Линейные уравнения

М.Д. Малых, РУДН

13 сентября 2022 г.

Содержание

1. Линейное уравнение

Алгебра, в своем классическом понимании, — наука о решении уравнений. Простейшее из них — линейное.

Определение 1. Уравнение вида

$$ax = b,$$

где a, b принадлежат кольцу A и $a \neq 0$, а x — подлежащая определению неизвестная, называют линейным уравнением над кольцом A.

Замечание. Можно сказать, что линейное уравнение над A задается многочленом первой степени кольца $A[x]$.

Линейное уравнение

$$ax = b$$

над полем F всегда имеет и притом единственное решение, равное $x = a^{-1}b$. В случае колец ситуация становится много сложнее. Во-первых, совсем не факт, что уравнение имеет решение в A. Напр., линейное уравнение

$$2x = 1$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ не имеет решение в $\mathbb{Z}$. Во-вторых, пусть $x_1, x_2 \in A$ — два его решения, тогда

$$a(x_1 - x_2) = 0.$$

Отсюда, вообще говоря, не следует, что $x_1 = x_2$.

Определение 2. Элемент $a \neq 0$ кольца A называют делителем нуля, если существует такой элемент $b \neq 0$, что $ab = 0$.

Определение 3. Кольцо A, в котором нет делителей нуля, называют целостным (entire ring, integral domain).

Нетрудно видеть, что $\mathbb{Z}$ — целостное кольцо, всякое поле тоже лишено делителей нуля, однако свойство отсутствия делителей нуля сознательно не прописано в определении кольца, поскольку дальше кольца с делителями нуля появится.

Обычно решение уравнений с целыми коэффициентами ищут не в $\mathbb{Z}$, а в содержащем его поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Определение 4. Говорят, что кольцо A вложено в кольцо B, если

1) A является подмножеством B,

2) сумма и произведение двух элементов множества A не зависят от того, рассматриваются ли эти элементы как элементы кольца A или кольца B.

Определение 5. Поле F называют полем частных кольца (fraction field) A, если

1) кольцо A вложено в поле F,

2) всякий элемент поля является решением линейного уравнения вида

$$ax = b, \quad a, b \in A.$$

Пример 1. Кольцо $\mathbb{Z}$ вложено не только в $\mathbb{Q}$, но и в $\mathbb{Q}[t]$. Второй пункт определения 5 нужен для того, чтобы $\mathbb{Q}[t]$ не считалось полем частных $\mathbb{Z}$.

Пример 2. Кольцо $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ вложено в поле всех рациональных функций переменных $x_1, \ldots, x_n$, которое традиционно обозначается как $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$. Это множество является полем частных кольца $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$.

Функция `FractionField` позволяет задать поле частных для кольца, указанного в ее аргумента.

Для кольца $\mathbb{Z}$ имеем:

```
sage: FractionField(ZZ)
Rational Field
sage: FractionField(ZZ)==QQ
True
```

Для кольца $\mathbb{Z}[x]$ имеем:

```
sage: var("x")
x
sage: FractionField(QQ[x])
Fraction Field of Univariate Polynomial Ring in x
  over Rational Field
sage: 1/2*x in FractionField(QQ[x])
True
```

В Sage кольцо или поле, которому принадлежит заданный элемент, рассматривается как его родитель:

```
sage: 1/QQ[x](x)
```

```
1/x
sage: (1/QQ[x](x)).parent()
Fraction Field of Univariate Polynomial Ring in x
    over Rational Field
sage: (1/x).parent()
Symbolic Ring
```

Для существования поля частных необходимо, чтобы кольцо было целостным.

Теорема 1. Если кольцо A имеет делители нуля, его нельзя вложить в поле.

Доказательство. Допустим, что A можно вложить в поле F, но при этом имеются делители нуля, т.е. такие ненулевые элементы $a, \in A$, что $ab = 0$. Поле F должно содержать обратный к a элемент c, то есть $ac = 1$. Но тогда $0 = abc = b$, что невозможно. $\square$

2. Системы линейных уравнений

Пусть A — произвольное кольцо.

Определение 6. Уравнение $f = 0$, левая часть f которого является многочленом первой степени кольца $A[x_1, \dots, x_n]$, называется линейным уравнением над кольцом A с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$ или линейным уравнением из кольца $A[x_1, \dots, x_n]$.

