РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

на тему

«Модель хищник-жертва»

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил
Студент группы НК-301 Н.С. Красюк

МОСКВА
2015

Оглавление

Постановка задачи

Целью данной лабораторной работы является изучение модели Лотки-Вольтерры, описывающую взаимодействие двух видов по принципу «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \dot{N} = (a - cM(t))N(t) \\ \dot{M} = (-b + dN(t))M(t) \end{cases} \qquad (1)$$

N - число жертв,

M - число хищников,

a - скорость естественного прироста жертв, в отсутствии хищников,

b - естественное вымирание хищников в отсутствии жертв,

$N(t)M(t)$ - взаимодействие хищников и жертв, что соответственно приводит к уменьшению популяции жертв $(-c)$ и увеличению числа хищников $(+d)$,

$\dot{N}, \dot{M}$ - дифференциалы по времени.

В процессе выполнения лабораторной работы нам необходимо смоделировать следующую ситуацию: в лесу проживает $N(0)$ зайцев и $M(0)$ волков, количество волков растет до тех пор пока число зайцев достаточно велико, чтобы их прокормить, в тот момент времени, когда численность зайцев уменьшается, волки начинают умирать из-за нехватки корма, при сокращении количества волков популяция зайцев начинает расти. Этот процесс циклически повторяется по кругу, пока будут существовать обе популяции. По ходу выполнения лабораторной работы нам необходимо сделать:

1) Построить график зависимости N от M и графики $N(t), M(t)$.
2) Найти стационарное состояние системы.
3) Вычислить период колебаний системы в зависимость от ее характеристик a, b, c, d и начальных условий $N(0)$ и $M(0)$.

Ход работы

Допустим в нашем небольшом лесу проживает $N(0)=25$ зайцев и $M(0)=9$ волков. Коэффициент описывающий естественный прирост зайцев в отсутствии волков $a=35$, естественное вымирание волков в отсутствии зайцев $b=15$, коэффициенты отвечающие за изменение численности популяции зайцев и волков при встрече соответственно $c=5$ и $d=0.5$.

(1) В начале построим график зависимости N от M, а также обозначим направление изменения численности популяций и точку начальных условий. Результат показан на Рис. 1.

