Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №3

Разбиение множеств. Числа Стирлинга первого и второго рода. Числа Белла

Разбиения множества

Определение: Под **разбиением** n-элементного множества A на k блоков будем понимать семейство подмножеств $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ множества A, которые удовлетворяют следующим условиям:
1. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$;
2. $B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq k$;
3. $B_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq k$.

Множество разбиений множества A на k блоков будем обозначать $\Pi_k(A)$.
Множество разбиений множества A на произвольное число блоков будем обозначать $\Pi(A)$.

Числа Стирлинга второго рода (1/3)

Определение: **Число Стирлинга 2-го рода** $S(n,k)$есть число разбиений n-элементного множества на k блоков:
$S(n,k) = |\Pi_k(A)|$, где $|A| = n$.

Пример: Число $S(4,2) = 7$, так как множество $\{a,b,c,d\}$ можно разбить на 2 блока 7-ю различными способами:

$$\big\{\{a\},\{b,c,d\}\big\},\big\{\{b\},\{a,c,d\}\big\},\big\{\{c\},\{a,b,d\}\big\},\big\{\{d\},\{a,b,c\}\big\},\big\{\{a,b\},\{c,d\}\big\},$$
$$\big\{\{a,c\},\{b,d\}\big\},\big\{\{a,d\},\{b,c\}\big\}$$

Теорема: Числа Стирлинга 2-го рода можно вычислять рекуррентно по формуле

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), 0 < k < n,$$

с начальными условиями

$$S(n,n) = 1, n \geq 0,$$
$$S(n,0) = 0, n > 0,$$
$$S(n,k) = 0, n < k.$$

Числа Стирлинга второго рода (2/3)

<u>Доказательство:</u> Начальные условия следуют из определения чисел Стирлинга 2-го рода. Докажем рекуррентное соотношение.

Пусть множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ состоит из $n > 1$ элементов, $\Pi_k(A)$ - множество всех разбиений множества A на k блоков. Будем считать, что элемент a_n входит в последний блок разбиения B_k, т.е. $a_n \in B_k$. Разделим множество разбиений $\Pi_k(A)$ на два класса: $\Pi'_k(A)$, в который входят такие разбиения, в которых $|B_k| = 1$, и $\Pi''_k(A)$, содержащий разбиения, в которых $|B_k| > 1$. Мощность первого класса равна числу разбиений оставшихся элементов (кроме a_n) на $k-1$ блоков (не считая блок B_k), т.е. $S(n-1, k-1)$. Все разбиения второго класса $\Pi''_k(A)$ можно получить из разбиения множества $A \setminus \{a_n\}$ на k блоков, добавляя элемент a_n в любой из k блоков. Таким образом, мощность второго класса равна $kS(n-1, k)$.
Тогда число разбиений множества A
$S(n,k) = |\Pi'_k(A)| + |\Pi''_k(A)| = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$, ч.т.д.

Числа Стирлинга второго рода (3/3)

Таблица начальных значений чисел Стирлинга 2-го рода.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Числа Белла (1/2)

Определение: **Число Белла** B_n есть число всех разбиений n-элементного множества.
$B_n = |\Pi(A)|$, где $|A| = n$, или

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

Теорема: Числа Белла можно вычислять рекуррентно по формуле

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$$

с начальным условием

$$B_0 = 1.$$

n	B_n
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4 140
9	21 147
10	115 975
11	678 570
12	4 213 597
13	27 644 437
14	190 899 322
15	1 382 958 545
16	10 480 142 147
17	82 864 869 804
18	682 076 806 159
19	5 832 742 205 057
20	51 724 158 235 372

Числа Белла (2/2)

Доказательство:
Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$, $|A| = n + 1$, и элемент a_{n+1} принадлежит блоку B. Тогда множество всех разбиений можно разделить на непересекающиеся подмножества $\Pi^i(A)$ такие, что $|B| = i$. Сформировать блок B можно C_n^{i-1} способами, $i = 1,2, \dots, n$, и для каждого такого блока B разбить оставшиеся $n - i + 1$ элементов на произвольное количество блоков можно B_{n-i+1} способами. Тогда

$$B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1}\, B_{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{n-i+1}\, B_{n-i+1} = \begin{bmatrix} \text{замена} \\ k \coloneqq n - i + 1 \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, B_k$$

что и требовалось доказать.

Числа Стирлинга первого рода (1/3)

Введем следующее обозначение многочлена:

$[x]_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$.

В частных случаях эти многочлены имеют вид

$[x]_0 = 1$,

$[x]_1 = x$,

$[x]_2 = x(x-1)$,

$[x]_3 = x(x-1)(x-2)$.

<u>Определение</u>. **Числа Стирлинга 1-го рода** $s(n.k)$ есть коэффициенты при последовательных степенях переменной x в многочлене $[x]_n$:

$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$.

Числа Стирлинга первого рода (2/3)

<u>Теорема:</u> Числа Стирлинга 1-го рода можно вычислять рекуррентно по формуле

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), 0 < k < n,$$

с начальными условиями

$$s(n,n) = 1, n \geq 0,$$
$$s(n,0) = 0, n > 0,$$
$$s(n,k) = 0, n < k.$$

<u>Доказательство:</u> Начальные условия следуют из определения чисел Стирлинга 1-го рода. Докажем рекуррентное соотношение.

Из определения многочленов $[x]_n$ следует соотношение

$[x]_n = (x-n+1)[x]_{n-1}$, $n > 0$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k = (x-n+1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} -$$

$$-(n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k = \sum_{k=2}^{n} s(n-1,k-1)x^k - (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)x^k$$

Числа Стирлинга первого рода (3/3)

Продолжение доказательства

$$= \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)x^k - s(n-1,0)x^1 - (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} s(n-1,k)x^k - s(n-1,n)x^n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k))x^k$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим

$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$, ч.т.д.

k n	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1