Интерполяционный многочлен

Задача. Даны точки $x_0, \ldots, x_n$ и значения $y_0, \ldots, y_n$ многочлена f в этих точках. Найти многочлен

Идея решения и ее реализация

$$f_0 = y_0, \quad f_1 = f_0 + (y_1 - f_0(x_1))\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad f_2 = f_1 + (y_2 - f_1(x_2))\frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}$$

В [5]:

```
var("x")
def ipoly(points, x=x):
    m = 1
    f = 0
    for (X, Y) in points:
        f += (Y - f.subs([x==X]))*m/m.subs([x==X])
        m *= (x-X)
    return f
```

1.) Найдите многочлен, который удовлетворяет условиям

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 5$$

и постройте его график. Убедитесь, что график проходит через точки

$$(1, 2), \quad (2, 4), \quad (3, 5).$$

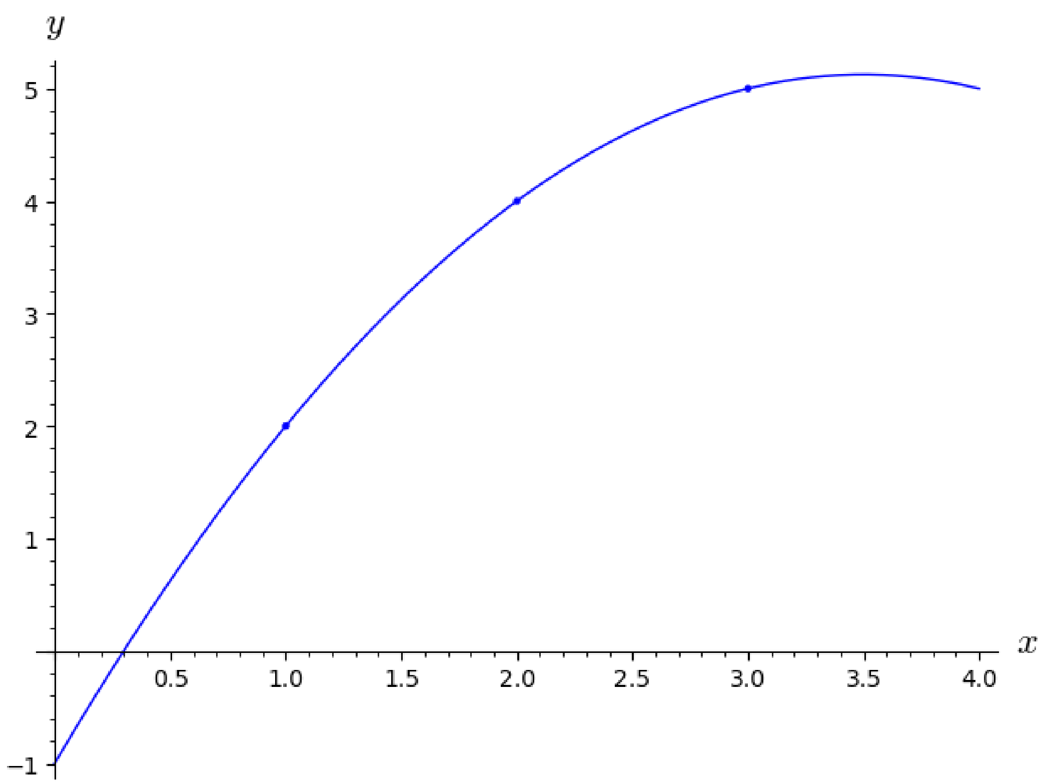
В [9]:

```
points=[(1,2),(2,4),(3,5)]
show(ipoly(points))
```

В [122]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(ipoly(points),(x,0,4))
```

Out[122]:



2.) Однозначно ли определено решение задачи? -- Нет, с точностью до многочлена, кратного $(x - x$

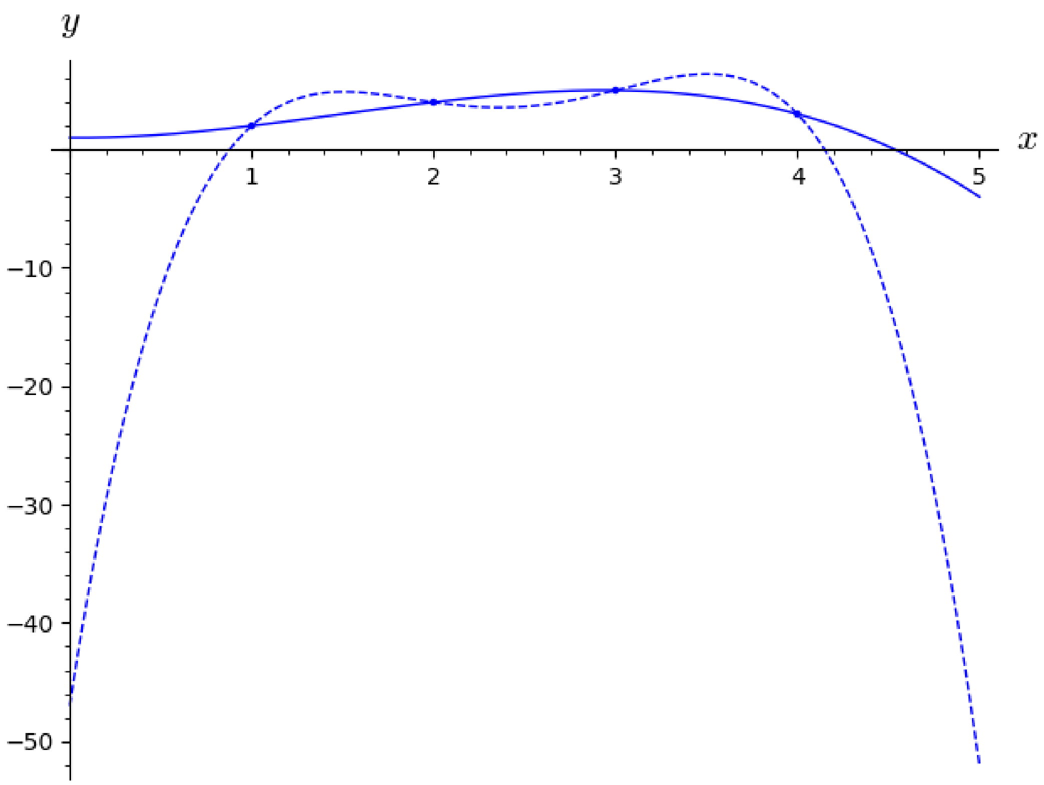
В [123]:

