РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

на тему

«Колебания математического маятника»

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнил
Студент группы НК-301 Н.С. Красюк

МОСКВА
2015

Оглавление

Постановка задачи..3
Решение...4
Анализ результатов..8

Постановка задачи

В данной лабораторной работе мы рассмотрим такую механическую систему, как математический маятник. По определению математический маятник представляет из себя гармонический осциллятор, являющийся системой, состоящей из материальной точки, находящейся на невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне в однородном поле сил тяготения.

Для понимания сути приведенного выше определения разберем что такое осциллятор, точнее гармонический осциллятор, и внесем некоторые правки учитывающие случай затухания.

Гармонический осциллятор это система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F, пропорциональной смещению x.

Возвращающая сила $F=-kx$, k — коэффициент жесткости.

Но так как нас еще интересует случай с затуханием добавим в нее силу вязкого трения (которая направлена против скорости движения груза относительно относительно среды и также пропорциональна ей), тогда F будет выглядеть следующим образом:

$F=-kx-\alpha\upsilon$

По 2му закону ньютона имеем:

$am=-kx-\alpha\upsilon$

$a=\frac{k}{m}x-\frac{\alpha}{m}\upsilon$

Заменим a на 2ю производную от координаты по времени: $a\Leftrightarrow\ddot{x}$ (т. к. x(t))

Обозначим $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, ω_0 это (собственная) циклическая частота осциллятора.

Соответственно обозначим $\upsilon\Leftrightarrow\dot{x}$ (первая производная по времени).

И самое главное $2\gamma=\frac{\alpha}{m}$, где γ - постоянная затухания, суть потеря энергии в системе (к примеру из-за трения).

Запишем окончательное уравнение:

$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$, у нас получилось дифференциальное уравнение, описывающее нашу линейную динамическую систему.

В том случае если энергетические потери отсутствуют (наша среда «идеальна» т.е. $\gamma=0$ энергия колебаний сохраняется во времени) мы получаем случай консервативного осциллятора:

$\ddot{x}+2*0*\dot{x}+\omega_0^2*x=0\Rightarrow\ddot{x}+\omega_0^2x=0$, что по сути совпадает для уравнения малых колебаний математического маятника около нижнего положения равновесия.

Кстати для уравнения математического маятника в общем виде имеем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$\ddot{x}+\omega^2\sin(x)=0$, относительно данного уравнения $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$, ω - положительная константа, L — длинна подвеса, g — ускорение свободного падения а $x(t)$ - функция характеризующая угол отклонения маятника в момент времени t от положения равновесия, выражается в радианах.

Вернемся к уравнению $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$ Т.к наше уравнение — обыкновенное ДУ второго порядка, для того чтобы определить закон движения маятника необходимо 2 начальных условия ~~— координату и скорость~~.

Начальные условия будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ \dot{x}(t_0)=y_0 \end{cases}$$

Для удобства решения можно перейти от дифференциального уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка.

Любое дифференциальное уравнение можно свести к системе, например для уравнения 2го порядка имеем:

$y''=f(x,y,y')$ сводится к системе следующего вида:

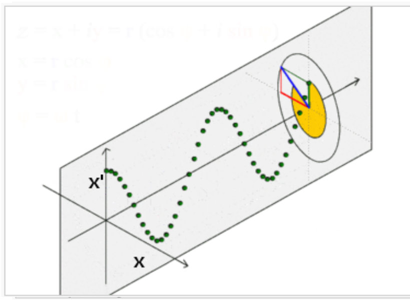
$\begin{cases} z'=f(x,y,z) \\ y'=z \end{cases}$, где z - новая зависимая переменная, определяемая вторым уравнением.

В нашем случае все равноценно:

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\omega_0^2 x \end{cases}$$

учитывая нашу замену приведем начальные условия к виду:

$$\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$



Переменные x, y — независимы и образуют плоскость в котором находится решение, называется подобная плоскость фазовой, решение — это гладкая кривая в фазовой плоскости, называемая фазовой траекторией, множество различных решений на одной фазовой плоскости называют фазовым портретом (позволяет посмотреть общее поведение системы). Рисунок наглядно демонстрирует эти понятия.

Что касается воздействия внешних сил то относительно консервативного гармонического осциллятора это воздействие извне, в самом простом случае, изменяющиеся по периодическим законам, к примеру, $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$, или любая другая периодическая функция, таким образом если вернуться к выводу через второй закон ньютона, тогда:

$ma=-kx+F_0\cos(\Omega t)$ и проведя небольшие манипуляции получим:

$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\Phi_0\cos(\Omega t)$, иными словами прибавилась правая часть, которая и выражает воздействие периодической внешней силы.

Наша задача состоит в том, чтобы построить решение описанной выше математической модели в 3х случаях:

(1) Гармонические колебания без затухания.

