Матрицы

М.Д. Малых, РУДН

2 октября 2022 г.

Содержание

1. Матрицы **1**

2. Арифметические действия с матрицами **3**

3. Обратная матрица **8**

4. Определители **11**

5. Задания **13**

1. Матрицы

Определение 1. Прямоугольную таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

содержащую m строк и n столбцов, называют матрицей размера на $m \times n$. Квадратные таблицы ($n = m$) называют квадратными матрицами; таблицы, состоящие из одного столбца ($n = 1$), называют столбцами. Если элементами таблицы служат элементы некоторого кольца A, то говорят о матрице над кольцом A.

Это определение не является приемлемым с математической точки зрения, поскольку подводит одно понятие — матрица — под другое — таблица, ранее нигде не определенное. Оно призвано лишь пояснить, о чем идет речь.

Традиционно матрицы обозначаются большими буквами $A, B, \ldots$, для уверенности над ними часто рисуют шляпку, напр., $\hat{A}, \hat{B}, \ldots$. Элемент i-ой строки и j-го столбца матрицы $\hat{A}$ традиционно обозначается той же буквой, а именно, как a_{ij}.

Задание матриц в Sage осуществляются тремя способами.

1. Построчно:

```
sage: matrix([[1,2],[3,4],[5,6]])
[1 2]
[3 4]
[5 6]
```

2. Путем преобразования списка (первые m элементов списка — первая строка и т.д.):

```
sage: matrix(2,3,[1,2,3,4,5,6])
[1 2 3]
[4 5 6]
```

3. Путем задания зависимости a_{ij} от i и j:

```
sage: matrix(2,3,lambda i,j: i+j^2)
[0 1 4]
[1 2 5]
```

Если правило — сложное, его можно задать отдельно:

```
def foo(i,j):
    if i==j:
        ans=2
    elif abs(i-j)==1:
```

```
            ans=1
        else:
            ans=0
        return ans
```

И тогда просто упомянуть его в качестве последнего аргумента:

```
sage: matrix(5,6,foo)
[2 1 0 0 0 0]
[1 2 1 0 0 0]
[0 1 2 1 0 0]
[0 0 1 2 1 0]
[0 0 0 1 2 1]
```

При необходимости, можно указать кольцо, из которого берутся элементы:

```
sage: matrix(RR, [[1,2],[3,4],[5,6]])
[1.00000000000000 2.00000000000000]
[3.00000000000000 4.00000000000000]
[5.00000000000000 6.00000000000000]
```

2. Арифметические действия с матрицами

Под суммой двух матриц одинакового размера понимают матрицу, элементы которой равны сумме элементов этих матриц. Иными словами, равенство

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C}$$

означает, что

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}.$$

Под произведением матрицы на число понимают матрицу того же размера, элементами которой служат элементы исходной матрицы, умноженные на это число. Иными словами, равенство

$$\lambda \hat{A} = \hat{B}$$

означает, что

$$\lambda a_{ij} = b_{ij}.$$

Напр.,

```
sage: matrix([[1,2],[3,4],[5,6]]) + 3*matrix
   ([[4,1],[1,4],[5,-6]])
[ 13   5]
[  6  16]
[ 20 -12]
```

Множество матриц одного размера образуют линейное пространство.

Определение 2. Множество L, в котором введено два действия: сложение элементов и их умножение на элемент кольца A, называют линейным пространством над кольцом A. При этом предполагают, что при упрощении выражений с элементами линейного пространства можно обращаться как с обычными векторами. Иными словами, для любых $a, b, c \in L$ и $\alpha, \beta, \gamma \in A$ верно:

1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);

3) существует такой элемент $0 \in L$, что $a + 0 = 0 + a = a$ (существование нуля);

4) для любого $a \in L$ существует такой элемент $b \in L$, что $a + b = b + a = 0$ (существование противоположного элемента относительно сложения).

