$, care are reprezentarea binară 0,1111.

Tabel 5.4 Cicluri limită pentru un filtru cu un singur pol

n	$a=0,1000$ $= 1/2$	$a=1,1000$ $= -1/2$	$a=0,1100$ $= 3/4$	$a=1,1000$ $= -3/4$
0	0,1111 (15/16)	0,1111 (15/16)	0,1011 (11/16)	0,1011 (11/16)
1	0,1000 (7/16)	1,1000 (-7/16)	0,1000 (8/16)	1,1000 (-8/16)
2	0,0100 (3/16)	0,0100 (3/16)	0,0110 (6/16)	0,0110 (6/16)
3	0,0010 (1/16)	1,0010 (-1/16)	0,0101 (5/16)	1,0101 (-5/16)
4	0,0001 (1/16)	0,0001 (1/16)	0,0100 (4/16)	0,0100 (4/16)
5	0,0001 (1/16)	1,0001 (-1/16)	0,0011 (3/16)	1,0011 (-3/16)
6	0,0001 (1/16)	0,0001 (1/16)	0,0010 (2/16)	0,0010 (2/16)
7	0,0001 (1/16)	1,0001 (-1/16)	0,0010 (2/16)	1,0010 (-2/16)
8	0,0001 (1/16)	0,0001 (1/16)	0,0010 (2/16)	0,0010 (2/16)

În mod ideal, răspunsul sistemului ar trebui să scadă exponențial spre zero ($y[n]=a^n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$). În sistemul real, totuși, răspunsul $v[n]$ atinge o stare stabilă periodică la ieșire, cu o perioadă ce depinde de valoarea polului. Când polul este pozitiv, oscilațiile au loc cu perioada $N_p = 1$, astfel încât ieșirea atinge o valoare constantă de 1/16 pentru $a=1/2$ și 1/8 pentru $a=3/4$. Acest fenomen este numit ciclu limită cu frecvență zero.

Pe de altă parte, când polul este negativ, secvența de ieșire oscilează între valori pozitive și negative ($\pm 1/16$ pentru $a = -1/2$ și $\pm 1/8$ pentru $a = -3/4$). Prin urmare, perioada este $N_p = 2$. Se obține astfel o oscilație de amplitudine constantă, a cărei pulsărie este egală cu π și a cărei amplitudine este $\pm 1/16$ sau $\pm 1/8$.

Aceste cicluri-limită apar ca rezultat al efectului de cuantizare în multiplicări. Când secvența de intrare $x[n]$ devine zero, ieșirea intră într-un ciclu limită după un număr de iterații. Ieșirea rămâne în acest ciclu limită până când este aplicat un alt semnal de intrare, suficient de puternic, pentru a scoate sistemul din ciclu. În mod similar, ciclurile limită cu intrare zero apar din condiții inițiale nenule. Amplitudinea ieșirii

pe perioada ciclului limită este inclusă într-un domeniu de valori care este numit "banda moartă" a filtrului. Frecvența și amplitudinea ciclului limită depind de coeficienți, condiții initiale, metoda de cuantizare și lungimea cuvântului.

Este interesant de menționat faptul că atunci când răspunsul filtrului cu un pol este în ciclu limită, sistemul neliniar real lucrează ca un sistem liniar echivalent, cu un pol la $z=1$, atunci când polul este pozitiv ($a>0$), și $z = -1$, când polul este negativ ($a<0$). Aceasta înseamnă

$$Q_r[av[n-1]] = \begin{cases} v[n-1], & a > 0 \\ -v[n-1], & a < 0 \end{cases} \quad (5.139)$$

Deoarece produsul $av[n-1]$ este rotunjit, eroarea de cuantizare este limitată de

$$|Q_r[av[n-1]] - av[n-1]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (5.140)$$

unde b este numărul de biți (exclusiv semnul) utilizat în reprezentarea polului a și a lui $v[n]$. Prin urmare, relațiile (5.139) și (5.140) conduc la

$$|v[n-1]| - |av[n-1]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b}$$

și, deci

$$|v[n-1]| \leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1-|a|} \quad (5.141)$$

Când coeficientul a este pozitiv, răspunsul ciclului limită se numește *de curent continuu* (are amplitudine și semn constante), iar dacă a este negativ comportamentul ciclului limită are amplitudine constantă dar semn alternant.

Expresia din (5.141) definește *zona sau banda moartă* pentru un filtru cu un singur pol. De exemplu, când $b = 4$ și $|a| = 1/2$ banda moartă este cuprinsă în domeniul $(-1/16, 1/16)$ pentru amplitudini, iar pentru $b = 4$ și $|a| = 3/4$, banda moartă crește la $(-1/8, 1/8)$.

Comportarea ciclului limită în cazul unui filtru cu doi poli este mult mai complexă prin faptul că poate apărea o mai mare varietate de oscilații. În acest caz sistemul ideal cu doi poli este descris de ecuația liniară cu diferențe

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad (5.142)$$

în timp ce sistemul real este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q_r[a_1 v[n-1]] + Q_r[a_2 v[n-2]] + x[n] \quad (5.143)$$

Când coeficienții filtrului satisfac condiția $|a_1|^2 < -4a_2$, polii sistemului apar la $z_{1,2} = re^{\pm j\theta}$, unde $a_2 = -r^2$ și $a_1 = 2r\cos\theta$. Ca și în cazul filtrului cu un singur pol, când sistemul este într-un ciclu limită cu intrare zero [49],

$$Q_r[a_2 v[n-2]] = -v[n-2], \quad (5.144)$$

adică sistemul se comportă ca un oscilator cu polii complex-conjugăți situați pe cercul unitate ($a_2 = -r^2 = -1$). Rotunjirea produsului $av[n-2]$ implică

$$|Q_r[a_2 v[n-2]] - a_2 v[n-2]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b} \quad (5.145)$$

După substituția lui (5.144) în (5.145), se obține

$$|v[n-2]| - |a_2 v[n-2]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b}$$

sau, echivalent

$$|v[n-2]| \leq \frac{\frac{1}{2} 2^{-b}}{1 - |a_2|} \quad (5.146)$$

Expresia din (5.146) definește banda moartă a unui filtru de ordin doi cu poli complex conjugăți. Se observă că limitele benzii moarte depind doar de a_2 . Parametrul $a_1 = 2r\cos\theta$ determină doar frecvența oscilațiilor.

Un alt ciclu limită posibil cu intrarea zero, care este numai amintit și care apare ca rezultat al rotunjirii multiplicărilor, corespunde unui sistem echivalent de ordinul doi cu polii la $z = \pm 1$.

Este interesant de menționat cum ciclurile limită descrise anterior au rezultat prin rotunjirea produsului dintre coeficienții filtrului și ieșirile precedente $v[n-1]$ și $v[n-2]$. În locul rotunjirii, se poate alege a trunchia produsul la b biți, caz în care se pot elimina multe din ciclurile limită, dar această soluție nu este foarte agreată, deoarece trunchierea are ca rezultat o deplasare a valorii medii a erorii, exceptie făcând cazul când se folosește reprezentarea semn-valoare unde eroarea de trunchiere este simetrică față de zero.

În realizarea în paralel a diverselor sisteme IIR de ordin înalt cu secțiuni de ordinul doi, fiecare secțiune generează propriul ciclu limită, fără interacțiune între secțiunile de filtru de ordin doi. Prin urmare, ieșirea

este o sumă a ciclurilor limită cu intrare zero a secțiunilor individuale. În cazul realizării în cascadă pentru un sistem IIR de ordin înalt, ciclurile limită sunt mult mai greu de analizat. În particular, când prima secțiune de filtru generează un ciclu limită cu intrare zero, acesta este filtrat de secțiunile succesive. Dacă frecvența ciclului limită este apropiată de frecvența de rezonanță a filtrului următor din succesiune, amplitudinea secvenței va fi mărită de caracteristica de rezonanță. În general, trebuie evitate astfel de situații.

5.6.2. Cicluri limită datorate depășirii

Un tip mult mai sever de cicluri limită poate apărea datorită depășirii aritmétice din interiorul filtrelor care folosesc aritmética în complement față de unu sau în complement față de doi. Aceste cicluri limită sunt cunoscute sub numele de *oscilații de depășire*. O depășire la adunarea a două sau mai multe numere binare apare atunci când suma depășește lungimea disponibilă a cuvântului la implementarea digitală a sistemului.

De exemplu, se consideră secțiunea de filtru de ordin doi prezentată în figura 5.19, în care adunarea se face în aritmética complementului față de doi.

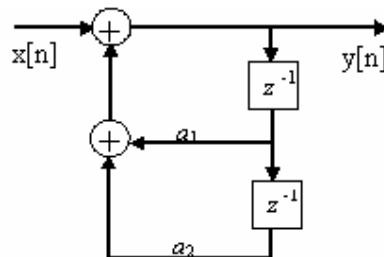


Figura 5.19. Secțiune de filtru de ordinul doi

Ieșirea din filtru se poate scrie

$$y[n] = g[a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n]] \quad (5.147)$$

unde funcția $g[.]$ reprezintă adunarea în complement față de doi.

Figura 5.20 prezintă caracteristica intrare-ieșire $g[v]$ a sumatorului în complement față de doi.

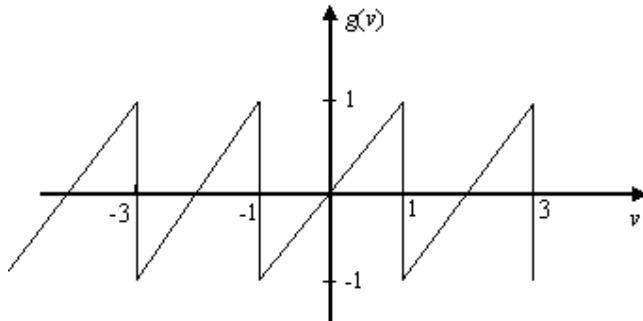


Figura 5.20. Caracteristica funcțională pentru adunarea în complement față de doi a două sau mai multe numere

Domeniul de valori al parametrilor (a_1, a_2) pentru un filtru stabil este precizat de triunghiul de stabilitate [63]. Totuși, aceste condiții nu sunt de ajuns pentru a preveni oscilațiile datorate depășirii din aritmetică în complement față de doi. Condiția necesară și suficientă pentru a nu apărea cicluri limită datorate depășirii, este [49]

$$|a_1| + |a_2| < 1 \quad (5.148)$$

care este o condiție extrem de restrictivă și duce la o constrângere nerezonabilă asupra oricărei secțiuni de filtru de ordin doi.

Un remediu efectiv pentru rezolvarea problemei oscilațiilor provocate de depășire este de a modifica caracteristica sumatorului, ca în figura 5.21, care operează cu saturare numerică. Atunci când este sesizată o depășire (sau o subdepărtire), ieșirea sumatorului va avea valoarea maximă de capăt de scară ± 1 . Distorsiunea cauzată de această neliniaritate în sumator este de obicei mică deoarece saturarea apare rar. Folosirea unei astfel de neliniarități nu elimină necesitatea scalării semnalelor și a parametrilor sistemului, așa cum va fi descris în paragraful următor.

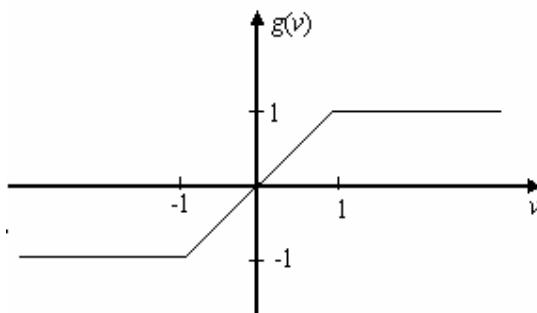


Figura 5.21. Caracteristica funcțională pentru adunare cu saturare la ± 1

Ilustrarea oscilațiilor datorate depășirii se face pe exemplul următor. Se consideră secțiunea de filtru de ordin doi caracterizată de ecuația (5.143) în care adunarea se face în aritmetică complementului față de doi, cu lungimea cuvintelor de 4 biți, incluzând bitul de semn, și se folosește rotunjirea pentru reprezentările în complement față de doi. Se presupune că $a_1 = 3/4 = 0,110$ și $a_2 = -3/4 = 1,010$ și, de asemenea, că $x[n]$ rămâne zero pentru $n \geq 0$.

Se consideră condițiile inițiale $v[-1] = (3/4)_{10} = (0,110)_{2C}$ și $v[-2] = (-3/4)_{10} = (1,010)_{2C}$. Eșantionul de la ieșire la momentul $n=0$ va fi $v[0] = 0,110 \cdot 0,110 + 1,010 \cdot 1,010 = 0,100100 + 0,100100$.

Dacă se rotunjește fiecare produs, rezultă

$$v[0] = 0,101 + 0,101 = 1,010 = -3/4.$$

În mod similar se obține

$$v[1] = 1,011 + 1,011 = 0,110 = 3/4,$$

adică, $v[n]$ va continua să oscileze între $-3/4$ și $3/4$ până ce este aplicat un semnal de intrare care să scoată sistemul din acest ciclu limită. Aceasta este un exemplu de oscilații de depășire. Sistemele de ordin mai mare au o comportare mai complexă.

5.7. Scalarea pentru prevenirea depășirii

Saturația aritmetică descrisă în paragraful anterior elimină ciclurile limită datorate depășirii pe de o parte, dar, pe de altă parte, duce la distorsiuni nedorite ale semnalelor, în acest caz nemaifuncționând regula conform căreia, dacă se adună mai multe numere a căror sumă este de modul subunitar, rezultatul este corect, chiar dacă apar depășiri în etapele intermediare de calcul. Pentru a limita aceste distorsiuni neliniare se scalează semnalul de intrare și răspunsul la impuls între intrare și orice nod din sistem, astfel încât să nu se depășească gama dinamică.

Efectul depășirii este mult mai sever pentru un filtru recursiv, decât pentru unul nerecursiv, deoarece erorile sunt filtrate din nou (datorită reacției) ceea ce face ca filtrul să devină inutilizabil în scurt timp. Pentru ambele tipuri de filtre, scalarea este necesară pentru reducerea amplitudinii semnalelor în anumite limite, evitându-se depășirea în condiții normale de lucru. Există mai multe reguli de scalare, care vor fi prezentate în cele ce urmează.

5.7.1. Norme de scalare

5.7.1.1. Scalarea după normă l_1

Se analizează toate nodurile în care ar putea apărea depășiri și fiecare nod din rețea este constrâns să aibă o amplitudine mai mică decât 1, pentru a evita depășirea. Dacă $w_i[n]$ reprezintă valoarea variabilei asociată nodului i iar $h_i[n]$ este răspunsul la impuls de la nodul de intrare, căruia îi este asociată variabila $x[n]$, până la nodul i , atunci se poate scrie

$$|w_i[n]| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} x[n-m] h_i[m] \right|. \quad (5.149)$$

Considerând că $x[n-m]$ are valoarea maximă x_{\max} , rezultă

$$|w_i[n]| \leq x_{\max} \sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]|. \quad (5.150)$$

O condiție suficientă ca $|w_i[n]| < 1$ este ca

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]|} \quad (5.151)$$

pentru toate nodurile din rețea. Mărimea $l_1 = \|h_i\|_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]|$ se numește

normă l_1 a lui h_i . Dacă x_{\max} nu satisfacă ecuația (5.151), atunci se poate

multiplica $x[n]$ cu factorul de scalare $s_1 < \min_i \left\{ \frac{1}{\|h_i\|_1} \right\}$ la intrarea

sistemului, astfel încât $s_1 x_{\max}$ să satisfacă (5.151) pentru toate nodurile din rețea, adică

$$s_1 x_{\max} < \frac{1}{\max_i \left[\sum_{m=0}^{\infty} |h_i[m]| \right]} \quad (5.152)$$

Scalând intrarea pe această cale se garantează că depășirea nu apare niciodată la nici unul din nodurile de rețea. La ieșire se compensează scalarea prin înmulțirea cu $\frac{1}{s_1}$, astfel încât să nu se modifice funcția de transfer a filtrului. Relația (5.152) conduce la o

scalare foarte severă, care se mai numește și *scalare de sumă*. În practică scalarea nu este făcută niciodată aşa puternic, pentru că înrăutățește raportul semnal-zgomot, fapt ce va fi arătat ulterior.

5.7.1.2. Scalarea după normă $\| \cdot \|_\infty$

Dacă se dispune de cunoștințe suplimentare despre intrare, se poate alege factorul de scalare, s_∞ , mai mare, astfel încât să se garanteze lipsa depășirii. Dacă intrarea este un semnal de bandă îngustă modelat cu $x[n] = x_{\max} \cos(\omega_0 n)$, variabilele de noduri vor fi [39]

$$w_i[n] = |H_i(\omega_0)| x_{\max} \cos[\omega_0 n + \angle H_i(\omega_0)] \quad (5.153)$$

Depășirea este evitată pentru toate semnalele armonice dacă

$$\max_{i, |\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)| x_{\max} < 1 \quad (5.154)$$

Mărimea $\| H_i \|_\infty = \max_{|\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)|$ se numește normă $\| \cdot \|_\infty$ a lui H_i .

Dacă intrarea este scalată prin factorul de scalare $s_\infty < \min_i \left\{ \frac{1}{\| H_i \|_\infty} \right\}$ rezultă

$$s_\infty x_{\max} < \frac{1}{\max_{i, |\omega| \leq \pi} |H_i(\omega)|} \quad (5.155)$$

5.7.1.3. Scalarea după normă $\| \cdot \|_2$

O altă abordare posibilă este de a scala intrarea astfel încât energia fiecărei variabile de nod să fie mai mică sau egală cu energia totală a secvenței de intrare. Se poate obține scalarea corespunzătoare folosind inegalitatea Schwartz-Buniakovski și teorema lui Parseval [63].

$$\begin{aligned} |w_i[n]|^2 &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} h_i[k] x[n-k] \right|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_i[k]|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |x[n-k]|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |h_i[k]|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |x[k]|^2 \end{aligned} \quad (5.156)$$

Pentru a asigura condiția de nedepășire a energiei semnalului de intrare de către varialile de noduri, adică $|w_i[n]|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2$, unde

$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|^2 = E_x$ este energia semnalului de intrare, se poate multiplica secvența $x[n]$ cu factorul de scalare s_2 , ales astfel încât

$$s_2^2 \leq \frac{1}{\max_i \sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|^2} = \frac{1}{\max_i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_i(\omega)|^2 d\omega} \quad (5.157)$$

Mărimea $l_2 = \|h_i\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|^2 \right)^{1/2}$ se numește *normă* l_2 a lui h_i .

5.7.1.4. Scalarea după normă l_p

Metodele anterioare pot fi generalizate în sensul normei l_p .

Norma l_p unei transformate Fourier $H(\omega)$ este definită ca [39]

$$l_p = \|H\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}} \quad (5.158)$$

Se poate arăta că, în general, este îndeplinită inegalitatea [26]

$$|w_i[n]| \leq \|X\|_p \|H_i\|_q \quad (5.159)$$

unde p și q sunt întregi astfel încât

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (5.160)$$

Pentru orice secvență $h[n]$ cu transformata Fourier $H(\omega)$ există relația [23]

$$\|H\|_\infty \geq \|H\|_p, \text{ oricare ar fi } p \in N^*.$$

Ca urmare, scalarea l_∞ reduce nivelele de semnal într-o măsură mai mare decât alte scalări de tip l_p . Cele mai folosite scalări sunt l_2 , l_∞ , precum și scalarea de sumă. Se poate arăta că există relația [23]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|^2 \leq \max_{i,\omega} |H_i(\omega)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h_i[n]|, \quad (5.161)$$

adică $l_2 \leq l_\infty \leq l_1$.

Dintre acestea, cea mai severă este scalarea de sumă, care este și dificil de calculat. Cel mai ușor de evaluat analitic este relația (5.157), deoarece această integrală poate fi calculată folosind teorema reziduurilor a lui Cauchy [1].

Deoarece în implementarea filtrelor recursive intervin mai multe puncte de sumare, ieșirea fiecărui trebuie scalată pentru a evita depășirea, deci vor fi mai multe răspunsuri la impuls $h_i[n]$ și funcții de sistem corespunzătoare, $H_i(z)$, care fac legătura între intrarea $x[n]$ și semnalele intermediare $w_i[n]$.

5.7.2. Interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot

Normele de scalare l_2, l_∞, l_1 reprezintă trei moduri de a obține coeficienți de scalare pentru intrarea unui filtru digital. Prin scalarea intrării cu factorul $s_p, p = 1, \infty, 2$, raportul semnal / zgomot de cuantizare la ieșire scade.

În figura 22 a,b, se prezintă un sistem IIR de ordinul doi, implementat în forma directă I și forma directă II, cu intrarea scalată. În figura 22 a, factorul de scalare s-a combinat cu coeficienții b_k , astfel încât sursa de zgomot este aceeași ca în cazul fără scalare, prezentat în figura 5.15. Deoarece acest zgomot este filtrat din nou de partea de filtru care conține polii, puterea zgomotului de ieșire este aceeași pentru sistemul nescalat, reprezentat în figura 5.15 și cel scalat, reprezentat în 5.22a. Pentru sistemul din figura 22a, funcția de sistem este $s_p H(z)$, față de $H(z)$ a sistemului cu intrarea nescalată și, corespunzător, ieșirea este $y'[n] = s_p y[n]$, în loc de $y[n]$. Deoarece zgomotul este injectat după scalare, raportul dintre puterea semnalului și cea a zgomotului în sistemul scalat este de s_p^2 ori raportul semnal/zgomot pentru sistemul nescalat din figura 5.15. Cum $s_p < 1$ atunci când este necesară scalarea, raportul semnal / zgomot la ieșirea filtrului se reduce prin scalare.

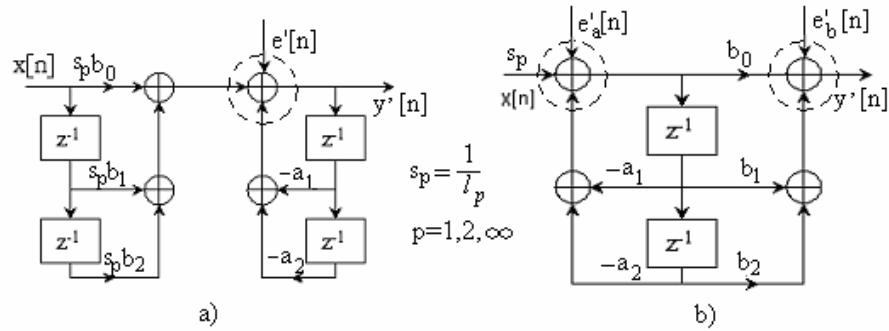


Figura 5.22. Scalarea sistemelor de ordinul doi. a) Forma directă I, b) Forma directă II

În cazul implementării în forma directă II din figura 22b factorul de scalare trebuie determinat astfel încât să se evite depășirea în ambele noduri încercuite. Funcția de sistem a filtrului scalat este $s_p H(z)$. Factorul de scalare s_p , $p = 1, \infty, 2$, contribuie cu o sursă suplimentară de zgomot la $e_a[n]$ a sistemului nescalat reprezentat în figura 5.17. Acest zgomot este filtrat în același mod de sistemul nescalat și de cel scalat. Prin urmare, puterea semnalului se multiplică cu s_p^2 , iar puterea zgomotului de ieșire este dată de relația (5.136), cu N înlocuit cu $(N+1)$, astfel încât raportul semnal/zgomot se reduce și în acest caz, dacă se efectuează scalarea pentru a evita depășirea.

În concluzie, cu cât o regulă de scalare conduce la un factor de scalare mai scăzut, se reduce probabilitatea depășirii, dar se reduce și raportul semnal/zgomot de cuantizare. Acest fapt reprezintă *interacțiunea dintre domeniul dinamic și zgomot*. Din acest motiv prezintă interes găsirea unor structuri caracterizate de zgomot de cuantizare minim în condiții de scalare precizate. Utilizarea unor structuri în formă directă de ordin mare nu conduce la rezultate satisfăcătoare din acest punct de vedere, astfel încât sunt preferate structurile în cascadă sau în paralel, realizate cu secțiuni de ordinul doi.

În continuare sunt date schemele de scalare pentru structurile în cascadă și în paralel.

5.7.3. Scalarea în realizarea în cascadă și în paralel

5.7.3.1. Analiza realizării în cascadă

În figura 5.23 este prezentat un sistem implementat cu K module de ordinul doi, fiecare din acestea implementat în forma canonica, conectate în cascadă.

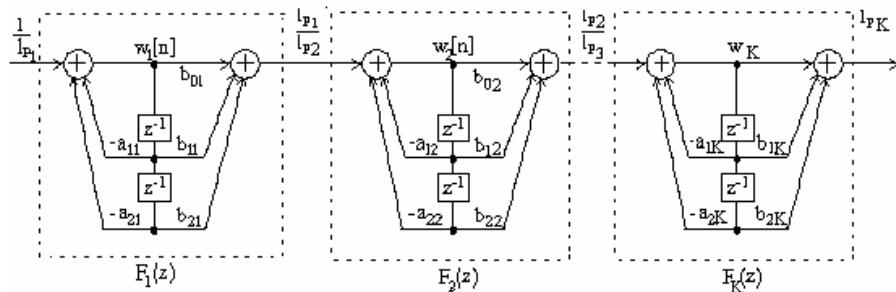


Figura 5.23. Scalarea la realizarea în cascadă a unui filtru cu K celule de ordinul doi

Se notează cu F_k , $k=1,\dots,K$, funcția de sistem a unui modul de ordinul doi.

$$F_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \quad (5.162)$$

$l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$; $i=1, 2, 3, \dots, K$, $p = 1, 2, \infty$, reprezintă norma după care s-a efectuat scalarea, iar $H_i(\omega)$ - funcția de transfer de la intrare la nodul w_i .

$$H_i(z) = \frac{\prod_{k=1}^{i-1} F_k(z)}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}} \quad (5.163)$$

coeficienții $\frac{l_{pi}}{l_{p(i+1)}}$ pot fi încorporați în b_{0i}, b_{1i}, b_{2i} .

Ținând seama de cele prezentate în paragraful precedent, scalarea este propriu-zis necesară numai pentru secțiunile pentru care normele $l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$ sunt supraunitare. Dacă, însă, $\|H_i(\omega)\|_p \leq 1$, rezultă că nu este necesară scalare pentru celula respectivă, ceea ce ar corespunde unui factor de scalare unitar, fără efect asupra zgomotului de cuantizare. Totuși, dacă se scalează intrarea într-o secțiune de ordinul doi cu un factor supraunitar, care va amplifica semnalul, va crește raportul semnal/zgomot, prin utilizarea eficientă a gamei dinamice a filtrului. Astfel, scalarea poate fi privită nu numai ca un mod de a evita depășirea, ci și de adaptare a nivelului semnalului la gama dinamică a filtrului.

În cazul unui filtru numeric IIR de ordin mare realizat prin conectarea în cascadă a unor structuri de ordinul doi, puterea zgomotului la ieșire depinde de modul în care polii și zerourile sunt împerecheate pentru a forma structuri de ordinul doi și de ordinea secțiunilor în cascadă. Se poate observa că pentru K secțiuni de ordin doi există $K!$ posibilități de a împerechea polii și zerourile și $K!$ posibilități de a ordona secțiunile de ordinul doi rezultate. Rezultă în total $(K!)^2$ sisteme diferite. În plus, se poate alege oricare din formele directe I sau II (sau transpușele lor) pentru implementarea secțiunilor de ordinul doi. Chiar și pentru sisteme de ordin mic problema împerecherii și ordonării nu este simplă, deoarece necesită un volum mare de calcule.

Se definește *factorul* (sau *câștigul*) de vârf pentru celula k cu relația

$$\rho_k = \frac{\max_{\omega} |H_k(\omega)|}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (5.164)$$

În ciuda dificultății găsirii unei împerecheri și ordonări optime, Jackson a arătat că o grupare optimă minimizează factorii de vârf și a găsit că se pot obține rezultate bune aplicând următoarele reguli simple [23]:

1. Polul care este cel mai apropiat de cercul de rază unitate din planul Z, trebuie împerecheat cu zeroul cel mai apropiat de el;
2. Regula 1 se aplică repetat până ce toți polii și zerourile au fost împerechate;
3. Secțiunile de ordinul doi rezultate trebuie ordonate în funcție de apropierea polilor de cercul unitate, fie în ordinea crescătoare, fie descrescătoare a apropiierii polilor de cercul unitate.

Regulile de împerechere sunt bazate pe observația că subsistemele cu câștig (factor) de vârf foarte mare sunt nedorite pentru că ele pot cauza depășiri și pot amplifica zgomotul de cuantizare. Împerechind un pol ce este apropiat de cercul unitate, cu un zerou adiacent se tinde să se reducă câștigul de vârf al secțiunii.

O motivație pentru regula 3 este aceea că pentru ca spectrul zgomotului de ieșire să nu aibă o alură ascuțită, cu un maxim puternic în apropierea unui pol ce este apropiat de cercul de unitate din planul Z, este de dorit ca acești poli să fie la începutul schemei în cascadă. Pe de altă parte, răspunsul în frecvență la ieșirea unui anumit nod implică produsul răspunsurilor în frecvență ale subsistemelor care preced nodul. Astfel, pentru a evita reducerea excesivă a nivelului de semnal în etajele anterioare ale cascadei ar trebui ca polii ce sunt apropiati de cercul unitate să fie plasati ultimii în cascadă. Se observă că problema ordonării secțiunilor depinde de o varietate de factori, cum ar fi dispersia totală a zgomotului de ieșire și forma spectrului zgomotului de ieșire. Jackson a folosit norme l_p pentru a cuantifica analiza problemei împerecherii și ordonării polilor și zerourilor și a elaborat o serie de reguli empirice pentru obținerea de rezultate satisfăcătoare, fără a evalua toate posibilitățile.

De multe ori, pentru obținerea unui zgomot cât mai mic, celulele se ordonează în sens crescător al factorului de vârf. În figura 5.24 este prezentată ordonarea secțiunilor de ordinul doi în cascadă în ordinea

crescătoare a selectivității, astfel încât celula cea mai selectivă să filtreze zgomotele provenite de la toate filtrelle, atenuându-le.

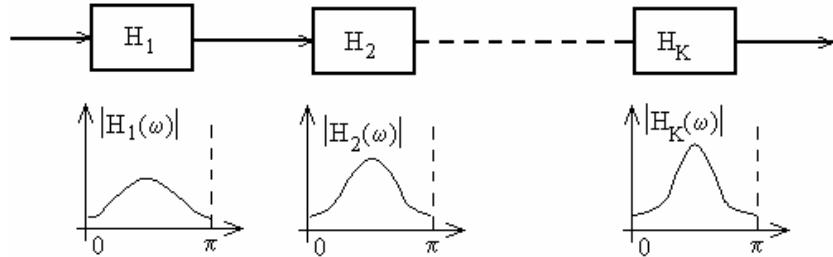


Figura 5. 24. Ordonarea secțiunilor de ordinul doi în cascadă în ordinea crescătoare a selectivității acestora

Următorul exemplu ilustrează punctul de vedere conform căruia ordonarea în cascadă a secțiunilor este importantă în controlarea zgomotului de rotunjire a produselor la ieșirea întregului sistem.

Exemplul 5.11.

Să se determine dispersia zgomotului cauzat de rotunjirea produselor, la ieșirea realizării în cascadă a filtrului cauzal, cu funcția de sistem

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

unde $H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$; $H_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$

Soluție. Fie $h[n]$, $h_1[n]$, și $h_2[n]$ răspunsurile la impuls corespunzătoare funcțiilor de transfer $H(z)$, $H_1(z)$ și, respectiv, $H_2(z)$. Acestea sunt:

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad h_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], \quad h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Cele două realizări în cascadă sunt prezentate în figura 5.25.

În prima realizare în cascadă, dispersia zgomotului la ieșire este

$$\sigma_{z1}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] + \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] \right]$$

În a doua realizare în cascadă, dispersia este

$$\sigma_{z_2}^2 = \sigma_e^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] + \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = 1,83$$

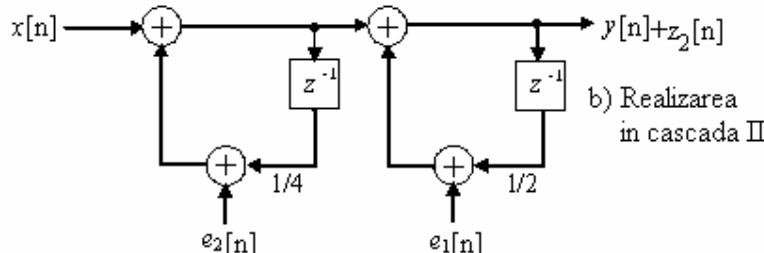
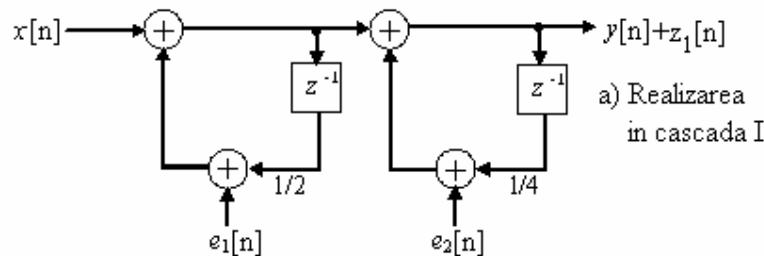


Figura 5. 25. Realizări în cascadă

În consecință,

$$\sigma_{z_1}^2 = 2,90\sigma_e^2$$

$$\sigma_{z_2}^2 = 3,16\sigma_e^2$$

iar raportul dispersiilor zgomotului de ieșire este $\frac{\sigma_{z_2}^2}{\sigma_{z_1}^2} = 1,09$.

Prin urmare, puterea zgomotului în a doua realizare în cascadă este cu 9% mai mare decât în primul caz.

5.7.3.2. Analiza realizării în paralel

În figura 5.26 este prezentat un sistem implementat cu K module de ordinul doi, conectate în paralel.

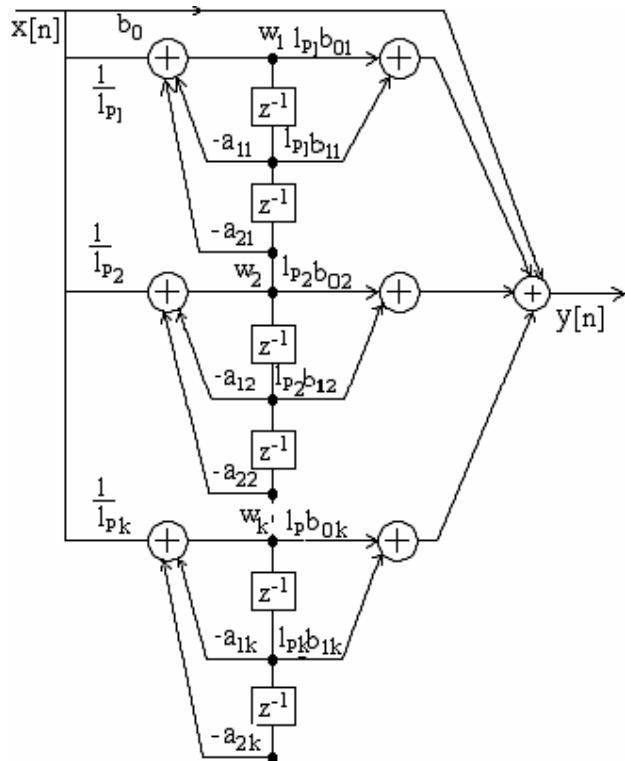


Figura 5.26. Scalarea la realizarea în paralel a unui filtru cu K celule de ordinul 2

$l_{pi} = \|H_i(\omega)\|_p$; $i=1, 2, 3, \dots, K$, $p = 1, 2, \infty$, reprezintă norma după care s-a efectuat scalarea.