(2) Колебания с затуханием

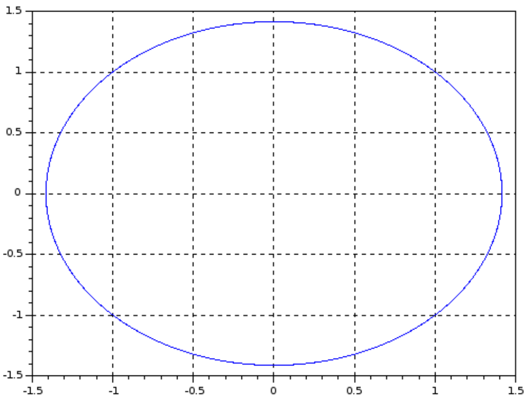
(3) Колебания с затуханием и воздействием внешней силы.

Для всех случаев мы построим решение в среде Scilab, в целях анализа получившегося результата мы построим фазовый портрет также для каждого случая.

Решение

Случай (1)

В начале мы построим фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega=1$ и $\omega=2$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — (рис 1.,рис 1.2. соответственно)



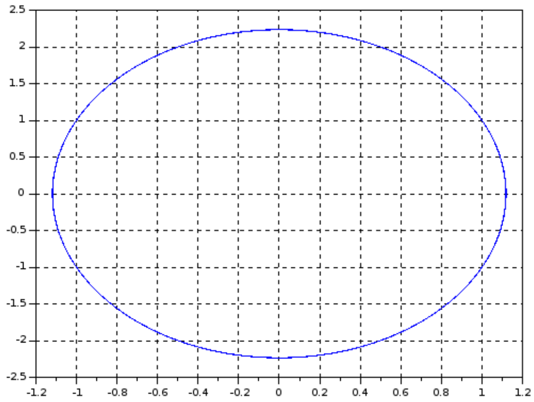


рис 1. рис 1.2.

Случай (2)

Мы построим фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием $2\gamma=g=0.5$ (малое трение), без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega=1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — рис 2.

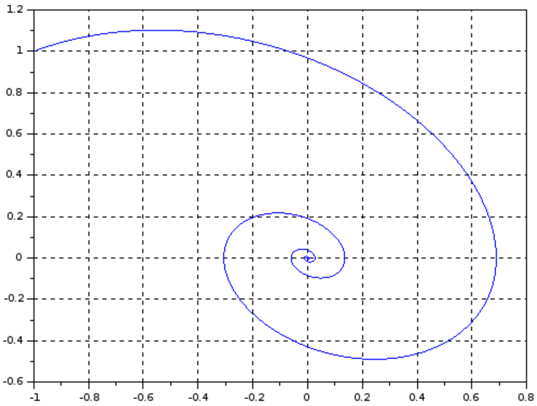
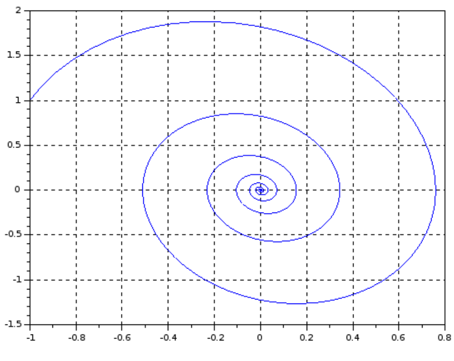


рис 2.

Для интереса увеличим частоту до $\omega=2$ и $\omega=5$ (рис 3. и рис 4. соотв.)



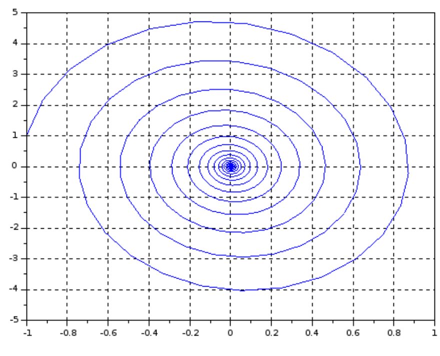


рис 3. рис 4.

Построим фазовый портрет гармонического осциллятора с <u>критическим</u> затуханием $2\gamma = g = 2 = \omega_0 * 2$, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — рис 5.

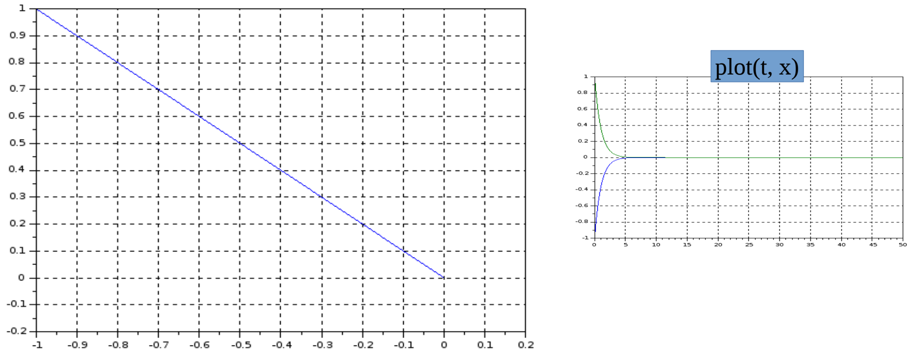


рис 5.