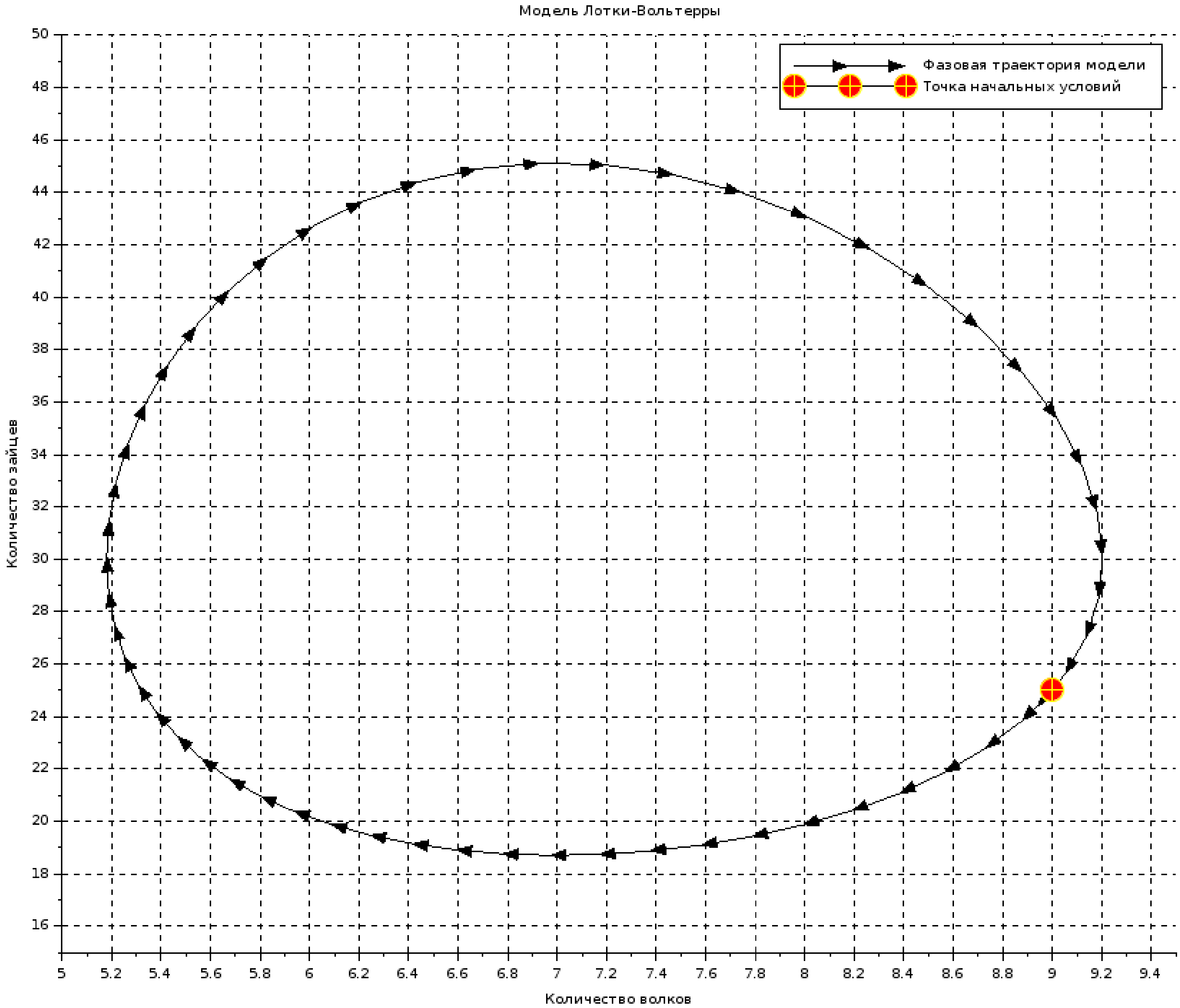

Рис. 1

Как мы видим на Рис. 1 изображена фазовая траектория модели нашего леса, которая начинается в точке $(M(0)=9, N(0)=25)$, соответствующей начальным условиям, далее популяция волков и зайцев идет на спад, т.к. исходя из наших условий, волков стало слишком много чтобы прокормиться, количество зайцев тоже стремительно уменьшается, по тем же самым причинам, ситуация меняется в точке $(M\approx 7, N\approx 19)$, в этот момент количество волков уменьшается и популяция зайцев начинает расти, но волкам все еще не хватает пищи, в точке $(M\approx 5, N\approx 30)$ зайцев становится достаточно чтобы, прокормить уже имеющихся волков и дать пищу новым, количество волков растет, в точке $(M\approx 7, N\approx 45)$ достигается пик популяции зайцев, количество волков растет, далее популяция зайцев идет на спад, из-за опять таки выросшей популяции волков, пик популяции волков достигается в точке $(M \approx 9, N \approx 30)$. И этот процесс продолжается по кругу.

(1) Теперь построим графики $N(t), M(t)$. Результат изображен на Рис. 2.