$H_i(\omega)$ - funcția de transfer de la intrare $x[n]$ la nodul w_i . Funcția de sistem corespunzătoare este

$$H_i(z) = \frac{1}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}; i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.165)$$

Analiza efectelor de cuantizare într-un filtru de ordin doi poate fi direct aplicată la filtrele de ordin superior bazate pe realizări în paralel. În

acest caz, fiecare secțiune de ordinul doi este independentă de celelalte secțiuni și, deci, puterea totală a zgomotului de cuantizare la ieșire este suma puterii zgomotului de cuantizare a fiecărei secțiuni individuale. Tehnicile de împerechere enunțate anterior pot fi aplicate și la formele în paralel unde se poate arăta [23] că puterea de zgomot la ieșire este comparabilă cu cele mai bune împerecheri și ordonări la conectarea în cascadă. Forma în cascadă rămâne totuși cea mai folosită pentru structurile IIR.

Deoarece structurile IIR cu formele directe I și II includ și sistemele FIR în forma directă ca un caz particular, rezultatele și tehniciile de analiză considerate mai sus se aplică la sistemele FIR, dacă se elimină toate referirile la polii funcției de sistem și se elimină căile de reacție în toate grafurile de semnal.

Pentru sistemele FIR cu fază liniară, implementarea se poate face cu aproximativ jumătate din multiplicările sistemului FIR general, ceea ce determină reducerea la jumătate a dispersiei zgomotului la ieșire, dacă produsele sunt cuantizate înainte de adunare.

Rezultatele pentru realizările în cascadă de tip IIR sunt aplicabile și pentru realizările în cascadă de tip FIR, pentru acestea urmărindu-se numai problema ordonării secțiunilor de ordinul doi.

5.7.4. Analiza erorii de cuantizare în cazul scalării intrării

Pentru a obține o imagine mai clară a efectului erorii de cuantizare, se va considera și efectul scalării intrării. Se reia cazul filtrului cu un singur pol din exemplul 5.7 prezentat în figura 5.12. Se presupune că secvența de intrare $\{x[n]\}$ este o secvență de zgomot alb, a cărei amplitudine a fost scalată cu norma l_1 pentru a preveni depășirea la adunare. Atunci

$$|y[n]| \leq x_{\max} \sum_{n=0}^{\infty} h[n]$$

Cum se dorește ca $|y[n]| \leq 1$, rezultă

$$x_{\max} \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} h[n]} = 1 - |a| \quad (5.166)$$

Dacă se presupune $x[n]$ uniform distribuit în domeniul $(-x_{\max}, x_{\max})$, atunci, dispersia semnalului de intrare este $\sigma_x^2 = (1 - |a|)^2 / 3$.

Potrivit relației (5.125), puterea zgomotului la ieșirea filtrului este

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-a^2}.$$

Puterea semnalului de la ieșirea filtrului este

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} = \frac{\sigma_x^2}{1-a^2} \quad (5.167)$$

Raportul dintre puterea semnalului de ieșire, σ_y^2 , și puterea erorii de quantizare, σ_z^2 , este

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = (1-|a|)^2 \cdot 2^{2(b+1)} \quad (5.168)$$

Această expresie pentru raportul semnal/zgomot de la ieșirea filtrului arată prețul plătit ca urmare a scalării intrării, mai ales când polul este apropiat de cercul unitate.

Prin comparație, dacă intrarea nu este scalată și sumatorul are un număr suficient de mare de biți pentru a evita depășirea, amplitudinea semnalului este în intervalul (-1, 1). În acest caz, dispersia semnalului de intrare este $\sigma_x^2 = 1/3$, independentă de poziția polului. Atunci

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} = 2^{2(b+1)} \quad (5.169)$$

Diferența dintre rapoartele semnal/zgomot din (5.168) și (5.169) demonstrează necesitatea de a utiliza mai mulți biți la adunare, față de multiplicare. Numărul biților adiționali depinde de poziția polului și trebuie crescut odată cu mutarea polului mai aproape de cercul unitate.

În continuare, se consideră un filtru cu doi poli care, cu precizie infinită, este descris de ecuația liniară cu diferențe

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad (5.170)$$

unde $a_1 = 2r\cos\theta$ și $a_2 = -r^2$.

Când cele două produse sunt rotunjite, rezultă un sistem care este descris de ecuația neliniară cu diferențe

$$v[n] = Q_r[a_1 v[n-1]] + Q_r[a_2 v[n-2]] + x[n] \quad (5.171)$$

Sistemul este prezentat în schema bloc din figura 5.27.

Fiind două multiplicări, se produc două erori de quantizare pentru fiecare ieșire.

Prin urmare, trebuie să se introducă două secvențe de zgomot $e_1[n]$ și $e_2[n]$, care corespund ieșirilor cuantizoarelor

$$\begin{aligned} Q_r[a_1 v[n-1]] &= a_1 v[n-1] + e_1[n] \\ Q_r[a_2 v[n-1]] &= a_2 v[n-2] + e_2[n] \end{aligned} \quad (5.172)$$

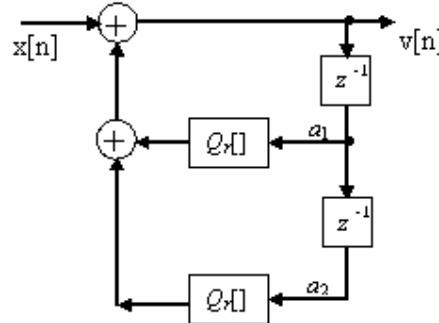


Figura 5.27 Filtru cu doi poli cu cuantizare prin rotunjire a produselor

O diagramă bloc pentru modelul corespunzător este ilustrată în figura 5.28. Se observă că secvențele de eroare $e_1[n]$ și $e_2[n]$ pot fi mutate direct la intrarea filtrului.

Ca și în cazul filtrului de ordinul întâi, ieșirea filtrului de ordin doi poate fi separată în două componente, componenta semnalului dorit și componenta erorii de cuantizare. Prima poate fi descrisă de ecuația cu diferențe

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \quad (5.173)$$

în timp ce a doua satisfacă ecuația cu diferențe

$$z[n] = a_1 z[n-1] + a_2 z[n-2] + e_1[n] + e_2[n] \quad (5.174)$$

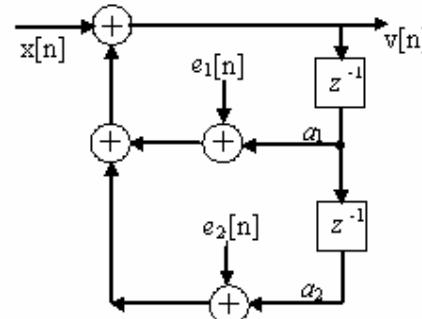


Figura 5.28 Modelul zgomotului aditiv pentru erorile de cuantizare ale unui filtru cu doi poli

Se presupune că secvențele $e_1[n]$ și $e_2[n]$ sunt necorelate.
Răspunsul la impuls al filtrului este [63]

$$h(n) = \frac{r^n}{\sin \theta} \sin((n+1)\theta) \cdot u[n] \quad (5.175)$$

Prin urmare,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] = \frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta} \quad (5.176)$$

Aplicând (5.122) se obține dispersia erorii de cuantizare la ieșirea filtrului, în forma [47]

$$\sigma_z^2 = \sigma_e^2 \left(\frac{1+r^2}{1-r^2} \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos 2\theta} \right) \quad (5.177)$$

Dacă semnalul de intrare $x[n]$ este scalat cu norma l_1 ca în (5.151) pentru a evita depășirea, puterea semnalului de ieșire este

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=0}^{\infty} h^2[n] \quad (5.178)$$

unde puterea semnalului de intrare $x[n]$ este dată de dispersia

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \right]^2} \quad (5.179)$$

În concluzie, raportul semnal/zgomot la ieșirea filtrului cu doi poli este

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{2^{2(b+1)}}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \right]^2} \quad (5.180)$$

Cu toate că este dificilă evaluarea exactă a numitorului în (5.180), este ușor să determinăm marginile superioară și inferioară ale acestuia. În particular, $|h[n]|$ este mărginită superior

$$|h[n]| \leq \frac{1}{\sin \theta} r^n \quad n \geq 0 \quad (5.181)$$

astfel încât

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \leq \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{(1-r)\sin \theta} \quad (5.182)$$

Marginea inferioară se poate obține dacă se observă că

$$|H(\omega)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \quad (5.183)$$

Dar,

$$H(\omega) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega})} \quad (5.184)$$

La $\omega=0$, care este frecvența de rezonanță a filtrului, se obține cea mai mare valoare a lui $|H(\omega)|$, deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| \geq |H(0)| = \frac{1}{(1-r)\sqrt{1+r^2 - 2r \cos 2\theta}} \quad (5.185)$$

Prin urmare, raportul semnal/zgomot este mărginit superior și inferior conform relației

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \sin^2 \theta \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \leq 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1+r^2 - 2r \cos 2\theta) \quad (5.186)$$

De exemplu, când $\theta = \pi/2$, expresia din (5.186) devine

$$2^{2(b+1)}(1-r)^2 \leq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_z^2} \leq 2^{2(b+1)}(1-r)^2(1+r)^2 \quad (5.187)$$

Termenul dominant în aceste margini este $(1-r)^2$, care poate reduce serios raportul semnal/zgomot odată cu apropierea polilor de cercul unitate. Dacă $\delta = 1-r$ este distanța de la pol la cercul unitate, raportul semnal/zgomot din (5.187) este redus cu δ^2 . Aceste rezultate servesc la întărirea aserțiunii anterioare, referitoare la necesitatea utilizării mai multor biți la adunare decât la multiplicare, ca un mecanism de evitare a erorilor rezultate din operația de scalare.

CAPITOLUL 5

ESTIMAREA SPECTRULUI DE PUTERE

Analiza spectrală a semnalelor deterministe a fost introdusă ca un mijloc de caracterizare a semnalelor în domeniul frecvență. Semnalele periodice sunt analizate în domeniul frecvență cu ajutorul seriei Fourier, iar cele aperiodice de energie finită, cu ajutorul transformatei Fourier.

În capitolul de față se urmărește estimarea caracteristicilor spectrale ale semnalelor considerate a fi procese aleatoare, pentru care, datorită fluctuațiilor aleatoare, nu este posibilă aplicarea directă a analizei Fourier, ci se adoptă o tratare statistică a lor. În particular, funcția de autocorelație a proceselor aleatoare staționare în sens larg este potrivită pentru caracterizarea lor statistică, iar transformata Fourier a acesteia, care reprezintă densitatea spectrală de putere, face legătura între domeniile timp și frecvență. În capitolul de față, problema estimării spectrale constă în determinarea componentelor spectrale ale procesului aleator staționar în sens larg, pe baza unei mulțimi finite de observații asupra procesului.

5.1. Estimarea spectrului semnalelor din observarea pe intervale de lungime finită

Lungimea finită a datelor de analizat reprezintă o limitare

esențială asupra calității estimatului spectrului de putere. Pentru semnale staționare, cu cât lungimea datelor este mai mare, cu atât va fi mai bun estimatul construit pe baza datelor. Pentru semnale nestaționare nu se poate selecta o înregistrare de lungime finită pentru estimarea spectrului, lungimea acesteia fiind determinată de parametrii statisticii semnalului. Se urmărește selectarea datelor de lungimea cea mai mică posibilă, care să permită obținerea caracteristicilor spectrale ale semnalului de date.

Una din problemele care poate apărea în metodele clasice de estimare a spectrului de putere, pe baza unor date de lungime finită, este distorsionarea spectrului datorită trunchierii datelor. Această problemă apare atât în calculul spectrului semnalelor deterministe, cât și în estimarea spectrului de putere al semnalelor aleatoare. Deoarece este mai ușor de observat efectul lungimii finite a datelor pentru un semnal determinist, se va analiza întâi acest caz, considerând ulterior semnalele aleatoare și estimarea spectrului lor de putere.

5.1.1. Calculul densității spectrale de energie

Se urmărește calculul spectrului unui semnal determinist dintr-o secvență finită de date. Secvența $x[n]$ este, de obicei, rezultatul eșantionării unui semnal continuu $x_a(t)$ cu o frecvență constantă F_s .

Se urmărește obținerea unui estimat al spectrului real dintr-o secvență de durată finită $x[n]$. Dacă $x_a(t)$ este un semnal de energie finită, adică

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt < \infty, \quad (5.1)$$

atunci transformata sa Fourier există și este dată de relația

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi F t} dt \quad (5.2)$$

Conform teoremei lui Parseval, energia semnalului este

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(F)|^2 dF \quad (5.3)$$

Cantitatea $|X_a(F)|^2$ reprezintă distribuția de energie a semnalului funcție de frecvență și se numește *densitate spectrală de energie* $S_{xx}(F)$, adică se poate scrie:

$$S_{xx}(F) = |X_a(F)|^2 \quad (5.4)$$

Pe de altă parte, $S_{xx}(F)$ este transformata Fourier a *funcției de autocorelație* $R_{xx}(\tau)$ a semnalului de energie finită

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)x_a(t+\tau)dt \quad (5.5)$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} S_{xx}(F) &= F \{ R_{xx}(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F \tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)x_a(t+\tau) e^{-j2\pi F \tau} dt d\tau \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabilă $t + \tau = p$, $d\tau = dp$, se obține

$$\begin{aligned} S_{xx}(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)x_a(p) e^{-j2\pi F p} e^{j2\pi F t} dt dp = \\ &= X_a(F) X_a^*(F) = |X_a(F)|^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

În continuare, se calculează densitatea spectrală de energie a semnalului $x_a(t)$ din eșantioanele sale, prelevate cu frecvența F_s . Pentru a evita eroarea alias, banda semnalului, B , se limitează prin prefiltrare, astfel încât $F_s > 2B$.

Spectrul semnalului eșantionat $x[n]$ este

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \text{ sau } X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \quad (5.7)$$

care se exprimă în funcție de spectrul semnalului analogic, în forma [70]

$$X(f) = X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \quad (5.8)$$

În absența erorii alias, în domeniul fundamental $|F| \leq \frac{F_s}{2}$ există relația

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \quad (5.9)$$

Densitatea spectrală de energie a semnalului eșantionat este

$$S_{xx}(f) = S_{xx}\left(\frac{F}{F_s}\right) = \left|X\left(\frac{F}{F_s}\right)\right|^2 = F_s^2 |X_a(F)|^2 \quad (5.10)$$

Se poate arăta ușor că, dacă funcția de autocorelație a semnalului eșantionat este

$$r_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+k] \quad (5.11)$$

atunci, transformată sa Fourier este egală cu densitatea spectrală de energie, $S_{xx}(f)$, adică

$$S_{xx}(f) = F\{r_{xx}[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}[k]e^{-j2k\pi f}. \quad (5.12)$$

Din cele prezentate anterior rezultă două metode de calcul pentru densitatea spectrală de energie:

1) *metoda directă*, care implică calculul transformatei Fourier pentru $\{x[n]\}$ și apoi

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.13)$$

2) *metoda indirectă sau corelativă*, care necesită doi pași de calcul:

- a) calculul funcției de autocorelație $r_{xx}[k]$ din $x[n]$,
- b) transformata Fourier a funcției $r_{xx}[k]$, cu relația (5.12).

În practică, se poate calcula densitatea spectrală de energie numai pentru secvențe finite $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$. Limitarea duratei unei secvențe $x[n]$ la N puncte, echivalează cu multiplicarea lui $x[n]$ cu o fereastră rectangulară, astfel încât

$$\tilde{x}[n] = x[n]w_R[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.14)$$

Această multiplicare echivalează cu conoluția spectrelor [26], adică

$$\tilde{X}(f) = X(f) * W_R(f) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X(\alpha)W_R(f - \alpha)d\alpha \quad (5.15)$$

Spectrul funcției $\tilde{X}(f)$ aproximează mai fidel spectrul $X(f)$, dacă spectrul $W_R(f)$ este "îngust" în comparație cu $X(f)$, fapt ce implică $w_R[n]$ de lungime suficient de mare [71]. Chiar dacă $W_R(f)$ este "îngust" față de $X(f)$, conoluția dintre $X(f)$ și lobii laterali ai lui $W_R(f)$ are ca rezultat lobi laterali în $\tilde{X}(f)$ în benzi de frecvență în care spectrul semnalului $x[n]$ este nul. Această energie din lobii laterali se numește *reziduală* sau *surgere spectrală* (leakage). Pentru a ilustra problema surgerii spectrale, se consideră următorul exemplu.

Exemplul 5.1.

Se consideră un semnal cu spectrul $X(f) = \begin{cases} 1, |f| \leq 0,1 \\ 0, \text{în rest} \end{cases}$.

Să se efectueze conoluția dintre semnalul $X(f)$ și spectrul ferestrei rectangulare, cu lungimea $N=61$.

Soluție

Spectrul $W_R(f)$ al ferecării rectangulare cu lungimea $N=61$ este prezentat în figura 5.1. Se observă că lățimea lobului principal al funcției fereastră este $\Delta\omega = 4\pi/61$ sau $\Delta f = 2/61$, care este

îngust comparativ cu $X(f)$. Convoluția dintre $X(f)$ și $W_R(f)$ este ilustrată în figura 5.2. Se observă că energia s-a “scurs” în domeniul de frecvență $0,1 < |f| \leq 0,5$, unde $X(f) = 0$. Acest lucru este determinat de lățimea lobului principal al lui $W_R(f)$, care cauzează o lățire a lui $X(f)$ în afara domeniului $|f| \leq 0,1$. Energia din lobii laterali ai lui $\tilde{X}(f)$ se datorează prezenței lobilor laterali în $W_R(f)$ cu care se efectuează convoluția lui $X(f)$.

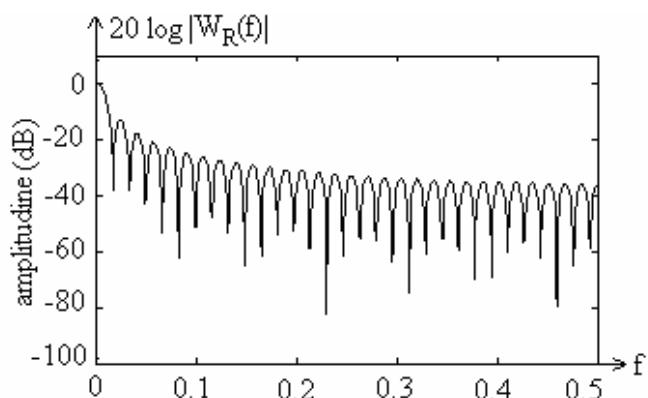


Fig. 5.1. Spectrul fereștei rectangulare de lungime $M=61$

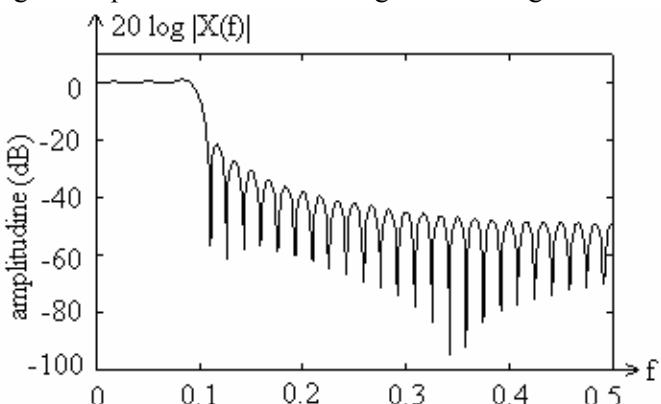


Fig.5.2. Spectrul obținut din convoluția fereștei rectangulare de lungime $M=61$ cu spectrul filtrului ideal din exemplul 5.1.

Ca și în cazul proiectării filtrelor FIR prin metoda fereștrelor, scurgerea spectrală din cauza lobilor laterali poate fi redusă prin

selectarea ferestrelor cu lobi laterali reduși, fapt care determină o creștere a netezirii sau lățirii caracteristicilor spectrale ale lui $X(f)$ [71].

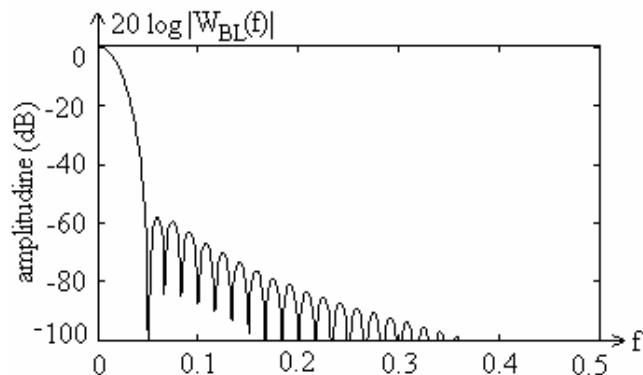


Fig. 5.3. Spectrul ferestrei Blackman de lungime $M=61$

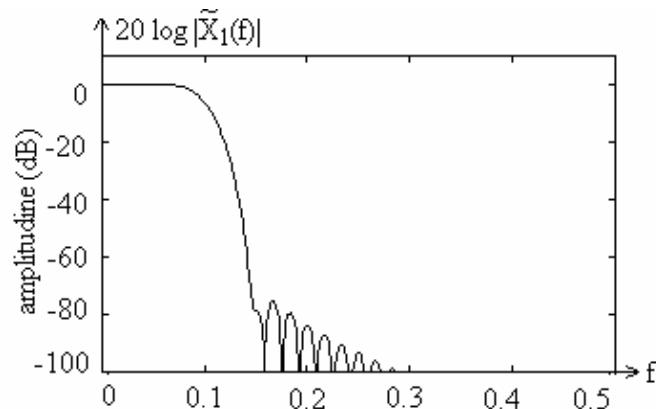


Fig.5.4. Spectrul obținut din convinguția ferestrei Blackman de lungime $M=61$ cu spectrul filtrului ideal din exemplul 5.1.

De exemplu, folosirea unei ferestre Blackman de aceeași lungime $N=61$, al cărui spectru este reprezentat în figura 5.3, pentru același semnal din exemplul 5.1, are ca rezultat caracteristica spectrală $\tilde{X}_1(f)$ din figura 5.4. Se observă că scurgerea spectrală s-a redus, dar lățimea lobulu principal a crescut cu aproximativ 50%.

Lătirea spectrului ce urmează a fi estimat, ca urmare a trunchierii, reprezintă o problemă în cazul în care separația de frecvență între componentele unui semnal este mică, cum este cazul semnalului $X(f) = X_1(f) + X_2(f)$ reprezentat în figura 5.5.

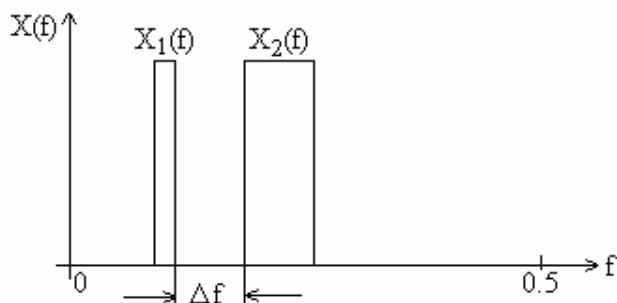


Fig.5.5. Spectrul unui semnal cu două componente de bandă îngustă, apropiate

În cazul acestui semnal, pot apărea două probleme:

1- dacă lungimea datelor și, implicit, a ferestrei, scade, cei doi lobi spectrali principali rezultați în urma conoluției spectrului ferestrei cu $X(f)$ cresc în lățime,

2- dacă separația de frecvență Δf devine foarte mică, este posibil ca cei doi lobi principali ai spectrului să se unească.

În aceste cazuri există o limită la care cei doi lobi sunt încă distinți. Această limită se numește *rezoluție*. De obicei, rezoluția se definește ca fiind lățimea de bandă a lobului principal măsurată la jumătate din nivelul puterii maxime, adică banda corespunzătoare la -6dB a spectrului de putere sau, echivalent, lățimea lobului principal al spectrului de amplitudine la -3dB. În concluzie, componentele semnalului $\tilde{X}(f) = X(f) * W(f)$, dacă lățimea lobului principal al ferestrei nu este semnificativ mai mică decât separația de frecvență Δf dintre $X_1(f)$ și $X_2(f)$.

Din cele prezentate anterior se observă ca densitatea spectrală de energie a secvenței mărită cu o fereastră este o aproximare a spectrului real al secvenței, adică

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = |\tilde{X}(f)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2 \quad (5.16)$$

Spectrul $S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f)$ poate fi calculat cu ajutorul DFT în N puncte [70]:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi k n / N} \quad (5.17)$$

$$\left| \tilde{X}[k] \right|^2 = S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) \Big|_{f=k/N} = S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) \quad (5.18)$$

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}\left(\frac{k}{N}\right) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j2\pi n k / N} \right|^2 \quad (5.19)$$

care este o versiune distorsionată a spectrului real $S_{xx}(k/N)$.

5.1.2. Estimarea funcției de autocorelație și a densității spectrale de putere a semnalelor aleatoare. Periodograma

Semnalelor de energie finită considerate în paragraful precedent, li se poate aplica transformata Fourier, fiind caracterizate în domeniul frecvență de densitate spectrală de energie. Spre deosebire de acestea, semnalele caracterizate de procese aleatoare staționare nu au energie finită și, deci, nu li se poate aplica transformata Fourier. Astfel de semnale au, în general, putere medie finită, motiv pentru care acestea vor fi caracterizate de *densitatea spectrală de putere*.

Dacă $x(t)$ este un proces aleator, staționar în sens larg, funcția sa de autocorelație este

$$B_{xx}(\tau) = E[x(t_i)x(t_i + \tau)] \quad (5.20)$$

unde $E[\bullet]$ reprezintă media statistică.

Pentru simplificarea scrierii, uneori se renunță la indicele i , adică se va scrie $E\{x(t_i)\} = E\{x(t)\}$. Din acest motiv, prin abuz de limbaj, se spune valoarea medie statistică a procesului aleator $x(t)$ și nu valoarea medie statistică a variabilei aleatoare $x(t_i)$ obținută din procesul aleator $x(t)$.

Conform teoremei Wiener-Khintcine, densitatea spectrală de putere a unui proces aleator staționar este transformata Fourier a funcției de autocorelație, adică [48]:

$$S_{xx}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \quad (5.21)$$

În practică nu se dispune de toate realizările particulare ale procesului aleator din care să poată fi determinată funcția de autocorelație $B_{xx}(\tau)$, motiv pentru care se urmărește estimarea funcției de autocorelație a procesului pe baza unei singure realizări a acestuia. Pentru ca acest lucru să fie posibil, este necesar ca procesul aleator să fie ergodic. Pe baza unei singure realizări particulare se poate calcula funcția de autocorelație temporală

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau) dt, \quad (5.22)$$

unde $2T_0$ este intervalul de observare a realizării particulare a procesului aleator. Dacă procesul staționar este ergodic în medie și corelație, atunci

$$B_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau) dt \quad (5.23)$$

Aceasta relație justifică folosirea funcției de autocorelație temporale $R_{xx}(\tau)$ ca un estimat al funcției de autocorelație statistice $B_{xx}(\tau)$.

Mai mult, transformata Fourier a lui $R_{xx}(\tau)$ furnizează un estimat $P_{xx}(F)$ al spectrului densității de putere, adică

$$\begin{aligned}
P_{xx}(F) &= \int_{-T_0}^{T_0} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau = \\
&= \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} \left[\int_{-T_0}^{T_0} x(t)x(t+\tau) dt \right] e^{-j2\pi F\tau} d\tau
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Dacă se consideră toate realizările particulare ale procesului, densitatea spectrală de putere se poate determina cu relația

$$S_{xx}(F) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E[P_{xx}(F)] = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x(t) e^{-j2\pi F t} dt \right|^2 \right\} \tag{5.25}$$

$P_{xx}(F)$ se poate calcula în două moduri: prin metoda directă, ca în relația (5.25) și prin metoda indirectă, în care se calculează întâi $R_{xx}(\tau)$ și apoi transformata sa Fourier.

Se va analiza în continuare estimarea densității spectrale de putere din eșantioanele unei singure realizări a procesului aleator. Se presupune că realizarea particulară $x_a(t)$ este eșantionată cu o frecvență $F_s > 2B$, unde B este cea mai mare frecvență din spectrul densității de putere, rezultând o secvență de durată finită $x[n]$; $0 \leq n \leq N-1$.

Din aceste eșantioane se poate calcula estimatul funcției de autocorelație, $r'_{xx}[m]$, cu relația

$$\begin{cases} r'_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ r'_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m], & m = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \tag{5.26}$$

și apoi transformata sa Fourier

$$P'_{xx}(f) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} r'_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \tag{5.27}$$

Factorul de normalizare $N - |m|$ din (5.26) se impune pentru ca valoarea medie statistică a estimatului să fie egală cu funcția de

autocorelație statistică. Într-adevăr, considerând mulțimea realizărilor particulare trunchiate ale procesului, se poate scrie

$$E[r_{xx}^{\cdot}[m]] = \begin{cases} \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x[n]x[n+m]] = \gamma_{xx}[m], & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=|m|}^{N-1} E[x[n]x[n+m]] = \gamma_{xx}[m], & m = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad (5.28)$$

unde $\gamma_{xx}[m]$ este funcția de autocorelație statistică a lui $x[n]$.

Deoarece valoarea medie a estimatului funcției de autocorelație este egală cu funcția de autocorelație statistică, estimatul $r_{xx}^{\cdot}[m]$ se spune că este *nedeplasat*.

Dispersia acestuia se calculează după cum urmează:

$$\text{var}[r_{xx}^{\cdot}[m]] = E[r_{xx}^{\cdot}[m]] - (E[r_{xx}^{\cdot}[m]])^2 \quad (5.29)$$

Pentru calculul acestei mărimi se folosește relația [61]

$$\begin{aligned} E(x_1x_2x_3x_4) &= E(x_1x_2)E(x_3x_4) + E(x_1x_3)E(x_2x_4) + \\ &+ E(x_1x_4)E(x_2x_3) \end{aligned} \quad (5.30)$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 , sunt variabile aleatoare gaussiene, de medie zero, dependente.

Cu (5.30) și (5.26), relația (5.29) devine pentru $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{var}(r_{xx}^{\cdot}[m]) &= \frac{1}{(N-m)^2} E\left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]x[k]x[k+m]\right) - \\ - \gamma_{xx}^2[m] &= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} E(x[n]x[n+m])E(x[k]x[k+m]) + \right. \\ &\quad \left. E(x[n]x[k])E(x[n+m]x[k+m]) + E(x[n]x[k+m])E(x[n+m]x[k]) \right) - \\ - \gamma_{xx}^2[m] &= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[m] + \gamma_{xx}^2[n-k] + \right. \\ &\quad \left. \gamma_{xx}[n-k-m]\gamma_{xx}[n-k+m] \right) - \gamma_{xx}^2[m] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{n=0}^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[n-k] + \gamma_{xx}[n-k-m]\gamma_{xx}[n-k+m] \right)$$

Cu schimbarea de variabilă n-k=p, relația devine

$$\begin{aligned}
\text{var}(r_{xx}[m]) &= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\sum_{k=0}^{N-m-1} \sum_{p=-k}^{N-m-1-k} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m]\gamma_{xx}[p+m] \right) = \\
&\sum_{p=0}^{N-m-1} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m]\gamma_{xx}[p+m] + \sum_{p=-1}^{N-m-2} \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m]\gamma_{xx}[p+m] \\
&+ \dots + \sum_{p=-N+m+1}^0 \gamma_{xx}^2[p] + \gamma_{xx}[p-m]\gamma_{xx}[p+m] = \\
&= \frac{1}{(N-m)^2} \left(\gamma_{xx}^2[0] + \gamma_{xx}^2[1] + \dots + \gamma_{xx}^2[N-m-1] + \gamma_{xx}[-m]\gamma_{xx}[m] + \right. \\
&+ \gamma_{xx}[1-m]\gamma_{xx}[1+m] + \dots + \gamma_{xx}[N-m-1-m]\gamma_{xx}[N-m-1+m] + \\
&\vdots \\
&+ \left. \gamma_{xx}^2[-N+m+1] + \gamma_{xx}^2[-N+m] + \dots + \gamma_{xx}^2[-1] + \gamma_{xx}^2[0] + \right. \\
&\left. \gamma_{xx}[-N+m+1-m]\gamma_{xx}[-N+m+1+m] + \dots + \gamma_{xx}[-m]\gamma_{xx}[m] \right) = \\
&= \frac{1}{(N-m)^2} \left((N-m)(\gamma_{xx}^2[0] + \gamma_{xx}[-m]\gamma_{xx}[m]) + (N-m-1) \cdot \right. \\
&\left. (\gamma_{xx}^2[1] + \gamma_{xx}[1-m]\gamma_{xx}[1+m]) + (N-m-2)(\gamma_{xx}^2[2] + \gamma_{xx}[2-m]\gamma_{xx}[2+m]) \right. \\
&+ \dots + (N-m-(N-m-1))(\gamma_{xx}^2[N-m-1] + \gamma_{xx}[N-m-1-m] \cdot \\
&\gamma_{xx}[N-m-1+m]) + \dots + (N-m-1)(\gamma_{xx}^2[-1] + \gamma_{xx}[-1-m]\gamma_{xx}[-1+m]) + \\
&+ \dots + (N-m-(N-m-1))(\gamma_{xx}^2[-N+m+1] + \gamma_{xx}[-N+m+1-m] \cdot \\
&\left. \gamma_{xx}[-N+m+1+m] \right) = \\
&\frac{1}{(N-m)^2} \sum_{n=-N+m+1}^{N-m-1} (N-m-n) \left(\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m] \right) = \\
&\frac{N}{(N-m)^2} \sum_{n=-N+m+1}^{N-m-1} \left(1 - \frac{m+n}{N} \right) \left(\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m] \right)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Efectuând un calcul similar, pentru $m < 0$, se obține:

$$\begin{aligned} \text{var}(r_{xx}^{\prime}[m]) &= \\ &= \frac{N}{(N - |m|)^2} \sum_{n=-N-m+1}^{N+m-1} \left(1 - \frac{-m+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.31')$$

Relațiile (5.31) și (5.31') pot fi combinate în una singură, și anume

$$\begin{aligned} \text{var}(r_{xx}^{\prime}[m]) &= \\ &= \frac{N}{(N - |m|)^2} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.31'')$$

Deoarece $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) = 1$ și dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^2[n] < \infty$, atunci

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{r_{xx}^{\prime}[m]\} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{N}{(N - |m|)^2} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Deoarece $E[r_{xx}^{\prime}[m]] = \gamma_{xx}[m]$ și dispersia estimatului converge la 0 pentru $N \rightarrow \infty$, estimatul $r_{xx}^{\prime}[m]$ se numește *consistent*.

În general, dacă N este finit, pentru valori mari ale parametrului m, estimatul $r_{xx}^{\prime}[m]$ dat de (5.26) are o dispersie mare.

Dacă estimatul se calculează cu relația

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=|m|}^{N-1} x[n]x[n+m], & -N+1 \leq m < 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

atunci, valoarea medie statistică a acestuia calculată pe mulțimea realizărilor particulare rezultă

$$E[r_{xx}[m]] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x[n]x[n+m]] = \frac{N-m}{N} \gamma_{xx}[m], & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=|m|}^{N-1} E[x[n]x[n+m]] = \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}[m], & -N+1 \leq m < 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

sau, într-o singură relație

$$E[r_{xx}[m]] = \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}[m] \quad (5.34')$$

Valoarea medie statistică a estimatului prezintă o deplasare de $\frac{|m|}{N} \gamma_{xx}[m]$.

