Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №6
Элементарные производящие функции. Числа Каталана

Некоторые элементарные производящие функции

	ПФ	Последовательность
1	$(1+s)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\alpha}C_{\alpha}^{k}s^{k}$	$\{C_{\alpha}^{0},C_{\alpha}^{1},C_{\alpha}^{2},\ldots,C_{\alpha}^{\alpha},0,\ldots\}$
2.	$\frac{1}{1-s}=\sum_{k=0}^{\infty}s^{k}$	$\{1,1,1,\ldots\}$
3.	$\frac{1}{(1-s)^{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)s^{k}$	$\{1,2,3,4,\ldots\}$
4.	$\frac{1}{(1-s)^{r}}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{r+k-1}^{k}s^{k}$	$\{1,C_{r}^{1},C_{r+1}^{2},C_{r+2}^{3},\ldots\}$
5.	$\ln\left(\frac{1}{1-s}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}s^{k},\ a_{k}=\begin{cases}0, k=0\\ \frac{1}{k}, k\geq 1\end{cases}$	$\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right\}$
6.	$\ln(1+s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}s^{k},\ a_{k}=\begin{cases}0,\ k=0\\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, k\geq 1\end{cases}$	$\left\{0,1,\frac{(-1)}{2},\frac{1}{3},\frac{(-1)}{4},\ldots\right\}$
7.	$e^{s}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}s^{k}$	$\left\{1,\frac{1}{1!},\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\ldots\right\}$
8.	$\sin(x)=x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}-\frac{1}{7!}x^{7}+\ldots$	$\left\{0,1,0,\frac{(-1)}{3!},0,\frac{1}{5!},0,\ \ldots\right\}$
9.	$\cos(x)=1-\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{4!}x^{4}-\frac{1}{6!}x^{6}+\ldots$	$\left\{1,0,\frac{(-1)}{2!},0,\frac{1}{4!},0,\ \ldots\right\}$

Вывод элементарных ПФ (1/4)

1) Для доказательства используем обобщенный бином Ньютона для действительных степеней

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{k\geq 0} C_{\alpha}^{k} z^{k}\text{, где } C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Следовательно, $(1+z)^{\alpha} \leftrightarrow \{C_{\alpha}^{k}\}, k\geq 0$.

2) При $0<z<1$ последовательность $1, z, z^2, \ldots z^n, \ldots$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а ее сумма

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}.$$

Следовательно, $\frac{1}{1-z} \leftrightarrow \{1,1,\ldots,1,\ldots\}$.

3) Заметим, что $\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}$, тогда

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) z^n.$$

Следовательно, $\frac{1}{(1-z)^2} \leftrightarrow \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$.

Вывод элементарных ПФ (2/4)

4) Заметим, что $\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(r-1)} = \frac{(r-1)!}{(1-z)^r}$, тогда

$$\frac{1}{(1-z)^r} = \frac{1}{(r-1)!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^{(r-1)} = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-r+2)z^{n-r+1} =$$

$$= \sum_{n=r-1}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!} z^{n-r+1} = \sum_{n=r-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!} z^{n-r+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{n} z^n$$

Следовательно, $\frac{1}{(1-z)^r} \leftrightarrow \{C_{n+r-1}^{n}\}, n \geq 0.$

5) Заметим, что $\int \frac{1}{1-z} dz = ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$, тогда

$$ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n .$$

Следовательно, $ln\left(\frac{1}{1-z}\right) \leftrightarrow \left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}.$

Вывод элементарных ПФ (3/4)

6) Заметим, что $ln(1-z) = -ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$, тогда подставляя –$z$ вместо z

$$ln(1+z) = -ln\left(\frac{1}{1-(-z)}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$$

Следовательно, $ln(1+z) \leftrightarrow \left\{0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{(-1)^{n+1}}{n},\dots\right\}$

7) Используем формулу Маклорена представления дифференцируемой функции в окрестности нуля: $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(e^z)^{(n)} = e^z,$$

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

Следовательно,$e^z \leftrightarrow \left\{1,1,\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\dots,\frac{1}{n!},\dots\right\}$.