5) $1 \cdot a = a$;

6) $(\alpha \cdot \beta) \cdot c = \alpha \cdot (\beta \cdot c)$;

7) $\alpha \cdot (b + c) = (\alpha \cdot b) + (\alpha \cdot c)$

8) $(\beta + \gamma) \cdot a = (\beta \cdot a) + (\gamma \cdot a)$;

Пример 1. Строки длины 2 образуют линейное пространство. Его элементами будут

$$\hat{A} = (a_1, a_2), \ldots$$

При этом

$$\hat{0} = (0, 0)$$

и

$$-\hat{A} = (-a_1, -a_2).$$

Пример 2. Множество всех многочленов кольца $A[x_1, \ldots, x_n]$, степень которых меньше заданного числа N, является линейным пространством над A. Напр., при $N = 1$ это множество всех линейных многочленов

$$a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Чтобы указать один такой многочлен, нужно указать строку его коэффициентов

$$\hat{A} = (a_0, \ldots, a_n).$$

При сложении двух многочленов, их строки скалываются, при умножении многочлена на элемент из A его строка тоже умножается на это число. Поэтому линейное пространство всех линейных многочленов кольца $A[x_1, \ldots, x_n]$ можно отождествить с линейным пространством строк длины $n + 1$ над A.

Определение 3. Произведением двух квадратных матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ одного размера называют матрицу $\hat{C}$ того же размера, элементы которой вычислены по формуле

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Словами: чтобы найти элемент произведения двух матриц, стоящей в i-ой стоке и j-ом столбце, следует умножить первый элемент i-ой строки матрицы $\hat{A}$ на первый элемент j-го столбца матрицы $\hat{B}$, второй элемент той же строки на второй элемент того же столбца и так далее, а потом все сложить.

Напр.,

```
sage: matrix([[1,2],[3,4]])*matrix([[2,-1],[0,2]])
[2 3]
[6 5]
```

Формула

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

все еще сохраняет смысл, если число столбцов в матрице $\hat{A}$ равно числу строк в матрице $\hat{B}$. Напр.,

```
sage: matrix([[1,2,5],[3,4,8]])*matrix
  ([[2,-1],[0,2],[0,2]])
[ 2 13]
[ 6 21]
```

Множество квадратных матриц одного размера с так введенными сложением и умножением удовлетворяет всем аксиомам кольца, кроме одной, теперь

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Определение 4. Некоммутативное кольцо — множество M, на котором заданы две бинарные операции, называемые сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$, со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in M$:

1) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);

3) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);

4) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ и $(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (дистрибутивность);

5) существует такой элемент $0 \in M$, что $a+0 = 0+a = a$ (существование нуля);

6) существует такой элемент $1 \in M$, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (существование единицы);

7) для любого $a \in M$ существует такой элемент $b \in M$, что $a + b = b + a = 0$ (существование противоположного элемента относительно сложения).

Пример 3. Множество матриц 2×2 образует кольцо, M_2. Это кольцо не является коммутативным:

```
sage: A=matrix([[2,-1],[0,2]])
sage: B=matrix([[1,2],[3,4]])
sage: A*B
[-1  0]
[ 6  8]
sage: B*A
[2 3]
[6 5]
```

Нулем в этом кольце служит нулевая матрица

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а единицей — единичная матрица

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Противоположный элемент вычисляется по формуле

$$-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$$

В этом кольце имеются делители нуля:

```
sage: matrix([[0,0],[1,0]])^2
[0 0]
[0 0]
```

Пример 4. Множество матриц 3×3 образует некоммутативное кольцо M_3. Нулем в этом кольце служит нулевая матрица

$$\hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а единицей — единичная матрица

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица

Рассмотрим кольцо квадратных матрицы $n \times n$ над полем k, которое далее будем обозначать как $M_n(k)$. С ненулевым элементом $\hat{A}$ этого кольца можно связать два линейных уравнения:

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$$

и

$$\hat{Y}\hat{A} = \hat{E}.$$

Подчеркнем, что под решением уравнения

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$$

понимается квадратная матрица $\hat{X} \in M_n(k)$.

