Наибольший общий делитель

Задача 1. Дано два многочлена f и g. Требуется найти их наибольший общий делитель h.

Задача 2. Дан идеал (f, g) полиномиального кольца. Требуется найти его представление в

1.) Найдем НОД двух многочленов руками при помощи функции:

В [1]:

```
def quo_rem_poly(f,q):
    K=f.parent()
    n=0
    while f.degree()>=q.degree():
        ni=K(f.lt()/q.lt())
        n=n+ni
        f=f-ni*q
    return (n,f)
```

В [2]:

```
var("x")
f=QQ[x](x^3-2)
g=QQ[x](x^4 + x^3 - x - 1)
(u1,r1)=quo_rem_poly(f,g)
print((u1,r1))
```

```
(0, x^3 - 2)
```

При этом $f - u_1 g = r_1$, то есть НОД(f,g)=НОД(g,r1).

В [4]:

```
(u2,r2)=quo_rem_poly(g,r1)
print((u2,r2))
```

```
(x + 1, x + 1)
```

При этом $g - u_2 r_1 = r_2$, то есть НОД(f,g)=НОД(r1,r2).

В [5]:

```
(u3,r3)=quo_rem_poly(r1,r2)
print((u3,r3))
```

```
(x^2 - x + 1, -3)
```

r_1 делится на r_2, поэтому НОД(f,g)=r2.

2.) Напишем свою функцию gcd_poly. Вход: многочлены f,g, выход: их НОД.

В [19]:

```
def gcd_poly(f,g):
    if f.degree()<g.degree():
        (f,g)=(g,f)
    (u,r)=quo_rem_poly(f,g)
    while r!=0 or r.degree()==0:
        (f,g)=(g,r)
        (u,r)=quo_rem_poly(f,g)
    if g.degree()==0:
        g=1
    return g
```

3.) Проверим на нескольких тестовых примерах.

В [20]:

```
f=QQ[x](x^3-2)
g=QQ[x](x^4 + x^3 - x - 1)
gcd_poly(f,g)
```

Out[20]:

```
1
```

В [21]:

```
f=QQ[x]((x^3+1)^2*(x^3-2*x-1))
g=QQ[x]((x^3+1)^2*(x^4+1))
gcd_poly(f,g).factor()
```

Out[21]:

```
(8/9) * (x + 1)^2 * (x^2 - x + 1)^2
```

В [27]:

```
f = QQ[x]((2*x^5+12)*(x^4+3*x^2+12)^6)
g = QQ[x]((4*x^5+x+10)*(x^4+5*x^2+11)^6)
gcd_poly(f, g).factor()
```

Out[27]:

```
1
```

4.) Проверим на тестовых примерах с коэффцинетами в полях $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и GF(5).

В [31]:

```
f=QQbar[x](x^3-1)
g=QQbar[x](x^3 + x^2 - x - 1)
gcd_poly(f,g)
```

Out[31]:

```
x - 1
```

В [33]:

```
f=QQbar[x](x^3-i)
g=QQbar[x](x^3 + x^2 + 2)
gcd_poly(f,g)
```

Out[33]:

```
1
```

В [34]:

```
f=QQbar[x](x^3-i)
g=QQbar[x]((x+i)*(x^2+3+i))
gcd_poly(f,g).factor()
```

Out[34]:

```
(-7*I - 12) * (x + I)
```

В [35]:

```
f.factor()
```

Out[35]:

```
(x - 0.866025403784439? - 0.500000000000000?*I) * (x + I) * (x + 0.86602540378
0.500000000000000?*I)
```

В [36]:

```
f = QQbar[x](x^2 + 1)
g = QQbar[x]((x^4+3*2*x^3+x^2+1)*(x+i))
gcd_poly(f,g).factor()
```

Out[36]:

```
(-6*I + 1) * (x + I)
```

В [39]:

```
f=GF(5)[x](x^3-1)
g=GF(5)[x](x^3 + x^2 - x - 1)
gcd_poly(f,g)
```

Out[39]:

```
x + 4
```

В [40]:

```
f.factor()
```

Out[40]:

```
(x + 4) * (x^2 + x + 1)
```

В [41]:

```
g.factor()
```

Out[41]:

```
(x + 4) * (x + 1)^2
```

В [51]:

```
f = GF(5)[x](x^3+8)
g = GF(5)[x]((x+2)*(x^2+2))
gcd_poly(f, g)
```

Out[51]:

```
3*x + 1
```

4.) Проверим на тестовых примерах с большими степенями

В [52]:

```
var("x")
f=sum([(n+1)*x^n for n in range(10^3)])
g=sum([x^n for n in range(20)])
%time gcd_poly(QQ[x](f),QQ[x](g))
```

```
CPU times: user 547 ms, sys: 0 ns, total: 547 ms
Wall time: 549 ms
```

Out[52]:

```
1
```

5.) Составьте уравнение, которому удовлетворяют кратные корни уравнения $f(x) = 0$, где
Если многочлен $f \in \mathbb{Q}[x]$ имеет кратые неприводимые множители, то эти множители вход
корни неприводимых множителей "--- простые.

В [53]:

```
f=QQ[x](x^11 + 4*x^10 + 4*x^9 - 3*x^8 - 6*x^7 - 6*x^4 - 3*x^3 + 4*x^2 + 4*
g=gcd_poly(f,diff(f,x))
g
```

Out[53]:

```
-10752/121*x^7 - 53760/121*x^6 - 96768/121*x^5 - 53760/121*x^4 + 53760/121*x^3
121*x^2 + 53760/121*x + 10752/121
```

Проверка средставим Sage:

В [54]:

```
f.factor()
```

Out[54]:

```
(x - 1)^2 * (x + 1)^7 * (x^2 - x + 1)
```

В [55]:

```
g.factor()
```

Out[55]:

```
(-10752/121) * (x - 1) * (x + 1)^6
```

В [58]:

```
f = QQ[x]((x^4 + 3)^2*(x+16)^3*(x^3-1))
g = gcd_poly(f, diff(f, x))
g
```

Out[58]:

```
-1044335351097662806788488619364909045794967886155156526552808188928/180810235
8099535739126156707142344632934404522396445976*x^6 - 3341873123512520981723l6
```

В [59]:

```
f.factor()
```

Out[59]:

```
(x - 1) * (x + 16)^3 * (x^2 + x + 1) * (x^4 + 3)^2
```

В [60]:

```
g.factor()
```

Out[60]:

```
(-104433535109766280678848861936490904579496788615515652655280818892/18081023
380995357391261567071423446329344045223964459769) * (x + 16)^2 * (x^4 + 3)
```

6.) Составьте уравнение, все комплексные корни которого простые, и совпадают с корнями

В [61]:

```
f=QQ[x](x^11 + 4*x^10 + 4*x^9 - 3*x^8 - 6*x^7 - 6*x^4 - 3*x^3 + 4*x^2 + 4*
g=gcd_poly(f,diff(f,x))
(u,r)=quo_rem_poly(f,g)
u/(u).lc()
```

Out[61]:

```
x^4 - x^3 + x - 1
```

Проверка средствами Sage:

В [62]:

```
(u/(u).lc()).factor()
```

Out[62]:

```
(x - 1) * (x + 1) * (x^2 - x + 1)
```

В [63]:

```
f.factor()
```

Out[63]:

```
(x - 1)^2 * (x + 1)^7 * (x^2 - x + 1)
```

В [67]:

```
f = QQ[x]((x+1)^2*(2*x+1)^4)
g = gcd_poly(f, diff(f, x))
(u, r) = quo_rem_poly(f, g)
u/(u).lc()
```

Out[67]:

```
x^2 + 3/2*x + 1/2
```

В [65]:

```
(u/(u).lc()).factor()
```

Out[65]:

```
(x + 1/2) * (x + 1)
```

В [66]:

```
f.factor()
```

Out[66]:

```
(16) * (x + 1)^2 * (x + 1/2)^4
```

В [ ]:

```

```