# Разложение на множители в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$. Однородные системы линейных уравнений

М.Д. Малых, РУДН

28 ноября 2022 г.

## Содержание



## 1. Разложение на множители в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$

Кольцо $k[x_1, \dots, x_n]$ не является кольцом главных идеалов, тем не менее теорему об однозначном разложении на множители мы можем перенести и на это кольцо. Дело в том, что мы можем рассмотреть многочлены из $k[x_1, \dots, x_n]$ как многочлены из $K[x_n]$, где $K$ — поле частных кольца

$k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. В кольце $K[x_n]$ разложение на многочлены определено с точностью до множителей из $K$. При этом справедлив аналог леммы Гаусса.

**Теорема 1** (лемма Гаусса)**.** Пусть $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и простой многочлен $p \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ делит все коэффициенты произведения $fg$, то все коэффициенты $f$ или $g$ делятся на $p$.

**Теорема 2.** Всякий многочлен из $k[x_1, \ldots, x_n]$ можно представить в виде произведения простых многочленов этого кольца. Это представление определено однозначно с точностью до выбора мультипликативной константы из поля $k$.

*Доказательство.* Воспользуемся математической индукцией по числу переменных $n$. При $n = 1$ теорема была доказана ранее. Допустим, что она верна для $n - 1$ переменной и докажем ее для $n$ переменных.

Пусть $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Разложим его на простые множители над $K[x_n]$:

$$f = gp_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}.$$

Здесь $p_1, \ldots, p_s$ — простые многочлены над $K[x_n]$, а $g$ — мультипликативная «константа», то есть элемент поля $K$. Приводя коэффициенты $p_1, \ldots, p_s$ к общему знаменателю и меняя должным образом $g$, мы добьемся того, что они станут элементами кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$. Поскольку $g \in K$, ее можно представить в виде $g = g'/g''$, где $g', g'' \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Поэтому

$$fg'' = g'p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s}.$$

По предположению индукции $g', g''$ можно разложить на простые множители в кольце $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

Если степень $g''$ больше нуля, то всякий простой многочлен, входящий в его разложение на простые множители, должен делить все коэффициенты одного из простых многочленов $p_1, \ldots, p_s$. После сокращения на такие множители, мы получим

$$f = g'p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s},$$

где $g' \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Многочлены $p_1, \dots, p_s$ не разлагаются на множители меньшей степени в кольце $K[x_n]$ и тем более в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$. Поэтому они являются простыми многочленами кольца $k[x_1, \dots, x_n]$. Раскладывая $g' \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ на простые множители, получим представление $f$ в виде произведения простых многочленов кольца $k[x_1, \dots, x_n]$ и мультипликативной константы из $k$.

Разложение на простые множители в кольце $K[x_n]$ определено однозначно с точностью до множителя из $K$. Этот множитель принадлежит $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ в силу леммы Гаусса и его разложение на простые множители определено с точностью до мультипликативной константы из $k$ по предположению индукции. $\square$

В Sage реализован алгоритм разложения многочленов из $k[x, y, \dots]$ для $k = \mathbb{Q}$ и $k = \mathrm{GF}(p)$, но не для $k = \mathbb{C}$. Напр.,

```
sage: var("x,y")
(x, y)
sage: QQ[x,y](x^2-4*y^2).factor()
(x - 2*y) * (x + 2*y)
sage: GF(2)[x,y](x^5-4*y^2).factor()
x^5
```

Как и в случае одной переменной, для однозначности разложения

$$f = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}.$$

принимают

$$\mathrm{lt}(p_i) = 1, \quad c = \mathrm{lt}(f).$$

Разложение над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ заблокировано, выдается ошибка: Provably correct factorization not implemented. Вместо них можно использовать поля алгебраических чисел. Делать это следует с осторожностью, поскольку система не всегда понимает, что алгебраическое число равно нулю.

На практике, особенно, при работе над $\overline{\mathbb{Q}}$, часто используют критерий Эйзенштейна.

**Теорема 3** (критерий Эйзенштейна)**.** Если

$$a_n y^n + \ldots a_0 \in k[x, y]$$

и $a_n$ обращается в нуль в точке $x = p \in k$, $a_{n-1}, \ldots, a_0$ обращаются в нуль в точке $x = p$, причем $a_0$ — с кратностью 1, то многочлен простой.

Линии на плоскости $xy$, заданные простыми многочленами, называют неприводимыми.