Построим фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием $2\gamma = g = 10$ и $2\gamma = g = 5$ (сильное трение), без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — рис 6. и 6.1 соответственно.

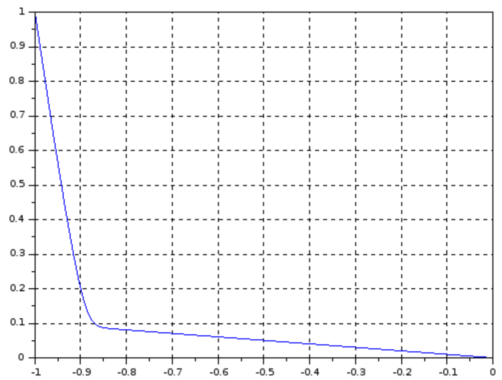


Рис 6.

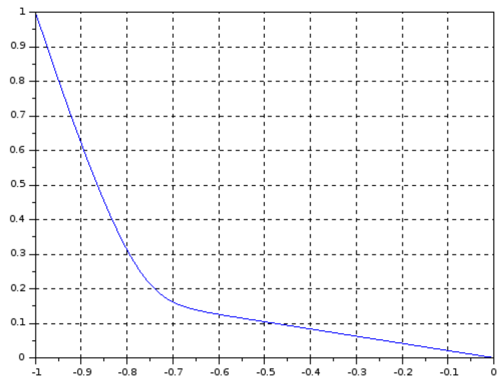


рис 6.1.

Случай (3)

Мы построим фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием $2\gamma = g = 0.01$ (малое трение), с воздействием внешней силы заданной следующим образом $F(t) = \cos(5 * t + 1000 * t / 200)$ (где $1000 * t / 200$ фазовый сдвиг в момент времени $t = 0$), с собственной частотой колебания $\omega = 1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — рис 7.

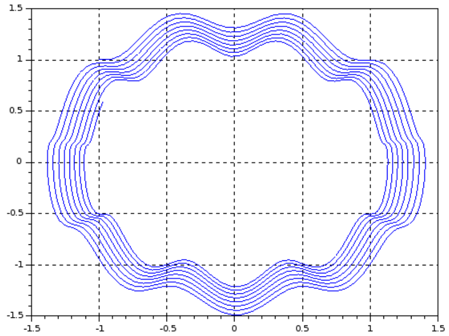
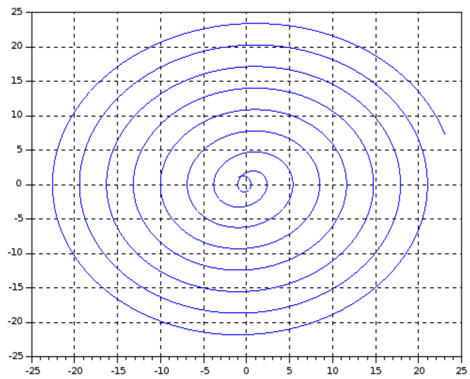


рис 7.

Теперь для большей наглядности построим фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием $2\gamma=g=0$, с воздействием внешней силы заданной следующим образом $F(t)=\sin(1*t)$, с собственной частотой колебания $\omega=1$ по горизонтальной оси значения x, по вертикальной оси значения значения x' (это скорость) — рис 8, а также расширим область решения с 50 до 500 — рис 9.



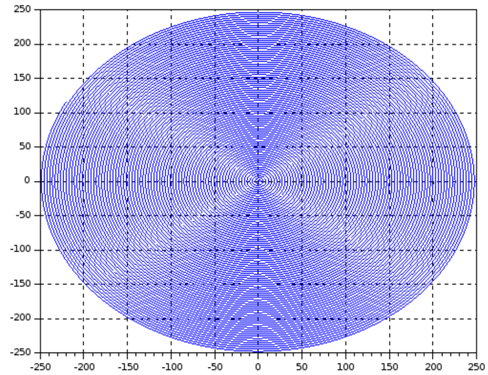
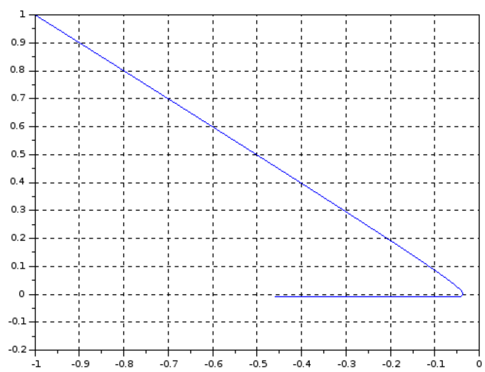


рис 8. рис 9.

