Жадный алгоритм

Жадный алгоритм – алгоритм, заключающийся в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным.

Задача (Алгоритм Краскела): между поселениями нужно проложить дороги так чтобы из любого поселения можно было попасть в любое, при этом цена постройки должно быть минимальным.
Упорядочим все дороги по цене. Прокладываем поочередно самые дешевые дороги. Если город ещё не соединён с другим, то дорога строится.

Задача: есть n задач с известным дедлайном и с известным штрафом за невыполнение каждой задачи. Решение задач однопоточное. Какие нужно выполнять задачи, чтобы получить минимальный штраф?
Отсортируем задачи по дедлайну.
Для решения используем матроид.

Матроид

Пусть есть какое-то множество X. В нём есть подмножество $I \subset 2^X$ (множество всех подмножеств). Выполняются 3 условия:

1. $\varnothing \in I$
2. $A \in I, B \subset A \Rightarrow B \in I$
3. $$\begin{cases} A, B \in I \\ |A| > |B| \end{cases} \Rightarrow \exists x \in A \setminus B, B \cup \{x\} \in I$$

X – носитель матроида. I – система независимых множеств. В задаче с дорогами дороги – носители матроида. Кольцевые дороги уже не входят в матроид.

Взвешенный матроид

Если у нас есть независимая функция, определенная на системе независимых множеств, то значение этой функции называется весами, а матроид – взвешенным матроидом.

$$\begin{cases} A, B \in I \\ A \cap B = \varnothing \end{cases} \Rightarrow \omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$$

Теорема Радо - Эдмондса

На носителе матроида $M = (X, I)$ задана весовая функкция $\omega : X \to \mathbb{R}$
Пусть $A \in I$ – множество миниального веса среди всех множеств мощности k. Возьмём $x \in X : A \cup x \notin A, \omega(x)$ - минимальна.
Тогда $A \cup x$ – множество минимального веса из множеств мощности k+1, входящее в I.

Доказательство. Пусть $B \in I$ – множество минимального веса среди всех множеств мощности k+1.

$$\exists y \in B \setminus A : A \cup y \in I$$

$$\omega(A \cup \{y\}) = \omega(A) + \omega(y) \Rightarrow \omega(A) \geq \omega(B) - \omega(y)$$

$$\omega(B \cup \{y\}) = \omega(B) - \omega(y) \geq \omega(A)$$

Значит $\omega(A) = \omega(B) - \omega(y)$.

$$\omega(B) \leq \omega(A) + \omega(x) \leq \omega(A) + \omega(y) = \omega(B) \Rightarrow \omega(A) + \omega(x) = \omega(B)$$

□

База матроида – максимальное подключение элементов множество, входящих в матроид. Иначе говоря, множество максимальной мощности, входящее в матроид.

1. сортируем X по весу
2. полагаем множество B пустым
3. for $i = 1$ to $n - 1$
   if $B \cup X[i] \in I$
   $B = B \cup X[i]$

Алгоритм работает за $O(n * log(n) + mn)$. На сортировку элементов из X по возрастанию весов уходит $O(n * log(n))$. После чего, построение базы выполняется $O(n)$ шагов цикла, каждый из которых работает $O(m)$ времени. Однако, если считать, что проверка множества на независимость происходит за $O(1)$, асимптотика алгоритма будет $O(n * log(n))$