```
points=[(1,2),(2,4),(3,5),(4,3)]
f=ipoly(points)
m=prod(x-xx for (xx,yy) in points)
```

В [124]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(ipoly(points),(x,0,5)) +\
plot(ipoly(points) -2*m,(x,0,5), linestyle="--")
```

Out[124]:



3.) Школьная задача. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки

$$(1, 2), \quad (3, 5).$$

В [92]:

```
var("y")
points=[(1,2),(3,5)]
f=ipoly(points)
y==f
```

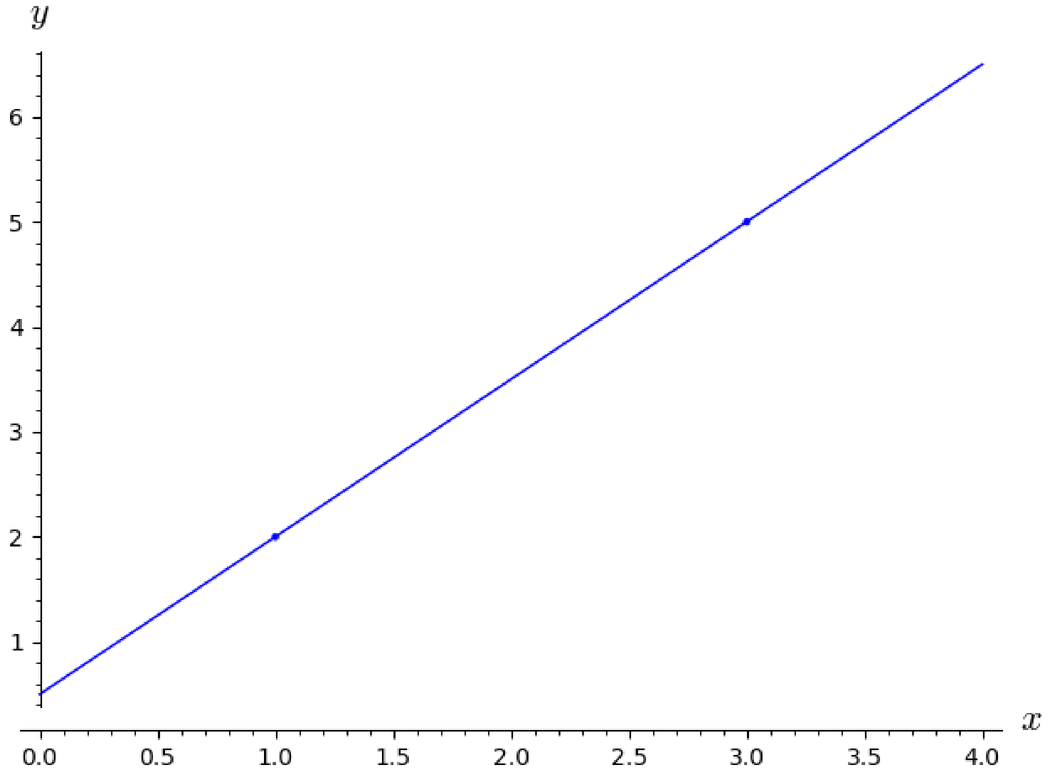
Out[92]:

```
y == 3/2*x + 1/2
```

В [94]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(f,(x,0,4))
```

Out[94]:



4.) Школьная задача. Составьте уравнение параболы, проходящей через точки

$$(1,2), \quad (2,1) \quad (3,5).$$

В [96]:

