Факультет физико-математический и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №1

Введение в комбинаторику.

Выборка

Российский университет дружбы народов, 2016

Балльно-рейтинговая система

Контрольные мероприятия
- Контрольные работы (2) – по 30 баллов
- Коллоквиум – 10 баллов
- Работа на семинарах – 10 баллов
- Итоговый контроль (экзамен) – 20 баллов

Шкала перевода в пятибальную систему:

0-30	F	2
31-50	FX	2
51-60	E	3
61-68	D	3
69-85	C	4
86-94	B	5
95-100	A	5

Введение в комбинаторику

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из данных объектов, называется ***комбинаторикой***.

Рис. 1.1. Разделы дискретной математики

Множество

<u>Определение.</u> Множеством называется неупорядоченный набор различных элементов.

Множества обозначаются большими латинскими буквами *A,B,C.*

<u>Определение.</u> Подмножеством множества A называется такое множество B, что все его элементы принадлежат A.

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall b \in B, b \in A$$

Множества A и B называются равными, если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$.

Запись $|A|=n$ означает, что мощность конечного множества A равна n или множество A содержит n элементов.

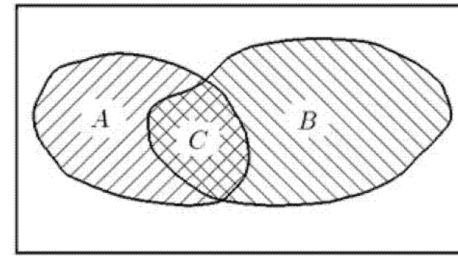
Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается $\emptyset$.

<u>Определение.</u> Множество, состоящее из всех подмножеств множества A, называется **булеаном** и обозначается 2^A.

$$2^A = \{B : B \subseteq A\}$$

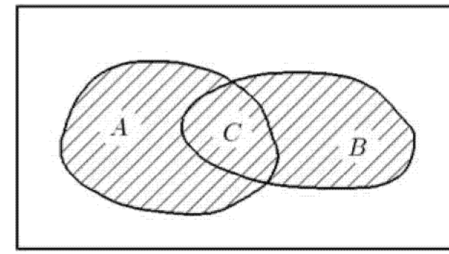
Отметим, что $|2^A| = 2^{|A|}$.

Основные операции над множествами



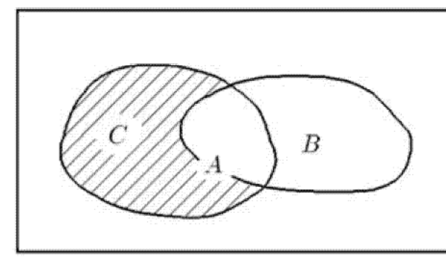
<u>Определение.</u> **Пересечением** множеств А и В называется множество С, состоящее из всех элементов, входящих как в А, так и в В.

$$C = A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$$



<u>Определение.</u> **Объединением** множеств А и В называется множество С, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из них.

$$C = A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$$



<u>Определение.</u> **Разностью** множеств А и В называется множество С, содержащее такие элементы из А, которые не входят в В.

$$C = A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

<u>Определение.</u> **Прямым произведением** множеств А и В называется множество всех таких пар их элементов, что первый элемент в паре принадлежит множеству А, а второй – множеству В.

$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$ – прямое произведение множеств.

Правило суммы

Если объект из множества A можно выбрать m способами, а объект из множества B можно выбрать другими n способами, то выбор "либо из A , либо из B" может быть осуществлен m+n способами.

Пример. Если на одной тарелке лежат 3 яблока, то выбрать одно яблоко можно 3 способами. Если на другой тарелке лежат 4 груши, то выбрать одну грушу можно 4 способами. А выбрать один фрукт можно 3+4=7 способами.

Обобщенное правило суммы. Если объект из множества A_1 можно выбрать m_1 способами, после этого объект из множества A_2 можно выбрать другими m_2 способами и так далее, объект из множества A_n можно выбрать m_n способами, то выбор "либо из A_1 , либо из A_2 **, …** либо из A_n " может быть осуществлен m_1 +m_2 +…+m_n способами.

Правило произведения

Если объект из множества A можно выбрать m способами, и после каждого из таких выборов объект из множества B можно выбрать n способами, то выбор “из A, и из B" может быть осуществлен $m \times n$ способами.

Пример. В автомашине 7 мест. Сколькими способами 7 человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т.е. существуют три способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято и т.д. Используя принцип умножения, получаем произведение:
$3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 6! = 2160.$
Ответ: 2160 способов.

Принцип Дирихле (1/2)

Если в n ящиков положено более чем n предметов (кроликов), то хотя бы в одном ящике может лежать 2 и более предметов (кроликов).