Estimatul $r_{xx}[m]$ se spune că este *asimptotic nedeleasat*, deoarece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[r_{xx}[m]] = \gamma_{xx}[m] \quad (5.35)$$

Dispersia acestui estimat este dată de relația

$$\begin{aligned} \text{var}(r_{xx}[m]) &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+|m|+1}^{N-|m|-1} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) (\gamma_{xx}^2[n] + \gamma_{xx}[n-m]\gamma_{xx}[n+m]) \end{aligned} \quad (5.36)$$

Deoarece $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|m|+n}{N}\right) = 1$ și dacă $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}^2[n] < \infty$, atunci

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}\{r_{xx}[m]\} = 0.$$

Deoarece estimatul $r_{xx}[m]$ este asimptotic nedeleasat și dispersia sa converge la 0 pentru $N \rightarrow \infty$, se spune că acesta este un *estimat consistent* pentru $\gamma_{xx}[m]$.

În estimarea spectrului de putere se va folosi estimatul $r_{xx}[m]$ dat de (5.33).

Estimatul corespunzător al densității spectrale de putere este

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \quad (5.37)$$

Înlocuind (5.33) în (5.37), se obține

$$\begin{aligned}
P_{xx}(f) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \sum_{m=-(N-1)}^{-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \\
&\sum_{m=1}^{N-1} r_{xx}[m]e^{j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} r_{xx}[m]e^{-j2\pi fm} = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]e^{j2\pi fm} + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m]e^{-j2\pi fm} \right] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m-1} (x[n]x[n+m]e^{j2\pi fm} + x[n]x[n+m]e^{-j2\pi fm}) - \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] \right] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (x[n]x[n] + x[n]x[n]) + \sum_{n=0}^{N-2} (x[n]x[n+1]e^{j2\pi f1} + x[n]x[n+1]e^{-j2\pi f1}) + \right. \\
&+ \dots + \sum_{n=0}^0 (x[n]x[n+N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + x[n]x[n+N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}) - \\
&\left. - \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] \right] = \frac{1}{N} [x[0]x[0] + x[1]x[1] + \dots + x[N-1]x[N-1] + x[0]x[1]e^{j2\pi f1} \\
&+ x[1]e^{-j2\pi f1}x[2]e^{j2\pi f2} + \dots + x[N-2]e^{-j2\pi f(N-2)}x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + \\
&x[1]e^{-j2\pi f1}x[0] + x[2]e^{-j2\pi f2}x[1]e^{j2\pi f1} \dots + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[N-2]e^{j2\pi f(N-2)} \\
&+ \dots + x[0]x[2]e^{j2\pi f2} + \dots + x[N-3]e^{-j2\pi f(N-3)}x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + \\
&x[2]e^{-j2\pi f2}x[0] + \dots + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[N-3]e^{j2\pi f(N-3)} + \dots \\
&x[0]x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)} + x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}x[0]] = \\
&\frac{1}{N} [x[0](x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)}) + \\
&+ x[1]e^{-j2\pi f1}(x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)}) + \dots + \\
&x[N-1]e^{-j2\pi f(N-1)}(x[0] + x[1]e^{j2\pi f1} + \dots + x[N-1]e^{j2\pi f(N-1)})] = \\
&\frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi fn} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]e^{j2\pi fk} \right] = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2
\end{aligned}$$

adică

$$P_{xx}(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2, \quad (5.38)$$

Această formă a estimatului se numește *periodogramă*.

Din (5.37) se calculează valoarea medie a estimatului $P_{xx}(f)$

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f)] &= E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm}\right] = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E[r_{xx}[m]] e^{-j2\pi fm} = \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Interpretarea acestei relații este că media spectrului estimat este transformata Fourier a funcției de autocorelație înmulțită cu o fereastră, adică

$$\tilde{\gamma}_{xx}[m] = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}[m] \quad (5.40)$$

unde funcția fereastră este fereastra triunghiulară Bartlett [71].

Media spectrului estimat este

$$E[P_{xx}(f)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}[m] e^{-j2\pi fm} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f - \alpha) d\alpha \quad (5.41)$$

unde $W_B(f)$ este transformata Fourier a ferestrei Bartlett, iar $\Gamma_{xx}(f)$ este densitatea spectrală de putere ce se dorește a fi estimată.

Relația (5.41) arată că media spectrului estimat este conoluția dintre densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(f)$ și transformata Fourier a ferestrei Bartlett. Această medie este o versiune netezită a spectrului real și suferă de aceleași inconveniente de scurgere spectrală, cauzate de lungimea finită a secvenței de date.

Spectrul estimat este asimptotic nedeplasat, deoarece

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[P_{xx}(f)] = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left[\sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm}\right] = \quad (5.42)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} = \Gamma_{xx}(f)$$

Calculul dispersiei periodogrammei este, în general, relativ complicat și, tot în general, aceasta nu tinde la zero pentru $N \rightarrow \infty$. Când datele reprezintă un proces aleator gausian, dispersia se calculează după cum urmează:

Fie $x[n]$ zgomot alb, gausian, cu media nulă și dispersia σ_x^2 .

Folosind expresia momentului reunit de ordinul patru pentru variabile aleatoare gausiene dată de relația (5.30), se poate scrie

$$\begin{aligned} E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] &= \frac{1}{N^2} E[X(f_1)X(-f_1)X(f_2)X(-f_2)] = \\ &\quad \frac{1}{N^2} \{E[X(f_1)X(-f_1)]E[X(f_2)X(-f_2)] + \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$E[X(f_1)X(f_2)]E[X(-f_1)X(-f_2)] +$$

$$E[X(f_1)X(-f_2)]E[X(-f_1)X(f_2)]\}$$

$$E[X(f_1)X(f_2)] = E\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi f_1 n} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi f_2 k}\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x[n]x[k]} e^{-j2\pi f_1 n} e^{-j2\pi f_2 k} \stackrel{n+k=v}{=} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{v=n}^{N-1} \gamma_{xx}[v] e^{-j2\pi f_1 n} e^{-j2\pi f_2 (n-v)} =$$

$$\begin{aligned} &\sum_{v=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}[v] e^{j2\pi f_2 v} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi(f_1+f_2)n} = \Gamma_{xx}(f_2) \frac{1 - e^{-j2\pi(f_1+f_2)N}}{1 - e^{-j2\pi(f_1+f_2)}} = \\ &= \Gamma_{xx}(f_2) e^{-j\pi(f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{\sin \pi(f_1+f_2)} = \\ &= \sigma_x^2 e^{-j\pi(f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{\sin \pi(f_1+f_2)} \end{aligned} \tag{5.44a}$$

Similar, se calculează expresiile

$$E[X(f_1)X(-f_1)] = \sigma_x^2 N \tag{5.44b}$$

$$E[X(f_2)X(-f_2)] = \sigma_x^2 N \tag{5.44c}$$

$$E[X(-f_1)X(-f_2)] = \sigma_x^2 e^{j\pi(f_1+f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{\sin \pi(f_1+f_2)} \quad (5.44d)$$

$$E[X(f_1)X(-f_2)] = \sigma_x^2 e^{-j\pi(f_1-f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{\sin \pi(f_1-f_2)} \quad (5.44e)$$

$$E[X(-f_1)X(f_2)] = \sigma_x^2 e^{j\pi(f_1-f_2)(N-1)} \frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{\sin \pi(f_1-f_2)} \quad (5.44f)$$

Înlocuind relațiile (5.44a,b,c,d,e,f) în (5.43), se obține relația

$$E[P_{xx}(f_1)P_{xx}(f_2)] = \sigma_x^4 \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \pi(f_1+f_2)N}{N \sin \pi(f_1+f_2)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(f_1-f_2)N}{N \sin \pi(f_1-f_2)} \right]^2 \right\} \quad (5.45)$$

Particularizând (5.45) pentru $f_1 = f_2 = f$, în cazul unui proces alb, gausian, de medie nulă, rezultă

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}(f)] &= E(P_{xx}^2(f)) - (E(P_{xx}(f)))^2 = \\ &= \Gamma_{xx}^2(f) \left\{ 1 + \left[\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

care, pentru $N \rightarrow \infty$ devine

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[P_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.47)$$

În concluzie, spre deosebire de funcția de autocorelație estimată, periodograma nu este un estimat consistent al densității spectrale de putere. $P_{xx}(f)$ este un estimat asymptotic nedeplasat pentru $\Gamma_{xx}(f)$, dar, pentru o secvență de durată finită, valoarea sa medie este deplasată. Spectrul estimat suferă de efecte de netezire și scurgere spectrală, cauzate de înmulțirea cu ferestra Bartlett.

5.1.2.1. Periodograma modificată

În cazul periodogramei, un proces aleator $x[n]$ de lungime finită este echivalent cu porțiunea din proces căreia i s-a aplicat

fereastra rectangulară. Pe lângă fereastra rectangulară, se pot folosi și alte ferestre, ca Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Kaiser.

Periodograma modificată este periodograma aplicată procesului aleator trunchiat cu o fereastră oarecare $w[n]$ și este dată de

$$P_{xx}^{\text{mod}}(f) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.48)$$

unde N este lungimea ferestrei și

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2 \quad (5.49)$$

este o constantă aleasă astfel încât $P_{xx}^{\text{mod}}(f)$ să fie asimptotic nedeplasată. Cele mai folosite ferestre și caracterizările lor sunt prezentate în Tabelul 5.1.

Acest tabel arată performanțele ferestrelor uzuale, cum ar fi nivelul lobilor secundari și rezoluția. Se observă că fereastra rectangulară are cea mai bună rezoluție (cel mai îngust lob principal), astfel încât creează cea mai redusă netezire spectrală, dar prezintă cei mai mari lobi secundari, care pot masca spectre ale semnalelor mai slabe. Fereastra Hamming are cel mai întins lob principal, dar lobul lateral este mai redus.

Tabelul 5.1

Tipul ferestrei	Definiția ferestrei cauzale $w[n]$ $0 \leq n \leq N-1;$	Lățimea lobului principal	Atenuarea primului lob secundar [dB]	Rezoluția $(\Delta f)_{3dB}$
Rectangulară	1	$\frac{4\pi}{N}$	-13	$\frac{0,89}{N}$
Triunghiulară	$1 - \frac{2}{N-1} \left n - \frac{N-1}{2} \right $	$\frac{8\pi}{N-1}$	-25	$\frac{1,28}{N}$

Hanning	$0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$\frac{8\pi}{N-1}$	-31	$\frac{1,44}{N}$
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$	$\frac{8\pi}{N-1}$	-41	$\frac{1,30}{N}$
Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$	$\frac{12\pi}{N-1}$	-58	$\frac{1,68}{N}$

Caracterizarea estimatului

Urmând o procedură similară celei folosite la analiza performanțelor periodogramei, se pot obține performanțele periodogramei modificate, adică valoarea medie, dispersia și rezoluția.

Valoarea medie este dată de relația

$$E\{P_{xx}^{\text{mod}}(f)\} = \frac{1}{N} \Gamma_{xx}(f) * |W(f)|^2 \quad (5.50)$$

Unde $W(f)$ este transformata Fourier a ferestrei folosite.

Urmând un mers de calcul similar celui folosit la periodograma simplă, în cazul variabilei aleatoare gaussiene, varianța estimatului este [62]

$$\text{var}[P_{xx}^{\text{mod}}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.51)$$

Rezoluția periodogramei modificate este egală cu lățimea de bandă la -3dB a lobului principal al ferestrei. Se observă că periodograma modificată este un estimat asymptotic nedeplasat, dar neconsistent al spectrului de putere $\Gamma_{xx}(f)$.

Problemele care apar din cauza scurgerii spectrale și a rezoluției de frecvență, ca și faptul că periodograma nu este un estimat consistent, au reprezentat un motiv pentru dezvoltarea altor metode de estimare a densității spectrale de putere, ce vor fi prezentate în paragraful 5.3.

5.1.3. Folosirea Transformatei Fourier Discrete în estimarea spectrului de putere

După cum se observă din (5.16) și (5.38), densitatea spectrală de energie estimată, $S_{xx}(f)$, și periodograma $P_{xx}(f)$ pot fi calculate cu ajutorul Transformatei Fourier Discrete (DFT) care, la rândul său, se poate calcula cu algoritmii FFT [53]. Dacă lungimea datelor este N , DFT se poate calcula în cel puțin N puncte. În acest caz, rezultă următoarele eșantioane ale periodogramei

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k/N} \right|^2 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.53)$$

la frecvențele $f_k = k/N$.

În practică, este posibil ca o astfel de eșantionare a spectrului să fie “rară” și să nu ofere o bună reprezentare grafică a estimatului spectrului continuu, lucru ce poate fi remediat prin evaluarea lui $P_{xx}(f)$ la unele frecvențe adiționale, prin creșterea lungimii secvenței prin adăugarea de zerouri până la o lungime a secvenței de $L > N$ puncte.

$$P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k/L} \right|^2, \quad k = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.54)$$

Adăugarea de zerouri și evaluarea DFT în $L > N$ puncte nu îmbunătățește rezoluția de frecvență a estimatului, ci oferă numai o metodă de interpolare a valorilor spectrului calculat la mai multe frecvențe. Rezoluția de frecvență este determinată de lungimea N a datelor înregistrate.

Exemplul 5.2.

Secvență discretă de lungime $N=16$ eșantioane

$$x[n] = \sin 2\pi(0,135)n + \cos 2\pi(0,135 + \Delta f)n, \quad n = 0, 1, \dots, 15$$

se obține prin eșantionarea unui semnal analogic compus din două componente. Δf reprezintă separația de frecvență între aceste componente. Să se evalueze spectrul de putere $P(f) = \frac{1}{N} |X(f)|^2$, la

frecvențele $f_k = \frac{k}{N}$, $k = 0, 1, \dots, L-1$, pentru $L = 8, 16, 32$ și 128 , pentru valorile $\Delta f = 0,06$ și $\Delta f = 0,01$.

Soluție

Prin completarea cu zerouri s-a mărit lungimea datelor pentru care se calculează spectrul de putere $P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right)$.

Rezultatele pentru $\Delta f = 0,06$ sunt prezentate în figurile 5.6a, b, c, d pentru $L=8, 16, 32$ și, respectiv, 128 de puncte.

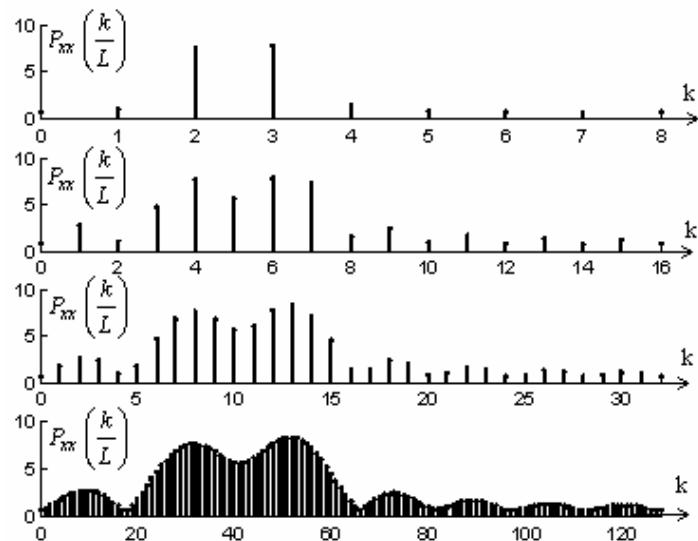


Fig. 5.6. Spectrul unui semnal cu două componente sinusoidale cu separația de frecvență $\Delta f = 0,06$

Se observă că adăugarea de zerouri nu a modificat rezoluția, dar are efect de interpolare a spectrului $P_{xx}\left(\frac{k}{L}\right)$. În acest caz, separația de frecvență este suficient de mare, încât cele două componente spectrale pot fi identificate în semnal.

Estimării spectrali pentru $\Delta f = 0,01$ sunt prezentate în figura 5.7a, b, c, d pentru $L=8, 16, 32$ și, respectiv, 128 de puncte.

În acest caz cele două componente spectrale nu mai pot fi identificate. Efectul adăugării de zerouri constă în interpolarea valorilor spectrului, astfel încât se obține o imagine grafică mai bună a estimatului spectrului, fără, însă, a se îmbunătăți rezoluția de frecvență.

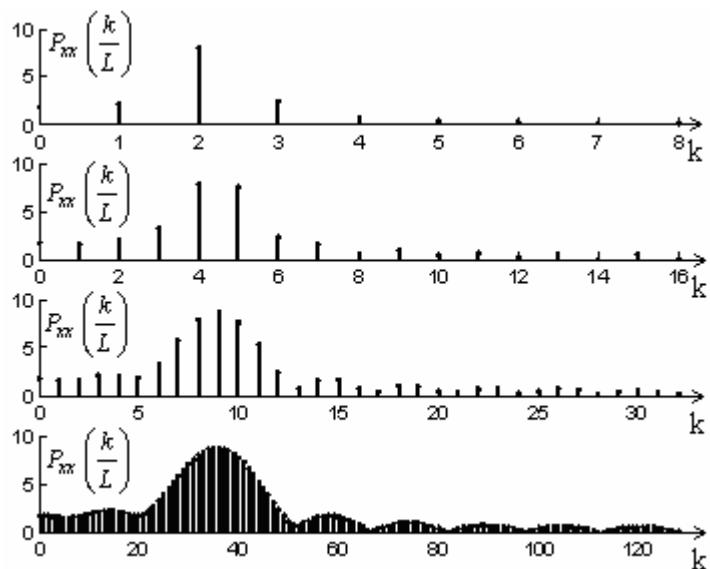


Fig. 5.7. Spectrul unui semnal cu două componente sinusoidale cu separația de frecvență $\Delta f = 0,01$

5.2. Metode neparametrice pentru estimarea densității spectrale de putere

Metodele neparametrice de estimare a spectrului sunt relativ simple și ușor de implementat cu ajutorul algoritmilor FFT. Ele necesită secvențe lungi de date pentru a produce rezoluția de frecvență necesară în unele aplicații. Aceste metode suferă de “surgere spectrală” datorită folosirii ferestrelor și, implicit, a datelor de lungime finită, N. De multe ori scurgerea spectrală maschează semnalele slabe prezente în date.

Limitarea principală a metodelor neparametrice este presupunerea că estimatul funcției de autocorelație $r_{xx}[m]$ este zero pentru $m \geq N$, ceea ce limitează rezoluția în frecvență și calitatea estimatului spectrului de putere.

Metodele neparametrice descrise în acest paragraf nu țin seama de modul în care au fost generate datele. Deoarece obținerea estimărilor se bazează complet pe date de lungime finită, rezoluția de frecvență obținută prin aceste metode este, în cel mai bun caz, egală cu lățimea spectrală a ferestrei rectangulare de lungime N, care este de aproximativ $1/N$ la -3dB [33]. Metodele neparametrice urmăresc obținerea unui estimat consistent al densității spectrale de putere prin operații de mediere și netezire efectuate direct asupra periodogramei și a funcției de autocorelație. După cum se va vedea, efectul acestora este de reducere a rezoluției de frecvență, odată cu scăderea dispersiei estimatului.

5.2.1. Metoda Bartlett. Periodograma mediată

Metoda Bartlett de reducere a dispersiei periodogramei, implică trei pași:

1. Secvența de date de lungime N se împarte în K segmente care nu se suprapun, fiecare de lungime M

$$x_i[n] = x[n + iM], \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \\ n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.55)$$

2. Pentru fiecare segment se calculează periodograma

$$P_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \quad (5.56)$$

3. Pentru a se obține estimatul Bartlett al densității spectrale de putere, se consideră media aritmetică a celor K periodograme, adică

$$P_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f) \quad (5.57)$$

Caracterizarea estimatului

Presupunând datele staționare și M suficient de mare,

$$E[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} E[P_{xx}^{(i)}(f)] = E[P_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.58)$$

Din (5.39) și (5.41) rezultă valoarea medie a fiecărei periodograme ca fiind

$$E[P_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|m|}{M} \right) \gamma_{xx}[m] e^{-2j\pi fm} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f - \alpha) d\alpha \\ = \frac{1}{M} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left(\frac{\sin \pi(f - \alpha)M}{\sin \pi(f - \alpha)} \right)^2 d\alpha \quad (5.59)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi f M}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.60)$$

este transformata Fourier a ferestrei Bartlett, definită de relația

$$w_B[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{M}, & |m| \leq M-1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.61)$$

Reducerea lungimii datelor de la N la $M=N/K$ are ca rezultat o fereastră care are o caracteristică de frecvență cu lățimea lobului principal crescută de K ori, aşa încât rezoluția de frecvență s-a redus de K ori, $(\Delta f)_{3dB} = 0,89 \frac{K}{N}$. Admitând ipoteza anterioară asupra datelor și faptul că seturile de date sunt independente, dispersia estimatului Bartlett este

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.62)$$

Înlocuind (5.51) în (5.62), pentru un proces aleator gaussian, se obține

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \approx \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.63)$$

adică dispersia s-a redus de K ori.

În realitate seturile de date nu sunt independente decât în unele cazuri particulare, cum este cel al zgomotului alb și, în consecință, reducerea dispersiei este mai mică decât K ori.

5.2.2. Metoda Welch. Periodograma mediată modificată

Welch a operat două modificări esențiale asupra metodei Bartlett:

1. Segmentele de date se pot suprapune

$$x_i[n] = x[n + iD] \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \\ i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.64)$$

unde iD este punctul de începere pentru secvența i . Dacă $D = M$, segmentele nu se suprapun și numărul L de segmente este egal cu K din metoda Bartlett. Dacă $D = M/2$, există 50% suprapunere peste segmente succesive și $L = 2K$ segmente. Se pot obține K segmente de lungime $2M$ fiecare. Ca urmare a suprapunerii blocurilor, se obține, aşa cum se va vedea, o anumită reducere a dispersiei.

2. Înainte de a calcula periodograma, segmentele de date sunt ponderate cu o fereastră, ceea ce conduce la o periodogramă modificată

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, L-1 \quad (5.65)$$

unde U este un factor de normalizare a puterii funcției fereastră și este ales ca

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2[n] \quad (5.66)$$

Utilizarea funcției fereastră are drept efect reducerea lobilor laterali și, deci, a fenomenului de scurgere spectrală.

Estimatul Welch al densității spectrale de putere este media aritmetică a acestor periodograme modificate, adică

$$P_{xx}^w(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \quad (5.67)$$

Caracterizarea estimatului

Valoarea medie a estimatului Welch este

$$E[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \quad (5.68)$$

Valoarea medie a periodogramei modificate se determină astfel:

$$E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{MU} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m]E[x_i[n]x_i[m]]e^{-2j\pi f(n-m)} =$$

$$= \frac{1}{MU} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m] \gamma_{xx}(n-m) e^{-j2\pi f(n-m)} \quad (5.69)$$

Dar

$$\gamma_{xx}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) e^{j2\pi\alpha n} d\alpha \quad (5.70)$$

Înlocuind relația (5.70) în (5.69), se obține

$$\begin{aligned} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MU} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \left[\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w[n]w[m] e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)} \right] d\alpha = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W(f-\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (5.71)$$

unde, prin definiție

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (5.72)$$

Factorul de normalizare asigură că

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(f) df = 1 \quad (5.73)$$

Dispersia estimatului Welch este

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[P_{xx}^w(f)]\}^2 \quad (5.74)$$

Estimatul acesta este, evident, echivalent cu periodograma, în cazul când $w[m]$ este o fereastră dreptunghiulară și $M=N-1$.

În cazul nesuprapunerii segmentelor succeseive ($L=K$) și a folosirii ferestre triunghiulare, s-a arătat [62] că

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] = \frac{1}{L} \text{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \approx \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.75)$$

În cazul suprapunerii cu 50% a segmentelor succeseive și folosind fereastră triunghiulară, dispersia estimatului Welch a densității spectrale de putere, este [62]

$$\text{var}[P_{xx}^w(f)] \approx \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) \quad (5.76)$$

Estimatul Welch este asimptotic nedeplasat și consistent. Rezoluția acestuia depinde de fereastra folosită.

Deși s-a considerat numai fereastra triunghilară, în calculul dispersiei pot fi folosite și alte ferestre. În general, acestea vor determina dispersii diferite pentru estimați. În plus, segmentele de date pot fi suprapuse cu mai mult sau mai puțin de 50%, cât s-a considerat în acest paragraf, în scopul îmbunătățirii caracteristicilor relevante ale estimatului.

5.5.3. Metoda Blackman Tukey. Netezirea periodogramei

Autorii metodei au propus și analizat metoda în care secvența de autocorelație este întâi multiplicată cu o fereastră și apoi se calculează transformata Fourier pentru a estima densitatea spectrală de putere. Motivul pentru care funcția de autocorelație estimată se înmulțește cu o fereastră este că, pentru deplasări mari, estimații sunt de încredere mai mică deoarece sunt calculați dintr-un număr mai mic, $(N-m)$, de date. Pentru m apropiat de N , dispersia acestor estimați este foarte mare și, deci, aceștia ar putea interveni cu o pondere mai mică în densitatea spectrală de putere estimată.

Estimatul Blackman-Tukey este

$$P_{xx}^{BT}(f) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} r_{xx}[m]w[m]e^{-j2\pi fm} \quad (5.77)$$

unde $w[n]$ este o fereastră aplicată estimatorului funcției de autocorelație, cu proprietatea că are lungimea $2M-1$, $0 \leq w[m] \leq 1$, $w[0]=1$, $w[-m]=w[m]$ și este zero pentru $|m| \geq M$.

Cu această definiție pentru $w[n]$, limitele sumei din (5.77) pot fi extinse la $(-\infty, \infty)$. Expresia echivalentă în domeniul frecvență a relației (5.77) este

$$P_{xx}^{BT}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} P_{xx}(\alpha)W(f - \alpha)d\alpha \quad (5.78)$$

unde $P_{xx}(\alpha)$ este periodograma. Efectul înmulțirii cu o fereastră a secvenței de autocorelație este de netezire a estimatului periodogramei, deci descreșterea dispersiei estimatului se face cu prețul reducerii rezoluției. Ca urmare, rezoluția sau capacitatea de a identifica două componente spectrale apropiate este dependentă de lățimea lobului principal al caracteristicii de frecvență a ferestrei. În principiu, ar putea fi folosite toate ferestrele utilizate la sinteza filtrelor FIR [72]. Trebuie avut însă în vedere ca estimatul să fie real și nenegativ ($P_{xx}^{BT}(f) \geq 0, |f| \leq 1/2$), deziderate asigurate de proprietatea ca fereastra considerată să fie o funcție pară, iar spectrul său să fie nenegativ:

$$W(f) \geq 0, |f| \leq 1/2 \quad (5.79)$$

Unele ferestre nu satisfac această condiție, de exemplu, în ciuda nivelului scăzut al lobilor laterali, ferestrele Hamming și Hanning pot avea ca rezultat estimați negativi ai spectrului în unele domenii de frecvență.

Caracterizarea estimatului

Valoarea medie a estimatului densității spectrale de putere Blackman-Tukey este

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)]W(f - \alpha)d\alpha \quad (5.80)$$

unde, din (5.41), rezultă

$$E[P_{xx}(\alpha)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W_B(\alpha - \theta)d\theta \quad (5.81)$$

unde $W_B(f)$ este transformata Fourier a ferestrei Bartlett. Înlocuind (5.81) în (5.80), se obține

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha d\theta \quad (5.82)$$

Echivalent, în domeniul timp, valoarea medie a estimatului Blackman-Tukey este

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{BT}(f)] &= \sum_{m=-M+1}^{M-1} E[r_{xx}[m]] w[m] e^{-j2\pi fm} = \\ &= \sum_{m=-M+1}^{M-1} \gamma_{xx}[m] w_B[m] w[m] e^{-j2\pi fm} \end{aligned} \quad (5.83)$$

unde

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| < N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (5.84)$$

Lungimea ferestrei pentru $w[n]$ trebuie aleasă astfel încât $M \ll N$, adică fereastra $w[n]$ să fie de lungime mai mică decât fereastra $w_B[m]$ pentru a produce o netezire suplimentară a periodogramei. În aceste condiții (5.82) devine

$$E[P_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta \quad (5.85)$$

deoarece

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha &= \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\alpha) W(f - \theta - \alpha) d\alpha \\ &\approx W(f - \theta) \end{aligned} \quad (5.86)$$

Dispersia estimatului Blackman-Tukey al spectrului este

$$\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] = E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} - \{E[P_{xx}^{BT}(f)]\}^2 \quad (5.87)$$

unde valoarea medie poate fi aproximată de relația (5.85), iar valoarea pătratică medie este

$$E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)]W(f-\alpha)W(f-\theta)d\alpha d\theta \quad (5.88)$$

În ipoteza că procesul aleator este gaussian, folosind rezultatul din exemplul 5.2, se obține

$$E[P_{xx}(\alpha)P_{xx}(\theta)] = \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta) \left\{ 1 + \left[\frac{\sin \pi(\theta+\alpha)N}{N \sin \pi(\theta+\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta-\alpha)N}{N \sin \pi(\theta-\alpha)} \right]^2 \right\} \quad (5.89)$$

Înlocuind (5.89) în (5.88), se obține

$$E\{[P_{xx}^{BT}(f)]^2\} = \left[\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta \right]^2 + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha)\Gamma_{xx}(\theta)W(f-\alpha)W(f-\theta) \times \times \left\{ \left[\frac{\sin \pi(\theta+\alpha)N}{N \sin \pi(\theta+\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta-\alpha)N}{N \sin \pi(\theta-\alpha)} \right]^2 \right\} d\alpha d\theta \quad (5.90)$$

Primul termen din (5.90) este pătratul valorii medii a lui $P_{xx}^{BT}(f)$, astfel încât al doilea termen din (5.90) reprezintă dispersia.

În cazul în care $N \gg M$, funcțiile $\sin \pi(\theta + \alpha)N/N \sin \pi(\theta + \alpha)$ și $\sin \pi(\theta - \alpha)N/N \sin \pi(\theta - \alpha)$ sunt relativ “înguste” în comparație cu $W(f)$ în apropiere de $\theta = -\alpha$ și, respectiv $\theta = \alpha$. Prin urmare

$$\begin{aligned} & \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta) \left\{ \left[\frac{\sin \pi(\theta+\alpha)N}{N \sin \pi(\theta+\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi(\theta-\alpha)N}{N \sin \pi(\theta-\alpha)} \right]^2 \right\} d\theta \approx \\ & \approx \frac{\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha) + \Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)}{N} \end{aligned} \quad (5.91)$$

Cu această aproximare, dispersia lui $P_{xx}^{BT}(f)$ devine

$$\begin{aligned}\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \\ \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W(f-\alpha) [\Gamma_{xx}(-\alpha)W(f+\alpha) + \Gamma_{xx}(\alpha)W(f-\alpha)] d\alpha \\ &\approx \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}^2(\alpha) W^2(f-\alpha) d\alpha\end{aligned}\quad (5.92)$$

în care, s-a efectuat aproximarea

$$\int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \Gamma_{xx}(-\alpha) W(f-\alpha) W(f+\alpha) d\alpha \approx 0 \quad (5.93)$$

În relația (5.92) mai poate fi făcută o aproximare. Dacă $W(f)$ este “îngust”, comparativ cu spectrul real $\Gamma_{xx}(f)$, (5.92) se poate aproxima ca

$$\begin{aligned}\text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} W^2(\theta) d\theta \right] \approx \\ \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^2[m] \right]\end{aligned}\quad (5.94)$$

Și în acest caz se evidențiază cerințe contradictorii în obținerea unor estimatori de bună calitate:

- pentru o deplasare mică este necesar M mare,
 - pentru o dispersie mică, M trebuie să fie cât mai mic.
- De obicei se recomandă o valoare de cel mult $M=N/5$.

5.2.4. Caracteristici de performanță ai estimatorilor densității spectrale de putere neparametриci

Pentru a compara calitatea estimărilor periodogramă, Bartlett, Welch, Blackman-Tukey, s-a introdus ca masură a calității, raportul dintre pătratul valorii medii și dispersia estimatului, numit factor de calitate, adică

$$Q_A = \frac{\{E[P_{xx}^A(f)]\}^2}{\text{var}[P_{xx}^A(f)]} \quad (5.95)$$

unde $A = P, B, W$ sau BT pentru cei patru estimări.

Inversul acestei mărimi se numește *variabilitate* și poate fi, de asemenea, folosit ca o măsură a performanței.

a) Periodograma

Valoarea medie a periodogrammei este

$$E[P_{xx}^P(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (5.96)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.97)$$

și dispersia

$$\text{var}[P_{xx}^P(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (5.98)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$

$$E[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(\theta) d\theta = w_B[0] \Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{xx}(f) \quad (5.99)$$

$$\text{var}[P_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}^2(f)$$

adică, aşa cum s-a precizat anterior, periodograma este un estimător asimptotic nedeplasat al spectrului de putere, dar nu este consistent.

Asimptotic, periodograma este caracterizată de factorul de calitate

$$Q_P = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \quad (5.100)$$

Faptul că Q_P este fix și independent de lungimea datelor arată calitatea scăzută a acestui estimat.

b) Estimatul Bartlett

Media și dispersia estimatului Bartlett al spectrului de putere sunt

$$E[P_{xx}^B(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(f - \theta) d\theta \quad (5.101)$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f M}{M \sin 2\pi f} \right)^2 \right] \quad (5.102)$$

unde

$$W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \pi f M}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (5.103)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$ și $M \rightarrow \infty$, astfel încât $K = \frac{N}{M}$ rămâne fix

$$E[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \int_{-1/2}^{1/2} W_B(f) df = \Gamma_{xx}(f) w_B(0) = \Gamma_{xx}(f) \quad (5.104)$$

$$\text{var}[P_{xx}^B(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

Se observă că estimatul Bartlett este asimptotic nedeplasat și dacă K crește odată cu N , estimatul este consistent. Asimptotic, factorul de calitate al estimatului devine

$$Q_B = K = \frac{N}{M} \quad (5.105)$$

Rezoluția în frecvență a estimatului Bartlett, măsurată prin considerarea lățimii de bandă la 3dB a lobului principal al ferestrei rectangulare, este [62]

$$\Delta f = \frac{0,9}{M} \quad (5.106)$$

Înlocuind (5.106) în (5.105) rezultă

$$Q_B = \frac{N}{0,9 / \Delta f} = 1,1 N \Delta f \quad (5.107)$$

c) Estimatul Welch

Media și dispersia estimatului Welch al spectrului de putere sunt

$$E[P_{xx}^W(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta) W(f - \theta) d\theta \quad (5.108)$$

unde

$$W(f) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2, \quad (5.109)$$

respectiv

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \Gamma_{xx}^2(f) & \text{fără suprapunere} \\ \frac{9}{8L} \Gamma_{xx}^2(f) & \text{pentru suprapunere } 50\% \\ & \text{și fereastră triunghiulară} \end{cases} \quad (5.110)$$

Pentru $N \rightarrow \infty$ și $M \rightarrow \infty$

$$E[P_{xx}^W(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \quad (5.111)$$

Dacă L crește odată cu N , dispersia $\rightarrow 0$, deci estimatul este consistent.

În condițiile (5.110), factorul de calitate devine

$$Q_w = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{fără suprapunere} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & 50\% \text{ suprapunere și} \\ & \text{fereastră tringhiulară} \end{cases} \quad (5.112)$$

Lățimea de bandă a ferestrei triunghiulare la 3 dB este [71]

$$\Delta f = \frac{1,28}{M} \quad (5.113)$$

În consecință, factorul de calitate, exprimat în funcție de Δf și N este

$$Q_w = \begin{cases} 0,78N\Delta f & \text{fără suprapunere} \\ 1,39N\Delta f & \begin{array}{l} 50\% \text{ suprapunere și} \\ \text{fereastră triunghiulară} \end{array} \end{cases} \quad (5.114)$$

d) Estimativ Blackman -Tukey

Media și dispersia acestui estimativ sunt date aproximativ de

$$\begin{aligned} E[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\theta)W(f-\theta)d\theta \\ \text{var}[P_{xx}^{BT}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-M+1}^{M-1} w^2[m] \right] \end{aligned} \quad (5.115)$$

unde $w[m]$ este secvența fereastră cu care se înmulțește funcția de autocorelație estimată.