Более развернуто, линейное уравнение — это уравнение вида

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ и b принадлежат кольцу A и среди $a_1, \dots, a_n$ имеются отличные от нуля. Часто для кратности мы будем говорить, что линейное уравнение принадлежит кольца $A[x_1, \dots, x_n]$, подразумевая, что это уравнение можно привести к виду $f = 0$, $f \in A[x_1, \dots, x_n]$.

Определение 7. Конечное множество уравнений из кольца $A[x_1, \ldots, x_n]$ будем системой уравнений.

В Sage система уравнений представляется как список уравнений или многочленов. Напр.,

```
sage: var("x,y")
(x, y)
sage: solve([x+y-1, x-y-2],[x,y])
[
[x == (3/2), y == (-1/2)]
]
sage: solve([x+y==1, x-y==2],[x,y])
[
[x == (3/2), y == (-1/2)]
]
```

Функция `solve(eqs,vars)` пришла в Sage из древних времен, она корректно решает системы линейных уравнений над $\mathbb{Q}$ и над кольцом символьных выражений `SR`, однако не умеет работать с другими кольцами.

Если A вложено в некоторое кольцо B, то мы можем говорить о значении многочлена из $A[x_1, \ldots, x_n]$ в любой точке, координаты которой принадлежат B.

Определение 8. Пусть A вложено в некоторое кольцо B. Точка $(c_1, \ldots, c_n)$, координаты которой принадлежат кольцу B, называется решением системы S линейных уравнений над A с неизвестными $x_1, \ldots x_n$, если каждое из уравнений системы обращается в нуль при подстановке $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$. Множество всех решений обозначается как $\mathrm{Sol}(S, B)$.

Решение систем линейных уравнений в $\mathbb{Q}$ входит в школьную программу.

Пример 3. Чтобы решить систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

из второго уравнения вычитают первое и получают систему «треугольного вида»

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ -2y = 1 \end{cases}$$

эквивалентную исходной. Из последнего уравнения находят $y = -1/2$, подставляют это значение в первое уравнение и получают $x - 1/2 = 1$, откуда находят x.

По существу решение осуществляет в два этапа: приведение к треугольному виду и решение треугольной системы. При этом первый этап делается в $\mathbb{Z}$, а второй — в $\mathbb{Q}$. Нам предстоит описать в общем виде, что такое треугольная система и что такое система, эквивалентная исходной.

3. Приведение линейной системы к треугольному виду

Определение 9. Система линейных уравнений $T = \{f_1, \dots, f_r\}$ из кольца $A[x_1, \dots, x_n]$ называется треугольной, если

$$\operatorname{lm}(f_1) > \operatorname{lm}(f_2) > \cdots > \operatorname{lm}(f_r).$$

Пример 4.
```
sage: var("x1,x2,x3,x4")
(x1, x2, x3, x4)
sage: K=ZZ[x1,x2,x3,x4]
sage: T=[x1+x2+2*x3-2,3*x3+x4]
```

Система T имеет треугольную форму, поскольку:

```
sage: [K(t).lm() for t in T]
[x1, x3]
```

```
sage: K(x1)>K(x3)
True
```

Определение 10. Две системы линейных уравнений S_1 и S_2 над кольцом A называются эквивалентными, если для любого кольца B, содержащего A, верно:

$$\mathrm{Sol}(S_1, B) = \mathrm{Sol}(S_2, B).$$

Мы дали это определение таким образом, что эквивалентность двух систем на зависит от B.

Теорема 2. Пусть S — система линейных уравнений над кольцом A. Если к одному из уравнений системы прибавить другое, умноженное на элемент кольца A, то получится система, эквивалентная исходной.

Доказательство. Пусть первое уравнение — это $f = 0$, а второе $g = 0$, а все прочие уравнения образуют систему S'. Тогда исходная система S_1 есть объединение $[f = 0, g = 0]$ и S', а полученная из нее система S_2 есть объединение $[f + ag = 0, g = 0]$, где $a \in A$, и S'.

Если точка c принадлежит $\mathrm{Sol}(S_1, B)$, то

$$f|_{x=c} = 0, \quad g|_{x=c} = 0, \quad h|_{x=c} = 0 \quad \forall h \in S'.$$

Но тогда

$$(f + ag)|_{x=c} = 0, \quad g|_{x=c} = 0, \quad h|_{x=c} = 0 \quad \forall h \in S',$$

то есть $c \in \mathrm{Sol}(S_2, B)$.

