Динамическое программирование. Продолжение

Дискретная задача о рюкзаке

Есть набор вещей $w_1, w_2, ..., w_n$ ценностью $c_1, c_2, ..., c_n$ соответственно. Найти набор с наибольшей стоимостью, который помещается в рюкзак размера W.
Можно решить наивно со сложностью $O(n^{2n})$ с помощью полного перебора. Сопоставляем каждому предмету 0 и перебираем различные номера (0 – не берём; 1 – берём) и берём самый ценный, который помещается.
Приведём задачу к рекурсивному виду для получения лучшей оценки. Найдём оптимальный набор для 1 предмета, 2 предметов, 3 предметов и т.д. Составим таблицу:

Кол-во объектов \ Вес	$\varnothing$	1	2	3	...	w
$\varnothing$	0	0	0	0	0	0
1 предмет	0					
2 предмета	0					
3 предмета	0					
...	0					
N предмет	0					

$$\begin{cases} C_{i,j} = max(C_i + C_{(i-1),(j-w)}, C_{(i-1),j}) \\ C_{i,j} = 0, i \leq 0 \\ C_{i,j} = 0, j \leq 0 \end{cases}$$

Докажем от противного эффективность алгоритма. Пусть у нас есть лучший набор предметов, отличный от нашего. Существует хотя бы один предмет, которого нет в нашем наборе. Рассмотрим строку в таблице с этим предметом. Тогда этот предмет не был взят как оптимальный на раннем этапе составления набора. Значит, можно было сделать оптимальное составление еще оптимальнее. Противоречие.
Восстановление набора происходит на основе клетки, из которой мы пришли.
Сложность этого алгоритма меньше: $O(n * w)$

Расстояние Левенштейна

Пусть есть пара строк. Редакционное расстояние – минимальное количество операций добавления/удаления/замены элемента для получения одной строки из другой.
Например:

1) ABC и BCD – 2 операции (Удалить A и добавить D)
2) ABCBC и CCBA.
Рассмотрим операции для 1 элемента, 2 элементов и т.д.

Подпослед. 1 / Подпослед. 2	∅	A	AB	ABC	ABCB	ABCBC
∅	0	1	2	3	4	5
C	1	1	1	2	2	3
CC	2	2	2	2	3	3
CCB	3	3	2	3	2	3
CCBA	4	3	3	3	3	3

$\rho(S_1, S_2) = D(M, N)$

$$D_{(i,j)} = \begin{cases} 0, i = j = 0; \\ i, j = 0; \\ j, i = 0; \\ min(D(i, j-1) + 1, D(i-1, j) + 1, D(i-1, j-1) + 1 * (S_1[i] != S_2[j])) \end{cases}$$

- CCBA $(1 : +A)$
- ACCBA $(2 : B \longleftrightarrow C)$
- ABCBA $(3 : X)$
- ABCBA $(4 : X)$
- ABCBA $(5 : A \longleftrightarrow C)$
- ABCBC

Поиск наибольшей общей последовательности

Рассматриваем все возможные подстроки и строим таблицу таким же образом:
X: ABCBC
Y: CCBA

Подпослед. 1 / Подпослед. 2	∅	A	AB	ABC	ABCB	ABCBC
∅	$0 \downarrow$	$0 \downarrow \searrow$	$0 \downarrow$	$0 \downarrow$	$0 \downarrow$	$0 \downarrow$
C	$0 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$0 \rightarrow$	$1 \rightarrow$	$1 \rightarrow$	1
CC	0	0	0	1	1	2
CCB	0	0	1	1	2	2
CCBA	0	1	1	1	2	2

$$D_{(i,j)} = \begin{cases} 0, i = j = 0; \\ i, j = 0; \\ j, i = 0; \\ max(D(i, j-1) + 1, D(i-1, j) + 1, D(i-1, j-1) + 1 * (S_1[i] == S_2[j])) \end{cases}$$