Вывод элементарных ПФ (4/4)

8) Используем формулу Маклорена представления дифференцируемой функции в окрестности нуля: $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$(sinz)' = cosz,$$
$$(sinz)'' = -sinz$$
$$(sinz)^{(3)} = -cosz$$
$$(sinz)^{(4)} = sinz$$
$$sinz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Следовательно,sinz $\leftrightarrow \left\{0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},\dots,\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\dots\right\}$.

Числа Каталана

Числа Каталана — числовая последовательность, встречающаяся в удивительном числе комбинаторных задач. Ниже дано одно из возможных определений этих чисел.

Определение. Числом Каталана C_n называется количество правильных скобочных последовательностей длины $2n$, т. е. таких последовательностей скобок, в которых количество открывающих скобок равно количеству закрывающих, и в любом ее префиксе открывающих скобок не меньше, чем закрывающих.

Например, для n=3 существует 5 таких последовательностей, т.е. $C_3 = 5$:

$$((())),\ ()(()),\ ()()(),\ (())(),\ (()()).$$

Эта последовательность названа в честь бельгийского математика Каталана (Catalan), жившего в 19 веке, хотя на самом деле она была известна ещё Эйлеру (Euler), жившему за век до Каталана.

Первые несколько чисел Каталана: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, …

Рекуррентное соотношение чисел Каталана

Заметим, что между парой из открывающей и закрывающей скобок можно расположить правильную последовательность из $2k$ скобок, $0 \leq k \leq n - 1$. Тогда получим такое расположение скобок:

$$\overbrace{\underset{2k}{((\dots))}\quad\underset{2(n-k-1)}{(\dots)}}$$

Чтобы вычислить число способов правильно расположить последовательность из $2n$ скобок необходимо вычислить количество всех возможных вариантов расположить $2k$ скобок между данной парой из открывающей и закрывающей скобок и оставшихся $2(n - k - 1)$ скобок вне данной пары. Просуммировав по всем возможным k, получим

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0 = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i},$$

с начальным значением $C_0 = 1$

ПФ чисел Каталана

Запишем ПФ чисел Каталана по определению

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} =$$

$$1 + z \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = 1 + zC(z)C(z).$$

Таким образом, мы получили соотношение для ПФ чисел Каталана:

$$C(z) = 1 + zC(z)C(z).$$

Решая полученное соотношение относительно $C(z)$, получаем

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Так как $C(0) = C_0 = 1$, то подставляя $z = 0$ в оба эти корня, окончательно получаем

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}.$$

Вывод формулы для *n*-го числа Каталана (1/2)

Расспишем для начала $\sqrt{1-4z}$ в степенной ряд, используя табличные ПФ

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^{n} (-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}(-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!\,2^n}(-1)^n 4^n z^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-3)}{n!} 2^n z^n =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-3)(n-1)!}{n!\,(n-1)!} 2^n z^n$$

Вывод формулы для *n*-го числа Каталана (2/2)

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-3)(n-1)!}{n!\,(n-1)!}2^n z^n=$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots(2n-3)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{n!\,(n-1)!}2z^n=$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}z^n=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^n$$

Теперь, подставляя выражение для $\sqrt{1-4z}$ в ПФ чисел Каталана, получим

$$C(z)=\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}=\frac{1}{2z}\left(1-(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}z^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}z^n.$$

Таким образом,

$$C_n=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}.$$

Вывод упрощенной рекуррентной формулы

Последняя формула позволяет получить упрощенное рекуррентное соотношение для эффективного алгоритма расчета чисел Каталана.

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} C_{2n+2}^{n+1} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} =$$

$$= \frac{4n+2}{(n+2)} C_n$$

Таким образом,

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n.$$