Pentru ferestrele triunghiulară și rectangulară, avem

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-M+1}^{M-1} w^2[n] = \begin{cases} 2M/N & \text{fereastra dreptunghiulară} \\ 2M/3N & \text{fereastra triunghiulară} \end{cases} \quad (5.116)$$

Valoarea medie a estimativului este asimptotic nedeplasată. Factorul de calitate al estimativului, pentru fereastra triunghiulară este

$$Q_{BT} = 1,5 \frac{N}{M} \quad (5.117)$$

Deoarece lungimea ferestrei este $2M - 1$, rezoluția în frecvență măsurată la 3dB este

$$\Delta f = \frac{1,28}{2M} = \frac{0,64}{M} \quad (5.118)$$

și, deci

$$Q_{BT} = \frac{1,5}{0,64} N \Delta f = 2,34 N \Delta f \quad (5.119)$$

Din analiza factorului de calitate se observă că estimații Welch și Blackman-Tukey sunt relativ mai buni decât cel Bartlett. Oricum, însă, diferențele de performanțe între estimatori sunt mici. Factorul de calitate crește odată cu creșterea lungimii datelor, ceea ce nu se întâmplă pentru periodogramă. Mai mult, factorul de calitate depinde de produsul dintre lungimea datelor și rezoluția în frecvență. Pentru un nivel de calitate dorit, rezoluția în frecvență poate fi îmbunătățită prin creșterea lungimii datelor.

5.3. Metode parametrice pentru estimarea spectrului de putere

Metodele parametrice nu necesită presupunerile semnalate în paragraful 5.2, ele extrapolând valorile funcției de autocorelație pentru deplasări $m \geq N$. Acest lucru este posibil dacă există informații despre modul cum au fost generate datele. În acest caz se poate construi un model de generare a semnalului cu un număr de parametri ce poate fi estimat din datele observate. Drept urmare, aproximarea prin modelare elimină necesitatea funcțiilor fereastră și presupunerea că secvența de autocorelație este zero pentru $|m| \geq N$, ceea ce conduce la situația că metodele parametrice de estimare spectrală oferă rezoluție în frecvență mai bună decât cele neparametrice.

Metodele parametrice se bazează pe modelarea secvenței de date $x[n]$ ca fiind ieșirea unui sistem liniar caracterizat de o funcție de sistem rațională, de forma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (5.120)$$

căreia îi corespunde ecuația cu diferențe

$$x[n] = -\sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + \sum_{k=0}^q b_k w[n-k], \quad (5.121)$$

unde $w[n]$ este secvența de intrare în sistem.

În estimarea spectrului de putere, secvența de intrare nu este observabilă, dar dacă ieșirea $x[n]$ este un proces aleator staționar, atunci și secvența de intrare este, de asemenea, un proces aleator staționar.

Într-un astfel de caz, densitatea spectrală de putere a datelor (ieșirii $x[n]$) este

$$\Gamma_{xx}(f) = |H(f)|^2 \Gamma_{ww}(f) \quad (5.122)$$

unde $\Gamma_{ww}(f)$ este densitatea spectrală de putere a secvenței de intrare și $H(f)$ este răspunsul în frecvență al modelului.

Deoarece obiectivul este estimarea spectrului $\Gamma_{xx}(f)$, este convenabil a presupune că secvența de intrare $w[n]$ este o secvență de zgomot alb, de medie zero, cu funcția de autocorelație

$$\gamma_{ww}[m] = \sigma_w^2 \delta[m] \quad (5.123)$$

unde σ_w^2 este dispersia ($\sigma_w^2 = E[|w[n]|^2]$). Rezultă atunci

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 |H(f)|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (5.124)$$

În secțiunea 1.22 a fost descrisă reprezentarea unui proces aleator staționar în forma (5.124). În abordarea pe bază de model, estimarea spectrului se efectuează în doi pași. Dată fiind secvența finită $x[n], 0 \leq n \leq N-1$, se estimează întâi funcția de autocorelație

dintr-o sumă finită, apoi, pe baza acestor estimați, se estimează parametrii $\{\hat{a}_k\}$ și $\{\hat{b}_k\}$ ai modelului. Pe baza acestora, se estimează spectrul de putere conform relației

$$P_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{|\hat{B}(f)|^2}{|\hat{A}(f)|^2} \quad (5.124').$$

Relația (5.124') reprezintă cazul general al metodelor parametrice de estimare spectrală, care arată că în acest demers trebuie determinați estimații parametrilor sistemului, $\{\hat{a}_k\}$ și $\{\hat{b}_k\}$.

Se reamintește că procesul aleator $x[n]$ generat de modelul poli-zerouri dat de (5.120) sau (5.121) se numește proces *autoregresiv cu medie alunecătoare* (ARMA) de ordin (p,q) .

Dacă $q=0$ și $b_0=1$, modelul rezultat are o funcție de sistem

$H(z)=\frac{1}{A(z)}$ și ieșirea sa, $x[n]$, se numește *proces autoregresiv de ordin p* și se notează $AR(p)$.

Al treilea model posibil se obține impunând $A(z)=1$, astfel încât $H(z)=B(z)$. Ieșirea $x[n]$ se numește proces cu *medie alunecătoare* (MA) de ordin q , notat $MA(q)$.

Dintre acestea, modelul AR este de departe cel mai folosit, din două motive:

1- este potrivit pentru reprezentarea spectrelor de bandă îngustă;

2- are ca rezultat ecuații liniare foarte simple pentru determinarea parametrilor AR.

Față de acesta, modelul MA necesită mult mai mulți coeficienți pentru reprezentarea spectrelor de bandă îngustă și este rareori folosit singur ca model pentru estimarea spectrului.

Combinând polii și zerourile, modelul ARMA produce o reprezentare mai eficientă din punct de vedere al numărului parametrilor modelului pentru reprezentarea spectrului procesului aleator, cu dezavantajul complicării calculelor pentru parametrii MA, care rezultă din rezolvarea unor ecuații neliniare.

Estimatorii parametrici au deplasări și dispersii mai mici decât cei neparametrici. Folosind metodele parametrice de estimare, se poate îmbunătăți semnificativ rezoluția în frecvență, cu condiția ca modelul să fie adecvat procesului. În caz contrar, pot rezulta estimatori neconformi cu realitatea, care conduc la decizii eronate.

5.3.1. Relații între funcția de autocorelație și parametrii modelului

În paragraful 1.24 s-au stabilit relațiile dintre funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ și parametrii $\{a_k\}$ și $\{b_k\}$ ai modelului ARMA adoptat pentru proces. Pentru un proces ARMA(p,q), aceste relații sunt

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.125)$$

Prin restricționarea lui $m > q$, relațiile (5.125) conduc la un sistem de ecuații liniare din care se pot determina parametrii $\{a_k\}$. Acestea sunt

$$\begin{bmatrix}
\gamma_{xx}[q] & \gamma_{xx}[q-1] & \dots & \gamma_{xx}[q-p+1] \\
\gamma_{xx}[q+1] & \gamma_{xx}[q] & \dots & \gamma_{xx}[q-p+2] \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\gamma_{xx}[q+p-1] & \gamma_{xx}[q+p-2] & \dots & \gamma_{xx}[q]
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \\
= - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[q+1] \\ \gamma_{xx}[q+2] \\ \dots \\ \gamma_{xx}[q+p] \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

În practică se cunoaște numai un interval finit dintr-o realizare particulară a procesului, din care se estimează valorile funcției de autocorelație. Folosind aceste valori estimate în loc de $\gamma_{xx}[m]$, din sistemul de ecuații (5.126) se determină parametrii \hat{a}_k .

Din relația (5.126) se observă că dacă se cunosc parametrii $\{a_k\}$ și funcția de autocorelație pentru valori ale argumentului din intervalul $0 \leq m \leq p$, atunci valoarea funcției de autocorelație se poate determina în mod unic și pentru $m > q$. În consecință, modelul sistemului liniar extinde valorile funcției de autocorelație pentru $m > p$.

Parametrii $\{a_k\}$ sunt obținuți din (5.126), dar aceștia nu pot fi folosiți în determinarea facilă a parametrilor MA, deoarece în ecuația

$$\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} = \gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], \quad 0 \leq m \leq q \quad (5.127)$$

intervine răspunsul la impuls $h[k]$ al sistemului. Acesta poate fi exprimat în funcție de parametrii $\{b_k\}$ și $\{a_k\}$ prin împărțirea lui $B(z)$ la $A(z)$, dar aceasta conduce la un set de ecuații neliniare pentru parametrii MA.

5.3.2. Estimarea spectrului de putere pe baza modelului autoregresiv (AR)

Dacă se adoptă un model $AR(p)$ pentru datele observate, relația dintre parametrii modelului și secvența de autocorelație se obține din (5.125), pentru $q=0$, adică

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.128)$$

În acest caz parametrii $\{a_k\}$ se obțin din soluția sistemului de ecuații

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \dots & \gamma_{xx}[-p+1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[2] \\ \dots \\ \gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

care reprezintă ecuațiile Yule-Walker sau normale.

Dispersia σ_w^2 poate fi obținută din ecuația

$$\sigma_w^2 = \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[-k] \quad (5.130)$$

Ecuațiile (5.129) și (5.130) sunt de obicei combinate în una singură, de forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] & \dots & \gamma_{xx}[-p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[-p+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Matricea de corelație din (5.129) sau (5.131) este Toeplitz, motiv pentru care ecuațiile Yule Walker pot fi rezolvate eficient cu algoritmul Levison-Durbin. Toți parametrii modelului $AR(p)$ pot fi determinați din secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$, pentru $0 \leq m \leq p$. Mai mult, din (5.128), după ce s-au determinat coeficienții $\{a_k\}$, se poate calcula funcția de autocorelație pentru $m > p$. Dacă procesul aleator este cunoscut numai pentru un interval finit, $0 \leq n \leq N-1$, în determinarea parametrilor modelului vor interveni estimați ai funcției de autocorelație. Există mai multe posibilități de a estima funcția de autocorelație a procesului, lucru care conduce la diferite metode de estimare a spectrului de putere pentru semnale modelate AR.

5.3.3. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda autocorelației sau Yule-Walker

În această metodă se estimează secvența de autocorelație din date și apoi estimații se folosesc în relațiile Yule-Walker (5.129) pentru a determina parametrii modelului AR.

Funcția de autocorelație se determină cu relația

$$r_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n]x[n+m], m \geq 0 \quad (5.132)$$

Din paragraful 3.5 se reamintește că parametrii a_k ai procesului $AR(p)$ sunt egali cu coeficienții predictorului $\{a_p[k]\}$ de ordin p și eroarea pătratică medie minimă a predictorului de ordinul p este egală cu dispersia zgomotului alb care se aplică modelului pentru a forma datele.

Datorită egalității semnalate anterior, parametruii AR se determină cu ajutorul algoritmul Levison-Durbin în care $\gamma_{xx}[m]$ se înlocuiește cu $r_{xx}[m]$.

Estimatul corespunzător al spectrului de putere este

$$P_{xx}^{yw}(f) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k]e^{-j2\pi kf}\right|^2} \quad (5.133)$$

unde $\hat{a}_p[k]$ sunt estimații parametrilor AR rezultați din ecuațiile recursive Levison-Durbin, iar

$$\hat{\sigma}_{wp}^2 = \hat{E}_p^f = r_{xx}[0] \prod_{k=1}^p \left[1 - (\hat{a}_k[k])^2\right] \quad (5.134)$$

este valoarea pătratică medie minimă a erorii de predicție estimate pentru predictorul de ordin p .

Un exemplu care ilustrează performanțele acestui estimator din punct de vedere al rezoluției în frecvență, comparativ cu alte metode, este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.4. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda Burg

Metoda propusă de Burg pentru estimarea parametrilor modelului AR poate fi asimilată cu o metodă lattice recursivă în care coeficienții de reflexie se estimează pe baza minimizării erorilor din predicția liniară înainte și înapoi, exprimate în formă compusă, cu costrângerea că parametrii AR să satisfacă ecuațiile recursive Levison-Durbin.

Pentru a obține estimatul, fie datele $x[n]$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ și fie estimații predicției liniare înainte și înapoi, de ordin m , dați de relațiile

$$\begin{aligned}\hat{x}[n] &= -\sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \\ \hat{x}[n-m] &= -\sum_{k=1}^m a_m[k]x[n+k-m]\end{aligned}\tag{5.135}$$

și erorile de predicție corespunzătoare $f_m[n]$ și respectiv, $g_m[n]$, date de

$$\begin{aligned}f_m[n] &= x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \\ g_m[n] &= x[n-m] - \hat{x}[n-m] = \\ &= x[n-m] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-m+k]\end{aligned}\tag{5.136}$$

unde $a_m[k]$, $0 \leq k \leq m-1$, $m = 1, 2, \dots, p$, sunt coeficienții de predicție.

Eroarea pătratică globală se determină cu relația

$$\sum_{n=m}^{N-1} [|f_m[n]|^2 + |g_m[n]|^2] = \xi_m \tag{5.137}$$

Această eroare urmează a fi minimizată prin alegerea coeficienților de predicție, supuși costrângerii de a satisface ecuațiile recursive Levison-Durbin, date de

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}[m-k], \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad 1 \leq m \leq p \tag{5.138}$$

unde $K_m = a_m[m]$ este al m -lea coeficient de reflexie din realizarea lattice a predictorului.

Se reamintește că prin înlocuirea relației (5.138) în (5.136) rezultă perechea de ecuații recursive pentru erorile de predicție înainte și înapoi, de forma

$$\begin{aligned}f_m[n] &= f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \\ g_m[n] &= g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n]\end{aligned}\tag{5.139}$$

Înlocuind (5.139) în (5.137) și minimizând în raport cu K_m , rezultă

$$\begin{aligned}
\xi_m &= \sum_{n=m}^{N-1} \left[(f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1])^2 + (g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n])^2 \right] = \\
&= \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}^2[n] + 2K_m f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n-1] + \\
&\quad + g_{m-1}^2[n-1] + 2K_m f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + K_m f_{m-1}[n]
\end{aligned} \tag{5.140}$$

Condiția necesară de extrem este

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial K_m} = 4 \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1] + 2\hat{K}_m (g_{m-1}^2[n-1] + f_{m-1}^2[n]) = 0 \tag{5.141}$$

de unde rezultă

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} (f_{m-1}[n]^2 + g_{m-1}[n-1]^2)} \quad m = 1, 2, \dots, p \tag{5.142}$$

Numărătorul relației (5.142) este un estimat al coeficientului de corelație dintre erorile de predicție înainte și înapoi. Se observă că $|\hat{K}_m| < 1$, astfel încât modelul numai cu poli obținut din date este stabil. De asemenea, se observă similitudinea dintre (5.142) cu corespondentul K_m statistic dat de (3.61). Numitorul relației (5.142) este estimatul pe baza celor mai mici pătrate a erorilor înainte și înapoi E_{m-1}^f și E_{m-1}^b , așa că se poate scrie

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n]g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} [\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b]} \quad m = 1, 2, \dots, p \tag{5.143}$$

unde $\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b$ este un estimat al erorii pătratice globale ξ_m .

În concluzie, algoritmul Burg calculează coeficienții de reflexie ai structurii lattice echivalente cu relația (5.143), iar parametrii modelului AR sunt obținuți apoi cu ajutorul algoritmului Levison -Durbin.

Din estimații astfel obținuți rezultă estimatul spectrului de putere

$$P_{xx}^{BU}(f) = \frac{\hat{E}_p}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k] e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.144)$$

unde \hat{E}_p este valoarea pătratică medie a erorii globale de predicție estimate pentru predictorul de ordin p .

Avantajele majore ale metodei Burg sunt:

- 1- are rezoluție bună în frecvență;
- 2- determină un model AR stabil;
- 3- este eficient din punct de vedere al calculelor.

Dezavantaje:

Algoritmul prezintă o *scindare a liniilor sau componentelor (vârfurilor) spectrale* pentru raporturi semnal zgomot ridicate [39]. Aceasta înseamnă că, dacă spectrul semnalului $x[n]$ are o singură componentă spectrală la o anumită frecvență, în spectrul estimat cu ajutorul metodei Burg pot apărea două sau mai multe componente apropiate în imediata vecinătate a frecvenței respective. Această situație este ilustrată în figura 5.15. Pentru ordine mari, metoda poate introduce *vârfuri (componente) false*, de nivel scăzut, în spectrul estimat la frecvențe la care spectrul semnalului este nul. Mai mult, pentru semnale sinusoidale de durată mică, afectate de zgomot, rezultă o deplasare de frecvență față de frecvența adevărată, funcție de faza semnalului sinusoidal [15] [72].

În literatura de specialitate se tratează modificări ale metodei Burg pentru surmontarea acestor dezavantaje, modificări care, în esență, constau în introducerea unei ferestre de ponderare a erorilor pătratice înainte și înapoi. În felul acesta se optimizează eroarea pătratică ponderată

$$\xi_m^{WB} = \sum_{n=m}^{N-1} w_m[n] \left[|f_m[m]|^2 + |g_m[n]|^2 \right] \quad (5.145)$$

Înlocuind (5.139) în (5.145) și minimizând în raport cu coeficienții de reflexie, rezultă, prin parcurgerea unei proceduri similar celei folosite la optimizarea erorii neponderate

$$\hat{K}_m = \frac{-\sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}[n] f_{m-1}[n] g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} w_{m-1}[n] \left[|f_{m-1}[n]|^2 + |g_{m-1}[n-1]|^2 \right]} \quad (5.146)$$

Rezultate bune au fost obținute prin folosirea ferestrelor Hamming și parabolică [61].

Un exemplu care ilustrează performanțele metodei Burg este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.5. Estimarea spectrului de putere a semnalelor modelate AR folosind metoda covarianței modificate sau a celor mai mici pătrate fără constrângerî

După cum s-a prezentat anterior, metoda Burg constă în folosirea unui algoritm lattice utilizând metoda celor mai mici pătrate cu constângerea pentru coeficienții predictorului de a satisface ecuațiile Levison-Durbin.

Ca urmare a acestei constrângerî, creșterea ordinului modelului AR necesită numai o singură optimizare a parametrilor la fiecare etapă. Spre deosebire de această abordare, se poate folosi algoritmul celor mai mici pătrate fără această costrângere.

Pentru a detalia, se construiește estimatul predicției liniare înainte și înapoi și erorile corespunzătoare ca în relațiile (5.135) și (5.136).

Se minimizează suma pătratelor ambelor erori, adică

$$\xi_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[|f_p[n]|^2 + |g_p[n]|^2 \right] =$$

$$\sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \right|^2 + \left| x[n-p] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n+k-p] \right|^2 \right] \quad (5.148)$$

ca în metoda Burg.

În (5.148) nu se mai impune ca parametrii AR să satisfacă relațiile Levison-Durbin. Minimizarea fără costrângeri a lui ξ_p în raport cu coeficienții de predicție determină setul de ecuații liniare

$$\sum_{k=1}^p a_p[k]r_{xx}[l,k] = -r_{xx}[l,0] \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (5.149)$$

unde, prin definiție, secvența $r_{xx}[l,k]$ este

$$r_{xx}[l,k] = \sum_{n=p}^{N-1} [x[n-k]x[n-l] + x[n-p+l]x[n-p+k]] \quad (5.150)$$

Eroarea rezultată utilizând metoda celor mai mici pătrate (LS) este

$$\xi_p^{LS} = r_{xx}[0,0] + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k]r_{xx}[0,k] \quad (5.151)$$

Estimatul spectrului de putere rezultat în urma folosirii algoritmului LS fără costrângeri este

$$P_{xx}^{LS} = \frac{\xi_p^{LS}}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p[k]e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.152)$$

Matricea de corelație din (5.150) nu este Toeplitz, așa că algoritmul Levison-Durbin nu poate fi aplicat, dar pot fi dezvoltăți alți algoritmi pentru eficientizarea calculelor, de complexitate $O(p^2)$.

Caracteristicile acestei metode sunt superioare metodei Burg, în sensul că nu prezintă aceeași sensibilitate la apariția scindării liniilor spectrale, a vârfurilor false și a deplasării de frecvență. Această metodă, în schimb, nu garantează că parametrii AR astfel estimăți determină un model AR stabil.

Un exemplu care ilustrează această metodă este prezentat în paragraful 5.3.9.

5.3.6. Alegerea ordinului modelului AR

Ca regulă generală, dacă se adoptă un ordin prea mic pentru modelul AR, se obține un spectru puternic netezit. Dacă ordinul p este prea mare, există riscul introducerii de vârfuri false de nivel scăzut în spectru.

Un indicator de performanță al modelului AR este valoarea pătratică medie a erorii care, în general, este diferită pentru fiecare din estimatorii prezentați. Valoarea pătratică medie a erorii descrește cu creșterea ordinului modelului. Se poate observa viteza de descreștere și apoi să se decidă încetarea creșterii ordinului, când eroarea devine mică. Aceasta abordare este, de obicei, imprecisă și necontrolabilă.

Două din cele mai bune criterii pentru selectarea ordinului modelului au fost propuse de Akaike [34]:

1-Criteriul erorii de predicție finale FPE (*Final Prediction Error*) în care ordinul este selectat astfel încât să se minimizeze indicele de performanță

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right) \quad (5.153)$$

unde $\hat{\sigma}_{wp}^2$ este dispersia estimată a erorii de predicție liniară.

2-Criteriul informației Akaike $AIC(p)$, (*Akaike Information Criterion*) se bazează pe alegerea ordinului care minimizează cantitatea

$$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p / N \quad (5.154)$$

Cu creșterea ordinului, descrește $\ln \hat{\sigma}_{wp}^2$, în timp ce termenul $2p/N$ crește.

3- O formă alternativă pentru criteriul AIC este criteriul care *minimizează lungimea de descriere (MDL) (Minimize Description Length)*

$$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \quad (5.155)$$

4- *Criteriul de transfer autoregresiv (CAT) (Criterion Autoregresive Transfer)*

$$CAT(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{N-k}{N\hat{\sigma}_{wk}^2} - \frac{N-p}{N\hat{\sigma}_{wp}^2} \quad (5.156)$$

Ordinul p se alege să minimizeze cantitatea $CAT(p)$.

Exemple privind alegerea ordinului și influența ordinului asupra estimatului spectrului de putere sunt prezentate în paragraful 5.3.9.

Trebuie precizat faptul că pentru aplicarea criteriilor prezentate, din date trebuie înălțurată valoarea medie. În general, ordinul modelului depinde de criteriul folosit. Criteriul de selecție al ordinului nu conduce totdeauna la rezultate definitive. În absența oricărei informații asupra procesului care are ca rezultat datele observate, trebuie încercate diferite ordine pentru model și diferite criterii, care, însă, pot conduce la rezultate diferite.

5.3.7. Estimarea spectrului de putere pe baza modelului cu medie alunecătoare (MA)

În modelul $MA(q)$, pentru datele observate, legătura dintre secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ și parametrii MA ai modelului este dată de sistemul de ecuații

$$\gamma_{xx}(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q b_k b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ 0 & m > q \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.157)$$

obținut din (5.125), prin impunerea $a_k = 0$, pentru $k = 1, 2, \dots, p$ și înlocuirea $h[k]$ cu $\{b_k\}$.

Pentru modelul considerat, din (5.124) rezultă

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z)H(z^{-1}) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1}) \quad (5.158)$$

Ținând cont că

$$B(z)B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^q d_m z^{-m} \quad (5.159)$$

unde coeficienții $\{d_m\}$ sunt legați de parametrii MA prin relația

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m}, |m| \leq q \quad (5.160)$$

rezultă atunci

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} \sigma_w^2 d_m & |m| \leq q \\ 0 & |m| > q \end{cases} \quad (5.161)$$

Spectrul de putere pentru procesul MA(q) este

$$\Gamma_{xx}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q \gamma_{xx}[m] e^{-j2\pi fm} = \sigma_w^2 \sum_{m=-q}^q d_m e^{-j2\pi fm} \quad (5.162)$$

Se observă că nu este necesar a determina parametrii MA pentru a estima spectrul de putere, ci sunt suficienți estimații secvenței de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ pentru $|m| \leq q$, adică

$$P_{xx}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{xx}[m] e^{-j2\pi fm}, \quad (5.163)$$

exact ca estimatul spectrului de putere neparametric.

Deoarece $\gamma_{xx}[m] = 0$ pentru $|m| > q$, spectrul are aceeași formă ca și periodograma estimată. Ordinul procesului MA se determină, de obicei, empiric. De exemplu, criteriul AIC pentru modelul MA are aceeași formă ca pentru modelul AR

$$AIC(q) = \ln \hat{\sigma}_{wq}^2 + 2q / N \quad (5.164)$$

unde $\hat{\sigma}_{wq}^2$ este un estimat al dispersiei zgomotului alb.

Un alt mod de a verifica modelul este de a filtra datele prin inversul modelului MA(q) și de a testa dacă ieșirea se apropie de zgomotul alb. De asemenea, se poate urmări dacă valoarea estimărilor nedeplasați ai secvenței de autocorelație sunt apropiate de zero pentru deplasări mari. Dacă nu se întâmplă astfel, modelul MA va avea rezultate slabe referitor la rezoluția în frecvență și va fi abandonat în favoarea modelului AR sau ARMA.

12.3.8. Estimarea spectrului de putere pentru semnale modelate ARMA

Algoritmul Burg și variantele sale, precum și metoda celor mai mici pătrate descrise anterior, furnizează estimări ai spectrului de putere robusti, de rezoluție ridicată, pe baza modelului AR.

Modelul ARMA oferă posibilitatea îmbunătățirii estimatului spectrului AR, prin folosirea a mai puțini parametri pentru sistem. Modelul ARMA este potrivit în special când datele sunt afectate de zgomot, deoarece în acest caz semnalul resultant conduce la un proces ARMA. Într-adevăr, se presupune că datele $x[n]$ sunt generate de un sistem AR, a cărui ieșire este afectată de zgomot alb, aditiv.

Transformata Z a funcției de autocorelație a semnalului rezultat poate fi exprimată ca

$$\Gamma_{xx}(z) = \frac{\sigma_w^2}{A(z)A(z^{-1})} + \sigma_n^2 = \frac{\sigma_w^2 + \sigma_n^2 A(z)A(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \quad (5.165)$$

unde σ_n^2 este dispersia zgomotului aditiv. Procesul $x[n]$ este ARMA(p,p), unde p este ordinul procesului.

După cum s-a arătat, parametrii modelului ARMA sunt legați de secvența de autocorelație prin relația

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h[k] b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{xx}^*[-m] & m < 0 \end{cases} \quad (5.166)$$

Pentru deplasări $|m| > q$, ecuația implică numai parametrii $\{a_k\}$. Cu estimații funcției de autocorelație înlocuiți în locul lui $\gamma_{xx}[m]$, se pot rezolva cele p ecuații din (5.166a) pentru a afla $\{\hat{a}_k\}$.

Pentru modele de ordin superior, este posibil ca această abordare să conducă la estimații modești pentru parametrii AR, motiv pentru care aceasta nu este recomandată.

O metodă mult mai demnă de încredere este de a construi un sistem de ecuații liniare cu mai multe ecuații decât necunoscute pentru $m > q$ și a folosi metoda celor mai mici pătrate în optimizarea coeficienților modelului.

Pentru a detalia, se presupune că secvența de autocorelație poate fi estimată fidel până la deplasarea M , unde $M > p+q$. În acest caz, se poate scrie

$$\hat{r}_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k], \\ m = q+1, q+2, \dots, M < N, M > p+q \quad (5.167)$$

Parametrii $\{a_k\}$ se selectează astfel încât să minimizeze eroarea pătratică

$$\xi = \sum_{m=q+1}^M |e[n]|^2 = \sum_{m=q+1}^M \left| r_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k] \right|^2 \quad (5.168)$$

Minimizarea lui ξ conduce la setul de ecuații liniare pentru parametrii $\{a_k\}$

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[M-1] & r_{xx}[M-2] & \dots & r_{xx}[M-p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \dots \\ r_{xx}[M] \end{bmatrix} \quad (5.169)$$

Această relație poate fi scrisă matriceal în forma

$$[R_{xx}][a] = -[r_{xx}] \quad (5.169')$$

unde

$$[R_{xx}] = \begin{bmatrix} r_{xx}[q] & r_{xx}[q-1] & \dots & r_{xx}[q-p+1] \\ r_{xx}[q+1] & r_{xx}[q] & \dots & r_{xx}[q-p+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{xx}[M-1] & r_{xx}[M-2] & \dots & r_{xx}[M-p] \end{bmatrix}$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad [r_{xx}] = - \begin{bmatrix} r_{xx}[q+1] \\ r_{xx}[q+2] \\ \dots \\ r_{xx}[M] \end{bmatrix}$$

Deoarece $[R_{xx}]$ este o matrice de dimensiune $(M-q) \times p$ și $(M-q) > p$, vectorul coeficienților estimăți se obține cu relația

$$[\hat{a}] = -([R'_{xx}][R_{xx}])^{-1}[R'_{xx}][r_{xx}] \quad (5.170)$$

Procedura se numește *metoda Yule-Walker modificată a celor mai mici pătrate*.

Secvenței de autocorelație i se poate aplica o fereastră de ponderare, pentru a scădea ponderea estimărilor mai puțin demni de încredere pentru deplasări mari. Odată estimări parametrii părții AR ai modelului, se poate construi sistemul a cărui funcție de sistem este

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k z^{-k} \quad (5.171)$$

Secvența $x[n]$ poate fi apoi filtrată prin filtrul de tip FIR, cu funcția de sistem $\hat{A}(z)$, obținându-se secvența

$$v[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k x[n-k], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.172)$$

Cascada dintre modelul ARMA(p, q) și modelul $\hat{A}(z)$ este aproximativ procesul $MA(q)$ generat de modelul $B(z)$. Astfel se poate folosi estimatul MA pentru a obține spectrul MA. În particular, secvența filtrată $v[n]$ pentru $p \leq n \leq N-1$ este folosită pentru a forma secvența de corelație estimată $r_{vv}[m]$, din care se obține spectrul MA

$$P_{vv}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{vv}[m] e^{-j2\pi fm} \quad (5.173)$$

Se observă că parametrii $\{b_k\}$ nu sunt necesari în determinarea spectrului de putere și că $r_{vv}[m]$ este un estimat al autocorelației pentru modelul MA din (5.157).

În formarea estimatului $r_{vv}[m]$ se poate folosi ponderarea cu o fereastră Bartlett, pentru dezaccentuarea estimărilor corelației pentru deplasări mari.

În final rezultă

$$\hat{P}_{xx}^{ARMA}(f) = \frac{P_{vv}^{MA}(f)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k e^{-j2\pi fk} \right|^2} \quad (5.174)$$

Problema selecției ordinului modelului ARMA(p,q) se rezolvă prin minimizarea indicelui AIC [62].

$$AIC(p,q) = \ln \hat{\sigma}_{wpq}^2 + \frac{2(p+q)}{N} \quad (5.175)$$

unde $\hat{\sigma}_{wpq}^2$ este un estimat al dispersiei erorii zgromotului alb aplicat la intrarea modelului. Un test suplimentar asupra adecvării unui model particular ARMA(p,q) este de a filtra datele prin model și de a testa dacă la ieșire se furnizează o secvență de zgromot alb. Aceasta ar putea necesita ca parametrii modelului MA, să fie calculați din secvența de autocorelație estimată, folosind factorizarea spectrală pentru a determina $B(z)$ din $D(z) = B(z)B(z^{-1})$.

5.3.9. Rezultate experimentale

În acest paragraf sunt prezentate câteva rezultate experimentale privind performanțele estimațiilor AR și ARMA ai spectrelor de putere, folosind date generale artificial. Scopul acestor simulări constă în compararea metodelor de estimare spectrală, din punct de vedere al rezoluției de frecvență, deplasării și robustești în prezența zgromotului aditiv. În aceste experimente, datele sunt compuse din una sau două sinusoide și zgromot aditiv. Cele două sinusoide sunt distanțate în frecvență cu Δf . În acest caz, procesul real este de tip ARMA(4,4). În experimente se folosește un model AR(p). Pentru raporturi semnal/zgromot mari, este de așteptat ca modelul AR(4) să fie adecvat. Pentru raporturi semnal/zgromot scăzute este necesar un model AR de ordin mai mare pentru a aproxima procesul ARMA (4,4). Rezultatele experimentale sunt în concordanță cu aceste aspecte. Raportul semnal/zgromot se definește

ca $SNR = 10 \log_{10} A^2 / 2\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia zgomotului aditiv, considerat alb, iar A, amplitudinea sinusoidei.

Frecvența sinusoidelor componente ale semnalului, nivelul zgomotului, faza inițială și lungimea datelor sunt trecute pe fiecare grafic.

În figura 5.8 sunt prezentate estimații spectrului de putere obținuți prin metodele Yule-Walker, Burg și a celor mai mici pătrate (LS), pentru o lungime a datelor de N=20, SNR=20dB și $\Delta f = 0,13$.

Se observă că metoda Yule-Walker furnizează un estimat puternic netezit, cu vârfuri mici. Dacă distanțarea în frecvență descrește la $\Delta f = 0,07$, metoda Yule-Walker nu mai poate decela între cele două vârfuri, situație ilustrată în figura 5.9.

De asemenea, se observă o deplasare în cazul metodei Burg. Prin creșterea lungimii datelor, metoda Yule-Walker poate decide prezența celor două componente spectrale. Din compararea acestor trei metode se remarcă faptul că metodele Burg și a celor mai mici pătrate sunt superioare pentru înregistrări de lungime mică.

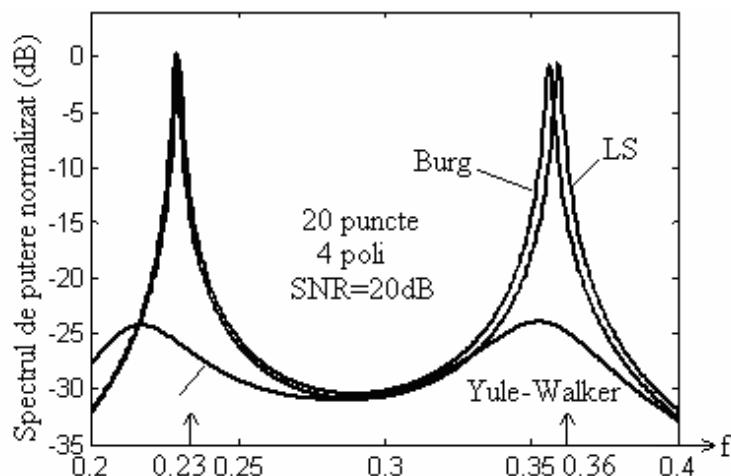


Fig. 5.8. Comparație între metodele AR de estimare spectrală

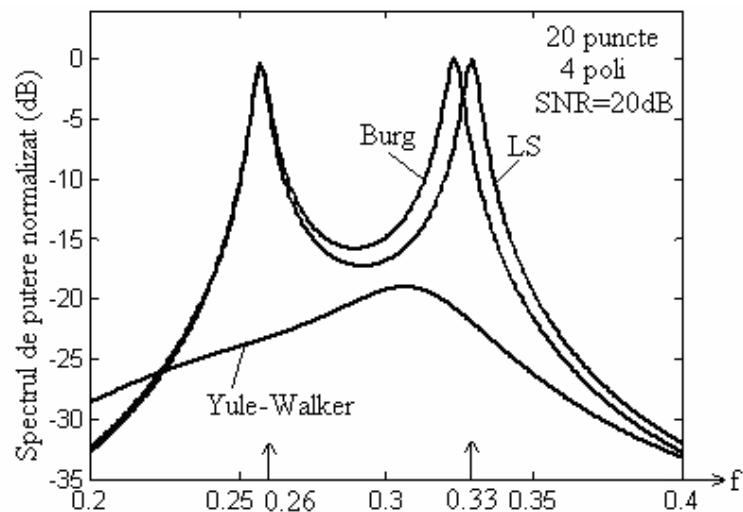


Fig. 5.9. Comparație între metodele AR de estimare spectrală

Efectul zgomotului aditiv asupra estimărilor este ilustrat în figura 5.10 pentru metoda celor mai mici pătrate.