```
var("y")
points=[(1,2),(2,1),(3,5)]
f=ipoly(points)
y==QQ[x](f)
```

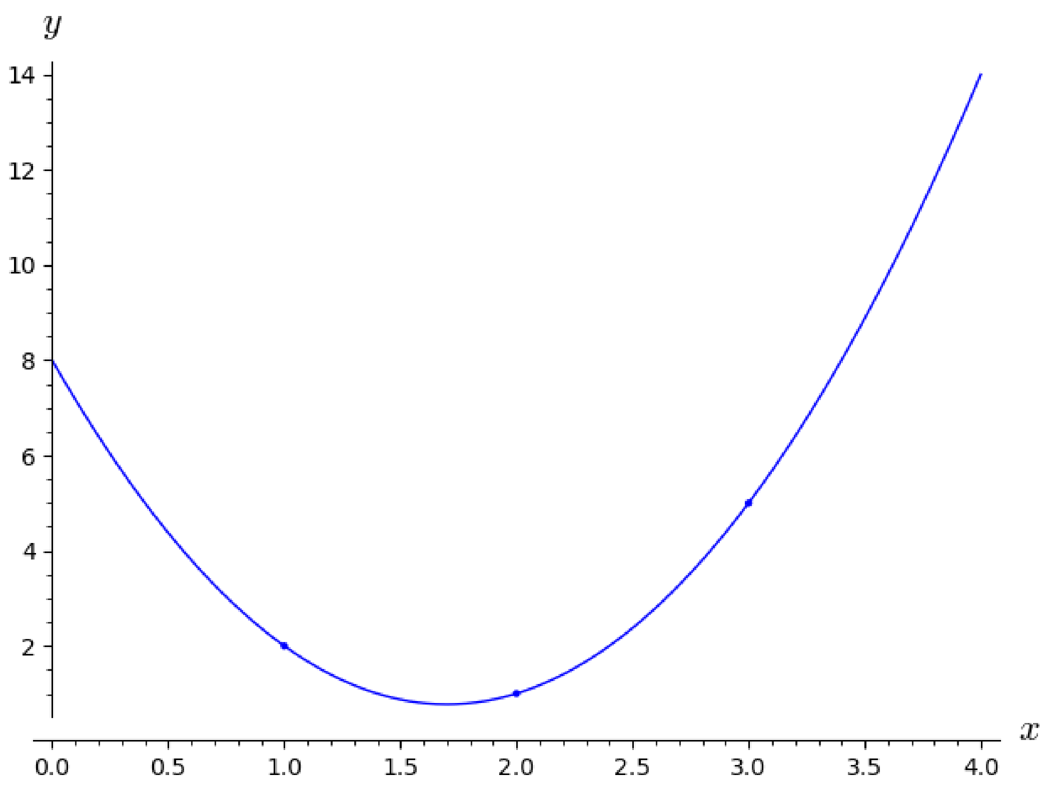
Out[96]:

```
y == 5/2*x^2 - 17/2*x + 8
```

В [97]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(f,(x,0,4))
```

Out[97]:



5.) Школьная задача. Найдите координаты вершины параболы, проходящей через точки

$$(1,2),\quad (2,-5)\quad (3,5).$$

В [102]:

```
points=[(1,2),(2,-5),(3,5)]
f=ipoly(points)
S=solve(diff(f,x)==0,x)
p=(x.subs(S),f.subs(S))
p
```

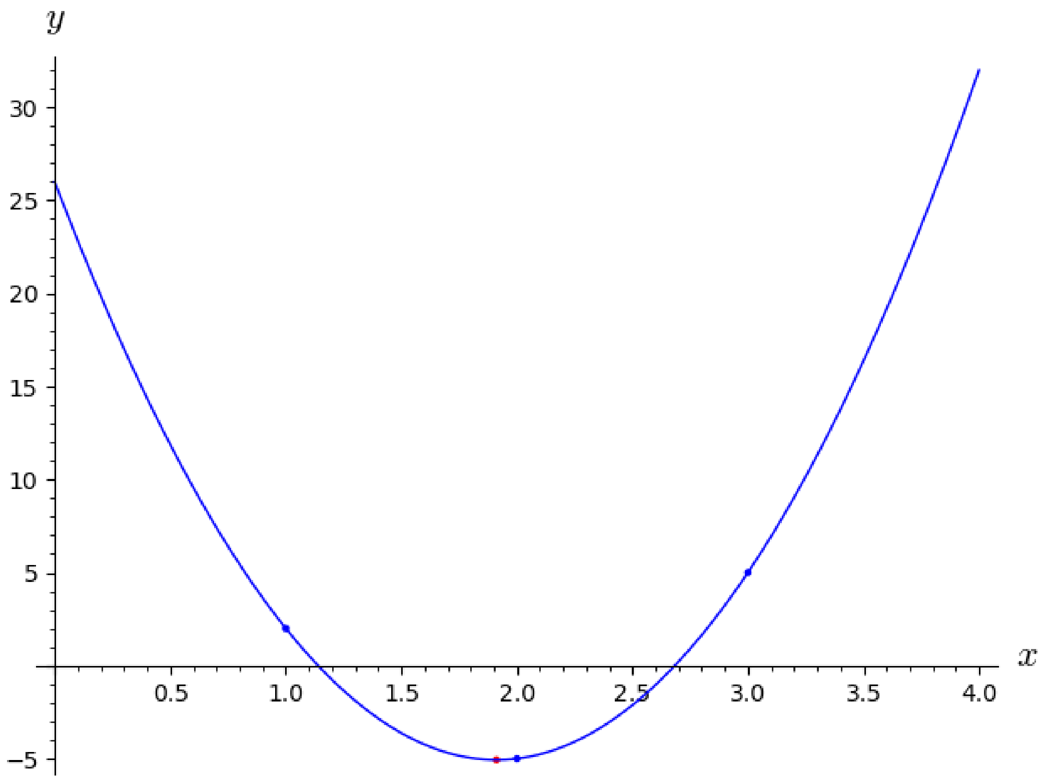
Out[102]:

```
(65/34, -689/136)
```

В [103]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(f,(x,0,4)) + point(p, color='red
```

Out[103]:



6.) Проверьте, что алгоритм работает над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, GF(5).

В [46]:

```
points=[(1,2),(2,4/3),(3,5),(4,3)]
f=ipoly(points)
print(QQ[x](f))
[f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points]
```

```
-5/3*x^3 + 73/6*x^2 - 51/2*x + 17
```

Out[46]:

```
[0, 0, 0, 0]
```

В [47]:

```
points=[(1,2),(2,pi),(3,e),(e,3)]
f=ipoly(points)
print(RR[x](f))
[f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points]
```