Если точка c принадлежит $\mathrm{Sol}(S_2, B)$, то

$$(f + ag)|_{x=c} = 0, \quad g|_{x=c} = 0, \quad h|_{x=c} = 0 \quad \forall h \in S'.$$

Но тогда

$$(f + ag - ag)|_{x=c} = 0, \quad g|_{x=c} = 0, \quad h|_{x=c} = 0,$$

то есть $c \in \mathrm{Sol}(S_1, B)$. Таким образом, вне зависимости от выбора B верно, что $\mathrm{Sol}(S_1, B) = \mathrm{Sol}(S_2, B)$. $\square$

Теорема 3. Пусть S — система линейных уравнений над целостным кольцом A. Если одно из уравнений умножить на элемент кольца A, то получится система, эквивалентная исходной.

Доказательство очевидно, но нужно подчеркнуть, что теорема верна только для целостных колец.

Теорема 4. Всякая линейная система над целостным кольцом или приводится к треугольному виду, или не имеет решения ни в одном из расширений этого кольца.

Мы дадим конструктивное доказательство теоремы 4. Пусть S — заданная система уравнений из $A[x_1, \dots, x_n]$, L, T — пока пустые множества уравнений. Будем преобразовывать систему по теоремам 2 и 3 так, чтобы исходная система была на каждом шаге эквивалентна объединению S, а в конце S оказалось пустым, а T — треугольной системой. L будет вспомогательным множеством.

Один шаг опишем так. Пусть $T + S$ эквивалентно исходной системе и T пусто или

$$\operatorname{lm}(f) < \operatorname{lm}(t) \quad \forall f \in S,\, t \in T.$$

Прежде всего найдем

$$m = \max_{f \in S} \operatorname{lm}(f)$$

и положим

$$L = \{f \in S : \quad \operatorname{lm}(f) = m\}, \quad S = \{f \in S : \quad \operatorname{lm}(f) < m\}$$

Тогда исходной системе эквивалентно система $T + L + S$. Пусть для определенности

$$L = (g_1, \dots, g_k).$$

Добавим первый элемент g_1 множества L к T, что не меняет треугольной формы этого множества, поскольку

$$m < \operatorname{lm}(t) \quad \forall t \in T.$$

Переберем теперь все оставшиеся g из L. Поскольку

$$g_i = \mathrm{lc}(g_i)m + \dots$$

разность

$$g_i' = \mathrm{lc}(g_1)g_i - \mathrm{lc}(g_i)g_1$$

не содержит монома m, т.е.

$$\mathrm{lm}(g_i') < m.$$

Если степень g_i' равна -1, то этот многочлен сводится к 0, что дает тривиальное уравнение $0 = 0$, которое мы просто отбросим. Если степень g_i' равна 0, то это дает уравнение вида $1 = 0$, которое не может иметь решения, поскольку A — целостное кольцо. Если же степень равна 1, то получается линейное уравнение. Добавим его к списку S. Сделав это со всеми g из L, мы получим два множества $T \neq \emptyset$ и S, причем $T + S$ будет эквивалентна исходной и

$$\mathrm{lm}(f) < m \leq \mathrm{lm}(t) \quad \forall f \in S, t \in T.$$

Делая такие шаги мы будем каждый раз увеличивать T и уменьшать S хотя бы на один элемент. Поэтому за конечное число шагов мы придем к $S = \emptyset$ и тем самым приведем систему к треугольному виду.

Описанный алгоритм приведения произвольной системы к системе треугольного вида часто называют алгоритмом Гаусса. В Sage его можно реализовать в виде функции (см. алгоритм 1).

Замечание. Следует заметить, что в Sage степень многочлена 0 считается равной -1:

```
sage: var("x")
x
sage: QQ[x](x+1).degree()
1
sage: QQ[x](1).degree()
```

```
0
sage: QQ[x](0).degree()
-1
```

Рассмотрим несколько примеров.

Algorithm 1 Приведение системы линейных уравнений к треугольному виду (алгоритм Гаусса)

```
def triangulation(S):
    T=[]
    n=0
    while S!=[]:
        m=max([s.lm() for s in S])
        L = [s for s in S if s.lm() == m]
        S = [s for s in S if s.lm() < m]
        g1=L[0]
        T.append(g1)
        for g in L[1:]:
            g=g1.lc()*g-g.lc()*g1
            if g.degree()==0:
                T.append(g)
                break
            elif g.degree()==1:
                S.append(g)
    return T
```