Хотя кольцо не является коммутативным, решения этих уравнений совпадают.

Теорема 1. Если уравнения $\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$ и $\hat{Y}\hat{A} = \hat{E}$ имеют решения, то эти решения совпадают.

Доказательство. Умножим $\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$ на решение второго уравнения, тогда

$$\hat{Y}\hat{A}\hat{X} = \hat{Y}\hat{E} = \hat{Y}$$

В силу ассоциативности умножения,

$$\hat{Y}\hat{A}\hat{X} = (\hat{Y}\hat{A})\hat{X} = \hat{E}\hat{X} = \hat{X}.$$

Отсюда $\hat{X} = \hat{Y}$. $\square$

Определение 5. Квадратную матрицу, которая удовлетворяет уравнениям

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{E} \quad \text{и} \quad \hat{Y}\hat{A} = \hat{E},$$

называют обратной к матрице $\hat{A}$, ее обозначают как $\hat{A}^{-1}$.

Отыскание обратной матрицы сводится к решению n систем линейных уравнений в кольце $k[x_1, \dots x_n]$.

Пример 5. Обратим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Для этого решим уравнение

$$AX = E$$

в Sage. Прежде всего, составим матрицу $\hat{L} = \hat{A}\hat{X} - \hat{E}$, полагая элементы $\hat{X}$ — неизвестными:

```
sage: A=matrix([[2,-1],[1,3]])
sage: x=var("x11,x12,x21,x22")
sage: X=matrix(2,2,x)
sage: L=A*X-matrix.identity(2)
```

Матрица $\hat{L}$ должна быть равна нулю, что дает 4 уравнения на 4 неизвестные:

```
sage: L.list()
[2*x11 - x21 - 1, 2*x12 - x22, x11 + 3*x21, x12 + 3*x22 - 1]
```

Решим эту систему по методу Гаусса:

```
sage: K=QQ[x]
sage: D=tsolve(triangulation([K(l) for l in L.list()]))
sage: D
{x22: 2/7, x21: -1/7, x12: 1/7, x11: 3/7}
```

и подставим найденные значения в матрицу $\hat{X}$

```
sage: X=matrix(2,2,[K(xx).subs(D) for xx in x])
sage: X
[ 3/7  1/7]
[-1/7  2/7]
```

Проверка:

```
sage: A*X
[1 0]
[0 1]
sage: X*A
[1 0]
[0 1]
```

Вычисление обратной матрицы реализовано в Sage над широким набором полей, поэтому далее мы будем пользоваться стандартной функцией. Напр.,

```
sage: A^-1
[ 3/7  1/7]
[-1/7  2/7]
```

Не всякая матрица имеет обратную.

4. Определители

Математики XVIII и XIX веков желали получить формулу для обратной матрицы, подобную той, что имеется для решения квадратного уравнения. С современной точки зрения найти формулу — значит решить уравнение $\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$, оставив элементы матрицы $\hat{A}$ буквами.

В случае кольца матриц 2×2 это приводит к системе 4 уравнений относительно $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ над полем частных кольца $\mathbb{Q}[a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}]$:

```
sage: a=var("a11,a12,a21,a22")
sage: A=matrix(2,2,a)
sage: x=var("x11,x12,x21,x22")
sage: X=matrix(2,2,x)
sage: L=A*X-matrix.identity(2)
sage: L.list()
[a11*x11 + a12*x21 - 1, a11*x12 + a12*x22, a21*x11 + a22*x21, a21*x12 + a22*x22 - 1]
```

Решим ее по методу Гаусса:

```
sage: k=QQ[a]
sage: K=k[x]
sage: D=tsolve(triangulation([K(l) for l in L.list()]))
sage: matrix(2,2,[K(xx).subs(D) for xx in x])
[   a22/(-a12*a21 + a11*a22) (-a12)/(-a12*a21 + a11*a22)]
[(-a21)/(-a12*a21 + a11*a22)    a11/(-a12*a21 + a11*a22)]
```