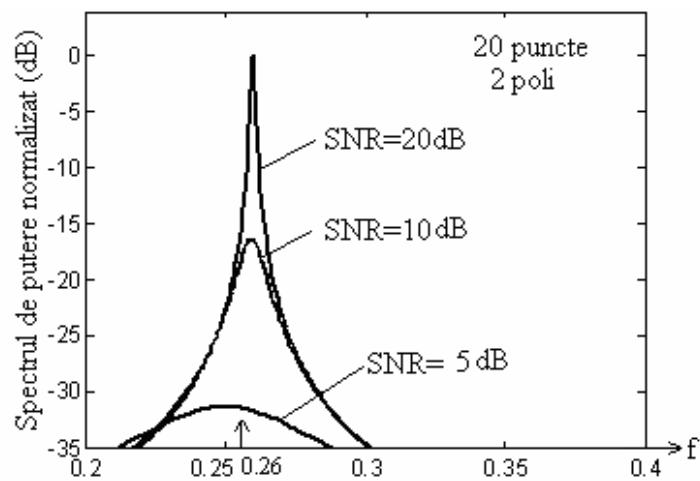


Fig. 5.10. Efectul zgomotului aditiv asupra estimatului prin metoda LS

Efectul ordinului filtrului asupra metodelor Burg și LS este prezentat în figurile 5.11, respectiv 5.12. Ambele metode arată vârfuri false când ordinul filtrului este crescut la $p=12$.

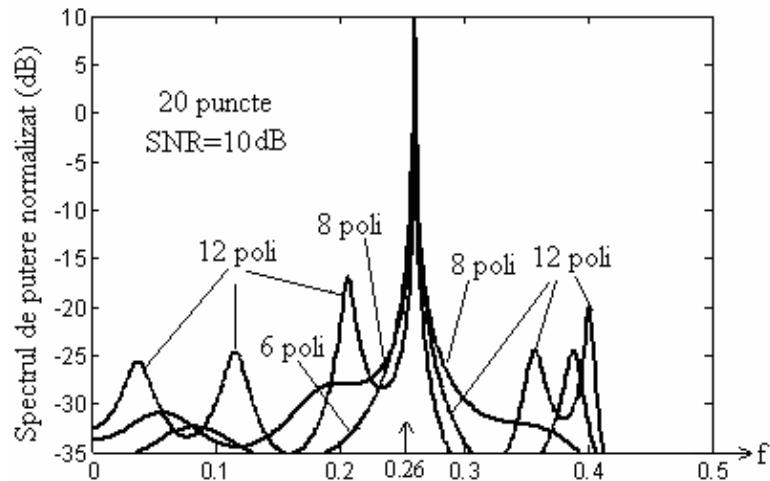


Fig. 5.11. Efectul ordinului filtrului asupra metodei Burg

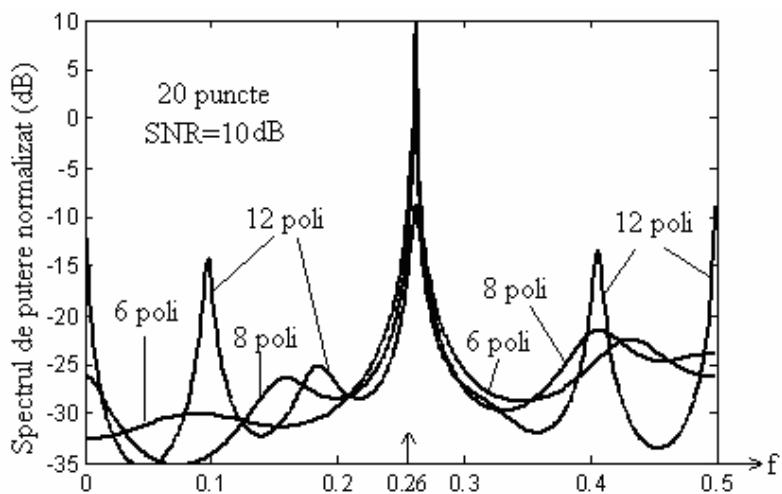


Fig. 5.12. Efectul ordinului filtrului asupra metodei LS

Efectul fazei inițiale este ilustrat în figurile 5.13 și 5.14 pentru metoda Burg și, respectiv, metoda LS. Se observă că metoda LS este mai puțin sensitivă la faza inițială decât metoda Burg.

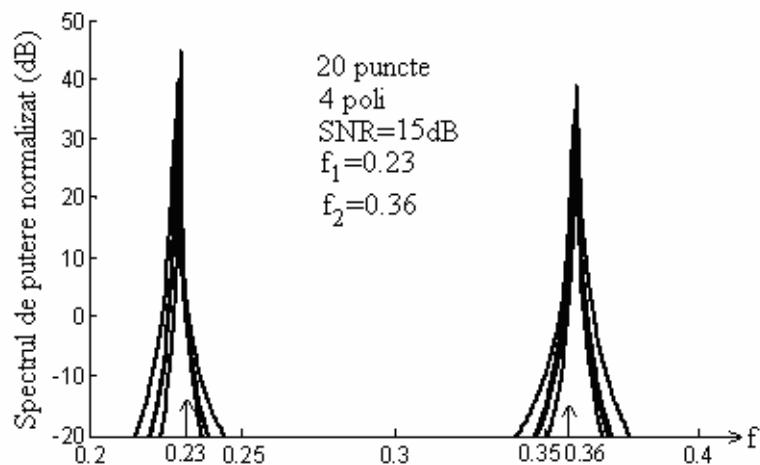


Fig. 5.13. Efectul fazei inițiale asupra metodei Burg

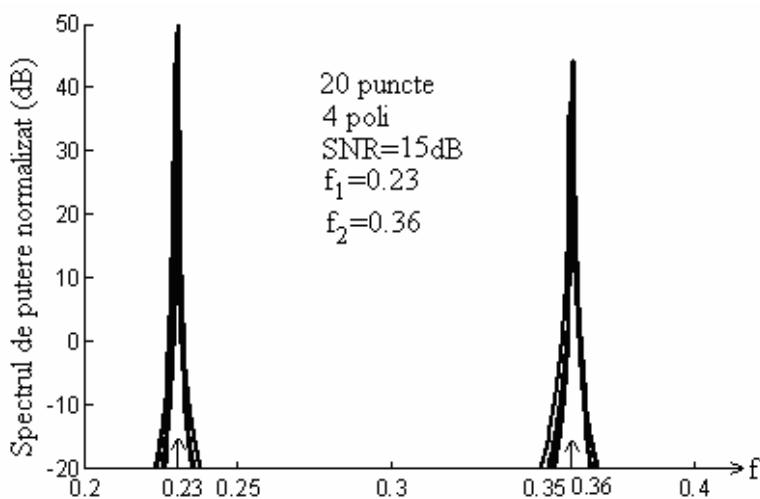


Fig. 5.14. Efectul fazei inițiale asupra metodei LS

În figura 5.15 este arătată scindarea liniilor spectrale în cazul metodei Burg, pentru $p=12$. Se observă că pentru un model de ordinul 8, acest lucru nu se produce. Metoda LS nu prezintă scindarea liniilor spectrale pentru aceleași condiții folosite în simularea precedentă. Această scindare din cazul metodei Burg dispare cu creșterea lungimii datelor.

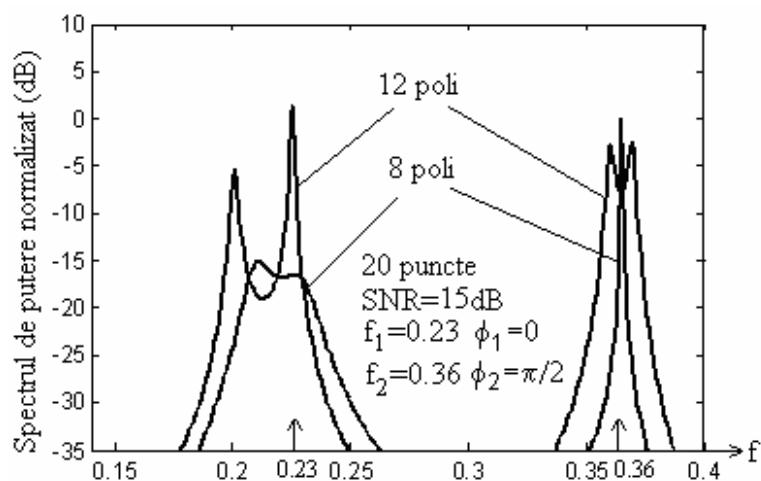


Fig. 5.15. Scindarea liniilor spectrale în metoda Burg

În figurile 5. 16 și 5. 17 sunt prezentate proprietățile de rezoluție ale metodelor Burg și LS pentru $\Delta f = 0,07$ și $N = 20$, pentru un SNR scăzut (3dB). Deoarece procesul care conține zgomot aditiv este ARMA, este necesar un model AR de ordin înalt pentru o aproximare adecvată la SNR scăzut. Se observă că rezoluția de frecvență se îmbunătățește cu creșterea ordinului.

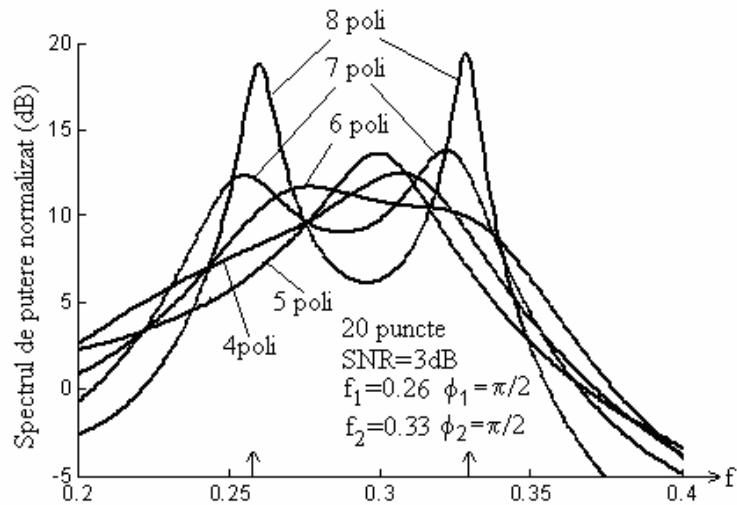


Fig. 5.16. Rezoluția de frecvență în metoda Burg cu $N=20$

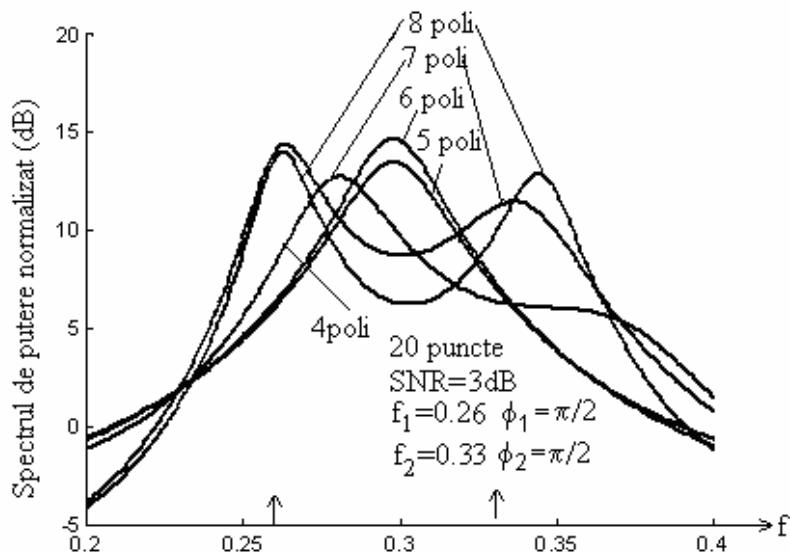


Fig. 5.17. Rezoluția de frecvență în metoda LS cu $N=20$

În figura 5.18 se prezintă eroarea de predicție finală pentru metoda Burg și un SNR =3dB. Pentru această valoare a raportului

semnal /zgomot, valoarea optimă a ordinului modelului este $p=12$, conform criteriului erorii de predicție finale (FPE).

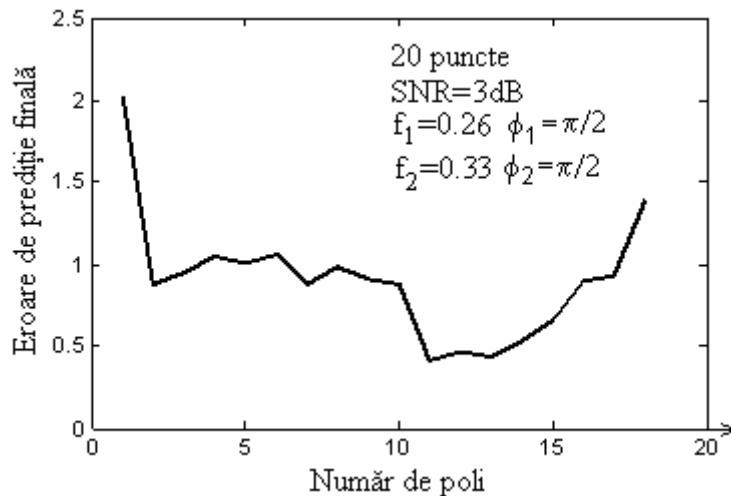


Fig. 5.18. Eroarea de predicție finală pentru estimatul Burg

În figura 5.19 este prezentat estimatul spectrului de putere pentru două sinusoide neafectate de zgomot, folosind un model ARMA(10,10).

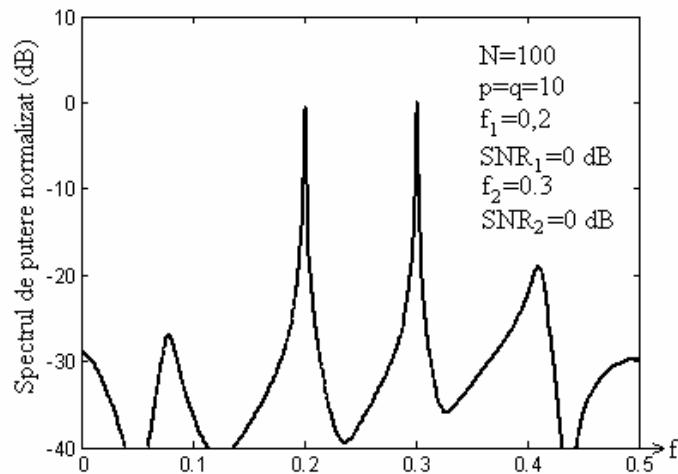


Fig. 5.19. Estimativul spectrului de putere pentru două sinusoide neafectate de zgomot, folosind modelul ARMA (10,10)

În figura 5.20 este prezentat estimatul spectrului de putere pentru două sinusoide afectate de zgomot, folosind un model ARMA(10,10). Se observă calitatea bună a estimărilor obținuți prin această metodă. Condițiile în care au fost obținuți acești estimări sunt prezentate în figură.

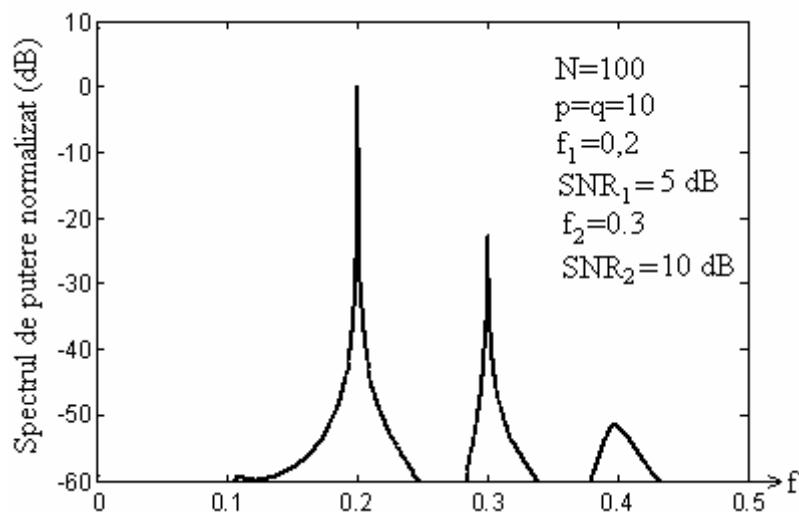


Fig. 5.20. Estimatul spectrului de putere pentru două sinusoide în zgomot, folosind modelul ARMA (10,10)

5.4. Probleme rezolvate

1. Fie procesul AR(3) generat de ecuația cu diferențe

$$x[n] = \frac{14}{24}x[n-1] + \frac{9}{24}x[n-2] - \frac{1}{24}x[n-3] + w[n]$$

unde $w[n]$ este zgomot alb de dispersie σ_w^2

- a) Să se determine coeficienții predictorului liniar optim pentru $p = 3$.
- b) Să se determine funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq 5$.
- c) Să se determine coeficienții de reflexie corespunzători predictorului liniar anterior.

Soluție

$$\text{a) } H(z) = \frac{1}{1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}}$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}$$

Coeficienții predictorului optim sunt:

$$a_3[0] = 1; a_3[1] = -\frac{14}{24}; a_3[2] = -\frac{9}{24}; a_3[3] = \frac{1}{24}$$

b) Particularizând relația (5.131) pentru datele problemei, rezultă sistemul

$$\begin{cases} \gamma_{xx}[0] - \frac{14}{24}\gamma_{xx}[1] - \frac{9}{24}\gamma_{xx}[2] + \frac{1}{24}\gamma_{xx}[3] = \sigma_w^2 \\ -\frac{14}{24}\gamma_{xx}[0] + \frac{15}{24}\gamma_{xx}[1] + \frac{1}{24}\gamma_{xx}[2] = 0 \\ -\frac{9}{24}\gamma_{xx}[0] - \frac{13}{24}\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[2] = 0 \\ \frac{1}{24}\gamma_{xx}[0] - \frac{9}{24}\gamma_{xx}[1] - \frac{14}{24}\gamma_{xx}[2] + \gamma_{xx}[3] = 0 \end{cases}$$

cu soluția:

$$\gamma_{xx}[0] = 1,47\sigma_w^2; \gamma_{xx}[1] = 1,29\sigma_w^2; \gamma_{xx}[2] = 1,25\sigma_w^2; \gamma_{xx}[3] = 1,15\sigma_w^2.$$

Pentru a determina valorile funcției de autocorelație pentru $m > 3$, se folosește relația

$$\gamma_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^3 a_k \gamma_{xx}[m-k]$$

de unde rezultă

$$\gamma_{xx}[4] = 1,091; \gamma_{xx}[5] = 0,964.$$

c) Coeficienții de reflexie se determină cu relația $K_m = a_m[m], 1 \leq m \leq p$, unde $a_m[m]$ se determină din polinoamele

corespunzătoare structurii lattice cu m trepte.

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = 3, 2, 1.$$

$$K_3 = a_3[3] = 0,042$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{14}{24}z^{-1} - \frac{9}{24}z^{-2} + \frac{1}{24}z^{-3}$$

$$B_3(z) = \frac{1}{24} - \frac{9}{24}z^{-1} - \frac{14}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

$$A_2(z) = 1 + \frac{327}{575}z^{-1} - \frac{202}{575}z^{-2} \rightarrow K_2 = a_2[2] = -\frac{202}{575} = 0,351$$

$$B_2(z) = -\frac{202}{575} + \frac{327}{575}z^{-1} + z^{-2}$$

$$A_1(z) = 1 + 0,452z^{-1} \rightarrow K_1 = a_1[1] = 0,452.$$

2. Secvența de autocorelație a unui proces aleator este

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ -0,5, & m = \pm 1 \\ 0,625, & m = \pm 2 \\ -0,6875, & m = \pm 3 \end{cases}$$

Să se determine funcțiile de sistem $A_m(z)$ pentru filtrele erorii de predicție pentru $m = 1, 2, 3$, coeficienții de reflexie K_m și erorile pătratice medii de predicție corespunzătoare.

Soluție

Particularizând relațiile (5.129) pentru datele problemei, rezultă

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] \\ \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[-2] & \gamma_{xx}[-1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[1] \\ \gamma_{xx}[2] \\ \gamma_{xx}[3] \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,625 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0,625 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,625 \\ -0,6875 \end{bmatrix}$$

cu soluția

$$a_3[1] = 0; a_3[2] = -\frac{3}{8}; a_3[3] = \frac{1}{2}.$$

$$A_3(z) = 1 - \frac{3}{8}z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3}, \quad K_3 = a_3[3] = \frac{1}{2}$$

Funcțiile de sistem ale predictorului de ordin inferior se determină recursiv din relația

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = 3, 2, 1,$$

care conduce la soluțiile

$$A_2(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}, \quad K_2 = a_2[2] = -\frac{1}{2}$$

$$A_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}, \quad K_1 = a_1[1] = \frac{1}{2}$$

Eroarea de predicție a predictorului cu m trepte se determină cu relația

$$E_m^f = E_{m-1}^f(1 - K_m^2), \text{ cu } E_0^f = \gamma_{xx}[0].$$

Rezultă atunci:

$$E_1^f = E_0^f(1 - K_1^2) = \gamma_{xx}[0] \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} E_2^f &= E_1^f(1 - K_2^2) = \gamma_{xx}[0](1 - K_1^2)(1 - K_2^2) = \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$E_3^f = E_2^f(1 - K_3^2) = \gamma_{xx}[0](1 - K_1^2)(1 - K_2^2)(1 - K_3^2) = \\ = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{27}{64}$$

3. a) Să se determine spectrele de putere pentru procesele aleatoare generate de următoarele ecuații cu diferențe:

- 1) $x[n] = -0,81x[n-2] + w[n] + w[n-1]$
- 2) $x[n] = w[n] - w[n-2]$
- 3) $x[n] = -0,81x[n-2] + w[n]$

b) pentru procesele (2) și (3), să se determine funcțiile de autocorelație.

Soluție

$$\text{a1. } H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0,81z^{-2}}$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{(1 - z^{-1})(1 - z)}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)} = \\ = \sigma_w^2 \frac{2 - (z + z^{-1})}{1,6561 + 0,81(z^2 + z^{-2})}$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{2(1 - \cos 2\pi f)}{1,6561 + 1,62 \cdot \cos 4\pi f}$$

$$\text{a2. } H(z) = 1 - z^{-2}$$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma_w^2 (1 - z^{-2})(1 - z^2) = \sigma_w^2 (2 - z^{-2} - z^2)$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 (2 - 2 \cos 4\pi f)$$

$$\text{a3. } H(z) = \frac{1}{1 + 0,81z^{-2}}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \sigma_w^2 H(z) H(z^{-1}) = \sigma_w^2 \frac{1}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)} = \\ &= \sigma_w^2 \frac{1}{1,6561 + 0,81(z^2 + z^{-2})}\end{aligned}$$

Evaluând $\Gamma_{xx}(z)$ pe cercul unitate, se obține

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{1}{1,6561 + 1,62 \cdot \cos 4\pi f}$$

b2.

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}[m] &= Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\} = Z^{-1}\{\sigma_w^2(2 - z^{-2} - z^2)\} = \\ &= \sigma_w^2(-\delta[n+2] + 2\delta[n] - \delta[n-2])\end{aligned}$$

b3.

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}[m] &= Z^{-1}\{\Gamma_{xx}(z)\} = Z^{-1}\left\{\sigma_w^2 \frac{1}{(1 + 0,81z^{-2})(1 + 0,81z^2)}\right\} = \\ &= \sigma_w^2 Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1 + j0,9z^{-1})(1 - j0,9z^{-1})(1 + j0,9z)(1 - j0,9z)}\right\} = \\ &= 2,9 \cdot \sigma_w^2 \cdot (0,9)^{|n|} \cos \frac{\pi n}{2}\end{aligned}$$

4. Să se arate că un filtru trece tot, cu funcția de sistem

$$\begin{aligned}H(z) &= \prod_{i=1}^N \frac{zz_i^* - 1}{z - z_i}, |z_i| < 1, \quad \text{are proprietatea că} \\ &\quad |H(z)| > 1, \quad \text{pentru } |z| < 1 \\ &\quad |H(z)| < 1, \quad \text{pentru } |z| > 1 \\ &\quad |H(z)| = 1, \quad \text{pentru } |z| = 1\end{aligned}\tag{p4.1}$$

Soluție

Exprimând z și z_i^* în forma polară $z = r \cdot e^{j\omega}$, $z_i = r_i \cdot e^{j\omega_i}$, pentru fiecare factor al produsului din enunț se poate scrie

$$|H_i(z)| = \left| \frac{zz_i^* - 1}{z - z_i} \right| = \left| \frac{rr_i e^{j(\omega - \omega_i)} - 1}{re^{j\omega} - re^{j\omega_i}} \right| = \left(\frac{r^2 r_i^2 + 1 - 2rr_i \cos(\omega - \omega_i)}{r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos(\omega - \omega_i)} \right)^{1/2}$$

Tinând cont că $r_i < 1$, rezultă

$$|H_i(z)| > 1, \text{ pentru } |z| < 1$$

$$|H_i(z)| < 1, \text{ pentru } |z| > 1$$

$$|H_i(z)| = 1, \text{ pentru } |z| = 1$$

Prin înmulțirea factorilor $H_i(z)$, rezultă relația (p4.1).

5. Să se arate că dacă coeficienții de reflexie $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p$, atunci $|z_{p,i}| < 1$ pentru toți $i \leq p$, unde $z_{p,i}$ sunt rădăcinile polinomului $A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k}$.

Soluție

Se folosește metoda inducției. Pentru $p = 1$, dacă $|K_1| < 1$, polinomul $A_1(z) = 1 + a_1[1]z^{-1} = 1 + K_1 z^{-1}$ are rădăcina $z_{1,1} = -K_1$, deci, într-adevăr, $|z_{1,1}| < 1$.

În continuare, se presupune că dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p-1$, $|z_{p-1,j}| < 1$ pentru toți $j \leq p-1$, unde $z_{p-1,j}$ sunt rădăcinile polinomului $A_{p-1}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p-1}[k]z^{-k}$ și se arată că $|z_{p,i}| < 1$.

Între polinoamele $A_{p-1}(z)$ și $A_p(z)$ există relația recursivă

$$A_p(z) = A_{p-1}(z) + K_p z^{-p} A_{p-1}(z^{-1}) \quad (\text{p5.1})$$

$z_{p,i}$ este o rădăcină a polinomului $A_p(z)$, astfel încât înlocuind această rădăcină în (p5.1), rezultă

$$A_p(z_{p,i}) = A_{p-1}(z_{p,i}) + K_p z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1}) = 0 \quad (\text{p5.2})$$

Expresia

$$Q_{p-1}(z) = \frac{z^{-p} A_{p-1}(z^{-1})}{A_{p-1}(z)} \quad (\text{p5.3})$$

este de tip trece tot. Din (p5.2) rezultă că expresia

$$-\frac{1}{K_p} = \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} = Q_{p-1}(z_{p,i}) \quad (\text{p5.4})$$

care caracterizează un sistem de tip trece tot. Deoarece $|K_p| < 1$, rezultă $|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \frac{1}{|K_p|} > 1$. Înținând cont de rezultatul din problema 4, rezultă $|z_{p,i}| < 1$.

6. Dacă $|z_{p,i}| < 1$ pentru toți $i \leq p$, atunci

$$|K_m| < 1 \quad (\text{p6.1})$$

pentru toți $m \leq p$, unde $z_{p,i}$ sunt rădăcinile polinomului $A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k}$, iar K_m sunt coeficienții de reflexie corespunzători polinomului $A_p(z)$.

Soluție

Produsul rădăcinilor polinomului $A_p(z)$ este egal cu $a_p[p]$, adică $K_p = a_p[p] = z_{p,1} \cdot z_{p,2} \cdots z_{p,p}$. Cum modulul tuturor polilor este subunitar, rezultă $|K_p| < 1$, adică relația (p6.1) este adevărată pentru $m = p$.

Pentru a arăta că relația (p6.1) este adevărată pentru $m = p - 1$, este suficient să arătăm că $|z_{p-1,j}| < 1$ pentru $j \leq p - 1$.

Pentru aceasta se formează funcțiile trece tot

$$Q_p(z) = \frac{z^{-p} A_p(z^{-1})}{A_p(z)}$$

De asemenea, se folosește relația de recurență

$$A_{p-1}(z) = \frac{A_p(z) - K_p z^{-p} A_p(z^{-1})}{1 - K_p^2} \quad (\text{p6.2})$$

Deoarece $A_{p-1}(z_{p-1,j}) = 0$, din (p6.2) rezultă

$$A_p(z_{p-1,j}) - K_p z^{-p} A_p(z_{p-1,j}^{-1}) = 0, \text{ adică}$$

$$|Q_p(z_{p-1,j})| = \left| \frac{z_{p-1,j}^{-p} A_p(z_{p-1,j}^{-1})}{A_p(z_{p-1,j})} \right| = \frac{1}{|K_p|} > 1, \text{ deci } |z_{p-1,j}| < 1 \text{ și}$$

$$|K_{p-1}| = |a_{p-1}[p-1]| = |z_{p-1,1} \cdot z_{p-1,2} \cdots z_{p-1,p-1}| < 1.$$

Continuând în același mod, se decide că $|K_m| < 1$ pentru toți

$m \leq p$.

7. Dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p - 1$ și $|K_p| = 1$, atunci polinomul $A_p(z)$ are toate rădăcinile pe cercul unitate, adică $|z_{p,i}| = 1$ pentru toți $i \leq p$.

Soluție

Din problema 6 rezultă că $|z_{p-1,j}| < 1$, deoarece $|K_k| < 1$ pentru toți $m \leq p - 1$.

Expresia

$$Q_{p-1}(z) = \frac{z^{-p} A_{p-1}(z^{-1})}{A_{p-1}(z)}$$

este de tip trece tot. Din (p5.2) rezultă că expresia

$|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \left| \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} \right| = \frac{1}{|K_p|} = 1$, ceea ce, conform relației (p4.1), conduce la concluzia că $|z_{p,i}| = 1$.

8. Dacă $|K_m| < 1$ pentru toți $m \leq p-1$ și $|K_p| > 1$, atunci polinomul $A_p(z)$ are toate rădăcinile în exteriorul cercului unitate, adică $|z_{p,i}| > 1$ pentru toți $i \leq p$.

Soluție

În acest caz

$|Q_{p-1}(z_{p,i})| = \left| \frac{z_{p,i}^{-p} A_{p-1}(z_{p,i}^{-1})}{A_{p-1}(z_{p,i})} \right| = \frac{1}{|K_p|} < 1$, ceea ce, conform relației (p4.1), conduce la concluzia că $|z_{p,i}| > 1$.

9. Un proces aleator staționar AR(p) satisface ecuațiile

$$\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[m-k] = \begin{cases} \sigma_w^2, & m = 0 \\ 0, & 1 \leq m \leq p \end{cases}$$

unde $a_p[k]$ sunt coeficienții predictorului liniar de ordin p și σ_w^2 este eroarea pătratică medie minimă de predicție. Dacă matricea de autocorelație

$$\boldsymbol{\Gamma}_{p+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[p-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix}$$

este pozitiv definită, să se arată că pentru $1 \leq m \leq p$, coeficienții de reflexie satisfac relația $|K_m| < 1$.

Soluție

Relația din enunț poate fi scrisă matriceală sub forma

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[p-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p] & \gamma_{xx}[p-1] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_p[0] \\ a_p[1] \\ \dots \\ a_p[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Din acest sistem de ecuații, rezultă

$$a_p[0] = \frac{\sigma_w^2 \Delta_{\Gamma_p}}{\Delta_{\Gamma_{p+1}}}, \text{ unde } \Delta_{\Gamma_p} \text{ este determinantul matricei } \Gamma_p, \text{ iar}$$

$$\Delta_{\Gamma_{p+1}}, \text{ determinantul matricei } \Gamma_{p+1}.$$

$$\text{Dar } a_p[0] = 1, \text{ fapt ce conduce la } \sigma_w^2 = \frac{\Delta_{\Gamma_{p+1}}}{\Delta_{\Gamma_p}}. \text{ Cum matricea}$$

de autocorelație este pozitiv definită, ambii determinanți din relația precedentă sunt pozitivi, de unde rezultă că $\sigma_w^2 > 0$. Folosind

$$\text{recursiv relația (3.83), rezultă } \sigma_w^2 = \prod_{m=1}^p (1 - K_m^2) \gamma_{xx}[0] > 0, \text{ unde } K_m$$

reprezintă coeficienții lattice corespunzători predictorului liniar.

Relația precedentă implică $|K_m| < 1$.

CAPITOLUL 3

PREDICTION LINIARĂ ȘI FILTRARE LINIARĂ OPTIMALĂ

Proiectarea filtrelor pentru estimarea semnalelor este o problemă ce apare frecvent în proiectarea sistemelor de comunicații, de control și alte aplicații.

În acest capitol problema proiectării filtrelor optimale va fi abordată din punct de vedere statistic. Pentru simplitatea tratării,filtrele se impun a fi liniare iar criteriul de optimizare se bazează pe minimizarea erorii pătratice medii. Drept consecință, în determinarea filtrelor optimale este necesară numai statistica de ordinul doi (funcțiile de autocorelație și corelație) ale procesului presupus staționar. De asemenea, se va urmări proiectarea filtrelor optimale pentru predicția liniară care este un domeniu important în procesarea de semnal cu aplicații în domenii diverse ca:

- procesarea semnalului vocal;
- procesarea de imagini;
- suprimarea zgomotului în sistemele de comunicații etc.

3.1. Predicție înainte (forward)

Fie $x[n]$ un proces aleator staționar. Se dorește estimarea valorii procesului la un moment dat, pe baza unui număr finit p de

observații (eșantioane) consecutive anterioare.

În cazul general, valoarea estimată se notează $\hat{x}[n]|_{M_p^x[n-r]}$,

unde $M_p^x[n-r] = \{x[n-r-p+1], \dots, x[n-r]\}$, $r > 1$, reprezintă vectorul format din p eșantioane consecutive anterioare momentului $n-r$, inclusiv. În acest caz, se spune că s-a realizat predicția înainte cu r pași de ordinul p a eșantionului $x[n]$.

Un interes special prezintă *predictorul liniar înainte cu un pas* ($r=1$), care determină valoarea estimată $\hat{x}[n]$ ca o combinație liniară ponderată a ultimelor p valori: $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-p]$.

Valoarea estimată se determină cu relația

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \quad (3.1)$$

unde $\{-a_p[k]\}$ reprezintă ponderile combinației liniare, numite *coeficienți de predicție* ai predictorului înainte cu un pas, de ordin p .

Conform relației (3.1), schema predictorului liniar cu un pas, de ordinul p este dată în figura 3.1.

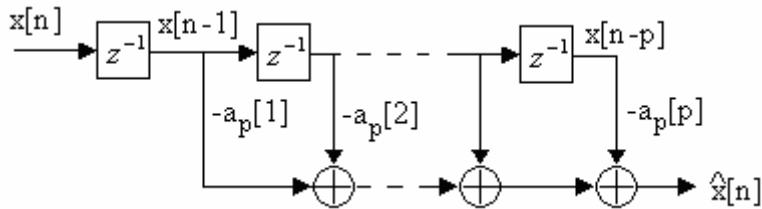


Fig. 3.1. Predictor liniar cu un pas, de ordin p

Diferența dintre valoarea $x[n]$ și cea predictată $\hat{x}[n]$ se numește *eroare de predicție înainte* și se notează $f_p[n]$.

$$f_p[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \quad (3.2)$$

Pe baza relației (3.2), eroarea de predicție rezultă conform schemei din figura 3.2.

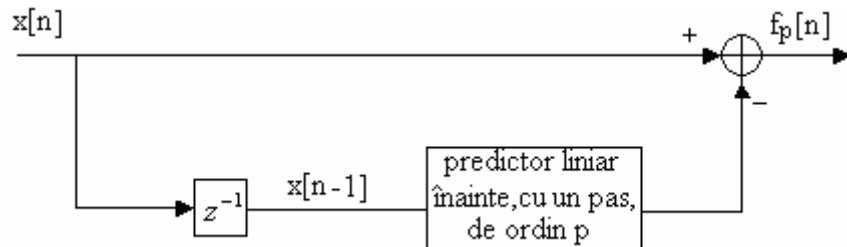


Fig. 3.2. Legătura dintre predictorul liniar înainte și filtrul erorii de predicție

Structura din figura 3.2 se mai numește *filtrul erorii de predicție*, cu intrarea $x[n]$ și ieșirea $f_p[n]$. O realizare echivalentă pentru filtrul erorii de predicție este prezentată în figura 3.3, care reprezintă o realizare în formă directă a unui filtru FIR cu funcția de sistem:

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^p a_p[k] z^{-k} \quad (3.3)$$

unde $a_p[0] = 1$.

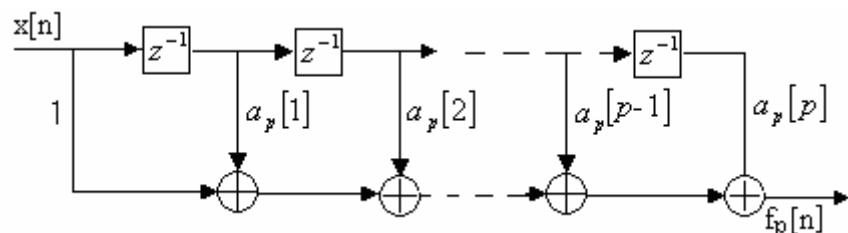


Figura 3.3. Filtrul erorii de predicție

Eoarea pătratică medie de predicție liniară înainte este

$$\begin{aligned} \xi_p^f &= E[f_p^2[n_i]] = E\left[\sum_{k=0}^p a_p[k] x[n_i - k] \sum_{l=0}^p a_p[l] x[n_i - l]\right] = \\ &= E[x[n_i] + \dots + a_p[p] x[n_i - p]] [x[n_i] + \dots + a_p[p] x[n_i - p]] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[x^2[n_i] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] x[n_i] x[n_i - k] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k] a_p[l] x[n_i - k] x[n_i - l] \right] = \\
&= \gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k] a_p[l] \gamma_{xx}[l - k]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Eroarea pătratică medie este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor și prezintă un extrem pentru valorile coeficienților pentru care

$$\frac{\partial \xi_p^f(a_p[k])}{\partial a_p[k]} = 0 \tag{3.5}$$

Înlocuind (3.4) în (3.5), rezultă

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi_p^f(a_p[k])}{\partial a_p[k]} = \\
&= \frac{\partial}{\partial a_p[k]} \left(\gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_p[k] a_p[l] \gamma_{xx}[l - k] \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial a_p[k]} (\gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] + \\
&\quad a_p[1] a_p[1] \gamma_{xx}[0] + \dots + a_p[1] a_p[k] \gamma_{xx}[k-1] + \dots + a_p[1] a_p[p] \gamma_{xx}[p-1] + \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_p[k] a_p[1] \gamma_{xx}[1-k] + \dots + a_p[k] a_p[k] \gamma_{xx}[0] + \dots + a_p[k] a_p[p] \gamma_{xx}[p-k] + \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_p[p] a_p[1] \gamma_{xx}[1-p] + \dots + a_p[p] a_p[k] \gamma_{xx}[k-p] + \dots + a_p[p] a_p[p] \gamma_{xx}[0]) \\
&= 2 \gamma_{xx}[k] + 2 \sum_{l=1}^p a_p[l] \gamma_{xx}[k-l] = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

sau, echivalent,

$$\gamma_{xx}[k] = - \sum_{l=1}^p a_p[l] \gamma_{xx}[k-l], k = 1, \dots, p \quad (3.7)$$

Extremul erorii pătratice medii care se atinge pentru valorile coeficienților care rezultă din relația (3.7), este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 \xi_p^f(a_p[k])}{\partial (a_p[k])^2} = \gamma_{xx}[0] > 0.$$

Relațiile (3.7) se numesc *ecuațiile normale* și stabilesc legătura între coeficienții predictorului liniar și valorile funcției de autocorelație. Înlocuind (3.7) în (3.4) se obține eroarea pătratică medie minimă de predicție, de forma

$$\min \left[\xi_p^f \right]^{not.} = E_p^f = \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_p[k] \gamma_{xx}[k] \quad (3.8)$$

3.2. Predicție liniară înapoi (backward)

Estimarea eșantionului $x[n-p+r+1]$ pe baza observațiilor $M_p^x[n]$ se numește predicție înapoi cu r pași, de ordin p . În continuare se tratează predicția înapoi de ordinul p , cu un pas ($r=1$), când se presupune că se cunoaște secvența de date $x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+1]$ și se dorește a se estima valoarea $x[n-p]$, adică

$$\hat{x}[n-p] = - \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k] x[n-k] \quad (3.9)$$

Predictorul descris de relația (3.9) este reprezentat în figura 3.4.

Diferența dintre valoarea $x[n-p]$ și estimatul $\hat{x}[n-p]$ se numește *eroare de predicție înapoi*, și este notată cu $g_p[n]$.

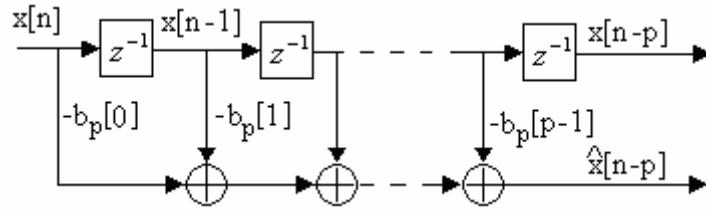


Fig. 3.4. Predictor înapoi cu un pas, de ordinul p

$$\begin{aligned}
 g_p[n] &= x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k]x[n-k] = \\
 &= \sum_{k=0}^p b_p[k]x[n-k], b_p[p]=1
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Implementarea filtrului erorii de predicție înapoi de ordinul p este prezentată în figura 3.5, care reprezintă o realizare în forma directă a unui filtru FIR cu funcția de sistem:

$$B_p(z) = \sum_{k=0}^p b_p[k]z^{-k} \tag{3.11}$$

unde $b_p[p]=1$.

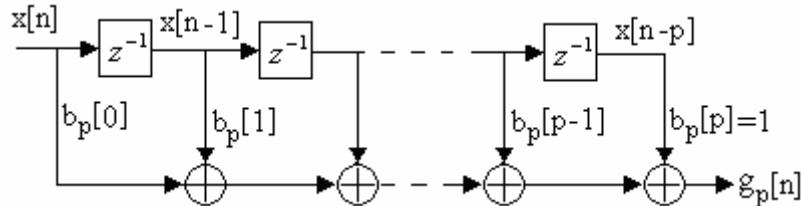


Fig. 3.5. Filtrul erorii de predicție înapoi

Eroarea de predicție înapoi este

$$\begin{aligned}
 g_p[n] &= x[n-p] + \sum_{k=0}^{p-1} b_p[k]x[n-k] = \\
 &= x[n-p] + \sum_{m=1}^p b_p[p-m]x[n-p+m]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Valoarea sa pătratică medie este

$$E\{g_p^2[n_i]\} \stackrel{not}{=} \xi_p^b \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \xi_p^b &= E \left\{ x^2[n_i - p] + 2x[n_i - p] \sum_{m=1}^p b_p[p-m]x[n_i - p+m] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p b_p[p-m]b_p[p-l]x[n_i - p+m]x[n_i - p+l] \right\} = \\ &= \gamma_{xx}[0] + 2 \sum_{m=1}^p b_p[p-m] \gamma_{xx}[m] + \\ &\quad + \sum_{m=1}^p \sum_{l=1}^p b_p[p-m]b_p[p-l] \gamma_{xx}[l-m] \end{aligned} \quad (3.14)$$

La fel ca în cazul predicției înainte, eroarea pătratică medie de predicție înapoi este o funcție pătratică de coeficienții filtrului predictor. Valorile coeficienților pentru care aceasta prezintă un extrem, se obțin prin egalarea cu zero a derivatei sale în raport cu coeficienții filtrului, adică

$$\frac{\partial \xi_p^b(b_p[p-m])}{\partial b_p[p-m]} = 0 \quad (3.15)$$

Înlocuind (3.14) în (3.15), după prelucrări similare celor din cazul predicției înainte, rezultă sistemul de ecuații

$$\gamma_{xx}[m] = - \sum_{l=1}^p b_p[p-l] \gamma_{xx}[l-m], m = 1, \dots, p \quad (3.16)$$

Extremul obținut este un minim, deoarece

$$\frac{\partial^2 \xi_p^b(b_p[p-m])}{\partial (b_p[p-m])^2} = \gamma_{xx}[0] > 0$$

Înlocuind (3.16) în (3.14) se obține același minim ca în cazul predicției înainte, adică

$$\min[\xi_p^b] = E_p^b = E_p^f.$$

3.3. Structuri lattice pentru implementarea filtrelor FIR de eroare a predicției

Din cele prezentate până aici, s-a observat că erorile de predicție înainte și înapoi se obțin ca ieșiri ale unor filtre FIR cu funcțiile de sistem $A_p(z)$, respectiv $B_p(z)$, date de (3.3), respectiv (3.11). Cum un filtru FIR implementat în forma directă este echivalent cu un filtru FIR lattice,filtrele erorii de predicție în forma directă, reprezentate în figurile 3.3 și 3.5, pot fi implementate în formă lattice. Pentru a stabili legătura dintre coeficienții filtrului de predicție și coeficienții structurii lattice, se consideră o familie de filtre FIR cu funcțiile de transfer

$$H_m(z) = A_m(z) \quad m = 0, 1, 2, \dots, p \quad (3.17)$$

unde $A_m(z)$ este un polinom de forma

$$A_m(z) = 1 + \sum_{k=1}^m a_m[k]z^{-k} \quad m \geq 1, \quad (3.18)$$

și $A_0(z) = 1$. Răspunsul la impuls al filtrului de ordin m este $h_m[0] = 1$ și $h_m[k] = a_m[k]$, $k = 1, 2, \dots, m$. Se definește $a_m[0] = 1$.

Dacă $x[n]$ este secvența de intrare în filtrul cu funcția de sistem $A_m(z)$ și $y[n]$, secvența de ieșire, se poate scrie

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \quad (3.19)$$

Tinând cont că

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k] \quad (3.20)$$

este valoarea estimată a lui $x[n]$ pe baza a m intrări anterioare, $x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-m]$, din (3.19) și (3.20) rezultă că $y[n]$ reprezintă eroarea de predicție. Astfel, ieșirea filtrului FIR dată de

relația (3.19) poate fi văzută ca eroarea între valoarea adevărată a semnalului $x[n]$ și valoarea estimată $\hat{x}[n]$.

Pentru a stabili legătura între un filtru FIR în forma directă și un filtru lattice, se consideră un filtru de ordinul $m = 1$. Ieșirea unui astfel de filtru este

$$y[n] = x[n] + a_1[1]x[n-1] \quad (3.21)$$

În figura 3.6 se prezintă un filtru lattice de ordinul întâi sau un filtru lattice cu o singură treaptă.

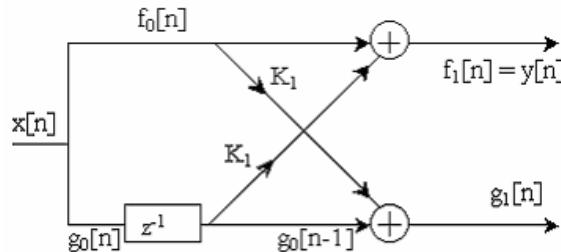


Figura 3.6. Filtru lattice cu o treapta

Dacă în această structură se aplică la ambele intrări $x[n]$ și se selectează ieșirea de pe ramura de sus, se obține exact semnalul dat de relația (3.21), dacă se alege $K_1 = a_1[1]$. Parametrul K_1 din structura lattice este denumit *coeficient de reflexie*.

Pentru această structură se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned} f_0[n] &= g_0[n] = x[n] \\ f_1[n] &= f_0[n] + K_1 g_0[n-1] = x[n] + K_1 x[n-1] \\ g_1[n] &= K_1 f_0[n] + g_0[n-1] = K_1 x[n] + x[n-1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

În continuare, se consideră filtrul FIR care se obține pentru $m = 2$. În acest caz ieșirea structurii în formă directă este

$$y[n] = x[n] + a_2[1]x[n-1] + a_2[2]x[n-2] \quad (3.23)$$

Conecând în cascadă două trepte de structuri lattice ca în figura 3.7, este posibil să se obțină ieșirea ca în relația (3.23).

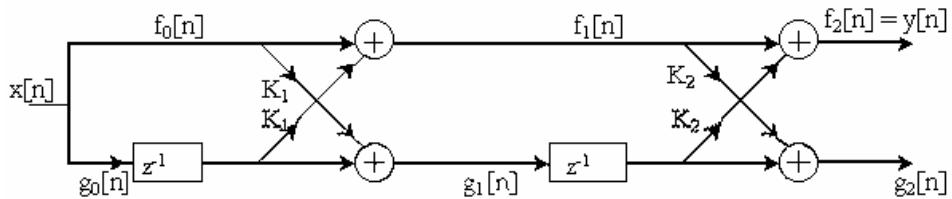


Figura 3.7. Filtru lattice cu două trepte

Într-adevăr, ieșirea din prima treaptă este dată de relațiile (3.22), iar ieșirea din treapta a două este

$$\begin{aligned}f_2[n] &= f_1[n] + K_2 g_1[n-1] \\g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1]\end{aligned}\quad (3.24)$$

Înlocuind $f_1[n]$ și $g_1[n]$ din (3.22) în relația (3.24), se obține

$$\begin{aligned}f_2[n] &= x[n] + K_1 x[n-1] + K_2 [K_1 x[n-1] + x[n-2]] \\&= x[n] + K_1(1 + K_2)x[n-1] + K_2 x[n-2]\end{aligned}\quad (3.25)$$

Relația (3.25) este identică cu ieșirea filtrului FIR în forma directă dată de (3.23), dacă între coeficienți există relațiile:

$$a_2[2] = K_2 \quad a_2[1] = K_1(1 + K_2) \quad (3.26)$$

sau, echivalent

$$K_2 = a_2[2] \quad K_1 = \frac{a_2[1]}{1 + a_2[2]} \quad (3.27)$$

Astfel, coeficienții de reflexie ai structurii lattice, K_1 și K_2 , pot fi obținuți din coeficienții $\{a_m[k]\}$ ai formei directe de implementare.

Continuând proceful de cascadare a structurilor lattice, se poate demonstra prin inducție echivalența dintre filtrul FIR de ordin m implementat în forma directă și filtrul lattice de ordin m sau cu m trepte. Filtrul lattice este descris, în general, de următorul sistem de ecuații recursive:

$$f_0[n] = g_0[n] = x[n] \quad (3.28)$$

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.29)$$

$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.30)$$

Ieșirea filtrului cu p trepte corespunde ieșirii filtrului FIR de ordin p . Prin urmare

$$y[n] = f_p[n] \quad (3.31)$$

Tinând cont de relațiile (3.28) ÷ (3.30), în figura 3.8 s-a reprezentat un filtru lattice cu p trepte într-o diagramă bloc, împreună cu structura unei trepte.

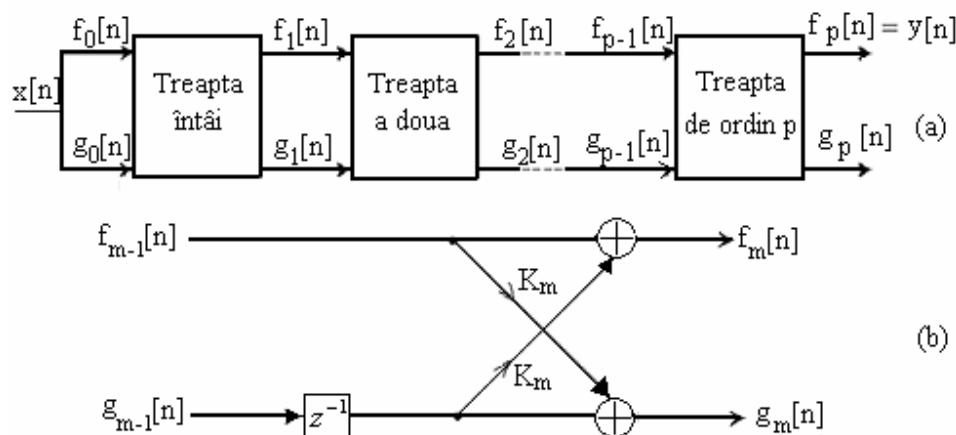


Figura 3.8. (a) Filtru lattice cu p trepte, (b) Structura treptei “ m ”

Ca urmare a echivalenței între un filtru FIR în formă directă și un filtru lattice, ieșirea $f_m[n]$ a unui filtru lattice de ordin m poate fi exprimată sub forma

$$f_m[n] = \sum_{k=0}^m a_m[k]x[n-k] \quad a_m[0]=1 \quad (3.32)$$

Deoarece relația (3.32) este o sumă de conoluție, transformata sa Z este

$$F_m(z) = A_m(z)X(z) \quad (3.33)$$

sau, echivalent

$$A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)} = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} \quad (3.33')$$

unde $A_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{a_m[k]\}$.

Cealaltă ieșire a structurii lattice, $g_m[n]$, ar putea fi, de asemenea, exprimată sub forma unei sume de conoluție, utilizând un alt set de coeficienți, notați $\{b_m[k]\}$. Din relația (3.22) se observă cum coeficienții filtrului care produce ieșirea $f_1[n]$ sunt $\{1, K_1\} = \{1, a_1[1]\}$, în timp ce coeficienții filtrului cu ieșirea $g_1[n]$, sunt $\{K_1, 1\} = \{a_1[1], 1\}$. Se observă că aceste două seturi de coeficienți sunt în ordine inversă. Dacă se consideră filtrul cu două trepte, cu ieșirea dată de relația (3.25), atunci $g_2[n]$ se determină cu relația

$$\begin{aligned} g_2[n] &= K_2 f_1[n] + g_1[n-1] \\ &= K_2 [x[n] + K_1 x[n-1]] + K_1 x[n-1] + x[n-2] \\ &= K_2 x[n] + K_1 (1 + K_2) x[n-1] + x[n-2] \\ &= a_2[2] x[n] + a_2[1] x[n-1] + x[n-2] \end{aligned} \quad (3.34)$$

În consecință, coeficienții filtrului sunt $\{a_2[2], a_2[1], 1\}$, în timp ce pentru filtrul ce produce ieșirea $f_2[n]$ sunt $\{1, a_2[1], a_2[2]\}$.

Raționând în mod analog, se poate conchide că ieșirea $g_m[n]$ a filtrului lattice de ordin m poate fi exprimată cu ajutorul sumei de conoluție

$$g_m[n] = \sum_{k=0}^m b_m[k] x[n-k] \quad (3.35)$$

unde coeficienții filtrului, $\{b_m[k]\}$, sunt asociați cu cei ai filtrului care produce ieșirea $f_m[n] = y[n]$, dar care operează în ordine

inversă.

Dacă valorile $x[n], x[n-1], \dots, x[n-m+1]$, sunt utilizate pentru predicția liniară a eșantionului de semnal $x[n-m]$, valoarea estimată $\hat{x}[n-m]$ se determină cu relația

$$\hat{x}[n-m] = -\sum_{k=0}^{m-1} b_m[k]x[n-k] \quad (3.36)$$

unde coeficienții $b_m[k]$ ai filtrului predictor sunt chiar coeficienții $\{a_m[k]\}$ luați în ordine inversă, prin urmare

$$b_m[k] = a_m[m-k] \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.37)$$

În domeniul Z, relația (3.35) devine

$$G_m(z) = B_m(z)X(z) \quad (3.38)$$

Rezultă atunci

$$B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)} \quad (3.39)$$

unde $B_m(z)$ reprezintă funcția de sistem a filtrului FIR cu coeficienții $\{b_m[k]\}$, care se poate scrie sub forma

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^m b_m[k]z^{-k} \quad (3.40)$$

Înlocuind (3.37) în (3.40) se obține

$$\begin{aligned} B_m(z) &= \sum_{k=0}^m a_m[m-k]z^{-k} = \\ &= \sum_{l=0}^m a_m[l]z^{l-m} = z^{-m} \sum_{l=0}^m a_m[l]z^l = z^{-m}A_m(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Din relația (3.41) rezultă că zerourile filtrului FIR cu funcția de transfer $B_m(z)$ sunt reciprocele zerourilor lui $A_m(z)$. Din acest motiv $B_m(z)$ este numit polinom *reciproc* sau *invers* al lui $A_m(z)$.

Aplicând transformata Z relațiilor recursive (3.28) ÷ (3.30), se obține

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z) \quad (3.42)$$

$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.43)$$

$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.44)$$

Împărțind fiecare ecuație prin $X(z)$, se obțin următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (3.45)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.46)$$

$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.47)$$

Astfel, o treaptă lattice, este descrisă în domeniul Z de o ecuație matriceală de forma

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3.3.1. Conversia coeficienților structurii lattice în coeficienți ai filtrului FIR în formă directă

Coefficienții filtrului FIR realizat în formă directă $\{a_m[k]\}$ pot fi obținuți din coeficienții $\{K_m\}$ ai structurii lattice, folosind următoarele relații:

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \quad (3.49)$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.50)$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}), \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (3.51)$$

Soluția se obține recursiv, începând cu rangul $m = 1$. Astfel se obține o familie de (p) filtre FIR, fiecare din ele pentru o valoare a lui m .

Pentru fixarea ideilor, se consideră următorul exemplu.

Se dă un filtru lattice cu trei trepte având coeficienții

$$K_1 = \frac{1}{4}, K_2 = \frac{1}{2}, K_3 = \frac{1}{3}.$$

Să se determine coeficienții filtrului FIR în formă directă.

Soluție. Problema se rezolvă recursiv, utilizând relația (3.50) începând cu $m = 1$.

$$\text{Astfel, } A_1(z) = A_0(z) + K_1 z^{-1} B_0(z) = 1 + K_1 z^{-1} = 1 + \frac{1}{4} z^{-1}.$$

Prin urmare, coeficienții filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu o singură treaptă, sunt $a_1[0] = 1, a_1[1] = K_1 = 1/4$.

Deoarece $B_m(z)$ este reciprocul lui $A_m(z)$, rezultă

$$B_1(z) = \frac{1}{4} + z^{-1}.$$

Pentru $m=2$, din (3.50) rezultă

$$A_2(z) = A_1(z) + K_2 z^{-1} B_1(z) = 1 + \frac{3}{8} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}$$

Parametrii filtrului FIR corespunzători structurii lattice cu două trepte sunt $a_2[0] = 1, a_2[1] = 3/8, a_2[2] = 1/2$. Din (3.51) rezultă atunci

$$B_2(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} z^{-1} + z^{-2}$$

În final, prin adăugarea celei de-a treia trepte în structura lattice, rezultă polinomul

$$A_3(z) = A_2(z) + K_3 z^{-1} B_2(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

și, ca urmare, filtrul FIR în formă directă este caracterizat de coeficienții

$$a_3[0] = 1, a_3[1] = \frac{13}{24}, a_3[2] = \frac{5}{8}, a_3[3] = \frac{1}{3}$$

În general, structura lattice cu parametrii K_1, K_2, \dots, K_p , corespunde unei clase de p filtre FIR în forma directă cu funcțiile de sistem $A_1(z), A_2(z), \dots, A_p(z)$. Este interesant de observat că o caracterizare a acestei clase de filtre FIR în formă directă necesită $p(p+1)/2$ coeficienți, în timp ce o caracterizare lattice necesită doar p coeficienți de reflexie $\{K_m\}$. Motivul pentru care structura lattice produce o reprezentare mult mai compactă pentru clasa de filtre FIR de ordin p se datorează faptului că adăugarea treptelor la structura lattice nu modifică parametrii treptelor anterioare, în timp ce coeficienții funcției de sistem $A_m(z)$ sunt total diferiți de coeficienții filtrului FIR de ordin inferior, cu funcția de sistem $A_{m-1}(z)$.

O relație pentru determinarea recursivă a coeficienților $\{a_m[k]\}$ ai filtrului poate fi obținută din polinoamele date în relațiile (4.49)÷(4.51). Din relația (4.50) se obține

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^m a_m[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[k] z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1}[m-1-k] z^{-(k+1)} \quad (3.52)$$

Prin egalarea coeficienților puterilor egale ale lui z^{-1} și ținând cont că $a_m[0]=1$, rezultă ecuațiile recursive pentru coeficienții filtrului FIR, sub forma:

$$a_m[0] = 1 \quad (3.53)$$

$$a_m[m] = K_m \quad (3.54)$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}[m-k] = a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}[m-k] \quad (3.55) \\ 1 \leq k \leq m-1, m = 1, 2, \dots, p.$$

3.3.2. Conversia coeficienților filtrului FIR din forma directă în coeficienți ai structurii lattice

Dacă se cunosc coeficienții filtrului FIR pentru implementarea în formă directă sau, echivalent, polinomul $A_m(z)$ și se dorește determinarea coeficienților corespunzători structurii lattice, de ordin m , atunci $K_m = a_m[m]$. Pentru a obține coeficientul K_{m-1} sunt necesare polinoamele $A_{m-1}(z)$ deoarece, în general, K_m este obținut din polinomul $A_m(z)$ pentru $m=p, p-1, \dots, 1$. Prin urmare, trebuie calculate succesiv polinoamele $A_m(z)$, începând de la $m=p$ până la $m=1$.

Relația recursivă dorită pentru polinoame se determină ușor din (3.46) și (3.47).

$$\begin{aligned} A_m(z) &= A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ &= A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)] \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = p, p-1, \dots, 1. \quad (3.56)$$

Astfel se calculează toate polinoamele de grad inferior $A_m(z)$ începând cu $A_p(z)$ și se obțin coeficienții doriti ai structurii lattice din relația $K_m = a_m[m]$. Se observă că procedura prezentată este operațională atât timp cât $|K_m| \neq 1$ pentru $m = 1, 2, \dots, p$.

Din ecuația recursivă (3.56), se poate obține o relație pentru calculul recursiv al coeficienților K_m , începând cu $m=p$ până la $m=1$. Pentru $m=p, p-1, \dots, 1$ se obține

$$K_m = a_m[m] \quad a_{m-1}[0] = 1 \quad (3.57)$$

$$a_{m-1}[k] = \frac{a_m[k] - K_m b_m[k]}{1 - K_m^2} = \frac{a_m[k] - a_m[m] a_m[m-k]}{1 - a_m^2[m]}, \quad 1 \leq k \leq m-1$$

(3.58)

Ecuația recursivă (3.58) nu poate fi folosită dacă $|K_m| = 1$.

Pentru fixarea ideilor, se consideră următorul exemplu.

Să se determine coeficienții structurii lattice corespunzătoare filtrului FIR cu funcția de sistem

$$H(z) = A_3(z) = 1 + \frac{13}{24}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

Soluție. Mai întâi se observă că $K_3 = a_3[3] = \frac{1}{3}$. Apoi se

construiește polinomul

$$B_3(z) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8}z^{-1} + \frac{13}{24}z^{-2} + z^{-3}$$

Relația de decrementare din (3.56), cu $m = 3$, conduce la

$$A_2(z) = \frac{A_3(z) - K_3 B_3(z)}{1 - K_3^2} = 1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}$$

Prin urmare, $K_2 = a_2[2] = 1/2$ și $B_2(z) = 1/2 + (3/8)z^{-1} + z^{-2}$.

Repetând decrementarea recursivă, se obține

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$$

Astfel, $K_1 = a_1[1] = \frac{1}{4}$.

3.4. Coeficienții de reflexie optimi ai predictorului lattice înainte și înapoi

În paragrafele anterioare s-a obținut un set de ecuații din care se pot obține coeficienții predictorului care minimizează valoarea

pătratică medie a erorii de predicție. În continuare se va considera problema optimizării coeficienților de reflexie ai predictorului lattice și exprimarea lor în funcție de erorile de predicție înainte și înapoi.

Conform figurii 3.8, eroarea de predicție înainte în treapta m a predictorului este

$$f_m[n] = f_{m-1}[n] + K_m g_{m-1}[n-1] \quad (3.59)$$

Minimizarea erorii pătratice medii $\{E[f_m^2[n_i]]\}$ în raport cu coeficienții de reflexie impune calculul derivatei

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{E[f_m^2[n_i]]\}}{\partial K_m} &= \\ \frac{\partial \{E[f_{m-1}^2[n_i] + 2K_m f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i-1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n_i-1]]\}}{\partial K_m} &= \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$E\{2f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i-1] + 2K_m g_{m-1}^2[n_i-1]\}$$

Prin egalarea cu zero a acesteia, rezultă

$$K_m = \frac{-E[f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i-1]]}{E[g_{m-1}^2[n_i-1]]} = \frac{-E[f_{m-1}[n_i]g_{m-1}[n_i-1]]}{\sqrt{E_{m-1}^f E_{m-1}^b}} \quad (3.61)$$

unde

$$E_{m-1}^f = E_{m-1}^b = E[g_{m-1}^2[n_i-1]] = E[f_{m-1}^2[n_i]] \quad (3.62)$$

Se observă că valorile optime ale coeficienților de reflexie ai predictorului lattice sunt egale cu coeficienții de corelație normalizați dintre erorile înainte și înapoi din lattice, cu semnul minus. Din acest motiv, coeficienții $-K_m$ se mai numesc coeficienți de corelație parțială (PARCOR).

Valoarea pătratică medie a erorii de predicție poate fi exprimată în forma

$$\begin{aligned} E[f_m^2[n_i]] &= E[f_{m-1}^2[n_i] + 2K_m f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i - 1] + K_m^2 g_{m-1}^2[n_i - 1]] = \\ &= E[f_{m-1}^2[n_i]] + 2K_m E[f_{m-1}[n_i] g_{m-1}[n_i - 1]] + K_m^2 E[g_{m-1}^2[n_i - 1]] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Înlocuind (3.61) și (3.62) în (3.63), se obține eroarea pătratică medie minimă în formă recursivă

$$E_m^f = (1 - K_m^2) E_{m-1}^f \quad (3.64)$$

Deoarece din relația (3.61) rezultă că $|K_m| \leq 1$, eroarea pătratică medie minimă dată de relația (3.64) este o secvență monoton descrescătoare.

3.5. Relația dintre un proces AR și predicția liniară

Parametrii unui proces AR de ordin p sunt strâns legați de parametrii unui predictor de ordin p pentru același proces. Se reamintește că pentru un proces AR(p) secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$ este legată de parametrii $\{a_k\}$ ai procesului prin ecuațiile Yule-Walker.

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k], & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] + \sigma_w^2, & m = 0 \\ \gamma_{xx}^*[-m], & m < 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Ecuațiile corespunzătoare predictorului de ordin p sunt date în relațiile (3.7).

$$\gamma_{xx}[l] = -\sum_{k=0}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k], \quad l = 1 \dots p$$

Comparând aceste relații se observă o relație de egalitate între parametrii $\{a_k\}$ ai procesului AR(p) și coeficienții predictorului $\{a_p[k]\}$ de ordin p . Mai mult, comparând (3.65) cu (3.8), se observă că eroarea pătratică medie minimă a predictorului de ordinul p , E_p^f , este egală cu σ_w^2 , dispersia zgomotului alb, caz în care filtrul erorii de predicție este un filtru de albire, care produce secvența de zgomot alb $w[n]$.

3.6. Soluția ecuațiilor normale

Anterior s-a arătat că minimizarea valorii pătratice medii a erorii de predicție înainte conduce la un sistem de ecuații numite ecuațiile normale (3.7). Acestea pot fi scrise compact în forma

$$\sum_{k=0}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k] = 0, l = 1 \dots p, a_p[0] = 1 \quad (3.66)$$

Eroarea pătratică medie minimă (EPMM) este dată de relația (3.8). Adăugând (3.8) la (3.66) se obțin *ecuațiile normale extinse*

$$\sum_{k=0}^p a_p[k] \gamma_{xx}[l-k] = \begin{cases} E_p^f, & l = 0 \\ 0, & l = 1, \dots, p \end{cases} \quad (3.67)$$

Pentru un proces aleator AR(p), EPMM, $E_p^f = \sigma_w^2$. Există doi algoritmi eficienți de calcul pentru ecuațiile normale. Unul se datorează lui Levison [29] modificat ulterior de Durbin [62], numit algoritm Levison-Durbin, care este potrivit prelucrării seriale. Al doilea algoritm, datorat lui Schur [61] calculează, de asemenea, coeficienții de reflexie și se pretează prelucrării paralele. Cei doi algoritmi folosesc proprietățile de simetrie Toeplitz ale matricei de autocorelație.

3.6.1. Algoritmul Levison-Durbin

Algoritmul Levison Durbin este un algoritm eficient pentru rezolvarea ecuațiilor normale (3.66) în raport cu coeficienții predictorului. Acestea pot fi scrise matriceal, sub forma

$$[\Gamma_p][A_p] = -[\gamma_p] \quad (3.66')$$

unde

$$[\Gamma_p]^{not.} = \Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}^*[1] & \dots & \gamma_{xx}^*[p-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}^*[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[p-1] & \gamma_{xx}[p-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

este numită matricea de autocorelație, iar $[A_p] = [a_p[1] \dots a_p[p]]^T$ este un vector coloană ale cărui elemente sunt coeficienții predictorului, $a_p[k], 1 \leq k \leq p$, iar $[\gamma_p] = [\gamma_{xx}[1] \dots \gamma_{xx}[p]]^T$ este un vector coloană ale cărui elemente sunt valorile funcției de autocorelație $\gamma_p[l], 1 \leq l \leq p$.

Sistemul (3.67) poate fi scrise matriceal, sub forma

$$[\Gamma_{p+1}][A_{p+1}] = \begin{bmatrix} E_p^f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.67')$$

unde $[A_{p+1}] = [1 a_p[1] \dots a_p[p]]^T$, iar $[\Gamma_{p+1}]$ este matricea de autocorelație de ordinul $p+1$.

Dacă semnalul de intrare este real, operația de conjugare (*) dispără din γ_{xx} . Se observă că elementele $\Gamma_p(i, j)$ ale matricei $[\Gamma_p]$ au proprietatea că $\Gamma_p(i, j) = \gamma_{xx}[i - j]$. Dacă $\Gamma_p(i, j) = \Gamma_p^*(j, i)$ matricea este și *hermitică*. Metoda de obținere a soluției prin algoritm Levison-Durbin utilizează proprietățile matricei Toeplitz și se aplică recursiv începând cu un predictor de ordinul $m = 1$.

Soluția predictorului de ordinul întâi se obține din (3.66), pentru $p = 1$, adică

$$a_1[1] = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}, \quad a_1[0] = 1 \quad (3.69)$$

EPMM este

$$E_1^f = \gamma_{xx}[0] + a_1[1]\gamma_{xx}[-1] = \gamma_{xx}[0]\left(1 - |a_1[1]|^2\right) \quad (3.70)$$

Se reamintește că $a_1[1] = K_1$ este primul coeficient de reflexie al filtrului lattice.