**Пример 1.** Многочлен

$$y^m + a_n x^n + \cdots + a_0$$

является простым в $\mathbb{C}[x, y]$, если

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

имеет хотя бы один простой корень (корень кратности 1). Напр., многочлен

$$y^2 - a(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad a, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}, \quad e_i \neq e_j,$$

является простым, а уравнение

$$y^2 = a(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

задает неприводимую кривую на плоскости $(x, y)$, которую называют эллиптической кривой.

## 2. Рациональные функции многих переменных

Рациональными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$ называют элементы поля частных кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$. Рациональную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов, именуемых числителем и знаменателем. Всюду далее предполагается, что числитель и знаменатель сокращены на общие множители.

**Теорема 4.** Числитель и знаменатель рациональной функции из поля частных кольца $k[x_1, \dots, x_n]$ определены с точностью до выбора мультипликативной константы из $k$.

*Доказательство.* Равенство

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$$

означат, что

$$gh' = g'h.$$

Разложим знаменатель на простые множители:

$$h = cp_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}.$$

Если $h$ делится на многочлен $p_i^{m_i}$, то на эту степень делится и $gh'$. Но $g$ не может иметь общих множителей с $h$, поэтому $h'$ делится на $p_i^{m_i}$. Поэтому

$$h' = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s} h'', \quad h'' \in k[x_1, \dots, x_n].$$

Но тогда

$$gh'' = g'c.$$

Многочлен $h''$ не может иметь общих множителей с $g'$, поэтому он сводится к константе из $k$. □

Если имеется список из нескольких рациональных функций, то их можно привести к общему знаменателю, то есть представить в виде

$$\frac{g_1}{h}, \dots, \frac{g_r}{h},$$

при этом знаменатель будет определен с точностью до выбора мультипликативной константы.

## 3. Определитель произведения матриц

Пусть имеется квадратная матрица $A$ размера $n \times n$. Рассмотрим ее элементы $a_{ij}$ как символьные переменные. Тогда в поле частных кольца

$K = k[a_{11}, \dots]$ можно найти обратную матрицу $A^{-1}$, элементы которой будут рациональными функциями $a_{11}, \dots$. Элементы обратной матрицы можно привести к общему знаменателю и записать в виде

$$\frac{a'_{ij}}{f}, \quad b_{ij}, f \in k[a_1 1, \dots].$$

Знаменатель $f$ определен с точностью до мультипликативной константы. Примем для ее определения, что $f(E) = 1$. В этом случае знаменатель будем называть определителем матрицы $A$ и писать $\det A$. При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A',$$

где $a_{ij} \in k[a_1 1, \dots]$

**Пример 2.** Для матриц $2 \times 2$ имеем

```
sage: a=var("a11,a12,a21,a22")
sage: F=FractionField(QQ[a])
sage: A=matrix(F,2,2,a)
sage: A^(-1)
[    a22/(-a12*a21 + a11*a22) (-a12)/(-a12*a21 + a11*
   a22)]
[(-a21)/(-a12*a21 + a11*a22)     a11/(-a12*a21 + a11*
   a22)]
sage: (A^(-1)).denominator()
-a12*a21 + a11*a22
```

Таким образом,

$$\det A = c(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Определяем константу $c$:

$$1 = \det E = c(1 - 0) = c.$$

Поэтому

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Рассмотрим еще одну матрицу $B$, элементы которой $b_{ij}$ будем тоже считать символьными переменными. Перейдем в поле частных кольца $k[a_{11}, \ldots, b_{11}, \ldots]$. По определению,

$$E = (AB)^{-1}AB.$$

Умножим это равенство слева на $B^{-1}$, а потом на $A^{-1}$:

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}ABB^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}A(BB^{-1})A^{-1} = (AB)^{-1}AA^{-1} = (AB)^{-1}.$$

Таким образом,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Это позволяет весьма просто получить формулу для определителя произведения матриц.

Знаменателем $(AB)^{-1}$ служит $\det AB$, знаменателем $B^{-1}A^{-1}$ — $\det A \det B$. Поскольку знаменатель определен с точностью до мультипликативной константы,

$$\det AB = c \det A \det B.$$

Полагая в это равенство $A = B = E$, имеем $c = 1$. Отсюда

$$\det AB = \det A \det B. \tag{1}$$

Определитель задает полиномиальную функцию, которая отображает множество матриц $n \times n$ в поле $k$ и согласована с одним умножением.

