Задачи на условный экстремум

Задача. Найдите минимальные и максимальные значения, которые приним

$$u = xy + x - y$$

на окружности

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Школьный метод

Рассмотрим отдельно $y > 0$ и $y < 0$. В первом случае

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

1.) Постройте графи зависимости u от x. В каких пределах меняется x? Им
экстремума?

x меняется от -1 до 1, имеются точки экстремума.

В [2]:

```
var("x,y")
u=x*y+x-y
f=u.subs(y=sqrt(1-x^2))
f
```

Out[2]:

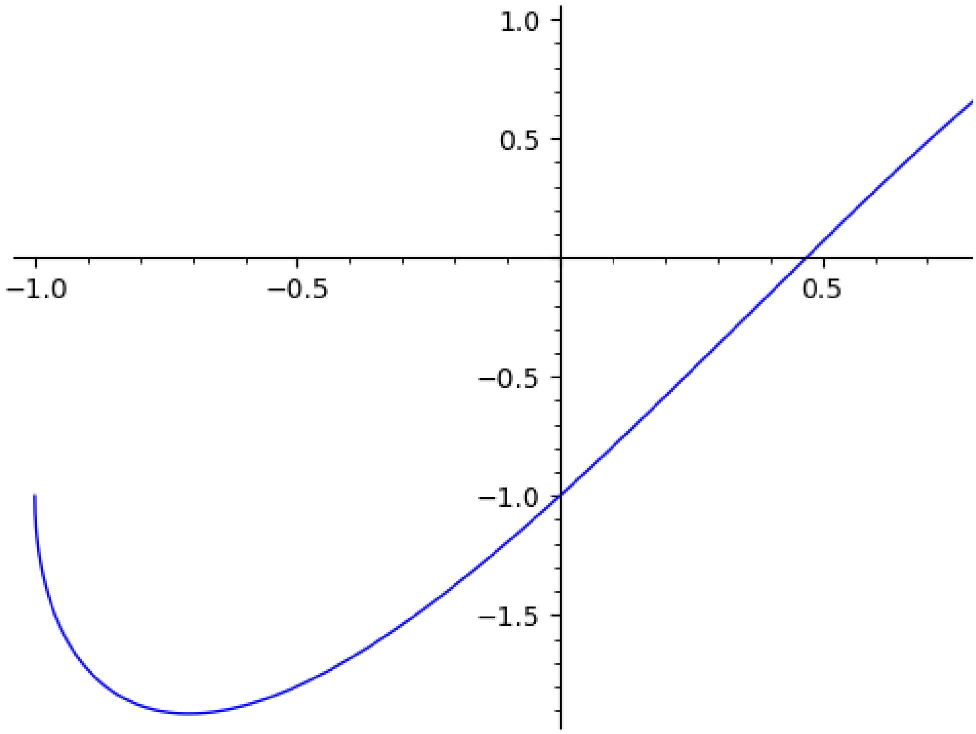
```
sqrt(-x^2 + 1)*x + x - sqrt(-x^2 + 1)
```

Эта функция имеет экстремум

В [3]:

```
plot(f,(x,-1,1))
```

Out[3]:



2.) Можно ли найти положения точек экстремума аналитически?

можно, найдя производную от f(x) и приравняв ее к нулю.