```
-0.0118847696491323*x^3 - 0.711143121465477*x^2 + 3.35821540553015*x - 0.635187514415
```

Out[47]:

```
[0, 0, 0, 0]
```

В [48]:

```
points=[(1,2),(i,1),(-i,1),(4,3)]
f=ipoly(points)
print(CC[x](f))
[f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points]
```

```
-0.127450980392157*x^3 + 0.627450980392157*x^2 - 0.127450980392157*x + 1.627450980392
```

Out[48]:

```
[0, 0, 0, 0]
```

В [49]:

```
points=[(1,2),(2,4),(3,5),(4,3)]
f=ipoly(points)
print(GF(5)[x](f))
[f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points]
```

```
3*x^3 + 4*x^2 + 4*x + 1
```

Out[49]:

```
[0, 0, 0, 0]
```

7.) Чтоб будет, если точек будет много? Что при этом происходит с графиками?

В [50]:

```
points=[(n,n^2) for n in range(10)]
f=ipoly(points)
print(QQ[x](f))
[f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points]
```

```
x^2
```

Out[50]:

```
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

В [57]:

```
points=[(n,sin(n)) for n in range(10)]
f=ipoly(points)
print(RR[x](f))
sum([f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points])
```

```
-3.97978273709278e-7*x^9 + 9.15904316512248e-7*x^8 + 0.000296677757935423*x^7 - 0.005
90489*x^6 + 0.0384556956846447*x^5 - 0.0925802986317312*x^4 - 0.00370254525021532*x^3
26326471244*x^2 + 1.05500039889437*x
```