Пример: В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600 000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

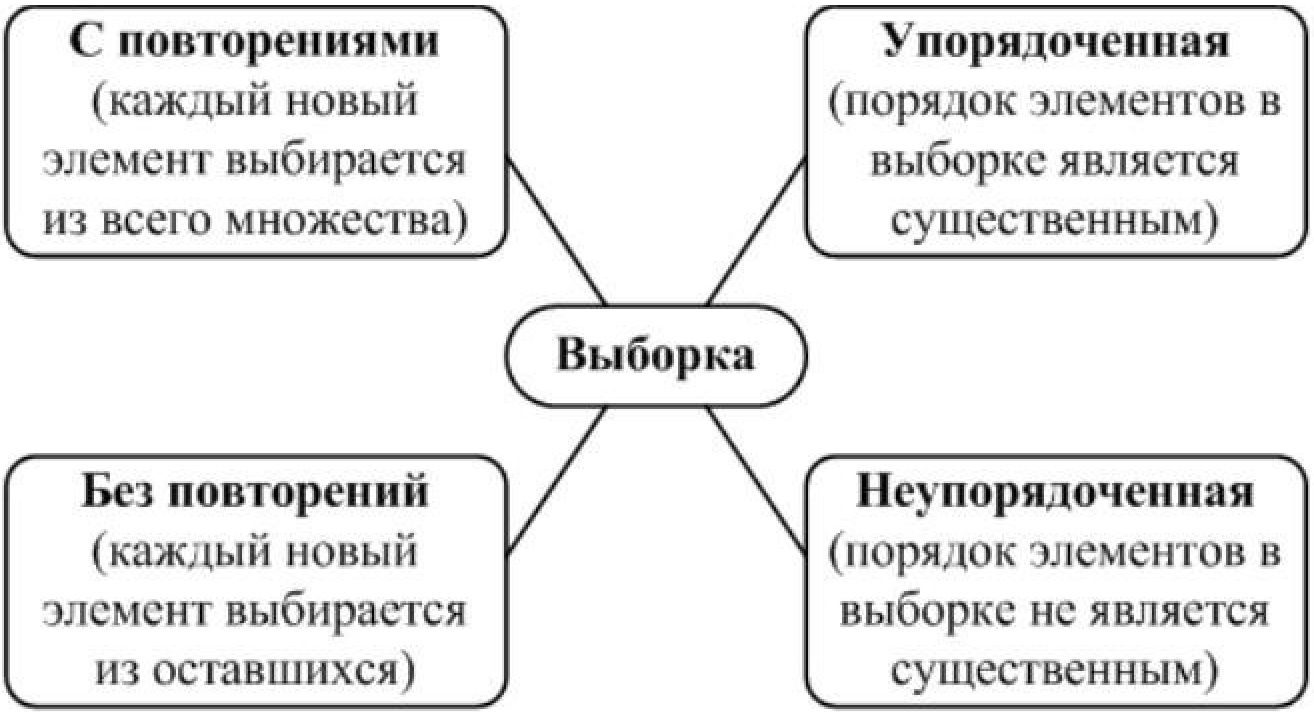
Решение: Перед нами миллион «кроликов» – елок и, увы, всего лишь 600 001 клетка с номерами от 0 до 600 000. Каждый «кролик» – елка сажается нами в клетку с номером, равным количеству иголок на этой елке. Так как «кроликов» гораздо больше, чем клеток, то в какой-то клетке сидит по крайней мере два «кро-лика»: если бы в каждой сидело не более одного, то всего «кроли-ков»-елок было бы не более 600 001 штуки. Но ведь если два «кролика» – елки сидят в одной клетке, то количество иголок у них одинаково.

Принцип Дирихле (2/2)

Существуют другие, более формальные определения это принципа:

1. если $n+1$ элементов разбить на n множеств, то по крайней мере одно множество содержит не менее 2 элементов.
2. если $nk+1$ элементов разбить на n множеств, то хотя бы в одном множестве окажется не менее $k+1$ элементов.
3. если m элементов разбить на n множеств, то хотя бы в одном множестве окажется не менее $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ элементов, и хотя бы одном множестве окажется не более $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ элементов.

Размещения, сочетания, перестановки



Виды выборки

Виды выборок (1/2)

<u>Определение</u>. Упорядоченная (*n,k*)-выборка без повторений называется **размещением без повторений** из *n* элементов по *k*.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$ -число различных размещений

<u>Определение</u>. Упорядоченная (*n,k*)-выборка с повторениями называется **размещением с повторениями** из *n* элементов по *k*

$$\hat{A}_n^k = n^k$$ -число различных перестановок

<u>Определение</u>. Неупорядоченная (*n,k*)-выборка без повторений называется **сочетанием без повторений** из *n* элементов по *k*.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ -число различных сочетаний

<u>Определение</u>. Неупорядоченная (*n,k*)-выборка с повторениями называется **сочетанием с повторениями** из *n* элементов по *k*.

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$ -число различных сочетаний с повторениями

Виды выборок (2/2)

Определение. Упорядоченная (n,n)-выборка без повторений называется **перестановкой** из n элементов.

$$P(n) = n! \text{ – число различных перестановок.}$$

Пример
Сколько существует способов составить очередь в магазин из 8 человек?

На 1 место можем поставить 8 человек, на 2-е – 7 человек, на 3 – 6 и т. д., получаем: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8! = 40\,320$ способов.

Ответ: 40 320 способов.

Число перестановок мультимножества

<u>Определение.</u> Мультимножеством называется неупорядоченный набор элементов, которые могут повторяться.

Пусть дано мультимножество M, $|M| = n$, содержащее k типов элементов, при этом элемент a_1 повторяется n_1 раз, a_2 – повторяется n_2 раз, …, $a_k - n_k$ раз $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$. Т.е.

$$M = \{\underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1,}_{n_1} \underbrace{a_2, a_2, \dots, a_2,}_{n_2} \dots \underbrace{a_k, a_k, \dots, a_k}_{n_k}\}$$

Тогда число различных перестановок элементов мультимножества определяется по формуле:

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$