1. Разбиения множеств в R^n (определение, свойства).
2. Измеримые множества в R^n (определение, критерий).
3. Интегральные суммы и суммы Дарбу в R^n.
4. Кратный интеграл Римана (определение, свойства).
5. Критерии интегрируемости функций в R^n.
6. Сведение кратного интеграла к повторному.
7. Первая теорема о замене переменных в кратном интеграле (без док-ва).
8. Вторая теорема о замене переменных в кратном интеграле.
9. Криволинейный интеграл 1-го рода (определение, свойства).
10. Криволинейный интеграл 2-го рода (определение, свойства).
11. Формула Грина и ее следствия.
12. Поверхности и их ориентация.
13. Поверхностный интеграл 1-го рода.
14. Поверхностный интеграл 2-го рода.
15. Градиент, дивергенция, ротор.
16. Формула Гаусса-Остроградского.
17. Формула Стокса.
18. Геометрический смысл дивергенции и ротора.
19. Соленоидальные поля (определение, условие соленоидальности).
20. Потенциальные поля (определение, условие потенциальности).
21. Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток.
22. Необходимое условие сходимости числового ряда.
23. Расходимость гармонического ряда.
24. Признаки сравнения числовых рядов.
25. Признак Даламбера сходимости неотрицательных числовых рядов.
26. Радикальный признак Коши.
27. Интегральный признак сходимости неотрицательных числовых рядов. Сходимость обобщенного ряда Дирихле.
28. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остаточного члена.
29. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Теорема о связи абсолютной и обычной сходимости.
30. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов (без доказательства).
31. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость.
32. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
33. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда (без доказательства).
34. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных рядов (без доказательства).
35. Степенные ряды. Теоремы Абеля.
36. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.
37. Ряды Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.
38. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.
39. Тригонометрические ряды Фурье.
40. Ортогональность тригонометрических функций.
41. Достаточное условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке (без доказательства).

1. Разбиения множеств в R^n (определение, свойства).

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Определение 1.1. Множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению вида

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a_0, \tag{1.1}$$

называется *гиперплоскостью в пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Пусть $k \in \mathbb{N}_0$ фиксировано, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Определение 1.2. Будем называть кубы вида

$$Q_{m,k} = \left\{x\colon \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i+1}{10^k}\right\} \tag{1.2}$$

кубами ранга k.

Замечание 1.1. Очевидно, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ совокупность всех кубов ранга k покрывает все пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} Q_{m,k} = \left\{x\colon \frac{m_i}{10^k} \leq x_i \leq \frac{m_i+1}{10^k}\right\}.$$

Определение 1.3. Определим *меру (n–мерный объем)* куба $Q_{m,k}$ по формуле

$$\mu(Q_{m,k}) = 10^{-kn}, \tag{1.3}$$

а объем любого множества $S = \bigcup\limits_j Q_j$, состоящего из некоторого множества попарно различных кубов ранга k, определим как сумму объемов входящих в него кубов:

$$\mu(S) = \mu\left(\bigcup_j Q_j\right) = \sum_j \mu(Q_j). \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\mu(S) \geq 0$ для любого S. Будем считать по определению, что $\mu(\emptyset) = 0$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $s_k(X)$ объединение всех кубов ранга k, целиком содержащихся в X, а через $S_k(X)$ – объединение всех кубов ранга k, пересекающихся с X:

$$s_k = s_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \subset X} Q_{m,k}, \quad S_k = S_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \cap X \neq \emptyset} Q_{m,k}. \tag{1.5}$$

Из этого определения следует, что множества $s_k(X)$ возрастают с ростом k и содержатся в X, а множества $S_k(X)$ убывают с ростом k и содержат X:

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset \ldots \subset X \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0,$$

откуда в силу (1.4) следует

$$0 \leq \mu(s_0) \leq \mu(s_1) \leq \ldots \leq \mu(s_k) \leq \ldots \leq \mu(S_k) \leq \ldots \leq \mu(S_1) \leq \mu(S_0) \leq +\infty. \tag{1.6}$$

Таким образом, последовательности $\{\mu(s_k)\}$ и $\{\mu(S_k)\}$ являются монотонными, а следовательно, имеют конечные или бесконечные пределы.

Определение 1.4. Предел $\mu_*(X) := \lim\limits_{k\to\infty} \mu(s_k)$ называется *нижней (внутренней) n–мерной мерой (Жордана)* множества X, а предел $\mu^*(X) := \lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k)$ – *верхней (внешней) n–мерной мерой (Жордана)* множества X.

В силу (1.6) для любого X имеем

$$0 \leq \mu_*(X) \leq \mu^*(X) \leq +\infty.$$

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

Определение 2.1. Конечная система измеримых множеств $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ называется *разбиением множества* X, если:

1. $\mu(X_i \cap X_j) = 0$ при $j \neq i$;

2. $\bigcup\limits_{j=1}^{j_\tau} X_j = X$.

Определение 2.2. Число

$$|\tau| = \max_{j=1,2,\ldots,j_\tau} \operatorname{diam} X_j$$

называется *мелкостью разбиения* τ.

Лемма 2.1. *Если* $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$, *то* $\mu(X) = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j)$.

Доказательство. Пусть $X^* = \bigcup\limits_{i \neq j} (X_i \cap X_j)$. Из условия 1 и конечной аддитивности меры Жордана следует, что $\mu(X^*) = 0$ и $\mu(X_j^*) = \mu(X_j)$, где $X_j^* = X_j \setminus X^*$. Множества X_j^* не пересекаются между собой и с X^*, причем $X = \bigcup\limits_{j=1}^{j_\tau} X_j^* \cup X^*$. Поэтому

$$\mu(X) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j^*) + \mu(X^*) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j) + \mu(X^*) = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu(X_j).$$

Лемма 2.2. *У всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.*

Доказательство. В качестве разбиений $\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j_k}$ можно выбрать системы множеств $X_j^{(k)} = X \cap Q_j^{(k)}$, где $Q_j^{(k)}$ – все кубы порядка k, имеющие общие точки с X. Действительно, множества $X_j^{(k)}$ измеримы как пересечения измеримых множеств X и $Q_j^{(k)}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{j_k} X_j = X$, а так как при $i \neq j$

$$X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)} \subset Q_i^{(k)} \cap Q_j^{(k)} = \partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)},$$

то

$$\mu(X_i^{(k)} \cap X_j^{(k)}) \leq \mu(\partial Q_i^{(k)} \cap \partial Q_j^{(k)}) \leq \mu(\partial Q_i^{(k)}) = 0.$$

Кроме того,

$$|\tau_k| = \max_{j=1,2,\ldots,j_k} \operatorname{diam} X_j^{(k)} \leq \operatorname{diam} Q_1^{(k)} = \frac{\sqrt{n}}{10^k} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

что и требовалось.

Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ определена функция f, задано разбиение $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ и выбраны точки $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, \ldots, j_\tau$.

2. Измеримые множества в R^n (определение, критерий).

Определение 1.5. Если $\mu_*(X) = \mu^*(X)$ конечны, то множество X называется *измеримым (по Жордану)*, а общее значение $\mu_*(X)$ и $\mu^*(X)$ называется *мерой Жордана* множества X и обозначается через $\mu(X)$.

Пример 1.1. Существуют множества, неизмеримые по Жордану, например, множество $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Легко проверить, что $\mu_*(\mathbb{Q}_0) = 0 < 1 = \mu^*(\mathbb{Q}_0)$.

Лемма 1.1. (Монотонность верхней и нижней мер.) *Если* $X_1 \subset X_2$, *то*

$$\mu_*(X_1) \le \mu_*(X_2), \quad \mu^*(X_1) \le \mu^*(X_2). \tag{1.7}$$

Доказательство. Если $X_1 \subset X_2$, то из определений s_k и S_k следует, что при любом $k \in \mathbb{N}_0$ $s_k(X_1) \subset s_k(X_2)$, $S_k(X_1) \subset S_k(X_2)$. Поэтому, согласно (1.4),

$$\mu(s_k(X_1)) \le \mu(s_k(X_2)), \quad \mu(S_k(X_1)) \le \mu(S_k(X_2)).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем (1.7).

Следствие 1.1. *Если* $X_1 \subset X_2$ *и* $\mu(X_2) = 0$, *то* $\mu(X_1) = 0$.

Доказательство. При условиях следствия имеем

$$0 \le \mu_*(X_1) \le \mu^*(X_1) \le \mu^*(X_2) = \mu(X_2) = 0,$$

т. е. $\mu_*(X_1) = \mu^*(X_1) = 0$.

Обозначим

$$\sigma_k = \sigma_k(X) := \bigcup_m \bigcup_{Q_{m,k} \subset (S_k \setminus s_k)} Q_{m,k}.$$

Тогда $S_k = s_k \cup \sigma_k$, причем никакой куб $Q_{m,k}$ не входит одновременно в s_k и σ_k, поэтому согласно определению 1.3 $\mu(S_k) = \mu(s_k) + \mu(\sigma_k)$. Более того,

Лемма 1.2. *Для любого* $X \subset \mathbb{R}^n$ *справедливы включения* $\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$.

Доказательство. Пусть $x \in \partial X$. Тогда имеем

$$x \in \partial X \subset \overline{X} \subset \overline{S_k(X)} = S_k(X) = s_k(X)_{\text{int}} \cup \sigma_k(X) \tag{1.8}$$

(здесь и далее индекс int означает внутренность соответствующего множества). Но, так как $s_k(X) \subset X$, имеем $s_k(X)_{\text{int}} \subset X_{\text{int}}$, и так как $x \in \partial X$ не может принадлежать X_{int}, то $x \notin s_k(X)_{\text{int}}$. Поэтому из (1.8) следует, что $x \in \sigma_k(X)$, т. е. $\partial X \subset \sigma_k(X)$.

Пусть теперь $x \in \sigma_k(X)$, т.е. существует куб Q ранга k такой, что $x \in Q$ и Q содержится в $\sigma_k(X)$, т.е. $Q \subset S_k(X)$ ($Q \cap X \ne \emptyset$), но $Q \not\subset s_k(X)$ (Q содержит точки, не принадлежащие X). Следовательно, Q содержит точки ∂X, т.е. $x \in Q \subset S_k(\partial X)$.

Теорема 1.1. (Критерий измеримости множеств по Жордану.) *Для того чтобы множество $X \subset \mathbb{R}^n$ было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и чтобы его граница ∂X имела меру $\mu(\partial X) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, оно ограничено (иначе было бы $\mu^*(X) = +\infty$), а $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(s_k(X)) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(X))$ конечны. Поэтому с учетом лемм 1.2 и 1.1 имеем

$$0 \le \mu^*(\partial X) \le \mu^*(\sigma_k(X)) = \mu(\sigma_k(X)) = \mu(S_k(X)) - \mu(s_k(X)) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

т.е. $\mu^*(\partial X) = \mu(\partial X) = 0$.

Достаточность. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и $\mu(\partial X) = 0$. Тогда по определению 1.5 $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(S_k(\partial X)) = 0$ и в силу лемм 1.2 и 1.1

$$0 \le \mu(S_k(X)) - \mu(s_k(X)) = \mu(\sigma_k(X)) \le \mu(S_k(\partial X)) \to 0 \tag{1.9}$$

при $k \to \infty$.

Из ограниченности множества X вытекает существование конечных пределов

$$\lim_{k\to\infty} \mu(S_k(X)) = \mu^*(X)$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \mu(s_k(X)) = \mu_*(X),$$

которые равны между собой в силу (1.9), что и означает измеримость множества X по Жордану.

Из доказанных утверждений вытекают следующие свойства меры Жордана:

1. (Неотрицательность.) *Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ всегда $\mu(X) \ge 0$.*

2. (Монотонность.) *Если $X_1 \subset X_2$ – измеримые множества, то $\mu(X_1) \le \mu(X_2)$.*

3. (Замкнутость относительно объединения и пересечения.) *Объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.*

4. (Конечная аддитивность.) *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

5. (Инвариантность.) *Мера измеримого множества не меняется при параллельном переносе и ортогональном преобразовании (повороте).*

Примерами множеств нулевой меры Жордана являются графики функций, непрерывных на компакте, и спрямляемые кривые.

3. Интегральные суммы и суммы Дарбу в R^n.

Определение 2.3. Всякая сумма вида

$$\sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f) \equiv \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}) = \sum_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)})\mu(X_j)$$

называется *интегральной суммой (Римана) функции f, соответствующей разбиению τ.*

Определение 2.5. Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – разбиение множества X,

$$m_j = \inf_{x \in X_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in X_j} f(x), \quad j = 1, \dots, j_\tau.$$

Тогда суммы

$$s_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu(X_j), \quad S_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu(X_j)$$

называют соответственно *нижними и верхними суммами Дарбу.*

Аналогично одномерному случаю формулируется и доказывается следующая

Теорема 2.1. (Критерий интегрируемости Дарбу.) *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для ее сумм Дарбу выполнялось условие*

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Следствие 2.1. *Если функция непрерывна на измеримом компакте, то она интегрируема на нем по Риману.*

Рассмотрим функцию Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{x — рационально,} \\ 0, & \text{x — иррационально.} \end{cases}$$

Эта функция ограничена. Покажем, что она неинтегрируема на любом невырожденном отрезке $[a, b]$. Действительно, если для произвольного разбиения Π все точки ξ_i выбрать рациональными, то получим

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a.$$

Если же все точки ξ_i взять иррациональными, то

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{D}(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

Отсюда следует, что интегральные суммы не имеют предела при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Найти суммы Дарбу для функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-2; 3]$, соответствующие разбиению этого отрезка на n равных частей.

Спойлер

В этом случае $\triangle x_i = \frac{5}{n}$, $x_i = -2 + \frac{5i}{n}$, $i = \overline{1, n}$. В силу непрерывности и возрастания этой функции при любом разбиении отрезка она достигает наименьшего $m_i = x_{i-1}^3$ и наибольшего $M_i = x_i^3$ значений на левом и правом концах частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ соответственно. Согласно формулам, находим:

$$s_T = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}(-2 + 5\tfrac{i-1}{n})^3, \; S_T = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2 + \tfrac{5i}{n}\right)^3$$

Принимая во внимание, что $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, в итоге получаем:

$$s_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \; S_T = \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$$

Ответ: $s_T = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $S_T = \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$

[свернуть]

4. Кратный интеграл Римана (определение, свойства).

Определение 2.4. Функция f называется *интегрируемой (по Риману) на множестве* X, если существует один и тот же конечный предел у любой последовательности интегральных сумм

$$\sigma_{\tau_k} = \sum_{j=1}^{j_k} f(\xi^{(j,k)})\mu(X_j^{(k)}),$$

соответствующих разбиениям $\tau_k = \{X_j^{(k)}\}_{j=1}^{j_k}$ множества X, у которых $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$, а точки $\xi^{(j,k)} \in X_j^{(k)}$ выбраны произвольным образом. Этот предел называется *интегралом Римана от функции* f *по множеству* X и обозначается $\int\limits_X f(x)\,dx$:

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sigma_{\tau_k}(f; \xi^{(1,k)}, \ldots, \xi^{(j_k,k)}). \tag{2.1}$$

При $n > 1$ интеграл Римана называется *(n)–кратным* (при $n = 2$ – *двойным*, при $n = 3$ – *тройным*).

Замечание 2.1. В этом случае используется также обозначение $\int\limits_X f(x)\,dx = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$.

Замечание 2.2. Можно показать, что при $n = 1$ и $x = [a, b]$ это определение эквивалентно ранее данному определению интеграла Римана (где разбиения состояли только из отрезков, а не из произвольных измеримых множеств).

На кратные интегралы от ограниченных функций переносятся все основные свойства интеграла по отрезку:

1. *Если* $X \subset \mathbb{R}^n$ *– измеримое множество, то* $\int\limits_X dx = \mu(X)$.

2. (Линейность интеграла.) *Если функции* f_i, $i = 1, \ldots, m$, *интегрируемы на множестве* X, *то для любых чисел* λ_i, $i = 1, \ldots, m$, *функция* $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i$ *также интегрируема на* X *и*

$$\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i\,dx = \lambda_i \sum_{i=1}^{m} \int\limits_X f_i\,dx.$$

3. *Если* X *и* Y *– измеримые множества,* $X \subset Y$, *функция* f *ограничена и интегрируема на множестве* Y, *то она интегрируема и на множестве* X.

4. (Аддитивность интеграла по множествам.) *Если X – измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – его разбиение, функция f определена и ограничена на множествах X_j ($j = 1, \ldots, j_\tau$), то функция f интегрируема на X и*

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{j_\tau} \int\limits_{X_j} f(x)\,dx.$$

5. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве X, то и их произведение fg, а если $\inf\limits_X |g(x)| > 0$, то и отношение f/g интегрируемы на X.*

6. (Интегрирование неравенств.) *Если функции f и g интегрируемы на X и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\,dx \le \int\limits_X g(x)\,dx.$$

В частности, если X и Y – измеримые множества, $X \subset Y$, функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на Y, то

$$\int\limits_X f(x)\,dx \le \int\limits_Y f(x)\,dx.$$

7. *Если функция f интегрируема и ограничена на множестве X, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем*

$$\left|\int\limits_X f(x)\,dx\right| \le \int\limits_X |f(x)|\,dx.$$

8. *Если функция f неотрицательна, ограничена и интегрируема на измеримом открытом множестве G, $x^{(0)} \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$, то*

$$\int\limits_G f(x)\,dx > 0.$$

9. (Полная аддитивность интеграла по открытым множествам.) *Если G, G_m – измеримые открытые множества, $G_m \subset G_{m+1}$ ($m \in \mathbb{N}$), $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} G_m = G$, а функция f интегрируема и ограничена на G, то*

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{G_m} f(x)\,dx = \int\limits_G f(x)\,dx$$

или, что то же самое,

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_{G_1} f(x)\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{G_{m+1}\setminus G_m} f(x)\,dx.$$

10. (Теоремы о среднем.) *Если функции f и g интегрируемы на X, $m \le f(x) \le M$ ($x \in X$) и функция g не меняет знак на X, то существует такое число $\mu \in [m, M]$, что*

$$\int\limits_X f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_X g(x)\,dx.$$

Если при этом $X = G$ – область, а функция f непрерывна и ограничена на ней, то существует такая точка $\xi \in G$, что

$$\int\limits_G f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_G g(x)\,dx.$$

Доказательства этих утверждений в целом аналогичны одномерному случаю.

5. Критерии интегрируемости функций в R^n.

Теорема 2.1. (Критерий интегрируемости Дарбу.) *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для ее сумм Дарбу выполнялось условие*

$$\lim_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Теорема 2.2. (Критерий интегрируемости Лебега.) *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы существовали множества X^* и X^{**} такие, что $X = X^* \cup X^{**}$, $X^* \cap X^{**} = \emptyset$, $\mu(X^*) = 0$ и чтобы f была непрерывна на X^{**}* (т. е. чтобы f была непрерывна на X всюду, кроме, возможно, некоторого множества нулевой меры).

6. Сведение кратного интеграла к повторному.

Определение 3.1. Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a,b]$, $\varphi(x) \le \psi(x)$ $(a \le x \le b)$ и

$$E = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

Тогда E называется *стандартной областью относительно x.*

Ясно, что E – измеримый компакт.

Определение 3.2. Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ и $f(x,\cdot)$ при каждом $x \in [a,b]$ интегрируема на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$. Тогда функция

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

называется *интегралом, зависящим от параметра x*, а интеграл

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy, \tag{3.1}$$

если он существует, называется *повторным интегралом.*

Теорема 3.1. (Равенство двойного интеграла повторному.) *Если функция f непрерывна на E, то*

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{3.2}$$

Доказательство. Повторный интеграл в правой части (3.2) существует вследствие леммы. Для доказательства равенства (3.2) введем разбиение τ_k множества E на подмножества

$$E_{ij}^{(k)} = \{(x, y) : x_{i-1,k} \le x \le x_{i,k},\ \varphi_{j-1,k}(x) \le y \le \varphi_{j,k}(x)\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, k$,

$$x_{i,k} = a + \frac{b-a}{k} i,$$

$$\varphi_{j,k}(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k} j \ (x \in [a, b]).$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} |\tau_k| = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} &\le \sqrt{|x_{i,k} - x_{i-1,k}|^2 + \max_{x\in[x_{i-1,k}, x_{i,k}]} |\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j-1,k}(x)|^2} \le \\
&\le \sqrt{\frac{(b-a)^2}{k^2} + \max_{x\in[a,b]} \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|^2}{k^2}} \le \\
&\le \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + \max_{x\in[a,b]} (|\psi(x)| + |\varphi(x)|)^2} \le \\
&\le \frac{1}{k}\sqrt{(b-a)^2 + 4c^2} \to 0 \ (k \to \infty),
\end{aligned}$$

откуда и

$$|\tau_k| = \max_{i,j=1,\dots,k} \operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} \to 0 \ (k \to \infty).$$

Положим теперь

$$m_{ij}^{(k)} = \inf_{(x,y)\in E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad M_{ij}^{(k)} = \sup_{(x,y)\in E_{ij}^{(k)}} f(x,y), \quad i,j = 1,\ldots,k,$$
$$s_k = \sum_{i,j=1}^{k} m_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}), \qquad S_k = \sum_{i,j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

В силу интегрируемости f как непрерывной функции на измеримом компакте E и стремления $|\tau_k|$ к 0 при $k\to\infty$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} S_k = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy. \tag{3.3}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} [\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j-1,k}(x)]\,dx = \mu(E_{ij}^{(k)}),$$

будем иметь

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} f(x,y)\,dy =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} dx \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} f(x,y)\,dy \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} dx \int\limits_{\varphi_{j-1,k}(x)}^{\varphi_{j,k}(x)} dy =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \int\limits_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} [\varphi_{j,k}(x) - \varphi_{j-1,k}(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu(E_{ij}^{(k)}) = S_k$$

и аналогично

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \ge s_k.$$

Переходя в двух последних неравенствах к пределу при $k\to\infty$, в силу (3.3) получим

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \le \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \le \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

что доказывает (3.2).

Замечание 3.1. Если E – стандартная область относительно y, т. е.

$$E = \{(x,y):\ c \le y \le d,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\},$$

где α и β – непрерывные функции на $[c,d]$, а f непрерывна на E, то аналогично предыдущему имеем

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

Следовательно, если E – стандартная область как относительно x, так и относительно y, то в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx.$$

Замечание 3.2. Теорема обобщается по индукции на кратные интегралы по множествам произвольной размерности. Например, если

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in E_{xy}, \varphi_1(x, y) \le z \le \psi_1(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

где $E_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ – измеримый компакт и функции φ_1, ψ_1 непрерывны на E_{xy}, а f – на E, то

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{E_{xy}} dx\, dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Если при этом E_{xy} – стандартная область относительно x, имеет место формула

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Если обозначить через $E(x_0)$ сечение множества E плоскостью $x = x_0$, т. е.

$$E(x_0) = E \cap \{(x, y, z) : x = x_0\},$$

то в предыдущей формуле можно объединить два внутренних интегрирования:

$$\iiint\limits_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x, y, z)\, dy\, dz. \tag{3.4}$$

Например, если $f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_E dx\, dy\, dz = \mu_3(E), \qquad \iint\limits_{E(x)} dx\, dy = \mu_2(E(x)),$$

где μ_n – мера множества в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, и из (3.4) следует, что

$$\mu_3(E) = \int\limits_a^b \mu_2(E(x))\, dx,$$

т. е. объем равен одномерному интегралу от площадей сечений.

ПРИМЕР 1

Задание Вычислить интеграл, если область G является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, причем $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 3$. Интеграл:

$$\iint_G x^2 y dx dy$$

Решение Для вычисления этого двойного интеграла перейдем к повторному интегралу:

$$\iint_G x^2 y dx dy = \int_1^2 dx \int_2^3 x^2 y dy$$

Далее вычисляем внутренний интеграл по y, считая, что x константа

$$\iint_G x^2 y dx dy = \int_1^2 dx \int_2^3 x^2 y dy = \int_1^2 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_2^3 \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} (3^2 - 2^2) \right) dx =$$

$$= \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx = \frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = 2,5(2^3 - 1) = 17,5$$

Ответ $\iint_G x^2 y dx dy = 17,5$

7. Первая теорема о замене переменных в кратном интеграле (без док-ва).

Теорема 4.1. *Если X – измеримое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в открытом множестве G: $\overline{X} \subset G \subset \mathbb{R}^n_x$, $F : G \to \mathbb{R}^n_y$ – непрерывно дифференцируемое отображение с якобианом J_F, не обращающимся в нуль, а функция f непрерывна на множестве $\overline{F(X)}$, то*

$$\int\limits_{\overline{F(X)}} f(y)\,dy = \int\limits_{\overline{X}} f(F(x))|J_F(X)|\,dx. \tag{4.1}$$

Замечание 4.1. Знаки замыкания в формуле можно опустить, так как интегралы по измеримому множеству и его замыканию существуют одновременно и совпадают.

Условия теоремы о замене переменных в кратном интеграле можно ослабить.

8. Вторая теорема о замене переменных в кратном интеграле.

Определение 4.1. Непрерывное отображение f множества G в пространство X называется *непрерывно продолжаемым на* $\overline{G}$, если существует отображение $f^* : \overline{G} \to X$, сужение которого на G совпадает с X. В этом случае f^* называется *(непрерывным) продолжаемым f на $\overline{G}$*.

Теорема 4.2. *Пусть отображение $F : G \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^n_y$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и J_F не обращается в нуль на G. Пусть F и J_F непрерывно продолжаемы на $\overline{G}$, а функция f непрерывна на $G^* := F(G)$ и непрерывно продолжаема на $\overline{G^*}$. Тогда*

$$\int\limits_{G^*} f(y)\,dy = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как G^* измеримо, то $\overline{G^*}$ – измеримый компакт, и продолжение f^* функции f интегрируемо на нем в силу непрерывности, а следовательно, и f интегрируема на G^*. Аналогично доказывается интегрируемость $f(F(x))|J_F(x)|$ на G.

Представим G в виде объединения монотонной последовательности измеримых открытых множеств $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$, где $\overline{G_k} \subset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Применяя теорему 4.1 к множествам G_k, получим

$$\int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.3}$$

В силу полной аддитивности интеграла имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(F(x))|J_F(x)|\,dx = \int\limits_{G} f(F(x))|J_F(x)|\,dx. \tag{4.4}$$

Так как множества $F(G_k)$ также открыты и $G^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F(G_k)$, $\overline{F(G_k)} \subset F(G_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, то аналогично (4.4) получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{F(G_k)} f(y)\,dy = \int\limits_{G^*} f(y)\,dy. \tag{4.5}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (4.3), получаем (4.2).

9. Криволинейный интеграл 1-го рода (определение, свойства).

Криволинейный интеграл 1-го рода. Пусть $L = \{M(s) : 0 \le s \le S\}$ – спрямляемая кривая на плоскости или в пространстве, s – длина ее дуги, $M(s) = (x(s), y(s), z(s))$, и пусть в каждой точке этой кривой задана числовая функция $f(x(s), y(s), z(s))$, имеющая, например, физический смысл линейной плотности в точке $(x(s), y(s), z(s))$.

Определение 5.1. Будем называть *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции f по кривой L интеграл

$$\int_L f\,ds := \int_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds, \tag{5.1}$$

если он существует. Кривая L при этом называется *путем интегрирования*.

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода:

1. Если функция f непрерывна на $[0, S]$, то $\int\limits_L f\,ds$ существует. (Это свойство следует из определения криволинейного интеграла 1-го рода и достаточного условия существования определенного интеграла.)

2. $\int\limits_L f\,ds$ не зависит от выбора направления кривой L.

   Доказательство. Пусть $L = AB$ ($s = 0$ в точке A и $s = S$ в точке B). Обозначим длину дуги, отсчитываемую от точки B, через s^*. Тогда $s^* = S - s$, $ds^* = -ds$, а $M = M(S - s^*) = (x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))$ – представление кривой BA. Поэтому

$$\int_{BA} f(x, y, z)\,ds^* = \int_0^S f(x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))\,ds^* =$$
$$= -\int_S^0 f(x(s), y(s), z(s))\,ds = \int_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds = \int_{AB} f(x, y, z)\,ds.$$

3. Если кривая задана непрерывно дифференцируемым представлением $x(s) = \varphi(t)$, $y(s) = \psi(t)$, $z(s) = \chi(t)$, $a \le t \le b$, без особых точек ($[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0$, $t \in [a, b]$), то имеет место формула

$$\int_L f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt, \tag{5.2}$$

   вытекающая из формулы замены переменных $s = s(t)$ в определенном интеграле, где $s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}$:

$$\int_L f\,ds := \int_0^S f(x(s), y(s), z(s))\,ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\,ds(t) =$$
$$= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Замечание 5.1. Из формулы (5.2) следует независимость криволинейного интеграла 1-го рода от выбора параметра. Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = g(x)$, $a \le x \le b$, то формула (5.2) принимает вид

$$\int_L f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx. \tag{5.3}$$

Пример 1

Найти интеграл $\int\limits_C x^2 y ds$ вдоль отрезка прямой $y = x$ от начала координат до точки $(2, 2)$ (рисунок 3).

Решение.

$$\int\limits_C x^2 y ds = \int\limits_0^2 x^2 \cdot x\sqrt{1+1^2} dx = \sqrt{2}\int\limits_0^2 x^3 dx = \sqrt{2}\left[\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2\right] = 4\sqrt{2}.$$

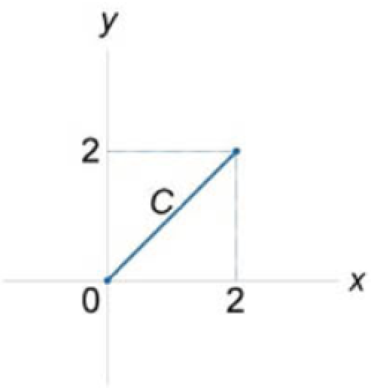

Рис.3

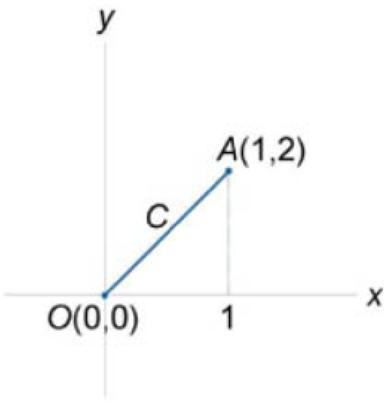

Рис.4

10.Криволинейный интеграл 2-го рода (определение, свойства).

Криволинейный интеграл 2-го рода.

Пусть $L = AB$ – гладкая ориентированная кривая, $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $0 \le s \le S$ – ее векторное представление ($A = (x(0), y(0), z(0))$, $B = (x(S), y(S), z(S))$). Пусть

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha(s), \cos\beta(s), \cos\gamma(s)) -$$

единичный касательный вектор к кривой L, направление которого соответствует выбранному отсчету длин дуг ($\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ – углы между касательной к кривой L в точке s и осями Ox, Oy, Oz соответственно), а

$$\mathbf{a}(x(s), y(s), z(s)) = (P(x(s), y(s), z(s)), Q(x(s), y(s), z(s)), R(x(s), y(s), z(s))) -$$

векторное поле, заданное на кривой L.

Определение 5.2. Величина

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\, ds = \int\limits_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_{AB} (P(x(s), y(s), z(s)) \cos\alpha(s) + Q(x(s), y(s), z(s)) \cos\beta(s) + R(x(s), y(s), z(s)) \cos\gamma(s))\, ds \tag{5.4}$$

называется *криволинейным интегралом 2-го рода* от вектор-функции $\mathbf{a}$ по кривой L. Кривая L с учетом направления при этом называется *путем интегрирования*, а $\cos\alpha(s)$, $\cos\beta(s)$, $\cos\gamma(s)$ – ее *направляющими косинусами* в точке s.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода:

1. Если функции P, Q, R непрерывны на AB, то $\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ существует.

   Доказательство. В силу гладкости кривой L и непрерывности на ней функций P, Q и R подынтегральное выражение в криволинейном интеграле 1-го рода $\int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\, ds$ из определения (5.4) является непрерывным, а следовательно, этот интеграл существует.

2. При изменении ориентации кривой L криволинейный интеграл 2-го рода меняет только знак:

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{BA} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}. \tag{5.5}$$

   Доказательство. Если $s^* = S - s$ – переменная длина дуги, отсчитываемая от точки B кривой L, а τ^* – соответствующий единичный касательный вектор к L, то

$$\tau^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{ds^*} = -\tau,$$

   откуда

$$\int\limits_{BA} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{BA} \mathbf{a}\tau^*\, ds^* = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau^*\, ds = -\int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\, ds = -\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}.$$

3. Если $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $a \le t \le b$, – векторное представление гладкой ориентированной кривой L, то

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{a}^{b} \mathbf{a}\mathbf{r}'\, dt. \tag{5.6}$$

(Здесь и ниже штрихом обозначена производная по t.)

Доказательство. Заметив, что

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'}{s'},$$

получим

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\tau\, ds = \int\limits_a^b \mathbf{a}\tau s'\, dt = \int\limits_a^b \mathbf{a}\mathbf{r}'\, dt.$$

Замечание 5.2. Критерий независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования будет доказан ниже.

Пример 1

Вычислить интеграл $\int\limits_C ydx - xdy$, где кривая C задана параметрически в виде $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Решение.
Используя формулу

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \int\limits_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt,$$

находим ответ:

$$\int\limits_C ydx - xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t\frac{d(\cos t)}{dt} - \cos t\frac{d(\sin t)}{dt}\right)dt$$
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t(-\sin t) - \cos t\cos t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = -\frac{\pi}{2}.$$

11. Формула Грина и ее следствия.

Определение 6.1. Пусть на плоскости задана правая система координат. Ориентацию простого замкнутого контура, лежащего на этой плоскости, будем называть *положительной*, если она соответствует движению против часовой стрелки (т.е. если при движении в соответствии с этой ориентацией конечная часть плоскости, ограниченная контуром, остается слева), и *отрицательной* в противном случае.

Лемма 6.1. *Если область G стандартна относительно обеих осей, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то справедлива формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy, \tag{6.1}$$

где ∂G^+ – граница G с положительной ориентацией.

Доказательство. Обозначим $A = (a, \varphi(a))$, $B = (b, \varphi(b))$, $A_1 = (a, \psi(a))$, $B_1 = (b, \psi(b))$. Сведем интеграл $\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$ к повторному и применим формулу Ньютона–

Лейбница:

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)))\,dx = \int\limits_{A_1B_1} P\,dx - \int\limits_{AB} P\,dx =$$

$$= -\int\limits_{B_1A_1} P\,dx - \int\limits_{AB} P\,dx.$$

Отрезки AA_1 и BB_1 являются гладкими кривыми. Они параллельны оси Oy, поэтому их касательные, совпадающие с ними по направлению, образуют с осью x прямой угол $\alpha = \pi/2$ с направляющим косинусом $\cos\alpha = 0$, откуда

$$\int\limits_{A_1A} P\,dx = \int\limits_{BB_1} P\,dx = 0$$

и

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{B_1A_1} P\,dx - \int\limits_{A_1A} P\,dx - \int\limits_{AB} P\,dx - \int\limits_{BB_1} P\,dx = -\int\limits_{\partial G^+} P\,dx. \tag{6.2}$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial G^+} Q\,dx. \tag{6.3}$$

Вычитая (6.3) из (6.2), получим (6.1).

Теорема 6.1. *Если G – ограниченная область, которую можно разбить на конечное множество элементарных по обеим осям областей и граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых контуров, а функции $P = P(x,y)$ и $Q = Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то справедлива формула* (6.1).

Доказательство. Пусть область G разбита на элементарные области G_i, $i = 1,\ldots,m$. По лемме 6.1 имеют место равенства

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P\,dx + Q\,dy. \tag{6.4}$$

Суммируя левые части этих равенств и используя аддитивность кратного интеграла, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{6.5}$$

При суммировании правых частей равенств (6.4) остается только криволинейный интеграл по ∂G^+, так как все остальные части границ ∂G_i встречаются в сумме дважды с противоположными ориентациями, в силу чего сумма интегралов по ним равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\partial G_i^+} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\partial G^+} P\, dx + Q\, dy. \tag{6.6}$$

Поскольку в силу (6.4) левые части формул (6.5) и (6.6) равны, то равны и правые, ч.т.д.

Следствие 6.1. *Если в дополнение к условиям теоремы граница ∂G области G кусочно гладкая, то формулу (6.1) можно записать в виде*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\, ds, \tag{6.7}$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta)$ *– единичный касательный вектор к границе ∂G области G.*

(Следствие вытекает из теоремы в силу формулы криволинейного интеграла для кусочно гладких кривых.)

Вычисление площадей по формуле Грина. Полагая в формуле (6.1) $P = 0$, $Q = x$ на $\overline{G}$, получим

$$\mu(G) = \iint\limits_{G} dx\, dy = \int\limits_{\partial G^+} x\, dy. \tag{6.8}$$

Аналогично, при $P = -y$, $Q = 0$

$$\mu(G) = \iint\limits_{G} dx\, dy = -\int\limits_{\partial G^+} y\, dx. \tag{6.9}$$

Складывая (6.8) и (6.9) и деля на 2, получаем

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G^+} x\, dy - y\, dx. \tag{6.10}$$

12. Поверхности и их ориентация.

Определение 7.1. Пусть $(u, v) \in \overline{G}$, где G – область в $\mathbb{R}^2$. Будем называть непрерывно дифференцируемое отображение $\mathbf{r} : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ *поверхностью,* а множество $S = \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : (u, v) \in \overline{G}\}$ – ее *носителем.* Носитель S также называют поверхностью.

Определение 7.6. Поверхность, для которой выбор направления единичной нормали зафиксирован, называют *ориентированной* и обозначают в зависимости от этого выбора S^+ или S^-.

13. Поверхностный интеграл 1-го рода.

Определение 7.5. *Поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S называется двойной интеграл

$$\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv. \tag{7.8}$$

В частности, если поверхность S задана функцией $z=g(x,y)$, а $(u,v)=(x,y)$, имеем

$$\mathbf{r}=(x,y,g(x,y)),\quad \mathbf{r}_u=(1,0,g_x(x,y)),\quad \mathbf{r}_v=(0,1,g_y(x,y)),$$

откуда

$$g_{11}g_{22}-g_{12}^2 = 1+g_x^2(x,y)g_y^2(x,y)$$

и в силу (7.8)

$$\iint\limits_S f\,dS = \iint\limits_G f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2(x,y)g_y^2(x,y)}\,dx\,dy. \tag{7.9}$$

Интеграл (7.8) или (7.9) существует, если область G ограничена и квадрируема, функция f (кусочно) непрерывна и функция $\mathbf{r}$ или соответственно g (кусочно) непрерывно дифференцируема в своих областях определения. Его свойства следуют из общих свойств двойного интеграла.

При $f\equiv 1$ поверхностный интеграл (7.8) определяет площадь поверхности S:

$$\mu(S)=\iint\limits_G \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv. \tag{7.10}$$

Пример 1

Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, лежащая в первом октанте $(x\geq 0,\ y\geq 0, z\geq 0)$.

Решение.

Запишем уравнение плоскости в виде

$$z=z(x,y)=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}.$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{4},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}.$$

Применяя формулу

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

поверхностный интеграл можно выразить через двойной интеграл:

$$I=\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=\iint\limits_D\left(x+y+1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}dxdy$$
$$=\iint\limits_D\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy.$$

Область интегрирования D представляет собой треугольник, показанный выше на рисунке **2**. Вычисляем окончательно заданный интеграл:

$$I = \frac{\sqrt{21}}{4} \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{4-2y} \left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{2} + 1 \right) dx \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{16} \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{4-2y} (3x + 2y + 4)\, dx \right] dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{16} \int\limits_0^2 \left[\left(\frac{3x^2}{2} + 2yx + 4x \right) \Bigg|_{x=0}^{4-2y} \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{16} \int\limits_0^2 \left[\frac{3}{2} (4-2y)^2 + 2(4-2y)\, y + 4(4-2y) \right] dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{32} \int\limits_0^2 \left[3\left(16 - 16y + 4y^2\right)^2 + 16y - 8y^2 + 32 - 16y \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{32} \int\limits_0^2 \left(80 - 48y + 4y^2\right) dy$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{4} \int\limits_0^2 \left(20 - 12y + y^2\right) dy = \frac{\sqrt{21}}{4} \left[\left(20y - 6y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 \right] = \frac{\sqrt{21}}{4} \left(40 - 24 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7\sqrt{21}}{3}.$$

14. Поверхностный интеграл 2-го рода.

Определение 7.6. Поверхность, для которой выбор направления единичной нормали зафиксирован, называют *ориентированной* и обозначают в зависимости от этого выбора S^+ или S^-.

Пусть

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(u,v)) = (P(\mathbf{r}(u,v)), Q(\mathbf{r}(u,v)), R(\mathbf{r}(u,v))) -$$

непрерывная векторная функция, заданная на S (имеющая, например, физический смысл силы, с которой на точку $\mathbf{r}(u,v)$ действует некоторое поле).

Рассмотрения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему определению величины, выражающей поток силы $\mathbf{a}$ через поверхность S^+.

Определение 7.7. *Поверхностным интегралом второго рода* по ориентированной поверхности S^+ называется интеграл

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\, \mathbf{dS} = \iint\limits_{S} (\mathbf{a}, \nu)\, dS. \tag{7.11}$$

Если $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, то формулу (7.13) можно переписать в координатном виде:

$$\iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\, \mathbf{dS} = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv. \tag{7.14}$$

Если поверхность S имеет явное представление $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{G}$, и $P \equiv Q \equiv 0$ на S, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и поэтому для интеграла по верхней стороне S^+ поверхности S будем иметь

$$\iint\limits_{S^+} R\, dx\, dy = \iint\limits_{G} R(x, y, f(x,y))\, dx\, dy. \tag{7.15}$$

Пример 1

Вычислить поверхностный интеграл от векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -1, z)$ по внутренне ориентированной поверхности S, заданной уравнением $z = x\cos y$, где $0 \leq x \leq 1$, $\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{3}$.

Решение.
Применим формулу

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{D(x,y)} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dxdy.$$

Поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) = \cos y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y) = -x\sin y,$$

то поверхностный интеграл можно записать в виде

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{D(x,y)} [x \cdot \cos y + (-1) \cdot (-x\sin y) + z \cdot (-1)]\, dxdy$$

$$= \iint\limits_{D(x,y)} \left(\cancel{x\cos y} + x\sin y - \cancel{x\cos y} \right) dxdy = \iint\limits_{D(x,y)} x\sin y dxdy.$$

В результате простых вычислений находим ответ:

$$\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin y dy = \left[\left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right] \cdot \left[(-\cos y)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \right] = \frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

15. Градиент, дивергенция, ротор.

Градиентом скалярного поля $u = u(x, y, z)$ называется следующий вектор (направления наискорейшего роста u):

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Определение 9.1. Будем называть функцию с числовыми или векторными значениями, заданная на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ или 3), *скалярным* или *векторным полем*.

Пусть векторная функция $\mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ дифференцируема в каждой точке. Далее будем обозначать символом ∇ оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Определение 9.2. Величина

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{9.1}$$

называется *дивергенцией* поля $\mathbf{a}$, а величина

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{9.2}$$

или в координатной записи

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{9.3}$$

– *ротором (вихрем)* поля $\mathbf{a}$.

В этих обозначениях формулы Гаусса-Остроградского и Стокса можно переписать в виде

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \mathbf{a}\,\nu\, ds, \tag{9.4}$$

$$\iint\limits_S \nu \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dS = \int\limits_{\Gamma+} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}. \tag{9.5}$$

16. Формула Гаусса-Остроградского.

Теорема 8.1. *Если функции P, Q и R непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ в элементарной (относительно всех координатных осей) области G, то имеет место формула (Гаусса–Остроградского)*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_{S+} P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy. \tag{8.4}$$

Замечание 8.1. Для кусочно гладкой области формулу (8.4) можно записать в виде

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS \tag{8.5}$$

или, если ввести обозначения $\mathbf{a}=(P,Q,R)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$,

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} \mathbf{a}\,\nu\,dS. \tag{8.6}$$

Доказательство. Так как область G элементарна относительно Oz, последнее слагаемое в левой части (8.4) можно переписать в виде повторного интеграла и применить формулу Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) dx\,dy = \\ &= \iint\limits_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]\,dx\,dy = \\ &= \int\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Аналогично доказываются равенства

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S^+} Q\,dx\,dz. \tag{8.8}$$

Складывая (8.7) и (8.8), получаем (8.4).

---

17. Формула Стокса

Теорема 8.2. *Если векторное поле $\mathbf{a}=(P,Q,R)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности S, то справедлива формула Стокса*

$$\int\limits_{\Gamma+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{8.9}$$

Доказательство. Выразим криволинейный интеграл от первого слагаемого в левой части (8.9) через интеграл по параметру, а затем применим к полученному интегралу формулу Грина и сведем его к кратному интегралу:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma+} P(x,y,z)\,dx &= \int\limits_a^b P(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))x'(t)\,dt = \\ &= \int\limits_{\Gamma_0^+} P(x,y,f(x,y))\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}\,dx\,dy = \\ &= -\iint\limits_G \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] dx\,dy = \\ &= -\iint\limits_G \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\,dx\,dy - \iint\limits_G \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = \\ &= -\iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\,dS - \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma\,dS.\end{aligned} \tag{8.10}$$

Так как

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

то $-\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma = \cos\beta$. Подставив это выражение в (8.10), получаем

$$\int\limits_{\Gamma+} P\,dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) dS. \tag{8.11}$$

18. Геометрический смысл дивергенции и ротора.

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathbf{a}(M)$ *– непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset \mathbb{R}^3$ *векторное поле,* $M_0 \in G$, $\{D\}$ *– семейство ограниченных областей с кусочно гладкими границами* ∂D*, содержащее области сколь угодно малого диаметра и такое, что* $M_0 \in D \subset \overline{D} \subset G$*, а* ν *– внешняя нормаль на границе* ∂D *области* D*. Тогда*

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{\operatorname{diam} D\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds}{\mu(D)}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Применяя к векторному полю $\mathbf{a}$ в области D формулу Гаусса–Остроградского, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds = \iiint\limits_G \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\mathbf{a}(M)\,\mu(D),$$

где $M \in D$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\iint\limits_{\partial D} \mathbf{a}\,\nu\,ds}{\mu(D)}. \tag{9.7}$$

Поскольку M, $M_0 \in D$, то $\lim\limits_{\operatorname{diam} D\to 0} M = M_0$, а в силу непрерывности дивергенции

$$\lim_{\operatorname{diam} D\to 0} \mathbf{a}(M) = \mathbf{a}(M_0).$$

Поэтому, перейдя к пределу при $\operatorname{diam} D \to 0$ в обеих частях равенства (9.7), получим (9.6).

Аналогичная формула имеет место для проекции ротора на произвольный единичный вектор ν. Для ее вывода проведем плоскость π через точку M_0 перпендикулярно ν и возьмем на этой плоскости область G, содержащую точку M_0 и ограниченную кусочно гладким контуром Γ. Контур Γ, ориентированный согласованно с вектором ν (по правилу штопора), обозначим через Γ_+.

19. Соленоидальные поля (определение, условие соленоидальности).

Определение 9.5. Непрерывное в области $G \subset \mathbb{R}^3$ векторное поле называют *соленоидальным*, если для любой ограниченной области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial D \subset G$ его поток через эту границу равен нулю.

Теорема 9.3. *Для того чтобы векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой области, было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы его дивергенция в каждой точке этой области равнялась нулю.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $M_0 \in G$. Так как множество G открыто, оно содержит вместе с этой точкой все шары вида $B_\varepsilon(M_0)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, вместе с их границами. В силу соленоидальности поля его поток через поверхность любого такого шара равен 0. Устремляя $\varepsilon \to 0$ и применяя формулу (9.7), получаем $\operatorname{div} \mathbf{a}(M_0) = 0$.

Достаточность непосредственно следует из формулы Гаусса–Остроградского.

20. Потенциальные поля (определение, условие потенциальности).

Достаточность непосредственно следует из формулы Гаусса–Остроградского.

Определение 9.6. Векторное поле (P, Q, R), для которого существует функция u такая, что в любой точке (x, y, z) области G

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R, \tag{9.9}$$

называется *потенциальным полем*, а функция u – его *потенциальной функцией (потенциалом)*.

Теорема 9.4. *Для того чтобы непрерывное векторное поле* $\mathbf{a}$ *в области* G *было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы циркуляция поля* $\mathbf{a}$ *по любому замкнутому кусочно гладкому контуру* $\Gamma \subset G$ *равнялась нулю.*

21. Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток.

Определение 10.1. Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, где $u_n, s_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = u_1 + \dots + u_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{10.1}$$

называется *числовым рядом (бесконечной суммой)* и обозначается $u_1 + \dots + u_n + \dots$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{10.2}$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называют *членами ряда*, а элементы последовательности $\{s_n\}$ – его *частичными суммами*.

Замечание 10.1. Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0 или с другого числа.

Замечание 10.2. Из определения (10.1) следует равенство $s_n = s_{n-1} + u_n$, откуда

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots. \tag{10.3}$$

Определение 10.2. Если существует конечный предел

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n, \tag{10.4}$$

его называют *суммой ряда* (10.2) и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s. \tag{10.5}$$

В этом случае ряд (10.2) называют *сходящимся*, а в противном – *расходящимся*.

Пример 10.1. Примером сходящегося ряда является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, членами которого являются элементы геометрической прогрессии со знаменателем q таким, что $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

При $|q| \geq 1$ (например, при $q = 1$, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$) этот ряд расходится.

Определение 10.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ называется *n-м остатком ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Если n-й остаток ряда сходится, используется обозначение

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{10.7}$$

Теорема 10.3. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сходится и сам ряд, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ в принятых обозначениях имеет место формула*

$$s = s_n + r_n. \tag{10.8}$$

Доказательство. Если s_n и $s_m^{(n)}$ – частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и его n-го остатка соответственно:

$$s_n = u_1 + \dots + u_n, \quad s_m^{(n)} = u_{n+1} + \dots + u_{n+m},$$

то

$$s_{n+m} = s_n + s_m^{(n)}, \tag{10.9}$$

и пределы обеих частей этого выражения существуют или не существуют одновременно. Если они существуют, переход к пределу при $m \to \infty$ в формуле (10.9) приводит к (10.8).

22.Необходимое условие сходимости числового ряда.

Теорема 10.1. (Необходимое условие сходимости ряда.) *Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.*

Доказательство. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то из равенства (10.3) следует

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Теорема 10.2. *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{10.6}$$

Доказательство. Положим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_n$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda s_n + \mu \sigma_n.$$

Если существуют конечные пределы $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, то по свойствам пределов существует и конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda s_n + \mu \sigma_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n + \mu \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lambda s + \mu \sigma, \text{ ч. т. д.}$$

23. Расходимость гармонического ряда

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ЯВЛЯЕТСЯ РАСХОДЯЩИМСЯ.

Докажем расходимость гармонического ряда.

Предположим, что ряд сходится. Тогда существует конечный предел его частичных сумм. В этом случае можно записать $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$, что приводит нас к равенству $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$.

С другой стороны,

$$S_{2n} - S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

Не вызывают сомнения следующие неравенства $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}, \ldots,$ $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$. Таким образом, $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Полученное неравенство $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$ указывает нам на то, что равенство $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ не может быть достигнуто, что противоречит нашему предположению о сходимости гармонического ряда.

Вывод: гармонический ряд расходится.

24. Признаки сравнения числовых рядов

Первый признак сравнения (или первая теорема сравнения) формулируется следующим образом:

Первый признак сравнения

> Пусть заданы два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если начиная с некоторого номера n_0 выполнено неравенство $u_n \le v_n$, то:
>
> 1. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ будет расходящимся.
> 2. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ будет сходящимся.

Признак сравнения можно сформулировать также и в иной форме. Обычно говорят, что это второй признак сравнения (или вторая теорема сравнения). Иногда его называют предельным признаком сравнения или признаком сравнения в предельной форме. Формулировка его такова:

Второй признак сравнения

> Пусть заданы два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если при условии $v_n \neq 0$ существует предел
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = K,$$
>
> где $0 < K < \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся либо расходятся одновременно.

25. Признак Даламбера сходимости неотрицательных числовых рядов

Теорема 11.3. (Признак Даламбера.) *Пусть для ряда* $\sum_{n=1} u_n$ *с неотрицательными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = l. \tag{11.4}$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд сходится, а если* $l > 1$, *то расходится.*

Доказательство. Пусть $l < 1$. Выберем число $q \in (l, 1)$. Тогда в силу условия (11.4) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$, откуда $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, получим $u_{n_0+k} < q^k u_{n_0}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_{n_0} \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, так как $q < 1$. Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а значит, и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же $l > 1$, в силу условия (11.4) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, откуда $u_n > u_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $n = n_0+1, n_0+2, \ldots$, получим $u_{n_0+k} > u_{n_0+k-1} > \cdots > u_{n_0} > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не стремится к нулю, откуда в силу необходимого условия следует его расходимость.

26.Радикальный признак Коши

Теорема 11.4. (Радикальный признак Коши.) *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с неотрицательными членами существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{11.5}$$

Тогда, если $l < 1$, *то ряд сходится, а если* $l > 1$, *то расходится.*

Доказательство. Пусть $l < 1$. Выберем число $q \in (l, 1)$. Тогда в силу условия (11.5) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$, откуда $u_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$, по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а значит, и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если же $l > 1$, в силу условия (11.5) и свойств предела существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, откуда $u_n > 1$, и ряд расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости.

27. Интегральный признак сходимости неотрицательных числовых рядов. Сходимость обобщенного ряда Дирихле.

Опр: Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, где $u_n, s_n \in$ IR, n ∈ IN

$s_n = u_1 + \dots + u_n$, n ∈ IN – называется числовым рядом (бесконечной суммой)

Обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (10.2)

Элементы последовательности $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$ называют *членами ряда*, а элементы последовательности $\{s_n\}$ – его *частичными суммами*

Замечание: Иногда нумерацию членов ряда начинают не с 1, а с 0 или с другого числа

Замечание: из $s_n = u_1 + \dots + u_n$ следует равенство $s_n = s_{n-1} + u_n$, откуда

$u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2,3 \dots$ *(10.3)*

Опр: Если существует конечный предел $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ – называют суммой ряда

пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$ в случае ряда (10.2) называют ***сходящемся***, в противном - ***расходящимся***

Пример

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

При $|q| \geq 1$ (например, при $q = 1$, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$) этот ряд расходится.

Теорема 10.1. (Необходимое условие сходимости ряда.) *Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.*

Доказательство. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то из равенства (10.3) следует

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Теорема 10.2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, то для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \qquad (10.6)$$

Доказательство. Положим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n$, $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_n$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda s_n + \mu \sigma_n.$$

Если существуют конечные пределы $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, то по свойствам пределов существует и конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda s_n + \mu \sigma_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} s_n + \mu \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lambda s + \mu \sigma, \text{ ч. т. д.}$$

Если же интеграл (11.2) сходится, то в силу неотрицательности f имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty,$$

а так как согласно неравенству (11.3)

$$s_n \geq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

то, перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Это означает, что ряд (11.1) расходится.

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{11.2}$$

Доказательство. В силу монотонности функции $f(x)$ она интегрируема на любом конечном отрезке $[1, \eta] \subset [1, +\infty)$.

Если $k \leq x \leq k+1$, то вследствие убывания функции $f(x)$ будем иметь $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[k, k+1]$, получаем

$$f(k) \int\limits_k^{k+1} dx \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1) \int\limits_k^{k+1} dx,$$

т.е.

$$f(k) \geq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1).$$

Суммируя эти неравенства по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

т.е.

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n, \tag{11.3}$$

где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

Если интеграл (11.2) сходится, то из неравенства (11.3) в силу неотрицательности f следует, что последовательность частичных сумм s_n ограничена сверху:

$$s_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty,$$

и ряд (11.1) сходится по лемме.

Если же интеграл (11.2) сходится, то в силу неотрицательности f имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty,$$

а так как согласно неравенству (11.3)

$$s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx,$$

то, перейдя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Это означает, что ряд (11.1) расходится.

Следствие 11.1. *Обобщенный гармонический ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$.

Доказательство. При $s \leq 0$ утверждение следствия вытекает из необходимого условия сходимости числовых рядов, а при $s > 0$ – из интегрального признака сходимости для функции $f(x) = x^{-s}$.

28. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остаточного члена

Теорема 12.1. (Признак Лейбница.) *Если последовательность $\{u_n\}$ убывает и стремится к нулю:*

$$u_n \geq u_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{12.1}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{12.2}$$

сходится к некоторому числу s, причем для его частичных сумм s_n при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|s_n - s| \leq u_{n+1}. \tag{12.3}$$

Из (12.1) следует, что $u_n \geq 0$. При $u_n > 0$ ряды вида (12.2) называют *знакочередующимися.*

Доказательство. В силу убывания u_n имеем

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) = \\ &= s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq s_{2n} \geq 0, \ \ n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

..

29. Абсолютная и условная сходимости знакопеременных рядов. Теорема о связи абсолютной и обычной сходимости.

Определение 12.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если же первый ряд сходится, а второй – нет, первый ряд называется *условно сходящимся.*

Теорема 12.3. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Это следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{p} u_{n+k}\right| \leq \sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}|. \tag{12.6}$$

По критерию Коши абсолютной сходимости ряда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \geq 0$ правая часть неравенства (12.6) меньше ε, а следовательно, то же верно и для его левой части, и ряд сходится по критерию Коши для обычной сходимости.

Пример 12.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ сходится абсолютно, так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно (условно), так как гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

30. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов

Признак Абеля сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{1}$$

выполнены условия :

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится

2) последовательность чисел a_n является ограниченной и монотонной,

тогда ряд является сходящимся.

Заметим, по поводу монотонности нет требования убывания или возрастания, допускаются оба случая.

Признак Дирихле сходимости знакопроизвольных рядов. Если для ряда (1) выполнены условия :

1) последовательность частичных сумм $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ ограничена

2) числа a_n монотонно стремятся к нулю,

тогда ряд является сходящимся.

31. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость.

Определение 13.2. Последовательность функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ называется *(поточечно) сходящейся* на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторому числу $f(x) \in \mathbb{R}$. В этом случае функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют *(поточечным) пределом* функциональной последовательности $\{f_n\}$.

Определение 13.3. Множество всех числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ с $x \in X$ называется *функциональным рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на множестве X, функции $f_n(x)$ – его *членами*, сумма $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ – *частичной суммой*, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{n+k}(x)$ – *остатком*.

Определение 13.4. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{13.2}$$
называется *(поточечно) сходящимся* на множестве X, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве к некоторой функции $s(x)$, которую называют *суммой ряда* (13.2). Говорят также, что функция $s(x)$ *раскладывается* в этот ряд, и пишут
$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$
Если ряд (13.2) при любом фиксированном $x \in X$ сходится абсолютно, то его называют *абсолютно сходящимся на множестве* X.

Пример 13.1. Последовательность $\{x^n\}$ (соответственно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})\}$) сходятся на отрезке $[0, 1]$ к разрывной функции
$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$
Этот пример показывает, что из поточечной (даже абсолютной) сходимости ряда с непрерывными членами не следует непрерывность его суммы. Чтобы гарантировать ее, требуется сходимость в более сильном смысле.

Определение 13.5. Функциональная последовательность $\{f_n\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции f на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{13.3}$$

Соответственно определяется равномерная сходимость для функциональных рядов.

Лемма 13.1. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась к функции f, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{13.4}$$

Доказательство. Пусть $f_n \to f$ равномерно на X. Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство (13.3), а следовательно, и

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и означает выполнение условия (13.4).

Если же условие (13.4) выполнено, то по определению предела числовой последовательности существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и $n > n_0$ выполняется неравенство (13.4), а следовательно, и (13.3), что и означает равномерную сходимость f_n к f.

Следствие 13.1. *Если существует такая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$*

Следствие 13.1. *Если существует такая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n, \tag{13.5}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции f на множестве X.

Доказательство. Из (13.5) следует, что

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n,$$

а это в силу $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ влечет (13.4).

Теорема 13.1. (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных после-

32. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 13.4. (Признак Вейерштрасса.) *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \alpha_n \geq 0, \tag{13.9}$$

сходится и для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leq \alpha_n, \tag{13.10}$$

то ряд (13.2) *абсолютно и равномерно сходится на множестве X.*

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (13.2) при каждом $x \in X$ следует из первого признака сравнения. Для доказательства равномерной сходимости обозначим $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Тогда

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = \varepsilon_n.$$

Из сходимости ряда (13.9) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, а тогда в силу следствия 13.1 ряд (13.2) равномерно сходится на множестве X.

33. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда (без доказательства).

Теорема 13.5. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{13.11}$$

равномерно сходится на множестве X и в некоторой точке $x_0 \in X$ все члены ряда непрерывны, то сумма ряда $s(x)$ непрерывна в этой точке.

Замечание 13.2. Условие равномерной сходимости в теореме существенно (см. пример 13.1).

34. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных рядов (без доказательства).

Теорема 13.6. (Почленное интегрирование рядов.) *Пусть члены ряда* (13.11) *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *и ряд равномерно сходится на нем. Тогда, какова бы ни была точка* $x_0 \in [a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt \tag{13.12}$$

также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt. \tag{13.13}$$

Замечание 13.3. Условие равномерной сходимости существенно, как показывает

Пример 13.2. Пусть функции $f_n(x)$ заданы формулами

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n \le x \le 2/n, \\ 0, & 2/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $x \in [0, 1]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, откуда $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0$, но $\int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 1$.

Теорема 13.7. (Почленное дифференцирование рядов.) *Пусть члены ряда* (13.11) *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$, *а ряд производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{13.14}$$

равномерно сходится на $[a, b]$. *Тогда, если ряд* (13.11) *сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a, b]$, *то он сходится равномерно на всем отрезке* $[a, b]$, *причем его сумма* $s(x)$ *является непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{13.15}$$

35. Степенные ряды. Теоремы Абеля

Определение 14.1. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{14.1}$$

Замечание 14.1. Заменой $y = z - z_0$ и переобозначением $z = y$ ряд (14.1) сводится к виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{14.2}$$

Теорема 14.1. (Абель.) *Если степенной ряд* (14.2) *сходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то при любом* z *таком, что* $|z| < |z_0|$, *он сходится абсолютно.*

Доказательство. По необходимому условию сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, и поэтому существует $c > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|a_n z_0^n| \leq c,$$

откуда

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq c \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

и ряд (14.2) сходится по первому признаку сравнения с геометрической прогрессией, имеющей знаменатель

$$\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1.$$

Следствие 14.1. *Если ряд* (14.2) *расходится при* $z = z_0 \neq 0$, *то при любом* z *таком, что* $|z| > |z_0|$, *он тоже расходится.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей теоремы путем рассуждений от противного.

36. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

Определение 14.2. Число

$$R = \sup X, \tag{14.3}$$

где X – множество неотрицательных значений z, при которых ряд (14.2) сходится, называется *радиусом сходимости* этого ряда, а интервал $(-R, R)$ – его *интервалом сходимости*.

Теорема 14.2. *Пусть* R – *радиус сходимости ряда* (14.2). *Тогда при* $|z| < R$ *ряд сходится абсолютно, при* $|z| > R$ *расходится, а в любом интервале* $(-r, r)$ *с* $0 \leq r < R$ *сходится равномерно.*

Доказательство. Из равенства (14.3) и определения sup следует, что для $0 < R \leq +\infty$ и $|z| < R$ существует $x \in X$ такое, что $|z| < x < R$, а так как по определению множества X во всех его точках ряд сходится, то по теореме 14.1 он абсолютно сходится и в точке z.

Если $0 \leq R < +\infty$ и $|z| > R$, то для любой точки x такой, что $R < x < |z|$, в силу равенства (14.3) и определения sup имеем $x \notin X$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится, и по следствию 14.1 расходится и ряд (14.2).

При $|z| \leq r < R$ имеем

$$|a_n z^n| \leq |a_n r^n|,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ абсолютно сходится по доказанному, а следовательно, ряд (14.2) равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$ по признаку Вейерштрасса.

Аналогично определяется и исследуется интервал сходимости ряда (14.1).

Теорема 14.3. (Абель.) *Если $R < +\infty$ – радиус сходимости степенного ряда* (14.2) *и этот ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$.

Следствие 14.2. *Если ряд* (14.2) *сходится при $z = R$, то его сумма непрерывна на отрезке* $[0, R]$.

Доказательство. Утверждение вытекает из непрерывности каждого члена ряда (14.2) на отрезке $[0, R]$ и теорем 13.5 и 14.3.

Пример 14.1. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^n$ равен 0 по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot |z|^{n+1}}{n! \cdot |z|^n} = |z| \lim_{n\to\infty} (n+1) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } z \neq 0, \\ 0, & \text{если } z = 0. \end{cases}$$

Аналогично доказывается, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ равен $+\infty$, а рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ – единице. В силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса и необходимого условия сходимости единице равен также радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ во всех граничных точках интервала сходимости абсолютно сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ – расходится (по необходимому условию сходимости), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$.

37. Ряды Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

Определение 15.1. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{15.1}$$

называется ее *рядом Тейлора* в точке x_0.

Теорема 15.2. (Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.) *Если функция f имеет в окрестности точки x_0 все производные, ограниченные в совокупности на этой окрестности, то f раскладывается в этой окрестности в степенной ряд.*

Доказательство. Условие теоремы означает существование такой константы $c > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leq c. \tag{15.10}$$

Запишем остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа (15.8). Из неравенства (15.10) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq c \frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$, а так как в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при $|x - x_0| < h$, что и означает сходимость ряда Тейлора к функции f в этой окрестности.

Пример 15.2. Так как для функции $f(x) = e^x$ имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, $n \in \mathbb{N}$, то для любого $a > 0$, $x \in (-a, a)$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a.$$

38. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!}, \quad x \in (-1; 1]$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) x^n}{n!}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1$$

39. Тригонометрические ряды Фурье.

Определение 16.1. Функциональные ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{16.1}$$

где коэффициенты $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, называются *тригонометрическими рядами.* Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, n \in \mathbb{N}, \tag{16.2}$$

называется *тригонометрической системой.*

Определение 16.2. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то тригонометрический ряд (16.1), коэффициенты которого заданы формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \ \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{16.4}$$

называется *(тригонометрическим) рядом Фурье* функции f. В этом случае пишут

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Очевидно, что сужение функции f на полуинтервал $[-\pi, \pi)$ можно 2π–периодически продолжить на $\mathbb{R}$ по формуле

$$f^*(x + 2\pi k) = f(x), \ \ x \in [-\pi, \pi), \ \ k \in \mathbb{Z},$$

причем ряды Фурье функций f и f^* на отрезке $[-\pi, \pi]$ совпадают, так как значения f и f^* могут различаться только в точке π.

40. Ортогональность тригонометрических функций.

Определение 16.1. Функциональные ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{16.1}$$

где коэффициенты $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, называются *тригонометрическими рядами.* Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, n \in \mathbb{N}, \tag{16.2}$$

называется *тригонометрической системой.*

Лемма 16.1. Функции системы (16.2) имеют следующие свойства:

$$\begin{gathered}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \ m, n \in \mathbb{N}_0; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \ m \neq n, \ m, n \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \qquad (1$$

Доказательство. Например,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x] \, dx = \\
&= \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \ n \neq m;
\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \pi + \frac{\sin 2nx}{4n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \ n \in \mathbb{N}.$$

Другие равенства (16.3) доказываются аналогично.

41. Достаточное условие сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке (без доказательства).

Для формулировки достаточных условий сходимости ряда Фурье нам потребуются следующие понятия.

Определение 16.3. Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности своей точки разрыва первого рода x, то *односторонними* (*правосторонней* и *левосторонней*) производными f в точке x называются пределы

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}, \quad f'_-(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}.$$

Определение 16.4. Функция f называется *кусочно дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует такое его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=1}^n$, что f дифференцируема на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, \ldots, n)$, а в точках x_{i-1} и x_i $(i = 1, \ldots, n)$ существуют правосторонние (соответственно левосторонние) производные $f'_+(x_{i-1})$ и $f'_-(x_i)$.

Замечание 16.1. Из определения следует, что кусочно дифференцируемая функция f является на отрезке $[a, b]$ кусочно непрерывной и поэтому интегрируемой по Риману.

Введем обозначение

$$f_x^*(t) = f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \tag{16.6}$$

Замечание 16.2. Если функция $f(t)$ периодична с некоторым периодом T и абсолютно интегрируема на периоде, то же самое верно и для $f_x^*(t)$.

Теорема 16.2. (Признак Дини сходимости ряда Фурье.) *Пусть функция f 2π–периодична и абсолютно интегрируема на периоде, x – ее точка непрерывности или разрыва первого рода и интеграл*

$$\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{t}\, dt < \infty. \tag{16.7}$$

Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

в частности, в точке непрерывности – к $f(x)$.

Следствие 16.1. *Пусть функция f 2π–периодична и абсолютно интегрируема на периоде, а в точке x существуют ее конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и*

$f'_-(x)$. *Тогда тригонометрический ряд Фурье функции* f *сходится в точке* x *к значению*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Доказательство. Так как при условиях следствия

$$\lim_{t\to 0_+}\frac{f^*_x(t)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0_+}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}-\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right]=f'_+(x)-f'_-(x)<\infty,$$

то функция $\dfrac{f^*_x(t)}{t}$ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$ с $0<\delta<\pi$. Поэтому существует интеграл Римана

$$\int\limits_0^\delta \frac{|f^*_x(t)|}{t}\,dt,$$

а интеграл

$$\int\limits_\delta^\pi \frac{|f^*_x(t)|}{t}\,dt$$

сходится как интеграл от произведения абсолютно интегрируемой функции на ограниченную, что влечет справедливость условий теоремы, а следовательно, и ее заключения.

Замечание 16.3. Это следствие означает, в частности, что тригонометрический ряд Фурье функции f, кусочно дифференцируемой на $[-\pi,\pi]$, при $x\in(-\pi,\pi)$ сходится к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а при $x=\pm\pi$ – к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ (так как в силу 2π–периодичности функции f имеем $f(-\pi\pm 0)=f(\pi\pm 0)$).