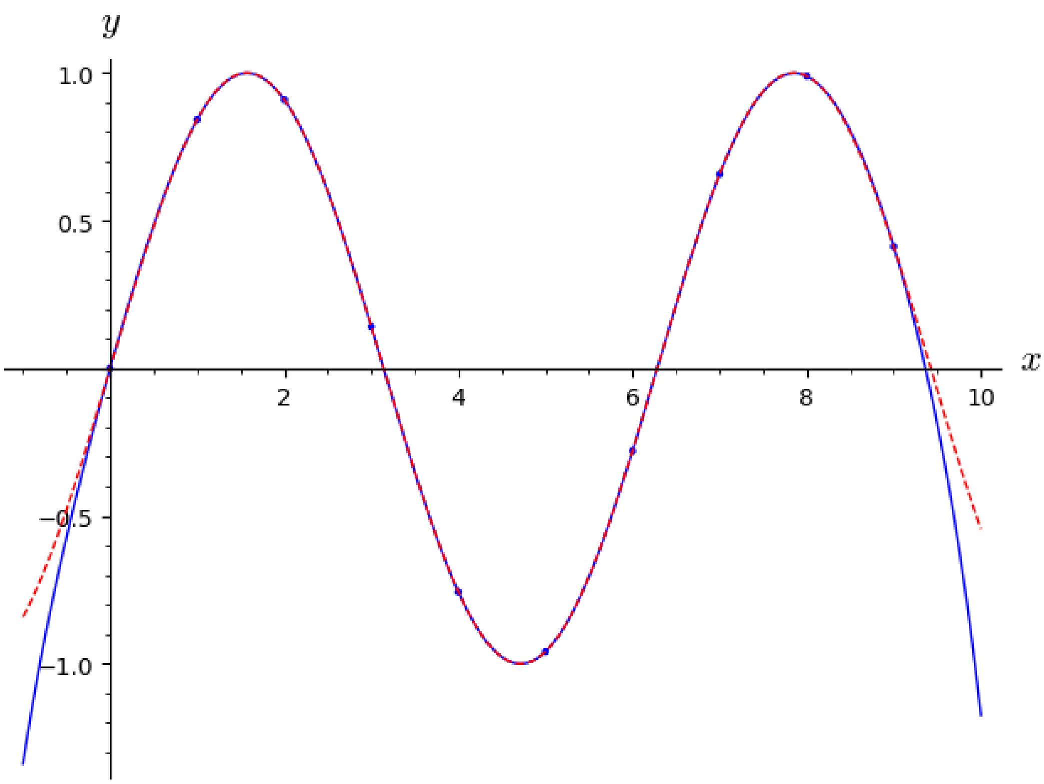
Out[57]:

```
0
```

В [56]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(f,(x,-1,10)) + \
plot(sin,(-1,10),linestyle="--", color='red')
```

Out[56]:



В [73]:

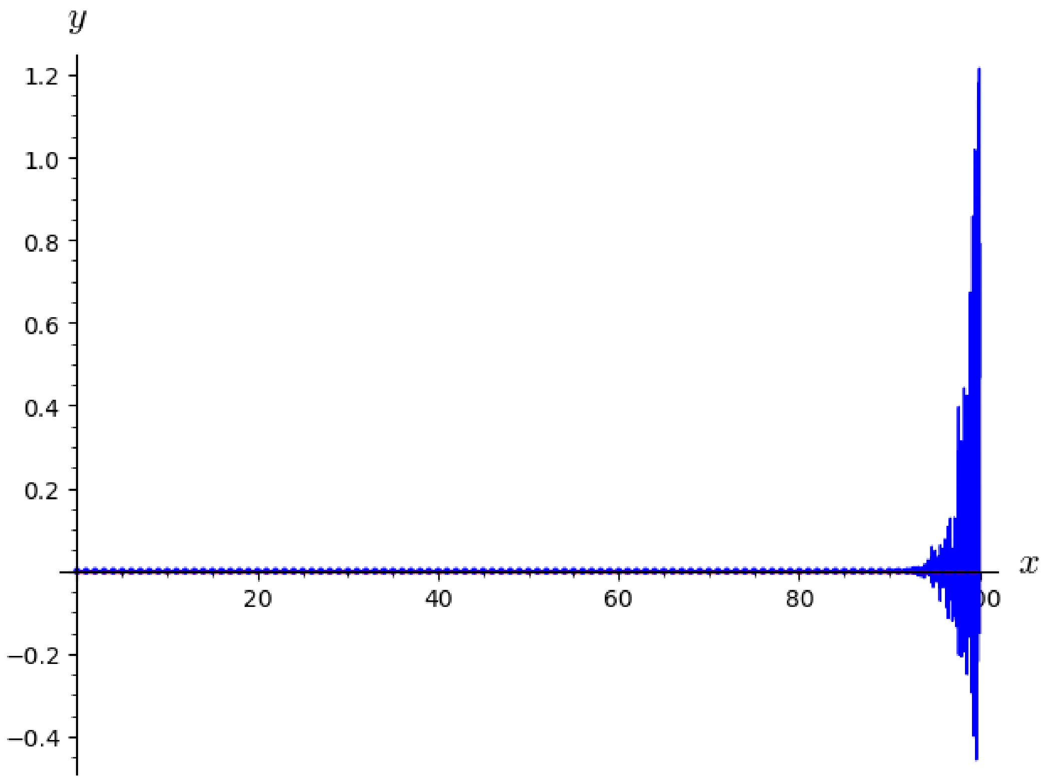
```
points=[(n,1/(1+n^2)) for n in range(100)]
f=ipoly(points)
print(QQ[x](f))
sum([f.subs(x=xx)-yy for (xx,yy) in points])
```

```
-627559059283129081129527986177029277545068776815282018994488966671061334013731633 1/5
70237714906444198144109189459670505456480719200622467352100126718341679921273313 25087
776204909449598207659834504012756657046796118716283793182324197741969817116741484 7048
5446671043361035300818215562500000000000000000000000*x^99 + 4965030694642082534387742 90
32153103775226302150671491723679243494416344302351628 1/949379632380343850310717030574
472808730369150720995947763360202749346687874037301201396553804419278551193571322557 3
041065127487378994605406909171871638715170738678637552781485192714673669377656481309 1
0000000000000000000000*x^98 - 605532052031171254844034279068660004173777391774126263 0
871795942200918200372338194 27/474689816190171925155358515287351567736404365184575360 4
816801013746733439370186506006982769022096392755967856612786760321020532563743689497 3
545859358193575853693393187763907425963573368346888282406545724500000000000000000000 0
97 + 96169467900855987221242915048428883440032569823782596079615472476282274473238999
46197/469989917019972203124117341868664918550895411073836990592053348198120172943904 8
778224735414873362765104918669913650257743584685706676920294359112331273203781542163 7
2750137697286768053151949388934718274500000000000000000000000*x^96 - 144064599296199
52491614601656754701290128528694034242133823982068920087139346393573750756 1/593362270
906444198144109189459670505456480719200622467352100126718341679921273313250872846127 7
944959820765983450401275665704679611871628379318232419774196981711674148470488428245 4
4336103530081821556250000000000000000000000000*x^95 + 1078869864282736555817174177605387 8
```

В [74]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(f,(x,0,100)) + \
plot(1/(1+x^2),(x,0,100),linestyle="--", color='red')
```

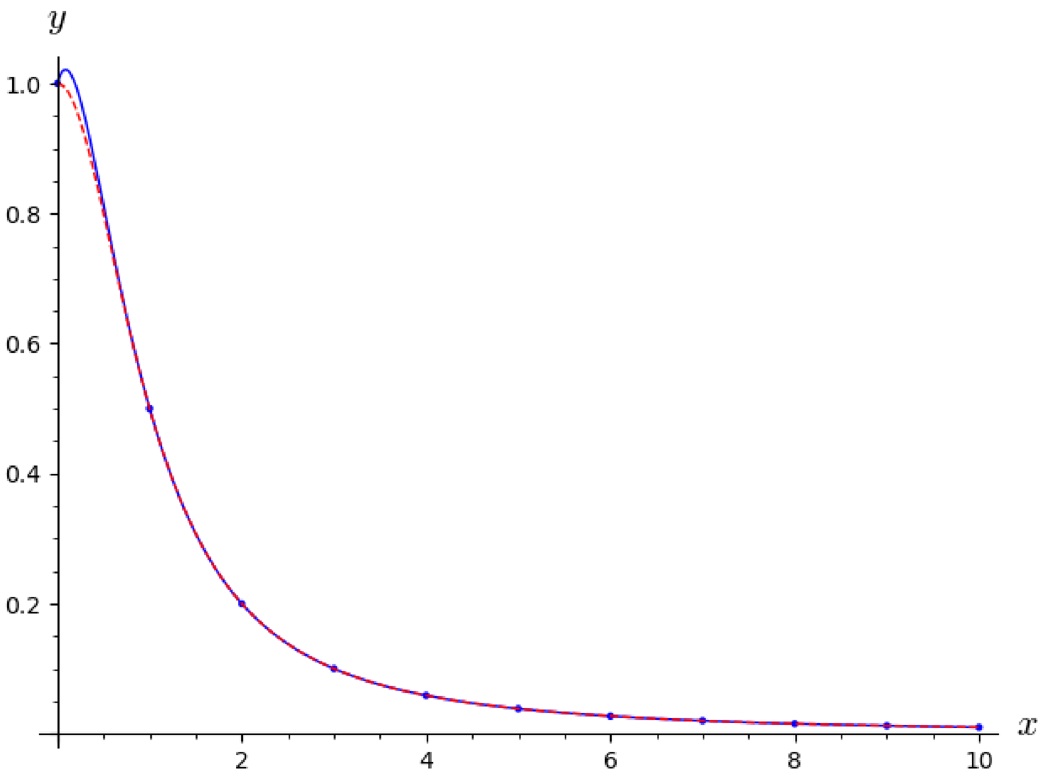
Out[74]:



В [75]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$'], xmax=10) + plot(f,(x,0,10)) + \
plot(1/(1+x^2),(x,0,10),linestyle="--", color='red')
```

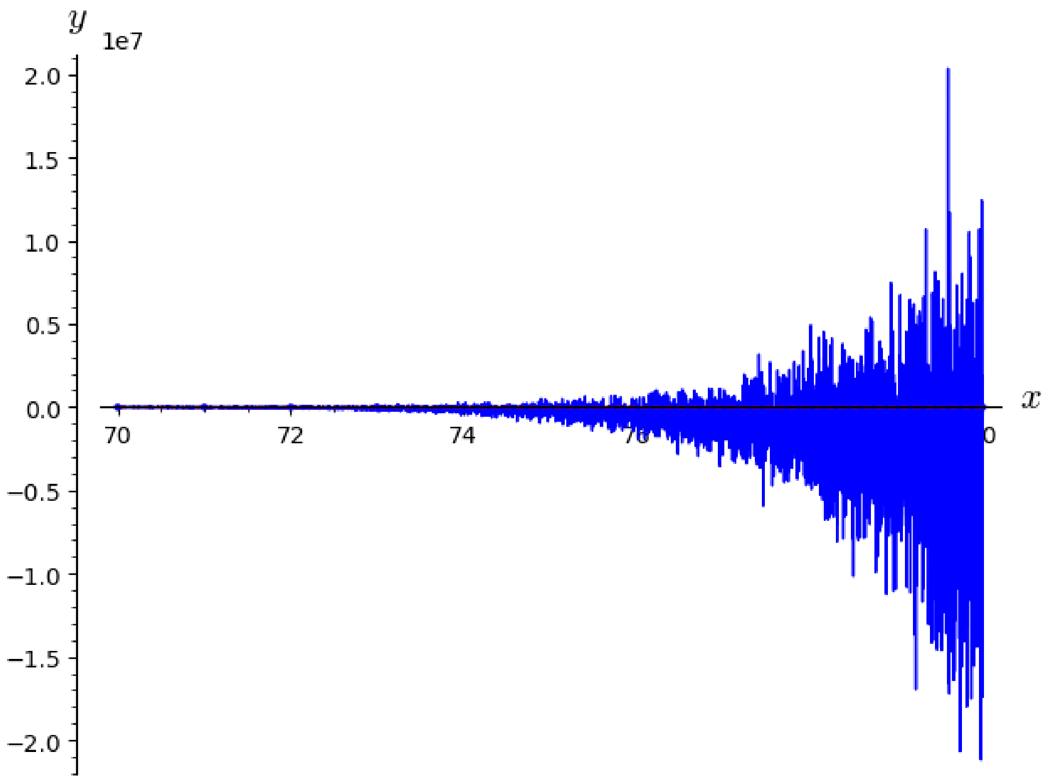
Out[75]:



В [76]:

```
point(points, axes_labels=['$x$','$y$'], xmin=70, xmax=80) + plot(f,(x,70,80)) +
plot(1/(1+x^2),(x,70,80),linestyle="--", color='red')
```

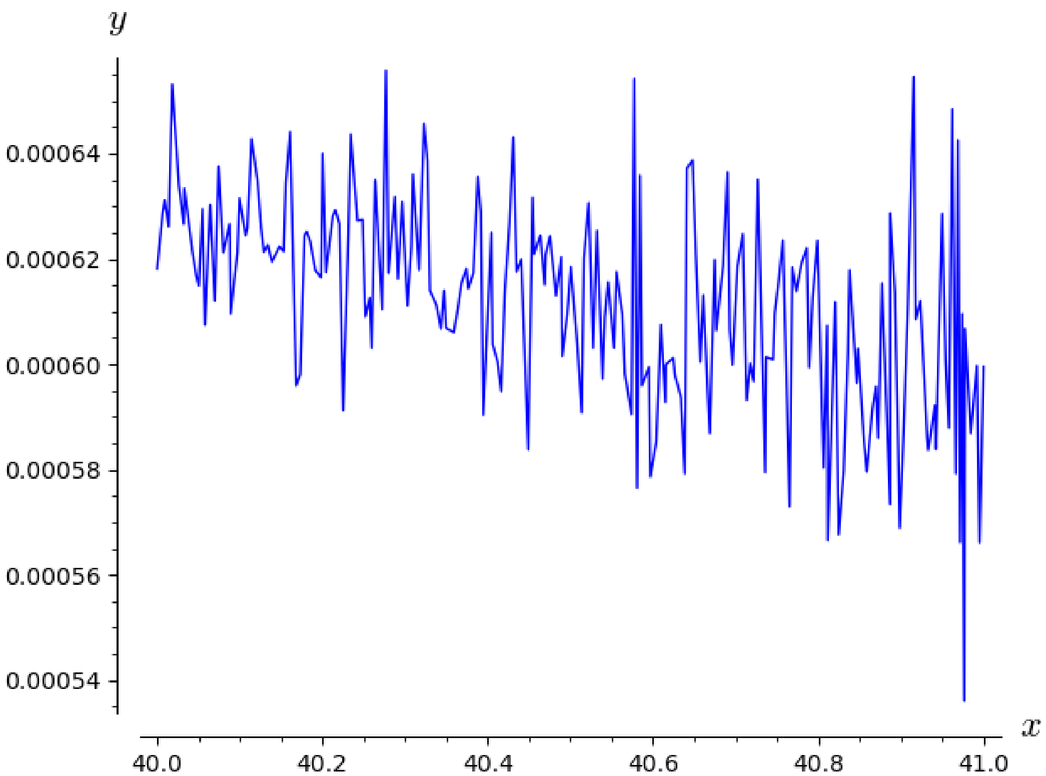
Out[76]:



В [80]:

```
plot(f,(x,40,41),axes_labels=['$x$','$y$'])
```

Out[80]:

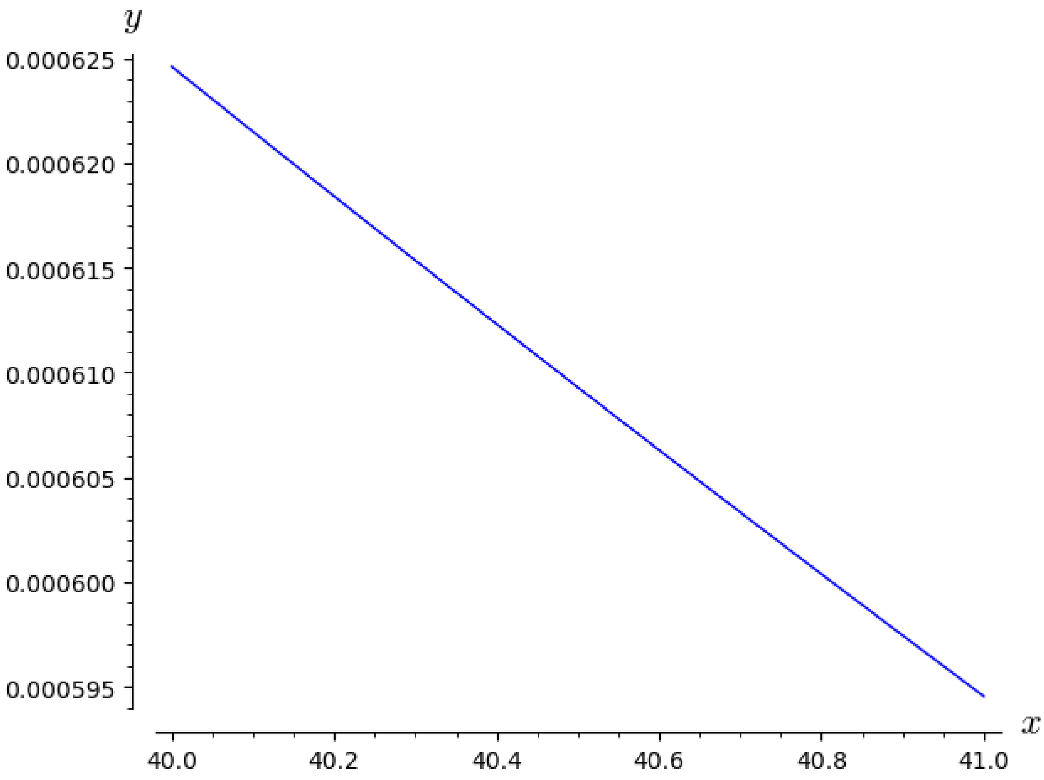


Функция plot строит график, внося ошибку округления. Построим график по точкам.

В [84]:

```
M=10
line([[40+m/M,f.subs(x=40+m/M)] for m in range(M+1)],axes_labels=['$x$','$y$'])
```

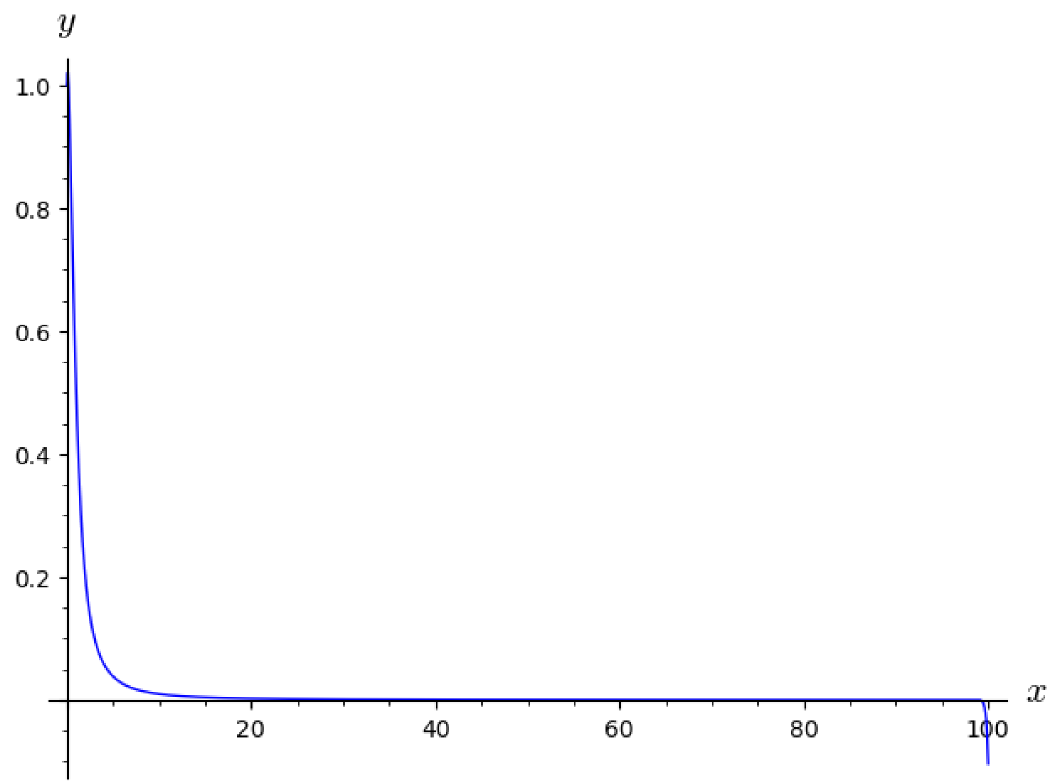
Out[84]:



В [85]:

```
# Считается долго!
M=10
line([[m/M,f.subs(x=m/M)] for m in range(100*M+1)],axes_labels=['$x$','$y$'])
```

Out[85]:



8.) Из школьного курса известны занчения синуса при 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ и $\pi/2$. Аппроксмируйте синус $\sin(1)$.

В [106]:

```
xx=[0,pi/6, pi/4, pi/3, pi/2]
points=[(a,sin(a)) for a in xx]
f=ipoly(points)
RR[x](f)
```

Out[106]:

```
0.0287971124604175*x^4 - 0.204340696021658*x^3 + 0.0213730075288633*x^2 + 0.995626184
```

В [107]:

```
f.subs(x=1).n()
```

Out[107]:

```
0.841455608242884
```

В [108]:

```
sin(1).n()
```

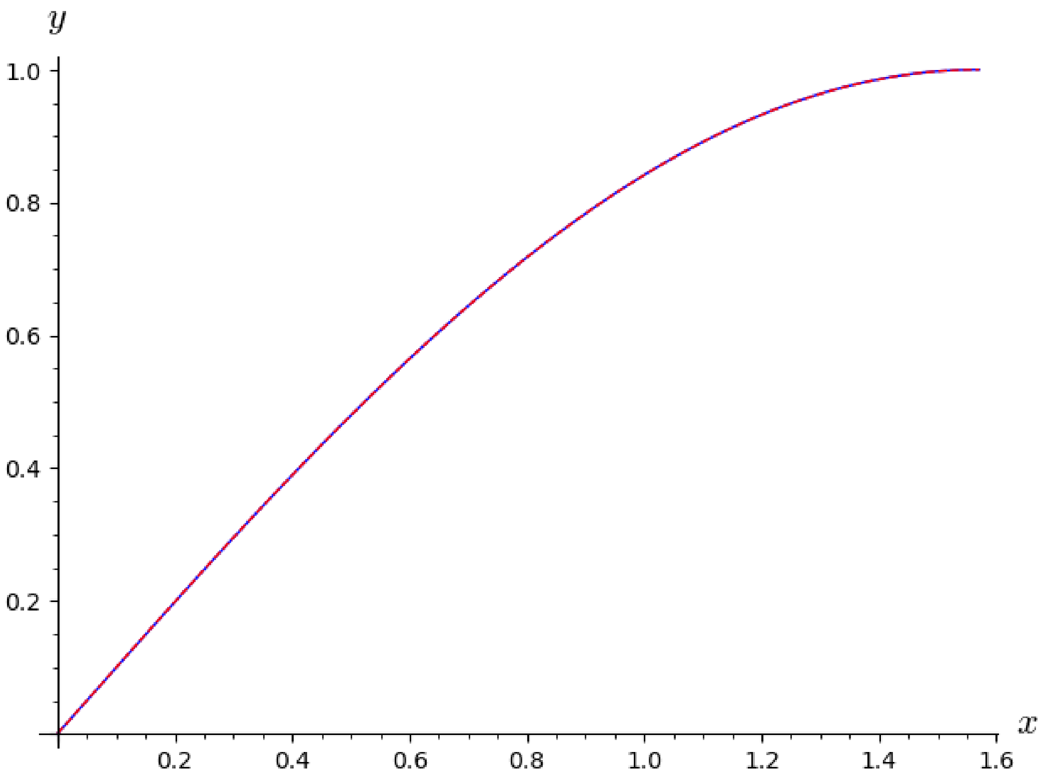
Out[108]:

```
0.841470984807897
```

В [109]:

```
plot(f,(x,0,pi/2),axes_labels=['$x$','$y$']) + plot(sin,(0,pi/2), color="red", l:
```

Out[109]:



Трудный вопрос. Почему это работает? С какой точнсотью? Как связано с теоремой Лагранжа? -- Н

$$g(x) = f(x) - \sin(x).$$

По теореме Лагража

$$g(1) = g(1) - g(\pi/3) = g'(c) \cdot (\pi/3 - 1)$$

и поэтому

$$|f(1) - \sin 1| \leq 0.05 \cdot (\max |f'| + 1)$$

Остается оценить производную на рассматриваемом отрезке.

В [112]:

```
RR[x](diff(f,x))
```

Out[112]:

```
0.115188449841670*x^3 - 0.613022088064973*x^2 + 0.0427460150577266*x + 0.995626184275
```

На отрезке $0 < x < 1$ это выражение меньше числа

В [118]:

```
sum([a for a in RR[x](diff(f,x)).coefficients()])
```

Out[118]:

```
0.540538561109684
```

Поэтому

$$|f(1) - \sin 1| \leq 1.6 \cdot 0.05 = 0.08$$

Оценка очень грубая.

В [ ]: