Геометрия на плоскости

Уравнение

$$f(x, y) = 0$$

задает линию на плоскости xy.

В [3]:

```
var("x,y")
```

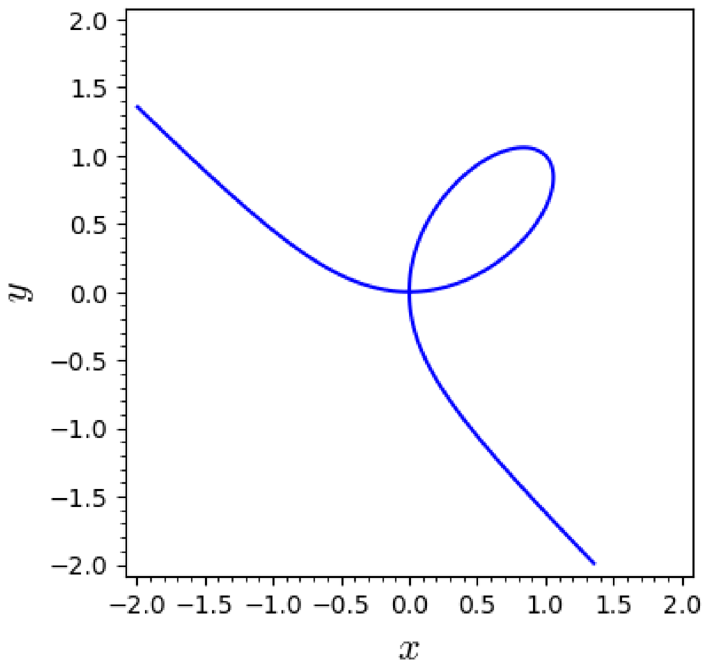
Out[3]:

```
(x, y)
```

В [4]:

```
implicit_plot(x^3+y^3-2*x*y, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$'])
```

Out[4]:



Задача о пересечении кривых

Задача. Найдите все вещественные точки пересечения листа Декарта

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

и окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

По умолчанию задача решается над полем $\mathbb{R}$.

Графическое решение

1.) Дайте графическое решение задачи. Сколько получи пересечения?

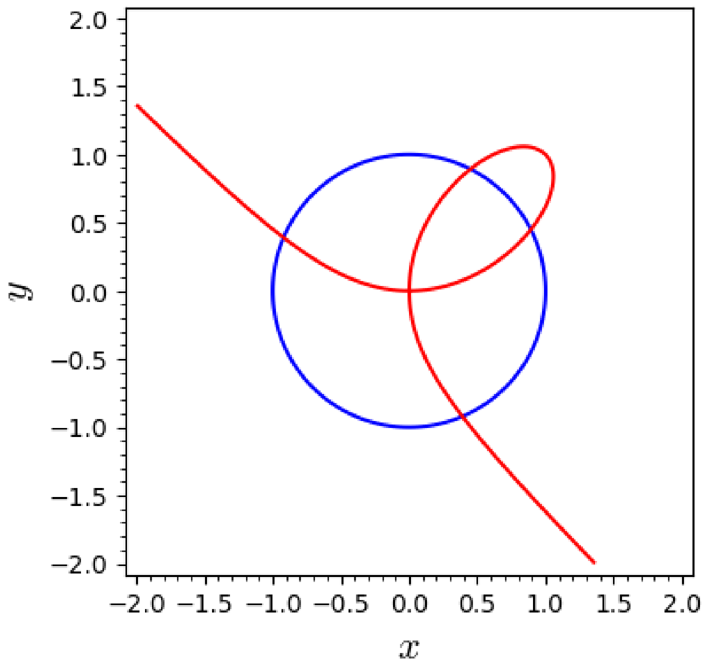
Ответ:

В данном случае получилось 4 точки пересечения.

В [5]:

```
K=QQ[x,y]
f=x^2+y^2-1
g=x^3+y^3-2*x*y
implicit_plot(f, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,-2,2),(y,-2,2), color='red')
```

Out[5]:



Зам. Могут быть потеряны корни.