Нетрудно заметить, что знаменателем во всех 4 элементах служит одно и то же выражение. Вынося его за скобки, имеем относительно простую формулу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Знаменатель этого выражения называют определителем (determinant) матрицы

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

В Sage имеется функция для его вычисления. Напр.,

```
sage: matrix([[2,-1],[1,3]]).det()
7
```

Нет необходимости явно решать уравнение

$$\hat{Y}\hat{A} = \hat{E},$$

нам важно лишь, что при $\hat{A}$ с буквенными элементами это уравнение имеет решение в поле частных кольца $\mathbb{Q}[a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}]$. В силу теоремы 1 это решение совпадает с X.

Если определитель матрицы с числовыми элементами не равен нулю, то, как мы выяснили в прошлой лекции, это выражение дает некоторое решение уравнений

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$$

и

$$\hat{Y}\hat{A} = \hat{E}$$

В силу теоремы 1 всякое решение первого уравнения совпадает со всяким решением второго, лишь бы они оба существовали. Поэтому решение, которое получается по формуле (1) — единственное. Это и есть обратная матрица.

Теорема 2. Если определитель матрицы A размера 2×2 не равен нулю, то она имеет обратную, которую можно вычислить по формуле (1).

В случае матриц $n \times n$ наше рассмотрение сохраняет силу. Решая систему

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{E},$$

в которой матрица $\hat{A}$ имеет буквенные элементы, мы получим элементы матрицы X в виде отношения некоторых многочленов. Общий знаменатель этих дробей называют определителем матрицы $\hat{A}$ и пишут

$$\hat{X} = \frac{1}{\det \hat{A}} \hat{P}(\hat{A}),$$

где элементы матрицы $\hat{P}$ — многочлены из $\mathbb{Q}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$. При этом доказательство теоремы 2 сохраняет свою силу.

Теорема 3. Если определитель матрицы A размера $n \times n$ не равен нулю, то она имеет обратную.

Замечание. Мы ввели определитель как знаменатель в X. Это, конечно, оставляет некоторый произвол в выборе мультипликативной константы. Для нормировки примем, что

$$\det \hat{E} = 1.$$

Изучение свойств определителей требует обсуждения разложения многочленов на множители.

Замечание. Мы полагаем, что теорема 3 будет применяться после того, как выражение для определителя будет найдено явно. Но доказать, что при любом n уравнение $\hat{A}\hat{X} = \hat{E}$ в поле частных кольца $\mathbb{Q}[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$ имеет и притом единственное решение, можно и без применения реализации метода Гаусса.

5. Задания

Теоретические задания.

1) Дайте определение линейного пространства. Приведите пример линейного пространства.

2) Дайте определение некоммутативного кольца. Приведите пример такого кольца.

3) Для трех квадратных матриц докажите, что

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}).$$

4) Для двух квадратных матриц $\hat{A}, \hat{B}$ и столбца $\hat{C}$ докажите, что

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}).$$

5) Докажите, что делители нуля не имеют обратных матриц.

Практические задания.

1) Вычислите

$$\left(2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\right)^2$$

2) Найдите квадрат матрицы 10×10, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 5 & i = j \pm 1, \\ 0 & \end{cases}$$

3) Используя нашу реализацию метода Гаусса, найдите обратные для следующих матриц

$$a.)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}, \quad b.)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix} \quad c.)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

Сравните результат с тем, что получается в Sage при возведении матриц в степень -1.

4) Решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Решите уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \hat{X} = \hat{E}$$

над полем частных кольца $\mathbb{Q}[a_{11}, \ldots a_{33}]$.

6) Решите уравнение

$$\hat{Y} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{E}$$

над полем частных кольца $\mathbb{Q}[a_{11}, \ldots a_{33}]$.

7) Используя результаты двух последних задач, выпишите формулу для определителя матрицы размера 3×3.

8) Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

по вашей формуле. Сравните результат с тем, что возвращает стандартный метод `det` в Sage.