Для систем над кольцом $\mathbb{Z}$:

```
sage: var("x,y,z")
(x, y, z)
sage: K=ZZ[x,y,z]
sage: triangulation([K(x+2*y+z-3),K(x+y),K(x+2*y+1)])
[x + 2*y + z - 3, -y - z + 3, -z + 4]
sage: triangulation([K(x+2*y+z-3),K(x+y),K(x+y+1)])
[x + 2*y + z - 3, -y - z + 3, -1]
```

```
sage: triangulation([K(x+2*y+z-3),K(x+y),K(x+y+x+2*y
  +z-3)])
[x + 2*y + z - 3, -y - z + 3]
```

Чтобы генерировать нетривиальные тестовые примеры в Sage, удобно использовать метод `random_element`, который возвращает случайный элемент того множества, к которому он применен.

Создадим список из 10 неизвестных:

```
sage: x=var(['x'+str(n) for n in range(10)])
sage: x
(x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9)
sage: K=QQ[x]
sage: K
Multivariate Polynomial Ring in x0, x1, x2, x3, x4,
  x5, x6, x7, x8, x9 over Rational Field
```

Создадим список из 10 линейных уравнений со случайными целыми коэффициентами:

```
sage: S=[K(sum([ZZ.random_element()*t for t in x]) +
   ZZ.random_element()) for tt  in x]
sage: S
[-x0 + x1 - x2 + x3 - 16*x4 - x5 + 7*x6 + 3*x7 - 8*
  x8 + x9 - 1, -5*x0 - x1 - 4*x2 - x3 + x4 - x5 - 2*
  x6 - 3*x7 - x8 + 2*x9 + 15, -x0 + x1 - x2 - x3 -
  2*x4 - x5 + 3*x6 - x7 + x8 - x9, x0 - 2*x1 - 27*x2
   + x5 + x6 - x7 - 3*x8 - 2*x9 - 1, -x0 - x1 - 2*x5
   - x6 + x8 - 2*x9, -x0 + 9*x1 + x2 - x3 - x5 + 2*
  x6 + 7*x7 - x9 - 5, -4*x3 - 145*x4 + x5 - 3*x7 -
  2*x8 + 2*x9 - 1, -x0 - x1 - x4 - 2*x5 + 3*x7 - x9,
   -x0 + 6*x1 + 4*x2 + x3 - 6*x4 - x5 + x8 + 1, x0 +
   10*x1 + 90*x3 - x4 + 24*x5 - 3*x6 - 3*x7 - 4*x8 -
```

```
    x9 - 2]
```

Триангуляция дает:

```
sage: T=triangulation(S)
sage: len(T)
10
```

Мы не можем привести здесь сами уравнения, поскольку они имеют гигантские целые коэффициенты. Поэтому мы вывели лишь число уравнений, воспользовавшись функцией `len`, возвращающей длину списка.

4. Задания

Теоретические задания.

1) Что такое линейное уравнение над кольцом A? Всегда ли оно разрешимо в кольце A?

2) Дайте определение делителя нуля. Дайте определение целостного кольца.

3) Приведите примеры целостных колец.

4) Дайте определение поля частных.

5) Дайте определения линейного уравнения, системы линейных уравнений и ее решения.

6) Дайте определение треугольной системы линейных уравнений.

7) Опишите алгоритм приведения системы к треугольному виду.

Практические задания.
Указание. Чтобы использовать функцию `triangulation`, вставьте ее определение (алгоритм 1) перед своими строчками кода.

1) Задайте в Sage поле частных для кольца $\mathbb{Q}[x, y]$.

2) Дана система уравнений

$$x - 5y + z = 3, \quad 3x - 2y + 2z = 1, \quad 8y + 2z = -3$$

из $\mathbb{Z}[x, y, z]$.

   а) Приведите ее к треугольному виду, приняв $x > y > z$.

   б) Приведите ее к треугольному виду, приняв $x < y < z$.

   в) Приведите ее к треугольному виду, приняв $y < x < z$.

3) Дана система уравнений

$$x - 5y + z = 3, \quad 3x - 2y + 2z = 1, \quad 4x - 7y + 3z = 4$$

из $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Приведите ее к треугольному виду.

4) Дана система уравнений

$$x - 5y + z = 3, \quad 3x - 2y + 2z = 1, \quad 4x - 7y + 3z = 5$$

из $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Приведите ее к треугольному виду.

5) Создайте систему линейных 20 уравнений с 20 неизвестными и случайными коэффициентами. Приведите ее к треугольному виду. Сколько уравнений входит в треугольную систему?