Решение при помощи базисов Грёбнера

Абсциссы точек пеересечения удовлетворяют уравнению

$$h(x) = 0, \quad h \in (f, g)$$

Поэтому все дело сводится к отысканию следствия уравнений f и g, содержащему только x. такой многочлен обязательно входит в базис Грёбнера.

2.) Найдите базис Грёбера идеала

$$J = (x^3 + y^3 - 2xy, x^2 + y^2 - 1).$$

В [6]:

```
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
J=K*[f,g]
J.groebner_basis()
```

Out[6]:

```
[y + 10*x^5 + 24*x^4 + 15*x^3 - 34*x^2 - 19*x + 12, x^6 + 2*x^5 + 1/2*x^4 - 4*x
^2 + 2*x - 1/2]
```

3.) Эквивалентны ли системы уравнений

$$x^3 + y^3 = 2xy, \quad x^2 + y^2 = 1$$

и

$$y + 10x^5 + 24x^4 + 15x^3 - 34x^2 - 19x + 12 = 0, \quad x^6 + 2x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 - $$

Ответ:

Системы эквивалентны в QQ[x, y], но в CC[x,y] появляются комплексные корни, поэтому в CC

4.) Найдите вещественные корни того из базисных элем который зависит только от x.

Ответ:

В [7]:

```
[s,h]=J.groebner_basis() # Наш базис мы разложили на список элементов - s и
# где s - первый элемент, а h - второй.
```

После этого мы просто находим решения второго элемента - т.к базисе Грёбнера последний переменной, от какой - зависит от мономиального порядка. В данном случае - от x.

В [8]:

```
X=QQ[x](h).roots(AA,False)
X
```

Out[8]:

```
[-0.9203685839444056?,
 0.3910520038155663?,
 0.4497874598272411?,
 0.893135622949930?]
```

5.) Почему уравнение 6-ой степени имеет только 4-ре кс

Ответ:

Потому что ещё два корня - комплексные, а мы работаем в кольце рациональных чисел. В ит

4 - рациональные; 2 - комплексные.

6.) Подставьте найденные значения x в первое уравнен соответсвующие им значения y.

В [9]:

```
XY=[[xx, AA[y](s.subs(x=xx)).roots(AA,False)[0]] for xx in X]
XY
```

Out[9]:

```
[[-0.9203685839444056?, 0.3910520038155663?],
 [0.3910520038155663?, -0.9203685839444056?],
 [0.4497874598272411?, 0.893135622949930?],
 [0.893135622949930?, 0.4497874598272411?]]
```

В [46]:

```
XY=[[xx, AA[y](s.subs(x=xx)).roots(AA,False)] for xx in X]
XY
```

Out[46]:

```
[[-0.9203685839444056?, [0.3910520038155663?]],
 [0.3910520038155663?, [-0.9203685839444056?]],
 [0.4497874598272411?, [0.893135622949930?]],
 [0.893135622949930?, [0.4497874598272411?]]]
```

7.) Почему здесь испоьлзуется [0]?

Ответ:

Потому что наш список состоит из одного элемента, поэтому нет разницы между выводов од
списка.

8.) Сравните графическое решение и найденное при по Грёбнера.

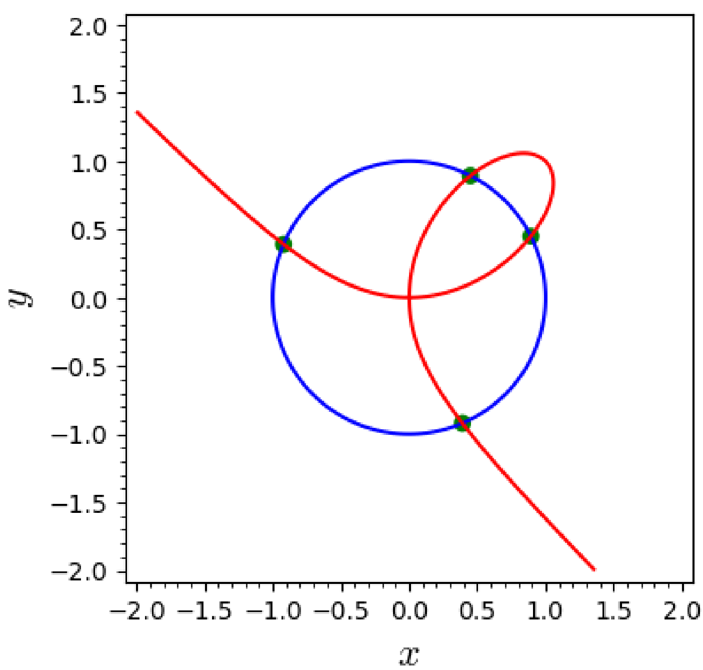
Ответ:

Если внимательно посмотреть на точки, то можно понять, что значения, которые мы получил Грёбнера, равны, во всяком случае, насколько здесь это видно. Чтобы увидеть эти точки бли строить какие-либо части графика с детальным приближением. Пока мы лишь можем сказат существенных отличий.

В [10]:

```
K=QQ[x,y]
f=x^2+y^2-1
g=x^3+y^3-2*x*y
implicit_plot(f, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,-2,2),(y,-2,2), color='red') + point(XY, size=50, color
```

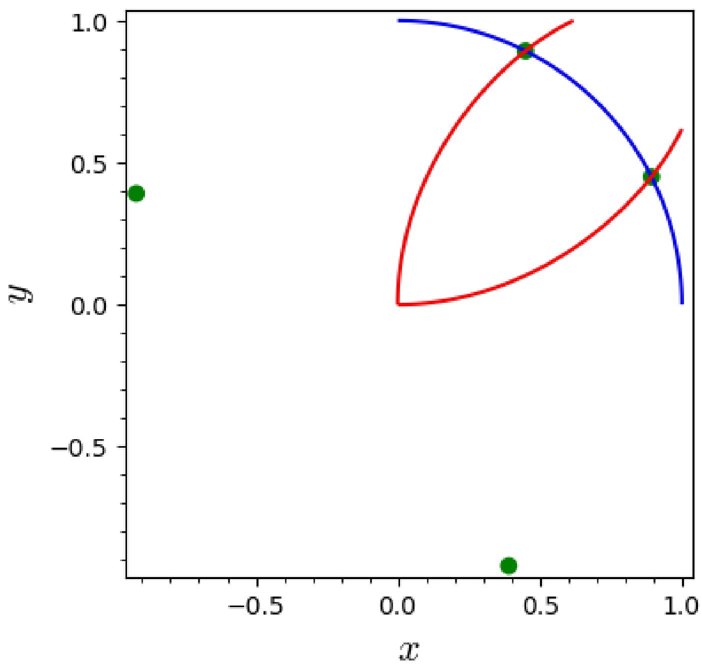
Out[10]:



В [11]:

```
implicit_plot(f, (x,0,1),(y,0,1), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,0,1),(y,0,1), color='red') + point(XY, size=50, color='
```

Out[11]:



9.) Решите ту же задачу над полем $\mathbb{C}$. Сколько получает пересечения?

Ответ:

Получается 6 точек пересечения, две из которых - с мнимыми единицами.

В [12]:

```
f=x^2+y^2-1
g=x^3+y^3-2*x*y
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
J=K*[f,g]
[s,h]=J.groebner_basis()
X=QQ[x](h).roots(QQbar,False)
XY=[[xx, QQbar[y](s.subs(x=xx)).roots(QQbar,False)[0]] for xx in X]
XY
```

Out[12]:

```
[[-0.9203685839444056?, 0.3910520038155662?],
 [0.3910520038155663?, -0.9203685839444056?],
 [0.4497874598272411?, 0.893135622949930?],
 [0.893135622949930?, 0.4497874598272411?],
 [-1.406803251324166? - 1.216180655962034?*I,
  -1.406803251324166? + 1.216180655962034?*I],
 [-1.406803251324166? + 1.216180655962034?*I,
  -1.406803251324166? - 1.216180655962034?*I]]
```

Решение при помощи нашей реализации алгоритма Бухбергера

10.) Найдите базис Грёбера идеала

$$J = (x^3 + y^3 - 2xy, x^2 + y^2 - 1),$$

не используя функцию groebner_baasis. Сколько получ базисных элементов? Есть ли среди них совпадающие

Ответ:

Всего элементов 17.

При этом у нас одно совпадение, а значит, что есть два одинаковых элемента.

Если считать совпадающие элементы как один, то будет 16 базисных элементов.

В [13]:

```
def rem_step(f,J,K):
    ans=0
    while ans==0:
        ans=1
        if K(f) != 0:
            for g in J:
                a = K(f).lt()/K(g).lt()
                if a in K:
                    ans=0
                    f=K(f)-a*K(g)
                    break
    return SR(f)

def rem(f,J,K):
    p=rem_step(f,J,K)
    r=0
    while K(p)!=0:
        [f,r]=[K(p)-K(p).lt(),K(r)+K(p).lt()]
        p=rem_step(f,J,K)
    return SR(r)

def spolynomials(J,K):
    S=[]
    for (f,g) in Combinations(J,2):
        m=lcm(K(f).lm(),K(g).lm())
        h=K(m/K(f).lt()*f-m/K(g).lt()*g)
        h=rem(h,J,K)
        if K(h)!=0:
            S.append(SR(h))
    return S

def groebner_basis(J,K):
    S=spolynomials(J,K)
    while S!=[]:
        print('*')
        J=J+S
        S=spolynomials(J,K)
    return J
```

В [14]:

```
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
B=groebner_basis([f,g],K)
B
```

```
*
*
*
*
```

Out[14]:

```
[x^2 + y^2 - 1,
 x^3 + y^3 - 2*x*y,
 -x^3 + x^2*y + 2*x*y - y,
 2*x^4 - 2*x^2 + 5*x*y - 2*x - 2*y + 1,
 -2/5*x^5 - 24/25*x^4 - 3/5*x^3 + 34/25*x^2 + 19/25*x - 1/25*y - 12/25,
 2/5*x^6 - 43/25*x^4 - 14/5*x^3 + 63/25*x^2 + 58/25*x - 2/25*y - 29/25,
 -2/5*x^5 - 24/25*x^4 - 3/5*x^3 + 34/25*x^2 + 19/25*x - 1/25*y - 12/25,
 -10*x^6 - 20*x^5 - 5*x^4 + 40*x^3 + 5*x^2 - 20*x + 5,
 5*x^7 - 10*x^6 - 75/2*x^5 - 30*x^4 + 155/2*x^3 + 20*x^2 - 85/2*x + 10,
 2/5*x^6 + 4/5*x^5 + 1/5*x^4 - 8/5*x^3 - 1/5*x^2 + 4/5*x - 1/5,
 10*x^7 + 24*x^6 + 13*x^5 - 38*x^4 - 21*x^3 + 18*x^2 + 3*x - 2,
 -5*x^8 + 53/2*x^6 + 43*x^5 - 33*x^4 - 51*x^3 + 18*x^2 + 13*x - 9/2,
 -10*x^7 - 24*x^6 - 13*x^5 + 38*x^4 + 21*x^3 - 18*x^2 - 3*x + 2,
 5*x^8 - 43/2*x^6 - 33*x^5 + 71/2*x^4 + 31*x^3 - 41/2*x^2 - 3*x + 2,
 -10*x^6 - 20*x^5 - 5*x^4 + 40*x^3 + 5*x^2 - 20*x + 5,
 5*x^7 - 35/2*x^5 - 25*x^4 + 75/2*x^3 + 15*x^2 - 45/2*x + 5,
 5*x^6 + 10*x^5 + 5/2*x^4 - 20*x^3 - 5/2*x^2 + 10*x - 5/2]
```

В [15]:

```
len(B)
```

Out[15]:

```
17
```

В [16]:

```
m = 0
k = 0
for i in B:
    while m!= 16:
        a = B[m]
        if i == a:
            k+=1
        m+=1
print(k)
```

```
1
```

11.) Найдите корни базисного элемента, зависящего от наименьшую степень.