*Замечание.* Представленное доказательство предполагает, что знаменатели дробей, стоящих слева и справа в

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

не имеют общих множителей с числителем. Для правой части это сразу следует из нашего определения определителя. Рассмотрим внимательнее левую часть

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}C',$$

где $C'$ — матрица, элементами которой служат многочлены от $a_{ij}$ и $b_{ij}$. Допустим, что $\det(AB) = f \cdot g$ и $C'$ можно сократить на $f$:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{g} C'', \quad c''_{ij} \in k[a_{11}, \dots b_{nn}].$$

Многочлен $f$ должен быть отличен от константы, допустим, что он зависит от $a_{ij}$, не исключая того, что он зависит от $a_{ij}$ и $b_{ij}$. Перейдем к кольцо многочленов от $a_{ij}$ над кольцом $k[b_{11}, \dots]$. Многочлен $\det AB$ получатся из $\det A$ путем замены $a_{ij}$ на

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}.$$

При этом всякий моном превращается в сумму мономов той же степени. Следовательно, степень $\det AB$ как многочлена относительно $a_{ij}$ совпадет со степенью многочлена $\det A$, а степень многочлена $g$ — меньше степени $\det A$. Подставив в

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{g} C''$$

единичную матрицу вместо $B$, видим, что

$$A^{-1} = \frac{1}{g|_{B=E}} C''', \quad c'''_{ij} \in k[a_{11}, \dots, a_{nn}],$$

то есть степень знаменателя в обратной матрице $A^{-1}$ меньше, чем степень $\det A$, что невозможно.

Существование такого отображения весьма нетривиально. Дело в том, что кольцо матриц не является коммутативным, а поле $k$ — является, поэтому

$$AB \neq BA,$$

но

$$\det AB = \det BA = \det A \det B.$$

Относительно сложения кольцо матриц коммутативно, но с ним это отображение не согласовано:

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B.$$

Доказанная формула имеет важное следствие.

**Теорема 5.** Матрица $A$ имеет обратную в том и только в том случае, когда ее определитель отличен от нуля.

*Доказательство.* Из

$$AA^{-1} = E$$

следует, что

$$\det A \det A^{-1} = 1.$$

Поэтому обратимая матрица не может иметь нулевой определитель. Если $\det A \neq 0$, то, как отмечалось несколько лекций назад, матрица обратима. □

## 4. Резольвента матрицы

Если определитель матрицы $A$ равен нулю, мы не можем найти обратную к ней, но можем ее немного подправить и рассмотреть

$$R = (A - \lambda E)^{-1}$$

при $\lambda \to 0$.

Пусть $A$ — квадратная матрица $n \times n$ над полем $k$, введем символьную переменную $\lambda$ и рассмотрим выражение

$$R = (A - \lambda E)^{-1},$$

которое называют резольвентой матрицы $A$. Элементами этой матрицы будут рациональные функции $\lambda$, общим знаменателем которых будет $\det(A - \lambda E)$. Корни уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

называют собственными значениями (eigenvalue) матрицы $A$ в поле $k$.

Пусть $\lambda = e$ — собственное значение, то в силу теоремы 5 матрица $A - eE$ не обратима, поэтому среди элементов $r_{ij}$ хотя бы один обращается в $\infty$ при подстановке $\lambda = e$. При этом в разложении

$$\det(A - \lambda E)$$

на простые множители обязательно есть линейный $\lambda - e$. Пусть $m$ — его кратность.

Разложение функций $r_{ij}$ на простейшие дроби представляет собой сумму 1.) дроби

$$\frac{b_{ij}}{(\lambda - e)^m},$$

где $b_{ij} \in k$ и среди них есть отличные от нуля, 2.) правильных дробей, знаменателями которых служат меньшие степени $(\lambda - e)$ или другие простые многочлены, которые не обращаются в нуль при $\lambda = e$, и 3.) некоторого многочлена. В таком случае

$$(\lambda - e)^m r_{ij}$$

не имеет особенности при $\lambda = e$. Слагаемые вида

$$(\lambda - e)^s f,$$

где $s > 0$, а $f$ не обращается в нуль при $\lambda = e$, равны нулю при $\lambda = e$. Поэтому

$$(\lambda - e)^m R|_{\lambda = e} = B.$$

Если $k$ — поле рациональных, вещественных или комплексных чисел, то последнее равенство можно записать в виде

$$\lim_{\lambda \to e} (\lambda - e)^m R = B \neq 0.$$

С другой стороны, из

$$(A - \lambda E)R = E$$

следует

$$(A - \lambda E)(\lambda - e)^m R = (\lambda - e)^m E$$

Откуда при $\lambda = e$ получается

$$(A - eE)B = 0.$$

Это означает, что $A - eE$ является делителем нуля. В частности при $e$, равным нулю, мы имеем важную теорему.