В [4]:

```
f1=diff(f,x).full_simplify()
f1
```

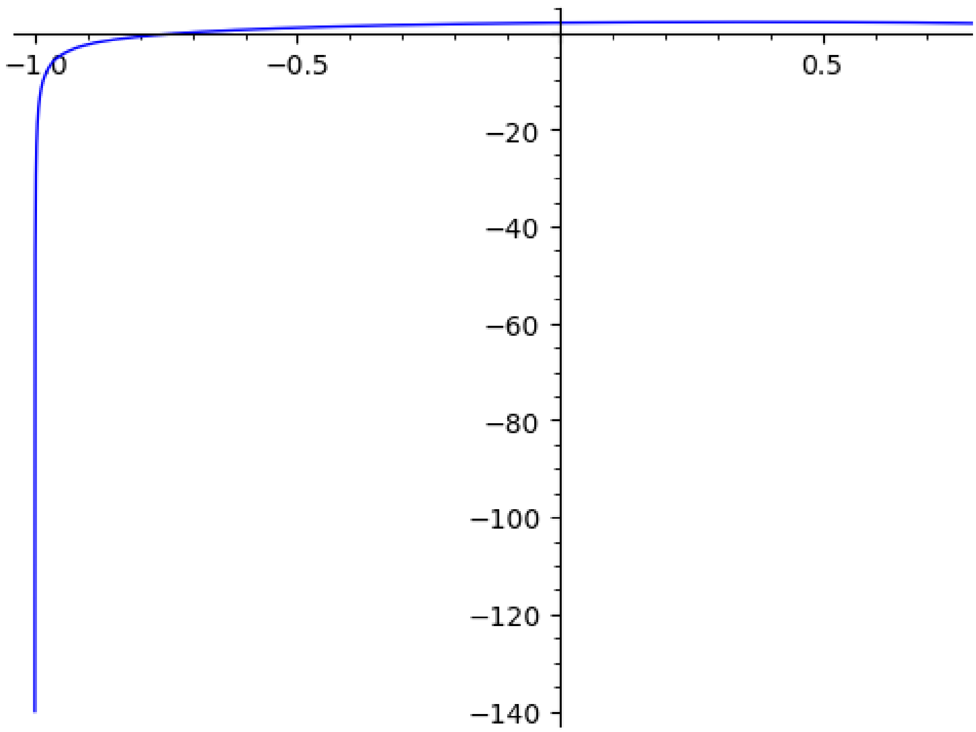
Out[4]:

```
(sqrt(-x^2 + 1)*(2*x + 1) + x + 1)/(x + 1)
```

В [5]:

```
plot(f1,(x,-1,1))
```

Out[5]:



Как решить это уравнение?

В [6]:

```
var("t")
S=[x==(t^2 - 1)/(t^2 + 1), y==-2*t/(t^2 + 1)]
u=x*y+x-y
f=u.subs(S).full_simplify()
f
```

Out[6]:

```
(t^4 + 4*t - 1)/(t^4 + 2*t^2 + 1)
```

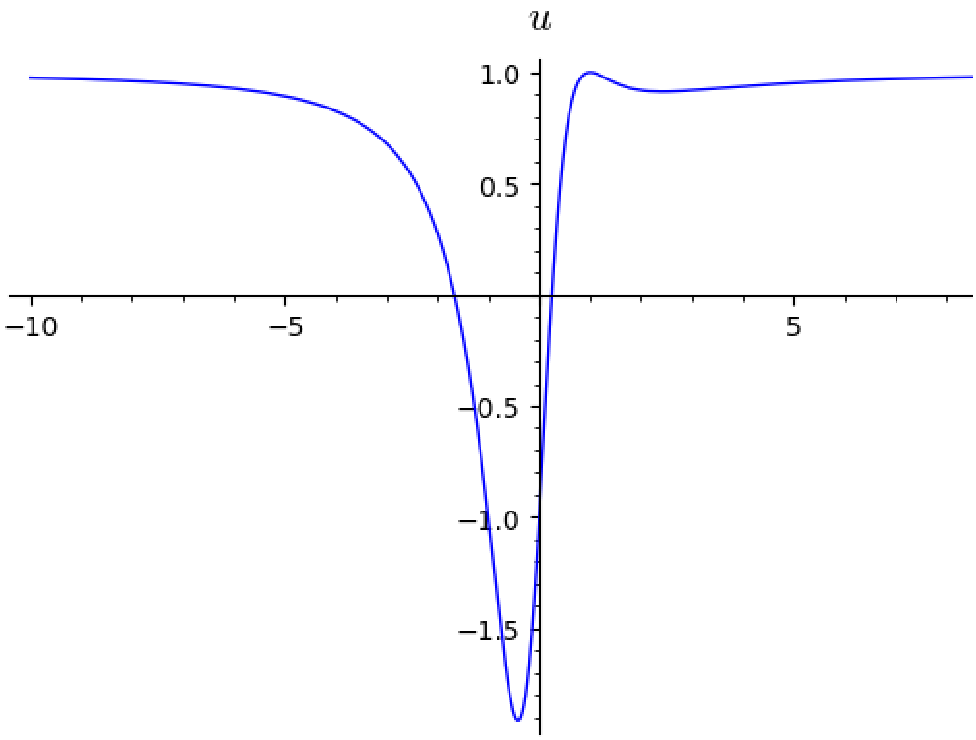
Метод, основанный на параметризации

3.) Используя параметизации, постройте грайик u от t.

