

▼ Лабораторная работа 2. Матрицы.

Задание 1.

Задайте матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Найдите A^3 .

(b) Замените третий столбец матрицы A на сумму второго и третьего столбцов.

```
vec <- c(1, 5, -2, 1, 2, -1, 3, 6, -3)
mat <- matrix(vec, nrow=3, ncol=3)
mat
```

```
A matrix: 3 x 3
3 of type dbl
 1  1  3
 5  2  6
-2 -1 -3
```

```
res <- mat %*% mat %*% mat
res
```

```
A matrix:
3 x 3 of
type dbl
0 0 0
0 0 0
0 0 0
```

```
mat[, 3] <- mat[, 1] + mat[, 2]
mat
```

```
A matrix: 3 x 3
3 of type dbl
 1  1  2
 5  2  7
-2 -1 -3
```

Задание 2.

Создайте матрицу B с 15 строками следующего вида:

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ 10 & -10 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Вычислите матрицу $B^T B$ (размерности 3×3).

```
mat <- matrix(rep(c(10, -10, 10), 15), nrow=15, ncol=3, byrow = TRUE)
t(mat)[, 1:3]
```

```
A matrix: 3 x 3
of type dbl
10 10 10
-10 -10 -10
10 10 10
```

Задание 3. Создайте матрицу E размерности 6×6 , все элементы которой равны нулю. Изучите, что возвращают функции `row()` и `col()` применительно к матрице E . С помощью этих функций создайте следующие матрицы размерности 6×6 :

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

```
E <- matrix(0, 6, 6)
E
```

```
A matrix: 6 x 6 of
type dbl
```

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

```
A matrix: 6 x 6 of
type dbl
```

```
0 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 1 0
```

```
#a
E[abs(col(E) - row(E)) == 1] = 1
E
```

```
A matrix: 6 x 6 of
type dbl
```

```
0 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 1 0
```

```
#b
E <- matrix(0, 6, 6)
E[abs(col(E) - row(E)) == 2] = 1
E[row(E) == col(E)] = 1
E
```

```
A matrix: 6 x 6 of
type dbl
```

```
1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0
1 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 1
0 0 1 0 1 0
0 0 0 1 0 1
```

```
#c
E[nrow(E):1,]

A matrix: 6 x 6 of
type dbl
0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 1
1 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 0
1 0 1 0 0 0
```

Задание 4. Изучите справку по команде `outer()`. Создайте матрицы следующей структуры:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \end{bmatrix}$.

```
#a
x <- 0:4
outer(x,x, FUN = "+")
```

```
A matrix: 5 x 5 of
type int
0 1 2 3 4
1 2 3 4 5
2 3 4 5 6
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8
```

```
#6
y <- 1:5
outer(x,y, FUN="^")
```

```
A matrix: 5 x 5 of type dbl
0 0 0 0 0
1 1 1 1 1
2 4 8 16 32
3 9 27 81 243
4 16 64 256 1024
```

Задание 5. Создайте матрицы следующих структур. В каждом случае ваше решение должно быть легко обобщаемым на случай создания матриц большей размерности, но той же структуры (т.е. матрицы должны создаваться не просто "впечатыванием" каждого элемента).

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

7

```
#a
n <- 5
rows <- rep(0:(n-1), each=n)
cols <- rep(0:(n-1), n)
mat <- matrix((rows + cols) %% n, nrow=n, ncol=n)
mat
```

A matrix: 5 x 5 of
type dbl

```
0 1 2 3 4
1 2 3 4 0
2 3 4 0 1
3 4 0 1 2
4 0 1 2 3
```

```
#b
n <- 10
rows <- rep(0:(n-1), each=n)
cols <- rep(0:(n-1), n)
mat <- matrix((rows + cols) %% n, nrow=n, ncol=n)
mat
```

A matrix: 10 x 10 of type dbl

```
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
2 3 4 5 6 7 8 9 0 1
3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
4 5 6 7 8 9 0 1 2 3
5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
6 7 8 9 0 1 2 3 4 5
7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
8 9 0 1 2 3 4 5 6 7
9 0 1 2 3 4 5 6 7 8
```

```
#c
n <- 9
rows <- rep(0:(n-1), each=n)
cols <- rep(0:(n-1), n)
mat <- matrix((n-1)-(rows + cols) %% n, nrow=n, ncol=n)
mat[nrow(mat):1,]
```

```
A matrix: 9 x 9 of type dbl
0 8 7 6 5 4 3 2 1
```

Задание 6. Решите следующую систему линейных уравнений с 5 неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 17 \end{cases},$$

рассмотрев соответствующее матричное уравнение $Ax = y$ (см. функцию `solve()`). Обратите внимание на особый вид матрицы A .

Метод, используемый для решения данной системы уравнений, должен быть легко обобщаем на случай большего числа уравнений, где матрица A будет иметь такую же структуру.

```
matr <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 5, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 4, 3, 2, 1), nrow = 5, ncol = 5, byrow = TRUE)
a <- c(7, -1, -3, 5, 17)
solve(matr, a)
```

$-2 \cdot 3.000000000000001 \cdot 5 \cdot 2 \cdot -4$

Задание 7. Создайте матрицу M размерности 6×10 , элементами которой являются целые числа, выбранные случайным образом с повторениями (см. функцию `sample()`) из совокупности $1, 2, \dots, 10$. Перед генерацией случайной выборки обеспечьте её воспроизводимость (с помощью команды `set.seed()`, которая фиксирует число, служащее начальной точкой для запуска алгоритма генерации (псевдо-)случайных чисел, для того, чтобы каждый раз при использовании генератора псевдо-случайных чисел получать идентичные последовательности чисел). Например, задайте `set.seed(75)`.

(а) Найдите число элементов в каждой строке матрицы M , которые больше 4.

(b) В каких строках матрицы M число 7 встречается ровно 2 раза?

(с) Найдите все пары столбцов матрицы M , сумма элементов которых больше 75. Ответом должна быть матрица с двумя столбцами, строки которой интерпретируются как пары номеров столбцов исходной матрицы M . Например, строка (1, 2) полученной матрицы означает, что сумма элементов по столбцам 1 и 2 матрицы M больше 75. Полученная матрица вполне может содержать повторения пар (например, (1, 2) и (2, 1) и (2, 2).) Исправьте решение, чтобы результат не содержал повторов.

Задание 8. Вычислите:

(a) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \frac{i^4}{(3+j)}$, (b) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 \frac{i^4}{(3+ij)}$.