Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

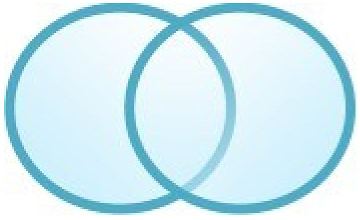
ЛЕКЦИЯ №4
Формула включений и исключений

Формула включений и исключений (определение)

Определение. Формула (или принцип) включений и исключений — комбинаторная формула, позволяющая определить мощность объединения конечного числа конечных множеств, которые в общем случае могут пересекаться друг с другом.

Обозначим через $|N|$ мощность множества N, из этого сразу следует, что:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$



Графическое представление формулы включений и исключений

Формула включений и исключений (в терминах множеств)

Формула включения исключения может быть представлена в следующей форме.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ -конечные множества, тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \cdots$$

$$\ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Формула включений и исключений (в терминах свойств)

<u>Теорема.</u> Пусть имеется N элементов и n свойств $p_1, p_2, \dots, p_n$.
Обозначим

$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k})$ – число элементов, обладающих, по крайней мере, свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$,

$N(\overline{p_{i_1}}, \overline{p_{i_2}}, \dots, \overline{p_{i_k}})$ – число элементов, **не обладающих** свойствами $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$,

$N(k)$ – число элементов, обладающих ровно k свойствами (любыми).

Тогда число $N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_n})$элементов, не обладающих не одним из свойств вычисляется по формуле

$$N(0) = N + \sum_{s=1}^{n} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$$

$$= N - \sum_{1 \le i \le n} N(p_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right)$$

$$+ \dots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}\right) + (-1)^n N(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

Формула включений и исключений (доказательство)

Доказательство. (индукция по числу свойств)

При n=1 свойств формула верна, т.к.

$$N(0) = N(\overline{p_1}) = N - N(p_1).$$

Допустим, формула верна для некоторого m свойств, т.е

$$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) = N + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}).$$

Тогда $N(0)$ при $m+1$ свойствах

$$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, \overline{p_{m+1}}) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) - N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}).$$

Выражение для $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m})$ следует из предположения индукции. А $N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1})$ можно вычислить, применяя формулу из предположения для m свойств к множеству элементов $N(p_{m+1})$, обладающих свойством p_{m+1}:

$$N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}) = N(p_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}, p_{m+1})$$

Формула включений и исключений (продолжение доказательства)

Тогда

$$N(0) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, \overline{p_{m+1}}) = N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}) - N(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}, p_{m+1}) =$$

$$N + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s})$$

$$- \left(N(p_{m+1}) + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}, p_{m+1}\right) \right) =$$

$$N - \sum_{1 \le i \le m} N(p_i) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}\right) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right) + \cdots$$

$$+ (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}\right) + (-1)^m N(p_1, p_2, \dots, p_m) - N(p_{m+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i \le m} N(p_i, p_{m+1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{m+1}\right) + \cdots + (-1)^{m+1} N(p_1, p_2, \dots, p_{m+1})$$

$$= N + \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le m+1} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}).$$

Задача о беспорядках

Определить количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1,\ldots,n$, таких, что $a_i \neq i, i = \overline{1,n}$

Решение. Число всех перестановок $N=n!$.

Свойство p_i: $a_i = i$, $i = 1, n$.

$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k})$ -число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа $i_1, \ldots, i_k$, следовательно $N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\right) = (n-k)!$

В сумме $\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\right)$ - C_n^k слагаемых, тогда по формуле включений и исключений

$$N(0) = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)! =$$

$$n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = n! - n! + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ответ: $n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Число элементов, обладающих ровно *k*>0 свойствами (1/2)

Лемма. $\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_n^k C_k^r = 0, \forall n, r \in N, n \geq r.$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Дифференцируя *r* раз по *x*, получим

$$n(n-1)...(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k k(k-1)...(k-r+1)x^{k-r}.$$

Последнее равенство преобразуется к виду

$$\frac{n!}{(n-r)!}(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r}.$$

Разделив обе части на *r*! приходим к соотношению

$C_n^r(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} C_n^k C_k^r x^{k-r}$, которое при $x = -1$ дает $\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}C_n^k C_k^r = 0$.