В [7]:

```
plot(f,(t,-10,10), axes_labels=['$t$','$u$'])
```

Out[7]:



4.) Найдите положения стацинарных точек аналитически

В [8]:

```
f1=diff(f,t).full_simplify()
f1
```

Out[8]:

```
4*(t^3 - 3*t^2 + t + 1)/(t^6 + 3*t^4 + 3*t^2 + 1)
```

В [9]:

```
R=QQ[t](f1.numerator()).roots(AA,False)
R
```

Out[9]:

```
[-0.4142135623730951?, 1.000000000000000?, 2.414213562373095?]
```

В [10]:

```
[r.radical_expression() for r in R]
```

Out[10]:

```
[-sqrt(2) + 1, 1, sqrt(2) + 1]
```

5.) Определите тип точки экстремума

В [11]:

```
[diff(f,t,2).subs(t=r) for r in R]
```

Out[11]:

```
[9.94974746830584?, -1, 0.05025253169416733?]
```

Итог: $t = 1 \pm \sqrt{2}$ -- точки минимума, $t = 1$ -- точка максимума.

6.) Найдите минимальное и максимальное значение функции u.

В [12]:

```
[f.subs(t=r.radical_expression()) for r in R]
```

Out[12]:

```
[((sqrt(2) - 1)^4 - 4*sqrt(2) + 3)/((sqrt(2) - 1)^4 + 2*(sqrt(2)
1),
 1,
 ((sqrt(2) + 1)^4 + 4*sqrt(2) + 3)/((sqrt(2) + 1)^4 + 2*(sqrt(2)
1)]
```

Не забываем вычислить предел u при $t \to \infty$:

$$u \to 1.$$

Ответ: максимальное значение 1, минимальное равно:

В [13]:

```
f.subs(t=R[0].radical_expression())
```

Out[13]:

```
((sqrt(2) - 1)^4 - 4*sqrt(2) + 3)/((sqrt(2) - 1)^4 + 2*(sqrt(2) ·
1)
```

В [14]:

```
RR(f.subs(t=R[0].radical_expression()))
```

Out[14]:

```
-1.91421356237310
```

Задачи на безусловный экстремум

Задача. Найдите точки локального экстремума функции

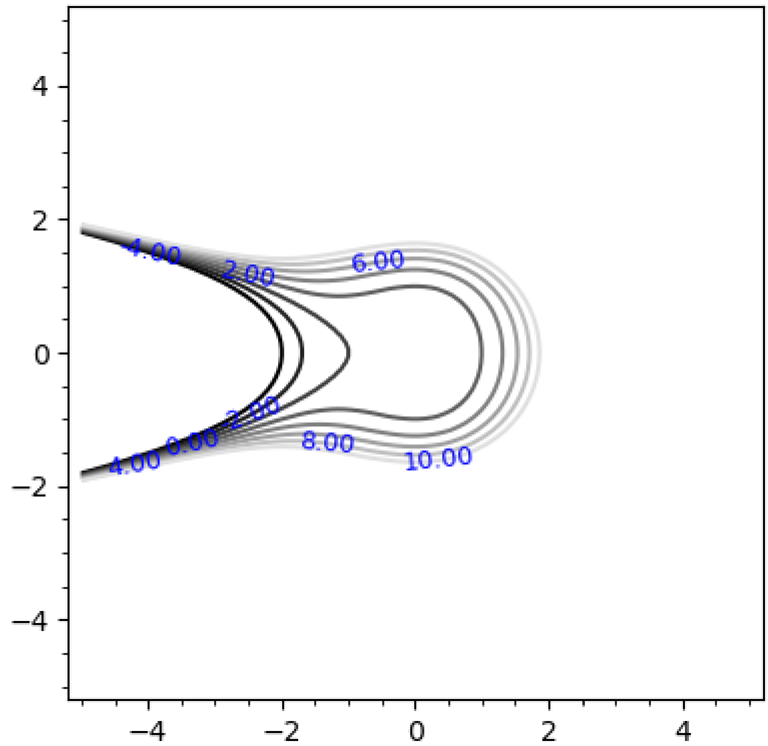
$$u = x^2 + y^2 + x^3 + x^2y^2 + y^4$$

7.) Постройте гарфик и линии уровня функции

В [15]:

```
var("x,y")
u=x^2+y^2+x^3+x^2*y^2+y^4
contour_plot(u,(x,-5,5),(y,-5,5), fill=False, contours=[-4,-
```