Очень наглядно возможно продемонстрировать воздействие внешней силы получится при критическом значении затухания $2\gamma=g=2=\omega_0*2$, $F(t)=\sin(0.01*t)$ и $\omega=1$, $\omega=5$ рис 10 и 11 соответственно.



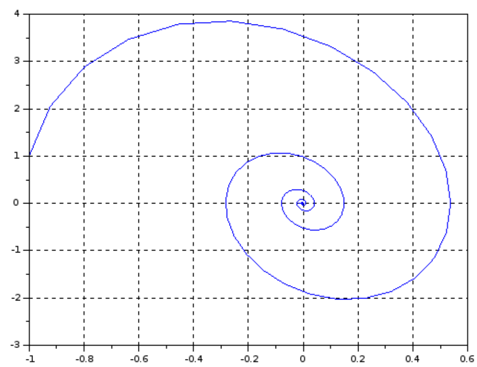


Рис 10 рис 11

Анализ результатов

На рис 1. изображена фазовая траектория гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 1$. По виду этой траектории можно сказать, что система совершает периодические колебания с периодом 2π. Колебания без затухания, на систему не действует внешняя сила. При максимальном отклонении от точки равновесия (0,0) скорость равна 0, а максимальное значение скорости достигается в точке равновесия. Амплитуда колебаний 1.41.

На рис 1.2. изображена фазовая траектория гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы, с собственной частотой колебания $\omega = 2$. В этом случае характер движения такой же как и в предыдущем, однако по графику видно, что амплитуда и период колебаний уменьшается. Следовательно, можно сделать вывод, что чем больше собственная частота колебаний, тем меньше ее амплитуда. Легко можно объяснить, почему уменьшается период: он связан соотношением взаимной обратности с частотой $T = \frac{2\pi}{\omega}$. (с этим согласен)

Для второго случая мы разобрали 3 различных случая затуханий:

1) $\gamma < \omega_0$ - случай для малого трения рис 2. рис 3. рис 4. для $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 5$ соответственно, при таком трении маятник дойдет быстро до положения равновесия, но при этом пройдет его по инерции, и продолжит совершать колебания, но уже по «искаженной» траектории, увеличивая частоту колебания мы увеличим его амплитуду (рост от 0.7 до 0.9) и увеличим время вращения маятника, благодаря инерционному разгону маятника.

2) $\gamma = \omega_0$ - случай критического затухания рис 5. В данном случае осциллятор быстрее всего движется в положение равновесия, совершать не колебательное движение.

3) $\gamma > \omega_0$ - сильное трение рис 6. рис 6.1, в данном случае осциллятор будет стремиться к положению равновесия экспоненциально, не чем больше будет коэффициент трения тем медленнее это будет происходить. На рис 6. ($2\gamma = g = 10$) и на рисунке 6.1. ($2\gamma = g = 5$) мы можем наглядно проследить этот процесс, во втором случае степень отклонения меньше на ~0.1 нежели на первом => скорость возвращения маятника в положение равновесия будет выше.

Для 3го случая особенно примечателен случай при критическом значении затухания $2\gamma = g = 2 = \omega_0 * 2$ и внешней силе $F(t) = \sin(0.01 * t)$, в данном случае без воздействия внешней силы осциллятор двигался бы, как можно быстрее, к положению равновесия по под воздействием внешней силы его положение отклоняется от заданного курса, при $\omega = 1$ мы видим небольшое отклонение от положенной траектории движения, но при увеличении частоты до $\omega = 5$ маятник возвращается к траектории движения как при малом трении (отчасти потому, что внешняя сила задана синусом). Для данного случая рис 10. и рис 11.

По рис. 7 сложно делать какие либо выводы, т.к. он слишком сложен и был выбран для демонстрации действия внешней силы.

На рис8. И рис 9. изображен случай с затуханием $2\gamma = g = 0$ и воздействием внешней силы $F(t) = \sin(1 * t)$ с собственной частотой колебания $\omega = 1$. Тут осциллятор должен был бы описывать бесконечные круговые траектории (так как отсутствует затухание), но под действием внешней силы траектория движения будет постоянно меняться под воздействием внешней силы, осциллятор будет доходить до положения равновесия и заново набирать амплитуду. Увеличив область решения до 500 мы наглядно в этом убедились.

По результатам выполнения данной лабораторной работы я наглядно изучил модели гармонических колебаний, математического маятника, изучил различный варианты

поведения данных моделей, а также построил из в среде математического моделирования Scilab.
(В конце я не стал переписывать и разбирать очевидные вещи, но если это необходимо могу исправиться)=