**Теорема 6.** Если определитель матрицы равен нулю, то она является делителем нуля.

Используя теорему 5, мы можем выразить сказанное и без отсылки к определителям.

**Теорема 7.** Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не является делителем нуля.

## 5. Матричная запись систем линейных уравнений

Мы ввели умножение матриц по правилу строка на столбец. При этом линейный однородный многочлен

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

можно записать как произведение строки

$$(a_1, \ldots a_n)$$

на столбец

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \ldots$$

можно записать в матричном виде

$$Ax = b.$$

При этом, разумеется, $A$ называют матрицей системы, а $b$ — столбцом правых частей. Заметим еще, что столбцы часто называют векторами.

Эти обозначения особенно удобны, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных, а матрица системы является квадратной. Рассмотрим этот случай подробнее.

Если матрица обратима, то $A^{-1}A = E$ и поэтому уравнение

$$Ax = b$$

эквивалентно

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

В силу ассоциативности умножения матриц, это уравнение можно переписать в виде

$$x = A^{-1}b.$$

**Теорема 8.** Если матрица системы линейных уравнений обратима, то система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти по формуле

$$x = A^{-1}b.$$

Не следует думать, что эта теорема дает альтернативный способ решения системы линейных уравнений. Для отыскания $A^{-1}$ все равно придется решать систему линейных уравнений, причем более сложную. Важным здесь является указание на единственность решения.

## 6. Однородные системы линейных уравнений

**Определение 1.** Система линейных уравнений с нулевым столбцом правых частей называется однородной.

Всякую однородную систему можно записать в виде

$$Ax = 0.$$

Одно ее решение — $x = 0$ — очевидно, его называют тривиальным.

Если число уравнений совпадает с числом неизвестных и матрица системы обратима, то в силу теоремы 8 однородная система имеет только тривиальное решение.

Если же матрица системы линейных уравнений не имеет обратной, то в силу теоремы 7 эта матрица является делителем нуля, то есть существует такая ненулевая матрица $B$, что

$$AB = 0.$$

Матрицы умножаются по правилу строка на столбец, поэтому для любого столбца $b$ матрицы $B$ верно

$$Ab = 0$$

В ненулевой матрице $B$ есть ненулевой столбец $b$. Поэтому система линейных имеет нетривиальное решение.

**Теорема 9.** Однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда матрица этой системы необратима.

Эта теорема полезна при решении задач с параметром.

**Пример 3.** При каких комплексных значениях параметра $t$ система однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + tx_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + tx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения? — Для отыскания этих значений нужно составить определитель матрицы системы и приравнять его нулю:

```
sage: var("t")
t
sage: matrix([[t,1,2],[1,t,-3],[1,t,1]]).det()
4*t^2 - 4
sage: ZZ[t](matrix([[t,1,2],[1,t,-3],[1,t,1]]).det()
  ).roots(QQbar)
```

```
[(-1, 1), (1, 1)]
```

Таким образом, у нас два подходящих значения и оба рациональные: $t = \pm 1$.

Проверим это по методу Гаусса. Зададим систему:

```
sage: x=var("x1,x2,x3")
sage: K=QQ[x]
sage: eqs=[t*x1 + x2 + 2*x3, x1 + t*x2 - 3*x3, x1 +
   t*x2 + x3]
```

При $t = \pm 1$ ранг системы равен 2:

```
sage: triangulation([K(eq.subs(t=1)) for eq in eqs])
[x1 + x2 + 2*x3, -5*x3]
sage: triangulation([K(eq.subs(t=-1)) for eq in eqs
   ])
[-x1 + x2 + 2*x3, x3]
```

Мы утверждаем, что при других значениях ранг будет равен 3. Напр.,

```
sage: triangulation([K(eq.subs(t=0)) for eq in eqs])
[x1 - 3*x3, x2 + 2*x3, 4*x3]
sage: triangulation([K(eq.subs(t=2)) for eq in eqs])
[2*x1 + x2 + 2*x3, 3*x2 - 8*x3, 24*x3]
```

Подобного рода задачи с параметром можно решать и без теории определителей.

**Пример 4.** Попытаемся исследовать по методу Гаусса при каких комплексных значениях параметра $t$ система однородных линейных уравнений

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + tx_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + tx_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения. Для этого перейдем в поле частных кольца $\mathbb{Q}[t]$:

```
sage: Kt=FractionField(QQ[t])[x]
sage: triangulation([Kt(eq) for eq in eqs])
[t*x1 + x2 + 2*x3, (t^2 - 1)*x2 + (-3*t - 2)*x3, (4*
  t^3 - 4*t)*x3]
```

По последнему уравнению в треугольной форме видно, что система будет иметь нетривиальное решение, если

$$4t^3 - 4t = 0.$$

Таким образом, к двум правильным корням добавляется один лишний — $t = 0$.

Множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным пространством. В самом деле, пусть $u$ и $v$ — два нетривиальных решения системы $Ax = 0$. Тогда

$$Au = Av = 0.$$

Но тогда для любой их линейной комбинации верно

$$A(au + bv) = aAu + bAv = 0 \quad \forall a, b \in k.$$

Чтобы задать множество решений однородной системы достаточно указать такие столбцы, чтобы любое решение можно было представить как их линейную комбинацию.

Применяя метод Гаусса, мы выразим часть неизвестных через $r$ переменных, которые нельзя определить. Это число мы условились называть размерностью множества решений. Придавая одной из этих $r$ переменных значение 1, а остальным 0, мы получим $r$ решений (базис пространства решений). Всякое другое решение является их линейной комбинацией.

Дабы не писать много индексов проиллюстрируем сказанное так. Пусть $n = 4$ и переменные $x_1, x_3$ выражаются линейно через $x_2, x_4$:

$$x_1 = \alpha x_2 + \beta x_4, \quad x_3 = \gamma x_2 + \delta x_4.$$

В матричном виде эти формулы можно записать так

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_2 + \beta x_4 \\ x_2 \\ \gamma x_2 + \delta x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, линейное пространство решений можно представить как линейную комбинацию двух векторов. Эти два вектора — линейно независимы: равенство

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

ведет к $0 = 1$ на 2 и 4 координате.

## 7. Задача на собственные значения

Теория матриц развивалась параллельно с высшей алгеброй, поэтому понятие собственного значения традиционно вводится несколько иначе.

**Определение 2.** Значение параметра $\lambda$, при котором существует такой ненулевой столбец $b$, что

$$Ab = \lambda b,$$

называют собственным значением матрицы $A$. При этом сам столбец называют собственным вектором (eigenvector) матрицы $A$.

Уравнение

$$(A - \lambda E)x = 0$$

является однородным. Поэтому оно имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда параметр $\lambda$ является корнем определителя $\det(A - \lambda E)$.

**Пример 5.** Найдем собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

```
sage: A=matrix(QQ,3,3,[1,4,6,-2,4,5,1,9,3])
sage: E=matrix(QQ,3,3,lambda i,j: i==j)
sage: var('t')
t
sage: f=ZZ[t](det(A-t*E))
sage: f.roots(QQ)
[]
sage: f.roots(AA)
[(-4.267598403015582?, 1), (3.089080940178540?, 1), (9.17851746283705?, 1)]
sage: f.roots(QQbar)
[(-4.267598403015582?, 1), (3.089080940178540?, 1), (9.17851746283705?, 1)]
```

Как видно, матрица имеет 3 собственных значения и все они вещественные.

Найдем собственные векторы, соответствующие первому собственному значению:

```
sage: e=[a for (a,b) in f.roots(AA)]
sage: e[0]
-4.267598403015582?
sage: e[0].radical_expression()
-1/2*(1/18*I*sqrt(362837)*sqrt(3) - 515/54)^(1/3)*(-I*sqrt(3) + 1) - 68/9*(I*sqrt(3) + 1)/(1/18*I*sqrt(362837)*sqrt(3) - 515/54)^(1/3) + 8/3
```