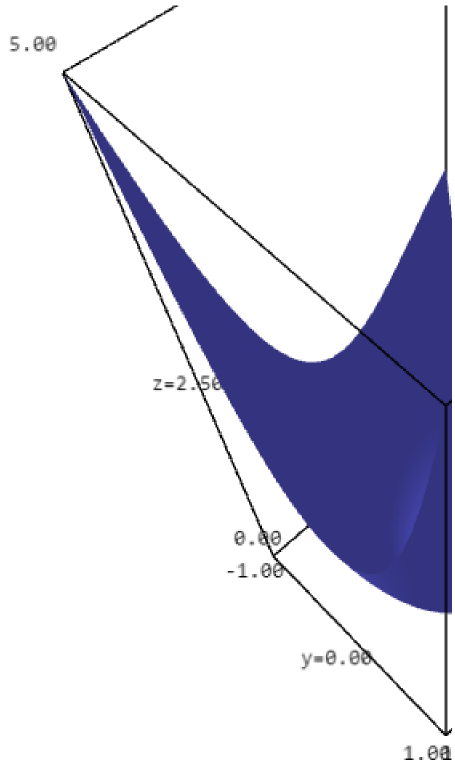
Out[15]:



В [16]:

```
plot3d(u,(x,-1,1),(y,-1,1))
```

Out[16]:



Зам. Не зная критических точек, нельзя правильно выбрать масштаб.

8.) Найдите стационарные точки, то есть точки, в которых обе производные

В [17]:

```
S=[diff(u,x), diff(u,y)]
S
```

Out[17]:

```
[2*x*y^2 + 3*x^2 + 2*x, 2*x^2*y + 4*y^3 + 2*y]
```

В [18]:

```
K=PolynomialRing(QQ,[y,x],order='lex')
J=K*S
B=J.groebner_basis()
B
```

Out[18]:

```
[y^3 + 1/2*y*x^2 + 1/2*y, y^2*x + 3/2*x^2 + x, y*x^3 - 3*y*x^2 -
- 7/3*x^3 - 3*x^2 - 2/3*x]
```

B [19]:

```
len(B)
```

Out[19]:

4

Зам. Здесь получился редцированный базис Грёбнера, состоящий не из 2,

B [20]:

```
X=QQ[x](B[-1]).roots(AA,False)
X
```

Out[20]:

```
[-0.6666666666666667?, -0.3027756377319947?, 0, 3.30277563773199
```

B [23]:

```
[AA[y](B[1].subs(x=xx)) for xx in X]
```

Out[23]:

```
[-2/3*y^2,
 -0.3027756377319947?*y^2 - 0.1652660075259706?,
 0,
 3.302775637731995?*y^2 + 19.66526600752597?]
```

При $x = 0$ второе уравнение обращается в нуль тождественно.

Случай 1. $x \neq 0$

B [28]:

```
Y=[AA[y](B[0].subs(x=xx)).roots(AA,False)[0] for xx in X if
Y
```

Out[28]:

```
[0, 0, 0]
```

B [29]:

```
XY=list(zip(X,Y))
XY
```

Out[29]:

```
[(-2/3, 0), (-0.3027756377319947?, 0), (0, 0)]
```

Первое уравнение удовлетворяется тождественно:

B [30]:

```
[QQ[x,y](B[0])(xx,yy) for (xx,yy) in XY]
```

Out[30]:

```
[0, 0, 0]
```

B [31]:

```
[QQ(QQ[x,y](B[0])(xx,yy)) for (xx,yy) in XY]
```

Out[31]:

```
[0, 0, 0]
```

Случай 2. $x = 0$

B [32]:

```
QQ[x,y](B[1]).subs(x=0)
```

Out[32]:

```
0
```

B [33]:

```
h=QQ[x,y](B[0]).subs(x=0)
h
```

Out[33]:

```
y^3 + 1/2*y
```

B [34]:

```
Y0=QQ[y](h).roots(AA,False)
Y0
```

Out[34]:

```
[0]
```

B [35]:

```
XY=XY+list(zip([0,0],Y0))
```

B [36]:

```
XY
```

Out[36]:

```
[(-2/3, 0), (-0.3027756377319947?, 0), (0, 0), (0, 0)]
```

9.) Проверьте выполнение достаточного условия: с.з. гессиана имеют один

В [37]:

```
[u.hessian().subs(x=xx).subs(y=yy) for (xx,yy) in XY]
```

Out[37]:

```
[
[  -2    0]  [0.1833461736080321?                   0]  [2 0]  [2
[   0 26/9], [                  0  2.183346173608032?], [0 2], [0
]
```