В [17]:

```
h=B[-1]
X=QQ[x](h).roots(AA,False)
X
```

Out[17]:

```
[-0.9203685839444056?,
 0.3910520038155663?,
 0.4497874598272411?,
 0.893135622949930?]
```

12.) Как связаны базисные многочлены, зависящие тол

Ответ:

$$-10*x^6-20*x^5-5*x^4+40*x^3+5*x^2-20*x+5,$$

$$5*x^7-10*x^6-75/2*x^5-30*x^4+155/2*x^3+20*x^2-85/2*$$

$$2/5*x^6+4/5*x^5+1/5*x^4-8/5*x^3-1/5*x^2+4/5*x-1/$$

$$10*x^7+24*x^6+13*x^5-38*x^4-21*x^3+18*x^2+3*x$$

$$-5*x^8+53/2*x^6+43*x^5-33*x^4-51*x^3+18*x^2+13*x$$

$$-10*x^7-24*x^6-13*x^5+38*x^4+21*x^3-18*x^2-3*x$$

$$5*x^8-43/2*x^6-33*x^5+71/2*x^4+31*x^3-41/2*x^2-3*$$

$$-10*x^6-20*x^5-5*x^4+40*x^3+5*x^2-20*x+5,$$

$$5*x^7-35/2*x^5-25*x^4+75/2*x^3+15*x^2-45/2*x+$$

$$5*x^6+10*x^5+5/2*x^4-20*x^3-5/2*x^2+10*x-5/2$$

Это все многочлены от x, которые есть в нашем базисе. Они могут быть поделены на базисн зависит от x, и имеет наименьшую степень. При этом некоторые многочлены делятся так, чт число, то есть, они отличаются от нашего минимального многочлена лишь коэффициентами.

QQx (g).quo_rem(QQx (h)) - деление всех g из B по очереди на h - а в предыдущем задании м минимальных зависящий от x элемент. При этом элементы B должны принадлежать QQ[x], т одной переменной икс.

В [18]:

```
[QQ[x](g).quo_rem(QQ[x](h)) for g in B if g in QQ[x]]
```

Out[18]:

```
[(-2, 0),
 (x - 4, 0),
 (2/25, 0),
 (2*x + 4/5, 0),
 (-x^2 + 2*x + 9/5, 0),
 (-2*x - 4/5, 0),
 (x^2 - 2*x - 4/5, 0),
 (-2, 0),
 (x - 2, 0),
 (1, 0)]
```

13.) Найдите подходящие значения y.

Для отыскания y получается несколько уравнений, среди которых есть одно линейное.

В [20]:

```
[[AA[y](s.subs(x=xx)) for s in B] for xx in X]
```

Out[20]:

```
[[y^2 - 0.1529216696881696?,
  y^3 + 1.840737167888812?*y - 0.7796242833590908?,
  -1.993658837576981?*y + 0.7796242833590908?,
  -6.601842919722028?*y + 2.581663902632907?,
  -1/25*y + 0.01564208015262265?,
  -2/25*y + 0.03128416030524530?,
  -1/25*y + 0.01564208015262265?,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0],
 [y^2 - 0.8470783303118304?,
  y^3 - 0.7821040076311325?*y + 0.0598003253583809?,
  -0.06497432268069802?*y - 0.0598003253583809?,
  -0.04473998092216907?*y - 0.04117727288703635?,
  -1/25*y - 0.03681474335777623?,
  -2/25*y - 0.07362948671555245?,
  -1/25*y - 0.03681474335777623?,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  ...
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0,
  0]]
```

In [21]:

```
XY=[[xx, AA[y](B[2].subs(x=xx)).roots(AA,False)[0]] for xx in X]
XY
```

Out[21]:

```
[[-0.9203685839444056?, 0.3910520038155662?],
 [0.3910520038155663?, -0.920368583944406?],
 [0.4497874598272411?, 0.893135622949930?],
 [0.893135622949930?, 0.4497874598272411?]]
```