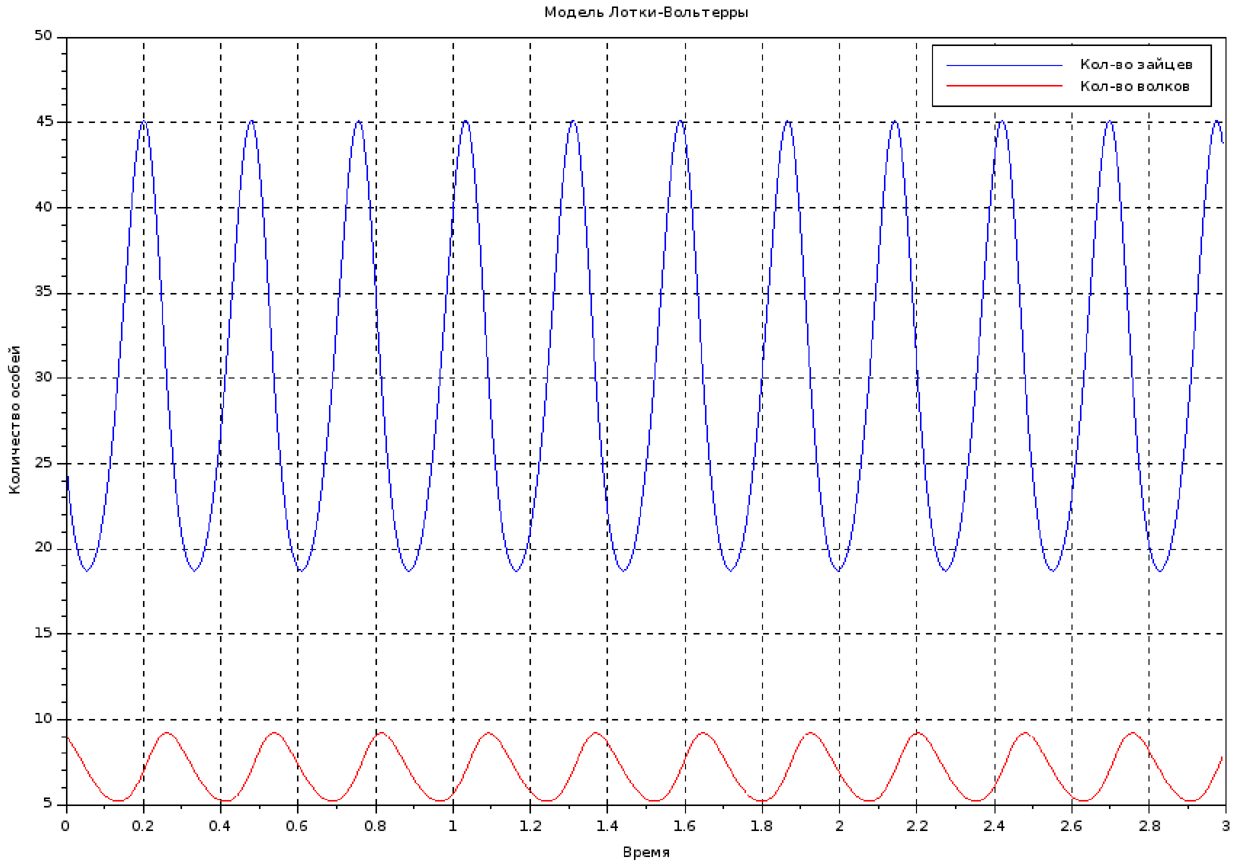

Рис. 2

График $N(t)$ - график изменения популяции зайцев во времени изображен синим цветом, а график $M(t)$ - изменения количества волков красным. Как мы видим популяции обоих видов совершают периодические колебания с небольшим сдвигом по фазе, что обусловлено тем, что увеличение численности волков начинается через небольшой промежуток времени после того, как популяция зайцев начинает восстанавливаться. Численность зайцев изменяется в промежутке от ~19 до ~45, численность волков от ~5 до ~9 (по понятным причинам значения округляются до целых).

(2) Найдем стационарное состояние системы.

У жесткой модели Лотки-Вольтерры, в нашем случае мы ее и используем, есть строго определенное положение равновесия, которое также называется стационарным (не зависящее от времени решение). Его можно найти следующим образом:

$$M_0 = \frac{a}{c}, N_0 = \frac{b}{d}$$

Для нашего случая:

$$M_0 = \frac{a}{c} = \frac{35}{5} = 7, N_0 = \frac{15}{0.5} = 30$$

Для наглядности изобразим данную точку на графике зависимости N от M , результат на Рис. 3.

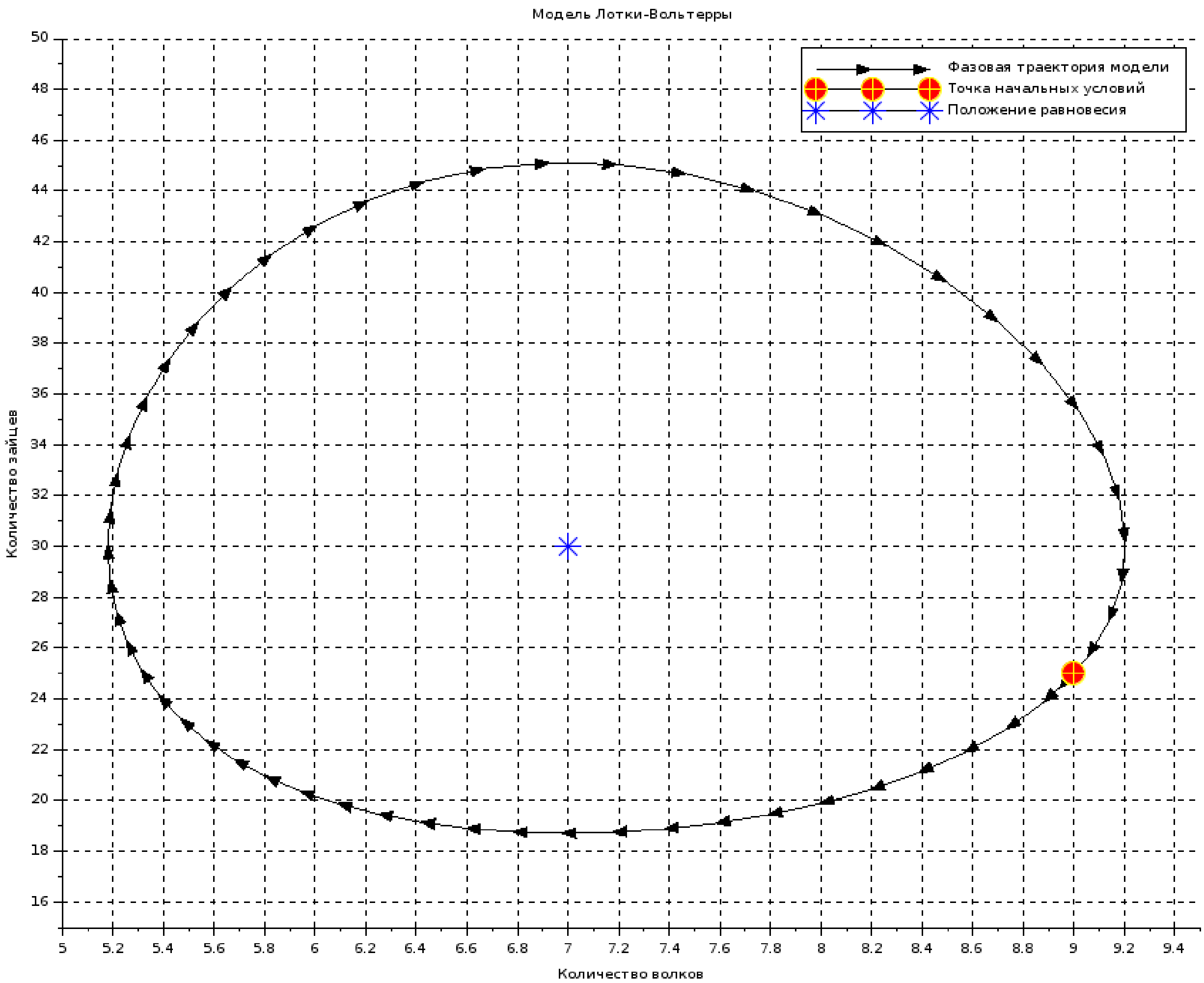

Рис. 3

Очевидно что наша модель колеблется вокруг найденной точки равновесия.

(доп) Построим для интереса мягкую модель. Мягкая модель задается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{N}=(a-cM(t))N(t)+\varepsilon f(N,M) \\ \dot{M}=(-b+dN(t))M(t)+\varepsilon g(N,M) \end{cases}$$

(2)

В модели (2) все полностью аналогично модели (1), за исключением прибавившихся малых членов $\varepsilon f(x,y), \varepsilon g(x,y), \varepsilon \ll 1$. Эти члены отвечают за дополнительные условия окружающей среды, необходимые для придания модели реалистичности. Как и для построения прошлого графика будем считать, что $N(0)=25$, $M(0)=9$, $a=35$, $b=15$, $c=5$, $d=0.5$ и пусть $\varepsilon=0.09$, $f(N,M)=-N(t)^2$, $g(N,M)=-M(t)^2$. Построим зависимость N от M , результат изображен на Рис. 4.

Как мы видим на Рис. 4 в данном случае фазовая траектория имеет вид «сходящейся» спирали, подобные обстоятельства в конечном итоге приведут к тому, что модель придет в определенное равновесное состояние, для большей наглядности построим зависимости $N(t), M(t)$ синим и красным цветами соответственно, построение изображено на Рис. 5. По графику найдем положение равновесия. Оно примерно равно $(N=31.159, M=6.4397)$, иными словами 31 заяц и 6 волков.

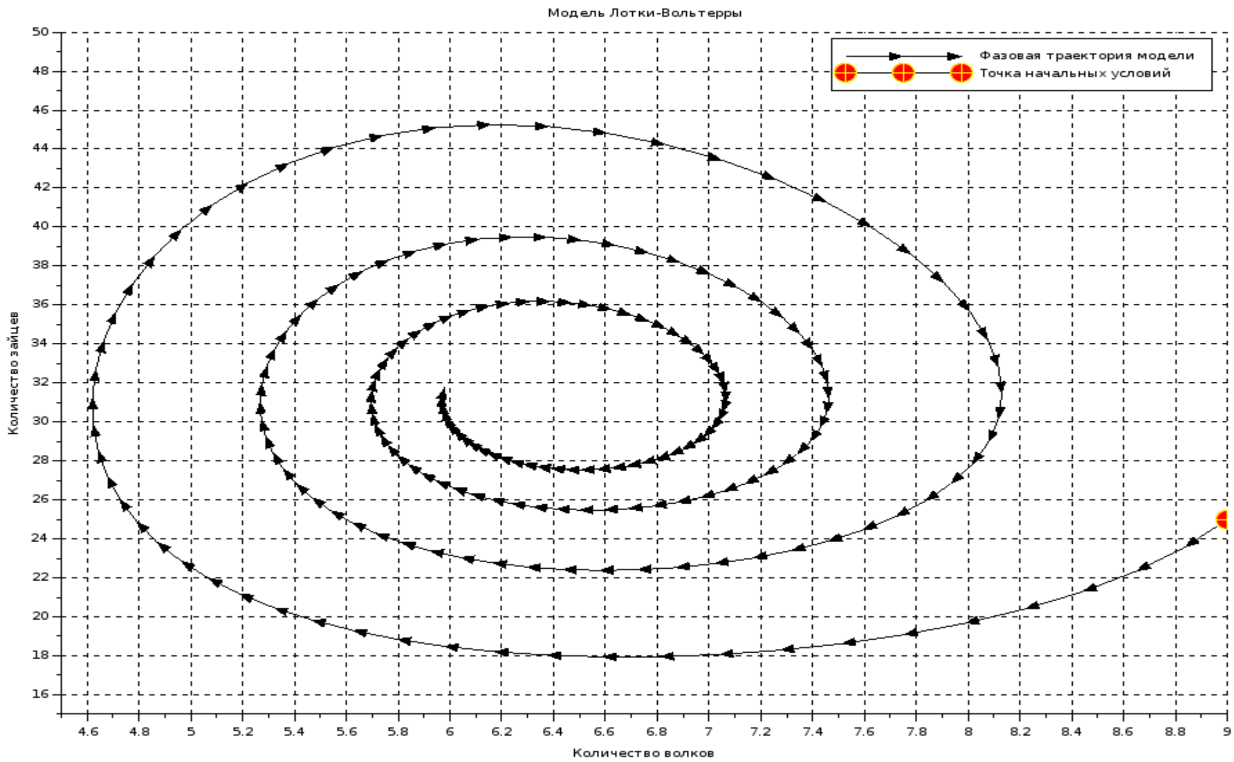
Модель Лотки-Вольтерры
Фазовая траектория модели
Точка начальных условий
Количество зайцев
Количество волков

Рис. 4

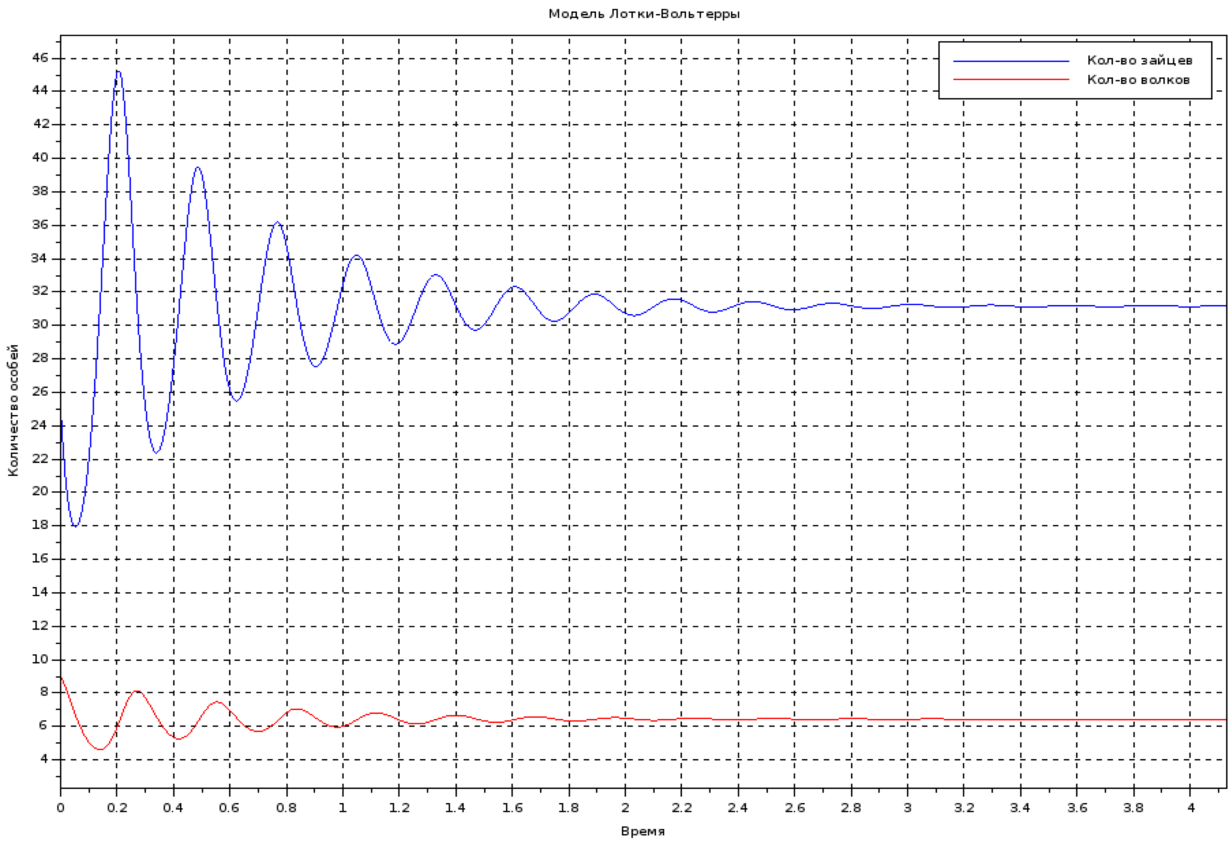
Модель Лотки-Вольтерры
Кол-во зайцев
Кол-во волков
Количество особей
Время

Рис. 5

Исходный код программы

```
//Параметры
a=35;
b=15;
c=5;
d=0.5;

//Диффур
function dy=f(t, y)
 dy(1) = (a-c*y(2))*y(1);
 dy(2) = (-b+d*y(1))*y(2);
// dy(1) = (a-c*y(2))*y(1)-0.09*y(1)^2;
// dy(2) = (-b+d*y(1))*y(2)-0.09*y(2)^2;
endfunction

//Начальный момент выремени
t0 = 0;

//Начальные условия
x0 = [25; 9];

//Временной промежуток
t = [0: 0.005: 0.29];
//t = [0: 0.005: 15];

//Решаем диффур
x = ode(x0, t0, t, f);

n = size(x, "c");

//переносим решение
for i = 1: n-2
 y1(i) = x(1, i);
 y2(i) = x(2, i);
 t2(i) = t(i);
end

clf();

xtitle("Модель Лотки-Вольтерры",   "Количество волков",   " Количество
зайцев");

////Зависимость N от M
plot2d4(y2, y1);

////Строим точку начальных условий
plot2d(x(2), x(1));
p=get("hdl");
p.children.mark_style=3;
p.children.mark_size=4;
p.children.mark_foreground=7;
p.children.mark_background=5;

//Строим положение равновесия
plot2d(a/c, b/d);
p=get("hdl");
p.children.mark_style=10;
p.children.mark_size=5;
p.children.mark_foreground=2;
```

```
//Легенда для графиков сверху
legend(["Фазовая траектория модели";
        "Точка начальных условий";
        "Положение равновесия"]);

//Строим N(t) и M(t)
//
//xtitle("Модель Лотки-Вольтерры",   "Время",   " Количество особей");
//
//plot(t2, y1, 'b');
//plot(t2, y2, 'r');
//
//legend(["Кол-во зайцев";
//        "Кол-во волков"]);

xgrid();
```