Зададим столбец $x$ и составим систему линейных уравнений $Ax = e_1x$:

```
sage: x=var("x1,x2,x3")
sage: matrix(3,1,x)
[x1]
[x2]
[x3]
sage: eqs=((A-e[0]*E)*matrix(3,1,x)).list()
sage: eqs
[5.267598403015582?*x1 + 4*x2 + 6*x3, -2*x1 +
  8.26759840301559?*x2 + 5*x3, x1 + 9*x2 +
  7.267598403015582?*x3]
```

Коэффициенты этой системы — алгебраические числа. Поэтому далее будем искать решение в поле $\mathbb{A}$.

```
sage: K=AA[x]
sage: triangulation([K(eq) for eq in eqs])
[5.267598403015582?*x1 + 4*x2 + 6*x3,
  51.55038814449905?*x2 + 38.33799201507791?*x3]
```

Система смогла понять, что третье уравнение — тривиальное $0 = 0$. Иногда возникают трудности с пониманием того, что алгебраическое число является чистым нулем. В итоге, $x_3$ — любое, а $x_1$ и $x_2$ выражаются через него линейно:

```
sage: tsolve(triangulation([K(eq) for eq in eqs]))
{x2: -0.7436993860766684?*x3, x1:
  -0.5743039283255660?*x3}
```

Если взять $x_3 = 1$, мы получим собственный вектор с со следующими координатами:

```
sage: tsolve(triangulation([K(eq) for eq in eqs]+[K(
  x3-1)]))
{x3: 1, x2: -0.7436993860766684?, x1:
```

```
-0.5743039283255660?}
```

Для проверки, превратим его в столбец:

```
sage: S=tsolve(triangulation([K(eq) for eq in eqs]+[
  K(x3-1)]))
sage: b=matrix(3,1,[xx.subs(S) for xx in x])
sage: b
[-0.5743039283255660?]
[-0.7436993860766684?]
[                   1]
sage: A*b-e[0]*b
[0]
[0]
[0]
```

Поскольку в прикладных задачах вычислять собственные значения приходится весьма часто, в Sage имеются встроенные функции для ее решения.

**Пример 6.** Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

можно найти при помощи встроенной функции

```
sage: A.eigenvalues()
[-4.267598403015582?, 3.089080940178540?,
  9.17851746283705?]
```

Она ищет собственные значения в поле алгебраических чисел. Можно найти сразу собственные значения и собственные векторы:

```
sage: A.right_eigenvectors()
```

```
[(-4.267598403015582?, [(1, 1.294957860109002?,
  -1.741238307241932?)], 1), (3.089080940178540?,
  [(1, -0.10695908596272299?, 0.4194862140049053?)],
   1), (9.17851746283705?, [(1, 0.5657325691373035?,
   0.9859311977146387?)], 1)]
```

Встроенная функция возвращает список. Каждый его элемент в свою очередь тоже является списком, первый элемент — собственное значение (алгебраическое число), второй элемент — список из собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, третий элемент — размерность пространства решений. Разумеется указываются не все собственные векторы (над $\mathbb{C}$ их бесконечно много), а базис пространства решений системы $Ax = ex$. Как уже отмечалось выше, число элементов в базисе совпадает с размерностью.

## 8. Задания

Теоретические вопросы.

1) Сформулируйте лемму Гаусса для $\mathbb{Q}[x]$ и для $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.

2) Сформулируйте критерий Эйзенштейна для многочленов одной и двух переменных.

3) Сформулируйте теорему об определители произведения матриц. Почему определитель обратимой матрицы не может быть равен нулю?

4) Что такое резольвента матрица? Собственные значения? Собственные векторы?

5) Является ли необратимая матрица делителем нуля? Чему равен ее определитель?

Практические задания.

1) Разложите на множители $y^2 - 2x^2$ в кольцах a.) $\mathbb{Q}[x, y]$, b.) $\mathbb{C}[x, y]$, c.) $\overline{\mathbb{Q}}[x, y]$. В каком случае Sage выдает ошибку и почему?

2) Докажите, что многочлен $y^2 + x^3 + 2x + 3$ кольца $\mathbb{C}[x, y]$ является простым. Какое поле для коэффициентов следует выбрать в Sage?

3) При каких комплексных значениях параметра $t$ система

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + tx_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + x_2 + tx_3 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение? Для каждого из этих значений опишите пространство решений (размерность, базис).

4) При помощи встроенных функций найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

в поле вещественных чисел.

5) Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

в поле вещественных чисел. Ответ выразите в радикалах.