13.) Сравните полученное решение с найденным графи

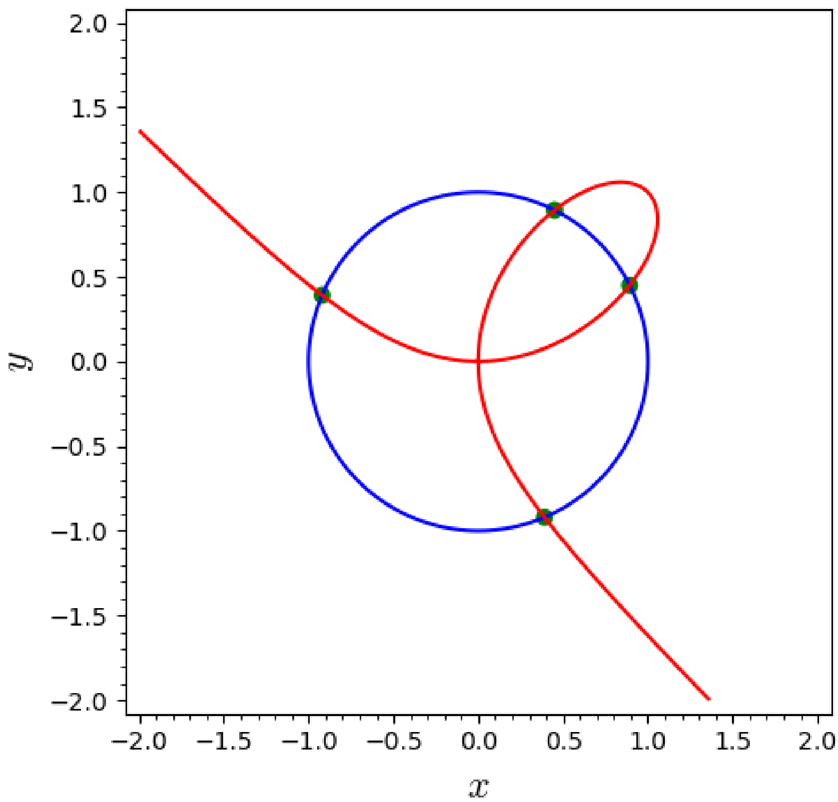
Ответ:

Если внимательно посмотреть на точки, то можно понять, что значения равны тем, которые м
базисов Гребнера, во всяком случае, насколько это видно. Чтобы увидеть эти точки ближе, н
какие-либо части графика с детальным приближением. Пока мы лишь можем сказать, что не
отличий.

In [40]:

```
implicit_plot(f, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,-2,2),(y,-2,2), color='red') + point(XY, size=50, color
```

Out[40]:



14.) Проверьте, что во всех 4-х точках уравнения B удо

В [41]:

```
[[AA(s.subs(x=xx).subs(y=yy)).minpoly() for s in B] for [xx,yy] in XY]
```

Out[41]:

```
[[x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x],
 [x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x],
 [x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x],
 [x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x, x]]
```

Здесь x - это минимальный многочлен, то есть само число - корень уравнения $x = 0$ (точный

