Факультет физико-математический и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

Дискретная математика

ЛЕКЦИЯ №2

Основные тождества, связанные с числом сочетаний. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Основные тождества, связанные с числом сочетаний (1/2)

Теорема 2.1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-n+k)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k \square.$$

Теорема 2.2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k \square$$

Теорема 2.3. $C_n^k C_k^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$.

Доказательство.

$$C_n^k C_k^r = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{k!}{(k-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; \qquad (*)$$

$$C_{n-r}^{k-r} C_n^r = \frac{(n-r)!}{(n-r-k+r)!(k-r)!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-r)!r!}; (**)$$

$$(*) = (**) \square$$

Основные тождества, связанные с числом сочетаний (2/2)

Теорема 2.4 (тождество Коши)

$$C_{n+r}^{k} = \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_r^{k-i}.$$

Доказательство.

C_{n+r}^{k}– это число способов выбрать k предметов из $n+r$ предметов. Предметы можно выбирать в два приема: сначала выбрать i предметов из первых n предметов (таких способов C_n^i), а затем выбрать остальные k-i предметов из оставшихся r предметов (C_r^{k-i} способами). Просуммировав по всем возможным значениям i, получим утверждение теоремы.

Бином Ньютона (1/2)

Числа сочетаний C_n^r присутствуют в известной формуле Бинома Ньютона, откуда они получили название биномиальных коэффициентов.

Теорема 2.5 $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство (методом математической индукции).

База индукции: проверим при n=1

$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k x^k y^{1-k} = C_1^0 x^0 y^{1-0} + C_1^1 x^1 y^{1-1} = x + y$ – верно.

Индуктивное предположение. Предположим, что формула бинома Ньютона верна для некоторого $n-1$, т.е.

$$(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1}$$

Шаг индукции. Необходимо теперь доказать, что при условии справедливости формулы для $n-1$, формула верна также и для n.

Бином Ньютона (2/2)

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} =$$

$$x\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r x^r y^{n-r-1} + y\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k-1} = \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^r x^{r+1} y^{n-r-1} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} = \begin{bmatrix}\text{замена:}\\ r \coloneqq k-1\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} =$$

$$C_{n-1}^{n-1} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k y^{n-k} + C_{n-1}^0 y^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k x^k y^{n-k} =$$

$$C_{n-1}^{n-1} x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right) x^k y^{n-k} + C_{n-1}^0 y^n =$$

$$= C_n^n x^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x^k y^{n-k} + C_n^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

ч.т.д.

Свойства биномиальных коэффициентов (1/2)

Свойство 1. $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Доказательство. Пусть $y = 1$ в формуле бинома Ньютона, тогда

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Свойство 2. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{x} = 1, y = 1$ в формуле бинома Ньютона, тогда

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Свойство 3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{x} = -1, y = 1$ в формуле бинома Ньютона, тогда

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k.$$

Свойство 4. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k = m^n$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{x} = m-1, y = 1$ в формуле бинома Ньютона, тогда

$$m^n = (m-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (m-1)^k.$$

Свойства биномиальных коэффициентов (2/2)

Свойство 5. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.

Доказательство. Пусть $y = 1$ в формуле бинома Ньютона, тогда

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Вычислим производную левой и правой части:

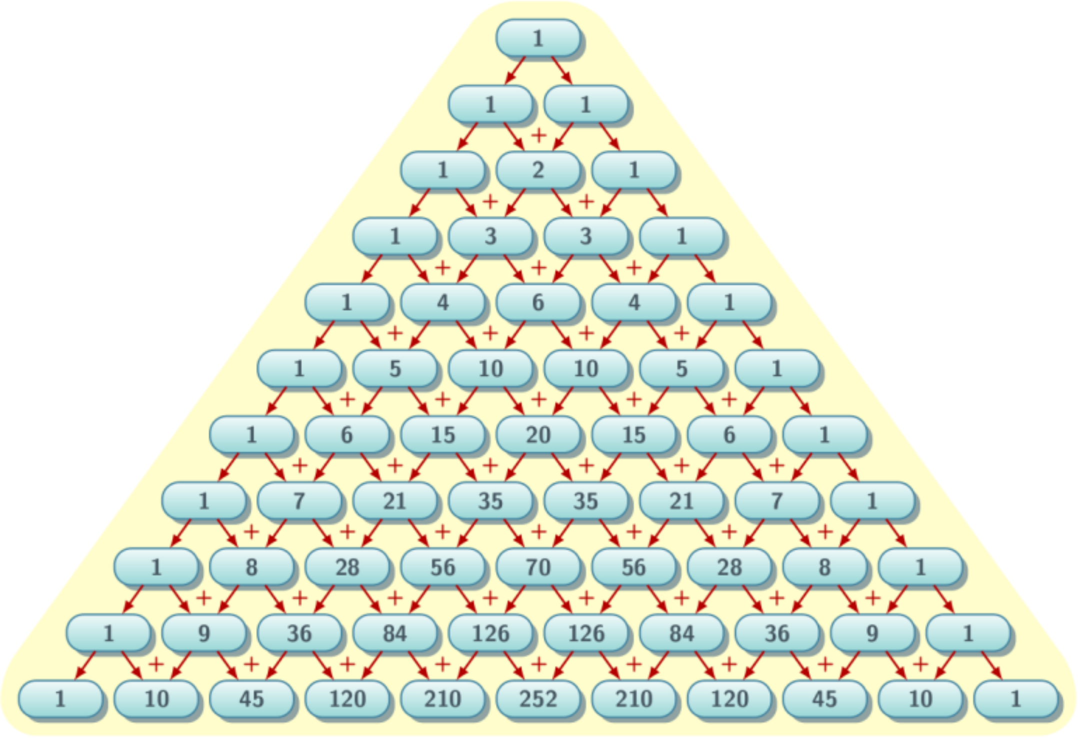
$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}.$$

Пусть теперь $x = 1$, тогда

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Треугольник Паскаля

Определение. Треугольник Паскаля – бесконечная числовая таблица треугольной формы, по боковым сторонам которой стоят 1, и всякое число, кроме этих боковых единиц получается как сумма двух предшествующих.



Свойства треугольника Паскаля

1. Второе число каждой строки равно её номеру.
2. Третье число каждой строки равно сумме номеров строк, ей предшествующих.
3. Если вычесть из центрального числа в строке с четным номером соседнее число из той же строки, то получится число Каталана.
4. Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.
5. Свойство шестиугольника для треугольника Паскаля

$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^{k} = C_{n-1}^{k} C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1}$$

<u>Доказательство свойства 5.</u>

$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \quad (*)$$

$$C_{n-1}^{k} C_n^{k-1} C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \quad (**)$$

(*)=(**)