Число элементов, обладающих ровно *k*>0 свойствами (2/2)

<u>Теорема.</u> При $k > 0$

$$N(k) = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_s^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) .$$

<u>Доказательство</u>:

В левой части элементы, обладающий в точности k свойствами, учитываются один раз. В правой части элементы, обладающие в точности k свойствами, учитываются один раз в первом слагаемом и не учитываются в оставшихся суммах. Элементы, обладающие в точности $t < k$ свойствами, не учитываются ни в левой, ни в правой части. Элементы, обладающие в точности $t > k$ свойствами, учитываются C_t^s раз в суммах $\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s})$, тогда во всей правой части они будут учтены $(-1)^{s-k} C_s^k C_t^s$, что равно нулю по лемме.

Таким образом, в правой части утверждения теоремы учитываются по одному разу элементы, обладающие ровно k свойствами и не учитываются элементы, обладающие $t \neq k$ свойствами.

Задача о встречах

Определить количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$ чисел 1, ..., n , для которых $a_i=i$ ровно в k местах.

Решение. Число всех перестановок $N=n!$. Пусть свойство p_i: $a_i=i$..
$N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s})$ -число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа $i_1, \ldots, i_s$, следовательно $N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}\right) = (n-s)!$
В сумме $\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N\left(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}\right)$ - C_n^s слагаемых, тогда по формуле включений и исключений

$$N(k) = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_s^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} (n-s)! = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_s^k C_n^s (n-s)! =$$

$$\sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} \frac{s!\, n!\, (n-s)!}{k!\, (s-k)!\, s!\, (n-s)!} = \frac{n!}{k!} \sum_{s=k}^{n} \frac{(-1)^{s-k}}{(s-k)!} = \frac{n!}{k!} \sum_{s=0}^{n-k} \frac{(-1)^s}{s!}$$

Число элементов, обладающих не менее чем *k* свойствами

Теорема. При $k > 0$

$$\widetilde{N}(k) = \sum_{s=k}^{n} (-1)^{s-k} C_{s-1}^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}).$$

Доказательство:

$$\widetilde{N}(k) = \sum_{m=k}^{n} N(m) =$$

$$= \sum_{m=k}^{n} \sum_{s=m}^{n} (-1)^{s-m} C_s^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) =$$

$$= \sum_{s=k}^{n} \sum_{m=k}^{s} (-1)^{s-m} C_s^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) =$$

$$= \sum_{s=k}^{n} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} N(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_s}) \sum_{m=k}^{s} (-1)^{s-m} C_s^m =$$

Число элементов, обладающих не менее чем *k* свойствами

<u>Продолжение доказательства</u>:

Рассмотрим теперь только последнюю сумму

$$\sum_{m=k}^{s}(-1)^{s-m}C_s^m = \left|\begin{array}{c}\text{распишем}\\ \text{в обратном}\\ \text{порядке}\end{array}\right| = C_s^s - C_s^{s-1} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots$$

$$+(-1)^{s-k}C_s^k = C_{s-1}^{s-1} - C_s^{s-1} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots + (-1)^{s-k}C_s^k =$$

$$= -C_{s-1}^{s-2} + C_s^{s-2} - C_s^{s-3} + \cdots + (-1)^{s-k}C_s^k = C_{s-1}^{s-3} - C_s^{s-3} + \cdots$$

$$+(-1)^{s-k}C_s^k = \cdots = (-1)^{s-k-1}C_{s-1}^k + (-1)^{s-k}C_s^k = (-1)^{s-k}C_{s-1}^{k-1}.$$

Подставляя данное выражение в исходную сумму, получим

$$\sum_{s=k}^{n}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n} N(p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_s})\,(-1)^{s-m}C_{s-1}^{k-1} =$$

$$\sum_{s=k}^{n}(-1)^{s-m}C_{s-1}^{k-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le n} N(p_{i_1},p_{i_2},\ldots,p_{i_s})\,.\ \text{ч. т. д.}$$