

# Implementarea în spațiul stărilor a filtrelor digitale IIR

Laborator 9, PSS

## Table of contents

<b>1</b>	<b>Obiectiv</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noțiuni teoretice</b>	<b>1</b>
2.1	Implementarea în spațiul stărilor de tipul 1 . . . . .	1
2.2	Implementarea în spațiul stărilor de tipul 2 . . . . .	3
2.3	Ecuatii pentru cazul general . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Exerciții teoretice</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Exerciții practice</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Întrebări finale</b>	<b>6</b>

## 1 Obiectiv

Familiarizarea studenților cu formele de implementare tip în spațiul stărilor a filtrelor IIR.

## 2 Noțiuni teoretice

### 2.1 Implementarea în spațiul stărilor de tipul 1

Ecuatiile care definesc implementarea în spațiul stărilor tip I sunt prezentate în Fig. 1, pentru un sistem IIR de ordinul 3.

Realizarea sistemului conform acestor ecuații este în Fig. 2.

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \left[ (b_3 - b_0 a_3) (b_2 - b_0 a_2) (b_1 - b_0 a_1) \right] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n]$$

Figure 1: Ecuațiile de implementare în spațiul stărilor tip I, pentru un sistem IIR de ordinul 3

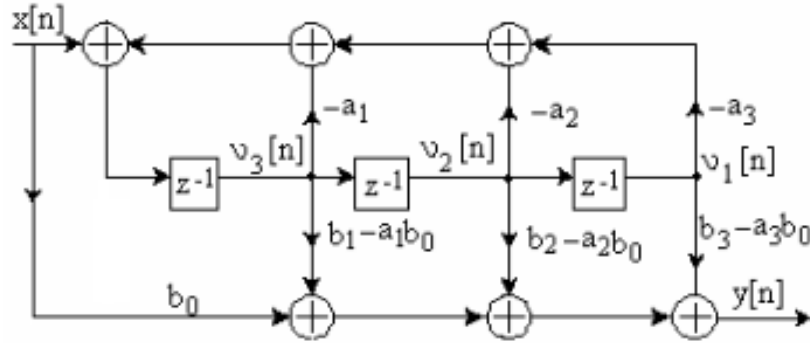


Figure 2: Realizarea sistemului conform ecuațiilor de mai sus (tip I, ordinul 3)

## 2.2 Implementarea în spațiul stărilor de tipul 2

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n]$$

Figure 3: Ecuațiile implementării în spațiul stărilor tip II, pentru un sistem IIR de ordinul 3

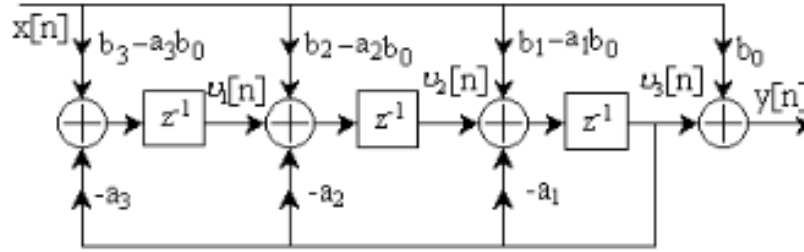


Figure 4: Realizarea sistemului conform ecuațiilor de mai sus (tip II, ordinul 3)

Ecuațiile care definesc implementarea în spațiul stărilor tip I sunt prezentate în Fig. 3, pentru un sistem IIR de ordinul 3.

Realizarea sistemului conform acestor ecuații este în Fig. 4.

## 2.3 Ecuații pentru cazul general

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n]$$

Figure 5: Ecuațiile generale în spațiul stărilor

În cazul general, întotdeauna avem cele două ecuații din Fig. 5:

- **Ecuația de stare:** dă starea  $\mathbf{v}[n+1]$  la momentul următor în funcție de starea la momentul curent  $\mathbf{v}[n]$  și intrarea curentă  $x[n]$
- **Ecuație de ieșire:**  $y[n]$  ieșirea la momentul curent în funcție de starea la momentul curent  $\mathbf{v}[n]$  și intrarea curentă  $x[n]$ .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

Figure 6: Definiția termenilor pentru spațiul stărilor tip I

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

Figure 7: Definiția termenilor pentru spațiul stărilor tip II

Particularizarea termenilor care apar în cele două ecuații, pentru tipul I și tipul II, este dată în Fig. 6 și Fig. 7.

### 3 Exerciții teoretice

1. Fie sistemul IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

- a. Să se implementeze sistemul în spațiul stărilor tip I și tip II.
- b. Calculați primele 5 valori ale răspunsului la treaptă, pentru condițiile inițiale

$$v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Fie sistemul descris în spațiul stărilor de următoarele ecuații:

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.81 & 1 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-1.81 \quad 1] v[n] + x[n]$$

- a. Determinați funcția de transfer a circuitului

- b. Calculați primele 5 valori ale răspunsului la treaptă, pentru condițiile inițiale  $v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- c. Reprezentați implementarea în spațiul stărilor (I și II) și în forma directă II.

## 4 Exerciții practice

3. Utilizați utilitarul `fdatool` pentru a proiecta unul din filtrele următoare:
  - a. Un filtru trece-jos IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu frecvența de tăiere de 5kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz;
  - b. Un filtru trece-sus IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu frecvența de tăiere de 1kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz;
  - c. Un filtru trece-bandă IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu banda de trecere între 700Hz și 4kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz.

Exportați coeficienții în Workspace-ul Matlab.

4. În Matlab implementați o funcție `filter_spst(b, a, x)` care filtrează un semnal  $x$  cu filtrul definit de coeficienții  $b$  și  $a$ , de orice ordin  $n$ .
  - Implementarea va fi realizată conform ecuațiilor de tip spațiul stărilor I
5. Testați funcția realizată mai sus coeficienții obținuți la exercițiul 3), pentru un semnal audio oarecare.
6. Modificați funcția pentru a face filtrarea temporală a unei secvențe video, pentru un filtru de ordinul trei. Testați funcția pe secvența video `veh_small.mp4`.

Pentru prelucrarea unei secvențe video în Matlab puteți folosi următorul exemplu:

```
v = VideoReader('videofile.mp4');

% Read all the frames from the video, one frame at a time.

while hasFrame(v)
    frame = readFrame(v);

    % Do the processing here
end
```

## 5 Întrebări finale

1. TBD