

Implementarea în spațiul stărilor a filtrelor digitale IIR

Laborator 9, PSS

Table of contents

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Obiectiv | 1 |
| 2 | Noțiuni teoretice | 1 |
| 2.1 | Implementarea în spațiul stărilor de tipul 1 | 1 |
| 2.2 | Implementarea în spațiul stărilor de tipul 2 | 3 |
| 2.3 | Ecuatii pentru cazul general | 3 |
| 3 | Exerciții teoretice | 4 |
| 4 | Exerciții practice | 5 |
| 5 | Întrebări finale | 6 |

1 Obiectiv

Familiarizarea studenților cu formele de implementare tip în spațiul stărilor a filtrelor IIR.

2 Noțiuni teoretice

2.1 Implementarea în spațiul stărilor de tipul 1

Ecuatiile care definesc implementarea în spațiul stărilor tip I sunt prezentate în Fig. 1, pentru un sistem IIR de ordinul 3.

Realizarea sistemului conform acestor ecuații este în Fig. 2.

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \left[(b_3 - b_0 a_3) (b_2 - b_0 a_2) (b_1 - b_0 a_1) \right] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n]$$

Figure 1: Ecuațiile de implementare în spațiul stărilor tip I, pentru un sistem IIR de ordinul 3

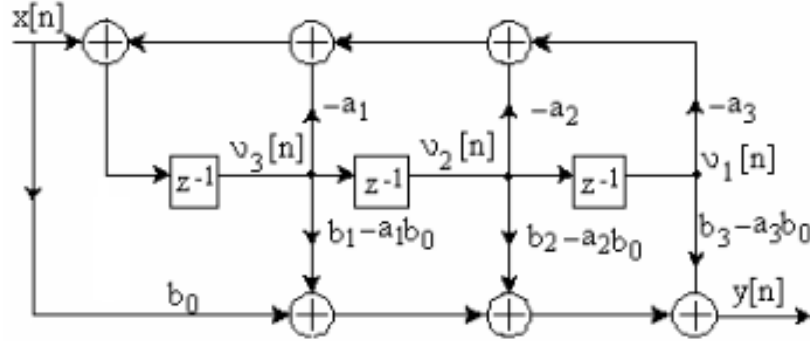


Figure 2: Realizarea sistemului conform ecuațiilor de mai sus (tip I, ordinul 3)

2.2 Implementarea în spațiul stărilor de tipul 2

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \\ v_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_3 - b_0 a_3) \\ (b_2 - b_0 a_2) \\ (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n]$$

Figure 3: Ecuațiile implementării în spațiul stărilor tip II, pentru un sistem IIR de ordinul 3

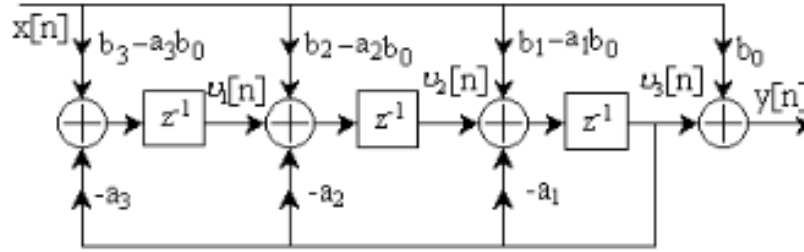


Figure 4: Realizarea sistemului conform ecuațiilor de mai sus (tip II, ordinul 3)

Ecuațiile care definesc implementarea în spațiul stărilor tip I sunt prezentate în Fig. 3, pentru un sistem IIR de ordinul 3.

Realizarea sistemului conform acestor ecuații este în Fig. 4.

2.3 Ecuații pentru cazul general

$$\mathbf{v}[n+1] = \mathbf{F}\mathbf{v}[n] + \mathbf{q}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{g}^t \mathbf{v}[n] + dx[n]$$

Figure 5: Ecuațiile generale în spațiul stărilor

În cazul general, întotdeauna avem cele două ecuații din Fig. 5:

- **Ecuația de stare:** dă starea $\mathbf{v}[n+1]$ la momentul următor în funcție de starea la momentul curent $\mathbf{v}[n]$ și intrarea curentă $x[n]$
- **Ecuație de ieșire:** $y[n]$ ieșirea la momentul curent în funcție de starea la momentul curent $\mathbf{v}[n]$ și intrarea curentă $x[n]$.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

Figure 6: Definiția termenilor pentru spațiul stărilor tip I

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ \vdots \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad d = b_0$$

Figure 7: Definiția termenilor pentru spațiul stărilor tip II

Particularizarea termenilor care apar în cele două ecuații, pentru tipul I și tipul II, este dată în Fig. 6 și Fig. 7.

3 Exerciții teoretice

1. Fie sistemul IIR cu funcția de sistem

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2} + 0.5z^{-3}}$$

- a. Să se implementeze sistemul în spațiul stărilor tip I și tip II.
- b. Calculați primele 5 valori ale răspunsului la treaptă, pentru condițiile inițiale

$$v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Fie sistemul descris în spațiul stărilor de următoarele ecuații:

$$v[n+1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.81 & 1 \end{bmatrix} v[n] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [-1.81 \quad 1] v[n] + x[n]$$

- a. Determinați funcția de transfer a circuitului

- b. Calculați primele 5 valori ale răspunsului la treaptă, pentru condițiile inițiale $v[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- c. Reprezentați implementarea în spațiul stărilor (I și II) și în forma directă II.

4 Exerciții practice

1. Utilizați utilitarul `fdatool` pentru a proiecta unul din filtrele următoare:
 - a. Un filtru trece-jos IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu frecvența de tăiere de 5kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz;
 - b. Un filtru trece-sus IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu frecvența de tăiere de 1kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz;
 - c. Un filtru trece-bandă IIR de ordin 4, de tip eliptic, cu banda de trecere între 700Hz și 4kHz la o frecvență de eșantionare de 44.1kHz.

Exportați coeficienții în Workspace-ul Matlab.

2. Completați programul de mai jos pentru a face filtrarea temporală a unei secvențe video, cu filtrul proiectat mai sus. Testați funcția pe secvența video `veh_small.mp4`.

Folosiți ecuațiile de implementare în spațiul stărilor tip I, dar extinse pentru un sistem de ordinul 4.

```
v = VideoReader('videofile.mp4');

% Read all the frames from the video, one frame at a time.

while hasFrame(v)
    frame = readFrame(v);

    % Do the processing heres

    % Output equation
    y = ...

    % State equation
    v1_next = ...
    v2_next = ...
    v3_next = ...
    v4_next = ...

    % Update for next iteration
```

```
v1 = v1_next;  
v2 = v2_next;  
v3 = v3_next;  
v4 = v4_next;
```

```
end
```

3. În Matlab implementați o funcție `filter_spst(b, a, x)` care filtrează un semnal `x` cu filtrul definit de coeficienții `b` și `a`, de orice ordin n .
 - Implementarea va fi realizată conform ecuațiilor de tip spațiul stărilor I
4. Testați funcția realizată mai sus coeficienții obținuți la exercițiul 3), pentru un semnal audio oarecare.

5 Întrebări finale

1. TBD