В [38]:

```
[matrix(AA,u.hessian().subs(x=xx).subs(y=yy)).eigenvalues()
```

Out[38]:

```
[[2.888888888888889?, -2.000000000000000?],
 [2.183346173608032?, 0.1833461736080321?],
 [2, 2],
 [2, 2]]
```

Зам. Здесь имеется баг, нужно сообщить Sage, что гессиан -- матрица над /

10.) Охарактеризуйте все найденные стационарные точки (min/max/седло).

Первая точка

В [49]:

```
XY[0] # - седло
```

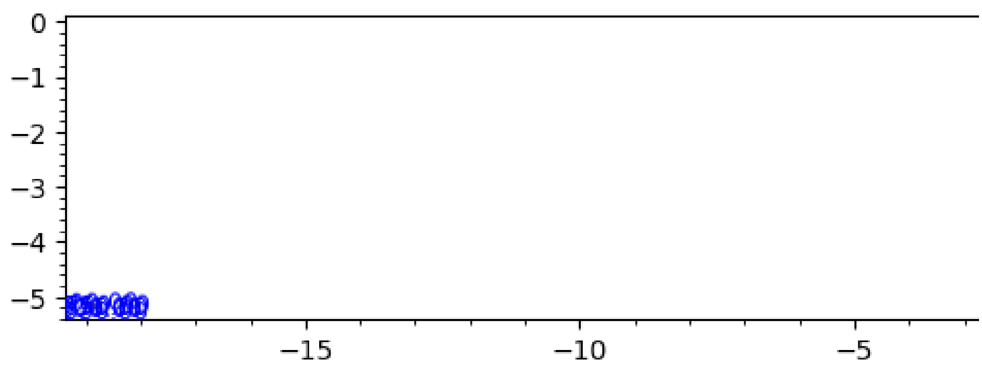
Out[49]:

```
(-2/3, 0)
```

В [50]:

```
contour_plot(u,(x,-19,-18.7),(y,-5.3,-5.1), fill=False, labe
implicit_plot(u-QQ[x,y](u)(*XY[0]),(x,-19,-18.7),(y,-5.3,-5.
```

Out[50]:



Зам. Чтобы увидеть седло, нужно нарисовать линию уровня, проходящую ч

Вторая точка

В [51]:

```
XY[1] # - седло
```

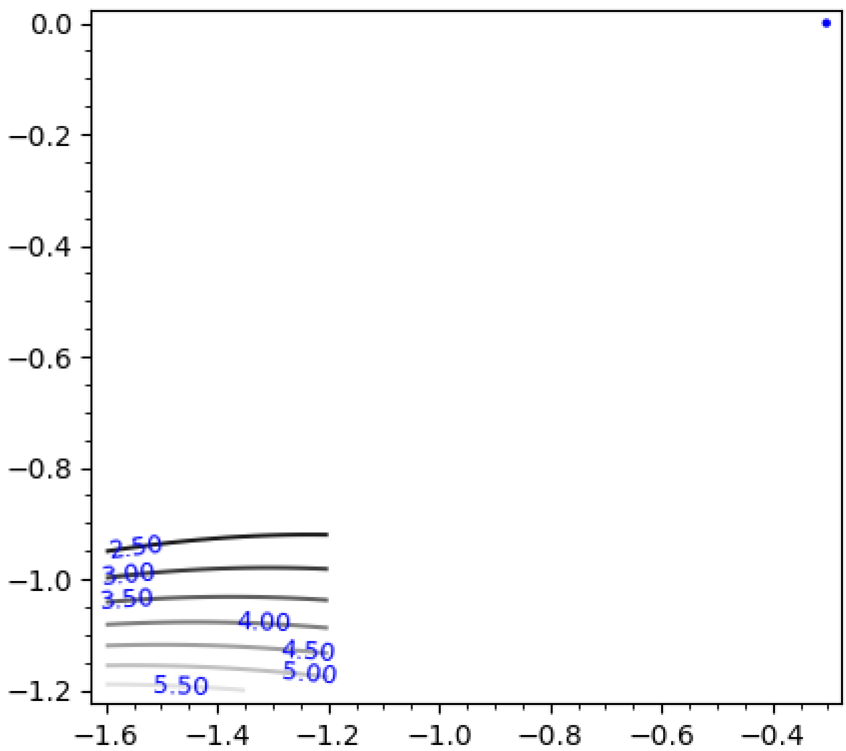
Out[51]:

```
(-0.3027756377319947?, 0)
```