Al doilea pas constă în obținerea coeficienților $\{a_2[1], a_2[2]\}$ ai predictorului de ordinul al doilea și exprimarea soluției în funcție de $a_1[1]$. Cele două ecuații obținute din relația (3.66) sunt

$$\begin{aligned} a_2[1]\gamma_{xx}[0] + a_2[2]\gamma_{xx}^*[1] &= -\gamma_{xx}[1] \\ a_2[1]\gamma_{xx}[1] + a_2[2]\gamma_{xx}[0] &= -\gamma_{xx}[2] \end{aligned} \quad (3.71)$$

unde $\gamma_{xx}^*[1] = \gamma_{xx}[-1]$.

Tinând cont de (3.69) soluția sistemului de ecuații (3.71) devine

$$\begin{aligned} a_2[2] &= -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]\left(1 - |a_1[1]|^2\right)} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{E_1^f} \\ a_2[1] &= a_1[1] + a_2[2]a_1^*[1] \end{aligned} \quad (3.72)$$

expresii care reprezintă coeficienții predictorului de ordinul al doilea. Se reamintește că $a_2[2] = K_2$ este cel de-al doilea coeficient de reflexie al filtrului lattice.

Procedând în același mod se pot exprima coeficienții predictorului de ordin m în funcție de coeficienții predictorului de ordin $(m-1)$.

Vectorul coeficienților, notat cu $[a_m]$, poate fi scris ca sumă a doi vectori

$$[a_m] = \begin{bmatrix} a_m[1] \\ a_m[2] \\ .. \\ a_m[m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{m-1}] \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [d_{m-1}] \\ K_m \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

unde $[a_{m-1}]$ reprezintă vectorul coeficienților predictorului de ordin $(m-1)$, iar vectorul $[d_{m-1}]$ și scalarul K_m urmează a fi determinați. Matricea de autocorelație Γ de ordin $m \times m$ se partionează în forma

$$[\Gamma_m] = \begin{bmatrix} \Gamma_{m-1} & [\gamma_{m-1}^{bt}] \\ [\gamma_{m-1}^{bt}]^* & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\text{unde } [\gamma_{m-1}^{bt}] = [\gamma_{xx}[m-1] \ \ \gamma_{xx}[m-2] \ \ ... \ \ \gamma_{xx}[1]] = [\gamma_{m-1}^b]^t,$$

În relația (3.74), $(\bullet)^*$ - înseamnă conjugarea complexă, $(\bullet)^t$ - înseamnă transpunere, iar indicele b al vectorului $[\gamma_{m-1}]$ semnifică faptul că elementele vectorului se consideră în ordine inversă.

Cu ajutorul relațiilor (3.73) și (3.74), soluția ecuației $[\Gamma_m][a_m] = -[\gamma_m]$ poate fi exprimată astfel:

$$\begin{bmatrix} [\Gamma_{m-1}] & [\gamma_{m-1}^{b^*}] \\ [\gamma_{m-1}^{bt}] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} [a_{m-1}] \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [d_{m-1}] \\ K_m \end{bmatrix} \right\} = - \begin{bmatrix} [\gamma_{m-1}] \\ \gamma_{xx}[m] \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Din (3.75) rezultă două ecuații

$$[\Gamma_{m-1}][a_{m-1}] + [\Gamma_{m-1}][d_{m-1}] + K_m \left[\gamma_{m-1}^{b^*} \right] = -[\gamma_{m-1}] \quad (3.76)$$

$$\left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] [a_{m-1}] + \left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] [d_{m-1}] + K_m \gamma_{xx}[0] = -\gamma_{xx}[m] \quad (3.77)$$

Deoarece $[\Gamma_{m-1}][a_{m-1}] = -[\gamma_{m-1}]$, din relația (3.76) rezultă

$$[d_{m-1}] = -K_m [\Gamma_{m-1}]^{-1} \left[\gamma_{m-1}^{b^*} \right] \quad (3.78)$$

dar $\left[\gamma_{m-1}^{b^*} \right]$ este chiar $[\gamma_{m-1}]$ cu elementele scrise în ordine inversă și conjugate, ceea ce permite obținerea soluției ecuației (3.78) sub forma

$$[d_{m-1}] = K_m \left[a_{m-1}^{b^*} \right] = K_m \begin{bmatrix} a_{m-1}^*[m-1] \\ a_{m-1}^*[m-2] \\ .. \\ a_{m-1}^*[1] \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Înlocuind relația (3.79) în (3.77), se poate obține coeficientul de reflexie K_m .

$$\left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] [a_{m-1}] + K_m \left[\gamma_{xx}[0] + \left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] \left[a_{m-1}^{b^*} \right] \right] = -\gamma_{xx}[m] \quad (3.80)$$

de unde

$$K_m = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] [a_{m-1}]}{\gamma_{xx}[0] + \left[\gamma_{m-1}^{bt} \right] \left[a_{m-1}^{b^*} \right]} \quad (3.80')$$

Înlocuind soluțiile pentru $[d_{m-1}]$ și K_m în relația (3.73) se obțin relațiile recursive pentru coeficienții predictorului

$$a_m[m] = K_m = -\frac{\gamma_{xx}[m] + [\gamma_{m-1}^{bt}][a_{m-1}]}{\gamma_{xx}[0] + [\gamma_{m-1}^{bt}][a_{m-1}^{b^*}]} = -\frac{\gamma_{xx}[m] + [\gamma_{m-1}^{bt}][a_{m-1}]}{E_m^f} \quad (3.81)$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}^*[m-k] = a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k] \quad (3.82)$$

$k = 1, \dots, m-1, m = 1, \dots, p$

Se observă că relațiile recursive (3.82) sunt identice cu cele care dau coeficienții predictorului pe baza polinoamelor $A_m(z)$ și $B_m(z)$ ca în relațiile (3.53) ÷ (3.55). Mai mult, K_m este coeficientul de reflexie pentru a m -a treaptă a predictorului lattice, deci algoritmul Levison-Durbin calculează coeficienții de reflexie pentru predicția lattice optimală, precum și coeficienții predictorului optimal FIR în forma directă.

Pentru predictorul de ordinul m , EPMM este

$$\begin{aligned} E_m^f &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^m a_m[k] \gamma_{xx}[-k] = \\ &= \gamma_{xx}[0] + \sum_{k=1}^m (a_{m-1}[k] + a_m[m] a_{m-1}^*[m-k]) \gamma_{xx}[-k] = \\ &= E_{m-1}^f \left[1 - |a_m[m]|^2 \right] = E_{m-1}^f \left(1 - |K_m|^2 \right), m = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.83)$$

unde $E_0^f = \gamma_{xx}[0]$. Deoarece coeficienții de reflexie satisfac proprietatea că $|K_m| \leq 1$, EPMM satisface condiția

$$E_0^f \geq E_1^f \geq E_2^f \geq \dots \geq E_p^f \quad (3.84)$$

În scopul aprecierii eficienței sau complexității unui algoritm, se folosește simbolismul din teoria complexității calculelor. Notația **O(\bullet)** se folosește în analiza eficienței algoritmilor și definește limita superioară a unei funcții, reflectând efortul de calcul necesar obținerii rezultatului, în funcție de mărimea intrării,

de obicei, numărul de biți. Complexitatea (temporală) a unei probleme (sau a unui algoritm) reprezintă numărul de pași (sau echivalentul lor temporal) ce trebuie parcursi pentru a rezolva, exprimat, în general, în funcție de mărimea intrării. De exemplu, se presupune că timpul (sau numărul de pași) necesari rezolvării unei probleme a cărei intrare are dimensiunea n este de forma

$$T(n) = \sum_{i=0}^N a_i n^i, \text{ unde coeficienții } a_i \text{ sunt constante independente de}$$

intrare. Cu creșterea lui n , termenul dominant este n^N , ceilalți putându-se neglijă. Coeficienții a_i depind de detaliile implementării. Notația $\mathbf{O}(n^N)$ reflectă factorul dominant, evidențiuind o complexitate de n^N .

Ecuația recursivă (3.82) a algoritmului Levison Durbin necesită $\mathbf{O}(m)$ operații de multiplicare și sumare pentru a trece de la treapta m la treapta $m+1$. Prin urmare, pentru p trepte sunt necesare $1+2+3+\dots+p=p(p+1)/2$ operații pentru a determina coeficienții filtrului predictor sau coeficienții de reflexie, adică o complexitate $\mathbf{O}(p^2)$. Dacă nu s-ar fi folosit proprietățile matricei de corelație și sistemul (3.66) s-ar fi rezolvat prin metoda eliminărilor a lui Gauss, gradul de complexitate ar fi $\mathbf{O}(p^3)$. Prin folosirea procesării paralele, complexitatea algoritmului poate fi scăzută suplimentar.

3.6.2. Algoritmul Schur

Algoritmul Schur este strâns legat de un test recursiv pentru a determina faptul că matricea de corelație este pozitiv definită. În particular, fie matricea de autocorelație Γ_{p+1} asociată cu ecuațiile normale extinse date de relația (3.67'). Din elementele acestei matrice se formează funcția

$$R_0(z) = \frac{\gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}}{\gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}} \quad (3.85)$$

și familia de funcții $R_m(z)$ definită recursiv prin

$$R_m(z) = \frac{R_{m-1}(z) - R_{m-1}(\infty)}{z^{-1} [1 - R_{m-1}^*(\infty) R_{m-1}(z)]}, \quad m = 1, \dots, p \quad (3.86)$$

Conform teoremei lui Schur [56], o condiție necesară și suficientă pentru ca matricea de corelație să fie pozitiv definită este ca $|R_m(\infty)| < 1$ pentru $m = 1, \dots, p$. Se demonstrează mai întâi că matricea de autocorelație este pozitiv definită dacă coeficienții de reflexie ai filtrului lattice corespunzător sunt subunitari, adică $|K_m| < 1, m = 1, \dots, p$.

Din (3.85) rezultă că $R_0(\infty) = 0$. Înseamnă atunci, conform relației (3.86), că

$$R_1(z) = \frac{\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[2]z^{-1} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}} \quad (3.87)$$

și, deci $R_1(\infty) = \frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}$. Comparând cu (3.69), se observă că

$$R_1(\infty) = -K_1, \text{ adică } \gamma_{xx}[1] = -K_1 \gamma_{xx}[0].$$

În mod analog, rezultă

$$\begin{aligned} R_2(z) &= \frac{R_1(z) - R_1(\infty)}{z^{-1} (1 - R_1^*(\infty) R_1(z))} = \\ &= \frac{\frac{\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[2]z^{-1} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}} - \frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}}{z^{-1} \left[1 - \frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]} \cdot \frac{\gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[2]z^{-1} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+1}}{\gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}} \right]} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma_{xx}[0](\gamma_{xx}[2] + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+2}) - \gamma_{xx}[1](\gamma_{xx}[1] + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+1})}{\gamma_{xx}[0](\gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}) - \gamma_{xx}[1](\gamma_{xx}[1] + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p+1})}$$

și, deci

$$R_2(\infty) = \frac{\gamma_{xx}[0]\gamma_{xx}[2] - \gamma_{xx}^2[1]}{\gamma_{xx}^2[0] - \gamma_{xx}^2[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2] + K_1\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0](1 - |K_1|^2)} \quad (3.88)$$

adică $R_2(\infty) = -K_2$. În general, rezultă $R_m(\infty) = -K_m, m = 1, \dots, p$. Înseamnă, deci, că dacă $|R_m(\infty)| < 1, m = 1, \dots, p$, atunci $|K_m| < 1, m = 1, \dots, p$, ceea ce asigură că matricea Γ_{p+1} este pozitiv definită. Deoarece coeficienții de reflexie pot fi obținuți din familia de funcții $R_m(z), m = 1, \dots, p$, rezultă o metodă alternativă pentru rezolvarea ecuațiilor normale, cunoscută sub denumirea de algoritmul lui Schur.

Fie $R_m(z)$ exprimat sub forma

$$R_m(z) = \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, m = 0, \dots, p \quad (3.89)$$

unde

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p} \\ Q_0(z) &= \gamma_{xx}[0] + \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Deoarece $K_0 = 0$ și $K_m = -R_m(\infty), m = 1, \dots, p$ ecuația recursivă (3.86) implică următoarele ecuații recursive pentru polinoamele $P_m(z)$ și $Q_m(z)$.

$$\begin{bmatrix} P_m(z) \\ Q_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_{m-1} \\ K_{m-1}^* z^{-1} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-1}(z) \\ Q_{m-1}(z) \end{bmatrix}, m = 1, \dots, p \quad (3.91)$$

Astfel, se poate scrie

$$P_1(z) = P_0(z) = \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p}$$

$$Q_1(z) = z^{-1}Q_0(z) = \gamma_{xx}[0]z^{-1} + \gamma_{xx}[1]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p-1]z^{-p} + \gamma_{xx}[p]z^{-p-1} \quad (3.92)$$

și

$$K_1 = -\left(\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}\right)_{z=\infty} = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]} \quad (3.93)$$

Analog, rezultă

$$\begin{aligned} P_2(z) &= P_1(z) + K_1 Q_1(z) = \gamma_{xx}[1]z^{-1} + \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p]z^{-p} - \\ &- \gamma_{xx}[1]z^{-1} - \frac{\gamma_{xx}[1]z^{-2}}{\gamma_{xx}[0]} - \frac{\gamma_{xx}[1]\gamma_{xx}[2]z^{-3}}{\gamma_{xx}[0]} - \dots - \frac{\gamma_{xx}[1]\gamma_{xx}[p]z^{-p-1}}{\gamma_{xx}[0]} = \\ &= (\gamma_{xx}[2] + K_1 \gamma_{xx}[1])z^{-2} + \dots + (\gamma_{xx}[p] + K_1 \gamma_{xx}[p-1])z^{-p} + \\ &+ K_1 \gamma_{xx}[p]z^{-p-1} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} Q_2(z) &= z^{-1}K_1^* P_1(z) + z^{-1}Q_1(z) = z^{-1}(Q_1(z) + K_1^* P_1(z)) = \\ &= z^{-1}[(\gamma_{xx}[0]z^{-1} + \gamma_{xx}[1]z^{-2} + \dots + \gamma_{xx}[p-1]z^{-p} + \gamma_{xx}[p]z^{-p-1}) + \\ &+ (K_1^* \gamma_{xx}[1]z^{-1} + K_1^* \gamma_{xx}[2]z^{-2} + \dots + K_1^* \gamma_{xx}[p]z^{-p})] = \\ &= (\gamma_{xx}[0] + K_1^* \gamma_{xx}[1])z^{-2} + (\gamma_{xx}[1] + K_1^* \gamma_{xx}[2])z^{-3} + \dots \\ &+ (\gamma_{xx}[p-1] + K_1^* \gamma_{xx}[p])z^{-p-1} + \gamma_{xx}[p]z^{-p-2} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$K_2 = -\left.\frac{P_2(z)}{Q_2(z)}\right|_{z=\infty} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + K_1 \gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0] + K_1^* \gamma_{xx}[1]} \quad (3.96)$$

Pe baza acestor relații, algoritmul Schur este descris de următoarea procedură recursivă:

1. Se formează matricea generatoare cu două linii și $p+1$ coloane, de forma:

$$[G_0] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \dots & \gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

unde elementele primei linii sunt coeficienții lui $P_0(z)$, iar cele de pe a doua linie, coeficienții lui $Q_0(z)$.

2. Se deplasează a doua linie a matricei generatoare spre dreapta cu o poziție și se renunță la ultimul element al liniei. În locul rămas liber se plasează un zero. Astfel se obține o nouă matrice generatoare

$$[G_1] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[2] & \dots & \gamma_{xx}[p] \\ 0 & \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p-1] \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Raportul, cu semnul minus, al elementelor din a doua coloană reprezintă coeficientul de reflexie $K_1 = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}$.

3. Se înmulțește la stânga matricea generatoare $[G_1]$ cu matricea

$$[V_1] = \begin{bmatrix} 1 & K_1 \\ K_1^* & 1 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

obținându-se

$$\begin{aligned} [V_1][G_1] &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1\gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p]+K_1\gamma_{xx}[p-1] \\ 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1^*\gamma_{xx}[1] & \dots & \dots & \gamma_{xx}[p-1]+K_1^*\gamma_{xx}[p] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.100)$$

4. Se deplasează a doua linie a matricei $[V_1][G_1]$ cu o poziție spre dreapta, obținându-se o nouă matrice generatoare

$$[G_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xx}[2]+K_1\gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p]+K_1\gamma_{xx}[p-1] \\ 0 & 0 & \gamma_{xx}[0]+K_1^*\gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[p-2]+K_1^*\gamma_{xx}[p-1] \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Raportul, cu semnul “-“, al elementelor din coloana a treia reprezintă coeficientul de reflexie K_2 . Pașii 3 și 4 se repetă până se obțin toți cei p coeficienți de reflexie. În general, matricea $[V_m]$ este de forma

$$[V_m] = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m^* & 1 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Multiplicarea lui $[V_m]$ cu $[G_m]$ are ca rezultat o matrice din care, prin deplasarea celei de-a doua linii cu o poziție rezultă noua matrice generatoare $[G_{m+1}]$. Se observă că operația de deplasare a celei de-a doua linii la fiecare iterație echivalează cu înmulțirea cu z^{-1} din a doua ecuație recursivă (3.91). De asemenea, se observă că împărțirea polinomului $P_m(z)$ la $Q_m(z)$ și evaluarea câtului la $z = \infty$ echivalează cu împărțirea elementelor din coloana $(m+1)$ a matricei $[G_m]$.

Pentru a demonstra legătura dintre algoritmul Schur, algoritmul Levison Durbin și predictorul lattice corespunzător, se determină ieșirea filtrului lattice când secvența de intrare este secvența de autocorelație $\gamma_{xx}[m]$, $m = 0, 1, \dots$, adică prima intrare în lattice este $\gamma_{xx}[0]$, a doua, $\gamma_{xx}[1]$ și aşa mai departe. Corespunzător figurii 3.8, $f_0[n] = \gamma_{xx}[n]$. După întârzierea din prima treaptă, $g_0[n-1] = \gamma_{xx}[n-1]$, adică, pentru $n = 1$, raportul $f_0[1]/g_0[0] = \gamma_{xx}[1]/\gamma_{xx}[0]$, care este coeficientul de reflexie K_1 , cu semnul “-“. Această expresie se poate exprima și în forma

$$f_0[1] + K_1 g_0[0] = \gamma_{xx}[1] + K_1 \gamma_{xx}[0] = 0 \quad (3.103)$$

Mai mult, $g_0[0] = \gamma_{xx}[0] = E_0^f$.

La momentul $n = 2$, conform relației (3.43), intrarea în a doua treaptă este

$$f_1[2] = f_0[2] + K_1 g_0[1] = \gamma_{xx}[2] + K_1 \gamma_{xx}[1] \quad (3.104)$$

și, după întârzierea din a doua treaptă,

$$g_1[1] = K_1 f_0[1] + g_0[0] = K_1 \gamma_{xx}[1] + \gamma_{xx}[0] \quad (3.105)$$

Raportul $f_1[2]/g_1[1]$ este

$$\frac{f_1[2]}{g_1[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2] + K_1 \gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0] + K_1 \gamma_{xx}[1]} = \frac{\gamma_{xx}[2] + K_1 \gamma_{xx}[1]}{E_1^f} = -K_2 \quad (3.106)$$

deci,

$$f_1[2] + K_2 g_1[1] = 0, \quad g_1[1] = E_1^f \quad (3.107)$$

Continuând în același mod, rezultă

$$f_{m-1}[m]/g_{m-1}[m-1] = -K_m \text{ și } g_{m-1}[m-1] = E_{m-1}^f \quad (3.108)$$

În consecință, coeficienții filtrului lattice obținuți cu algoritmul Levison Durbin sunt identici cu coeficienții obținuți cu algoritmul Schur.

3.7. Proprietăți ale filtrelor erorii de predicție

3.7.1. Proprietatea de fază minimă a filtrului erorii de predicție înainte

Se reamintește că un filtru are fază minimă, dacă zerourile funcției sale de sistem sunt în interiorul cercului unitate sau pe acesta. S-a arătat anterior că în cazul implementării lattice a filtrului erorii de predicție, $|K_m| < 1$ pentru toți m . Această condiție împreună cu relația: $E_m^f = (1 - |K_m|^2) E_{m-1}^f$ poate fi folosită pentru a arăta că zerourile funcției de sistem a filtrului erorii de predicție sunt fie toate în interiorul cercului unitate, fie pe cerc.

Se va arăta că, dacă $E_p^f > 0$, zerourile $|z_i| < 1$ pentru orice i , unde z_i sunt zerourile funcției de sistem.

Într-adevăr, pentru $p=1$ funcția de sistem filtrului erorii de predicție este

$$A_1(z) = 1 + K_1 z^{-1} \quad (3.109)$$

ceea ce înseamnă $z_1 = -K_1$ și $E_1^f = (1 - |K_1|^2) E_0^f > 0$.

Se presupune ipoteza adevărată pentru $p-1$, adică $E_{p-1}^f > 0$. Dacă z_i este o rădăcină a lui $A_p(z)$, din relațiile (3.41) și (3.46) se obține

$$\begin{aligned} A_p(z_i) &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-1} B_{p-1}(z_i) = \\ &= A_{p-1}(z_i) + K_p z_i^{-p} A_{p-1}^*(\frac{1}{z_i}) = 0 \end{aligned} \quad (3.110)$$

Din relația precedentă se poate scrie expresia

$$\frac{1}{K_p} = -\frac{z_i^{-p} A_{p-1}^*(\frac{1}{z_i})}{A_{p-1}(z_i)} = Q(z_i) \quad (3.111)$$

care este de tip trece tot.

Pe de altă parte, se știe că o funcție trece tot, de forma

$$P(z) = \prod_{k=1}^N \frac{zz_k^* + 1}{z + z_k}, |z_k| < 1 \quad (3.112)$$

se bucură de proprietățile:

$|P(z)| > 1$ pentru $|z| < 1$,

$|P(z)| = 1$ pentru $|z| = 1$ și

$|P(z)| < 1$ pentru $|z| > 1$.

Prelucrând relația (3.112), rezultă

$$P(z) = z^N \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} + z_k^*}{1 + z_k z^{-1}} = \frac{z^{-N} A_N^*(z^{-1})}{A_N(z)} \quad (3.113)$$

Din relațiile (3.111) și (3.113) rezultă că $Q(z) = -\frac{P(z)}{z}$

pentru $N=p-1$. Cum $E_p^f > 0$ și $E_{p-1}^f > 0$ din $E_p^f = \left(1 - |K_p|^2\right) E_{p-1}^f > 0$

rezultă $|K_p| < 1$ și, deci, $|Q(z_i)| = \frac{1}{|K_p|} > 1$. Conform proprietăților funcției de tip trece tot, rezultă $|z_i| < 1$.

Dacă se presupune că $E_{p-1}^f > 0$ și $E_p^f = 0$, atunci $|K_p| = 1$ și $|Q(z_i)| = 1$. Procesul aleator $x[n]$ pentru care EPMM este zero ($E_p^f = 0$) se numește *predictibil* sau *determinist*.

Fie, de exemplu, procesul aleator sinusoidal de forma

$$x[n] = \sum_{k=1}^M \alpha_k e^{j(n\omega_k + \theta_k)} \quad (3.114)$$

unde fazele $\{\theta_k\}$ sunt statistic independente și distribuite uniform în intervalul $(0, 2\pi)$. Funcția de autocorelație este atunci

$$\gamma_{xx}[m] = \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 e^{jm\omega_k} \quad (3.115)$$

iar densitatea spectrală de putere

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 \delta(f - f_k), f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad (3.116)$$

Se poate arăta că acest proces este predictibil cu un predictor de ordin $p \geq M$. Într-adevăr, fie $x[n]$ de forma (3.114) care se aplică la intrarea unui filtru al erorii de predicție de ordin $p \geq M$. Eroarea pătratică medie la ieșirea acestui filtru este

$$\begin{aligned}\xi_p^f &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{xx}(f) |A_p(f)|^2 df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=1}^M \alpha_k^2 \delta(f - f_k) \right] |A_p(f)|^2 df \\ &= \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 |A_p(f_k)|^2\end{aligned}\quad (3.117)$$

Alegând M din cele p zerouri ale filtrului erorii de predicție să coincidă cu frecvențele $\{f_k\}$, eroarea pătratică medie poate fi forțată să fie zero. Celelalte $p-M$ zerouri pot fi plasate arbitrar, oriunde în interiorul cercului unitate.

3.7.2. Proprietatea de fază maximă a filtrului erorii de predicție înapoi

Un filtru se spune că este de fază maximă, dacă zerourile funcției sale de sistem sunt în exteriorul cercului unitate sau pe acesta. Funcția de sistem pentru filtrul erorii de predicție înapoi de ordin p este

$$B_p(z) = z^{-p} A_p(z^{-1}) \quad (3.118)$$

În consecință, rădăcinile lui $B_p(z)$ sunt inversele rădăcinilor filtrului erorii de predicție înapoite cu funcția de sistem $A_p(z)$. Aceasta înseamnă că, dacă $A_p(z)$ este de fază minimă atunci $B_p(z)$ este de fază maximă. Dacă procesul $x[n]$ este predictibil atunci toate rădăcinile lui $B_p(z)$ sunt pe cercul unitate.

3.7.3. Proprietatea de albire

Se presupune că procesul aleator $x[n]$ este de tip AR(p), adică este generat prin trecerea zgomotului alb, staționar, de

dispersie σ_w^2 printr-un filtru numai cu poli, care are funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-1}} \quad (3.119)$$

Pe de altă parte, filtrul erorii de predicție înainte de ordin p are funcția de sistem:

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k} = \frac{1}{H(z)} \quad (3.120)$$

dacă coeficienții predictorului sunt $a_p[k] = a_k$. Răspunsul acestui filtru la semnalul $x[n]$ este, evident, zgromot alb de dispersie σ_w^2 . Din acest motiv, acest filtru al erorii de predicție se numește filtru de albire.

3.7.4. Proprietatea de ortogonalitate

Erorile de predicție înapoi $\{g_m[k]\}$ în diferite trepte ale filtrului FIR lattice sunt ortogonale, adică

$$E[g_m[n_i]g_l^*[n_i]] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 1 \leq m \leq p; 1 \leq l \leq p; m \neq l \\ E_m^b, & l = m \end{cases} \quad (3.121)$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} E[g_m[n_i]g_l^*[n_i]] &= \sum_{k=0}^m b_m[k] \sum_{j=0}^l b_l^*[j] E[x[n_i - k]x^*[n_i - j]] = \\ &= \sum_{j=0}^l b_l^*[j] \sum_{k=0}^m b_m[k] \gamma_{xx}[j - k] \end{aligned} \quad (3.122)$$

Ecuțiile normale ale predictorului liniar înapoi sunt

$$\sum_{k=0}^m b_m[k] \gamma_{xx}[j-k] = \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, m-1 \\ E_m^b, & j = m \end{cases} \quad (3.123)$$

care, înlocuite în (3.122) conduc la (3.121).

3.8. Filtre lattice pentru procese AR și ARMA

În paragraful 3.3 s-a arătat relația dintre un filtru lattice FIR și predicția liniară. Predictorul liniar cu funcția de sistem

$$A_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_p[k] z^{-k}, \quad (3.124)$$

când este excitat cu procesul aleator $x[n]$, produce o ieșire care aproximează zgomotul alb când $p \rightarrow \infty$. Pe de altă parte, dacă procesul de intrare este autoregresiv de ordin p , ieșirea predictorului cu funcția de sistem $A_p(z)$ este un zgomot alb. Deoarece predictorul cu funcția de sistem $A_p(z)$ generează un proces MA(p) când este excitat cu o secvență de zgomot alb, structurile lattice numai cu zerouri se mai numesc lattice cu medie alunecătoare sau mobilă. În continuare se prezintă structurile lattice pentru filtrul invers, numai cu poli, $1/A_p(z)$, numite structuri lattice AR și structurile lattice cu poli și zerouri pentru un proces ARMA.

3.8.1. Structura lattice AR

Fie un sistem numai cu poli, cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_p[k] z^{-k}} \quad (3.125)$$

Ecuația cu diferențe corespunzătoare este:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k]y[n-k] + x[n] \quad (3.126)$$

Schimbând rolul intrării cu ieșirea, adică înlocuind în relația (3.126) $x[n]$ cu $y[n]$, și invers, se obține ecuația cu diferențe:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] + y[n] \quad (3.127)$$

sau, echivalent

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^p a_p[k]x[n-k] \quad (3.128)$$

care reprezintă ecuația cu diferențe pentru un sistem FIR cu funcția de sistem $A_p(z)$. Așadar, un sistem IIR numai cu poli poate fi transformat în unul FIR prin interschimbarea rolului intrării cu ieșirea. Pe baza acestei observații se poate obține structura unei lattice AR(p) dintr-o lattice MA(p) prin interschimbarea semnalată anterior. Dacă structura lattice MA(p) are ieșirea $y[n] = f_p[n]$, și intrarea $x[n] = f_0[n]$, se va impune

$$\begin{cases} x[n] = f_p[n] \\ y[n] = f_0[n] \end{cases} \quad (3.129)$$

Acstea definiții impun calculul mărimilor $\{f_m[n]\}$ în ordine inversă, lucru care poate fi efectuat prin rearanjarea ecuației recursive (3.29) pentru $f_m[n]$ și aflarea lui $f_{m-1}[n]$ în funcție de $f_m[n]$. Astfel

$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_m[n-1], m = p, p-1, \dots, 1. \quad (3.130)$$

Ecuația pentru $g_m[n]$ rămâne neschimbată. Se obțin în final relațiile:

$$\begin{aligned}
x[n] &= f_p[n] \\
f_{m-1}[n] &= f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1] \\
g_m[n] &= K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1] \\
y[n] &= f_0[n] = g_0[n]
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Implementarea corespunzătoare pentru structura lattice AR(p) este prezentată în figura 3.9.

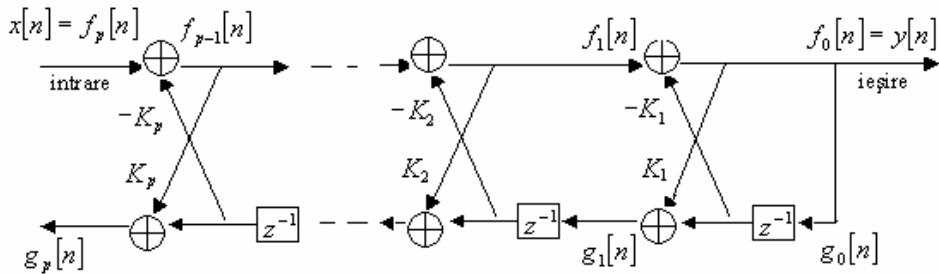


Figura 3.9. Structura corespunzătoare pentru lattice $\text{AR}(p)$

Se observă că structura lattice numai cu poli are o cale numai cu zerouri cu intrarea $g_0[n]$ și ieșirea $g_p[n]$, care este identică cu calea numai cu zerouri din structura lattice MA(p). Se observă, de asemenea, că cele două structuri lattice AR(p) și MA(p) sunt caracterizate de aceiași parametri, și anume, coeficienții de reflexie $\{K_i\}$, fapt ce permite aplicarea acelorași relații de conversie (3.53) ÷ (3.55) și (3.57), (3.58) a parametrilor $\{a_p[k]\}$ ai realizării în formă directă a sistemului numai cu zerouri $A_p(z)$ în parametrii lattice $\{K_i\}$ ai structurii MA(p) și pentru structurile numai cu poli.

3.8.2. Procese ARMA și filtre lattice cu poli și zerouri

O structură lattice numai cu poli furnizează blocul constructiv de bază pentru structurile de tip lattice care implementează sisteme IIR ce conțin atât poli cât și zerouri. Fie un sistem IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^q c_q[k]z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_p[k]z^{-k}} = \frac{C_q(z)}{A_p(z)} \quad (3.132)$$

Fără a se pierde din generalitate, se presupune $p \geq q$. Acest sistem este caracterizat de ecuațiile cu diferențe

$$\begin{aligned} v[n] &= -\sum_{k=1}^p a_p[k]v[n-k] + x[n] \\ y[n] &= \sum_{k=0}^q c_q[k]v[n-k] \end{aligned} \quad (3.133)$$

obținute prin considerarea sistemului IIR ca o cascadă formată dintr-un sistem numai cu poli care precede un sistem numai cu zerouri. Ieșirea $y[n]$ este o combinație liniară a ieșirilor întârziate din sistemul numai cu poli.

Funcția de sistem

$$H_b(z) = \frac{G_m(z)}{Y(z)} = B_m(z) \quad (3.134)$$

unde $G_m(z)$ este transformata Z a ieșirii $g_m[n]$ din treapta a m -a, iar $Y(z)$, intrarea în calea numai cu zerouri, caracterizează un sistem numai cu zerouri. Prin urmare, orice combinație de $\{g_m[n]\}$ este, de asemenea, un filtru numai cu zerouri.

Fie un filtru lattice numai cu poli, cu coeficienții K_m , căruia î se adaugă o structură, numită *scară*, prin considerarea ieșirii ca o combinație liniară de $\{g_m[n]\}$. Se obține un filtru lattice cu poli și zerouri ca în figura 3.10, a cărui ieșire este

$$y[n] = \sum_{k=0}^q \beta_k g_k[n] \quad (3.135)$$

unde $\{\beta_k\}$ sunt parametrii care caracterizează sistemul numai cu zerouri.

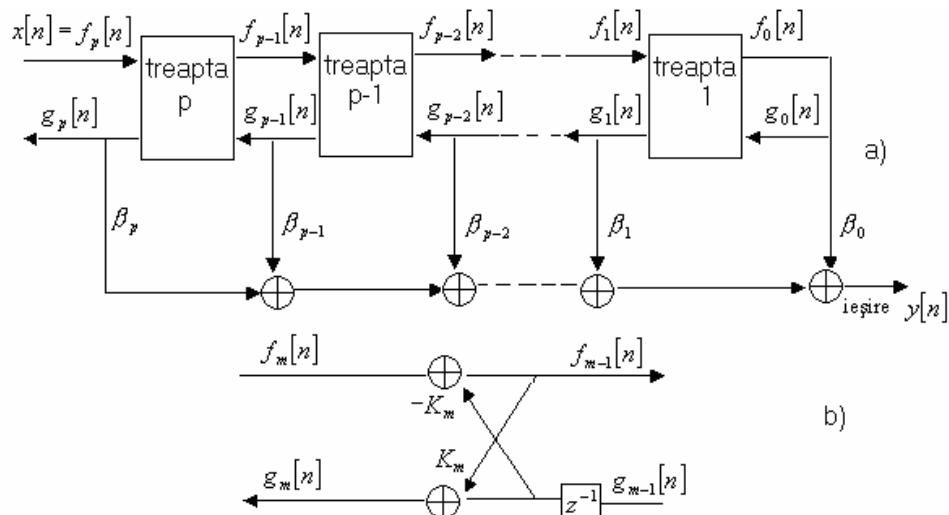


Figura 3.10. a) Structură lattice pentru un sistem cu poli și zerouri, b) treapta m a latticei

Cu ajutorul relației (3.135), funcția de sistem corespunzătoare sistemului cu poli și zerouri este

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^q \beta_k \frac{G_k(z)}{X(z)} \quad (3.136)$$

Deoarece $X(z) = F_p(z)$ și $F_0(z) = G_0(z)$, relația (3.136) se poate scrie

$$H(z) = \sum_{k=0}^q \beta_k \frac{G_k(z)}{G_0(z)} \frac{F_0(z)}{F_p(z)} = \frac{1}{A_p(z)} \sum_{k=0}^q \beta_k B_k(z) \quad (3.137)$$

Prin identificarea cu relația (3.132), rezultă

$$C_q(z) = \sum_{k=0}^q \beta_k B_k(z) \quad (3.138)$$

Această relație poate fi folosită pentru determinarea coeficienților $\{\beta_k\}$. Fiind date polinoamele $C_q(z)$ și $A_p(z)$ cu $p \geq q$, se determină întâi coeficienții de reflexie $\{K_m\}$ din coeficienții $a_p[k]$. Cu ajutorul relațiilor recursive date de (3.56) se obțin polinoamele $B_k(z), k = 1, \dots, p$. Parametrii scării se pot obține din relația (3.138), care se mai scrie sub forma

$$C_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k B_k(z) + \beta_m B_m(z) = C_{m-1}(z) + \beta_m B_m(z) \quad (3.139)$$

sau, echivalent

$$C_{m-1}(z) = C_m(z) - \beta_m B_m(z), m = p, p-1, \dots, 1 \quad (3.140)$$

ceea ce permite determinarea polinoamelor de ordin inferior. Deoarece $b_m[m] = 1$, parametrul β_m se determină din relația (3.140) impunând $\beta_m = c_m[m], m = p, \dots, 1$.