15.) Всегда ли уравнение относительно y имеет первую

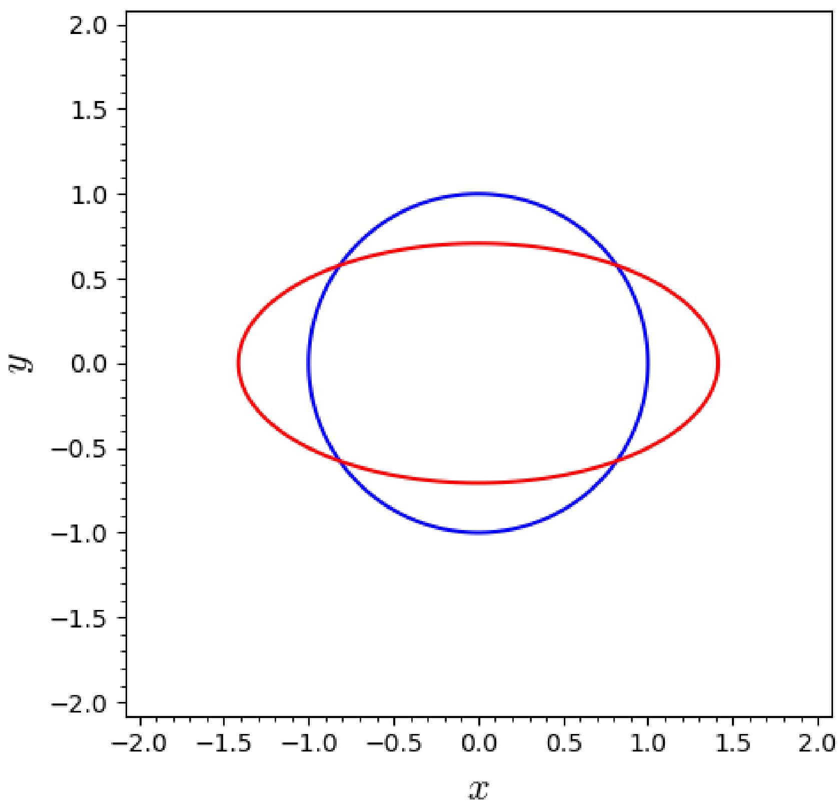
Ответ:

Нет, не всегда.

В [42]:

```
f=x^2+y^2-1
g=x^2+4*y^2-2
implicit_plot(f, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,-2,2),(y,-2,2), color='red')
```

Out[42]:



В [43]:

```
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
J=K*[f,g]
J.groebner_basis()
```

Out[43]:

```
[y^2 - 1/3, x^2 - 2/3]
```

16.) Могут ли получиться кратные корни?

Ответ:

Да, могут, ниже на графике видно, что получается два корня, но при этом они кратности два, в коде внизу страницы.

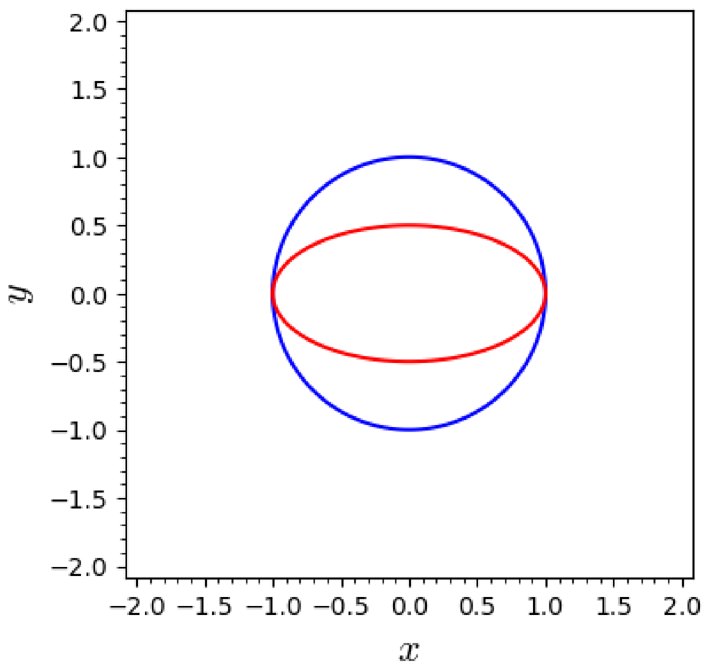
(-1, 0) - кратности 2

(1, 0) - кратности 2

В [25]:

```
f=x^2+y^2-1
g=x^2+4*y^2-1
implicit_plot(f, (x,-2,2),(y,-2,2), axes_labels=['$x$','$y$']) + \
implicit_plot(g, (x,-2,2),(y,-2,2), color='red')
```

Out[25]:



В [26]:

```
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
J=K*[f,g]
J.groebner_basis()
```

Out[26]:

```
[y^2, x^2 - 1]
```

В [30]:

```
[s,h]=J.groebner_basis()
X=QQ[x](h).roots(QQbar,False)
XY=[[xx, QQbar[y](s.subs(x=xx)).roots(QQbar,True)[0]] for xx in X]
XY
```

Out[30]:

```
[[-1, (0, 2)], [1, (0, 2)]]
```