В [52]:

```
contour_plot(u,(x,-1.6,-1.2),(y,-1.2,-0.9), fill=False, labe
```

Out[52]:



Третья точка

В [53]:

```
XY[2] # - седло
```

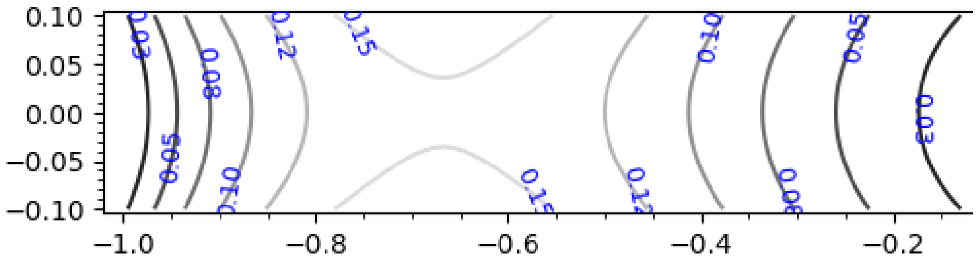
Out[53]:

```
(0, 0)
```

В [54]:

```
contour_plot(u,(x,-1,0),(y,-0.1,0.1), fill=False, labels=Tru
implicit_plot(u-QQ[x,y](u)(*XY[2]),(x,-1,0),(y,-0.1,0.1))
```

Out[54]:



Четвертая точка

В [46]:

```
XY[3] # - седло
```

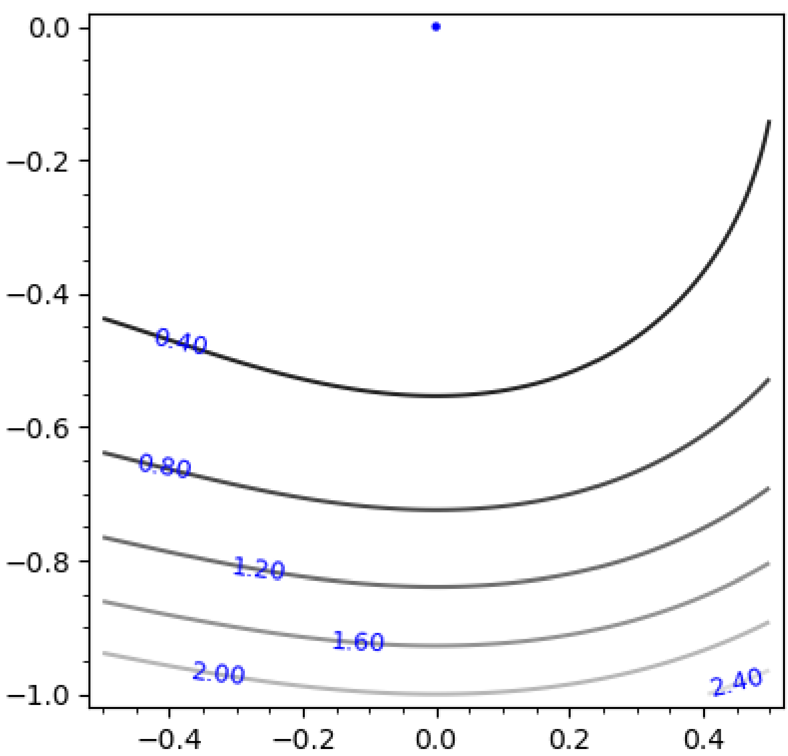
Out[46]:

(0, -0.7368062997280774?)

В [48]:

```
contour_plot(u,(x,-0.5,0.5),(y,-1,0), fill=False, labels=Tru
```

Out[48]:



Пятая точка

В [48]:

```
XY[4] # точки минимума
```

Out[48]:

```
(0, 0)
```

В [49]:

```
contour_plot(u,(x,-0.1,0.1),(y,-0.1,0.1), fill=False, labels
```

Out[49]: