## Задание 1

Вычислим пределы функций, используя свойства пределов:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(log_2(n))^3} = +\infty \Rightarrow \sqrt{n} = O((log_2(n))^3)$ – неверно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^{log_2(n)}} = 0 \Rightarrow \sqrt{n} = \Omega(5^{log_2(n)})$ – неверно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$ (см. задание 3) $\Rightarrow n! = \Theta(2^n)$ – верно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10*log_2(n)}{(log_2(n))^2} = 0 \Rightarrow 10 * log_2(n) = \Theta((log_2(n))^2)$ – неверно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n*log_2(n)}{n} = +\infty \Rightarrow n * log_2(n) = \Theta(n)$ – верно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{log_3(2n)}{log_2(3n)} = log_3(2) \Rightarrow log_3(2n) = \Theta(log_2(3n))$ – верно.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = 0.5 \Rightarrow 2^n = O(2^(n+1))$ – верно.

## Задание 2

Для начала сравним рост нескольких функций между собой, основываясь на некоторых доказанных в школьном курсе замечаниях. Известно, что показательная функция $y = n^k$ растёт быстрее $y = n^m$ при $k > m > 0$. Также воспользуемся фактом, что $y = log_a(n)$ растёт медленнее $y = n^t$ при $a > 1$ и $t > 0$. Показательная функция вида $y = a^n$ при $a > 1$ растет быстрее всех других функций в списке, поэтому сразу поставим её на первое место. Заметим, что все функции монотонно растут при $n \to +\infty$. Из этих соображений можно первично сравнить некоторые функции:

$$4^n > n^3 > n^{0.5} > n^{0.3}$$
$$n * (log_2(n))^3 > n * log_2(n) > log_5(n).$$

Функции $n*(log_2(n))^3$ и $n*log_2(n)$ точно растут быстрее $n^{0.5}$ (в силу свойств показательной функции). Сравним $n^3$ и $n * (log_2(n))^3$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n*(log_2(n))^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2*ln(2)}{3(log_2(n))^2} = +\infty.$$

Значит $n^3 > n * (log_2(n))^3$. Воспользуемся фактом, что логарифмическая функция самая медленнорастущая функция среди всех представленных, поэтому в итоге получаем:

$$4^n > n^3 > n * (log_2(n))^3 > n * log_2(n) > n^{0.5} > n^{0.3} > log_5(n).$$

## Задание 3

Воспользуемся замечаниями из задания 2 и составим первичное сравнение функций:

$$\begin{gathered}2^{2^n} > 2^{3n} > 4^n > 2^n,\\ n^{\sqrt{n}} > n^2 > \sqrt{n},\\ n^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > 3^{log_2(n)} > log_2(n!) > \sqrt{log_4(n)},\\ (log_2(n))^{log_2(n)} > (log_2(n))^2 > log_3(n) > log_2(log_2(n)).\\ n! > \frac{n}{log_5(n)}\end{gathered}$$

Начинаем поочерёдно «сливать» ряды сравнений воедино. Сравним $n^{\sqrt{n}}$ и $2^n$, прологарифмировав эти функции:

$$\begin{gathered}\sqrt{n} * ln(n) \ ? \ n * ln(2)\\ ln(n) \ ? \ \sqrt{n} * ln(2)\end{gathered}$$

Из задания 2 известно, что функция $\sqrt{n}$ растёт быстрее ln(n). Значит $n^{\sqrt{n}} < 2^n$ и, следовательно:

$$2^{2^n} > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^2 > \sqrt{n}.$$

Таким же образом сравним $log_2(n!)$ и $(log_2(n))^2$:

$$ln(log_2(n!)) > 2 * ln(log_2(n))$$

Добавим ещё несколько членов в написанные выше сравнения, опираясь на задание 2:

$$\begin{gathered}2^{2^n} > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^2 > \sqrt{n} > log_3(n) > log_2(log_2(n)).\\ n^{log_2(n)} > (log_2(n))^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > 3^{log_2(n)} > log_2(n!) > (log_2(n))^2 >\\ \sqrt{log_4(n)},\end{gathered}$$

Сравниваем:

$$\begin{gathered}7^{log_2(n)} \ ? \ n^2 \ ? \ 3^{log_2(n)},\\ ln(7) * log_2(n) \ ? \ 2 * ln(n) \ ? \ ln(3) * log_2(n),\\ ln(7) * ln(n) \ ? \ ln(4) * ln(n) \ ? \ ln(3) * ln(n),\\ ln(7) > ln(4) > ln(3).\end{gathered}$$

Продолжаем добавлять функции в первый ряд:
$2^{2^n} > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^{log_2(n)} > (log_2(n))^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > n^2 > 3^{log_2(n)} > \sqrt{n} > log_3(n) > log_2(log_2(n))$.
Осталось вставить в ряд:

$$\begin{gathered}log_2(n!) > (log_2(n))^2 > \sqrt{log_4(n)}.\\ n! > \frac{n}{log_5(n)}\end{gathered}$$

Сделав замену $ln(n) = t$, преобразуем и сравниваем ещё два члена:

$$\sqrt{log_4(n)} \ ? \ log_2(log_2(n))$$
$$\sqrt{\frac{t}{ln(4)}} \ ? \ \frac{log_2(t}{ln(2))}$$

Первая функция больше (см. задание 2). $(log_2(n))^2$ тоже вставляем на основе задания 2 после $\sqrt{n}$ (извлекаем квадратный корень из обеих частей и получаем логарифмическую функцию и степенную)
$2^{2^n} > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^{log_2(n)} > (log_2(n))^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > n^2 > 3^{log_2(n)} > \sqrt{n} > (log_2(n))^2 > log_3(n) > \sqrt{log_4(n)} > log_2(log_2(n))$.
Осталось: $n! > log_2(n!) > \frac{n}{log_5(n)}$
Сравнение двух последних фунций с логарифмами появилось из Первой теоремы Больцано-Коши: при $n = 4$ и $n = 5$ получаем, что на этом промежутке есть точка пересечения двух монотонно растущих графиков.
$2^{2^n} > n! > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^{log_2(n)} > (log_2(n))^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > n^2 > 3^{log_2(n)} > log_2(n!) > \frac{n}{log_5(n)} > \sqrt{n} > (log_2(n))^2 > log_3(n) > \sqrt{log_4(n)} > log_2(log_2(n))$.
Факториал растет быстрее любой показательной функции, при этом логарифм медленнее той же показательной функции (см. задание 2). $\sqrt{n}$ медленнее $\frac{n}{log_5(n)}$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{n}{log_5(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{log_5(n)}{\sqrt{n}} = 0$.

Ответ:
$2^{2^n} > n! > 2^{3n} > 4^n > 2^n > n^{\sqrt{n}} > n^{log_2(n)} > (log_2(n))^{log_2(n)} > 7^{log_2(n)} > n^2 > 3^{log_2(n)} > log_2(n!) > \frac{n}{log_5(n)} > \sqrt{n} > (log_2(n))^2 > log_3(n) > \sqrt{log_4(n)} > log_2(log_2(n))$