Dacă o structură lattice cu poli și zerouri este excitată cu o secvență de zgomot alb, se generează un proces ARMA(p, q), a cărui densitate spectrală de putere este

$$\Gamma_{xx}(f) = \sigma_w^2 \frac{|C_q(f)|^2}{|A_p(f)|^2}, \quad (11.141)$$

unde σ_w^2 este dispersia secvenței de zgomot alb de la intrare.

3.9. Filtre Wiener pentru filtrare și predicție

În multe situații practice semnalele utile sunt afectate de perturbații cu caracter aditiv, motiv pentru care se pune problema proiectării unui filtru care să suprime componenta nedorită de zgomot, păstrând, în același timp, caracteristicile semnalului dorit. Se impune ca filtrul, caracterizat de răspunsul la impuls $h[n]$, să fie liniar, iar ieșirea să să aproximeze un semnal dorit. Situația este ilustrată în figura 3.11.

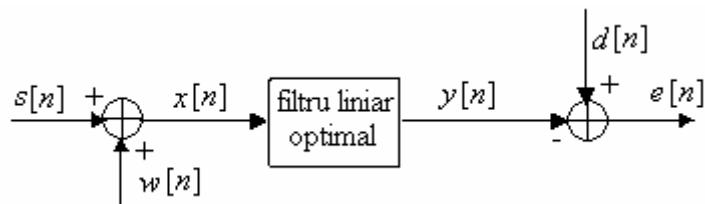


Figura 3.11. Model pentru estimarea liniară a unui semnal

unde

$s[n]$ -semnalul util

$w[n]$ -zgomot aditiv

$d[n]$ -semnal dorit

$x[n] = s[n] + w[n]$ -semnalul de intrare în filtru

$y[n]$ -ieșirea filtrului

$e[n] = d[n] - y[n]$ -secvența de eroare

Se disting trei cazuri

- 1) $d[n] = s[n]$, situație cunoscută sub numele de filtrare;
- 2) $d[n] = s[n+D], D > 0$, situație cunoscută sub numele de predicție, filtrare cu anticipare sau extrapolare;

- 3) $d[n] = s[n - D], D > 0$, situație cunoscută sub numele de netezire, filtrare cu întârziere sau interpolare.

Criteriul ales pentru optimizarea răspunsului la impuls al filtrului este cel de minimizare a erorii pătratice medii. Secvențele $\{s[n]\}, \{w[n]\}, \{d[n]\}$ se presupun de medie zero și staționare în sens larg. Filtrul liniar optimal care minimizează eroarea pătratică medie se numește *filtru Wiener* și poate fi cu răspuns finit sau infinit la impuls.

3.9.1. Filtru Wiener cu răspuns finit la impuls

Se presupune că filtrul cu răspuns finit la impuls are lungimea M și coeficienții $\{h[k], 0 \leq k \leq M-1\}$, caz în care ieșirea sa este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] \quad (3.142)$$

Valoarea pătratică medie a erorii dintre ieșirea dorită $d[n]$ și ieșirea filtrului, $y[n]$, este

$$\xi_M = E\{(e[n_i])^2\} = E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i - k]\right)^2\right\} \quad (3.143)$$

Condiția necesară din care se obține valoarea de extrem a erorii este:

$$\frac{\partial E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[k]} = 0, 0 \leq k \leq M-1 \quad (3.144)$$

Înlocuind (3.143) în (3.144), rezultă

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[k]} &= \frac{\partial}{\partial h[k]} E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)^2\right\} = \\
&= E\left\{\frac{\partial}{\partial h[k]}\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)^2\right\} = \\
&= -2E\left\{\left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n_i-k]\right)(x[n_i-m])\right\} = \quad (3.145) \\
&= -2\left(\gamma_{xd}[m] - \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\gamma_{xx}[k-m]\right) = 0, \quad 0 \leq m \leq M-1
\end{aligned}$$

sau, echivalent

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_o[k]\gamma_{xx}[k-m] = \gamma_{xd}[m], \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (3.146)$$

Relațiile (3.146) pentru $0 \leq m \leq M-1$ sunt cunoscute ca *ecuațiile Wiener Hopf* din care se deduc coeficienții filtrului optimal FIR care asigură o eroare pătratică minimă.

Extremul erorii pătratice medii este un minim, deoarece

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h[m]\partial h[k]} &= 0, \text{ pentru } m \neq k \text{ și} \\
\frac{\partial^2 E\{(e[n_i])^2\}}{\partial h^2[m]} &= \gamma_{xx}[0] > 0, \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (3.147)
\end{aligned}$$

Ecuările (3.146) poate fi exprimate în formă matriceală astfel:

$$[\Gamma_M][h_o] = [\gamma_d] \quad (3.148)$$

unde

$$[\Gamma_M]_{M \times M} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[1] & \dots & \gamma_{xx}[M-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] & \dots & \gamma_{xx}[M-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{xx}[M-1] & \gamma_{xx}[M-2] & \dots & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix}$$

este matricea de autocorelație, cu elementele $\Gamma_{lk} = \gamma_{xx}[l-k]$,

$[\gamma_d]_{M \times 1} = [\gamma_{xd}[0] \ \ \gamma_{xd}[1] \ \ \dots \ \ \gamma_{xd}[M-1]]^T$ este un vector coloană cu elementele $\gamma_{xd}[l], l = 0, 1, \dots, M-1$, iar

$[h_o]_{M \times 1} = [h[0] \ \ h[1] \ \ \dots \ \ h[M-1]]^T$ este un vector coloană ale cărui componente sunt valorile răspunsului la impuls al filtrului optimal.

Soluția pentru coeficienții filtrului optimal este

$$[h_0] = [\Gamma_M]^{-1} [\gamma_d]. \quad (3.149)$$

Deoarece matricea de corelație $[\Gamma_M]$ este de tip Toplitz, se poate folosi algoritmul Levison Durbin pentru aflarea coeficienților filtrului optimal (vezi paragraful 3.6.1).

Eroarea pătratică medie minimă a filtrului Wiener se obține înlocuind relațiile (3.146) în (3.143), adică

$$\begin{aligned} \min \xi_M &= E \left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] x[n_i - k] \right)^2 \right\} = \\ &E \left\{ \left(d[n_i] - \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] x[n_i - k] \right) \left(d[n_i] - \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] x[n_i - m] \right) \right\} = \\ &\gamma_{dd}[0] - 2 \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \gamma_{xd}[m] + \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] \gamma_{xx}[m-k] = \\ &\gamma_{dd}[0] - \sum_{m=0}^{M-1} h_o[m] \gamma_{xd}[m] \end{aligned} \quad (3.150)$$

Ținând cont de (3.149), relația (3.150) se scrie, echivalent, sub forma

$$\min \xi_M = \gamma_{dd}[0] - [\gamma_d]^T [\Gamma_M]^{-1} [\gamma_d] \quad (3.151)$$

Se consideră în continuare cazul când semnalul dorit a fi estimat este de forma

$$d[n] = s[n+D], \text{ cu } D \text{ întreg, fixat} \quad (3.152)$$

Filtrul liniar optimal operează asupra semnalului observat afectat de zgomot aditiv

$$x[n] = s[n] + w[n] \quad (3.153)$$

pentru a elimina zgomotul, producând un răspuns $y[n]$ care să aproximeze $s[n+D]$. Filtrul optimal va fi de întârziere, dacă $D < 0$ și de anticipare, dacă $D > 0$.

Dacă semnalul $s[n]$ și zgomotul $w[n]$ sunt necorelate, cum este de obicei cazul în practică, atunci

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[k] &= \gamma_{ss}[k] + \gamma_{ww}[k] \\ \gamma_{xd}[m] &= \gamma_{ss}[m+D] \end{aligned} \quad (3.154)$$

iar ecuațiile Wiener-Hopf sunt de forma

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{M-1} h_o[k] [\gamma_{ss}[m-k] + \gamma_{ww}[m-k]] &= \\ = \gamma_{ss}[m+D], m &= 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (3.155)$$

3.9.2. Proprietatea de ortogonalitate a filtrului optimal

Filtrul liniar optimal ce satisfacă ecuația Wiener-Hopf (3.146) are o proprietate statistică importantă, și anume, aceea că eroarea pătratică medie este minimă, dacă coeficienții filtrului

$\{h[n]\}$ au fost aleși astfel încât eroarea de estimare și datele $x[n]$ sunt ortogonale, adică:

$$E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0, 0 \leq m \leq M - 1 \quad (3.156)$$

unde

$$e[n] = d[n] - y[n] = d[n] - \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] \quad (3.157)$$

Într-adevăr, egalând cu zero derivata erorii pătratice medii în raport cu $h[m]$, rezultă

$$\frac{\partial E[e^2[n_i]]}{\partial h[m]} = 2E\left\{\frac{\partial e[n_i]}{\partial h[m]}e[n_i]\right\} = 0 \quad (3.158)$$

În (3.158) ordinea operațiilor de mediere și derivare a fost interschimbată.

Din (3.157) se observă că

$$\frac{\partial e[n]}{\partial h[m]} = -\frac{\partial}{\partial h[m]} \sum_{m=0}^{M-1} h[m]x[n-m] = -x[n-m] \quad (3.159)$$

Înlocuind (3.159) în (3.158) rezultă $E\{x[n_i - m]e[n_i]\} = 0$, $m = 0, \dots, M - 1$, adică (3.156).

3.9.3. Determinarea funcției pondere a filtrelor Wiener cu răspuns infinit la impuls (IIR) la recepționarea secvenței de zgomot alb

În paragraful precedent s-a impus constrângerea ca filtrul să fie de lungime finită, obținându-se un sistem de M ecuații liniare din care să rezulte coeficienții optimi ai filtrului. În paragraful de față,filtrele, ca și datele se consideră infinite ca durată. Ieșirea filtrului IIR se calculează cu relația

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.160)$$

Coeficienții filtrului rezultă din minimizarea erorii pătratice medie dintre semnalul de ieșire dorit $d[n]$ și $y[n]$, adică

$$\xi_{\infty} = E\{(e[n_i])^2\} = E\left\{(d[n_i] - \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_i-k])^2\right\} \quad (3.161)$$

Aplicând principiul ortogonalității, se obțin ecuațiile Wiener-Hopf

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_o[k]\gamma_{xx}[m-k] = \gamma_{xd}[m], m \geq 0 \quad (3.162)$$

Eroarea pătratică medie minimă se obține din relația (3.150) pentru $M \rightarrow \infty$, adică

$$EPMM_{\infty} = \min_h \xi_{\infty} = \gamma_{dd}[0] - \sum_{m=0}^{\infty} h_o[m]\gamma_{xd}[m] \quad (3.163)$$

Ecuațiile Wiener-Hopf (3.162) nu pot fi rezolvate direct cu ajutorul tehnicilor oferite de transformata Z, deoarece ecuațiile sunt valabile numai pentru $m \geq 0$. Filtrul optimal Wiener-Hopf IIR va fi determinat cu ajutorul unui filtru de albire căruia i se aplică procesul stationar $\{x[n]\}$.

În cazul filtrelor discrete optimale IIR cauzale, ecuația Wiener-Hopf este dată de relația (3.162). În cazul recepționării unei secvențe de zgomot alb, notată cu $w[n]$, fie $\gamma_{ww}[m]$ funcția de autocorelație a acesteia, $\gamma_{wd}[m]$ funcția de corelație dintre secvența recepționată $w[n]$ și secvența dorită a fi estimată $d[n]$ și $h_{ow}[k]$ funcția pondere a unui filtru optimal IIR ce satisfac ecuația Wiener-Hopf la recepționarea secvenței $w[n]$. În cazul secvenței recepționate de tip zgomot alb, ecuația (3.162) devine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] \gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m], \quad m \geq 0 \quad (3.164)$$

Dar

$$\gamma_{ww}[m-k] = \sigma_w^2 \delta[m-k] \quad (3.165)$$

Ținând cont de (3.165), ecuația (3.164) devine:

$$\sigma_w^2 h_{ow}[m] = \gamma_{wd}[m], \quad m \geq 0 \quad (3.166)$$

Fie ${}^+\gamma_{wd}[m]$ partea lui $\gamma_{wd}[m]$ pentru $m \geq 0$ și ${}^-\gamma_{wd}[m]$ pentru $m < 0$.

Rezultă atunci:

$$h_{ow}[m] = \begin{cases} \frac{{}^+\gamma_{wd}[m]}{\sigma_w^2}, & \text{pentru } m \geq 0 \\ 0, & \text{pentru } m < 0 \end{cases} \quad (3.167)$$

Aplicând transformata Z relației (3.167), rezultă:

$$\begin{aligned} Z\{h_{ow}[m]\} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{ow}[m] z^{-m} = H_{ow}(z) = \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{m=0}^{\infty} {}^+\gamma_{wd}[m] z^{-m} = \frac{1}{\sigma_w^2} \cdot {}^+\Gamma_{wd}(z) \end{aligned} \quad (3.168)$$

3.9.4. Filtru Wiener cauzal cu răspuns infinit la impuls (IIR)

Se reamintește că un proces aleator stationar $x[n]$, cu funcția de autocorelație $\gamma_{xx}[k]$ și densitatea spectrală de putere $\Gamma_{xx}(f)$ poate fi obținut la ieșirea unui filtru cu funcția de sistem $G(z)$ și răspunsul la impuls $g[n]$, la intrarea căruia se aplică zgomot alb $w[n]$. Procesul $x[n]$ este albit de filtrul cu funcția de sistem $\frac{1}{G(z)}$.

Funcția $G(z)$ este partea de fază minimă obținută din factorizarea spectrală a lui $\Gamma_{xx}(z)$

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_i^2 G(z) G(z^{-1}), \quad (3.169)$$

regiunea de convergență pentru $G(z)$ fiind $|z| > r_1$ cu $r_1 < 1$.

Pentru a putea folosi rezultatul din paragraful precedent, filtrul optimal Wiener $H_o(z)$ se consideră a fi o cascadă formată dintr-un filtru de albire caracterizat de funcția de sistem $\frac{1}{G(z)}$ și un alt filtru caracterizat de funcția de sistem $H_{ow}(z)$, a cărui ieșire $y[n]$ este identică cu ieșirea filtrului Wiener optimal.

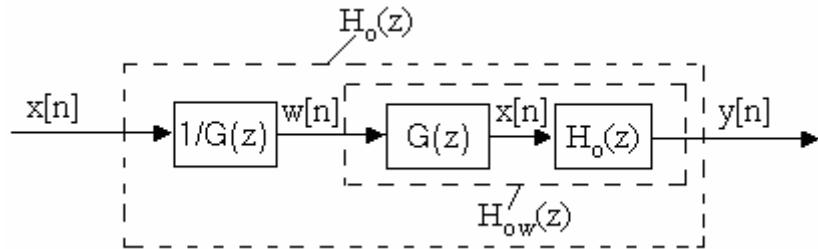


Figura 3.12. Filtru optimal Wiener

Deoarece

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] w[n-k] \quad (3.170)$$

și $e[n] = d[n] - y[n]$, aplicarea principiului ortogonalității determină următoarele ecuații Wiener-Hopf pentru filtrul $H_{ow}(z)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k] \gamma_{ww}[m-k] = \gamma_{wd}[m], m \geq 0 \quad (3.171)$$

Optimalitatea filtrului $H_{ow}(z)$ asigură și optimalitatea filtrului $H_o(z)$, deoarece

$$\begin{aligned}
E\{x[n_i]e[n_i+m]\} &= \\
&= E\left\{\sum_{p=0}^{\infty} g[p]w[n_i-p]\left(d[n_i+m]-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i+m-k]\right)\right\}= \\
&\sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[E\left\{(w[n_i-p]d[n_i+m])-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]w[n_i-p][w[n_i+m-k]\right\}\right]= \\
&\sum_{p=0}^{\infty} g[p]\left[\gamma_{wd}[m+p]-\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]\gamma_{ww}[m+p-k]\right]=0
\end{aligned} \tag{3.172}$$

Deoarece $w[n]$ este zgomot alb, rezultă că $\gamma_{ww}[m-k]=0$, cu excepția cazului în care $m=k$. Din (3.171) se obține

$$h_{ow}[m]=\frac{\gamma_{wd}[m]}{\gamma_{ww}[0]}=\frac{\gamma_{wd}[m]}{\sigma_w^2}, m \geq 0 \tag{3.173}$$

Transformata Z, a secvenței $h_{ow}[m]$ se determină cu relația

$$H_{ow}(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h_{ow}[k]z^{-k}=\frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{wd}[k]z^{-k} \tag{3.174}$$

Transformata Z bilaterală a secvenței $\gamma_{wd}[k]$ se notează cu $\Gamma_{wd}(z)$ și se calculează cu relația

$$\Gamma_{wd}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{wd}[k]z^{-k} \tag{3.175}$$

iar partea sa cauzală se notează cu

$${}^+\left[\Gamma_{wd}(z)\right]=\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{wd}[k]z^{-k} \tag{3.176}$$

Cu relația (3.176), relația (3.174) devine

$$H_{ow}(z)=\frac{1}{\sigma_w^2} {}^+\left[\Gamma_{wd}(z)\right] \tag{3.177}$$

Pentru a determina ${}^+\left[\Gamma_{wd}(z)\right]$ se exprimă ieșirea filtrului de albire

în forma

$$w[n] = \sum_{k=0}^{\infty} v[k]x[n-k] \quad (3.174)$$

unde $\{v[k], k \geq 0\}$ este răspunsul la impulsul de albire

$$\frac{1}{G(z)} = V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v[k]z^{-k} \quad (3.179)$$

Atunci

$$\begin{aligned} \gamma_{wd}[k] &= E\{w[n_i]d[n_i+k]\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v[m]E\{x[n_i-m]d[n_i+k]\} = \sum_{m=0}^{\infty} v[m]\gamma_{xd}[k+m] \end{aligned} \quad (3.180)$$

Transformata Z a funcției de corelație $\gamma_{wd}[k]$ este

$$\begin{aligned} \Gamma_{wd}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} v[m]\gamma_{xd}[k+m] \right] z^{-k} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} v[m] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xd}[k+m] z^{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} v[m] z^m \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{xd}[k] z^{-k} = \quad (3.181) \\ &= V(z^{-1})\Gamma_{xd}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \end{aligned}$$

Rezultă astfel

$$H_{ow}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+ \quad (3.182)$$

Filtrul optimal Wiener are funcția de sistem

$$H_o(z) = \frac{H_{0w}(z)}{G(z)} = \frac{1}{\sigma_w^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+ \quad (3.183)$$

În continuare se exprimă EPMM dată de (3.163) în funcție de caracteristicile în frecvență ale filtrului. Valoarea $\gamma_{dd}[0]$ a funcției de autocorelație $\gamma_{dd}[k]$ în origine se determină astfel:

Deoarece

$$\gamma_{dd}[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \Gamma_{dd}(z) z^{k-1} dz \quad (3.184)$$

rezultă că

$$\gamma_{dd}[0] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Gamma_{dd}(z)}{z} dz = \sigma_d^2 \quad (3.185)$$

unde C este un contur din regiunea de convergență al lui $\Gamma_{dd}(z)$ care conține originea, parcurs în sens antiorar.

Al doilea termen al relației (3.163) se transformă ușor în domeniul frecvență, aplicând teorema lui Parseval [72]. Deoarece $h_o[k] = 0, k < 0$ rezultă

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_o[k] \gamma_{xd}[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (3.186)$$

unde C este un contur care înconjoară originea, plasat în regiunea de convergență a lui $H_o(z)$ și $\Gamma_{xd}(z^{-1})$. Înlocuind relațiile (3.185) și (3.186) în (3.163), rezultă

$$EPMM_{\infty} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1})] z^{-1} dz \quad (3.187)$$

3.9.5. Filtru Wiener IIR necauzal

Dacă se renunță la constrângerea impusă filtrului Wiener IIR de a fi cauzal, ieșirea acestuia devine

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] x[n-k] \quad (3.188)$$

Acet filtru este nerealizabil. El poate fi văzut ca un filtru de netezire în care sunt folosite valorile semnalului din viitorul infinit pentru a furniza estimatul $\hat{d}[n] = y[n]$ al semnalului dorit $d[n]$. Aplicând principiul ortogonalității, rezultă ecuațiile Wiener-Hopf pentru filtrul necauzal

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \gamma_{xx}[l-k] = \gamma_{xd}[l], -\infty < l < \infty \quad (3.189)$$

Aplicând transformata Z relației (3.189) se obține

$$H_{nc}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} \quad (3.190)$$

EPMM rezultată este

$$EPMM_{nc} = \gamma_{dd}[0] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \gamma_{xd}[k] \quad (3.191)$$

iar în domeniul Z

$$EPMM_{nc} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_{nc}(z)\Gamma_{xd}(z^{-1})] z^{-1} dz \quad (3.192)$$

3.10. Probleme rezolvate

1. Funcția de autocorelație a unui proces aleator este

$$\gamma_{xx}[m] = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ -1/2, & m = \pm 1 \\ 5/8, & m = \pm 2 \\ -11/16, & m = \pm 3 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Să se determine funcția de sistem $A_m(z)$ a filtrului de predicție, coeficienții de reflexie K_m și eroarea pătratică medie de

predicție E_m^f , pentru $m = 1, 2, 3$.

Soluție

Coeficienții filtrului predictor se determină cu ajutorul algoritmului Levison Durbin.

Se inițializează pentru $m = 1$, $a_1[1] = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]}$, $E_1^f = (1 - |a_1[1]|^2)\gamma_{xx}[0]$

La pasul m se calculează

$$a_m[m] = -\frac{\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1}[k]\gamma_{xx}[m-k]}{E_{m-1}^f}, \quad E_m^f = (1 - |a_m[m]|^2)E_{m-1}^f$$

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + a_m[m]a_{m-1}[m-k], \quad 1 \leq k \leq m-1$$

$$m = 1, a_1[1] = -\frac{\gamma_{xx}[1]}{\gamma_{xx}[0]} = \frac{1}{2}, E_1^f = (1 - (1/2)^2)1 = 3/4$$

$$A(z) = 1 + a_1[1]z^{-1} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1}; \quad K_1 = a_1[1] = \frac{1}{2}$$

$$m = 2, a_2[2] = -\frac{\gamma_{xx}[2] + \sum_{k=1}^1 a_1[k]\gamma_{xx}[2-k]}{E_1^f} = -\frac{\gamma_{xx}[2] + a_1[1]\gamma_{xx}[1]}{E_1^f} = -\frac{1}{2},$$

$$K_2 = a_2[2], E_2^f = (1 - (-1/2)^2)E_1^f = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$a_2[k] = a_1[k] + a_2[2]a_1[2-k], \quad k = 1$$

$$a_2[1] = a_1[1] + a_2[2]a_1[1] = \frac{1}{4}$$

$$A_2(z) = 1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2} = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

$$\begin{aligned}
m = 3, a_3[3] &= -\frac{\gamma_{xx}[3] + \sum_{k=1}^2 a_2[k]\gamma_{xx}[3-k]}{E_2^f} = \\
&= -\frac{\gamma_{xx}[3] + a_2[1]\gamma_{xx}[2] + a_2[2]\gamma_{xx}[1]}{E_2^f} = -\frac{1}{2}, \\
K_3 = a_3[3], E_3^f &= (1 - (-1/2)^2)E_2^f = \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\
a_3[k] &= a_2[k] + a_3[3]a_2[3-k], \quad 1 \leq k \leq 2 \\
k = 1, a_3[1] &= a_2[1] + a_3[3]a_2[2] = \frac{1}{2} \\
k = 2, a_3[2] &= a_2[2] + a_3[3]a_2[1] = -\frac{5}{8} \\
A_3(z) &= 1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2} + a_3[3]z^{-3} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{5}{8}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-3}
\end{aligned}$$

2. Un proces AR(2) este caracterizat de coeficienții filtrului de predicție $a_2[1] = \frac{3}{8}$, $a_2[2] = \frac{1}{2}$.

Dacă procesul AR(2) s-a obținut prin filtrarea unui zgomot alb cu dispersia σ_w^2 , să se determine:

- a) $\gamma_{xx}[m]$, $0 \leq m \leq 2$
- b) coeficienții de reflexie K_m , $1 \leq m \leq 2$
- c) eroarea de predicție E_2^f .

Soluție

a) Ecuațiile Yule – Walker sunt

$$\gamma_{xx}[m] + \sum_{k=1}^p a_k \gamma_{xx}[m-k] = \begin{cases} \sigma_w^2, & m = 0 \\ 0, & 1 \leq m \leq p \end{cases}$$

unde $p=2$ este ordinul predicției.

$$\begin{aligned}
m=0 \quad & \gamma_{xx}[0] + a_2[1]\gamma_{xx}[-1] + a_2[2]\gamma_{xx}[-2] = \sigma_w^2 \\
m=1 \quad & \gamma_{xx}[1] + a_2[1]\gamma_{xx}[0] + a_2[2]\gamma_{xx}[-1] = 0 \\
m=2 \quad & \gamma_{xx}[2] + a_2[1]\gamma_{xx}[1] + a_2[2]\gamma_{xx}[0] = 0
\end{aligned}$$

Cum funcția de autocorelație este pară, rezultă

$$\begin{aligned}
\gamma_{xx}[0] + \frac{3}{8}\gamma_{xx}[1] + \frac{1}{2}\gamma_{xx}[2] &= \sigma_w^2 \\
\gamma_{xx}[1] + \frac{3}{8}\gamma_{xx}[0] + \frac{1}{2}\gamma_{xx}[1] &= 0 \\
\gamma_{xx}[2] + \frac{3}{8}\gamma_{xx}[1] + \frac{1}{2}\gamma_{xx}[0] &= 0
\end{aligned}$$

de unde rezultă $\gamma_{xx}[0] = \frac{64}{45}\sigma_w^2$, $\gamma_{xx}[1] = -\frac{16}{45}\sigma_w^2$, $\gamma_{xx}[2] = -\frac{26}{45}\sigma_w^2$

b) Folosind relația (3.56), cu $K_2 = a_2[2]$, se poate scrie

$$A_l(z) = \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2}, \text{ unde}$$

$$A_2(z) = 1 + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]z^{-2}$$

$$B_2(z) = z^{-2} + a_2[1]z^{-1} + a_2[2]$$

Înlocuind datele problemei în relațiile precente și pe acestea în

relația pentru $A_l(z)$, rezultă $A_l(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1}$, $K_1 = a_1[1] = \frac{1}{4}$.

$$\text{c) } E_m^f = (1 - a_m^2[m])E_{m-1}^f = \gamma_{xx}[0] \prod_{k=1}^m (1 - a_k^2[k])$$

$$m=2, a_1[1] = \frac{1}{4}, a_2[2] = \frac{1}{2}$$

$$E_2^f = \gamma_{xx}[0] \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \sigma_w^2$$

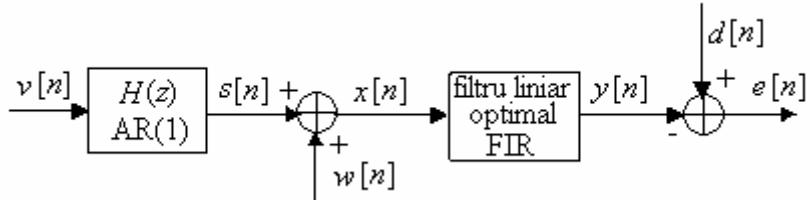
3. Fie semnalul $x[n] = s[n] + v[n]$, unde $s[n]$ este un proces AR(1) caracterizat de ecuația cu diferențe

$$s[n] = as[n-1] + w[n],$$

unde $a = 0,6$, $v[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_v^2 = 0,64$, iar $w[n]$ este zgomot alb cu dispersia $\sigma_w^2 = 1$. Procesele $v[n]$ și $w[n]$ sunt necorelate.

- a) Să se determine funcțiile de autocorelație $\gamma_{ss}[m]$ și $\gamma_{xx}[m]$;
- b) Să se determine răspunsul la impuls al filtrului Wiener FIR, de lungime $M=2$, pentru estimarea semnalului $s[n]$ din $x[n]$.
- c) Să se determine eroarea pătratică medie minimă de estimare, pentru $M=2$.

Soluție



$$\text{a)} \quad \Gamma_{ss}(z) = V(z)V(z^{-1})H(z)H(z^{-1}) = \sigma_v^2 \frac{1}{(1-az^{-1})(1-az)} =$$

$$= \sigma_v^2 \frac{-\frac{1}{a}z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \sigma_v^2 \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-\frac{1}{a}} \right)$$

$$\gamma_{ss}[m] = Z^{-1}\{\Gamma_{ss}(z)\} = \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} \left(a^m u[m] + \left(\frac{1}{a}\right)^m u[-m-1] \right) = \frac{\sigma_v^2}{1-a^2} a^{|m|}$$

Înlocuind $a = 0,6$ și $\sigma_v^2 = 0,64$, rezultă $\gamma_{ss}[m] = 0,6^{|m|}$

Tinând cont de (3.154), rezultă

$$\gamma_{xx}[m] = \gamma_{ss}[m] + \gamma_{ww}[m] = 0,6^{|m|} + \sigma_w^2 \delta[m] = 0,6^{|m|} + \delta[m]$$

$$b) \quad M = 2, \quad \sum_{k=0}^1 h_o[k] \gamma_{xx}[l-k] = \gamma_{dx}[l], \quad l = 0, 1$$

Folosind (3.154), relația precedentă devine

$$\sum_{k=0}^1 h_o[k] [\gamma_{ss}[l-k] + \gamma_{ww}[l-k]] = \gamma_{ss}[l], \quad l = 0, 1$$

Matriceal, aceasta se scrie

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xx}[0] & \gamma_{xx}[-1] \\ \gamma_{xx}[1] & \gamma_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o[0] \\ h_o[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{ss}[0] \\ \gamma_{ss}[1] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}[0] &= 2, \gamma_{xx}[-1] = \gamma_{xx}[1] = 0,6 \\ \gamma_{ss}[0] &= 1, \gamma_{ss}[1] = 0,6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} h_o[0] = 0,4505 \\ h_o[1] = 0,1648 \end{cases}$$

c) Cu relația (3.150) rezultă

$$\begin{aligned} EPMM_2 &= \gamma_{ss}[0] - \gamma_{ss}[0]h[0] - \gamma_{ss}[1]h[1] = \\ &= 1 - 0,4505 - (0,1648)(0,6) = 0,45 \end{aligned}$$

Eroarea poate fi redusă prin mărirea ordinului filtrului, M.

4. În condițiile problemei precedente să se determine funcția de sistem, funcția pondere și eroarea pătratică medie minimă a filtrului optimal IIR cauzal.

Soluție

Conform relației (3.183), funcția de sistem a filtrului IIR optimal cauzal se determină cu relația

$$H_o(z) = \frac{1}{\sigma_w^2 G(z)} \left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+$$

Conform figurilor (3.11) și (3.12),

$$\Gamma_{xx}(z) = \sigma_w^2 G(z) G(z^{-1}), \quad \Gamma_{xd}(z) = \Gamma_{ss}(z), \quad X(z) = S(z) + W(z)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= X(z)X(z^{-1}) = (S(z) + W(z))(S(z^{-1}) + W(z^{-1})) = \\ S(z)S(z^{-1}) + W(z)W(z^{-1}) &= \Gamma_{ss}(z) + \sigma_w^2,\end{aligned}$$

deoarece $\gamma_{sw}[m] = \gamma_{ws}[m] = 0$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx}(z) &= \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} + 1 = 1,8 \frac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \\ \text{de unde rezultă } \sigma_w^2 &= 1,8 \text{ și } G(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-0,6z^{-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{xd}(z) &= \Gamma_{ss}(z) \\ \frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} &= \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \cdot \frac{1-0,6z}{1-\frac{1}{3}z} = \\ &= \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})\left(1-\frac{1}{3}z\right)} = \frac{0,8z}{z-0,6} + \frac{\frac{0,8}{3}z}{1-\frac{1}{3}z}\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\Gamma_{xd}(z)}{G(z^{-1})} \right]^+ = \frac{0,8z}{z-0,6}$$

$$H_o(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \frac{0,8z}{z-0,6} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$1,8 \frac{3}{1-0,6z^{-1}}$$

$$h_o[n] = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n]$$

$$\begin{aligned}
EPMM_{\infty} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\Gamma_{dd}(z) - H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) \right] z^{-1} dz = \\
&= \sum_{\text{toti polii din } C} \operatorname{Rez} \left\{ \left[\Gamma_{dd}(z) - H_o(z) \Gamma_{xd}(z^{-1}) \right] z^{-1} \right\} = \\
&\quad \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left(\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} - \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)} \right) z^{-1} dz = \\
&\quad \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0,356z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-0,6z)} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-\frac{0,356}{0,6}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{0,6}\right)} dz = \\
&\quad \left. \operatorname{Re} z \frac{-\frac{0,356}{0,6}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{0,6}\right)} \right|_{z=\frac{1}{3}} = 0,445
\end{aligned}$$

5. În condițiile problemei 3, să se determine funcția de sistem, funcția pondere și eroarea pătratică medie minimă a filtrului optimal IIR necauzal.

Soluție

Conform relației (3.190), funcția de sistem a filtrului Wiener IIR necauzal este

$$H_{nc}(z) = \frac{\Gamma_{xd}(z)}{\Gamma_{xx}(z)} = \frac{\Gamma_{ss}(z)}{\Gamma_{ss}(z)+1} = \frac{\frac{0,64}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}}{1,8 \frac{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}{(1-0,6z^{-1})(1-0,6z)}} =$$

$$= \frac{0,64}{2(1 - 0,3z^{-1} - 0,3z)} = \frac{0,3555}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z\right)}$$

care, evident este necauzal.

Eroarea pătratică medie minimă se determină cu relația (3.192)

$$\begin{aligned} EPMM_{nc} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{dd}(z) - H_{nc}(z)\Gamma_{xd}(z^{-1})] z^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{ss}(z) - H_{nc}(z)\Gamma_{ss}(z^{-1})] z^{-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [\Gamma_{ss}(z)(1 - H_{nc}(z))] z^{-1} dz = \end{aligned}$$

Integrandul expresiei de mai sus este

$$\begin{aligned} &[\Gamma_{ss}(z)(1 - H_{nc}(z))] z^{-1} = \\ &= \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \left(1 - \frac{0,32}{1 - 0,3z^{-1} - 0,3z}\right) z^{-1} = \\ &= \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \cdot \frac{0,68 - 0,3z^{-1} - 0,3z}{1 - 0,3z^{-1} - 0,3z} z^{-1} = \\ &= \frac{0,64}{(1 - 0,6z^{-1})(1 - 0,6z)} \frac{\left(z - \frac{1}{0,6}\right)(z - 0,6)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 3)} z^{-1} = \frac{0,64}{(-0,6)\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 3)} \end{aligned}$$

Cum singurul pol din interiorul cercului unitate este $z = \frac{1}{3}$,

reziduul corespunzător este

$$\left. \frac{0,64}{(-0,6)(z - 3)} \right|_{z=\frac{1}{3}} = 0,4, \text{ adică } EPMM_{nc} = 0,4.$$

Se observă, aşa cum era de așteptat, că

$$EPMM_{nc} < EPMM_\infty < EPMM_2$$