Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №5 Полиномиальная теорема. Метод производящих функций. Задача о взвешивании

Полиномиальная теорема (1/2)

<u>Теорема</u>. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_k$ и натуральных *n* верна формула

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_k \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_k}^{n_k}$$

<u>Доказательство:</u> (индукция по числу слагаемых)

1. $k = 2$ формула сводится к биному Ньютона - верно
2. Допустим, что для некоторого *m* формула верна, т.е.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \dots + n_m = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \dots {a_m}^{n_m}$$

Полиномиальная теорема (2/2)

<u>Продолжение доказательства:</u> (индукция по числу слагаемых)

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1})^n = \left((a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + a_{m+1}\right)^n =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^l {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} C_n^l \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_m = l}} \frac{l!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \ldots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!\,(n-l)!} \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_m \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_m = l}} \frac{l!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \ldots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n-l} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots n_m, n_{m+1} \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_m + n_{m+1} = n}} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} {a_1}^{n_1} {a_2}^{n_2} \ldots {a_m}^{n_m} {a_{m+1}}^{n_{m+1}}$$

Ч.т.д.

Методы в комбинаторном анализе

В комбинаторном анализе существует целый ряд подходов для изучения комбинаторных объектов и чисел.

1.Теоретико-множественный подход. Связан с вычислениями мощностей конечных множеств. Для решения таких вопросов необходима дополнительная информация, т.е. надо заранее знать мощности некоторых подмножеств (например, принцип включений и исключений).

2. Алгебраический подход. Основан на использовании вспомогательных, легко получаемых комбинаторных тождеств для нахождения интересующих исследователя комбинаторных чисел (например, метод рекуррентных соотношений).

3.Применение формул обращения. Формулы обращения связывают между собой различные комбинаторные числа и могут быть получены самыми разными способами.

4.Метод производящих функций. Используется для перечисления комбинаторных чисел и установления тождеств.

Метод производящих функций

Определение. **Метод производящих функций** – математический прием, позволяющий сводить задачи из теории чисел, теории вероятностей и комбинаторики к задачам из анализа.

Рассмотрим на примере задачи о взвешивании.

Задача о взвешивании.

Какие грузы можно взвесить гирями $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ *грамм и сколькими способами? (Л. Эйлер, 1750-е гг.)*

Задача о взвешивании (1/2)

Задача о взвешивании.

Какие грузы можно взвесить гирями $1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ *грамм и сколькими способами?*

<u>Решение.</u> Эйлер рассматривал произведение:

$$\alpha(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots(1+z^{2^n})$$
$$\alpha(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots + A_m z^m$$

A_k - коэффициент при z^k, получается как произведение z в некоторой степени, т.е. A_k - это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых чисел 1, 2, 4, 8, …, 2^n.

Рассмотрим произведения:

$$\left.\begin{array}{cccc}
(1-z) & (1+z) & = & (1-z^2) \\
(1-z^2) & (1+z^2) & = & (1-z^4) \\
(1-z^4) & (1+z^4) & = & (1-z^8) \\
. & . & . & . \\
. & . & . & .
\end{array}\right\}$$

Задача о взвешивании (2/2)

Домножим $\alpha(z)$ на $(1-z)$:

$$(1-z)\alpha(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots\left(1+z^{2^n}\right) =$$
$$(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots\left(1+z^{2^n}\right) =$$
$$(1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\dots\left(1+z^{2^n}\right) = \dots = 1-z^{2^{n+1}}$$

Таким образом,

$$\alpha(z) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z},$$

что можно интерпретировать как сумму геометрической прогрессии со знаменателем z и единичным нулевым элементом, т.е.

$$\alpha(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2^{n+1}-1}.$$

<u>Ответ:</u> только одним способом можно взвесить груз весом k грамм гирями 1, 2, 4, 8, …2^n грамм, при $k \le 2^{n+1} - 1$.

Производящие функции

Очень часто работать с последовательностями достаточно сложно.

Для облегчения работы с числовой последовательностью можно поставить в соответствие некоторую функцию таким образом, чтобы обычные операции над последовательностями соответствовали бы простым операциям над соответствующими функциями.

Наиболее частым в комбинаторике является сопоставление последовательности ее **производящей функции**.

Определение. Пусть – произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Производящей функцией, ФСР (формальным степенным рядом), обозначается $f_a\,(z)$, для этой последовательности будем называть выражение вида

$$f_a(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Определение. Если все члены последовательности, начиная с некоторого, равны нулю, то производящая функция называется **производящим многочленом**.

Свойства производящих функций (1/3)

Свойство 1. (сумма и разность). Пусть a_k, b_k, c_k – последовательности, причем $c_k = \alpha a_k \pm \beta b_k$; f_a(z), f_b(z), f_c (z) – соответствующие им ПФ. Тогда

$$f_c(z) = \alpha f_a(z) \pm \beta f_b(z).$$

Доказательство:

$$f_c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} \beta b_n z^n =$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \pm \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \alpha f_a(z) \pm \beta f_b(z).$$

Свойство 2. (произведение). Пусть a_k, b_k, c_k – последовательности, причем $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$; (свертка), f_a(z), f_b(z), f_c (z) – соответствующие им ПФ. Тогда

$$f_c(z) = f_a(z) f_b(z).$$

Свойства производящих функций (2/3)

Доказательство свойства 2.

$$f_c(z) = f_a(z) f_b(z) =$$
$$= (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots) =$$
$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots +$$
$$+(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_i b_{n-i} + \cdots + a_n b_0) z^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}$$

Свойство 3. (производная ПФ) Пусть a_k, b_k– последовательности, причем $b_k = (k+1) a_{k+1},\ k \geq 0$; f_a(z), f_b(z) – соответствующие им ПФ, тогда $f_b(z) = \left(f_a(z)\right)'$

Доказательство:

$$f_a'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

Свойства производящих функций (3/3)

Свойство 4. (интеграл ПФ) Пусть a_k, b_k– последовательности, причем $b_k = \frac{a_{k-1}}{k}$, $k > 0$; $f_a(z)$, $f_b(z)$ – соответствующие им ПФ, тогда $f_b(z) = \int f_a(z)\, dz$.

Доказательство:

$$\int f_a(z)dz = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

Замечание 1: Операция дифференцирования обратна операции интегрирования:

$$\left(\int f(z)\right)' = f(z)$$

Замечание 2: Операция же интегрирования производной приводит к функции с нулевым свободным членом, и поэтому результат, вообще говоря, отличается от исходной функции.

$$\int f'(z)dz = f(z) - a_0$$